ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

Г.М. Гришанов, О.В. Павлов

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

САМАРА 2005

УДК 65.01
ББК 65.050

Гришанов Г.М., Павлов О.В. **Исследование систем управления:** Учебное пособие/ Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2005. 128 с.

ISBN 5-7883-0344-3

Учебное пособие посвящено вопросам эффективного управления организационными системами. Подробно рассматриваются различные модели и методы, используемые для анализа и синтеза систем управления. В пособии отражены последние достижения научных направлений, связанных с теорией управления организациями: теории активных систем, теории иерархических игр, теории контрактов. Пособие содержит методические рекомендации по организации и планированию исследования систем управления. Приведены контрольные вопросы и примеры, иллюстрирующие основные положения курса.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 080507 «Менеджмент организации» на очной, очно-заочной и заочной формах обучения. Может быть полезно специалистам в области управления.

Учебное пособие подготовлено на кафедре экономики.

Ил 36. Библиогр.: 39 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва»

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Засканов В.Г.
д-р экон. наук, проф. Герасимов Б.Н.

ISBN 5-7883-0344-3

ВВЕДЕНИЕ

В рыночной экономике эффективность организации определяется существующей системой управления. Поэтому совершенствование систем управления является актуальной и важной задачей для менеджера.

«Исследование систем управления» (ИСУ) - это дисциплина, раскрывающая общую методологию и организацию проведения исследовательской работы с целью эффективного управления организациями. Целью дисциплины является развитие навыков исследовательской работы будущих менеджеров [18].

Задачами дисциплины являются:

- формирование научного представления об исследовательской деятельности в области управления организациями;
- рассмотрение конкретных методов проведения исследований;
- ознакомление с вопросами планирования и организации исследований систем управления;
- обучение практическим навыкам исследования и совершенствования систем управления.

Дисциплина "Исследование систем управления" опирается на целый ряд управленческих дисциплин: "Теория организации", "Основы менеджмента", «Организационное поведение». Методология курса «Исследование систем управления» востребована в курсе «Управленческие решения».

В результате изучения дисциплины «Исследование систем управления» студенты должны

- знать: содержание общенаучных методов исследования систем управления, логику и порядок планирования и организации исследования систем управления, принципы оценки результатов исследования;
- уметь: применять методологию исследования к решению практических проблем управления организациями;
- проводить анализ существующих систем управления организациями;
- уметь проектировать системы управления с заданными свойствами.

В первой главе данного учебного пособия приведены основные понятия ИСУ, описываются особенности организаций и процесса их функционирования, дается характеристика их структуры, формулируется задача управления, приводится классификация задач управления. Описываются гипотезы и концепции, принимаемые в курсе ИСУ, модели принятия решений субъектами организаций, состав и описание общенаучных методов исследования. Рассматриваются вопросы планирования и организации исследования систем управления, приводится описание этапов исследования систем управления.

Вторая глава посвящена исследованию механизмов планирования. Рассматриваются приоритетные механизмы распределения ресурсов, механизмы внутренних цен, конкурсные механизмы, механизмы экспертизы, механизмы распределения затрат.

В третьей главе рассматриваются механизмы стимулирования. Приводятся постановка задачи стимулирования, классификация базовых систем стимулирования, операции над базовыми системами стимулирования, исследование механизмов стимулирования в многоэлементных системах.

Четвертая глава посвящена исследованию механизмов управления в производственной системе «поставщики - заказчик». Формулируются математические модели принятия решений участниками производственной системы. Проводится анализ экономических интересов поставщиков и заказчика. Рассматриваются механизмы согласованного взаимодействия с помощью премирования и изменения договорных цен.

Материал учебного пособия изложен в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта по дисциплине «Исследование систем управления».

Авторы надеются, что учебное пособие будет интересным и полезным не только для студентов, но и для специалистов, занимающихся исследованием систем управления организациями.

Глава 1. ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ РОЛЬ В УПРАВЛЕНИИ ОРГАНИЗАЦИЯМИ

Но вот какой вопрос меня беспокоит: ежели Бога нет, то, спрашивается, кто управляет жизнью человеческой и всем вообще распорядком на земле?
Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТА

1.1.Система управления организацией, как объект исследования

В данном курсе рассматривается исследование систем управления организациями. В «Философском энциклопедическом словаре» приводится следующее определение ***организации – «объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определённых процедур и правил»***. Таким образом, под понятие организации (организационной системы) подпадают предприятия всех форм собственности, банки, государственные учреждения.

