

Министерство образования Российской Федерации
Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева

А.А. Авраменко, А.В. Седельников

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ
И ДВИЖЕНИЯ
ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА**

Самара 2002

УДК 534.1

Исследование равновесия и движения плоского механизма : Учебно-методическое пособие для курсового проектирования по курсу «Теоретической механики» / Авраменко А.А., Седельников А.В.; Самарский государственный аэрокосмический университет. - Самара, 2002. - 44 с.

ISBN 5-79670-104-5

Приведены краткие сведения по теории основных разделов теоретической механики : кинематика точки, плоскопараллельного движения твердого тела, сложного движения точки, статика; динамика относительного движения точки, теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Рассмотрен пример выполнения курсовой работы.

Пособие предназначено для студентов второго курса, изучающих предмет теоретической механики за один учебный семестр.

Работа выполнена на кафедре теоретической механики.

Ил. 25 Табл. 10

Библиогр.: 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва.

Рецензенты : В.П. Червинский, М.А. Звягинцев

ISBN 5-79670-104-5

© А.А.Авраменко,
А.В.Седельников

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2002

Содержание

Введение.....	4
1. Кинематика.....	5
1.1. Кинематика точки.....	5
1.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела.....	9
1.3. Кинематика сложного движения точки.....	14
2. Статика. Равновесие плоской конструкции.....	19
3. Динамика.....	22
3.1. Динамика относительного движения материальной точки.....	22
3.2. Общие теоремы динамики. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.....	23
Приложение. Пример выполнения задания.....	26
Список литературы.....	44

Введение

Теоретическая механика - наука, изучающая механическое движение различных объектов. Освоение курса теоретической механики как одной из важнейших фундаментальных дисциплин естественно-научного цикла играет существенную роль при обучении студентов по специальностям естественно-научного и инженерного направлений.

При изучении теоретической механики в течение одного семестра важно сформировать у студентов навыки самостоятельного анализа механических систем, умение применять общие законы к решению конкретных задач. Для этой цели студенты СГАУ, обучающиеся по специальности «Управление качеством», выполняют курсовую работу, в которой проводят комплексный анализ равновесия и движения плоского механизма.

Т.к. теоретическая механика рассматривает не реальные объекты, а их математические модели, то для успешного выполнения курсовой работы студенты должны в достаточной мере владеть такими разделами высшей математики как векторная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление, теория векторного поля.

Знания и навыки, приобретенные в результате выполнения курсовой работы, будут использованы студентами при изучении таких дисциплин, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, методы и средства измерений, проектирование технических систем, пневмо-гидроустройства.

1. Кинематика

1.1. Кинематика точки

Кинематика - раздел теоретической механики, который изучает движение материального объекта (материальной точки, абсолютно твердого тела, механической системы) в отрыве от причин, вызывающих это движение (сил). Задачей кинематики является описание движения изучаемого объекта.

Самый простой объект механики - это **материальная точка** - тело размерами которого можно пренебречь в конкретной задаче.

В первой части курсовой работы рассматриваются инструменты, с помощью которых решают задачу кинематики, т.е. способы описания движения материальной точки.

Как известно, существуют три способа описания движения :

- векторный;
- координатный;
- естественный.

Векторный способ задания движения заключается в определении радиуса-вектора точки как функции времени. При этом способе необходимы :

- система отсчета;
- зависимость радиус-вектора точки от времени.

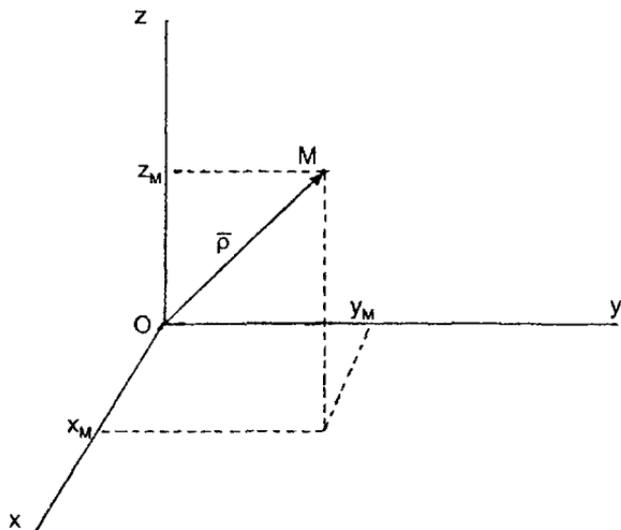


Рис. 1 - Задание движения точки векторным способом

Закон движения в векторной форме имеет вид :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Скорость точки получается путем дифференцирования по времени радиус-вектора¹:

$$\vec{v} = \dot{\vec{\rho}}(t)$$

При повторном дифференцировании радиус-вектора по времени получается ускорение точки:

$$\vec{w} = \ddot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{v}}(t)$$

Векторный способ задания движения хорош в тех случаях, когда требуется краткая запись закона и параметров (скорость, ускорение) движения точки. Его неоспоримым преимуществом является независимость от выбора системы координат. Однако компактность этого способа зачастую приводит к математическим сложностям его применения к решению конкретных задач.

С векторным способом задания движения тесно связан координатный способ. Действительно, радиус-вектор точки можно разложить в любой системе координат в пространственном случае на три компоненты. Например, в декартовой системе координат (рис.1):

$$\vec{\rho}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

При данном способе задаются следующие параметры:

- система отсчета;
- зависимость координат точки от времени.

Компоненты вектора скорости определяются через производные по времени от соответствующих координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z} \end{array} \right. \text{ Для декартовой системы координат (1а)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\phi = r\dot{\phi} \\ v_r = \dot{r} \end{array} \right. \text{ Для полярной системы координат (1б)}$$

Компоненты вектора ускорения точки определяются повторным дифференцированием соответствующих координат по времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_x = \ddot{x} \\ w_y = \ddot{y} \\ w_z = \ddot{z} \end{array} \right. \text{ Для декартовой системы координат (2а)}$$

¹ Здесь и в дальнейшем используются обозначения производной по времени, введенные И.Ньютоном: $dx/dt = \dot{x}$ и т.д.

$$\begin{cases} w_\varphi = r \ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r} \\ w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \end{cases} \quad \text{Для полярной системы координат (2б)}$$

Чтобы из уравнений движения получить уравнение траектории, нужно из уравнений движения исключить время. Для сложных уравнений движения траектория строится по точкам.

Например, пусть требуется определить закон движения средней точки М шатуна в координатной форме для кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рис. 2 :

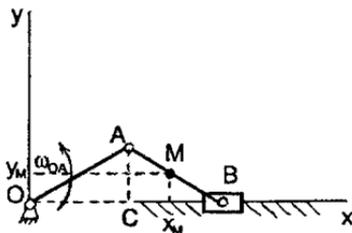


Рис. 2 - Пример определения закона движения точки координатным способом

Причем $OA = AB = 120$ см., а угловая скорость вращения кривошипа постоянна и равна 10 рад/с.

При равномерном вращении кривошипа OA его положение определяется углом AOB :

$$\varphi_{OA} = \omega_{OA} t$$

Для определения положения точки M опустим перпендикуляры на оси x и y . Тогда координаты x_M и y_M можно вычислить, учитывая, что треугольник OAB равнобедренный и $MB = AM$ по условию задачи :

$$x_M = OC + \frac{1}{2} CB = 1,5 OA \cos(\omega_{OA} t) = 180 \cos(10t),$$

$$y_M = MB \sin(\omega_{OA} t) = \frac{1}{2} AB \sin(\omega_{OA} t) = 60 \sin(10t)$$

Полученные зависимости представляют собой закон движения точки M в координатной форме. Скорость ее определится дифференцированием по времени x_M и y_M согласно (1а) :

$$v_x = \dot{x}_M = -1800 \sin(10t)$$

$$v_y = \dot{y}_M = 600 \cos(10t)$$

Ускорение точки M определится дифференцированием скорости по времени согласно (2а) :

$$w_x = \dot{v}_x = -18000 \cos(10t)$$

$$w_y = \dot{v}_y = -6000 \sin(10t)$$

Уравнение траектории получится следующим образом :

$$\frac{x}{180} = \text{Cos} (10t)$$

$$\frac{y}{60} = \text{Sin} (10t)$$

Возводя каждое из полученных уравнений в квадрат и складывая их левые и правые части, получим :

$$\frac{x^2}{180^2} + \frac{y^2}{60^2} = \text{Sin}^2(10t) + \text{Cos}^2(10t)$$

или :

$$\frac{x^2}{180^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1$$

Таким образом, точка М движется по эллипсу с полуосями 180 см и 60 см соответственно.

Если заранее известна траектория движения точки, то удобно пользоваться естественным способом задания движения точки, выбирая при этом естественную систему координат (рис. 3).

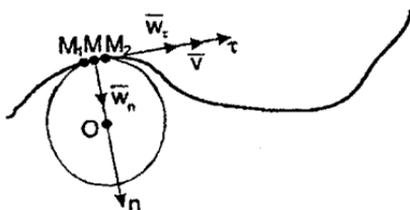


Рис. 3 - Естественная система координат

При естественном способе задания движение точки вдоль траектории задается криволинейной координатой, которая характеризует длину кривой от начала отсчета до положения точки на траектории в данный момент времени.

Чтобы построить естественную систему координат, нужно найти центр кривизны траектории в данной точке (на рис. 3 - это точка М). Центр кривизны траектории в данной точке - это центр окружности, проведенной через эту точку и две бесконечно близкие к ней точки (М₁ и М₂). Радиус полученной окружности (ОМ) называется радиусом кривизны траектории в точке М. Из точки М центру кривизны траектории (точке О) направляется нормальная ось (n) естественной системы координат. По касательной к траектории в точке М направляется касательная ось естественной системы координат (τ). Касательная и нормальная оси всегда перпендикулярны друг другу.

Скорость точки будет всегда направлена по касательной к траектории, т.е. вдоль оси τ.

Ускорение точки в этом случае раскладывается на два взаимно перпендикулярных вектора : касательное ускорение - w_τ и нормальное ускорение - w_n. Ускорение по своей сути - изменение во времени вектора скорости. Скорость же как и любой вектор может менять и направление и величину. За изменение скорости по величине отвечает касательное ускорение, которое направлено вдоль

касательной оси, как и скорость. Если направления скорости и касательного ускорения одинаковы, то говорят, что точка движется ускоренно, если направления противоположны, то точка движется замедленно. Нормальное ускорение отвечает за изменение скорости по направлению. Если нормальное ускорение отсутствует в каждой точке траектории, то скорость не меняет направления и, следовательно, точка движется по прямой. Если нормальное ускорение равно нулю в какой-то одной точке траектории, то может быть реализован один из трех случаев :

- траектория движения точки - прямая линия;
- данная точка является точкой перегиба траектории;
- скорость в данной точке равна нулю.

Скорость точки по модулю определяется дифференцированием криволинейной координаты (s) :

$$|\vec{v}| = \dot{s} \quad (3)$$

Модули касательного и нормального ускорений определяются следующими зависимостями :

$$|\vec{w}_t| = |\dot{\vec{v}}| \quad (4)$$

$$|\vec{w}_n| = \frac{v^2}{\rho} \quad (5)$$

В формуле (5) ρ - радиус кривизны траектории.

