МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Л.С. КЛЕНТАК, М.И. ГЕРАСЬКИН, А.С. КЛЕНТАК

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРЕДПРИЯТИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.05 Бизнес-информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2018

УДК 330.4(075)
ББК 65в6я7
К484

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. кафедры экономики Самарского университета Г. М. Г р и ш а н о в;
д-р техн. наук, проф. кафедры информационных систем и компьютерных технологий АНО ВО Самарского университета государственного управления «МИР» И. Н. Х а й м о в и ч

Клентак, Людмила Стефановна

К484 **Исследование моделей микроэкономических процессов предприятий на основе методов линейного программирования:** учеб. пособие / *Л.С. Клентак, М.И. Гераськин, А.С. Клентак;* под общ. ред. *Л.С. Клентак*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. – 100 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1298-9

В учебном пособии описывается ряд общих теоретических моделей микроэкономических систем, а также линейных моделей для решения конкретных задач в ходе принятия решений на уровне отдельного предприятия методами линейного программирования. Разработан практикум занятий по дисциплине.

Приведены примеры экономического содержания с анализом полученных результатов.

Работа подготовлена на кафедре математических методов в экономике для студентов, обучающихся на экономических специальностях.

УДК 330.4(075)
ББК 65в6я7

Учебное издание

Клентак Людмила Стефановна, Гераськин Михаил Иванович,
Клентак Анна Сергеевна

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРЕДПРИЯТИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор Н.С. К у п р и я н о в а
Компьютерная верстка Л.Р. Д м и т р и е н к о

Подписано в печать 23.11.2018 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,25.
Тираж 200 экз. (1 з-д 1-25). Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ISBN 978-5-7883-1298-9
© Самарский университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические методы являются составной частью методов любого раздела современной экономической науки. Они служат как для решения практических задач, так и для теоретического моделирования социально-экономических процессов.

Математические исследования конкретных экономических проблем с целью установления экономических закономерностей впервые были проведены в конце XIX и начале XX столетия.

Основатель математической школы в политэкономии Л. Вальрас в 1874 г. создал общую статистическую экономико-математическую модель хозяйства в целом (достижение максимального эффекта при минимальных затратах), известную под названием системы общего экономического равновесия.

В 1897 г. известный экономист-математик Парето на основании статистического материала установил закономерность распределения доходов населения в капиталистических странах в форме гиперболы («кривая Парето»).

Российский экономист-математик В. К. Дмитриев в 1904 г. получил уравнения связи затрат и выпуска продукции, которые в дальнейшем (в 30-х годах) были использованы американским экономистом В. Леонтьевым для построения балансов «затраты – выпуск».

Указанные работы можно считать первыми построениями экономико-математических моделей. Они наметили два направления экономико-математического анализа статистических данных: применение математических методов для описания экономических явлений, а также для установления зависимости между ними.

В этой связи стоит отметить вышедшую в 1939 г. в издании Ленинградского государственного университета книгу известного математика – профессора того же университета Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», которую можно считать началом развития линейного программирования как науки, которая стала бурно развиваться в 50-е годы XX столетия. В эти годы были детально разработаны основные методы решения задач линейного программирования, созданы разные алгоритмы, издана обширная литература и началось практическое применение этих новых методов. Алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования (симплекс-метод) был разработан американским математиком Дж. Данцигом в 1947 году.

Следует также отметить, что с середины 50-х годов началось бурное развитие вычислительной техники. Применение математических методов в экономических исследованиях для выработки оптимальных решений невозможно без ее использования.

Как показывает отечественный и зарубежный опыт совершенствование системы управления, например поставками, основывается на идее согласованного взаимодействия между всеми элементами «поставщик-заказчик».

Таким образом, научный уровень экономических решений, которые отыскиваются посредством математических методов количественного анализа вариантов, значительно вырос.

Внедрение экономико-математических и инструментальных методов создаёт реальную научную базу совершенствования планирования.

Умение ставить и решать задачи моделирования реальных экономических ситуаций в микроэкономическом масштабе дает ключ к оптимальному планированию деятельности отдельного предприятия.

В основу нового подхода в обучении, отраженного в пособии, должна быть положена выработка потребностей и умений самостоятельного приобретения знаний, методов их пополнения и применения с использованием информационно-коммуникационных технологий и формирования портфолио, рекомендуемого образовательными стандартами ФГОС ВО.

В данном учебном пособии студентам предлагается исследование моделей микроэкономических процессов предприятий на основе методов линейного программирования. Как известно, обучение студентов напрямую связано с их воспитанием. Многоуровневое непрерывное образование следует воспринимать не только как средство для достижения целей государства и общества, а как цели самого человека, стремящегося к саморазвитию. К самостоятельной работе студентов при изучении дисциплины относятся: выполнение домашних заданий, выполнение аудиторных и расчетно-графических заданий, а также формирование портфолио как способ накопления индивидуальных образовательных, профессиональных, творческих и личных его достижений, а также возможность каждому студенту увидеть все, на что он способен, создать для него стимул роста, совершенствования и развития, что, в свою очередь, обусловливает успешное формирование мотивационно - ценностных профессиональных ориентаций будущего конкурентоспособного экономиста.

Необходимо также отметить, что для более глубокого освоения рассматриваемого в пособии материала рекомендуется обратиться к трудам, приведенным в списке литературы.

1. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Моделированием называется замена прямого исследования какой-то системы (оригинала) исследованием другой системы, называемой моделью этого оригинала.

По характеру получаемой модели можно выделить следующие основные виды моделирования: вербальное или словесное, графическое, натурное (макет-тренажер) и математическое.

Математические модели также делятся (по характеру зависимости от времени) на статические модели, характеристики которых не изменяются во времени, и динамические – с переменными во времени характеристиками.

Экономические процессы всегда развиваются во времени. Статической экономическая модель получается, если все ее характеристики отнести к одному и тому же моменту времени.

Динамические модели в экономике, в свою очередь, делятся на дискретные и непрерывные. В дискретных моделях изменение параметров связано только с отдельными моментами времени. В непрерывных моделях параметры изменяются во времени плавно.

Математическое описание системы-оригинала может быть получено разными способами. При теоретическом моделировании система описывается набором уравнений, которые получаются на базе основных законов. При эмпирическом моделировании формулы и функции, описывающие те или иные стороны поведения системы, получаются путем прямого измерения характеристик системы и обработки полученных экспериментальных данных (статистические обследования).

Важнейшими свойствами моделей являются их полнота, адекватность и точность.

Математические модели экономических систем строятся для достижения одной из двух целей:

1. Теоретические модели предназначаются для изучения общих закономерностей и свойств экономических систем.

2. Прикладные модели строятся для выработки конкретных рекомендаций при принятии практических хозяйственных решений и носят, как правило, оптимизационный характер.

По масштабу моделируемой системы модели делятся:

1) на макроэкономические – они описывают экономику государства или экономико-географического региона в целом, связывая между собой укрупненные показатели: валовой национальный продукт, национальный доход, инфляцию, уровень занятости и т.п. Обычно такие модели являются теоретическими;

2) микроэкономические – в них моделируемой системой является небольшая часть макроэкономической системы, чаще всего отдельное предприятие или его подразделение. Эти модели обычно носят оптимизационный характер и являются смешанными (полуэмпирическими).

При построении математических моделей в экономике надо учитывать, что большинство характеристик таких моделей нельзя определить точно. На их значения влияет "человеческий фактор", т.к. они являются результатом действий и решений множества отдельных людей, которые в одинаковой ситуации ведут себя по-разному. В результате характеристики экономических моделей оказываются случайными величинами, сгруппированными вокруг каких-то средних значений или осредненных зависимостей. Такие модели называются стохастическими (в отличие от детерминированных моделей, характеристики которых жестко заданы).

Таким образом, экономико-математические модели по своей природе являются в той или иной степени неопределенными. При теоретическом моделировании эта неопределенность остается за рамками исследования, т.к. целью моделирования является выявление как раз наиболее общих, осредненных закономерностей. При построении прикладных моделей неопределенность характеристик либо изначально закладывается в модель, либо ее необходимо держать "в уме" и понимать, что результат моделирования – это лишь наиболее вероятный вариант. Всегда есть вероятность того, что реальная ситуация будет развиваться не так, как предсказывает разработанная модель и надо принимать меры противодействия или страховки на этот случай.

Остановимся на общей схеме процесса создания математической модели более подробно.

На этапе постановки задачи определяется объект исследования и формулируется цель исследования, определяются характеристики системы, которые должна отображать построенная модель.

На этапе формализации проводится анализ объекта исследования, определяются его основные структурные и функциональные элементы. Выявляются наиболее существенные характеристики этих элементов, влияющие на достижение поставленной цели моделирования (определяется степень полноты модели). Характеристики системы разделяются на параметры модели (характеристики, которые должны быть известны для построения модели) и переменные модели, которые должны быть определены в результате моделирования. Для этого необходимо ввести символические обозначения используемых величин и произвести математическое описание взаимосвязей между элементами и характеристиками системы – строится собственно экономико-математическая модель.

На этапе решения в зависимости от цели моделирования и структуры получившейся математической модели выбирается способ проведения расчетов и осуществляется решение задачи.

Различают три вида решения математических моделей: точное или аналитическое, приближенное и численное.

Не следует путать точность решения с точностью модели в целом. Точность модели определяется в основном ее полнотой. Даже при наличии точного решения самих уравнений точность модели может оказаться недостаточной.

Таким образом, моделирование в экономике является сложной деятельностью, сопряженной с определенными рисками. Тем не менее, в ходе анализа различных экономических систем накоплен значительный опыт построения экономико-математических моделей, доказавших свою адекватность во многих ситуациях.

Рассмотрим оптимизационные модели, которые направлены на поиск наилучшего варианта решения из некоторого множества возможных решений. Критерием оптимальности в таких моделях служит достижение экстремального (максимального или минимального) значения некоторой величины, зависящей от переменных модели. Такая величина называется целевой функцией (ЦФ) задачи. Смысл целевой функции зависит от вида и смысла решаемой задачи. В экономических моделях в качестве целевой функции часто выступает прибыль, выручка от реализации выпущенной продукции и т.п. (они в итоге должны оказаться максимальными) или, например, величина производственных издержек (соответственно в оптимальном случае она должна быть минимальной).

Таким образом, решение задачи оптимизационного моделирования сводится к поиску экстремума некоторой функции.

Различают условные и безусловные задачи оптимизации.

В условных задачах на переменные модели накладываются какие-то ограничения, сужающие область определения целевой функции. Простейшим ограничением является естественное для многих практических задач требование неотрицательности переменных, носящих материальный характер (например, объемов выпуска какой-либо продукции и т.п.). Возможны и другие ограничения, связанные, например, с ограниченностью материальных или финансовых ресурсов. Такие ограничения всегда имеют вид каких-то равенств или неравенств.

В безусловных задачах оптимизации ограничения отсутствуют.

Из этого ясно, что экономические задачи оптимизации, как правило, являются условными.

Задачи оптимизации различаются также по числу переменных и математической структуре.

По числу переменных они могут быть как одномерные – целевая функция зависит от одной переменной, так и многомерные (двумерные, трехмерные и т.д.) – целевая функция зависит от нескольких переменных.

По математической структуре выделяют линейные (все математические выражения в задаче имеют вид линейных форм) и нелинейные задачи оптимизации.

Многомерные условные линейные задачи оптимизации называются задачами линейного программирования (ЗЛП). Такие задачи рассматриваются в пособии.

2. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С n ПЕРЕМЕННЫМИ

Среди множества оптимизационных задач существуют особые задачи, которые называют задачами линейного программирования. Задачам линейного программирования присущи следующие специфические черты.

Целый ряд задач из разных областей практики может быть сформулирован как задачи линейного программирования. Все они характеризуются некоторыми общими чертами. В каждой из них элементы решения представляют собой ряд неотрицательных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Требуется так выбрать значения этих переменных, чтобы:

1) выполнялись некоторые ограничения, имеющие вид линейных неравенств или неравенств относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2) некоторая линейная функция f тех же переменных обращалась в максимум (минимум).

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП) называют задачу, в которой функция цели, которую надо оптимизировать, представляет собой линейную комбинацию известных коэффициентов c_j $(i=\overline{1,n})$ и неизвестных переменных x_j ($j=\overline{1,n}$) вида:

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.1}$$

Функцию f называют также целевой функцией или критерием эффективности задачи. Неизвестные неотрицательные переменные x_j называются управляющими переменными.

Ограничения, накладываемые на область возможных решений, имеют вид линейных неравенств или равенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,,\ i=\overline{1,m_1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ge b_i\,, i=\overline{m_1+1,m_2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,, i=\overline{m_2+1,m}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где a_{ij}, b_i – известные величины, причем величины a_{ij}, x_j, b_i ($j=\overline{1,n}\,, i=\overline{1,m}$) положительные.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных x_j, удовлетворяющих ограничениям (2.2), при которых целевая функция (2.1) принимает минимальное или максимальное значение.

Допустимым решением задачи линейного программирования будем называть любую совокупность неотрицательных переменных, удовлетворяющих условиям (2.2):

$$x_j \geq 0 \,, (j = \overline{1,n}). \tag{2.3}$$

Условие (2.3) принято называть условиями неотрицательности.

Оптимальным решением $\vec{X}_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ будем называть то из допустимых решений, для которого линейная функция f (2.1) обращается в максимум (минимум).

В **классической постановке** математическая модель задачи ЛП представляет собой группу соотношений: целевую функцию (2.1), которую надо либо максимизировать, либо минимизировать, все ограничения, заданные неравенствами со знаком ≤ (2.4), при заданных условиях всех неотрицательных переменных (2.3).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1,m}\,. \tag{2.4}$$

Существуют *симметричные* формы записи ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1,m}\,, \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0 \,, (j = \overline{1,n})$$

или:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{1,m}, \tag{2.6}$$

$$x_j \geq 0 \,, (j = \overline{1,n}).$$

При **канонической форме** целевая функция стремится к максимуму, ограничения представлены уравнением (2.7) и заданы условия неотрицательности переменных (2.3).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}. \qquad (2.7)$$

Форма записи ЗЛП может быть **матричной:**

$$F = CX \to \max,\ AX = A_0,\ X \geq 0, \qquad (2.8)$$

где A – матрица коэффициентов системы уравнений; X – матрица-столбец переменных задачи; A_0 – матрица-столбец правых частей системы ограничений.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей условий, технологической матрицей или матрицей норм расхода в зависимости от того, какой смысл вложен в совокупность ее элементов.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор переменных, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор ограничений, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ – вектор весовых коэффициентов. CX – скалярное произведение векторов c и x.

Такое разнообразие форм записи условий задач затрудняет создание и использование общих методов и вычислительных алгоритмов их решения. Рассмотрим метод и алгоритм решения канонической задачи линейного программирования и способы сведения любой задачи линейного программирования к канонической форме.

Если по условиям задачи требуется отыскать минимум функции f:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \qquad (2.9)$$

то задачу можно свести к задаче максимизации функции f', связанной с функцией f следующим образом:

$$f' = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \qquad (2.10)$$

Максимум функции (2.10) и минимум функции (2.9) будут достигаться при одном и том же наборе переменных (x_1, x_2, …, x_n), удовлетворяющих условиям неотрицательности переменных и уравнениям, задающим область допустимых решений.

Если в ограничениях (2.2) задачи стоят неравенства вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m_1}, \tag{2.11}$$

то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: прибавить в левой части неравенств новые переменные x_j, ($j = \overline{n+1, n+m_1}$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdots \\ a_{m_1 1}x_1 + a_{m_1 2}x_2 + \cdots + a_{m_1 n}x_n + x_{n+m_1} = b_{m_1}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Если в ограничениях задачи стоят неравенства вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{2.13}$$

то преобразовать их в уравнения можно следующим образом: вычесть в левой части неравенств новые переменные x_j, $j = \overline{n + m_1 + 1, n + m_2}$:

$$\begin{cases} a_{(m_1+1)1}x_1 + a_{(m_1+1)2}x_2 + \cdots + a_{(m_1+1)n}x_n - x_{n+(m_1+1)} = b_{(m_1+1)}, \\ a_{(m_1+2)1}x_1 + a_{(m_1+2)2}x_2 + \cdots + a_{(m_1+2)n}x_n - x_{n+(m_1+2)} = b_{(m_1+2)}, \\ \cdots \\ a_{m_2 1}x_1 + a_{m_2 2}x_2 + \cdots + a_{m_2 n}x_n - x_{n+m_2} = b_{m_2}. \end{cases} \tag{2.14}$$

В результате подобных преобразований задача линейного программирования будет приведена к канонической форме записи.

Пример 1. Записать в канонической форме задачу

$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \le 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20. \end{cases}$$

Сначала заменим целевую функцию f на функцию f', полученную следующим образом:

$$f' = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

тогда

$$f' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Теперь перейдем к ограничениям. Первое ограничение имеет знак неравенства «≥», значит в его правой части надо вычесть переменную x_4:

$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10.$

Второе ограничение имеет знак неравенства «≤», значит в левой части данного неравенства надо прибавить переменную x_5:

$x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7.$

Третье ограничение имеет форму уравнения, значит оно в преобразованиях не нуждается.

Таким образом, получим каноническую форму записи:

$$f' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20. \end{cases}$$

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Построение математических моделей простейших экономических задач

1. <u>Цель занятия:</u>

Образовательная – познакомиться с разделом математики – математическое программирование и его составными частями: линейное, нелинейное и динамическое программирование – как главным инструментом оценки эффективности управленческих решений.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- этапы решения экстремальных экономических задач;
- построение математических моделей простейших прикладных задач;
- различные формы записи задач линейного программирования.

Пример 1. Записать в канонической форме исходную задачу линейного программирования.