Исследование – это вид познавательной деятельности человека, направленный на приобретение новых знаний. В данном курсе под ***исследованием понимается процесс получения новых научных знаний о функционировании организаций с целью эффективного управления ими.***

Участниками организационной системы являются руководящий орган (центр - principal), коллективы исполнителей (бригада, отдел, цех) или отдельные исполнители, которых будем называть агентами (agent) .

Совокупность процедур и правил, определяющих взаимодействие участников организационной системы (ОС) называется её механизмом функционирования. Частью механизма функционирования является ***система (механизм) управления – совокупность процедур принятия управленческих решений.***

Управленческое решение - это выбор наилучшего по выбранному критерию действия из множества возможных альтернатив. Система управления определяет поведение участников организации, принятие ими управляющих решений.

Управление ОС – это воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого от неё поведения.

Объектом исследования в данном курсе является система управления организацией. ***Предметом исследования*** является конкретная проблема, возникающая в процессе управления организацией [18].

Функционирование организации состоит из следующих этапов:

1) этап сбора данных;
2) этап принятия решений центром о плане действий;
3) этап реализации плана центра агентами;
4) этап подведения итогов, стимулирование агентов.

На первом этапе центр для решения какой-либо проблемы должен собрать информацию, которая позволит ему разобраться в ситуации. На этом этапе центр может получить недостоверные данные от других участников организационной системы. Дело в том, что человек может сознательно сообщать недостоверную информацию. Например, начальник спрашивает у подчинённого, сколько ему нужно времени для выполнения определённой работы. Подчинённый оценивает длительность выполнения работы в три дня, но, не желая «напрягаться», начальнику сообщает, что работа затянется на неделю. Но мало иметь достоверную информацию, центр должен принять эффективное решение. Очень важно, чтобы принятое центром решение выполнялось на этапе реализации, иначе даже эффективное решение не обеспечит успех организации.

Основное отличие организации от технической системы – наличие у агентов активного целенаправленного поведения. Смысл активности заключается в том, что каждый агент имеет собственные цели, для достижения которых он может выбирать собственные стратегии. Наиболее существенным проявлением активности является сознательное искажение информации о возможностях, потребностях и целях элемента, а также зависимость эффективности работы от заинтересованности в ее результатах. Управление системами, в которых присутствуют люди, принципиально отличается от управления техническими системами. В качестве примера рассмотрим управление автомобилем. Для того чтобы прибыть из точки отправления в точку прибытия необходимо наметить траекторию движения, которая затем реализуется путём выдачи управляющих воздействий (нажатием педали газа или тормоза, поворотом руля влево или вправо). Если автомобиль функционирует исправно, то с помощью управляющих воздействий запланированная траектория без проблем реализуется. С организационной системой дело обстоит иначе, мало наметить программу развития организации, издать приказ или распоряжение, необходимо разработать систему управления, которая будет их реализовывать. Например, с целью сокращения числа опозданий сотрудников на работу руководство организации издаёт приказ о запрете опозданий, если в дополнение к этому приказу не будет предусмотрена соответствующая система управления в виде штрафа, то этот приказ не будет реализован.

Исследование систем управления организациями направлено на совершенствование эффективности принимаемых управленческих решений. Система управления играет определяющую роль в деятельности организации, от неё зависят конечные показатели (прибыль, выручка и другие). Система управления во многом определяет конкурентоспособность фирмы в условиях рыночной экономики. Поэтому исследование систем управления представляет важную и актуальную задачу для любой организационной системы.

1.2.Описание организационных систем и классификация задач управления

Из двух моделей «лучшей» всегда будет та, которая при именно такой степени приближения представляет данные наблюдения наиболее простым способом.

Морис Алле

Для исследования организационной системы необходимо построить её описание или модель. Описание организационной системы состоит из задания пяти параметров [7,24,23]:

1) состава ОС (перечисление участников, входящих в ОС). Определяет **«кто»** входит в систему;
2) структуры ОС - **совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС.** Структура определяет **«кто с кем взаимодействует»**;
3) множеств допустимых стратегий участников ОС, отражающих институциональные, технологические и другие ограничения их совместной деятельности. Определяют **«кому что разрешено»**;
4) целевых функций участников ОС, отражающих их предпочтения и интересы. Определяют **«кто в чём заинтересован»**;
5) информированности - той информации, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях. Определяет **«кто что знает»**.