Модуль полного ускорения точки определится по теореме Пифагора :

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{w}_t|^2 + |\vec{w}_n|^2} \quad (6)$$

Определив с помощью координатного способа модуль скорости как функцию времени, используя (1а) и следующее соотношение :

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (7)$$

можно из (4) определить модуль касательного ускорения. Модуль полного ускорения вычисляется аналогично скорости по формуле :

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \quad (8)$$

Тогда из (6), зная полное и касательное ускорение, можно получить модуль нормального ускорения. Радиус кривизны траектории определяется из (5).

Результатами выполнения первой части курсовой работы является вычисление параметров движения точки - скорости и ускорения - при различных способах задания движения точки, а также радиуса кривизны траектории.

1.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела

Абсолютно твердое тело² является более сложным объектом изучения теоретической механики, чем материальная точка.

² В дальнейшем просто твердое тело.

Производная угла поворота по времени называется **угловой скоростью** вращения тела :

$$\omega = \dot{\phi}$$

Вторая производная угла поворота по времени называется **угловым ускорением** вращения тела :

$$\varepsilon = \ddot{\phi} = \dot{\omega}$$

При вращательном движении все точки твердого тела описывают концентрические окружности, располагающиеся в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, с центрами, лежащими на этой оси.

Линейные скорости точек тела связаны с угловой скоростью следующим образом (рис. 4):

$$v_A = \omega \cdot R$$

где R - радиус окружности, по которой движется точка. Направлена линейная скорость по касательной к окружности по направлению вращения тела.

Линейные ускорения точек вращающегося тела согласно формулам (4) и (5) можно также выразить в зависимости от угловой скорости и углового ускорения тела :

$$|\overline{w}_A^t| = \frac{v_A^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$|\overline{w}_A^n| = |\dot{v}| = \frac{d}{dt}(\omega \cdot R) = \varepsilon \cdot R$$

Полное ускорение точки A определится формулой (6) :

$$|\overline{w}_A| = R \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Во втором разделе курсовой работы исследуется плоскопараллельное движение твердого тела.

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое его движение, при котором все материальные точки тела движутся параллельно какой-либо плоскости, называемой базовой плоскостью. Такое движение твердого тела можно полностью описать движением любого сечения тела плоскостью, параллельной базовой плоскости. Т.к. речь идет об абсолютно твердых телах, то это сечение - суть **геометрически неизменяемая плоская фигура**³. Описав движение такой фигуры, можно судить и о плоскопараллельном движении всего тела.

Пользуясь приведенными выше определениями движения плоской фигуры, можно разложить плоскопараллельное движение на поступательную и вращательную части (рис. 5).

³ В дальнейшем просто плоская фигура.

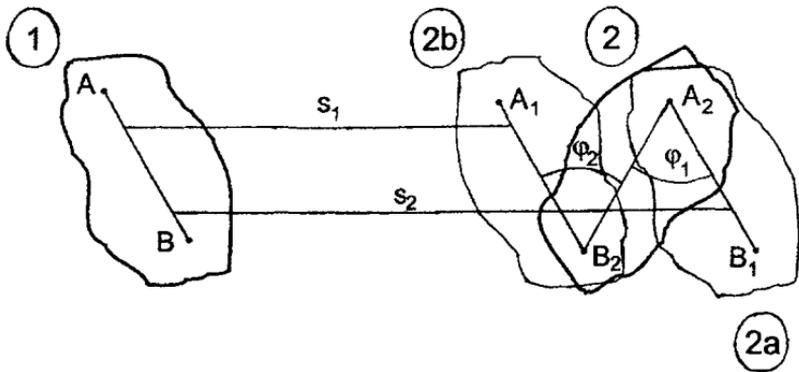


Рис. 5. - Разложение плоскопараллельного движения на поступательную и вращательную части

Пусть некоторая плоская фигура совершает плоскопараллельное движение из положения 1 в положение 2 (рис. 5). Выберем произвольным образом за полюс точку A , принадлежащую фигуре, и переместим фигуру поступательно ($AB \parallel A_2B_1$) из положения 1 в положение 2а так, чтобы полюс A совпал с положением A_2 . Затем, используя вращательное движение (полюс A_2 остается неподвижным), совместим положения 2а и 2 поворотом на угол φ_1 . Далее проделаем то же самое, выбрав за полюс некоторую другую точку B фигуры: совместим поступательным движением положения 1 и 2б ($AB \parallel A_1B_2$), затем - вращательным движением вокруг B_2 положения 2б и 2 поворотом на φ_2 . Это самый простой способ представления плоскопараллельного движения. Более детальный анализ рис. 4 показывает, что поступательная часть движения (s_1 и s_2) для каждого полюса различна: в данном примере $s_2 > s_1$, в то время как вращательная часть одинакова для обоих полюсов: углы φ_1 и φ_2 являются внутренними накрест лежащими двух параллельных прямых A_1B_2 и A_2B_1 и секущей A_2B_2 . Иными словами, вращательная часть плоскопараллельного движения инвариантна (не зависит), а поступательная часть, напротив, целиком зависит от выбора полюса. Последний вывод позволяет сделать предположение о существовании такого полюса, для которого поступательная часть движения будет отсутствовать вовсе. Чтобы совместить положение 1 с положением 2 достаточно будет осуществить поворот на угол $\varphi_1 = \varphi_2$ вокруг этого полюса. Такой полюс называется мгновенным центром скоростей (МЦС). С помощью МЦС плоскопараллельное движение твердого тела сводится к более простому виду - вращательному движению.

Таким образом, плоскопараллельное движение твердого тела можно представить в виде суммы поступательного и вращательного движений с произвольно выбранным полюсом, либо в виде вращательного движения вокруг МЦС.

МЦС - это точка, скорость которой равна нулю. Скорости всех точек тела пропорциональны расстояниям от точек до МЦС звена. Угловая скорость вращения тела находится как отношение скорости любой точки тела к расстоянию от этой точки до МЦС:

Существует несколько способов определения МЦС :

- геометрический : необходимо знать направления скоростей двух произвольных точек плоской фигуры(рис. 6).

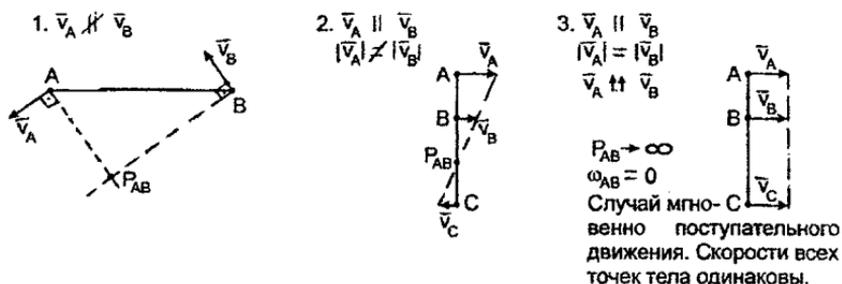


Рис. 6. - Способы определения МЦС

- аналитический :

- визуальный :

Если кинематический механизм состоит из нескольких различных тел (звеньев), то у каждого звена будет свой МЦС.

Методика определения скоростей и ускорений точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, заключается в следующем :

1. Перед анализом ускорений проводится анализ скоростей (если это возможно).

- анализ скоростей следует начинать со звена, параметры движения которого заданы в условиях задачи;

- для каждого звена определяется положение МЦС;

- при анализе скоростей определяются линейные скорости точек стыка звеньев по формуле :

$$|\vec{v}_M| = \omega_{MN} \cdot MP_{MN} \quad (9)$$

(скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости звена, которому принадлежит точка, и расстояния от точки до МЦС звена);

- линейные скорости точек следует направлять перпендикулярно линии, соединяющей точку с МЦС звена, в сторону его углового вращения;

- если в задаче не требуется определение скоростей точек, то анализ скоростей нужно проводить до определения угловой скорости звена, которому принадлежит точка с неизвестным ускорением (это ускорение требуется определить в условиях задачи).

2. Анализ ускорений :

- для анализа ускорений необходимо выбрать полюс (точка, ускорение которой известно как вектор, т.е. величина и направление);

- применяя теорему о сложении ускорений при плоскопараллельном движении, определять неизвестные ускорения точек механизма :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_N + \vec{w}_{MN}^{\text{ц}} + \vec{w}_{MN}^{\text{вр}} \quad (10)$$

(ускорение любой точки равно ускорению полюса плюс ускорение к полюсу центробежное плюс вращательное ускорение вокруг полюса);

- анализ ускорений следует начинать с того звена, для которого возможен выбор полюса.

После составления уравнения (10) нужно убедиться, что это уравнение можно решить, т.е. что оно содержит две простые (скалярные) неизвестные, имея в виду, что каждый вектор, входящий в уравнение имеет две простые неизвестные - величину и направление.

Далее уравнение (10) проецируется на две координатные оси. Из уравнений проекций определяются искомые неизвестные.

Уравнение (10) полностью соответствует представлению плоскопараллельного движения в виде суммы поступательного и вращательного движений : первое слагаемое правой части характеризует поступательную часть. Действительно, если (10) переписать в виде :

$$\vec{W}_M = \vec{W}_N,$$

то это уравнение описывает поступательное движение плоской фигуры - при поступательном движении скорости и ускорения всех точек фигуры одинаковы. Если в правой части (10) оставить два последних слагаемых :

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MN}^u + \vec{W}_{MN}^{bp},$$

то налицо вращательное движение плоской фигуры, каждая точка которой движется по концентрической окружности вокруг неподвижной точки N. В этом случае центростремительное ускорение является нормальным, а вращательное - касательным ускорением точки M (см. формулу (6)). Поскольку рассматриваемое вращательное движение всегда происходит вокруг полюса, то центростремительное ускорение направляется к полюсу, а вращательное - перпендикулярно центростремительному в сторону углового ускорения звена. Причем их модули будут определяться соотношениями :

$$\begin{aligned} |\vec{W}_{MN}^u| &= \omega_{MN}^2 \cdot MN \\ |\vec{W}_{MN}^{bp}| &= \varepsilon_{MN} \cdot MN \end{aligned} \quad (11)$$

Результатами выполнения второй части курсовой работы является определение скоростей и ускорений точек многозвенного плоского механизма, совершающего плоскопараллельное движение.

1.3. Сложное движение точки

Движение точки называется сложным, если она участвует сразу в нескольких движениях. Здесь выделяют три различных движения :

- абсолютное движение - движение точки относительно неподвижной системы отсчета;
- переносное движение - движение подвижной системы отсчета (подвижной среды);
- относительное движение - движение точки относительно подвижной системы отсчета.