Найти максимум функции: $F_{\max} = 4x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8. \end{cases} \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0$$

Решение:

В соответствии с условием задачи необходимо найти $F_{\max}$. Чтобы записать имеющуюся систему неравенств в форме основной задачи, следует перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. В результате для ограничений-равенств получаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9 \ge 0$$

функции $F_{\max} = 4x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$.

Пример 2. Записать в канонической форме задачу, состоящую в минимизации функции $F_{\min} = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$, при условиях :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases} \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0$$

В данной задаче требуется найти минимум целевой функции, а система ограничений содержит три неравенства. Следовательно вместо нахождения $F_{\min}$ найдем $F_{\max} = -F_{\min}$. Чтобы записать имеющуюся систему неравенств в форме основной задачи, следует перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. В результате для ограничений-равенств получаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases} \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,x_6,x_7 \geq 0$$

функции $F_{\max} = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$.

3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Дайте определение линейного программирования.
2. Что называется математической моделью экономической задачи и как она строится?
3. Какие виды ограничений могут содержаться в задаче линейного программирования?
4. Как перейти от неравенств к уравнениям?
5. Какие переменные называются дополнительными и какой коэффициент соответствует им в линейной функции задачи линейного программирования?

6. Записать в канонической форме задачи линейного программирования:

   6.1. Найти максимум функции: $F_{\max} = x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 4, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 7. \end{cases} \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

   6.2. Найти максимум функции: $F_{\max} = x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 7. \end{cases} \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

7. Построить математические модели следующих задач и в полученных системах ограничений от неравенств перейти к уравнениям.

7.1. Для изготовления трех видов изделий P_1, P_2 и P_3 используют четыре вида материалов: S_1, S_2, .S_3, S_4 . Запасы материалов, технологические нормы расходов материалов на каждое изделие и цена единицы изделия приведены в табл. 1.1. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий их максимальный выпуск по стоимости.

Таблица 1.1

Вид материалов	Запас материала, кг	Норма расхода материалов на одно изделие, кг		
		P_1	P_2	P_3
S_1	150 000	4	2	1
S_2	170 000	6	0	2
S_3	100 000	0	2	4
S_4	200 000	8	7	0
Цена одного изделия, руб.		100	1509	200

7.2. Чтобы при откорме животных весом 30-40 кг получить средний привес 300 - 400 г, по нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества в следующем количестве: кормовых единиц – не менее 1,6 кг; перевариваемого протеина – не менее 200 г., каротина – не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы и сенную муку. Содержание питательных веществ в одном килограмме этих кормов и стоимость 1 кг корма приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ, содержащихся в 1 кг корма		
	ячмень	бобы	сенная мука
Кормовые единицы, кг	1,2	1,4	0,8
Перевариваемый протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	5	5	100
Цена 1 кг корма, руб.	3	4	5

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**, если же не имеет ни одного решения, то **несовместной**.

Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение, и **неопределенной**, если более одного.

Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы.

Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Рассмотрим элементарные преобразования, лежащие в основе удобного вычислительного аппарата, используемого в математическом программировании:

1) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю;

2) перестановка уравнений местами;

3) удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Вспомним теорему Кронекера – Капелли (условие совместности системы).

Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A^*.$$

Очевидно, что система (4.1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A, а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \to A^*$, не изменяет ранга.

2) Если $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т. е. верна запись, приведенная выше.

Пример 1. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 6 = 5 \neq 0 \quad \mathrm{Rg}A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Rg}A^* = 3.$$

Система несовместна.

***Пример* 2.** Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5; \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \mathrm{Rg}A = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \qquad \mathrm{Rg}A^* = 2.$$

Система совместна. Решение: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Повторим метод Гаусса, который может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения;

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2. \end{cases}$$, откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Ответ: (1, 5, 2).

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: (*1, 2, 3, 4*).

Можно решать систему линейных уравнений, записав ее в жорданову таблицу и проделав возможное число шагов жордановых исключений, вычеркивая после каждого шага разрешающий столбец и строки, если они целиком состоят из нулевых элементов. Если в ходе исключений появится строка, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то данная система несовместна. В противном случае система совместна. При этом она имеет бесчисленное множество решений, если в верхней заглавной строке последней жордановой таблицы останется хотя бы одна переменная, и единственное решение, если все переменные окажутся в левом заглавном столбце.

Один шаг обыкновенного жорданова исключения с разрешающим элементом a_{ij} переводит жорданову таблицу в новую по схеме, состоящей из следующих четырех правил:

1) *разрешающий элемент заменяется обратной величиной;*

2) *остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;*

3) *остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент;*

4) *прочие элементы вычисляются по правилу воображаемого прямоугольника.*

Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий и преобразуемый элементы, назовем *главной,* а другую диагональ – *побочной.* Тогда *преобразованный элемент равен разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент.*

Сформулированного правила следует придерживаться независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

Если в разрешающей строке некоторый элемент равен 0, то элементы столбца, в котором расположен нулевой элемент разрешающей строки, остаются после шага жорданова исключения без изменения.

Аналогично: если в разрешающем столбце есть нулевой элемент, то соответствующая ему строка остается на данном шаге неизменной.

Пример 4. Найти решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде жордановой таблицы и сделаем два шага жордановых исключений (табл. 4.1 – 4.3). При этом за разрешающие можно принимать любые отличные от нуля элементы основной части таблицы (кроме элементов столбца свободных членов).

Таблица 4.1

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	-3	1	2	1	-6
0=	0	1	1	1	-4
0=	3	1	0	1	-2

Таблица 4.2

	1	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$
0=	-3	-1	-1	2
x_2=	0	1	1	-4
0=	3	1	1	-2

Таблица 4.3

	1	$-x_3$	$-x_4$
0=	0	0	0
x_2=	-3	0	-2
x_1=	3	1	-2

Из табл. 4.3 выпишем общее решение данной системы, где x_3 и x_4 могут принимать любые значения:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3, \\ x_2 = 2x_4 - 3. \end{cases}$$

Пример 5. Найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Записав систему в виде табл. 4.4 и подвергнув ее четырем шагам жордановых исключений (табл. 4.4 — 4.8), видим, что система имеет единственное решение: x_1 = 1, x_2 =2, x_3 = 3, x_4 = 4.

Таблица 4.4

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	5	1	4	0	-1
0=	3	2	-3	1	1
0=	3	1	0	2	-1
0=	3	0	2	-3	2

Таблица 4.5

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	2	4	-2	0
0=	-3	-3	-3	3
x_1=	3	0	2	-1
0=	3	2	-3	2

Таблица 4.6

	1	$-x_3$	$-x_4$
0=	-2	-6	4
x_2=	1	1	-1
x_1=	3	2	-1
0=	1	-5	4

Таблица 4.7

	1	$-x_3$
0=	-3	-1
x_2=	5/4	-1/4
x_1=	3/4	13/4
x_4=	1/4	-5/4

Таблица 4.8

	1
x_3=	3
x_2=	2
x_1=	1
x_4=	4

При решении задач математического программирования иногда приходится графически изображать множество решений системы неравенств. Напомним, что решением линейного неравенства с двумя неизвестными

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le a \tag{4.3}$$

является бесконечное множество пар значений этих неизвестных, удовлетворяющих неравенству (4.3).

В системе координат $x_1\ Ox_2$ неравенство (4.3) определяет полуплоскость с граничной прямой (рис. 4.1):

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a.$$

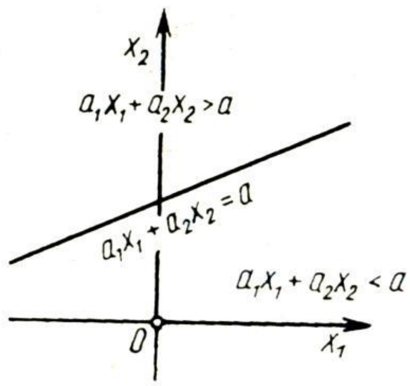

Рис. 4.1

Чтобы найти эту полуплоскость, нужно сначала построить граничную прямую, а затем взять какую-нибудь точку, лежащую по ту или другую сторону от граничной прямой, и определить, какому из неравенств

($a_1x_1 + a_2x_2 < a$ или $a_1x_1 + a_2x_2 > a$) удовлетворяют ее координаты. Если они удовлетворяют первому, то искомой будет полуплоскость, в которой находится взятая точка, если второму, то искомой будет полуплоскость, которой взятая точка не принадлежит.

Пример 6. Построить на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений, выделить область неотрицательных решений и найти координаты вершин этой области для системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \geq -10, \\ x_1 \leq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq -2. \end{cases}$$

Решение.

Для построения области допустимых решений строим соответствующие данным неравенствам граничные прямые (рис. 4.2):

L₁ (1.13): $2x_1 - 5x_2 = -10$, разделим на – 10:

$$\frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{2} = 1. \tag{4.3}$$

L₂ (1.14): $x_1 = 3$, разделим на 3:

$$\frac{x_1}{3} = 1. \tag{4.4}$$

L₃ (1.15): $3x_1 + 2x_2 = 12$, разделим на 12:

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} = 1. \tag{4.5}$$

L₄ (1.16): $x_1 + 2x_2 = -2$, разделим на - 2:

$$\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{-1} = 1. \tag{4.6}$$

При такой записи уравнений сразу определяются величины отрезков, отсекаемых прямыми на осях координат

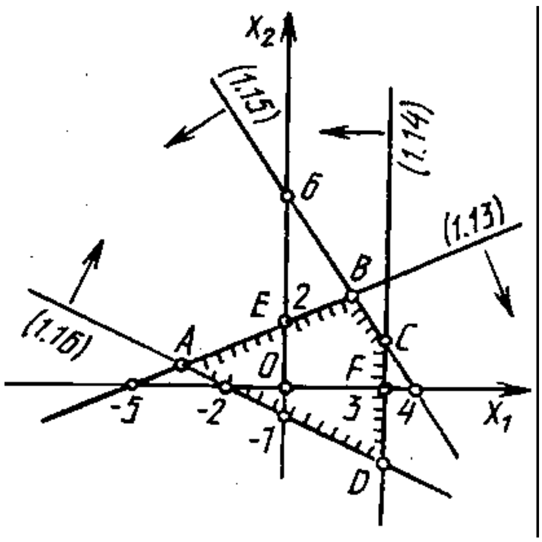

Рис. 4.2

Далее находим полуплоскости, в которых выполняются данные в условии неравенства. Так, неравенство $2x_1 - 5x_2 \geq -10$ определяет полуплоскость с граничной прямой (4.3), в которой расположена точка *O(0;* 0) (2·0 – 5·0 = 0> –10, т. е. это неравенство удовлетворяется координатами точки *O)*.

Область допустимых решений определяется как общая часть четырех полуплоскостей, соответствующих данным неравенствам. Она представляет собой многоугольник *ABCD*.

Область неотрицательных решений расположена в первой четверти и является общей частью шести полуплоскостей, определяемых четырьмя данными неравенствами и неравенствами $x_1 \geq 0$ (правая координатная полуплоскость) и $x_2 \geq 0$ (верхняя координатная полуплоскость), выражающими условия неотрицательности переменных. Это многоугольник *OEBCF*.

Чтобы найти координаты вершин области неотрицательных решений, надо решить совместно уравнения прямых, пересекающихся в этих вершинах. Так, координаты точки *B* определим в результате совместного решения уравнений (4.3) и (4.5).

Получим: x_1 = 40/19, x_2 = 54/19, т.е. *B*(40/19; 54/19).

Другие вершины имеют координаты: 0(0; 0), *E*(0;2), *C*(3;3/2), *F(3;0)*.

5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений

1. <u>Цель занятия:</u>

Образовательная – повторить понятия обыкновенных жордановых исключений, базисные решения систем линейных уравнений, методы решения систем линейных уравнений и неравенств, отработать метод Жордана-Гаусса. Показать полученные знания и умения по составлению экономико-математических моделей ЗЛП.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- жордановы исключения;
- эквивалентные преобразования систем линейных уравнений;
- различные способы построения прямых и полуплоскостей;
- решение систем методом Гаусса.

3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Что такое матрица? Как определяется ее размер?
2. В элементе $a_{i\ j}$ матрицы что определяют индексы?
3. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой? единичной? треугольной? диагональной?
4. Какие элементы образуют главную диагональ матрицы?
5. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
6. Что собой представляет определитель матрицы? Правила вычисления.
7. Какие преобразования называются элементарными по отношению к матрицам?
8. Опишите последовательность решения систем уравнений методом Гаусса.
9. Как формируется расширенная матрица систем уравнений? К какому виду она приводится в итоге преобразования по методу Гаусса?
10. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли: для общего вида систем уравнений; для однородных систем.
11. Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья каждого типа

задана матрицей $B=\begin{pmatrix}10 & 15\end{pmatrix}$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции первого вида, 200 единиц продукции второго вида и 150 единиц продукции третьего вида?

12. Вычислите матрицу $D = (AB)^T - C^2$, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

13. Вычислите определители: $A=\begin{pmatrix}4\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & -1 & -5\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

14. Определить, имеет ли матрица A обратную, и если имеет, то вычислить ее:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -8 & -5\\ -4 & 7 & -1\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

15. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 4 & -1 & 5\\ 2 & -6 & -1\end{pmatrix}$$

16. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8,\\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5,\\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10.\end{cases}$$

17. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2,\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3.\end{cases}$$

18. Решить матричные уравнения:

18.1. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$

18.2. $X\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

19. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -17, \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 = 28, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 1. \end{cases}$$

20. Построить на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений, выделить область неотрицательных решений и найти координаты вершин этой области для системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq -6, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq -3. \end{cases}$$

21. Задание контрольной работы.

Требуется составить оптимальный план выпуска продукции, дающий возможность предприятию получать максимальную прибыль.

Для выпуска четырех видов продукции $A_j, j = \overline{1,4}$ на предприятии используется три вида сырья, запасы которых определяются величинами $b_i, i = \overline{1,3}$. Нормы расхода i - го сырья на изготовление единицы j - той продукции a_{ij}, а прибыль от единицы выпускаемой продукции составляет c_j ден. ед. Исходные данные представляются в виде табл. 5.1.

Таблица 5.1

Запасы сырья	Вид продукции			
	A_1	A_2	A_3	A_4
b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
Прибыль	c_1	c_2	c_3	c_4

Ниже приведены варианты заданий с конкретными значениями коэффициентов (последние четыре строки) (данные первой строки будут использованы для решения транспортной задачи на с. 91).

1.

Запасы сырья	125	75	200	380
	A_1	A_2	A_3	A_4
220	11	5	4	13
300	8	6	14	7
260	2	8	9	10
Прибыль	10	18	16	12

2.

Запасы сырья	300	160	355	185
	A_1	A_2	A_3	A_4
350	4	9	21	8
400	15	11	7	5
250	4	8	6	12
Прибыль	8	5	9	6

3.

Запасы сырья	500	120	180	200
	A_1	A_2	A_3	A_4
490	7	8	12	6
310	8	10	4	15
200	15	7	6	11
Прибыль	12	8	15	10

4.

Запасы сырья	300	250	300	150
	A_1	A_2	A_3	A_4
390	5	8	12	9
300	7	10	21	6
310	14	7	25	15
Прибыль	12	15	9	11

5.

Запасы сырья	430	115	250	205
	A_1	A_2	A_3	A_4
420	10	8	13	5
480	9	21	6	12
100	8	9	7	11
Прибыль	7	5	10	8

6.

Запасы сырья	290	380	150	180
	A_1	A_2	A_3	A_4
410	11	7	9	10
190	5	7	8	21
400	12	10	12	6
Прибыль	11	16	20	10

7.

Запасы сырья	350	220	130	300
	A_1	A_2	A_3	A_4
300	7	11	9	14
400	16	20	8	9
300	12	7	21	8
Прибыль	6	8	12	9

8.

Запасы сырья	235	185	400	180
	A_1	A_2	A_3	A_4
350	12	20	7	9
415	8	11	4	21
235	5	7	2	6
Прибыль	18	15	12	14

9.

Запасы сырья	200	200	450	150
	A_1	A_2	A_3	A_4
200	21	14	11	4
450	7	8	13	10
350	10	23	18	9
Прибыль	21	18	15	1

10.

Запасы сырья	125	75	200	380
	A_1	A_2	A_3	A_4
220	7	11	8	16
300	25	23	11	22
260	13	9	5	15
Прибыль	9	15	22	18

11.

Запасы сырья	185	415	300	100
	A_1	A_2	A_3	A_4
325	15	13	11	10
200	5	12	6	7
475	8	9	11	8
Прибыль	20	12	10	18

12.

Запасы сырья	500	120	180	200
	A_1	A_2	A_3	A_4
490	9	13	20	11
310	23	5	9	18
200	18	9	12	13
Прибыль	11	7	9	14

13.

Запасы сырья	430	150	250	205
	A_1	A_2	A_3	A_4
420	21	20	7	6
480	13	14	5	8
100	9	10	12	15
Прибыль	12	8	16	10

14.

Запасы сырья	290	380	150	180
	A_1	A_2	A_3	A_4
410	5	8	10	21
190	6	4	8	15
400	19	11	7	9
Прибыль	7	15	12	17

15.

Запасы сырья	350	220	130	300
	A_1	A_2	A_3	A_4
300	14	9	13	9
400	9	12	8	11
300	18	7	15	7
Прибыль	11	18	5	12

16.

Запасы сырья	235	185	400	180
	A_1	A_2	A_3	A_4
350	5	21	8	9
415	10	5	14	7
235	7	22	13	8
Прибыль	14	9	16	10

17.

Запасы сырья	200	200	450	150
	A_1	A_2	A_3	A_4
200	5	22	7	3
450	15	9	11	14
350	8	21	6	5
Прибыль	7	17	14	10

18.