Пяти параметрам модели организационной системы соответствуют пять типов управления (рис. 1.1): управление составом, структурой, целевыми функциями, допустимыми множествами, информированностью [7]. Предметом управления может быть любой из пяти вышерассмотренных параметров модели организационной системы:

1. **Управление составом организации.** Центр решает задачу, с кем из агентов заключить контракт, с кем расторгнуть [22].
2. **Управление структурой.** Центр принимает решение - кто кому подчинён, кто с кем взаимодействует [2].

рис. 1.1. Типы управления организационными системами

3. **Мотивационное управление.** Центр воздействует на целевые функции агентов, выражающие их интересы. Это достигается путём установления центром планов, системой штрафов и поощрений за выбор тех или иных действий. Мотивационное управление разделяется на задачи планирования и стимулирования [3,5,7,22,23,24,26,34,35].
4. **Институциональное управление.** Центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агента. Это может осуществляться правовыми актами, распоряжениями, приказами, корпоративной культурой [3,7].
5. **Информационное управление.** Участники организационной системы информированы неодинаково. Сообщая или не сообщая ту или иную информацию, центр воздействует на поведение агентов [25].

Наиболее изученным в настоящее время является мотивационное управление.

Простейшая ***базовая модель ОС*** состоит из одного управляющего органа - центра и одного управляемого субъекта - агента, которые принимают решения однократно и в условиях полной информированности. Расширениями базовой модели являются:

1. **Динамические ОС.** Участники принимают решения многократно в нескольких периодах функционирования [26].
2. **Многоэлементные ОС.** Имеются несколько агентов, которые принимают решения независимо [3, 7].

3. **ОС с распределённым контролем.** Имеется несколько центров, осуществляющих управление одними и теми же агентами [5, 7].
4. **Многоуровневые ОС.** Имеется трех- или более уровневая иерархическая структура [2].
5. **ОС с неопределённостью.** Участники не полностью информированы о существующих параметрах [5, 24].
6. **ОС с ограничением совместной деятельности.** Существуют глобальные ограничения на совместный выбор агентами своих действий [7].
7. **ОС с сообщением информации.** Агенты сообщают информацию друг другу или центру [7, 24].

1.3.Анализ структур управления организацией

Угол зрения зависит от занимаемого места.

Закон Майлса

Что такое официальное лицо или не официальное? Всё это зависит от того, с какой точки зрения смотреть на предмет… Сегодня я неофициальное лицо, а завтра, глядишь официальное! А бывает и наоборот, и ещё как бывает!

Из высказываний Коровьева.

Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТА

Структура ОС - совокупность информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС. Связи отражают различные взаимоотношения между элементами (обмен информацией, сообщение управляющих воздействий, поставки продукции и т.д.). Существуют горизонтальные и вертикальные связи. Горизонтальные связи – это связи между агентами, а вертикальные – между агентами и центром.

На рис. 1.2 изображена двухуровневая организационная система. На верхнем уровне находится центр, на нижнем уровне – агенты. Примером могут служить системы: руководство холдинга – дочерние компании, руководство компании – подразделения компании, руководство цеха – производственные участки, начальник производственного участка – рабочие.

Двухуровневым системам присущи все важные свойства, характерные всем организациям:

1. Иерархичная структура.
2. Приоритет действий центра.
3. Наличие несовпадающих целей у центра и агентов.

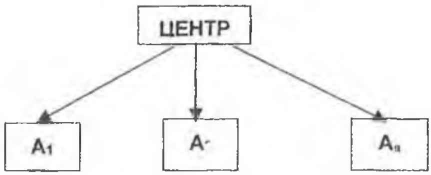

Рис. 1.2. Двухуровневая организационная система

Реальные организации являются многоуровневыми (рис. 1.3). Любую многоуровневую систему можно подвергнуть декомпозиции до двухуровневой.

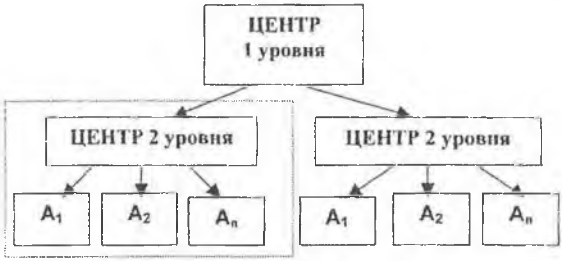

Рис. 1.3. Линейная структура управления

Наиболее часто в организациях используются следующие типы структур управления [35]:

1) линейная структура управления;

2) линейно-функциональная структура управления;

3) матричная структура управления.