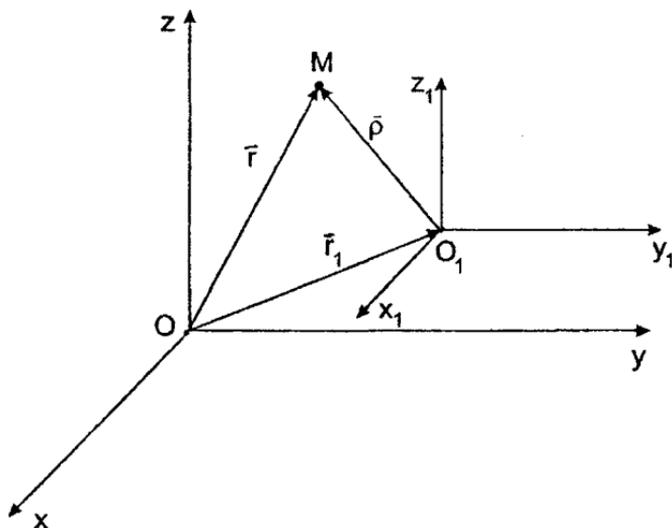


Рис. 7. - Сложное движение точки

На рис. 7 $Oxyz$ - неподвижная система отсчета, $O_1x_1y_1z_1$ - подвижная система отсчета, \vec{r} - абсолютный радиус-вектор точки M , \vec{r}_1 - радиус-вектор, характеризующий положение начала подвижной системы отсчета O_1 относительно неподвижной, \vec{p} - относительный радиус-вектор точки M .

Из рис. 6 видно, что :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{p} \quad (12)$$

Дифференцируя обе части (12) по времени, можно получить закон сложения скоростей точки, совершающей сложное движение :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Слева получается полная производная абсолютного радиуса-вектора точки M относительно неподвижной системы отсчета по времени, которая называется **абсолютной скоростью** точки M (скорость точки M относительно неподвижной системы отсчета). Первое слагаемое правой части является полной производной абсолютного радиуса-вектора начала отсчета подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ относительно неподвижной, т.е. - абсолютной скоростью точки O_1 :

$$\vec{v}_M^a = \vec{v}_{O_1}^a + \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Второе слагаемое правой части представляет собой производную относительно радиуса-вектора точки M по времени. Рассмотрим отдельно изменение \vec{p} по величине и направлению :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Первое слагаемое правой части является **локальной производной** (изменение вектора $\vec{\rho}$ по величине) и называется **относительной скоростью** точки М (скоростью точки М относительно подвижной системы отсчета). Второе слагаемое правой части - изменение относительного радиуса-вектора точки М по направлению может быть преобразовано по формуле Пуансона :

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

Таким образом :

$$\vec{v}_M^a = \vec{v}_{O_1}^a + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}_r$$

Первые два слагаемых правой части представляют собой скорость той точки подвижной системы отсчета (подвижной среды), с которой в данный момент совпадает точка М. Эта скорость называется **переносной скоростью** точки М. Окончательно формула сложения скоростей при сложном движении точки выглядит следующим образом:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (13)$$

где

\vec{v}_a - вектор абсолютной скорости точки М;

\vec{v}_r - вектор относительной скорости точки М;

\vec{v}_e - вектор переносной скорости точки М.

Дифференцируя по времени обе части (13), можно получить закон сложения ускорений точки, совершающей сложное движение :

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_e}{dt}$$

Полная производная абсолютной скорости по времени, стоящая в левой части уравнения, называется **абсолютным ускорением** точки М. Расписывая переносную скорость, получим :

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d}{dt} (\vec{v}_{O_1}^a + \vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

Представляя производную относительной скорости точки М в виде изменения по величине и направлению и раскрывая производную суммы и произведения, имеем :

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_{O_1}^a}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

Локальную производную вектора относительной скорости по времени, стоящую первой в правой части уравнения, называют **относительным ускорением** точки М. Третье слагаемое правой части представляет собой производную абсолютной скорости точки O_1 (начала отсчета подвижной системы координат) от времени и является абсолютным ускорением точки O_1 . Учитывая также, что производная угловой скорости по времени - есть угловое ускорение и перегруппировав слагаемые, можно записать :

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_a^a + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{\rho}}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{v}_r$$

Производную, входящую в четвертое слагаемое правой части разбиваем на две части как при выводе закона сложения скоростей :

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_a^a + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{\rho}}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times \overline{v}_r$$

Как было определено ранее локальная производная относительного радиуса-вектора - это относительная скорость точки М, поэтому уравнение можно переписать, приводя подобные слагаемые, в следующем виде :

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_a^a + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{\rho} + 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r$$

Возвращаясь к плоскопараллельному движению (10), можно утверждать, учитывая (11), что третье слагаемое правой части - вращательное ускорение точки М вокруг O_1 , а четвертое - центростремительное ускорение М к O_1 . Таким образом, второе, третье и четвертое слагаемые правой части уравнения представляют собой ускорение той точки подвижной среды, с которой в данный момент времени совпадает точка М, и называется **переносным ускорением** точки М. Окончательно закон сложения ускорений примет вид :

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_e + \overline{w}_c \quad (14)$$

где

\overline{w}_a - вектор абсолютного ускорения точки М;

\overline{w}_r - вектор относительного ускорения точки М;

\overline{w}_e - вектор переносного ускорения точки М;

\overline{w}_c - вектор Кориолисова ускорения точки М;

Уравнение (14) носит название теоремы Кориолиса. Ускорение Кориолиса (последнее слагаемое) (14) определяется следующей формулой :

$$\overline{w}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r \quad (15)$$

и характеризует взаимное влияние переносного и относительного движений друг на друга. Из (15) видно, что ускорение Кориолиса равно нулю в следующих трех случаях :

- переносное движение поступательное (мгновенно поступательное), т.е.

$\omega_e = 0$;

- точка остановилась в относительном движении ($v_r = 0$);

- векторы угловой и линейной скоростей коллинеарны (синус угла между векторами равен нулю).

Направление ускорения Кориолиса определяется либо по правилу правой тройки :

1. Определить направление векторов, входящих в произведение ($\overline{\omega}_e$ и \overline{v}_r);

2. Построить линию, перпендикулярную обоим векторам одновременно;

3. Ускорение Кориолиса будет направлено туда, откуда кратчайший поворот от вектора $\overline{\omega}_e$ к вектору \overline{v}_r будет виден против часовой стрелки;

либо по **правилу Жуковского** :

спроецировать вектор \vec{V}_r на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$ и повернуть его на 90° в сторону вращения.

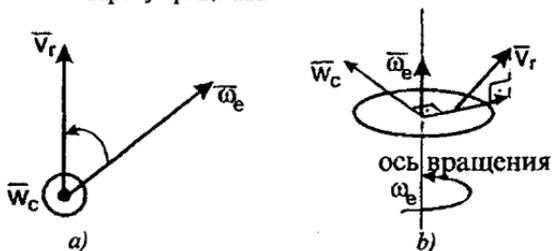


Рис. 8. - Определение направления ускорения Кориолиса

Результатом третьей части курсовой работы является определение абсолютной скорости и ускорения точки, совершающей сложное движение.

2. Статика

Равновесие плоской системы сил

Статика - раздел теоретической механики, который изучает равновесие тела или механической системы под действием сил.

В данном разделе курсовой работы исследуется статическое равновесие плоской конструкции. Для заданных внешних силовых факторов (сил, моментов, распределенных нагрузок), действующих на конструкцию, необходимо определить реакции внешних опор.

Как известно, любая механическая система будет находиться в равновесии, если главный вектор всех сил (геометрическая сумма всех сил, приложенных к системе) и главный момент всех сил (геометрическая сумма моментов всех сил) относительно произвольно выбранного полюса равны нулю :

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases} \quad (16 a)$$

Для плоской конструкции первое уравнение (16 а) дает два скалярных уравнения, а второе - одно :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_o = 0 \end{cases} \quad (16 b)$$

Заданная в курсовой работе схема конструкции называется **исходной схемой**, т.к. помимо сосредоточенных сил и моментов на конструкцию (или отдельные ее части) могут действовать **распределенные нагрузки**. При выполнении курсовой работы могут встретиться три различных вида нагрузки (рис. 5).



Рис. 9. - Законы распределения нагрузки

Поскольку распределенная нагрузка в явном виде не входит в уравнения равновесия (16 b), ее заменяют сосредоточенной силой по следующим законам :

- суммарная сила от распределенной нагрузки равна силе, которой заменяют нагрузку;

- суммарный момент, создаваемый распределенной нагрузкой, должен быть равен моменту от силы, заменяющей нагрузку, относительно произвольно выбранного полюса.

Эти законы выполняются следующими правилами :

- сила, заменяющая нагрузку, численно равна площади фигуры, по закону которой распределена нагрузка;

- точка приложения силы находится в центре тяжести фигуры, по закону которой распределена нагрузка.

Таким образом, сила, заменяющая прямоугольную распределенную нагрузку (рис. 9) численно равна :

$$Q = q \cdot a \quad (17)$$

и приложена в центре тяжести прямоугольника - точке пересечения диагоналей.

Сила, заменяющая треугольную распределенную нагрузку (рис. 9) численно равна :

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot a \quad (18)$$

и приложена в центре тяжести треугольника - точке пересечения медиан к сторонам.

Трапецидальную нагрузку (рис. 9) делят на треугольную и прямоугольную и заменяют двумя силами.

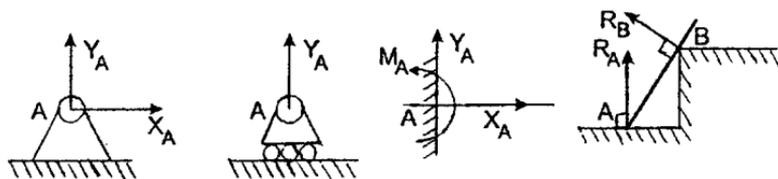
$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} (q_2 - q_1) \cdot a \\ Q_2 &= q_1 \cdot a \end{aligned} \quad (19)$$

После замены распределенной нагрузки следует произвести еще одно действие, чтобы превратить исходную схему в расчетную. Уравнения равновесия (16 б) справедливы только в случае свободной конструкции.

Свободным называется тело, лишённое внешних связей.

Связью называется любое условие, препятствующее перемещению тела в пространстве. Если связь позволяет телу (механической системе) перемещаться в пространстве как единому целому, то она называется внутренней, в противном случае связь - внешняя.

В курсовой работе встречаются следующие виды связей :



Шарнирно-неподвижная
опора

Шарнирно-подвижная
опора

Заделка

Опираие балки на
пол и угол

Рис. 10. - Виды связей

В соответствие с принципом освобождаемости от связи все внешние связи заменяются реакциями (рис. 10).

После замены связей и распределенной нагрузки исходная схема превращается в расчетную. Для расчетной схемы составляются уравнения равновесия (16 б), из которых определяются неизвестные внешние реакции. При со-

ставлении уравнений следует иметь в виду, что в данной курсовой работе, как и в теоретической механике в целом, рассматриваются только статически определимые конструкции.

Статически определимыми считаются конструкции, к которым приложены неизвестные силовые факторы (силы, моменты, распределенные нагрузки), определяемые только уравнениями статики (т.е. уравнениями (16b)).

3. Динамика

3.1. Динамика относительного движения материальной точки

Динамика - раздел теоретической механики, который изучает движение материальной точки (твердого тела, механической системы) под действием сил.