Запасы сырья	125	75	200	380
	A_1	A_2	A_3	A_4
220	12	10	5	8
300	7	21	6	20
260	9	12	13	11
Прибыль	15	21	9	18

19.

Запасы сырья	185	475	300	100
	A_1	A_2	A_3	A_4
325	8	9	10	6
200	17	15	22	13
475	21	7	18	11
Прибыль	11	7	19	15

20.

Запасы сырья	500	120	180	200
	A_1	A_2	A_3	A_4
490	4	25	10	5
310	9	7	8	16
200	13	11	7	4
Прибыль	5	11	19	15

21.

Запасы сырья	300	160	355	185
	A_1	A_2	A_3	A_4
350	7	15	20	9
400	16	9	8	12
250	4	21	5	11
Прибыль	17	7	16	9

22.

Запасы сырья	430	115	250	205
	A_1	A_2	A_3	A_4
420	14	19	11	8
480	8	9	6	11
100	10	7	22	13
Прибыль	10	15	19	11

23.

Запасы сырья	300	250	300	150
	A_1	A_2	A_3	A_4
390	7	5	12	6
300	14	9	16	10
310	8	22	9	7
Прибыль	19	7	12	14

24.

Запасы сырья	350	220	130	300
	A_1	A_2	A_3	A_4
300	10	15	9	8
400	7	12	17	13
300	9	5	4	16
Прибыль	12	10	5	11

6. ПРИМЕРЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К задачам линейного программирования относятся задачи об *оптимальном использовании ресурсов, задачи о выборе оптимальных технологий, задачи о получении наибольшей прибыли, транспортная задача* и другие.

Рассмотрим некоторые из них.

Задача использования ресурсов.

Для изготовления нескольких видов продукции $P_1, P_2, ..., P_n$ используют m видов ресурсов $S_1, S_2, ..., S_m$ – это могут быть различные материалы, электроэнергия, полуфабрикаты. Объём каждого из видов ресурсов ограничен и известен $b_1, b_2, ..., b_m$, $a_{i\,j}$ – количество единиц i - го сырья, идущего на изготовление единицы j - й продукции

Предприятие может обеспечить выпуск каждого вида продукта в количестве не более d_j единиц, где $j = \overline{1,n}$. При реализации единиц j продукции прибыль составляет c_j единиц. Необходимо составить план выпуска продукции, который обеспечивал бы получение максимальной прибыли при реализации, выпускаемой продукции.

Составим математическую модель задачи линейного программирования.

Пусть x_j, $j = \overline{1,n}$ – количество единиц j - й продукции, которое необходимо выпустить. Тогда целевая функция имеет вид:

$$Z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max .$$

Максимизируем её, составив ограничения:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \le b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \le b_2, \\ \quad .... \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \le b_m. \end{cases}$$

Решая экономическую задачу, вспомним об условиях неотрицательности $0 \le x_j \le d_j$, где $j = \overline{1,n}$.

Задача использования сырья при конкретных данных

Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья $S_1, S_2, .S_3$. Запасы сырья, количество единиц сырья затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли от реализации единицы продукции приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единиц продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		50	40

Пусть x_1 – количество единиц продукции P_1; x_2 – количество единиц продукции P_2. Тогда реализация x_1 – единиц продукции вида P_1 и x_2 – единиц продукции вида P_2 даёт соответственно $50x_1$ ден. ед., $40x_2$ ден. ед. прибыли. Суммарная прибыль составляет $Z=50x_1+40x_2$ (ден. ед.).

Составим систему ограничений, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, и учитывая также запасы сырья.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30. \end{cases}$$

Введём условие неотрицательности: если продукция P_1 не выпускается, то $x_1 = 0$, в противоположном случае $x_1 > 0$. Тоже самое получаем для продукции P_2, тогда имеем $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Замечание: условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому $x_1,\ x_2$ (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами.

Задача составления рациона

Рассмотрим частный пример *задачи составления рациона.*

При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 единиц вещества S_1 , 8 единиц вещества S_2 и не менее 12 единиц вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в одном килограмме каждого вида корма и стоимость каждого вида корма приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг. корма	
	Корм 1	Корм 2
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость 1 кг корма, ден. ед.	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

Составим математическую модель.

Пусть x_1 – количество единиц питательных веществ корма 1, а x_2 – количество единиц питательных веществ корма 2. Тогда содержание питательных веществ в одном килограмме вещества x_1 единиц корма 1, x_2 – единиц корма 2 даёт соответствие $4x_1$ ден. ед. и $6x_2$ ден. ед. стоимости. Суммарная стоимость составляет Z= $4x_1+6x_2$ (ден. ед.) → min.

Составим систему ограничений.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Введём условие неотрицательности: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

7. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Теорема 1. Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло.

Теорема 2. Линейная функция задачи линейного программирования достигает своего минимального значения в угловой точке многогранника решений. Если линейная функция принимает минимальное значение более чем в одной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Замечание. Если многогранник решений – неограниченная область, то не каждую точку области можно представить выпуклой линейной комбинацией угловых точек области. В этом случае задачу линейного программирования с многогранником решений, представляющим собой неограниченную область, можно привести к задаче с ограниченной областью, вводя в систему дополнительное ограничение $x_1 + x_2 + ... + x_n \le Q$, где Q – достаточно большое число. Введение этого ограничения равносильно отсечению гиперплоскостью $x_1 + x_2 + ... + x_n = Q$ (рис. 7.1) от многогранной неограниченной области ограниченного многогранника, для точек которого теорема 2 уже выполняется.

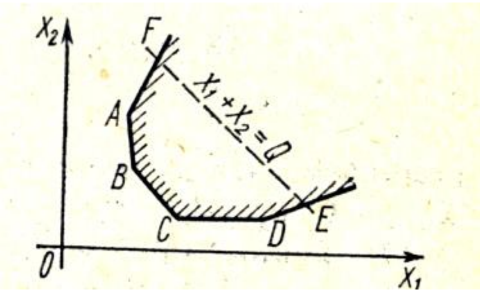

Рис. 7.1

Очевидно, что координаты угловых точек E и F, появившихся в результате введения нового ограничения, зависят от Q. Если в одной из них линейная функция принимает минимальное значение, то оно зависит от Q; изменяя Q, значение линейной функции можно сделать сколь угодно малым, а это означает, что линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Теорема 3. Если известно, что система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \le n)$ линейно независима и такова, что $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_k x_k = A_0$, где все $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ является угловой точкой многогранника решений.

Теорема 4. Если $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – угловая точка многогранника решений, то векторы в разложении $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = A_0$, $x_j \ge 0$, соответствующие положительным x_i, являются линейно независимыми.

Следствие 1. Так как векторы $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют размерность m, то угловая точка многогранника решений имеет не более чем m положительных компонент $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Следствие 2. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует $k \le m$ линейно независимых векторов системы $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Итак, если линейная функция задачи линейного программирования ограничена на многограннике решений, то: 1) существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимума; 2) каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений. Поэтому для решения задачи линейного программирования необходимо исследовать только угловые точки многогранника решений, т. е. только опорные планы.

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Алгоритм геометрического решения ЗЛП

1. Записать уравнения прямых, соответствующих ограничениям, и построить их на плоскости $x_1 0 x_2$.
2. Определить области, в которых выполняются ограничения задачи.
3. Определить область допустимых решений задачи как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям задачи.
4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции f. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Построить вектор-нормаль $\vec{n}=(c_1,c_2)$, его направление показывает направление возрастания целевой функции f, в противоположном направлении функция f убывает.

Способ 2. Построить две линии уровня функции f: $f=C_1$ и $f=C_2$ (C_1, C_2 – произвольные константы) и по их расположению на плоскости $x_1 0 x_2$ определить направление возрастания (убывания) функции.

5. Определить граничную точку или точки области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Для этого передвигаем нашу линию уровня $f = C$ в направлении вектора $\vec{n}$ (или в направлении возрастания целевой функции f) параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет принадлежать области допустимых решений.
6. Определить координаты найденной точки, решая систему уравнений, состоящую из уравнений прямых, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Задача с двумя переменными

Для объяснения ряда моментов в процессе решения нам будет удобно использовать экономическую интерпретацию коэффициентов и состояний этой задачи.

Пусть требуется найти максимальное значение функции: $F = 2x_1+3x_2$.

Задана система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2\le 10, \\ 2x_1+x_2\le 6, \\ x_1+x_2\le 3 \end{cases}$$

и $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ — условия неотрицательности.

Будем считать, что данная задача описывает кирпичное производство: x_1– количество кирпичей первого вида, x_2 – количество кирпичей второго вида, выпускаемые по плану. За единицу измерения неизвестных выберем одну тысячу штук кирпича. Первым ресурсом пусть будет глина, её запас 10 т, второй ресурс – песок, запас – 6 т, третий ресурс − обжиговая печь, мощность нашего предприятия оценивается в 3 единицы (одна единица равна 100 м^3 обжиговой печи).

Рассмотрим экономический смысл остальных коэффициентов задачи: на производство одной тысячи кирпичей первого вида идёт 2 т глины, 2 т песка и 100 м^3 – обжиговой печи; на производство одной тысячи кирпичей второго вида идёт 5 т глины, 1 т песка, 100 м^3 обжиговой печи. Коэффициенты целевой функции показывают прибыль от реализации единицы произведённого продукта. В задаче мы имеем прибыль в две тыс. денежных единиц (пусть будет 20 тыс. руб.) от реализации 1000 кирпичей первого вида, а от реализации 1000 кирпичей второго вида наша прибыль равна 30 тыс. руб. (за денежную единицу взяли 10 тыс. руб.).

Построим область допустимых решений задачи (рис. 8.1).

Рассмотрим уравнения прямых и воспользуемся для их построения формулой «Уравнение прямой в отрезках»: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

L_1: $2x_1+5x_2=10$. Разделим уравнение на 10. Получим: $\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{2}=1$.

L_2: $2x_1+x_2=6$. Разделим уравнение на 6. Получим: $\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{6}=1$.

L_3: $x_1+x_2=3$. Разделим уравнение на 3. Получим: $\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{3}=1$.

Решением данной системы неравенств является заштрихованная область ОДР (область допустимых решений) – четырёхугольник *OABC*.

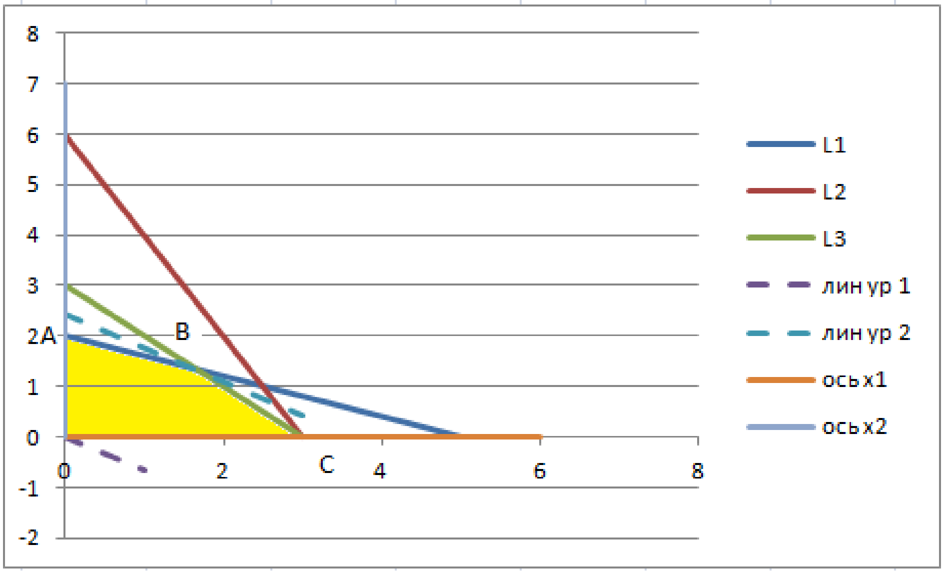

Рис. 8.1

Теперь надо выбрать из всех возможных допустимых планов.

Для этого построим прямую, соответствующую целевой функции, и назовём её ***линией уровня 1***: $2x_1+3x_2=0$. Осталось выяснить, в какой точке найденной области функция достигает своего максимального значения.

Чтобы найти оптимальный план, достаточно «переходить» с одной линии уровня на другую в направлении возрастания целевой функции. Точка B окажется в данном случае критической точкой, через неё проходит прямая из семейства рассматриваемых параллельных прямых; всякая точка любой прямой из того же семейства, проходящей «выше» точки B, доставляет целевой функции большее значение, однако всякая такая прямая не будет с ОДР иметь общих точек. А прямая, проходящая «ниже», в точке B пересекает область допустимых решений, но значение функции F будет на всех этих точках прямой меньше, чем значения F в точке B. Вследствие этого точка B и есть оптимальный план, приносящий нам наибольшую прибыль.

Определим координаты точки B, то есть план, доставляющий максимальную прибыль, оптимальный план. Поскольку эта точка есть пересечение первой и третьей прямых, то её координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых: $2x_1+5x_2=10$, $x_1+ x_2=3$ и находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{5}{3}.$$

Имеем $B\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Оптимальный план $X^0 = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Таким образом, вычисление значения максимальной прибыли:

$$F_{\max} = 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{22}{3},$$

то есть выпуская кирпичи первого и второго видов, мы получим максимальную прибыль.

Ответ: 7,3 ден. ед., или 73 тыс. руб.

Различные случаи решения (единственный оптимальный план, оптимальных планов бесконечное множество, оптимального плана нет)

В зависимости от вида ОДР и целевой функции F (рис. 8.2) задача может иметь бесконечное множество 1), 2), одно решение 3), 4), не иметь ни одного оптимального решения 5), 6).

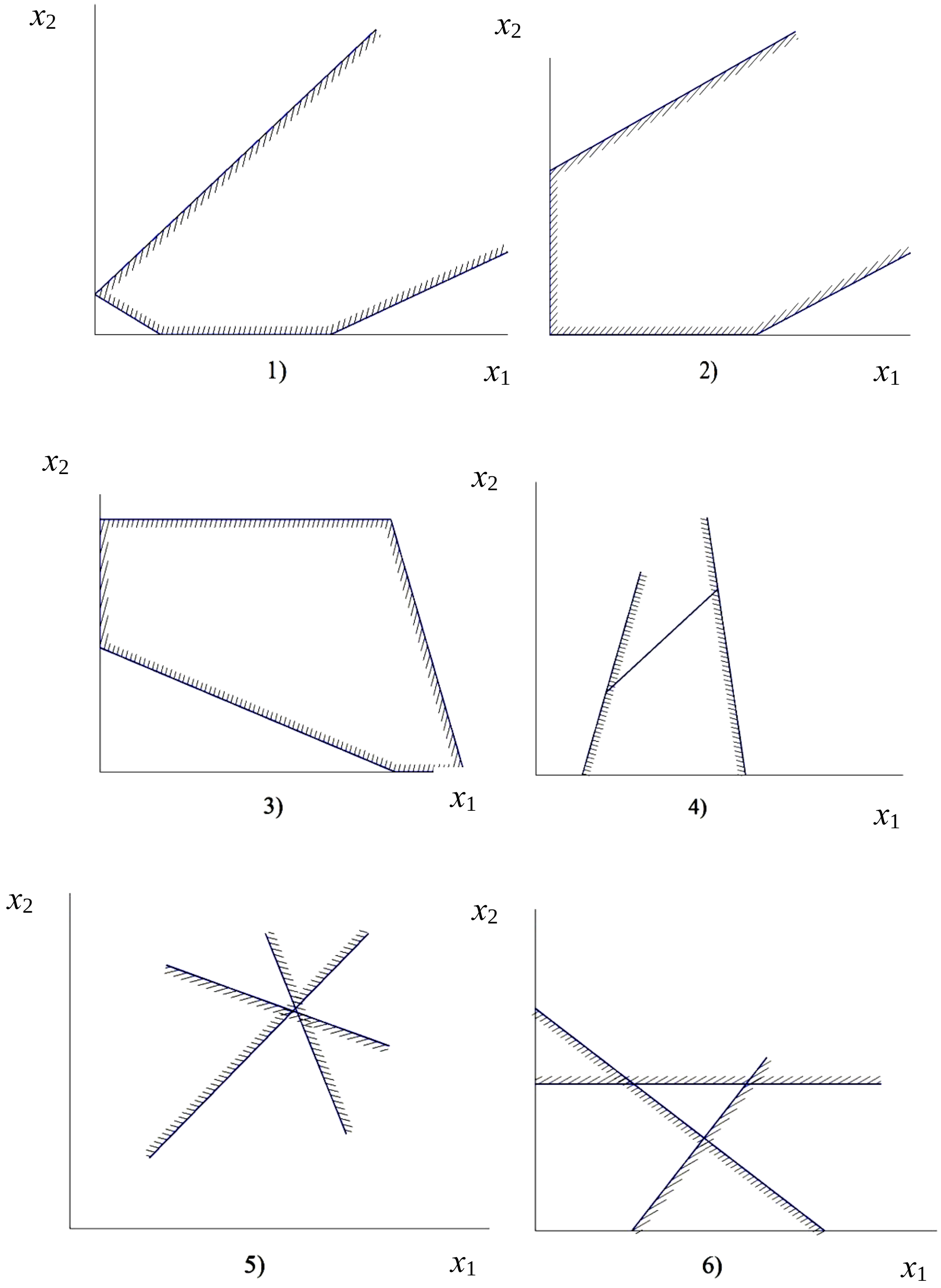

Рис. 8.2

Решение задачи.

Вернемся к примеру задачи составления рациона, предложенного в табл. 6.2. Была составлена математическая модель.