Линейная структура управления. Распределение должностных обязанностей осуществляется так, чтобы каждый агент был максимально нацелен на выполнение производственных задач организации, все полномочия идут от высшего звена к низшему (рис.1.3).

В этой структуре центр осуществляет единоличное руководство, выполняет все функции управления. Пример: начальник производства – начальники цехов – начальники участков – рабочие.

Преимущества: четко реализуется распределение обязанностей и полномочий, простота в управлении, личная ответственность руководителя за результаты работы, оперативность принятия решений. ***Недостатки:*** негибкость, неприспособленность к дальнейшему развитию, невозможность решения функциональных проблем, которые требуют специальных знаний. Хорошо работает в небольших фирмах при высоком профессионализме и авторитете руководителя, а также большой заинтересованности подчиненных в успешной работе фирмы.

Линейно - функциональная структура управления. Это наиболее распространенная структура управления. Линейное управление подкреплено специальными вспомогательными (функциональными) службами (рис.1.4).

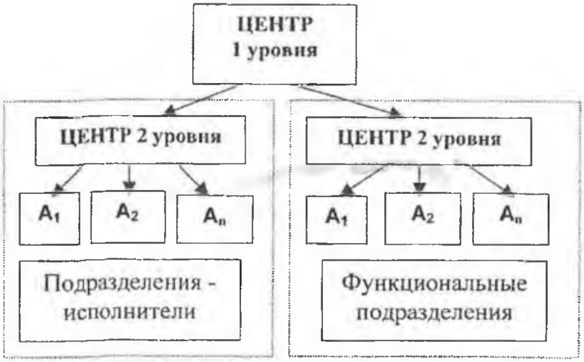

Рис. 1.4. Линейно - функциональная структура управления

Например, планирование на предприятии осуществляется системой функциональных подразделений: плановым отделом завода и планово-диспетчерскими бюро (ПДБ) цехов; вопросы технологии производства решает отдел главного технолога совместно с технологическими бюро цехов.

Функциональные подразделения могут управлять вспомогательными и обслуживающими подразделениями. Например, отделу главного механика подчиняют ремонтные цеха и участки, диспетчерскому отделу – внутризаводской и внутрицеховой транспорт. Главное ***преимущество*** линейно - функциональной структуры – ее эффективность. Основной ***недостаток*** состоит в том, что цели фирмы могут быть проигнорированы ради целей структурного подразделения, поскольку специалисты, работающие вместе в одном подразделении, замыкаются в сфере своих взаимных интересов. Например, производственники могут заниматься решением только проблем производства продукции, не замечая проблем сбыта продукции. Другими словами, деятельность и цели структурных подразделений часто преобладают над деятельностью и целями фирмы.

Матричная структура управления предусматривает создание двух ветвей управления: административное управление - подчинение непосредственному руководителю; функциональное управление – подчинение менеджерам проекта, отвечающим за выполнение конкретного проекта. Агенты подчиняются одновременно нескольким центрам, функции которых могут быть различными (координирующая, обеспечивающая, контролирующая). Матричная структура управления направлена на максимальное усиление преимуществ и сведение к минимуму недостатков линейной и линейно – функциональной структур управления (рис. 1.5).

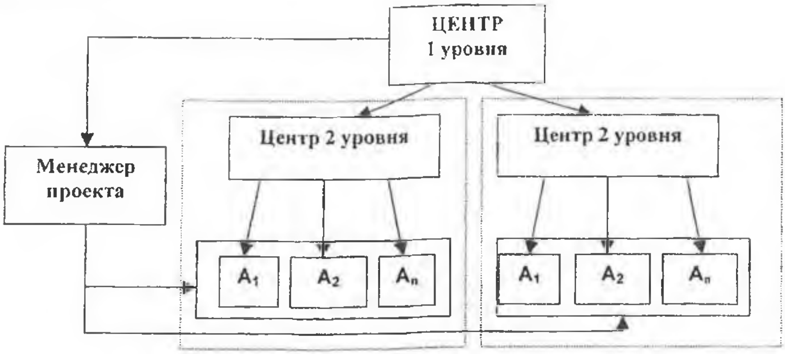

Рис. 1.5. Матричная структура управления

Матричная структура получается накладыванием вертикальной структуры на горизонтальную структуру управления. Применяется при сложном наукоемком производстве.

1.4.Гипотезы и концепции, принимаемые при исследовании систем управления

Природа может скрывать информацию, её бывает трудно понять, но считается, что она не лжёт преднамеренно.