Основным законом динамики материальной точки является второй закон Ньютона :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{w} \quad (20)$$

Различают две задачи динамики - прямую и обратную (или первую и вторую) :

прямая задача заключается в определении левых частей уравнения (20) по известному закону движения точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Эта задача особых трудностей в решении не вызывает и на практике решается крайне редко (обычно, наоборот известны левые части, т.е. силы, а требуется определить закон движения точки). Суть решения прямой (первой) задачи динамики заключается в следующем : согласно формулам (2а) для декартовой или (4), (5) для естественной системы координат двойным дифференцированием закона движения по времени определяются компоненты вектора ускорения точки. Далее они используются в уравнении (20) для определения компонент вектора силы, действующей на точку⁴.

Обратная (вторая) задача динамики заключается в том, что по известным левым частям (силам) путем двукратного интегрирования определяется закон движения точки. Эта задача решается намного чаще предыдущей, поскольку соответствует реальному положению вещей в окружающем нас мире. Следует заметить также, что, как правило, обратную задачу решить намного сложнее, чем прямую, т.к. необходимо интегрировать дифференциальные уравнения 2-го порядка. Получить аналитическое решение удастся не для каждой задачи, некоторые задачи со сложным видом сил можно решить только численно.

Раздел «Динамика относительного движения точки» близок разделу «Кинематика сложного движения точки» - по сути здесь рассматривается сложное движение точки, о котором шла речь в параграфе 1.3. В уравнении (20) стоящее справа ускорение является абсолютным ускорением материальной точки. Если для (20) применить теорему Кориолиса (14), то получим:

$$m \vec{w}_e + m \vec{w}_r + m \vec{w}_c = \vec{F} \quad (21a)$$

для свободной точки и :

$$m \vec{w}_e + m \vec{w}_r + m \vec{w}_c = \vec{F} + \vec{N} \quad (21b)$$

для несвободной точки. В (21b) первое слагаемое правой части - равнодействующая всех активных сил, а второе - равнодействующая всех реактивных сил, действующих на точку. Второе слагаемое левой части - это произведение массы точки на ускорение относительного движения. Оставляя его слева и введя обозначения :

⁴ На точку может действовать и несколько сил, но, согласно одной из аксиом статики любое количество сил, приложенных в одной точке, можно заменить одной равнодействующей силой.

$$\bar{\Phi}_e = -m \bar{w}_e \quad (22)$$

$$\bar{\Phi}_c = -m \bar{w}_c$$

получим :

$$m \bar{w}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c \quad (23)$$

Уравнение (23) является окончательным видом уравнения относительного движения точки, где наряду с активными (\bar{F}), реактивными (\bar{N}) силами необходимо учесть переносную и кориолисову силы инерции ($\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_c$ соответственно). Сила инерции численно равна произведению массы точки на соответствующее ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению (22).

При выполнении данной части курсовой работы необходимо изобразить активные силы, действующие на точку, освободить точку от связей, добавив реакции связей, а также переносную и кориолисову силы инерции. Составить уравнение (23) и, спроектировав его на ось относительного движения точки, двукратным интегрированием определить закон относительного движения.

3.2. Общие теоремы динамики. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Самой сложной единицей в изучаемом курсе теоретической механики является механическая система - совокупность материальных точек и твердых тел, объединенных в единую систему.

Теорему об изменении кинетической энергии точки можно получить, используя (20). Для этого левую и правую части уравнения необходимо скалярно умножить на вектор скорости точки :

$$m \bar{w} \cdot \bar{v} = \bar{F} \cdot \bar{v} + \bar{N} \cdot \bar{v} \quad (24)$$

Используя выражения (1a) и (2a), (24) можно переписать в следующем виде :

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{N} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (25)$$

Умножая левую и правую части (25) на dt и учитывая, что $\bar{F} \cdot d\bar{r}$ - элементарная работа активных сил (работой силы называется скалярное произведение силы на вектор перемещения точки ее приложения), а $\bar{N} \cdot d\bar{r}$ - элементарная работа реактивных сил, имеем :

$$m \bar{v} \cdot \bar{v} = \delta A(\bar{F}) + \delta A(\bar{N}) \quad (26)$$

Теперь, чтобы получить из (26) теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, необходимо в левой части (26) внести вектор скорости и массу точки (считая ее постоянной) под знак дифференциала, а в правой части разделить элементарную работу всех сил (активных и реактивных) на элементарную работу внешних и внутренних сил :

$$d \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right) = \delta A^e + \delta A^i \quad (27)$$

Внешней по отношению к механической системе считается сила взаимодействия тела (точки), входящего в систему, с телом (точкой) не входящим в систему.

Если взаимодействуют два тела (точки), входящих в систему, то сила их взаимодействия является внутренней по отношению к системе.

Выражение, стоящее под знаком дифференциала, в левой части (27) называется кинетической энергией точки. Таким образом, (27) можно переписать окончательно :

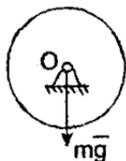
$$dT = \delta A^e + \delta A^i \quad (28)$$

Уравнение (28) называется теоремой об изменении кинетической в дифференциальной форме. Если (28) проинтегрировать, то получается более часто используемая интегральная форма теоремы :

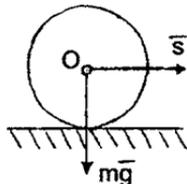
$$T - T_0 = A^e + A^i \quad (29)$$

Здесь T - значение кинетической энергии в конечный момент времени, а T_0 - в начальный момент, A^e и A^i - работа внешних и внутренних сил соответственно на рассматриваемом участке пути от начального до конечного момента времени.

Работа силы - скалярная функция векторного аргумента. Знак вариации, стоящий перед работой в уравнении (28), означает, что в общем случае работа не является полным дифференциалом, как кинетическая энергия. Работа равна нулю в следующих двух случаях :



a) точка приложения силы неподвижна (работа силы тяжести равна нулю)



b) вектор силы перпендикулярен вектору перемещения (работа силы тяжести равна нулю)

Рис. 11. - К определению работы силы

Для постоянных сил работа вычисляется как скалярное произведение векторов силы и перемещения точки приложения силы :

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (30a)$$

Для переменных сил сначала составляется выражение для элементарной работы, а затем интегрируется :

$$A = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (30b)$$

Работа силы считается положительной, если угол между векторами силы и перемещения острый, т.к. косинус угла между векторами положительный. Если угол тупой, - работа силы отрицательна.

Аналогично работе силы вычисляется работа крутящего момента. Для постоянного момента :

$$A = M\varphi \quad (31a)$$

Здесь M - величина момента, а φ - угол поворота тела.

Для переменного момента :

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi \quad (31b)$$

Работа момента считается положительной, если он способствует вращению, если препятствует, то - отрицательной.

В отличие от работы, кинетическая энергия точки (тела) может быть только положительной. Для различных видов движения твердого тела кинетическая энергия вычисляется следующим образом :

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \quad (32a)$$

для поступательного движения,

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (32b)$$

для вращательного движения, где I - момент инерции тела, а ω - его угловая скорость.

Плоскопараллельное движение обычно раскладывают на поступательное и вращательное (см. рис. 5). Поэтому для кинетической энергии можно записать такое выражение :

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (32c)$$

В данной части курсовой работы требуется посчитать скорость одного из элементов механической системы после того, как система вышла из состояния покоя и двигалась определенное время.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример выполнения задания

Пусть для анализа задан механизм, изображенный на рис. 8. Данные для анализа приведены в таб. 1.

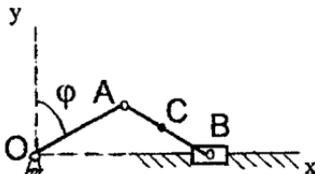


Рис. 12. - Кривошипно-ползунный механизм

Табл. 1

Исходные данные для выполнения первого раздела курсовой работы

Закон изменения угла φ , рад	Длина OA, м	Длина AB, м	Расстояние BC, м	Время t_1 , с
$6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)$	1	1	0,5	0,5

В первом разделе курсовой работы требуется определить закон движения точки C шатуна AB, траекторию его движения и положение в момент времени t_1 .

Для определения закона движения воспользуемся его координатной формой - спроецируем точку C на оси Oх и Oу : т.к. треугольник OAB - равнобедренный ($OA = AB$), то $\angle AOB = \angle ABO = 90^\circ - \varphi$. Следовательно :

$$x_C = OA \sin \varphi + AC \sin \varphi$$

или

$$x_C = (OA + AC) \sin \varphi = 1,5 \sin \varphi$$

Аналогично для второй координаты :

$$y_C = BC \cos \varphi = 0,5 \cos \varphi$$

Подставляя из таблицы 1 выражение для угла φ , окончательно получим :

$$x_C = 1,5 \sin [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)]$$

$$y_C = 0,5 \cos [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \quad (\text{П.1})$$

Уравнения (П.1) представляют собой закон движения точки C в координатной форме в плоской декартовой системе координат.

Для вывода уравнения траектории исключим из (П.1) время - разделим левую и правую части первого уравнения на 1,5, второго уравнения - на 0,5, возведем оба уравнения в квадрат и сложим :

$$x_C^2/2,25 + y_C^2/0,25 = 1 \quad (\text{П.2})$$

Траектория (П.2) представляет собой эллипс.

Чтобы определить положение точки C в момент времени t_1 , необходимо подставить значение времени в (П.1) :

$$x_C = 1,5 \sin [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 \cdot 0,5)] \approx 1,4146 \text{ м.}$$

$$y_C = 0,5 \cos [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 \cdot 0,5)] \approx -0,1663 \text{ м.}$$

Скорость точки определим дифференцированием закона движения по времени согласно (1а):

$$v_x = 1,5 \cos [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot 6\sqrt{2}/\pi \cdot \pi/2 \cdot (-\sin(\pi/2 t))$$

или

$$v_x = -4,5\sqrt{2} \cdot \cos [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot \sin(\pi/2 t)$$

В момент времени 0,5 с. значение скорости v_x будет равно :

$$v_x(t=0,5) = -4,5\sqrt{2} \cdot \cos(6/\pi) \cdot \sqrt{2}/2 \approx 4,5 \cdot (-0,3326) \approx 1,4967 \text{ м/с}$$

Аналогичным образом вычисляем другую координату скорости точки :

$$v_y = -0,5 \sin [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot 6\sqrt{2}/\pi \cdot \pi/2 \cdot (-\sin(\pi/2 t))$$

или

$$v_y = 1,5\sqrt{2} \cdot \sin [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot \sin(\pi/2 t)$$

В момент времени 0,5 с. значение скорости v_y будет равно :

$$v_y(t=0,5) = 1,5\sqrt{2} \cdot \sin(6/\pi) \cdot \sqrt{2}/2 \approx 1,5 \cdot 0,9431 \approx 1,4146 \text{ м/с}$$

Модуль скорости определяется теоремой Пифагора (7) :

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \approx 2,0594 \text{ м/с}$$

Ускорение точки С определим повторным дифференцированием закона движения, согласно (2а) :

$$w_x = -1,5 \cdot \sin [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot (3\sqrt{2} \sin(\pi/2 t))^2 + \\ + 1,5 \cdot \cos [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot (-1,5 \cdot \sqrt{2} \pi \cdot \cos(\pi/2 t))$$