Целевая функция: $F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$.

Система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Заданы условия неотрицательности: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Решим задачу графическим методом. Для этого воспользуемся рассмотренным алгоритмом.

Построим ОДР.

L_1: $3x_1 + x_2 = 9$, разделим на 9:

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} = 1.$$

L_2: $x_1 + 2x_2 = 8$, разделим на 8:

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 1.$$

L_3: $x_1 + 6x_2 = 12$, разделим на 12:

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Заштрихованная неограниченная на рис. 8.3 область *ABCD* — есть ОДР задачи, в точке *B* достигается минимум целевой функции.

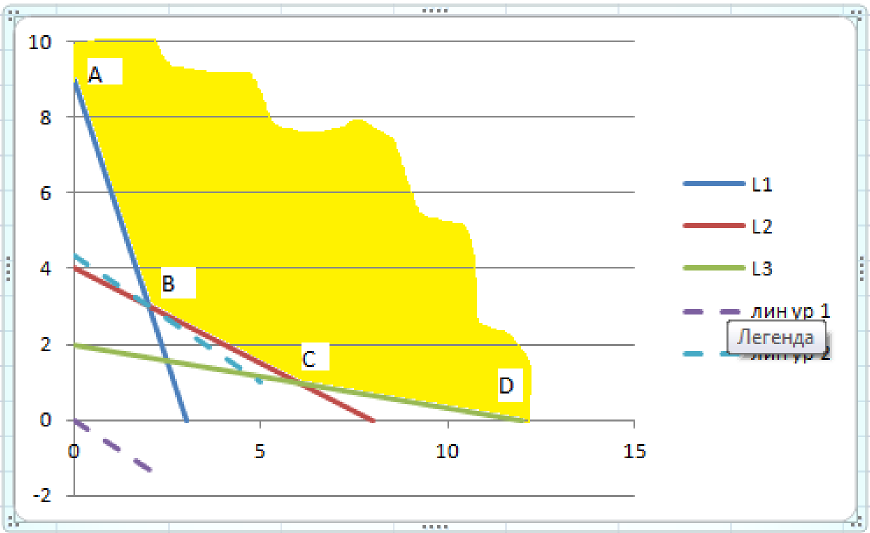

Рис. 8.3

Перемещаем линию уровня $4x_1 + 6x_2 = 0$ параллельно самой себе, она впервые коснётся многогранника решений и станет опорной по отношению к нему в условной точке *B*. Если прямую перемещать далее в направлении вектора *n*, то значение целевой функции на ОДР значит, в точке *B* функция принимает минимальное значение. Точка *B* лежит на пересечении прямых, для определения её координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$F_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$$

Таким образом, составлен дневной рацион нужной питательности: 2 ед. — количество питательных веществ корма 1, а 3 ед. — количество питательных веществ корма 2. Затраты на него составили 26 ден. ед.

Ответ: 26 ден. ед.

9. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

Графический метод решения задач линейного программирования

1. <u>Цель занятия:</u>

Образовательная – закрепить графический метод решения задач линейного программирования и выполнить проверку знаний, умений и навыков по данной теме.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- графический метод решения задач линейного программирования;
- последовательность решения задач линейного программирования графическим методом;
- различные случаи решения (единственный оптимальный план, оптимальных планов бесконечное множество, оптимального плана нет).

3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.
2. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?
3. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?
4. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
5. Как определить по рисунку, имеет задача линейного программирования решение или ее оптимум находится в $\pm\infty$?
6. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
7. Найти графическим методом оптимальный план задачи линейного программирования:

7.1. $F_{\min} = -2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ при

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24. \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

7.2. $F_{\max} = 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2$ при

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 28. \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

7.3. $F_{\min} = 2 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2$ при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5. \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

7.4. $F_{\min} = x_1 - 10 \cdot x_2$ при

$$\begin{cases} x_1 - 1/2x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5. \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

7.5. $F_{\min} = 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2$ при

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 24. \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

7.6. $F_{\min} = 2 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2$ при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5. \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

8. Собственные средства банка вместе с депозитами составляют 100 млн ден. ед. Не менее 35 млн ден. ед. этих средств должно быть размещено в кредитах, доходность которых составляет 15%. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или во всяком случае без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет 10%. Требуется сформировать оптимальный пакет активов, максимизирующий прибыль банка.

9. Задание контрольной работы

1. Дана математическая модель задачи ЛП: $F = \frac{2}{k}\, x_1 + k\, x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3\,x_2 \leq 6, \\ x_1 - k\,x_2 \geq 1, \\ k\,x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $k = 1 + \frac{N}{n+1}$;

$N -$ последняя цифра номера группы, в которой учится студент.

$n-$ порядковый номер студента в списке группы.

Найти решение задачи графическим методом.

2. Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.

2. Напишите в различных формах (векторной, матричной, с помощью сумм) математическую модель общей задачи линейного программирования.

3. Дайте определение плана, невырожденного и вырожденного опорного плана, оптимального плана.

4. Какое множество называется выпуклым? Приведите примеры выпуклых множеств.

5. Какая точка выпуклого множества называется угловой?

6. Какими свойствами обладает выпуклое множество?

7. Что называется многогранником решений?

8. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.

9. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?

10. Какой вид имеет угловая точка многогранника решений и какому плану она соответствует?

11. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?

10. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования. Из геометрического смысла задачи линейного программирования следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многогранника ограничений и значения целевой функции в них. Решить задачу линейного программирования можно методом перебора. Действительно, перебором всех вершин можно найти такую вершину, где функция f приобретает экстремальное значение, однако при этом возможны две трудности:

1) если число неизвестных n больше числа ограничений m ($n > m$), система ограничений линейно зависима, то для построения многоугольника решений необходимо выделение всех линейно независимых систем уравнений и их решение;

2) число вершин многогранника резко возрастает с увеличением числа неизвестных n ($n > m$), и такой метод перебора всех вершин может оказаться слишком трудоемким.

Симплексный метод обеспечивает более рациональное решение задачи, чем метод перебора. Суть его состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многогранника ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение линейной функции будет больше, чем в предыдущей. Остальные варианты не вычисляются. Тогда при конечном сравнительно малом числе шагов может быть найден оптимальный план. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение линейной функции. Поэтому *симплексный метод* называется также *методом последовательного улучшения плана.*

Решение задачи симплексным методом включает в себя два этапа. Первый состоит в нахождении одной произвольной вершины многогранника ограничений, координаты которого определяют начальный опорный план $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Второй этап состоит в последовательном упорядоченном переходе от одной вершины многогранника к другой, смежной данной. Так как прилегающих вершин много, то каждый раз выбирается такая вершина, при переходе к которой обеспечивается наибольшее возрастание целевой функции. На каждом шаге процесса улучшения плана производится проверка на оптимальность. Очевидно, что план будет оптимальным, если среди вершин, прилегающих к данной, нет такой, при переходе к которой происходит возрастание целевой функции.

Алгоритм симплексного метода

Шаг 1. Получение начального решения.

Выбираются m переменных, называемых *базисными* и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 – в остальные уравнения системы.

Остальные $n - m$ переменных называются свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные – равные правым частям соответствующих ограничений системы.

Пусть m базисных переменных – это переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (в противном случае переменные всегда можно перенумеровать). Тогда начальное решение X_0 имеет вид:

$$X_0 = \{x_1=b_1, x_2=b_2,..., x_m=b_m, x_{m+1}=0, \ldots , x_n=0\}. \tag{10.1}$$

Если все $b_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, то начальное решение является допустимым. Переходят к шагу 2. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

Шаг 2. Выражение функции f только через свободные переменные.

$$f=\sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j. \tag{10.2}$$

Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

***Пример* 1**. Максимизировать линейную целевую функцию:

$$Z_{\max} = -x_4 + x_5 \tag{10.3}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases} \tag{10.4}$$

и условиях неотрицательности:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0. \tag{10.5}$$

Решение:

Данная система уравнений − ограничений совместна, так как ранги матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

совпадают и равны 3. Следовательно, система уравнений совместна и три базисных переменных можно выразить через две свободных переменных. Выразим, например, $x_1,\ x_2,\ x_3$ через x_4 и x_5 , т.е. приведем систему к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \tag{10.6}$$

Линейную функцию $Z_{\max} = -x_4 + x_5$ выразим через свободные переменные x_4 и x_5 (в данном примере уже выражена). Теперь при $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ базисные переменные окажутся равными: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$. Таким образом, первое допустимое решение системы уравнений есть (1, 2, 3, 0, 0). При найденном допустимом решении линейная функция Z имеет значение 0, т.е. $Z_1 = 0$.

Теперь попытаемся увеличить значение Z_1: увеличение x_4 уменьшит Z_1, так как перед x_4 стоит отрицательный коэффициент , а увеличение x_5 дает увеличение и Z_1. Поэтому увеличиваем x_5, так чтобы $x_1,\ x_2,\ x_3$ не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Из второго уравнения системы (10.4) видим, что x_5 можно увеличивать до 2. Тогда значения переменных будут: $x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0, x_5 = 2$ или (5, 0, 1, 0, 2).

Значение линейной функции Z при втором допустимом решении равно $Z_2 = 2$. Величина на втором шаге увеличилась.

Далее примем за свободные переменные x_2 и x_4, т.е. именно те, которые в новом решении имеют нулевые значнения. С этой целью выразим из второго уравнения системы x_5 через x_2 и x_4. Получим, что

$$x_5 = 2 - x_2 + x_4.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2\,x_2 + 3\,x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4. \end{cases} \tag{10.7}$$

$$Z = 2 - x_2 + x_4.$$

Снова попытаемся увеличить значение Z : увеличение x_4 дает увеличение и Z , так как перед x_4 стоит положительный коэффициент. Поэтому увеличиваем x_4, так чтобы $x_1,\ x_3,\ x_5$ не стали отрицательными, оставив $x_2 = 0$. Из второго уравнения системы (10.7) видим, что для неотрицательности x_3 значение x_4 можно увеличивать до

$$1 - 5x_4 \geq 0,$$

$$1 \geq 5x_4,$$

$$x_4 \leq \frac{1}{5}.$$

Т.е. возьмем $x_4 = \frac{1}{5}$.

При этом условии новое решение будет: $x_1 = \frac{28}{5},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,$ $x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{12}{5}$ или $\left(\frac{28}{5},\ 0,\ 0,\ \ \frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$.

Значение линейной функции Z при третьем допустимом решении равно $Z_3 = \dfrac{11}{5}$. Величина на третьем шаге увеличилась.

Выразим теперь $x_1,\ x_3,\ x_5$ через свободные $x_2,\ x_3$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{5}{3}\,x_3 - \frac{7}{5}\ x_2, \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,x_3 + \frac{1}{5}\,x_2, \\ x_5 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}\ x_3 - \frac{3}{5}x_2 \end{cases} \tag{10.8}$$

$$Z = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}\ x_3 - \frac{4}{5}x_2.$$

Так как в последней линейной функции обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, то наибольшее значение Z достигается при $x_2 = 0,\ x_3 = 0$.

Это означает, что решение $\left(\frac{28}{5},\ 0,\ 0,\ \ \frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right)$ является оптимальным и

$$Z_{\max} = \frac{11}{5}.$$

Симплексная таблица

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий задачи линейного программирования, имеющей предпочтительный вид, к другому, на котором целевая функция принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую симплекс-таблицу.

Она имеет следующий вид: (n + 3) столбцов, где n – число переменных в предпочтительном виде, (m + 2) строк, где m – число ограничений равенств. Сверху записывают строку коэффициентов целевой функции, снизу находится индексная строка. В столбце БП записываются базисные переменные. Столбец $C_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец A_0 – столбец свободных членов системы ограничений. Основное поле таблицы занимают коэффициенты a_{ij} системы ограничений.

Максимизировать целевую функцию

$$Z_{\max} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + c_4 \cdot x_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}x_3 . + a_{24}x_4 = b_2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности переменных: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$.

Предположим, что $b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$, т.е. система уравнений приведена к опорному решению $(b_1,\ b_2,\ 0,\ 0)$. Значение целевой функции на этом решении равно

$$Z_{\max} = c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2.$$

Заполним симплекс-таблицу 10.1.

Таблица 10.1

№ итерации	БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
				c_1	c_2	c_3	c_4	
0	x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	b_i / a_{ij}
	x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
	$Z_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $Z_j - c_j$. Здесь расположены значение функции цели для начального опорного плана x_0, т.е. $Z(x_0) = \Delta_0 = C_Б \cdot A_0$ и оценки индексной строки $\Delta_j = C_Б \cdot A_j - c_j$.

По симплексной таблице четко видны результаты исследования, проведенные на предыдущей итерации:

1. *Критерий оптимальности.* Если индексная строка симплексной таблицы не содержит отрицательных элементов, то достигнутое опорное решение является оптимальным.

2. *Критерий неразрешимости..* Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце нет положительных элементов $a_{1j} < 0$ и $a_{2j} < 0$, то задача линейного программирования не имеет решения: $Z \to \infty$.

3. *Критерий улучшения решения.* Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце есть положительные элементы, то, совершив с помощью симплексных преобразований переход к новому базису (при соответствующем Δ_j разрешающем столбце), получим другое опорное решение, на котором целевая функция Z примет значение , не меньшее, чем на предыдущем опорном решении.

Примечание 1. Так как число опорных решений системы конечно, конечным будет и процесс решения задачи линейного программирования.

Примечание 2. Если в задаче линейного программирования необходимо найти минимум целевой функции Z, то вводится функция $F = -Z$. Вследствие равенства $Z + F = 0$, $Z_{\min} = -F_{\max}$, а поэтому , решая задачу максимизации F , мы одновременно решаем задачу минимизации Z.

***Пример* 2.** Максимизировать линейную целевую функцию: $Z_{\max} = 7x_1 + 5x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$.

Решение:

Запишем систему в наглядном виде:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 & & & & = 19, \\ 2x_1 + & x_2 + & & x_4 & & & = 13, \\ & 3x_2 + & & & x_5 & & = 15, \\ 3x_1 + & & & & & x_6 & = 18. \end{array}\right\}$$

Так как задача имеет предпочтительный вид, занесем ее условия в симплексную таблицу.

Заполним симплекс-таблицу 10.2.

Таблица 10.2

№ итер.	БП	$C_Б$	A₀	x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				7	**5**	0	0	0	0	
0	x_3	0	19	2	**3**	1	0	0	0	$\frac{19}{3}$
	x_4	0	13	2	**1**	0	1	0	0	$\frac{13}{1}$,
	$\boldsymbol{x_5}$	**0**	**15**	**0**	3	**0**	**0**	**1**	**0**	$\boldsymbol{\frac{15}{3}; min}$
	x_6	0	18	3	**0**	0	0	0	1	-
	$Z_j - c_j$		$Z_0 = 0$	– 7	**– 5**	0	0	0	0	

$$\Delta_0 = 0 \cdot 19 + 0 \cdot 13 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 18 = 0,$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - 7 = -7,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 - 5 = -5,$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

Аналогично $\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$.

Рассмотрим строку оценок. Здесь есть две отрицательные оценки: – 7 и – 5. Выбираем больший. То есть в качестве разрешающего столбца выбираем x_2. Вычислим симплексные отношения: $\frac{b_i}{a_{2j}}$. Получим: $\frac{19}{3}, \frac{13}{1}, \frac{15}{3}$. Если приходится делить на 0, ставим прочерк. Наименьшее из них есть $\frac{15}{3}$, значит разрешающим элементом является элемент 3, стоящий на пересечении строк для x_5 и столбца для x_2 (выделены в таблице).

Следовательно, элемент $\boldsymbol{a_{32} = 3}$ – разрешающий. Переменную $\boldsymbol{x_5}$ выведем из базиса, а $\boldsymbol{x_2}$ введем в базис. Разрешающую строку делим на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца заполняем нулями, кроме $\boldsymbol{a_{32}}'$=1, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу треугольника (прямоугольника).

Правило прямоугольника: чтобы получить элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$ новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент.

Правило треугольника: для получения любого элемента новой симплексной таблицы нужно из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент.

Таким образом новый базис будет состоять из $x_3,\ x_4,\ x_2,\ x_6$. Для перехода к новой таблице делим выделенную строку на 3 (чтобы получить на месте разрешающего элемента 1) и записываем ее на месте прежней строки в новой таблице 10.3.

Таблица 10.3

№ итер.	БП	$C_Б$	A_0	$\boldsymbol{x_1}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				7	5	0	0	0	0	
1	$\boldsymbol{x_3}$	**0**	**4**	**2**	**0**	**1**	**0**	**– 1**	**0**	**4/2=2; *min***
	x_4	0	8	**2**	0	0	1	– 1/3	0	8/2=4
	x_2	5	5	**0**	**1**	0	0	1/3	0	-
	x_6	0	18	**3**	0	0	0	0	1	18/3=6
	$Z_j - c_j$		$Z_1 = 2$	**– 7**	0	0	0	0	0	

Для получения нулей в столбце x_2 проводим преобразования. Так, например, умножим выделенную строку, деленную на 3 , на 3 и вычтем из первой строки, вычтем из второй строки третью.

Заполняя таблицы, необходимо после каждой итерации делать контрольные проверки, используя правило треугольника или правило прямоугольника. Для итерации 1, например, пересчитаем значение

$$\Delta_0 = Z_1 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 18 = 25.$$

Пересчитаем все оценки:

$$\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - 7 = -7,$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 18 \cdot 0 - 5 = 0,$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-\frac{1}{3}) + 5 \cdot 1/3 + 0 \cdot 0 - 0 = 5/3,$$

$$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Повторяем все рассуждения для табл. 10.3. Выбираем разрешающий столбец – столбец для x_1 . Разрешающая строка – это строка для x_3 **.** Разрешающий элемент находится на пересечении первой строки и первого столбца. Делим первую строку на 2 и заполняем табл. 10.4.