Оскар Моргенштерн

…люди как люди. Любят деньги, но ведь это всегда было… Человечество любит деньги, из чего бы те ни были сделаны, из кожи ли, из бумаги ли, из бронзы или золота. Ну, легкомысленны… ну, что ж… и милосердие иногда стучится в их сердца… квартирный вопрос только испортил их…

Размышления Воланда в театре Варьете.

Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТА

Попробуем, как и известный герой известного романа, описать поведение человека. В общем случае это весьма сложная задача, поэтому попробуем решить задачу полегче: описать поведение человека в конкретной экономической ситуации. Описание поведения человека приводит к необходимости формирования определённых гипотез.

В курсе «Микроэкономика» изучалась концепция экономического человека, который ведёт себя таким образом, чтобы максимизировать свою субъективную полезность. Интересы любого субъекта: агента или центра - описываются целевой функцией (или функцией полезности, функцией предпочтения). Значения целевой функции позволяют сравнивать различные альтернативы. Если есть два действия из множества допустимых действий, то лучшим будет то, которое обеспечивает большее значение целевой функции [7].

Гипотеза рационального поведения заключается в том, что субъект с учётом имеющейся у него информации выбирает наилучшее для него действие, которое обеспечивает максимум его целевой функции.

Введём понятие ***обстановки*** – совокупности центра, агентов, внешней среды. На выбор субъекта оказывают воздействие факторы внешней среды, действия других участников ОС, которые ему не подконтрольны. Относительно этих факторов у субъекта имеется недостаточная информация – неопределённость.

Объективная неопределённость – это неполная информированность субъекта относительно параметров обстановки.

Субъективная (игровая) неопределённость - это неполная информированность субъекта о принципах поведения других участников ОС.

Рассмотрим влияние объективной неопределённости на принятие решений субъектом. Примером объективной неопределённости является курс доллара или евро, цены товаров и т.д. Учтём воздействие обстановки, введя неопределённый фактор φ, принадлежащий множеству Ω. В этом случае целевая функция субъекта зависит от значения, которое принимает неопределённый фактор. Для того чтобы описать принятие решения субъектом в условиях неопределённости, вводится ***гипотеза детерминизма: субъект, принимая решение, стремится устранить неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности.***

Для этого субъект должен перейти от целевой функции, зависящей от неопределённых факторов, к целевой функции зависящей от параметров, которые он может выбрать сам.

Устранение объективной неопределенности возможно следующими способами.

1.Выбор конкретного значения φ_l для фактора обстановки. Субъект выбирает действие y, принадлежащее множеству Y, максимизируя свою целевую функцию $f(y, \varphi_l)$ при конкретном значении фактора внешней среды φ_l. Выбор значения φ_l основан на мнении субъекта. Например, субъект считает, что курс доллара в ближайшее время будет 28,8 руб. и исходя из этого принимает решение.

2.Субъект предполагает, что будет реализовано наихудшее для него состояние обстановки. Субъект максимизирует свою целевую функцию $f(y,\varphi)$ при условии, что параметр φ принимает наихудшее для него значение:

$$y^* = \arg\max_{y \in Y} \min_{\varphi \in \Omega} f(y,\varphi).$$

Такой принцип принятия решения называется ***принципом максимального гарантированного результата.*** Этот принцип даёт пессимистичную оценку целевой функции, наименьшее её значение. Гарантирующая стратегия выражена в пословице **«надейся на лучшее, а готовься к худшему».**

3.Субъект предполагает, что будет реализовано наилучшее для него состояние обстановки. Агент максимизирует свою целевую функцию $f(y,\varphi)$ при условии, что параметр φ принимает наилучшее для него значение:

$$y^o = \arg\max_{y \in Y} \max_{\varphi \in \Omega} f(y,\varphi).$$

Такой принцип принятия решения называется ***принципом оптимизма.*** Этот принцип даёт оптимистичную оценку целевой функции, наибольшее её значение.

Принципы пессимизма и оптимизма задают интервал, которому принадлежит неопределённый параметр φ. Неопределённость называется интервальной, если известен интервал значений неопределённого параметра. Понятно, что реальные значения неопределённого параметра φ будут находиться между оптимистичной и пессимистичной оценкой. Возможны любые комбинации этих оценок.

4.***Вероятностый подход.*** Субъекту известно распределение вероятностей $p(\varphi)$ неопределенного параметра. Такая неопределённость называется вероятностной. Целевая функция субъекта зависит от его действия и неопределённого параметра. Устранить эту неопределённость возможно, используя операцию математического ожидания:

$$w(y) = \int_{\Omega} f(y,\varphi)p(\varphi)d\varphi.$$

Устранив неопределённость, снова получим детерминированную модель. Устранение неопределённости возможно путём вычисления риска, то есть вероятности того, что значение целевой функции окажется меньше, чем заданное. Количественная оценка риска выражается дисперсией.