При $t = 0,5$ с. ускорение w_x будет равно :

$$w_x(t=0,5) \approx -1,5 [0,9431 \cdot 18 \cdot 0,25 + 0,3326 \cdot 4,7124] \approx -8,7170 \text{ м/с}^2$$

$$w_y = -0,5 \cdot \cos [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot (3\sqrt{2} \sin(\pi/2 t))^2 - \\ - 0,5 \cdot \sin [6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 t)] \cdot (-1,5 \cdot \sqrt{2} \pi \cdot \cos(\pi/2 t))$$

При $t = 0,5$ с. ускорение w_y будет равно :

$$w_y(t=0,5) \approx -0,5 [0,3326 \cdot 18 \cdot 0,25 - 0,9431 \cdot 4,7124] \approx 1,1021 \text{ м/с}^2$$

Тогда полное ускорение точки С определится теоремой Пифагора :

$$|w_c| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \approx 8,7864 \text{ м/с}^2$$

Таким образом, задание первой части курсовой работы выполнено. Результаты вычислений необходимо свести в таблицу :

Табл. 2

Результаты расчетов первого раздела курсовой работы

Уравнения движения точки	Уравнение траектории точки	x_c , м	y_c , м	v_x , м/с	v_y , м/с	w_x , м/с ²	w_y , м/с ²
$x_c = 1,5 \sin$ $[6\sqrt{2}/\pi \cdot \cos(\pi/2 t)]$ $y_c = 0,5 \cos [6\sqrt{2}/\pi \cdot$ $\cos(\pi/2 t)]$	$x_c^2/2,25 + y_c^2/0,25 = 1$	1,41	-0,17	1,5	1,41	-8,72	1,10

Во второй части курсовой работы требуется провести кинематический анализ плоского механизма в момент времени t_1 . Для этой цели определим значение угла φ в момент времени t_1 :

$$\varphi(t_1=0,5) = 6\sqrt{2}/\pi \cos(\pi/2 \cdot 0,5) \approx 1,9099 \text{ рад.}$$

Изобразим положение механизма при данном значении угла :

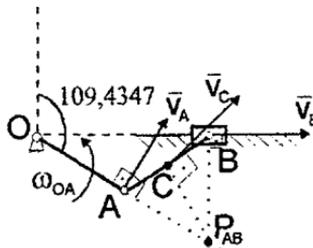


Рис. 13. - Анализ скоростей плоского кинематического механизма

Вычислим угловую скорость звена OA, подсчитав производную от φ в момент времени t_1 :

$$\omega_{OA}(t_1=0,5) = -3\sqrt{2} \sin(\pi/2 \cdot 0,5) \approx -3 \text{ рад/с.}$$

Знак минус показывает, что угловая скорость противоположна положительному отсчету угла φ (т.е. направлена в сторону его уменьшения - см. рис. 13). Звено OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки O. В соответствие с угловой скоростью ω_{OA} направляем линейную скорость точки A перпендикулярно линии, соединяющей точку A с неподвижной точкой O (рис. 13). Величину этой скорости находим, пользуясь формулой (9) :

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 1 = 3 \text{ м/с.}$$

Переходим к анализу звена AB : оно совершает плоскопараллельное движение. Зная скорость точки A как вектор (по величине и направлению), а также направление скорости точки B (точка B - ползун, который может двигаться только в горизонтальных направляющих), можно, используя рис. 3, определить положение МЦС звена в момент времени t_1 . Итак, P_{AB} - МЦС звена AB (рис. 13). Если вычислить расстояние AP_{AB} , то, пользуясь все той же формулой (9) легко найти значение угловой скорости звена AB :

из треугольника $AP_{AB}B$ по теореме синусов :

$$AP_{AB}/\sin \angle ABP_{AB} = AB/\sin \angle AP_{AB}B = BP_{AB}/\sin \angle BAP_{AB} \quad (\text{П.3})$$

из треугольника OAB :

$$\angle AOB = \angle ABO = 19,4347^\circ$$

следовательно :

$$\angle OAB = 180^\circ - \angle AOB - \angle ABO = 141,1306^\circ$$

тогда :

$$\angle BAP_{AB} = 180^\circ - \angle OAB = \angle AOB + \angle ABO = 38,8694^\circ,$$

$$\angle ABP_{AB} = 90^\circ - \angle ABO = 70,5653^\circ,$$

$$\angle AP_{AB}B = 180^\circ - \angle BAP_{AB} - \angle ABP_{AB} = 70,5653^\circ.$$

Треугольник $AP_{AB}B$ равнобедренный, следовательно :

$$AB = AP_{AB} = 1 \text{ м,}$$

а

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB} = 3/1 = 3 \text{ рад/с.}$$

Чтобы определить линейные скорости точек В и С, достаточно найти соответствующие расстояния от них до МЦС звена АВ (BP_{AB} и CP_{AB} соответственно). Из (П.3):

$$BP_{AB} = (AB \cdot \sin \angle BAP_{AB}) / \sin \angle AP_{AB}B \approx (1 \cdot 0,6275) / 0,943 \approx 0,6654 \text{ м.}$$

Тогда:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} \approx 3 \cdot 0,6654 = 1,9962 \text{ м/с.}$$

CP_{AB} можно вычислить по теореме косинусов из треугольника ACP_{AB} :

$$\begin{aligned} CP_{AB}^2 &= AP_{AB}^2 + AC^2 - 2 \cdot AP_{AB} \cdot AC \cdot \cos \angle BAP_{AB} \approx \\ &\approx 1^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 0,8193 \approx 0,4307 \end{aligned}$$

или

$$CP_{AB} \approx 0,6563 \text{ м.}$$

Соответственно:

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB} \approx 3 \cdot 0,6563 = 1,9689 \text{ м/с.}$$

На этом анализ скоростей закончен. Переходим к анализу ускорений.

Для анализа ускорений важен выбор полюса - за полюс выбирается точка, ускорение которой известно. На всем механизме известно ускорение только одной точки - точки О - оно равно нулю, т.к. точка О неподвижна. Воспользовавшись точкой О как полюсом, можно определить ускорение точки А по формуле (10):

$$\vec{w}_A = \vec{w}_O + \vec{w}_{OA}^u + \vec{w}_{OA}^{BP} \quad (\text{П.4})$$

Центростремительное и вращательное ускорения находим по формулам (11), предварительно сосчитав угловое ускорение звена ОА. Угловое ускорение по определению есть вторая производная угла φ или первая производная угловой скорости ω_{OA} :

$$\varepsilon_{OA} = \ddot{\varphi}_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = -1,5\sqrt{2} \pi \cos(\pi/2 t) \Big|_{t=0,5 \text{ с}} \approx -4,7124 \text{ рад/с}^2$$

Знаки угловой скорости и ускорения совпадают, это означает, что движение звена в данный момент времени - ускоренное. Следовательно, скорость и касательное ускорение точки А совпадают по направлению (рис. 14). Используя (11), можно определить центростремительное и вращательное ускорения звена ОА по величине:

$$\begin{aligned} |\vec{w}_{OA}^u| &= \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9 \cdot 1 = 9 \text{ м/с}^2 \\ |\vec{w}_{OA}^{BP}| &= \varepsilon_{OA} \cdot OA \approx 4,7124 \cdot 1 = 4,7124 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Направления ускорений показаны на рис. 14: центростремительное ускорение всегда направлено к полюсу, вращательное - перпендикулярно центростремительному в сторону углового ускорения звена.

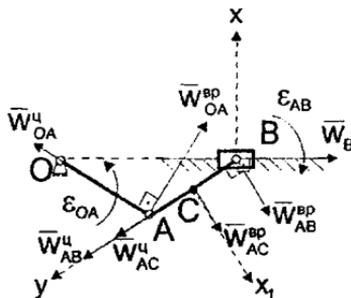


Рис. 14. - Анализ ускорений плоского кинематического механизма

Теперь, согласно (II.4) ускорение точки A известно полностью - ускорение полюса O равно нулю, оставшихся два определены и по величине и по направлению (рис. 14). Для определения ускорения точки B можно воспользоваться точкой A как полюсом :

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{AB}^u + \bar{w}_{AB}^{wp} \quad (\text{II.5})$$

Проанализируем уравнение (II.5) - правая часть :

- вектор w_A как ускорение полюса известен полностью и по величине и по направлению;

- вектор w_{AB}^u также известен полностью - направлен от точки B к полюсу A (рис. 14), а по величине равен :

$$|\bar{w}_{AB}^u| = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 9 \cdot 1 = 9 \text{ м/с}^2$$

- вектор w_{AB}^{wp} известен только по направлению (рис. 14), т.к. угловое ускорение звена AB неизвестно;

левая часть :

- вектор w_B известен по направлению, т.к. траектория движения ползуна B - горизонтальная прямая (рис. 14).

Таким образом, в уравнении (II.5) две неизвестных - одна слева (величина ускорения w_B) и одна справа (величина ускорения w_{AB}^{wp}). Для определения этих неизвестных необходимо спроектировать (II.5) на две оси. Если в уравнении направления всех векторов известно, то лучше всего выбрать оси, перпендикулярные каждой из неизвестных : на рис. 14 ось x перпендикулярна вектору w_B , а ось y - вектору w_{AB}^{wp} . Такое проектирование дает возможность определить обе неизвестных независимо друг от друга :

на ось x :

$$0 = w_{OA}^u \cdot \sin \angle AOB + w_{OA}^{wp} \cdot \cos \angle AOB - w_{AB}^u \cdot \sin \angle OBA - w_{AB}^{wp} \cdot \cos \angle OBA$$

или :

$$w_{AB}^{wp} \approx (9 \cdot 0,3327 + 4,7124 \cdot 0,943 - 9 \cdot 0,3327) / 0,943 = 4,7124 \text{ м/с}^2$$

на ось y :

$$-w_B \cdot \cos \angle OBA = w_{OA}^u \cdot \cos (180^\circ - \angle OAB) - w_{OA}^{wp} \cdot \sin (180^\circ - \angle OAB) + w_{AB}^u$$

или :

$$w_B \approx - (9 \cdot 0,3899 - 4,7124 \cdot 0,9209 + 9) / 0,943 = - 8,1695 \text{ м/с}^2$$

Знак «плюс» вращательного ускорения говорит о том, что оно направлено так, как показано на рис. 14. Знак «минус» ускорения точки B указывает на то, что действительное направление ускорения противоположно направлению, изображенному на рис. 14.