Таблица 10.4

№ итер.	БП	$C_Б$	A₀	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{x_5}$	x_6	Симплексные отношения
				7	5	0	0	**0**	0	
2	x_1	7	2	1	0	1/2	0	**– 1/2**	0	-
	$\boldsymbol{x_4}$	**0**	**4**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**2/3**	**0**	**4/(2/3) = 6; *min***
	x_2	5	5	0	1	0	0	**1/3**	0	5/(1/3) = 15
	x_6	0	12	0	0	– 3/2	0	**3/2**	1	12/(3/2) = 8
	$Z_j - c_j$		$Z_2 = 3$	0	0	7/2	0	**– 11/6**	0	

Разрешающий элемент табл.10.4 есть 2/3. Таким образом столбец для x_5 и строка для x_4. Переходим к табл. 10.5.

Таблица 10.5

№ итер.	БП	$C_Б$	A₀	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				7	5	0	0	0	0	
3	x_1	7	5	1	0	– 1/4	3/4	0	0	
	x_5	0	6	0	0	– 3/2	3/2	1	0	
	x_2	5	3	0	1	1/2	– 1/2	0	0	
	x_6	0	3	0	0	3/4	– 9/4	0	1	
	$Z_j - c_j$		$Z_3 = 5$	0	0	3/4	11/4	0	0	

Так как среди оценок нет отрицательных, то мы получили оптимальный план:

$x_1 = 5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 6,\ x_6 = 3$ или (5, 3, 0, 0, 6, 3).

Максимальное значение целевой функции $Z_{\max} = 50$.

11. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА (М-МЕТОД)

Пусть задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to \max(\min) \tag{11.1}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\, i=\overline{1,k},\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\, i=\overline{k+1,m}.\end{cases} \tag{11.2}$$

После приведения задачи к каноническому виду система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\; i=\overline{1,k},\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i,\; i=\overline{k+1,m}.\end{cases} \tag{11.3}$$

Говорят, что система ограничений имеет ***непредпочтительный вид***, так как перед свободными членами правой части и коэффициентами при фиктивных переменных в левой части стоят противоположные знаки.

Для решения задач линейного программирования с ограничениями, имеющими непредпочтительный вид, применяют метод искусственного базиса, или М-метод.

Смысл М-метода заключается в том, что в качестве исходного опорного решения задачи выбирается точка в области допустимых решений, заведомо удаленная за пределы данной области в определенную сторону. В сторону положительного направления вектора нормали (указывающего направление возрастания целевой функции) – при минимизации целевой функции и в сторону отрицательного направления вектора нормали – в случае максимизации целевой функции.

Прибавим к левым частям ограничений (11.3) положительные переменные $\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_{m-k}$.

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\; i=\overline{1,k}, & (11.4)\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}+\omega_{i-k}=b_i,\; i=\overline{k+1,m}. & (11.5)\end{cases}$$

Таким образом, переменные $\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_{m-k}$ представляют базис исходного опорного решения в виде единичной матрицы.

Переменные $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-k}$ добавляются к целевой функции с коэффициентами $\pm M$. Причем «$+M$» – при отыскании минимума, а «$–M$» – при отыскании максимума целевой функции.

$$f'=c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n + M(\omega_1+ \omega_2+\ldots+ \omega_{m-k}) \to \min, \qquad (11.6)$$

$$f'=c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n - M(\omega_1+ \omega_2+\ldots+ \omega_{m-k}) \to \max. \qquad (11.7)$$

Множитель M считается достаточно большой постоянной величиной, настолько большой, что если хотя бы одна из переменных $\omega_i \neq 0$ ($i=\overline{1,m-k}$), то в целевой функции можно пренебречь слагаемыми $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Отсюда следует, что приемлемое решение задачи имеет место только в случае, когда переменные $\omega_i = 0$ ($i=\overline{1,m-k}$).

Оптимальность можно получить, добиваясь следующих условий:

$$F= M(\omega_1+ \omega_2+\ldots+ \omega_{m-k}) \to \min \qquad (11.8)$$

или

$$F= - M(\omega_1+ \omega_2+\ldots+ \omega_{m-k}) \to \max. \qquad (11.9)$$

Далее полученная задача (11.8), (11.4), (11.5) или (11.9), (11.4), (11.5) решаются обычным симплекс-методом, описанным выше.

Пример 1. Найти решение задачи линейного программирования

$f=2x_1+x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду. Для этого вычтем из левой части неравенств фиктивные переменные x_3 и x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Полученные в результате преобразования ограничения имеют непредпочтительный вид. Воспользуемся М-методом. Прибавим к левым частям уравнений ограничений переменные ω_1 и ω_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \omega_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 12, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4}; \omega_i \ge 0, i = 1,2. \end{cases}$$

Целевая функция примет вид: $F=M(\omega_1+ \omega_2) \to \min$.

Приведем целевую функцию к каноническому виду:

$$F' = - M(\omega_1+ \omega_2) \to \max,$$

то есть

$$F' = -M\omega_1 - M\,\omega_2 \to \max.$$

Таким образом, приведенная к каноническому виду задача имеет следующий вид:

$$F' = -M\omega_1 - M\,\omega_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \omega_1 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + \omega_2 = 12, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}; \omega_i \geq 0, i = 1,2. \end{cases}$$

Решим полученную задачу симплекс-методом.

Составим симплекс-таблицу 11.1.

Таблица 11.1

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
$-M$	ω_2	1	3	0	-1	0	1	12
d		$-2M$	$-4M$	M	M	0	0	$F' = -18M$

Начальное решение $X_0=\{x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, \omega_1=6, \omega_2=12\}$ не является оптимальным, так как среди оценок в d-строке есть отрицательные, значит решение X_0 можно улучшить.

Определим переменную, которая войдет в список базисных. Для этого найдем максимальную по абсолютному значению d-оценку среди отрицательных:

$$\max\{|-2M|, |-4M|\} = 4M.$$

Значит, разрешающим будет второй столбец, а в базис войдет переменная x_2 (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
$-M$	ω_2	1	3	0	-1	0	1	12
d		$-2M$	$-4M$	M	M	0	0	$F' = -18M$

Теперь определим переменную, которая выйдет из базиса, для чего вычислим отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца и среди полученных отношений найдем минимальное:

$$\min\left\{\frac{6}{1},\frac{12}{3}\right\}=\min\{6,4\}=4.$$

Значит разрешающей строкой будет вторая, из базиса выйдет переменная ω_2 и разрешающий элемент a_{22}=3 (табл. 11.3).

Таблица 11.3

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
$-M$	ω_2	1	3	0	-1	0	1	12
d		$-2M$	$-4M$	M	M	0	0	$F' = -18M$

Перейдем к новой симплекс-таблице. Разрешающий элемент при пересчете должен стать единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце – стать нулями.

Для этого элементы разрешающей строки поделим на разрешающий элемент 3 (табл.11.4).

Таблица 11.4

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	1	1	-1	0	1	0	6
$-M$	ω_2	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	4
d		$-2M$	$-4M$	M	M	0	0	$F' = -18M$

Для того чтобы элемент, стоящий в разрешающем столбце в первой строке, стал нулем, умножим разрешающую строку на –1 и прибавим ее к первой строке (табл. 11.5).

Таблица 11.5

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	$2/3$	0	-1	$1/3$	1	$-1/3$	2
$-M$	ω_2	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	4
d		$-2M$	$-4M$	M	M	0	0	$F' = -18M$

Теперь в базисе вместо переменной ω_2 переменная x_2 и d-оценки надо пересчитать.

Таблица 11.6

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	$2/3$	0	-1	$1/3$	1	$-1/3$	2
0	x_2	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	4
d		$-2M/3$	0	M	$-M/3$	0	$M/3$	$F' = -2M$

Полученное решение $X_1=\{x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=0,\ x_4=0,\ \omega_1=2,\ \omega_2=0\}$ не является оптимальным, так как среди оценок в d-строке есть отрицательные, значит решение X_1 можно улучшить.

Определим переменную, которая войдет в список базисных. Для этого найдем максимальную по абсолютному значению d-оценку среди отрицательных:

$$\max\left\{\left|\frac{-2M}{3}\right|, \left|\frac{-M}{3}\right|\right\} = \frac{2M}{3}.$$

Значит, разрешающим будет первый столбец, а в базис войдет переменная x_1 (табл. 11.7).

Таблица 11.7

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	$2/3$	0	-1	$1/3$	1	$-1/3$	2
0	x_2	$1/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	4
d		$-2M/3$	0	M	$-M/3$	0	$4M/3$	$F' = -2M$

Теперь определим переменную, которая выйдет из базиса, для чего вычислим отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца и среди полученных отношений найдем минимальное:

$$\min\left\{\frac{2}{2/3}, \frac{4}{1/3}\right\} = \min\{3,\ 12\} = 3.$$

Значит разрешающей строкой будет первая, из базиса выйдет переменная ω_1 и разрешающий элемент $a_{11}=\frac{2}{3}$ (табл. 11.8).

Таблица 11.8

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	2
0	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
d		$-\frac{2M}{3}$	0	M	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

Перейдем к новой симплекс-таблице. Разрешающий элемент при пересчете должен стать единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце – стать нулями.

Для этого элементы разрешающей строки поделим на разрешающий элемент $\frac{2}{3}$ (табл. 11.9).

Таблица 11.9

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	1	0	– 1,5	0,5	1,5	– 0,5	3
0	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
d		$-\frac{2M}{3}$	0	M	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

Далее умножим элементы разрешающей строки на $-\frac{1}{3}$ и прибавим к соответствующим элементам второй строки, таким образом получим в разрешающем столбце во второй строке ноль (табл. 11.10).

Таблица 11.10

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
$-M$	ω_1	1	0	– 1,5	0,5	1,5	– 0,5	3
0	x_2	0	1	0,5	– 0,5	– 0,5	0,5	2
d		$-\frac{2M}{3}$	0	M	$-\frac{M}{3}$	0	$\frac{M}{3}$	$F' = -2M$

В списке базисных переменных вместо ω_1 теперь x_1 и d-оценки также изменятся.

Таблица 11.11

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	ω_1	ω_2	
0	x_1	1	0	– 1,5	0,5	1,5	– 0,5	3
0	x_2	0	1	0,5	– 0,5	– 0,5	0,5	2
d		0	0	0	0	M	M	$F' = 0$

Полученное решение $X_2=\{x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=0,\ x_4=0,\ \omega_1=0,\ \omega_2=0\}$ оптимально, так как среди оценок в d-строке нет отрицательных.

Подставим полученные значения переменных в изначальную целевую функцию f:

$$f=2\cdot 3+2=8.$$

Минимальное значение целевой функции $f=8$ достигается при $x_1=3$, $x_2=2$.

12. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Симплекс - метод для решения задач линейного программирования. М-метод решения ЗЛП

1. Цель занятия:

Образовательная – освоить симплекс-метод и М-метод решения задач линейного программирования.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- особенности применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования;
- последовательность применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования;
- использование симплекс-таблицы;
- использование М-метода.

3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования?
2. Перечислите условия оптимальности опорного плана.
3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план неоптимальный?
4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
5. Как определить вектор , подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?
7. Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?
8. Максимизировать линейную целевую функцию

$F_{\max} = x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 - 6\,x_4$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4\,x_3 - 5x_4 \le 1, \\ 5\,x_1 - 6\,x_2 + x_3 - x_4 \le 3, \\ 4\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 \le 2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0.$

9. Решить симплекс - методом и дать геометрическую иллюстрацию процесса решения.

$$F_{\max} = 8\,x_1 + 6\,x_2$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} 5\,x_1 - 2\,x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 13, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 5, \\ x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_4 - 2\,x_5 &= 18 \end{aligned}\right\}$$

и условиях неотрицательности: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$.

10. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \qquad j = \overline{1{,}5}$$

11. Решить методом искусственного базиса задачу:

На месторождениях А и Б может добываться сырье для двух заводов, расположенных в разных пунктах. Себестоимость добычи единицы сырья на месторождении А и доставки его на оба завода одинакова и равна 200 ден. ед., себестоимость добычи и доставки сырья месторождения Б составляет 300 ден. ед. для завода № 1 и 400 ден. ед. для завода № 2. При перевозке сырья с месторождения А к любому заводу и при перевозке с месторождения Б на завод № 2 приходится использовать участок железнодорожной сети с ограниченной пропускной способностью: количество перевозимого через этот участок сырья не должно превышать за планируемый период (например, за год) 150 ед. Для обеспечения добычи сырья на месторождении А требуется 2 тыс. ден. ед. капиталовложений на каждую единицу сырья; удельные капиталовложения на единицу сырья на месторождении Б составляют 3 тыс. ден. ед. Общая сумма капиталовложений в организацию добычи сырья не должна превышать 600 тыс. ден. ед. Завод № 1 изготавливает 400 ед. продукции за планируемый период, завод № 2 — 500. При этом из единицы сырья с месторождения А можно изготовить 3 ед. продукции как на заводе № 1, так и на заводе № 2. Качество сырья с месторождения Б несколько выше: из единицы этого сырья можно изготовить 4 ед. продукции на заводе № 1 или 5 ед. – на заводе № 2. Требуется определить, сколько сырья следует добывать на каждом месторождении для каждого из заводов, чтобы полностью обеспечить их потребности и свести при этом к минимуму сумму издержек на добычу и доставку сырья.

12. Решить симплекс-методом:

Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск: 90 ед. изделия I, 70 ед. изделия II и 60 ед. изделия III. Суточные ресурсы: 780 ед. производственного оборудования (станки, машины и т.п.), 850 ед. сырья (металл и т. п.) и 790 ед. электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в табл. 12.1. Стоимость изделия I – 8 ден. ед., изделия II – 7 ден. ед., изделия III – 6 ден. ед. Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

Таблица 12.1

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

13. Решить симплекс - методом:

Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл. 12.2. Количество машин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

Таблица 12.2

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/ км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

14. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в табл. 12.3. Производственные ресурсы: 6000 га пашни, 5000 чел. - дней труда механизаторов, 9000 чел. - дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Таблица 12.3

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	100
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	0,5	1	5
Затраты ручного труда, чел.-дней	0,5	0,5	20
Прибыль от реализации 1 ц продукции, ден. ед.	4	10	3

13. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной; первоначальная задача называется исходной, или прямой.

Понятие двойственности рассмотрим на примере задачи оптимального использования сырья. Допустим, предприятие располагает сырьем вида S_1, S_2, S_3, S_4 в количестве 19, 13, 15 и 18 соответственно. Это сырье используется для производства двух видов продукции P_1 и P_2, продаваемой по цене 7 и 5 ден. ед. соответственно. Для производства одной единицы продукции P_1 требуется 2 единицы сырья S_1, 2 ед. – S_2 и 3 ед. – S_4. Для производства одной единицы продукции P_2 требуется 3 единицы сырья S_1, 1 ед. – S_2 и 1 ед. – S_3. Составить такой план производства, при котором выручка от реализации произведенной продукции будет максимальной.

Пусть x_1 – количество производимой продукции P_1 и x_2 – количество производимой продукции P_2. Тогда функция цели имеет вид:

$$f=7x_1+5x_2 \to \max \tag{13.1}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 19, \\ 2x_1+x_2 \le 13, \\ x_2 \le 15, \\ 3x_1 \le 18 \end{cases} \tag{13.2}$$

и условиях неотрицательности:

$$x_j \ge 0; \qquad j=\overline{1,2.} \tag{13.3}$$

Предположим, что некоторая организация желает приобрести не продукцию, а сырье, которым располагает предприятие. По какой цене эта организация стала бы покупать указанное сырье? Обозначим соответственно через y_1, y_2, y_3, y_4, цену единицы сырья вида S_1, S_2, S_3, S_4.

Выручка от продажи всего сырья, расходуемого на единицу продукции вида P_1 по ценам y_i, составит $2y_1+2y_2+0y_3+3y_4$, для единицы продукции P_2 – $3y_1+y_2+y_3+0y_4$. Предприятие продаст сырье, если его стоимость будет превышать цену единицы продукции, получаемой с использованием этого сырья:

$$\begin{cases} 2y_1+2y_2+0y_3+3y_4 \ge 7, \\ 3y_1+1y_2+3y_3+0y_4 \ge 5. \end{cases} \tag{13.4}$$

С другой стороны, общая стоимость всех запасов приобретаемого сырья составит:

$$Z(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4. \tag{13.5}$$

Ясно, что организация стремится приобрести сырье по возможности дешевле, то есть минимизирует функцию (13.5). Таким образом, математическая запись задачи будет иметь вид:

$$G(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min \tag{13.6}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 3y_4 \geq 7, \\ 3y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 0y_4 \geq 5 \end{cases} \tag{13.7}$$

и при условиях неотрицательности:

$$y_i \geq 0; \qquad i = \overline{1{,}4}. \tag{13.8}$$

Таким образом, двойственная задача (13.6) - (13.8) соответствует следующей экономической проблеме: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли, полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов?

Две задачи линейного программирования (13.1) - (13.3), (13.6) - (13.8), связанные подобного рода особенностями, называются ***взаимно двойственными***, или ***сопряженными.***

Рассмотрим задачу линейного программирования следующего вида:

$$f_{\max} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + \cdots + c_n \cdot x_n \tag{13.9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \tag{13.10}$$

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, x_n \ \geq 0. \tag{13.11}$$

Двойственная к данной задаче будет иметь вид:

$$g_{\min} = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + b_3 \cdot y_3 + \cdots + b_m \cdot y_m \tag{13.12}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{\ m\,1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m\ 2}y_m \geq c_2, \\ \ldots \\ a_{1m}y_1 + a_{2\ m}y_2 + \ldots + a_{m\ n}y_m \ \geq c_n. \end{cases} \tag{13.13}$$

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, y_m \ \geq 0. \tag{13.14}$$

Задачи (13.9) – (13.11) и (13.12) – (13.14) называют парой взаимно двойственных задач линейного программирования. Переменные двойственной задачи y_i называют объективно обусловленными оценками, или двойственными оценками, или «ценами» ресурсов, или теневыми ценами.