Таким образом, гипотеза детерминизма проявляется в том, что субъект, тем или иным способом устраняя неопределённость, принимает решение в условиях полной информированности.

Рассмотрим влияние игровой неопределённости - неполной информированности о принципах поведения других участников организационной системы. В случае, когда агентов несколько, возникает ***игра – взаимодействие игроков (участников ОС), в которой целевая функция каждого игрока зависит как от его собственного действия, так и от действий других игроков.*** Теория игр описывает взаимодействие участников ОС в ситуации, когда выигрыш одного зависит от действия всех [21].

Набор рациональных стратегий агентов, то есть устойчивых и прогнозируемых исходов игры, называется решением игры или равновесием.

Каждый из n игроков стремится максимизировать целевую функцию $f_i(y)$, где $y=(y_1,...,y_n)$ - вектор действия всех игроков, называется ситуацией игры, y_i - действие (стратегия) i-го игрока, $i \in n$, Y_i - множество допустимых действий i-го игрока. Совокупность стратегий остальных игроков $y_{-i}=(y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)$ называется обстановкой игры для i-го игрока, $Y_{-i}=\prod_{j \neq i} Y_j$ - множество допустимых действий остальных игроков.

В теории игр не существует единого понятия равновесия. Нельзя, исходя из целевых функций и допустимых множеств, однозначно утверждать, что игроки придут к определённому решению игры. Введение различных предположений о рациональном поведении игроков порождает различные понятия равновесия [15].

1.Максиминное (гарантирующее) равновесие. Вводится предположение: каждый игрок считает, что все остальные игроки действуют против него, то есть игрок использует критерий пессимизма, аналогичный рассмотренному выше принципу максимального гарантированного результата в условиях интервальной неопределенности. Игрок выбирает гарантирующую стратегию $y_i^г$, максимизируя свою целевую функцию, предполагая, что остальные игроки выбирают действия, которые её минимизируют:

$$y_i^г = \arg\max_{y_i \in Y_i} \min_{y_{-i} \in Y_{-i}} f(y_i, y_{-i}).$$

Недостаток гарантирующей стратегии: даёт агенту пессимистичную оценку результата игры, которая не всегда реализуется на практике, так как остальные игроки стремятся максимизировать свои целевые функции, а не навредить партнёру. Выбор гарантирующих стратегий игроками приводит к максиминному (гарантирующему) равновесию.

2.Равновесие в доминантных стратегиях. Вводится предположение: у i-го игрока существует действие, которое является наилучшим независимо от того, что делают остальные игроки. Стратегия y_i^d будет доминантной, если какое бы действие y_i не выбрал игрок и какая бы обстановка y_{-i} не сложилась, его выигрыш будет максимальным при этой стратегии:

$$\forall i = 1,n \quad \forall y_i \in Y_i \quad \forall y_{-i} \in Y_{-i} \quad f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}).$$

Если у каждого игрока существует доминантная стратегия, то **совокупность доминантных стратегий называется равновесием в доминантных стратегиях.** Если есть равновесие в доминантных стратегиях, то каждый игрок принимает решение независимо, что редко реализуется на практике. Зато очень удобно для исследователя, так как описывать независимое принятие решений проще.

3.Равновесие Нэша. Американский математик Джон Нэш (прототип главного героя в фильме «Игры разума») предложил следующую концепцию: устойчивым решением игры агентов является такой вектор их действий, от которого в одиночку никому не выгодно отклоняться. Никто из игроков не может увеличить свою целевую функцию, выбирая другое действие, при условии, что остальные игроки не меняют своих стратегий. ***Равновесие Нэша –***

это такая ситуация в игре, в которой ни одному из игроков не выгодно изменять свою стратегию y_i^N, если её не изменяют остальные игроки:

$$\forall i = 1,n \quad \forall y_i \in Y_i \quad f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N).$$

Преимущество равновесия Нэша в том, что оно часто существует на практике. ***Недостатком*** является то, что оно не всегда единственно. Если существует два равновесия, то невозможно определить, в каком окажутся игроки, для этого нужны дополнительные предположения. Равновесие по Нэшу неустойчиво к отклонению двух и более игроков, предполагает отсутствие коалиций игроков, то есть рассматриваются бескоалиционные игры.