Зная вращательное ускорение звена АВ, легко подсчитать угловое ускорение этого звена по формуле (11) :

$$\varepsilon_{AB} = \overline{w_{AB}^{BP}} / AB \approx 4,7124 / 1 = 4,7124 \text{ рад/с}^2$$

Для выполнения второй части осталось определить ускорение точки С. Выберем за полюс точку А и воспользуемся (10) :

$$\overline{w_C} = \overline{w_A} + \overline{w_{AC}^u} + \overline{w_{AC}^{BP}} \quad (\text{П.6})$$

Проведем анализ (П.6) аналогично анализу (П.5) :

справа :

- вектор w_A известен полностью;

- вектор w_{AC}^u также известен полностью - направлен от точки С к полюсу А, величину можно определить из (11) :

$$|w_{AC}^u| = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 9 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ м/с}^2$$

- вектор w_{AC}^{BP} также полностью известен - направлен как показано на рис. 14, величина находится из (11) :

$$|\overline{w_{AC}^{BP}}| = \varepsilon_{AB} \cdot AC \approx 4,7124 \cdot 0,5 = 2,3562 \text{ м/с}^2$$

Проектируем (П.6) на оси x_1 и y (оси должны быть перпендикулярны друг другу, т.к. ускорения точки С неизвестно ни по величине, ни по направлению и для его определения необходимо пользоваться теоремой Пифагора) :

на x_1 :

$$w_C^{x_1} = -w_{OA}^u \cdot \sin(180^\circ - \angle OAB) - w_{OA}^{BP} \cdot \cos(180^\circ - \angle OAB) + w_{AC}^{BP}$$

или :

$$w_C^{x_1} \approx -9 \cdot 0,9209 - 4,7124 \cdot 0,3899 + 2,3562 \approx -7,7693 \text{ м/с}^2$$

на y :

$$w_C^y = w_{OA}^u \cdot \cos(180^\circ - \angle OAB) - w_{OA}^{BP} \cdot \sin(180^\circ - \angle OAB) + w_{AC}^u$$

или :

$$w_C^y \approx 9 \cdot 0,3899 - 4,7124 \cdot 0,9209 + 4,5 \approx 3,6695 \text{ м/с}^2$$

Тогда модуль полного ускорения точки С определится по теореме Пифагора :

$$w_C = \sqrt{(w_C^{x_1})^2 + (w_C^y)^2} \approx 8,5923 \text{ м/с}^2$$

Таким образом, задание второй части курсовой работы полностью выполнено.

Результаты расчетов необходимо свести в таблицу результатов :

Табл. 3

Результаты расчетов второго раздела курсовой работы

ω_{OA} , рад/с	v_A , м/с	ω_{AB} , рад/с	v_B , м/с	v_C , м/с	ε_{OA} , рад/с ²	ε_{AB} , рад/с ²	w_B , м/с ²	w_C , м/с ²
-3	3	3	2	1,97	-4,71	4,71	-8,17	8,59

Сравним результаты вычислений первой и второй части курсовой работы :

в первой части скорость точки С получилась равной 2,0594 м/с, а во второй - 1,9689 м/с. Вычислим погрешность :

$$\Delta v = \frac{2,0594 - 1,9689}{2,0594} 100\% \approx 4,3945\%$$

Данная погрешность является допустимой, т.к. не превышает 5%.

Ускорения точки С, вычисленное в первой части, составило - 8,7864 м/с², а во второй - 8,5923 м/с². Погрешность вычислений будет равна :

$$\Delta w = \frac{8,7864 - 8,5923}{8,7864} 100\% \approx 2,091\%$$

Она также является допустимой.

Третий раздел заключает кинематическую часть курсовой работы и включает в себя исследование сложного движения точки. Если в предыдущем разделе точка С не перемещалась по звену АВ, то здесь точка С будет участвовать сразу в двух движениях - вместе со звеном АВ и относительно него по закону: $BC = 4t^2 - 10t + 4,5$. В результате выполнения раздела требуется определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки С в момент времени t_1 , когда механизм находился в положении, показанном на рис. 14. При этом точка С также должна находиться на том же расстоянии от точки В, что и при анализе плоскопараллельного движения, т.е. ВС должно быть равно 0,5 м. В этом легко убедиться :

$$BC (t_1 = 0,5 \text{ с.}) = 4 \cdot (0,5)^2 - 10 \cdot 0,5 + 4,5 = 1 - 5 + 4,5 = 0,5 \text{ м.}$$

Это не случайное совпадение. Рассчитанные в предыдущем разделе скорость и ускорение точки С теперь будут использованы в качестве переносной скорости и ускорения точки С.

Перед проведением численного анализа выделим отдельные компоненты сложного движения точки С.

Движение точки С относительно Земли (неподвижного пространства) будет ее абсолютным движением.

Плоскопараллельное движение звена АВ, по которому движется точка С, будет переносным движением, т.к. стержень АВ - подвижная среда.

Собственное движение точки вдоль АВ будет относительным движением.

Для определения абсолютной скорости точки С воспользуемся формулой (13) и изобразим направления скоростей (рис. 15).

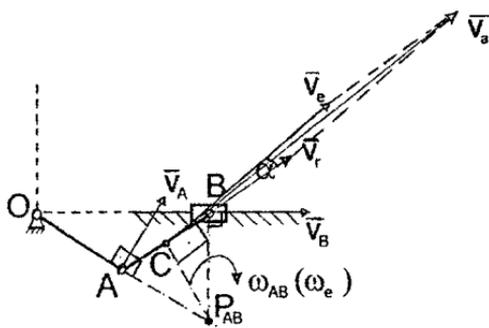


Рис. 15. - К анализу скоростей сложного движения точки С

Модуль переносной скорости был рассчитан в предыдущем разделе (это скорость той точки звена АВ, с которой в данный момент времени совпадает точка С):

$$v_e = 1,9689 \text{ м/с.}$$

Модуль относительной скорости определится дифференцированием по времени закона относительного движения:

$$v_r = 8t - 10$$

или в момент времени t_1 :

$$v_r = 8 \cdot 0,5 - 10 = -6 \text{ м/с.}$$

Знак «минус» означает, что в данный момент точка С движется к началу отрезка ВС, т.е. к точке В как показано на рис. 15. Направление абсолютной скорости v_a определится по правилу параллелограмма (рис. 15), а величина - по теореме косинусов:

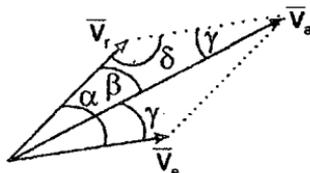


Рис. 16. - К определению величины абсолютной скорости точки С

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2 \cdot v_e \cdot v_r \cdot \cos \delta$$

Как видно из рис. 16, углы γ равны как внутренние накрест лежащие между двумя параллельными прямыми v_e и секущей v_a . Следовательно, угол δ можно расписать:

$$\delta = 180 - \beta - \gamma$$

Легко заметить также (см. рис. 16), что:

$$\beta + \gamma = \alpha$$

Таким образом:

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2 \cdot v_e \cdot v_r \cdot \cos(180 - \alpha)$$

или, используя формулы приведения:

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2 \cdot v_e \cdot v_r \cdot \cos \alpha \quad (\text{П.7})$$

Для определения угла α воспользуемся данными расчетов предыдущего раздела. Было определено:

$$CP_{AB} \approx 0,6563 \text{ м.}; BP_{AB} \approx 0,6654 \text{ м.}$$

Тогда из треугольника CBP_{AB} (рис. 15) по теореме косинусов можно записать:

$$BP_{AB}^2 = CB^2 + CP_{AB}^2 - 2 \cdot CB \cdot CP_{AB} \cdot \cos \angle BCP_{AB}$$

или:

$$-2 \cdot 0,5 \cdot 0,6563 \cdot \cos \angle BCP_{AB} + 0,5^2 + 0,6563^2 = 0,6654^2$$

откуда:

$$\cos \angle BCP_{AB} \approx 0,3625,$$

а сам угол:

$$\angle BCP_{AB} \approx 68,7468^\circ$$

Т.к. между переносной скоростью и направлением на МЦС (P_{AB}) всегда прямой угол, а угол между относительной скоростью и направлением на МЦС только что найден, легко определить α как разность между двумя этими углами:

$$\alpha = 90^\circ - \angle BCP_{AB} \approx 21,2532^\circ$$

Таким образом, модуль абсолютной скорости в момент времени $t_1 = 0,5$ с. будет равен:

$$v_a^2 = 1,9689^2 + 6^2 + 2 \cdot 1,9689 \cdot 6 \cdot \cos 21,2532^\circ \approx 61,8968;$$

$$v_a \approx 7,8675 \text{ м/с.}$$

Для определения абсолютного ускорения точки С используем формулу (14). Переносное ускорение уже определено в предыдущей части работы (П.6) и в разложении на оси CX_1 и CY (см. рис. 14) выглядит следующим образом :

$$w_e^{X_1} \approx -7,7693 \text{ м/с}^2; w_e^Y \approx 3,6695 \text{ м/с}^2.$$

Относительное ускорение определится повторным дифференцированием закона относительного движения по времени :

$$w_r = d^2(BC)/dt^2 = dv_r/dt = 8 \text{ м/с}^2$$

Относительное ускорение постоянно по величине и положительно по знаку. Знаки относительной скорости и ускорения разные, следовательно, относительное движение в данный момент времени замедленно. Направление относительного ускорения точки С показано на рис. 18.

Ускорение Кориолиса вычисляется по формуле (15). Т.к. плоскопараллельное движение звена АВ происходит в плоскости рисунка, вектор угловой скорости переносного движения точки С ω_c перпендикулярен этой плоскости и, следовательно, вектору относительной скорости v_r . Поэтому модуль ускорения Кориолиса равен :

$$w_C = 2 \cdot \omega_c \cdot v_r \cdot \text{Sin } 90^\circ$$

Величина ω_c определена при анализе плоскопараллельного движения :

$$\omega_{AB} = \omega_c = 3 \text{ рад/с.}$$

Таким образом :

$$w_C = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 = 36 \text{ м/с}^2$$

Направление ускорения Кориолиса в данном случае удобнее определять правилом Жуковского, т.к. вектор относительной скорости уже спроецирован на плоскость, перпендикулярную переносной угловой скорости. Остается лишь повернуть его на 90° в сторону вращения как показано на рис. 17.

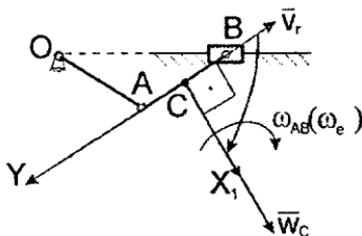


Рис. 17. - Определение направления ускорения Кориолиса

Покажем теперь направления всех ускорений (рис. 18). Абсолютное ускорение будем определять по проекциям. В общем случае для этой цели выбирают три взаимно перпендикулярные оси. Но в данной задаче переносное и относительное движение происходят в плоскости рисунка, т.е. точка С не выходит из этой плоскости, поэтому для проектирования уравнения (14) достаточно выбрать две оси. Их выбор очевиден : два ускорения проецируются на ось CY , а два на перпендикулярную ей CX_1 (см. рис. 18).

Табл. 5

Исходные данные для выполнения четвертого раздела курсовой работы

q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	M_1 , кН·м
3	4	7	20

При рассмотрении равновесия считаем, что механизм находится в том же положении, что в трех предыдущих частях работы. Результатом этого раздела является определение внешних реакций в шарнире О и подпятнике В, а также внутренних реакций в шарнире А.