Особенности пары двойственных задач

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид $\leq$, в задаче на минимум – вид $\geq$.
2. Матрица *A,* составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица A^T в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием.
3. Число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче.
4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.
5. Каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства $\leq$, соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Математические модели пары двойственных задач могут быт симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными. В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Две приведенные задачи образуют пару симметричных двойственных задач.

Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой.

Основные утверждения о взаимно двойственных задачах содержатся в двух следующих теоремах.

Первая теорема двойственности

Для взаимно двойственных симметричных задач имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций совпадают: $f(x) = g(y)$.
2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.
3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.
4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Экономический смысл 1-й теоремы двойственности следующий. План производства X и набор оценок ресурсов Y оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда общая стоимость продукции, определенная при известных заранее ценах продукции, равна затратам на ресурсы по «внутренним» (определяемым только из решения задачи) ценам ресурсов y_i. Для всех же других планов X и Y обеих задач прибыль от продукции всегда меньше (или равна) стоимости затраченных ресурсов: $f(X) < g(Y)$, т.е. ценность всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, величина $g(Y) - f(X)$ характеризует производственные потери в зависимости от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

Из 1-й теоремы двойственности следует, что при оптимальной производственной программе и векторе оценок ресурсов производственные потери равны нулю.

Экономический смысл 1-й теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану X и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам Y и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы.

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости)

Пусть $X = (x_1,\ x_2,\ \dots, x_n)$ – допустимое решение прямой задачи (13.9) - (13.11), а $Y = (y_1,\ y_2,\ \dots, y_m)$ – допустимое решение двойственной задачи (13.12) – (13.14). Для того, чтобы они стали оптимальными решениями соответственно задач (13.9) – (13.11) и (13.12) – (13.14), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$Y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i\right) = 0, \tag{13.15}$$

$$X_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j\right) = 0. \tag{13.16}$$

Данные условия позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи.

Из 2-й теоремы двойственности следуют требования на оптимальную производственную программу $X = (x_1,\ x_2,\ \dots, x_n)$ и оптимальный вектор оценок $Y = (y_1,\ y_2,\ \dots, y_m)$:

если $Y_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$;

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j < b_i$, то $Y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; (13.17)

$X_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i = c_j$, $j = 1, 2, \dots, n$;

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i > c_j$, то $X_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. (13.18)

Условия (13.17) можно интерпретировать так: если оценка Y_i единицы ресурса i - го вида положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью, если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю. Из условия (13.18) следует, что если j - й вид продукции вошел в оптимальный план, то он в оптимальных оценках неубыточен, если же j - й вид продукции убыточен, то он не войдет в план, не будет выпускаться.

Теорема об оценках

Значения переменных Y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений-неравенств прямой задачи на величину

$$\Delta f(x) = \Delta b_i \cdot y_i\,. \tag{13.19}$$

Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим задачу вида (13.12) - (13.14).

Приведем задачу к каноническому виду. Коэффициенты целевой функции умножим на (–1) и тогда новая целевая функция g' устремится к максимуму. В каждом неравенстве системы ограничений умножим обе части на (–1) и изменим знак неравенства на противоположный:

$$g'_{\max} = -b_1 \cdot y_1 - b_2 \cdot y_2 - b_3 \cdot y_3 - \dots - b_m \cdot y_m \tag{13.20}$$

$$\begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{12}y_2 - ... - a_{1m}y_m \le -c_1, \\ -a_{21}y_1 - a_{22}y_2 - ... - a_{2m}y_m \le -c_2, \\ .... \\ -a_{n1}y_1 - a_{n2}y_2 - ... - a_{nm}y_m \le -c_n, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0. \end{cases} \tag{13.21}$$

Далее, поскольку неравенства имеют знак “≤”, прибавим в левой части каждого неравенства новую переменную y_i, $i=\overline{m+1, m+n}$.

$$\begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{12}y_2 - ... - a_{1m}y_m + y_{m+1} = -c_1, \\ -a_{21}y_1 - a_{22}y_2 - ... - a_{2m}y_m + y_{m+2} = -c_2, \\ .... \\ -a_{n1}y_1 - a_{n2}y_2 - ... - a_{nm}y_m + y_{m+n} = -c_n, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0, y_{m+1} \ge 0, ... y_{m+n} \ge 0. \end{cases} \tag{13.22}$$

Полученную задачу решим с помощью двойственного симплекс-метода.

Пример. Составим двойственную задачу к исходной:

$f=5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \le 15, \\ x_1 + 3x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 8x_2 \le 20. \end{cases}$$

$g=15y_1+7y_2+20y_3 \to \min.$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 - 2y_3 \ge 5, \\ 3y_1 + 0y_2 + 8y_3 \ge -2, \\ -1y_1 + 3y_2 + 0y_3 \ge 3. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду.

Коэффициенты целевой функции умножим на –1, чтобы целевая функция максимизировалась.

$g' = -15y_1 - 7y_2 - 20y_3 \to \max.$

В системе ограничений произведем такие же преобразования:

$$\begin{cases} -3y_1 - y_2 + 2y_3 \le -5, \\ -3y_1 - 0y_2 - 8y_3 \le 2, \\ y_1 - 3y_2 - 0y_3 \le -3. \end{cases}$$

Прибавим в правой части неравенств новые переменные для того, чтобы в системе ограничений получились равенства:

$$\begin{cases} -3y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = -5, \\ -3y_1 - 8y_3 + y_5 = 2, \\ y_1 - 3y_2 + y_6 = -3. \end{cases}$$

Теперь, когда задача приведена к каноническому виду, составим симплекс таблицу 13.1.

Таблица 13.1

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	–3	–1	2	1	0	0	–5
0	y_5	–3	0	–8	0	1	0	2
0	y_6	1	–3	0	0	0	1	–3
d-строка		15	7	20	0	0	0	g'=0

Базисные переменные: y_4, y_5, y_6.

Свободные переменные: y_1, y_2, y_3.

Начальное решение: $Y_0 = \{y_1=0, y_2=0, y_3=0, y_4=-5, y_5=2, y_6=-3\}$.

Проверим решение на оптимальность.

Среди свободных членов есть отрицательные числа, значит решение не оптимально. Выбираем максимальное по абсолютной величине отрицательное число из столбца свободных членов:

$$\max\{|-5|, |-3|\} = 5.$$

Выбранная цифра 5 принадлежит первой строке, значит первая строка становится разрешающей и элемент y_4 выйдет из базиса.

Таблица 13.2

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	–3	–1	2	1	0	0	–5
0	y_5	–3	0	–8	0	1	0	2
0	y_6	1	–3	0	0	0	1	–3
d-строка		15	7	20	0	0	0	g'=0

Вычислим отношения чисел d-строки к соответствующим элементам разрешающей строки и выберем среди них минимальное по абсолютной величине:

$$\min\left\{\left|\frac{15}{-3}\right|, \left|\frac{7}{-1}\right|, \frac{20}{2}, \frac{0}{1}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right\} = \min\{|-5|, |-7|, \infty, \infty.\infty, \infty\} = 5.$$

Данное число стоит в первом столбце, который теперь будет разрешающим и, значит, в базис будет вводится переменная y_1, стоящая в первом столбце.

Таблица 13.3

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	–3	–1	2	1	0	0	–5
0	y_5	–3	0	–8	0	1	0	2
0	y_6	1	–3	0	0	0	1	–3
d-строка		15	7	20	0	0	0	g'=0

Разрешающей будет переменная, стоящая на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, т.е. элемент $a_{11} = –3$.

Перейдем к новой симплекс-таблице, организовав пересчет таким образом, чтобы разрешающий элемент стал единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце стали нулями.

Для этого разрешающую строку разделим на разрешающий элемент $a_{11} = –3$.

Таблица 13.4

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	–3	0	–8	0	1	0	2
0	y_6	1	–3	0	0	0	1	–3
d-строка		15	7	20	0	0	0	g'=0

Далее во второй и третьей строке разрешающего столбца вместо –3 и 1 делаем нули. Для этого новую разрешающую строку умножим на 3 и прибавим ко второй строке.

Таблица 13.5

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	1	–10	–1	1	0	7
0	y_6	1	–3	0	0	0	1	–3
d-строка		15	7	20	0	0	0	g'=0

Затем умножим новую разрешающую строку на –1 и прибавим к третьей. При этом разрешающая строка больше свой вид на данном этапе не меняет.

Таблица 13.6

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_4	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	1	–10	–1	1	0	7
0	y_6	0	$-10/3$	$2/3$	$1/3$	0	1	$-14/3$
d-строка		15	7	20	0	0	0	$g'=0$

Теперь в списке базисных переменных вместо y_4 появляется y_1 и меняются числа в последней строке.

Таблица 13.7

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	1	–10	–1	1	0	7
0	y_6	0	$-10/3$	$2/3$	$1/3$	0	1	$-14/3$
d-строка		0	2	30	5	0	0	$g'=-25$

Проверяем полученное решение $Y_1=\{y_1=5/3,\ y_2=0,\ y_3=0,\ y_4=0,\ y_5=7,\ y_6=-14/3\}$ на оптимальность. В столбце свободных членов есть отрицательное число $-14/3$, значит найденное решение не оптимально и его можно улучшить.

Определяем среди отрицательных элементов столбца свободных членов максимальный по абсолютной величине. Отрицательное число одно, значит третья строка, которой оно принадлежит, и станет разрешающей. Из базиса выйдет переменная y_6, находящаяся в этой строке.

Таблица 13.8

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	1	–10	–1	1	0	7
0	y_6	0	$-10/3$	$2/3$	$1/3$	0	1	$-14/3$
d-строка		0	2	30	5	0	0	$g'=-25$

Теперь для того, чтобы определить разрешающий столбец и элемент, который войдет в список базисных переменных, вычислим отношения чисел, стоящих в d-строке, к соответствующим элементам, стоящим в разрешающей строке, и выберем среди отношений минимальное по абсолютной величине:

$$\min\left\{\frac{0}{0},\left|\frac{2}{-10/3}\right|,\frac{30}{2/3},\frac{5}{1/3},\frac{0}{0},\frac{0}{1}\right\}=\left\{\infty,\frac{3}{5},\infty,\infty,\infty,\infty\right\}=0{,}6.$$

Искомое отношение принадлежит второму столбцу, значит именно этот столбец становится разрешающим и в список базисных переменных войдет y_2, принадлежащая этому столбцу.

Таблица 13.9

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	1	–10	–1	1	0	7
0	y_6	0	$-10/3$	$2/3$	$1/3$	0	1	$-14/3$
d-строка		0	2	30	5	0	0	g' = –25

Разрешающий элемент $-10/3$, стоящий на пересечении разрешающих столбца и строки.

Перейдем к новой симплекс-таблице. Для этого организуем пересчет таким образом, чтобы разрешающий элемент стал единицей, а остальные элементы в разрешающем столбце стали нулями.

Для этого разрешающую строку разделим на разрешающий элемент $-10/3$.

Таблица 13.10

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	1	–10	–1	1	0	7
0	y_6	0	1	–0,2	–0,1	0	–0,3	1,4
d-строка		0	2	30	5	0	0	g'=–25

Далее умножим разрешающую строку на –1 и прибавим ко второй строке для того, чтобы элемент второй строки, стоящий в разрешающем столбце, стал нулем.

Таблица 13.11

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	$1/3$	$-2/3$	$-1/3$	0	0	$5/3$
0	y_5	0	0	–9,8	–0,9	1	0,3	5,6
0	y_6	0	1	–0,2	–0,1	0	–0,3	1,4
d-строка		0	2	30	5	0	0	$g'= -25$

Затем умножим разрешающую строку на $-1/3$ и прибавим к первой строке, в результате чего элемент разрешающего столбца, стоящий в первой строке, станет нулем.

Таблица 13.12

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	0	–0,6	–0,3	0	0,1	1,2
0	y_5	0	0	–9,8	–0,9	1	0,3	5,6
0	y_6	0	1	–0,2	–0,1	0	–0,3	1,4
d-строка		0	2	30	5	0	0	$g'= -25$

Теперь в список базисных переменных вошла y_2 вместо y_6 и изменились оценки d-строки.

Таблица 13.13

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных						Свободные члены
		–15	–7	–20	0	0	0	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
–15	y_1	1	0	–0,6	–0,3	0	0,1	1,2
0	y_5	0	0	–9,8	–0,9	1	0,3	5,6
–7	y_2	0	1	–0,2	–0,1	0	–0,3	1,4
d-строка		0	0	30,4	5,2	0	0,6	$g'=-27{,}8$

Полученное решение $Y_2=\{y_1=1{,}2;\ y_2=1{,}4;\ y_3=0;\ y_4=0;\ y_5=5{,}6;\ y_6=0\}$ оптимально, так как в столбце свободных членов нет отрицательных чисел.

Задача решена.

Таким образом, целевая функция g достигает минимального значения 27,8 при следующих значениях переменных: $y_1=1{,}2$; $y_2=1{,}4$; $y_3=0$.

Обратите внимание, что экстремальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи равны.

14. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Двойственность в задачах линейного программирования

1. <u>Цель занятия:</u>

Образовательная – научиться строить экономико-математическую модель двойственной задачи.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- построение экономико-математических моделей двойственных задач;
- анализ полученного оптимального решения исходной задачи с помощью двойственных оценок**;**
- интерпретация двойственной задачи**.**

Задача 1. Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов: рабочая сила, сырье и оборудование – имеются в количестве соответственно 80 (чел./дней), 480 (кг) и 130 (станков/ч). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл. 14.1.

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором будет максимальной общая стоимость продукции.

Таблица 14.1

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	ковер «Лужайка»	ковер «Силуэт»	ковер «Детский»	ковер «Дымка»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырье	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена (тыс.руб.)	3	4	3	1	

Обозначим через $x_1,\ x_2,\ x_3\ ,x_4$ – количество ковров каждого типа.

Экономико-математическая модель задачи.

Целевая функция - это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f_{\max} = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4\ . \qquad (14.1)$$

Ограничения по ресурсам:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6\,x_4 \le 80, \\ 5x_1 + 8x_2 + 4\,x_3 + 3\,x_4 \le 480, \\ 2x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130 \\ . \end{cases} \qquad (14.2)$$

$$\text{и } x_1,\ x_2,\ x_3\,, x_4 \ \ge 0. \qquad (14.3)$$

Сформулируем *экономико-математическую модель двойственной задачи* к задаче **1.**

Количество неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений в исходной задаче. В исходной задаче три ограничения: по труду, сырью и оборудованию. Следовательно, в двойственной задаче – три неизвестных:

y_1 – двойственная оценка ресурса «труд», или «цена» труда;

y_2 – двойственная оценка ресурса «сырье», или «цена» сырья;

y_3 -- двойственная оценка ресурса «оборудование», или «цена» оборудования.

Целевая функция двойственной задачи формулируется на минимум. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи:

$$g_{\min} = 80 \cdot y_1 + 480 \cdot y_2 + 130 \cdot y_3. \qquad (14.4)$$

Необходимо найти такие «цены» на ресурсы Y_i, чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной.

Ограничения. Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче. В исходной задаче – четыре переменных, следовательно в двойственной задаче – четыре ограничения. Правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи. Левая часть ограничения определяет стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы продукции. Каждое ограничение соответствует определенному виду продукции.

$$\begin{cases} 7y_1 + 5y_2 + 2y_3 \ge 3, \\ 2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ 2y_1 + 4y_2 + 1y_3 \ge 3, \\ 6y_1 + 3y_2 + 8y_3 \ge 1 \end{cases} \qquad (14.5)$$

$$y_1,\ y_2,\ ,y_3 \ \ge 0. \qquad (14.6)$$

Решение двойственной задачи можно найти в отчете *Поиска решений* - отчете по устойчивости. Теневые цены ресурсов труд, сырье и оборудование соответственно равны 4/3, 0, 1/3, или в десятичных дробях: 1,3333; 0; 0,3333.

Проведем анализ полученного оптимального решения исходной задачи с помощью двойственных оценок.

1. Анализ использования ресурсов в оптимальном плане выполняется с помощью соотношений 2-й теоремы двойственности:

если $Y_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m$;

если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j < b_i$, то $Y_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Ресурсы «труд» и «оборудование» имеют отличные от нуля оценки 4/3 и 1/3 – эти ресурсы полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными, сдерживающими рост целевой функции. Правые части этих ограничений равны левым частям:

$$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80,$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130.$$

$$7 \cdot 0 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 0 = \mathbf{80 = 80},$$
$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 0 = \mathbf{130 = 130}.$$

Ресурс «сырье» используется не полностью (280 < 480), поэтому имеет нулевую двойственную оценку $Y_2 = 0$.

$$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480,$$
$$5 \cdot 0 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = \mathbf{280 < 480}.$$

Этот ресурс не влияет на план выпуска продукции. Общая стоимость используемых ресурсов при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида составит 150 тыс. руб.

$$g_{\min} = 80 \cdot y_1 + 480 \cdot y_2 + 130 \cdot y_3 = 80 \cdot \frac{4}{3} + 480 \cdot 0 + 130 \cdot \frac{1}{3} =$$

$= 150$ тыс. руб.