4.Парето-эффективные ситуации. Итальянский экономист и социолог Вильфредо Парето (1848-1923) предложил следующую концепцию: предпочтительной является такая ситуация игры, если в любой другой ситуации все игроки выигрывают не больше и хотя бы один агент проигрывает строго меньше. Такое состояние системы называется *эффективным по Парето (Парето-эффективным)*. ***Вектор действий игроков y^P будет эффективным по Парето, если для любого другого вектора действий найдется такой агент, что значение его целевой функции будет строго меньше:***

$$\forall y \neq y^P \quad \exists i = 1,n \quad f_i(y) < f_i(y^P).$$

Таким образом, при переходе из Парето - эффективного состояния невозможно одновременно увеличить значения целевых функций всех игроков.

К сожалению, эффективность по Парето никак не соотносится ни с одной из трёх концепций решений игры.

1.5. Роль системного подхода в исследовании систем управления

> Когда система основана на аналогии и совпадении согласно законам вероятности и правильно построенных суждениях, то она достаточно удовлетворяет всем требованиям своего предмета.
>
> Иммануил Кант

«Экономико-математический словарь» Л.И. Лопатникова даёт следующее определение: ***«система – множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство».*** Создание сложных систем и управление ими потребовало организации междисциплинарных исследований, привлечения специалистов разных научных профилей: экономистов, психологов, социологов, математиков и т.д. В результате необходимости изучения сложных систем - технических, экономических, биологических, социальных и других - возникла дисциплина системный анализ. Истоки системного анализа находятся в тех дисциплинах, которые занимаются проблемами принятия решений – теории исследования операций и методов теории управления [20].

Дисциплина системный анализ сформировалась в конце XIX и начале XX века, когда появились первые работы по теории регулирования, когда в экономике возникло понятие оптимального решения, целевой функции (функции полезности), был сформулирован принцип компромисса Парето. В конце шестидесятых годов XX века из системного анализа выделились научные направления, которые рассматривали проблемы управления социально-экономическими системами.

1. **Теория активных систем,** учитывающая целенаправленное поведение участников организации. Центром развития теории является Институт проблем управления РАН (бывший Институт автоматики и телемеханики) – научная школа Буркова В.Н. [2, 3-7, 15, 22, 26, 34,35].
2. **Теория иерархических игр.** Центром развития этой теории является Вычислительный центр РАН – научная школа Н.Н. Моисеева и Ю.Б. Гермейера [8-11, 19-20].

3. **Теория контрактов (theory of contracts),** исследующая задачи стимулирования в условиях вероятностной неопределённости и развиваемая зарубежными учёными – O. Hart, B. Holmstrom и др. [22, 36-37].
4. **Теория реализуемости (implementation theory),** исследующая задачи реализуемости соответствий группового выбора механизмами планирования, также развиваемую в основном зарубежными учёными E. Maskin, R.Myerson и др. [22,37].

Изучение объектов и явлений как систем вызвало формирование новой научной методологии - системного подхода, используемого в различных областях науки.

Системный подход – это подход к исследованию объекта как к системе, в которой выделены элементы, внутренние и внешние связи, а цели каждого элемента определены исходя из цели всей системы.

Основные черты системного подхода

1) формулировка цели исследования;

2) выделение объекта исследования как системы из окружающей среды;

3) установление внутренней структуры системы и выявление внешних связей;

4) постановка целей перед элементами системы, исходя из цели всей системы;

5) разработка модели системы управления и проведение на ней исследований.

Системный подход предполагает решение задач анализа и синтеза. Задача анализа (декомпозиция) предполагает изучение свойств системы, её отдельных элементов. Задача синтеза состоит в построении системы с заданными свойствами.

1.6.Общенаучные методы исследования систем управления

> Действительность слишком сложна, что бы наш разум мог охватить её целиком, а модели были и остаются тем компромиссом, который даёт возможность синтезировать реальность, одновременно расширяя возможности нашего разума, с тем чтобы эту реальность вместить.
>
> Аурелио Печчеи

Для обоснованного выбора центром системы управления он должен уметь предсказывать поведение агентов - их реакцию на те или иные управляющие воздействия. Экспериментировать в практической деятельности, применяя различные управления и изучая реакцию подчинённых, не представляется возможным. Деятельность организации после ряда таких экспериментов может полностью прекратиться из-за своей неэффективности, несмотря на то, что у руководителя ещё останется много управленческих идей. Для изучения применяют моделирование – исследование систем управления на моделях. Для этого исследователь должен построить адекватную модель, отражающую все свойства реальной системы управления. С помощью имеющейся модели исследователь может решить задачу анализа и синтеза. ***Задача анализа системы управления заключается в определении реакции управляемой системы на управляющие воздействия. Задача синтеза состоит в выборе управления, которое приводит к требуемой реакции управляемой системы.***

В исследовании систем управления используется ряд методов [7]:

1. Математические методы.
2. Игровое имитационное моделирование:
   - 2.1 деловые игры;
   - 2.2 имитационное моделирование с использованием компьютера.
3. Эксперимент в реальной организации.