Для составления уравнений равновесия необходимо исходную схему, изображенную на рис. 19, превратить в расчетную. Согласно аксиоме статике об эквивалентных системах сил любую систему сил можно заменить эквивалентной ей системой, не изменяя оказываемого воздействия. Поэтому первым этапом перехода от исходной схемы к расчетной является замена распределенной нагрузки сосредоточенными силами по правилам, описанным в данном пособии в разделе «Статика». В нашем примере есть два вида распределенной нагрузки - прямоугольная и треугольная. Согласно (17) сила, заменяющая прямоугольную нагрузку интенсивности q_2 будет равна :

$$Q_2 = q_2 \cdot AB = 4 \cdot 1 = 4 \text{ кН}$$

Сила, заменяющая треугольную нагрузку, рассчитывается по формуле (18) :

$$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5 \text{ кН}$$

Точки приложения сил Q_1 и Q_2 расположатся следующим образом : Q_2 будет приложена к середине звена АВ, т.е. к точке С, а Q_1 - на расстоянии одной третьей длины ОА от точки А, т.е. 1/3 м. от точки А (см. рис. 20). Второй шаг к расчетной схеме - замена внешних связей их реакциями согласно принципу освобожденности от связи. В рассматриваемой задаче внешние опоры - шарнир О и подпятник В - заменяются двумя взаимно перпендикулярными реакциями каждая (рис. 20).

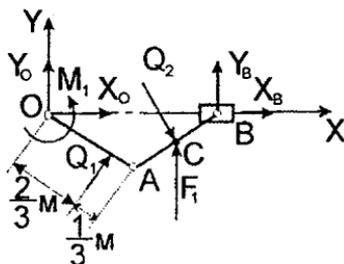


Рис. 20. - Расчетная схема

В данной схеме имеется четыре неизвестные внешние реакции, однако, задача является статически определимой ввиду того, что рассматриваемая конструкция состоит из двух частей (ОА и АВ), соединенных между собой шарниром А. Для определения внешних реакций рациональнее не разбивать составную конструкцию на части, а рассматривать ее равновесие целиком, пользуясь прави-

лом : если вся конструкция находится в равновесии, значит, любая ее часть также находится в равновесии. Т.к. шарнирное соединение в точке А не передает момент. Если разрезать конструкцию по шарниру А и рассматривать равновесие только одной ее части, то влияние отброшенной части выразится в двух взаимно перпендикулярных реакциях, в любом же другом сечении это влияние выразится также в двух взаимно перпендикулярных реакциях и изгибающем моменте. Т.е. если составлять уравнение моментов относительно шарнира А, то получится два независимых уравнения, т.к. момент и правой и левой частей относительно точки А должен быть равен нулю. В противном случае равновесие невозможно. Итак, можно составить четыре уравнения равновесия для определения четырех внешних реакций, используя формулу (16б) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 \\ \sum_{i=1}^N M_A^{\text{слева}} = 0 \\ \sum_{i=1}^N M_A^{\text{справа}} = 0 \end{cases}$$

или :

$$X_O + X_B + Q_1 \cdot \sin \angle BOA + Q_2 \cdot \sin \angle OBA = 0;$$

$$Y_O + Y_B + F_1 + Q_1 \cdot \cos \angle BOA - Q_2 \cdot \cos \angle OBA = 0;$$

$$- Q_1 \cdot 1/3 - X_O \cdot OA \cdot \sin \angle BOA - Y_O \cdot OA \cdot \cos \angle BOA + M_1 = 0;$$

$$F_1 \cdot AC \cdot \cos \angle BOA - Q_2 \cdot AC + Y_B \cdot AB \cdot \cos \angle OBA - X_B \cdot AB \cdot \sin \angle OBA = 0.$$

Подставляя численные значения, получим :

$$X_O + X_B + 1,5 \cdot \sin 19,4347^\circ + 4 \cdot \sin 19,4347^\circ = 0;$$

$$Y_O + Y_B + 7 + 1,5 \cdot \cos 19,4347^\circ - 4 \cdot \cos 19,4347^\circ = 0;$$

$$- 1,5 \cdot 1/3 - X_O \cdot 1 \cdot \sin 19,4347^\circ - Y_O \cdot 1 \cdot \cos 19,4347^\circ + 20 = 0;$$

$$7 - 0,5 \cdot \cos 19,4347^\circ - 4 \cdot 0,5 + Y_B \cdot 1 \cdot \cos 19,4347^\circ - X_B \cdot 1 \cdot \sin 19,4347^\circ = 0;$$

или :

$$X_O + X_B = -1,8299;$$

$$Y_O + Y_B = -4,6425;$$

$$0,3327 \cdot X_O + 0,943 \cdot Y_O = 19,5;$$

$$- 0,3327 \cdot X_B + 0,943 \cdot Y_B = -1,3005;$$

Выражая поочередно неизвестные, получим :

$$Y_B \approx -13,3502 \text{ кН}; X_B \approx -35,7607 \text{ кН}; Y_O \approx 8,7077 \text{ кН}; X_O \approx 33,9308 \text{ кН}.$$

Знаки «минус» у первых двух реакций говорят о том, что они направлены противоположно указанным на рис. 20 направлениям, тогда как направления двух последних реакций соответствуют рисунку. Для определения внутренних реакций в шарнире А рассмотрим равновесие части конструкции, располагающейся левее точки А, заменив действие отброшенной правой части искомыми реакциями (рис. 21).

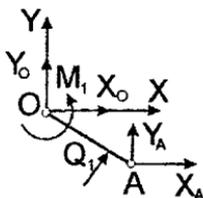


Рис. 21. - Равновесие левой части составной конструкции

Составим два уравнения сил в проекциях на оси X и Y :

$$X_O + X_A + Q_1 \cdot \sin \angle BOA = 0;$$

$$Y_O + Y_A + Q_1 \cdot \cos \angle BOA = 0;$$

Выражая неизвестные и подставляя численные значения, получим :

$$X_A = -X_O - Q_1 \cdot \sin \angle BOA = -33,9308 - 1,5 \cdot 0,3327 \approx -34,4298 \text{ кН};$$

$$Y_A = -Y_O - Q_1 \cdot \cos \angle BOA = -8,7077 - 1,5 \cdot 0,943 \approx -10,1222 \text{ кН};$$

Проверим правильность расчетов, составив для левой части конструкции уравнение моментов относительно шарнира O :

$$Q_1 \cdot 2/3 + X_A \cdot OA \cdot \sin \angle BOA + Y_A \cdot OA \cdot \cos \angle BOA + M_1 = 0;$$

или :

$$1,5 \cdot 2/3 + (-34,4298) \cdot 1 \cdot 0,3327 + (-10,1222) \cdot 1 \cdot 0,943 + 20 = 0;$$

$$1 - 11,4548 - 9,4552 + 20 = 0.$$

Получили истинное равенство, что подтверждает проведенные расчеты. Результаты вычислений четвертой части курсовой работы заносятся в таблицу :

Табл. 6

Результаты расчетов четвертого раздела курсовой работы

X_O , кН	Y_O , кН	X_B , кН	Y_B , кН	X_A , кН	Y_A , кН
33,93	8,71	-35,76	-13,35	-34,43	-10,12

Два последних раздела курсовой работы посвящены динамике. В пятой части работы рассматривается относительное движение материальной точки. Результатом выполнения этой части является определение закона и вычисление численных значений параметров относительного движения в момент времени t_1 , а также силу давления точки D на стержень OA. Исходные данные для расчетов приведены в таблице 7, а схема механизма показана на рис. 22.

Табл. 7

Исходные данные для выполнения пятого раздела курсовой работы

c, Н/м	ω_{OA} , рад/с	m_D , кг	l_0 , м	z_0 , м	\dot{z}_0 , м/с	t_1 , с
10	3	0,2	0,4	0,5	0	0,1

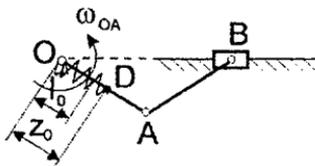


Рис. 22. - К исследованию относительного движения точки

На данном этапе угловая скорость вращения звена OA считается постоянной. Изобразим все активные (сила тяжести), реактивные (сила упругости пружины, реакция стержня OA) и две силы инерции (переносную центробежную и кориолисову) (см. рис. 23). Переносная касательная сила инерции будет отсутствовать по причине постоянства переносной угловой скорости.

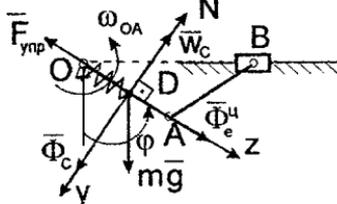


Рис. 23. - Силы, действующие на точку в ее относительном движении

Направление силы упругости на рис. противоположно положительному направлению оси z . Переносная центробежная сила инерции направлена противоположно соответствующему ей центростремительному ускорению от точки O (центра переносного вращения). Для определения направления кориолисовой силы инерции нужно сначала направить ускорение Кориолиса по правилу Жуковского: положительное направление относительной скорости - вдоль оси z , она расположена в плоскости, перпендикулярной переносной угловой скорости, поворачиваем на прямой угол в сторону вращения (рис. 23). Сила инерции будет иметь противоположное направление. Следует заметить, что в данной задаче лишь сила тяжести и центробежная сила инерции будут иметь неизменные направления - вертикально вниз и от точки O соответственно, направление кориолисовой силы инерции зависит от направления относительной скорости, которое постоянно меняется при колебаниях точки D по стержню OA : если точка движется в положительном направлении оси z , то сила инерции будет направлена так, как показано на рис. 23, если точка возвращается к шарниру O , то направление силы будет противоположным. Сила упругости также будет менять свое направление, однако, в зависимости от положения точки D . Если координата z , отсчитываемая от точки O , больше длины недеформированной пружины (l_0), т.е. пружина растянута, то направление силы соответствует рисунку, если меньше, то сила направлена противоположно.

После расстановки всех выше указанных сил необходимо спроецировать их на ось относительного движения, т.е. ось z , составив уравнение относительного движения (23):

$$m_D \ddot{z} = -F_{\text{упр}} + \Phi_c^{\text{II}} + m_D g \cdot \cos \omega_{OA} t \quad (\text{II.8})$$

Модуль силы упругости определится произведением жесткости на деформацию :

$$|F_{\text{упр}}| = c(z - l_0),$$

а центробежной силы инерции по формуле (22) :

$$|F_e^u| = m_D \cdot w_e^u = m_D \cdot \omega_{OA}^2 \cdot z$$

Подставляем эти выражения в (П.8) :

$$m_D \ddot{z} = -c(z - l_0) + m_D \cdot \omega_{OA}^2 \cdot z + m_{DG} \cdot \text{Cos } \omega_{OA} t$$

Следует отметить, что в полученном уравнении уже учтено изменение направления силы упругости : если пружина растянута, то скобка $(z - l_0)$ положительна, и сила направлена в соответствие с рис. 23, если пружина сжата, то скобка отрицательна, а сила имеет противоположное направление.