Экономическое истолкование оценок есть интерпретация их общих экономико-математических свойств применительно к конкретному содержанию задачи. По условию не использованный полностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Ресурс недефицитен не из-за его неограниченных запасов (они ограничены величиной b_i), а из-за невозможности его полного использования в оптимальном плане. Так как суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется. Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую функцию *f*.

3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Сформулируйте правило составления двойственной задачи ЛП по отношению к исходной.

2. Как связаны между собой экстремальные значения целевых функций двойственной и исходной задач?

3. Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на примере задачи оптимального использования ресурсов.

4. Задание контрольной работы

Дана математическая модель задачи ЛП: $F = \frac{2}{k}\, x_1 + k\, x_2 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3\,x_2 \ \le 6, \\ \quad x_1 - k\,x_2 \ \ge 1, \\ k\,x_1 + \quad x_2 \ \ge 5, \\ \quad x_1 \ge 0, x_2 \ \ge 0. \end{cases}$$

Здесь $k = 1 + \frac{N}{n+1}$;

$N -$ последняя цифра номера группы, в которой учится студент.

$n -$ порядковый номер студента в списке группы.

Найти решение задачи симплексным методом.

Свести исходную задачу к двойственной и решить двойственную задачу симплекс-методом. Сравнить результаты и сделать выводы.

15. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Целочисленное линейное программирование

Математическая модель задачи целочисленного (задачи связанные с неделимыми объектами) линейного программирования имеет вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \tag{15.1}$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1,m}\right. \tag{15.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \tag{15.3}$$

$$x_j \in Z \quad j = \overline{1,n} \tag{15.4}$$

Здесь Z – множество целых чисел. В отличие от общей задачи линейного программирования оптимальный план не обязательно будет в вершине многогранника (многоугольной области) планов.

Задачи целочисленного линейного программирования решаются при помощи различных методов.

Рассмотрим метод Гомори (метод отсечений) и метод ветвей и границ.

Метод Гомори (метод отсечений)

Общая идея его состоит в следующем. Вначале симплекс-методом решается задача (15.1) — (15.3), т.е. без условия целочисленности переменных. Если полученный оптимальный план выражается целыми числами, то он и будет решением всей задачи (15.1) — (15.4). Если же среди координат найденного оптимального плана имеются нецелые числа, то к ограничениям задачи присоединяется дополнительное линейное ограничение, формируемое по специальному правилу, которому не удовлетворяет найденный нецелочисленный оптимальный план, но удовлетворяет любой целочисленный план. Говорят, что такое дополнительное ограничение отсекает найденный нецелочисленный оптимальный план. Это дополнительное ограничение называют *правильным отсечением.* Полученную расширенную задачу вновь решают симплекс-методом. Если новый оптимальный план выражается целыми числами, то задача (15.1) — (15.4) решена. В противном случае строится следующая расширенная задача и т. д.

Геометрически каждому дополнительному ограничению соответствует гиперплоскость, отсекающая от многогранника планов некоторую его часть вместе с нецелочисленной оптимальной вершиной. Через конечное число отсечений искомая целочисленная точка окажется сначала на грани, а затем станет вершиной неоднократно усеченного многогранника планов. На рис. 15.1 приводится геометрическая иллюстрация для случая $n = 2$. На нем изображена область планов исходной задачи и отмечена оптимальная нецелочисленная вершина $\overline{x}^1_{\text{нц}}$. Ближайшая к ней точка области планов с целыми координатами обозначена $\overline{x}_{ц}^{*}$. На рисунке показаны три прямые l_1, l_2 и l_3, соответствующие трем дополнительным линейным ограничениям. Каждая из этих прямых отсекает часть многоугольника планов вместе с нецелочисленной вершиной. Так, после отсечения прямой l_1 части многоугольника планов в усеченной области оптимальной становится вершина $\overline{x}_{нц}^{2}$, после второго отсечения прямой l_2 оптимальной будет вершина $\overline{x}_{нц}^{3}$ и, наконец, после третьего отсечения прямой l_3 находится оптимальная целочисленная точка $\overline{x}_{ц}^{*}$.

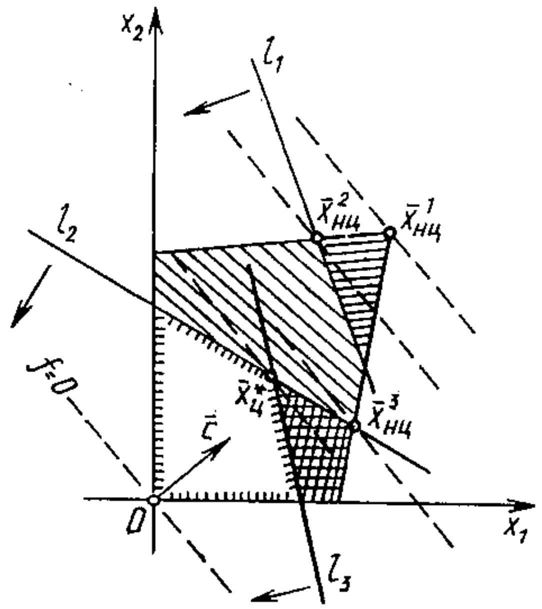

Рис. 15.1 Алгоритм метода Гомори

1. Симплекс-методом находят оптимальный план задачи (15.1) – (15.3).
$X=\{x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots , x_i = b_i , \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$.

Если все b_i целые, то план является оптимальным и для исходной задачи (15.1) – (15.4). Если задача (15.1) – (15.3) неразрешима, то и задача (15.1) – (15.4) неразрешима. Если среди b_i есть нецелые, то переходят к п. 2 алгоритма.

2. Среди нецелых b_i выбирают, например, тот, который имеет наибольшую дробную часть.

Дробной частью $\{a\}$ числа a называют разность между этим числом и его целой частью $[a]$, т.е. наибольшим целым, не превосходящим a. Например,

если $a = 3\frac{2}{5}$, то $\{3\frac{2}{5}\} = 3\frac{2}{5} - [3\frac{2}{5}] = 3\frac{2}{5} - 3 = \frac{2}{5}$;

если $a = -5{,}7$, то $\{-5{,}7\} = -5{,}7 - [-5{,}7] = -5{,}7 - (-6) = 0{,}3$.

В примере с отрицательным числом целая часть равна –6, так как целая часть – это ближайшее меньшее целое число, т.е. происходит округление до целого в меньшую сторону.

Новое ограничение (сечение) составляется на основе строки, которой соответствует дробное число b_i, и будет иметь вид:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i. \qquad (15.5)$$

Здесь α_{ij} – это дробная часть коэффициентов a_{ij}: $\alpha_{ij}=\{a_{ij}\}$, $j = \overline{m+1, n}$;

β_i – это дробная часть числа b_i : $\beta_i =\{b_i\}$.

Для того, чтобы привести вновь составленную систему ограничений к каноническому виду, требуется преобразовать неравенство в равенство. Введем фиктивную переменную x_{n+1}:

$\alpha_{i\,m+1}\, x_{m+1} + \alpha_{i\,m+2}\, x_{m+2} +\ldots+ \alpha_{i\,n}\, x_n - x_{n+1} =\beta_i$,

$x_{n+1} \geq 0$.

3. Составленную расширенную задачу вновь решают симплекс-методом. Если оптимальный план будет целочисленным, то он и станет решением исходной задачи (15.1) — (15.4). В противном случае возвращаются к п. 2 алгоритма.

Если задача разрешима в целых числах, то через конечное число итераций оптимальный целочисленный план будет найден.

***Пример* 1.**

Решить задачу:

$$f=3x_1+2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0, \;\; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

После выполнения этапа 1 при решении задачи симплекс-методом получилась таблица 15.1.

Таблица 15.1

Базисные переменные		Коэффициенты при переменных				Свободные члены
		3	2	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	5	2	1	0	20
0	x_4	1	1	0	1	5
d		–3	–2	0	0	f=0
3	x_1	1	0,4	0,2	0	4
0	x_4	0	0,6	–0,2	1	1
d		0	–0,8	0,6	0	f=12
3	x_1	1	0	$^1/_3$	$-{}^2/_3$	$^{10}/_3$
2	x_2	0	1	$-{}^1/_3$	$^5/_3$	$^5/_3$
d		0	0	$^1/_3$	$^4/_3$	f=$^{40}/_3$

В результате решения получился следующий ответ: $x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, $f = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. Как видно, в ответе присутствуют два дробных числа: $3\frac{1}{3}$ и $1\frac{2}{3}$. Применим метод Гомори для получения целочисленного решения.

Во-первых, выберем число с максимальной дробной частью:

$\{3\frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$ и $\{1\frac{2}{3}\} = \{\frac{2}{3}\}$, $\max\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3}$.

Это означает, что сечение будет составлено на основе строки, соответствующей числу $1\frac{2}{3}$.

Во-вторых, составим ограничение. Для этого выпишем линейную комбинацию чисел из строки, соответствующей числу $1\frac{2}{3}$, и переменных x_1, x_2, x_3 и x_4:

$$0x_1 + 1x_1 - {}^1/_3\, x_3 + {}^5/_3\, x_4 = {}^5/_3.$$

Воспользуемся формулой (10.5) и получим:

$$\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \geq \frac{2}{3}.$$

Упростим полученное отсечение, сократив на множитель $\frac{2}{3}$:

$$x_3 + x_4 \geq 1.$$

Приведем новое ограничение к каноническому виду:

$$-x_3 - x_4 \leq -1,$$

$$-x_3 - x_4 + x_5 = -1,\ x_5 \geq 0.$$

Добавим новое сечение к системе ограничений задачи:

$$f = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 5, \\ -x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Решив новую задачу симплекс-методом, получим целочисленное решение: $x_1=3$; $x_2=2$; $f=13$.

Метод «ветвей и границ»

Метод «ветвей и границ» – это метод направленного перебора множества вариантов решений задачи.

Алгоритм метода «ветвей и границ»

1. Строятся вершины первого уровня. Для каждой вершины подсчитывается оценка нижней (верхней) границы. Ветвится вершина, которой соответствует лучшая (минимальная или максимальная) оценка.

2. Для всех вершин i-го уровня ($i \geq 2$) подсчитывается оценка. Ветвится та из висячих вершин уровня i, $i-1$, $i-2$, …, 1, которой соответствует лучшая (минимальная или максимальная) оценка.

3. Действие п.2 повторяется до тех пор, пока не будет получено точное решение на последнем уровне, дающее значение целевой функции f^*.

Если это значение f^* не хуже оценок оставшихся висячих вершин, то найдено оптимальное решение. Если это значение f^* строго лучше, то оптимальное решение единственно.

Если значение целевой функции f^* для последнего уровня не лучше значения оценок оставшихся висячих вершин, то переходят к п.2.

Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования (15.1) – (15.4). Пусть в результате решения задачи получили ответ

$$X=\{x_1=b_1,\ x_2=b_2,\ \dots,\ x_i=b_i,\ \dots,\ x_m=b_m,\ x_{m+1}=0,\ \dots,\ x_n=0\},$$

где b_i – дробное число.

Введем два дополнительных условия:

$x_i \leq z_i$ и $x_i \geq z_i+1$, где $[x_i]=z_i$.

Два последних неравенства разбивают область допустимых решений для переменной x_i на две подобласти. При этом из рассмотрения исключается та подобласть, в которой не содержатся целочисленные значения координаты x_i .

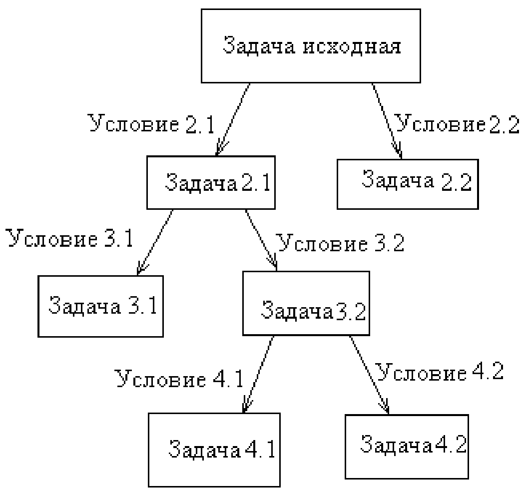

Рис 15.2. Схематическое изображение решения метода «ветвей и границ»

***Пример* 2.**

Рассмотрим задачу из предыдущего примера, решенную методом Гомори:

$$f=3x_1+2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0, \ \ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

В результате решения получился следующий ответ: $x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, $f = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. Как и в методе Гомори, требуется выбрать число с максимальной дробной частью. Ранее было показано, что это x_2. Значит вет- вление будет осуществляться по переменной x_2. Для этого определим целую часть числа $\frac{5}{3}$: $\left[\frac{5}{3}\right] = \left[1\frac{2}{3}\right] = 1$. Тогда

$$x_2 \le 1 \text{ и } x_2 \ge 2.$$

На основе ветвления получим две новые задачи:

Задача 1

$f=3x_1+2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \\ 0 \le x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Задача 2

$f=3x_1+2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

В результате решения задач 1 и 2 получим следующие ответы:

Задача 1

$x_1=3{,}6$, $x_2=1$, $f_1 = 12{,}8$.

Задача 2

$x_1=3$, $x_2=2$, $f_2 = 13$.

Изобразим схематически ветвление в решенной задаче.

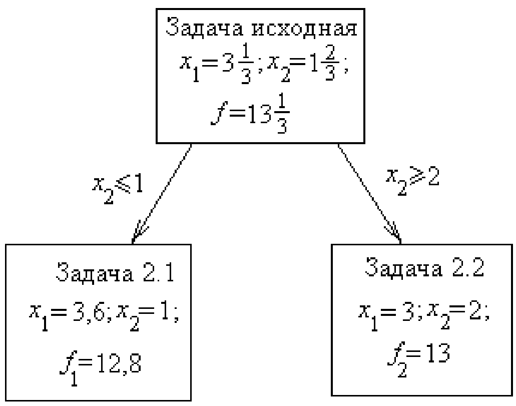

Рис 15.3. Ветвление задачи

Таким образом, с помощью двух различных методов получили одно решение задачи целочисленного программирования.

16. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

Решение задач целочисленного линейного программирования

1. Цель занятия:

Образовательная – освоить метод Гомори и метод «ветвей и границ» решения задач целочисленного линейного программирования.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- особенности применения методов Гомори и «ветвей и границ» для решения задач целочисленного линейного программирования;
- алгоритмы данных методов для решения задач целочисленного линейного программирования.

3. Вопросы и упражнения для самопроверки

1. Какие экономические задачи относятся к задачам целочисленного программирования?
2. Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
3. В чем состоит метод Гомори?
4. Как составить дополнительное ограничение, если компоненты оптимального плана задачи являются дробными?
5. В каком случае поставленная задача не имеет целочисленного решения?
6. Какой геометрический смысл имеет введение дополнительного ограничения?
7. Сформулируйте задачу оптимального раскроя материалов и составьте ее математическую модель.
8. Упражнения:

   8.1. Найти оптимальное целочисленное решение задачи

$$f=x_1+2x_2+3x_3\to\max$$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+3x_3\le 25, \\ 5x_1+3x_2+2x_3\le 15, \\ x_1,x_2,x_3\ \ge 0,\ \ x_1,x_2,x_3\in Z. \end{cases}$$

8.2. В обработку поступила партия из 150 досок длиной 7,5 м каждая для изготовления комплектов из четырех деталей. Комплект состоит из одной детали длиной 3 м, двух деталей размером по 2 м и одной детали размером 1,5 м. Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее число комплектов?

Указание. Сначала составить таблицу возможных способов распила одной доски на детали заданных размеров.

17. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка транспортной задачи. Транспортная таблица

Рассмотрим следующую задачу, называемую *транспортной задачей.* Имеется m поставщиков $A_1,\ A_{2\,,}\dots\ ,A_m$, у которых сосредоточены запасы одного и того же груза в количестве $a_1,\ a_{2\,,}\dots\ ,a_m$ единиц соответственно. Этот груз нужно доставить n потребителям $B_1,\ B_{2\,,}\dots\ ,B_n$, заказавшим b_1, $b_{2\,,}\dots\ ,b_n$ единиц этого груза соответственно. Известны также все *тарифы перевозок* груза c_{ij} (стоимость перевозок единицы груза) от поставщика A_i к потребителю B_j. Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной.

Условие транспортной задачи удобно записать в виде следующей транспортной таблицы 17.1.

Таблица 17.1

Заказы / Запасы		B_1	B_2	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_n
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Обозначим суммарный запас груза у всех поставщиков символом a, а суммарную потребность в грузе у всех потребителей – символом b. Тогда

$$a=\sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{17.1}$$

$$b=\sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{17.2}$$

- Транспортная задача называется *закрытой,* если $a = b$.

Если же $a \neq b$, то транспортная задача называется *открытой.*

Далее будет показано, что в случае *закрытой задачи* от поставщиков будут вывезены все запасы груза и все заявки потребителей будут удовлетворены.

В случае *открытой задачи* при $a < b$ весь груз будет вывезен, однако будут недопоставки груза экономически невыгодным потребителям.

При $a > b$, наоборот, будут удовлетворены все потребители, но часть груза останется на складах экономически невыгодных поставщиков.

- Пусть x_{ij} ($x_{ij} \geq 0$) — количество груза, отправляемого поставщиком A_i потребителю B_j. Тогда суммарные затраты z на перевозки будут вычисляться по формуле

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}. \tag{17.3}$$

- Матрица X с неотрицательными элементами x_{ij} называется *планом перевозок.*
- Функция z называется *целевой функцией.*

Математическая формулировка транспортной задачи заключается в нахождении плана перевозок $X = \{x_{ij}\}$, который удовлетворяет *системе ограничений*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,,\ i = 1,2,\dots,m. \tag{17.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,\ j = 1,2,\dots,n \tag{17.5}$$

и доставляет минимум целевой функции z .