Подставим численные значения параметров в последнее уравнение :

$$0,2 \ddot{z} = -10(z - 0,4) + 0,2 \cdot 3^2 \cdot z + 0,2 \cdot 9,81 \cdot \text{Cos } 3t$$

Преобразуем уравнение :

$$\ddot{z} + 41z = 20 + 9,81 \cdot \text{Cos } 3t \quad (\text{П.9})$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с неоднородностью в виде суммы тригонометрической и многочлена. По правилам высшей математики общее решение неоднородного уравнения складывается из суммы общего решения соответствующего ему однородного и частного решения неоднородного. Причем в данной задаче будет два частных решения, т.к. присутствуют две неоднородности :

$$z = Z_0 + \dot{z}_1 + \dot{z}_2$$

Составим однородное уравнение, соответствующее (П.9) :

$$\ddot{z} + 41z = 0$$

и решим его с помощью характеристического уравнения :

$$\lambda^2 + 41 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 6,4031i$$

Для такого вида корней общее решение однородного уравнения будет иметь вид :

$$Z_0 = C_1 \cdot \text{Cos } 6,4031t + C_2 \cdot \text{Sin } 6,4031t$$

Частное решение, соответствующее неоднородности в форме многочлена, нужно искать в виде :

$$\dot{z}_1 = A_1,$$

где A_1 - некоторая постоянная. Первая и вторая производные от этого решения будут равны нулю. Подставляя \dot{z}_1 и его вторую производную в (П.9), получим :

$$0 + 41A_1 = 20$$

Откуда :

$$A_1 = 2,05,$$

Следовательно :

$$\dot{z}_1 = A_1 = 2,05$$

Учтем теперь тригонометрическую неоднородность :

$$\dot{z}_2 = A_2 \cdot \text{Cos } 3t + A_3 \cdot \text{Sin } 3t;$$

$$\ddot{z}_2 = -3A_2 \cdot \text{Sin } 3t + 3A_3 \cdot \text{Cos } 3t;$$

$$\ddot{\dot{z}}_2 = -9A_2 \cdot \text{Cos } 3t - 9A_3 \cdot \text{Sin } 3t.$$

Подставляя \ddot{z}_2 и его вторую производную в (П.9), получим :

$-9A_2 \cdot \cos 3t - 9A_3 \cdot \sin 3t + 41 \cdot (A_2 \cdot \cos 3t + A_3 \cdot \sin 3t) = 9,81 \cdot \cos 3t$
 Приравниваем соответствующие коэффициенты, стоящие перед синусами и косинусами слева и справа в уравнении :

$$\begin{aligned} -9A_2 + 41A_2 &= 9,81; \\ -9A_3 + 41A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом :

$$A_2 = 0,3066; A_3 = 0.$$

Частное решение \ddot{z}_2 примет вид :

$$\ddot{z}_2 = 0,3066 \cdot \cos 3t,$$

а общее решение неоднородного уравнения будет выглядеть следующим образом :

$$z = Z_0 + \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = C_1 \cdot \cos 6,4031t + C_2 \cdot \sin 6,4031t + 2,05 + 0,3066 \cdot \cos 3t$$

Для определения констант C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями, вычислив предварительно первую производную по времени от z :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -6,4031 \cdot C_1 \cdot \sin 6,4031t + 6,4031 \cdot C_2 \cdot \cos 6,4031t - 0,9198 \cdot \sin 3t; \\ 0,5 &= C_1 + 0 + 2,05 + 0,3066; \\ 0 &= 0 + 6,4031 \cdot C_2 + 0, \end{aligned}$$

откуда находим :

$$C_1 = -1,8566; C_2 = 0.$$

Окончательно получаем уравнение относительного движения :

$$z = -1,8566 \cdot \cos 6,4031t + 2,05 + 0,3066 \cdot \cos 3t$$

Выражение для скорости тогда примет вид :

$$\dot{z} = 11,888 \cdot \sin 6,4031t - 0,9198 \cdot \sin 3t$$

В момент времени $t_1 = 0,5$ с. значение относительных координаты и скорости будут равны :

$$\begin{aligned} z(t_1) &= -1,8566 \cdot \cos (6,4031 \cdot 0,1) + 2,05 + 0,3066 \cdot \cos (3 \cdot 0,1) \approx 0,8541 \text{ м.}; \\ \dot{z}(t_1) &= 11,888 \cdot \sin (6,4031 \cdot 0,1) - 0,9198 \cdot \sin (3 \cdot 0,1) \approx 6,8306 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Определим теперь давление точки на стержень ОА. Для этой цели спроецируем уравнение относительного движения (23) на ось y (рис. 23) :

$$m_D \ddot{y} = \Phi_C - N + m_D g \cdot \sin \omega_{OA} t,$$

т.к. точка D в своем относительном движении не движется вдоль оси y , то, очевидно, что ускорение \ddot{y} равно нулю, т.е. :

$$0 = \Phi_C - N + m_D g \cdot \sin \omega_{OA} t$$

Учитывая, что кориолисова сила инерции определяется формулой (22) :

$$\Phi_C = 2 \cdot \omega_{OA} \cdot \dot{z} \cdot \sin L (\omega_{OA}; \dot{z}) = 2 \cdot 3 \cdot (11,888 \cdot \sin 6,4031t - 0,9198 \cdot \sin 3t) \cdot 1 = 71,328 \cdot \sin 6,4031t - 5,5188 \cdot \sin 3t$$

и выражая N , имеем :

$$N = 71,328 \cdot \sin 6,4031t - 5,5188 \cdot \sin 3t + 1,962 \cdot \sin 3t$$

или окончательно :

$$N = 71,328 \cdot \sin 6,4031t - 3,5568 \cdot \sin 3t.$$

Сила давления шарика на стержень ОА по третьему закону Ньютона (закону действия и противодействия) равна по модулю реакции N , но противоположна по направлению.

Результаты расчетов заносим в таблицу :

Табл. 8

Результаты расчетов пятого раздела курсовой работы

$z, \text{ м}$	$z(t_1), \text{ м}$	$\dot{z}, \text{ м/с}$	$\dot{z}(t_1), \text{ м/с}$	$N, \text{ Н}$
$-1,86 \cdot \cos 6,4031t + 2,05 + 0,31 \cdot \cos 3t$	0,85	$11,89 \cdot \sin 6,4031t - 0,92 \cdot \sin 3t$	6,83	$71,33 \cdot \sin 6,4031t - 3,56 \cdot \sin 3t$

Шестая, заключительная часть курсовой работы посвящена исследованию движения плоской механической системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии. Необходимо определить работу внешнего момента M_1 , приложенного к звену OA, по разгону механизма, включающего в себя стержни OA и AB, ползун B и точку D, из крайнего нижнего положения, где он находился в состоянии покоя, до положения, указанного на рис. 23, за время $t_1 = 0,1$ с. Для расчетов будут использованы найденные ранее параметры движения точек и звеньев. Исходные данные для вычислений приведены в таблице 9 :

Табл. 9

Исходные данные для выполнения шестого раздела курсовой работы

$m_{OA}, \text{ кг}$	$m_{AB}, \text{ кг}$	$m_B, \text{ кг}$
2	2	3

Начальное и конечное положение механизма показаны на рис. 24.

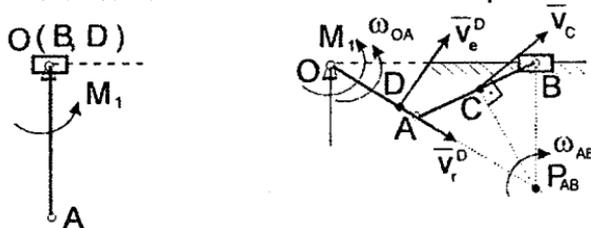


Рис. 24. - Начальное и конечное положение механической системы

Теорема об изменении кинетической энергии выражается формулой (29). Следует заметить, однако, что в рассматриваемой задаче движение начинается из состояния покоя и работа внутренних сил равна нулю, поэтому (29) можно переписать следующим образом :

$$T = A^e \quad (\text{П.10})$$

Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий ее отдельных частей :

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_B + T_D \quad (\text{П.11})$$

Рассмотрим каждое слагаемое (П.11). Стержень OA совершает вращательное движение, поэтому его кинетическая энергия в конечный момент времени определится выражением (32b) :

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{OA} \omega_{OA}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot m_{OA} \cdot OA^2 \cdot \omega_{OA}^2$$

Работа внешних силовых факторов будет состоять из четырех слагаемых :

$$A^e = A(m_{OAG}) + A(m_{ABG}) + A(m_{DG}) + A(M_1) \quad (\text{П.12})$$

Последнее слагаемое (П.12) является искомой неизвестной, остальные можно определить, пользуясь рис. 25. Следует заметить, что высота подъема центра масс Е стержня ОА центра масс С стержня АВ будут одинаковы вследствие равенства длин стержней. Поэтому справедливы следующие выражения :

$$\begin{aligned} A(m_{OAG}) &= -m_{OAG} \cdot h_C = -m_{OAG} \cdot A_1 C_1 \cdot \sin \angle E_1 C_1 A_1 = \\ &= -2,9,81 \cdot 0,5 \cdot \sin 19,4347^\circ \approx -3,2641 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

$$A(m_{ABG}) = -m_{ABG} \cdot h_C = -2,9,81 \cdot 0,5 \cdot \sin 19,4347^\circ \approx -3,2641 \text{ Дж.}$$

$$\begin{aligned} A(m_{DG}) &= m_{DG} \cdot h_D = m_{DG} \cdot OD_1 \cdot \sin \angle B_1 OD_1 = \\ &= 0,2 \cdot 9,81 \cdot 0,8541 \cdot 0,3327 \approx 0,5576 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Таким образом, (П.12) будет выглядеть :

$$A^e = -3,2641 - 3,2641 + 0,5576 + A(M_1) = A(M_1) - 5,9706$$

Теперь, пользуясь (П.10), можно вычислить работу момента M_1 :

$$18,9261 = A(M_1) - 5,9706$$

Откуда :

$$A(M_1) = 24,8967 \text{ Дж.}$$

Результаты вычислений заносим в таблицу :

Табл. 10

Результаты расчетов шестого раздела курсовой работы

$T_{OA},$ Дж	$T_{AB},$ Дж	$T_B,$ Дж	$T_D,$ Дж	$A(m_{OAG}),$ Дж	$A(m_{ABG}),$ Дж	$A(m_{DG}),$ Дж	$A(M_1),$ Дж
3	4,63	5,98	5,32	-3,26	-3,26	0,56	24,9

Оформление курсовой работы должно соответствовать стандарту СПб СГАУ 6.1.4. - 97 Общие требования к оформлению учебных текстовых документов.

Список литературы

1. Н.Н. Бухгольц Основной курс теоретической механики ч. 1 и 2. – М.: Наука. – 1966.
2. А.А. Яблонский Сборник заданий для курсовой работы по теоретической механике. – М. : Высшая школа. – 1985.
3. А.И. Лурье Аналитическая механика. – М. Наука. – 1961.
4. СТП СГАУ 6.1.4. - 97 Общие требования к оформлению учебных текстовых документов : методические указания.

Лицензия ЛР №071438 от 7.05.97г.

Подписано в печать 23.09.2002г. Формат 60x84 /16.
Печать офсетная. Печатных листов 2,75. Тираж 100 экз.
Заказ № 184.

Издательство "ПАРУС".
443080, г. Самара, пр. К. Маркса, 201