- План перевозок, реализующий минимум целевой функции z, называется *оптимальным.*

Смысл первой группы равенств в системе ограничений (17.4) состоит в том, что суммарное количество груза, отправленное всем потребителям каждым поставщиком, равно запасу груза у этого поставщика. Вторая группа равенств в системе ограничений (17.5) показывает, что суммарное количество груза, полученное каждым потребителем от всех поставщиков, равно заказу этого потребителя.

Свед́ение открытой транспортной задачи к закрытой

Решение транспортной задачи начинается с выяснения вопроса о том, является ли задача открытой или закрытой.

Если задача является открытой, то необходимо провести *процедуру закрытия задачи.* С этой целью при $a < b$ добавляем *фиктивного поставщика* A'_{m+1} с запасом груза $a'_{m+1} = b - a$. Если же $a > b$, то добавляем *фиктивного потребителя* B'_{n+1} с заказом груза $b'_{n+1} = a - b$.

В обоих случаях соответствующие фиктивным объектам тарифы перевозок c'_{ij} полагаем равными нулю. В результате суммарная стоимость перевозок z не изменяется.

Первоначальный план перевозок

Транспортная задача относится к задачам линейного программирования, и ее можно было бы решить симплекс-методом. Но поскольку система ограничений транспортной задачи проще, чем система ограничений ОЗЛП, то это дает возможность вместо использования объемных симплекс-таблиц применить более удобный метод, который состоит из следующих этапов:

1. Составление первоначального плана перевозок;

2. Последовательные улучшения плана перевозок (перераспределение поставок) до тех пор, пока план перевозок не станет оптимальным.

Решение ОЗЛП начинается с нахождения опорного плана. Для транспортной задачи такой план всегда существует. Опишем два метода составления *опорного плана (первоначального плана перевозок).* При этом ненулевые элементы x_{ij} плана перевозок будем записывать в соответствующие пустые клетки транспортной таблицы с исходными данными задачи, а символом (i, j) будем обозначать клетку таблицы, содержащую информацию о перевозках груза от поставщика A_i к потребителю B_j.

Составление первоначального плана перевозок с помощью метода северо-западного угла

Задача 1.

Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны b_j , $j=1, 2, 3, 4$. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны a_i, $i=1, 2, 3$. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок представлены в таблице. Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Составление первоначального плана перевозок начнем с перевозки запасов поставщика A_1. Будем за счет его запасов максимально возможно удовлетворять заказы сначала потребителя B_1, затем B_2 и так далее. Таким образом, мы будем заполнять таблицу, начиная с клетки (1,1), и двигаться вправо по строке до тех пор, пока остаток запасов поставщика A_1 не окажется меньше заказа очередного потребителя. Для выполнения этого заказа используем остатки запаса первого поставщика, а недостающую часть добавим из запасов поставщика A_2, то есть переместимся на следующую строку таблицы по столбцу, соответствующему указанному потребителю. Далее аналогичным образом распределим запасы поставщика A_2, затем A_3 и так далее.

Проиллюстрируем это на следующем примере (табл. 17.2).

Таблица 17.2

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	40	80	60
A_1	160	4 100	8 40	10 20	5
A_2	30	4	6	2 30	3
A_3	90	4	4	6 30	5 60

Распределяя запасы поставщика A_1 сначала потребителю B_1, а затем B_2, получаем: x_{11} =100, x_{12} =40. После этого у поставщика A_1 остается еще 20 единиц груза, а потребителю B_3 нужно 80 единиц. Удовлетворим спрос потребителя B_3, отправив ему 20 единиц груза, оставшихся у поставщика A_1, 30 единиц груза от поставщика A_2 и 30 единиц груза от A_3. Следовательно

$$x_{13} = 20,\ x_{23} = 30 \text{ и } x_{33} = 30,$$

причем у поставщика A_3 остается 60 последних единиц груза. Этот груз и отправим потребителю B_4. Таким образом, x_{34} = 60, все запасы груза вывезены и все потребители удовлетворены.

Теперь мы можем подсчитать общую стоимость всех перевозок по данному плану:

$$Z = 4\cdot100 + 8\cdot40 + 10\cdot20 + 2\cdot30 + 6\cdot30 + 5\cdot60 = 1460.$$

Изложенный метод северо-западного угла прост в реализации, однако трудно надеяться, что он даст экономичный первоначальный план, поскольку при распределении перевозок мы совершенно не учитывали их стоимость.

Составление первоначального плана перевозок с помощью метода наименьшей стоимости

Построение плана начнем с клетки с наименьшим тарифом перевозок.

При наличии нескольких клеток с одинаковыми тарифами выберем любую из них. Пусть это будет клетка (i,j). Запишем в эту клетку элемент $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.

Если $a_i < b_j$, то запасы поставщика A_i исчерпаны, а потребителю B_j требуется еще $b_j^{''} = b_j - a_i$ единиц груза. Поэтому, не принимая более во внимание i-ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей.

В случае $a_i > b_j$ из рассмотрения исключается j-й столбец, а запасы A_i полагаются равными $a_i^{''} = a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Необходимо отметить, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными, однако они, несомненно, ближе к оптимальному плану, чем план, составленный по методу северо-западного угла.

Сформируем теперь первоначальный план по методу наименьшей стоимости и сравним результаты (табл. 17.3).

Поскольку наименьший тариф (число 2) стоит в клетке (2,3), то запишем в эту клетку элемент x_{23} = 30. Тогда b'_3 = 50, а 2-ю строку таблицы можно больше не учитывать.

Среди оставшихся клеток имеются три клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 4: (1,1); (3,1) и (3,2).

Выберем, например, клетку (1,1) и запишем в нее число x_{11} = 100. Получаем, что a''_1 = 60, а 1-й столбец таблицы больше не рассматриваем. Теперь наименьший тариф, равный 4, проставлен в клетке (3,2), поэтому x_{32} = 40, b'_3 = 50 и 2-й столбец больше не нужен.

Далее выбираем клетку (1,4) с тарифом 5 и пишем в нее x_{14} =60. Исключив из рассмотрения сразу 1-ю строку и 4-й столбец (поскольку a''_1 = b_4 =60), переходим к последней клетке (3,3), в которую записываем перевозку x_{33} = 50.

Таблица 17.3

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	40	80	60
A_1	160	4 100	8	10	5 60
A_2	30	4	6	2 30	3
A_3	90	4	4 40	6 50	5

Проверка оптимальности плана и перераспределение поставок с помощью метода потенциалов

Для анализа полученных планов и их последующего улучшения удобно ввести дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые *потенциалами.*

Покажем как нужно пользоваться методом потенциалов на примере первоначального плана, полученного выше по методу северо-западного угла.

Вначале проверим, не является ли этот план вырожденным.

Так как $m + n — 1 = 3 + 4 — 1 = 6$ и число базисных клеток в плане также равно 6, то план в пополнении не нуждается.

Найдем потенциалы по базисным клеткам таблицы с помощью формул $u_i + v_j = c_{ij}$, где $i = 1,2,3,\dots,m$ и $j = 1,2,3,\dots,n,$ положив $u_1 = 0$,

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_2 = 8, \\ u_1 + v_3 = 10, \\ u_2 + v_3 = 2, \\ u_3 + v_3 = 6, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_1 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = -8, \\ u_3 = -4, \\ v_1 = 4, \\ v_2 = 8, \\ v_3 = 10, \\ v_4 = 9 \end{cases}$$

и занесем полученные значения в таблицу. Вычислим теперь разности Δc_{ij} для свободных клеток и также проставим эти данные в левых нижних углах соответствующих клеток. В итоге получим таблицу 17.4.

Таблица 17.4

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	40	80	60	*u*
A_1	160	4 100	8 40	10 20 (-)	5 –4 (+)	$u_1=0$
A_2	30	4 8	6 6	2 30	3 2	$u_2= –8$
A_3	90	4 4	4 0	6 30 (+)	5 60 (-)	$u_3= –4$
	v	$v_1 = 4$	$v_2 = 8$	$v_3 = 10$	$v_4 = 9$	

Поскольку Δc_{14} = – 4 < 0, то этот план не является оптимальным. Перераспределим груз по циклу, обозначенному в таблице 17.4 пунктиром, на величину Δx = min(20,60) = 20. Для этого в клетках со знаком «плюс» увеличим поставки на 20 единиц, а клетках со знаком «минус» – на столько же их уменьшим. Для сохранения количества базисных клеток число 0 в клетке (1,3) не записываем, и она становится свободной.

Вычислив потенциалы и разности Δc_{ij} для нового плана, видим (табл. 17.5), что снова есть отрицательная разность $\Delta c_{32} = -4$.

Таблица 17.5.

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	40	80	60	u
A_1	160	4 100	8 40 (–)	10 –4	5 20 (+)	$u_1=0$
A_2	30	4 4	6 2	2 30	3 2	$u_2=-4$
A_3	90	4 0	4 (+) –4	6 50	5 40 (–)	$u_3=0$
	v	$v_1=4$	$v_2=8$	$v_3=6$	$v_4=5$	

Поэтому придется еще раз улучшать план. С этой целью перераспределим груз по циклу, отмеченному в таблице 17.5 пунктиром, на величину $\Delta x = \min(40,40) = 40$. Так как в результате в цикле получаются две клетки с нулевыми перевозками: (1,2) и (3,4), то сделаем свободной клетку (1,2), поскольку ее тариф перевозок больше. После перераспределения груза по циклу вычислим все необходимые разности Δc_{ij}. Как видим, все Δc_{ij} неотрицательны, значит план оптимален (табл. 17.6).

Таблица 17.6

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	40	80	60	u
A_1	160	4 100	8 4	10 4	5 60	$u_1=0$
A_2	30	4 4	6 6	2 30	3 2	$u_2=-4$
A_3	90	4 0	4 40	6 50	5 0 0	$u_3=0$
	v	$v_1=4$	$v_2=4$	$v_3=6$	$v_4=5$	

18. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

Решение задач целочисленного линейного программирования

1. <u>Цели занятия:</u>

Образовательная – формирование навыков решения ТЗ методом потенциалов на практическом занятии и с использованием табличного процессора MS Excel на лабораторной работе.

Развивающая – способствовать развитию отдельных общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

2. Основные теоретические сведения:

- построение математической модели ТЗ, составление распределительной (транспортной) таблицы;
- построение первоначального плана перевозок с помощью метода северо-западного угла;
- построение первоначального плана перевозок с помощью метода наименьшей стоимости;
- использование метода потенциалов как одного из методов решения ТЗ;
- технология решения ТЗ в табличном процессоре Excel.

Пример 1. Транспортная задача задана следующей транспортной таблицей 18.1:

Таблица 18.1

Заказы / Запасы		B_1	B_2	B_3
		20	25	30
A_1	24	6	4	2
A_2	28	3	5	4
A_3	23	3	6	3

Выяснить, является задача открытой или закрытой; составить первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла; составить первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости; с помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость; найти минимальную стоимость перевозок.

1. Выяснить, является задача открытой или закрытой:
   24+28+23=75.   20+25+30=75. Модель закрытая.

2. Составить первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла (табл. 18.2).

Таблица 18.2

Заказы / Запасы		B_1	B_2	B_3
		20	25	30
A_1	24	6 20	4 4	2
A_2	28	3	5 21	4 7
A_3	23	3	6	3 23

$z = 20 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 21{,}5 + 7 \cdot 4 + 23 \cdot 3 = 338.$

3. Составить первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости (табл.18.3).

Таблица 18.3

Заказы / Запасы		B_1	B_2	B_3
		20	25	30
A_1	24	6	4	2 24
A_2	28	3	5 25	4 3
A_3	23	3 20	6	3 3

$z = 24 \cdot 2 + 25 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 254.$

4. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость (первоначальный план составлен по методу минимального элемента).

Таблица 18.4

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	
		20	25	30	u
A_1	24	6 4	4 1	2 24	0
A_2	28	3 *** – 1 +	5 25	4 3 -	2
A_3	23	3 20 -	6 2	3 3 +	1
	v	2	3	2	

Таблица 18.5

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	
		20	25	30	u
A_1	24	6 4	4 0	2 24	0
A_2	28	3 3	5 25	4 1	2
A_3	23	3 17	6 1	3 6	1
	v	2	3	2	

Оптимальный $z = 24 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 25 \cdot 5 + 17 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 251.$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 3 & 25 & 0 \\ 17 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план перевозок, обеспечивающий их минимальную стоимость (первоначальный план по методу северо-западного угла).

Таблица 18.6

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	
		20	25	30	u
A_1	24	6 20 -	4 4 +	2 – 1	0
A_2	28	3 *** -4 +	5 21 -	4 7	1
A_3	23	3 – 3	6 2	3 23	0
	v	6	4	3	

Таблица 18.7

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	
		20	25	30	u
A_1	24	6 4	4 24 -	2 *** –1 +	0
A_2	28	3 20	5 1 +	4 7 -	1
A_3	23	3 1	6 2	3 23	0
	v	2	4	3	

Таблица 18.8

Запасы \ Заказы		B_1	B_2	B_3	
		20	25	30	u
A_1	24	6 4	4 17	2 7 -	0
A_2	28	3 20	5 8	4 1	1
A_3	23	3 0	6 1	3 23	1
	v	2	4	2	

Оптимальный $z == 17 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 23 \cdot 3 = 251.$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 7 \\ 20 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

3. Вопросы и упражнения для самоконтроля

1. Что называется транспортной задачей?

2. Что называется тарифом перевозки в транспортной задаче?

3. Какая транспортная задача называется закрытой?

4. Какая транспортная задача называется открытой?

5. В чем состоит процедура закрытия открытой транспортной задачи?

6. Что называется фиктивным поставщиком?

7. Что называется фиктивным потребителем?

8. Что называется потенциалом в транспортной задаче?

9. В чем состоит схема решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов?

10. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла?

11. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости?

12. Что называется циклом в транспортной таблице?

13. Какие клетки транспортной таблицы называются базисными?

14. Какие клетки транспортной таблицы называются свободными?

15. Какой план перевозок называется вырожденным?

16. Какой план называется ациклическим?

17. В чем состоит схема пополнения вырожденного плана перевозок?

18. В чем состоит критерий оптимальности плана при решении транспортной задачи методом потенциалов?

19. Подготовить выступления по темам:

 1) составление опорного плана способом Фогеля;

 2) решение ТЗ распределительным методом и модифицированным распределительным методом;

 3) решение ТЗ дельта-методом.

20. Методом потенциалов найти оптимальные планы следующих транспортных задач (в верхней строке таблиц указаны потребности в грузе пунктов B_j , в левом столбце – запасы груза в пунктах A_i , в остальных клетках тарифы c_{ij}):

20.1.

B_j / A_i	30	60	45	25
30	4	7	1	3
70	5	9	6	2
60	8	2	9	11

20.2.

B_j / A_i	110	120	80	50	70
150	7	2	11	5	9
170	8	4	3	6	1
110	3	5	10	7	8

20.3.

B_j / A_i	8	5	15	18	12	14	6	10
50	2	1	3	6	5	7	9	8
38	10	11	5	7	4	2	3	1

20.4.

B_j / A_i	75	125	64	65	60
85	7	1	4	5	2
112	13	4	7	6	3
72	3	8	0	18	12
130	9	5	3	4	7

21. **Задания контрольной работы.**

Ранее на с. 32 приведены варианты заданий для решения транспортной задачи, где требуется методом потенциалов найти оптимальные планы следующих транспортных задач (в верхней строке таблиц указаны потребности в грузе пунктов B_j , в левом столбце – запасы груза в пунктах A_i , в остальных клетках тарифы c_{ij}).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гераськин, М. И. Линейное программирование. Выполнение расчетов в табличном процессоре Excel: учеб. пособие / М. И. Гераськин, Л. С. Клентак. – Самара: Изд-во СГАУ, 2012. – 148 с.
2. Гераськин, М. И. Линейное программирование: учеб. пособие / М. И. Гераськин, Л. С. Клентак; под общ. ред. Л.С. Клентак – Самара: Изд-во СГАУ, 2014. – 104 с.
3. Гречников, Ф.В. Самоорганизация самостоятельной работы студентов. Пути совершенствования: монография / Ф. В. Гречников, Л. С. Клентак – Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2018. – 164с.
4. Горлач, Б. А. Исследование операций: учеб. комплекс / Б. А. Горлач. – Самара: Аэропринт, 2008. – 448 с.
5. Клентак, Л. С. Моделирование взаимодействия предприятий в условиях глобализации. Методы, механизмы и стратегии: монография / Л. Клентак, Е. Тюлевина, А. Гришанова – Saarbrucken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 142с.
6. Кобенко, А. В. Проектирование механизмов организации и управления в поточном производстве: монография / А. В. Кобенко, А. С. Клентак – Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2017. – 148с.
7. Коробов, П. Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов: учеб. для студентов лесотехнических вузов / П. Н. Коробов. – СПб.: ЛТА, 2002. – 364 с.
8. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование: учеб. / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Высш. школа, 2001. – 351 с.
9. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск: Высш. школа, 2001. – 448 с.
10. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование: учеб. пособие / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волошенко. – М.: Высш. школа, 1980. – 300 с.
11. Печерских, И. А. Математические модели в экономике: учеб. пособие / И. А. Печерских, А. Г. Семенов; Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – Кемерово, 2011. – 191с.
12. Ростова, Е. П. Методы и модели в экономике: учеб. пособие / Е. П. Ростова. – Самара: Изд-во СГАУ, 2009. – 112 с.
13. Самаров, К. Л. Математика. Транспортная задача: учеб. пособие/ К. Л. Самаров. – М.: ООО Резольвента, 2009. – 23 с.