Математические методы моделирования делятся на теоретико-игровые и оптимизационные.

Теоретико-игровые методы разделяются:

1. **Некооперативные игры.** Агенты принимают решение одновременно и независимо, не имея возможности вступать в коалиции и договариваться о совместных действиях.
2. **Кооперативные игры.** Агенты имеют возможность образовывать коалиции, в рамках которых договариваются о совместных действиях.
3. **Повторяющиеся игры.** Агенты выбирают свои действия многократно, игра повторяется.
4. **Иерархические игры.** Предполагается фиксированный порядок ходов – первый ход делает центр, затем свои стратегии выбирают агенты.

Оптимизационные методы включают:

1. теория вероятности (теория надежности, теория массового обслуживания, теория статистических решений);
2. теория оптимизации: линейное, нелинейное, стохастическое, целочисленное, динамическое программирование, многокритериальная оптимизация;
3. дифференциальные уравнения и оптимальное управление;
4. дискретная математика: теория графов, теория расписаний.

Эффективным средством исследования систем управления, наряду с математическими методами, является метод *игрового имитационного моделирования* [6,35]. Имитационная игра выступает как средство исследования систем управления в тех случаях, когда математическое моделирование слишком сложно или принятые гипотезы недостаточно обоснованы.

Игровое имитационное моделирование разделяется на деловые игры и моделирование с использованием компьютера. ***Игры, в которых имитируется конкретная экономическая ситуация, а в качестве игроков выступают люди, называются деловыми играми.*** Деловые игры также применяют с целью обучения персонала и приобретения опыта принятия управленческих решений менеджерами.

При проведении деловых игр функции участников организации, связанные с принятием решений, выполняют игроки - люди. Деловая игра состоит из нескольких партий. Каждая партия проводится в четыре этапа:

1. *Этап сбора данных.*
2. *Этап принятия решения.*
3. *Этап реализации.*
4. *Этап подведения итогов.*

На этапе сбора данных ведущему игры сообщается запрашиваемая информация, на этапе принятия решения на основе полученной информации формируется управленческое решение, на этапе реализации определяется значение целевых функций игроков (выигрыш) и на этапе подведения итогов определяется победитель.

Важным направлением, связанным с применением имитационных игр, являются игры с участием автоматов (компьютеров) artificial players or robots. В таких играх часть участников игры или все игроки заменяются компьютерной программой, в которой реализован алгоритм гипотезы поведения лица, принимающего решения. Сами гипотезы формируются на основе анализа стратегий реальных игроков в деловой игре и эти гипотезы можно, в свою очередь, проверить при проведении имитационной игры.

Необходимость проведения имитационных игр с компьютерами проявляется в тех случаях, когда необходимо провести исследование систем управления с большим числом элементов (проведение соответствующей игры с большим числом участников нереально). В случае, когда все участники заменены компьютерной программой, получаем имитационную модель организации (игры автоматов). Такие игры применяются в случаях, когда необходимо провести значительное число партий для исследования динамики игры или для получения статистически значимой оценки результатов. Это связано с тем, что "быстродействие" деловой игры принципиально ограничено временем принятия решения человеком (порядка одной минуты в простейших играх). Имитационное моделирование с использованием компьютера позволяет сократить продолжительность одной партии до долей секунды.

Наибольший эффект может дать только совместное использование всех рассмотренных методов. Поэтому целесообразна следующая последовательность проведения исследования систем управления: математическое моделирование – имитационная игра – эксперимент в реальной организации.

1.7. Постановка задачи управления

> Самой главной и самой серьёзной проблемой... является проблема существования таких правил, которым бы люди подчинялись и не пытались жульничать.
>
> Фрэнк Г. Найт

Рассмотрим простейшую базовую модель организационной системы, состоящую из управляющего органа (центра) и управляемого субъекта (агента) (рис. 1.6). Центр, исходя из своей целевой функции $F(u,y)$, воздействует на агента с помощью управления u, принадлежащего некоторому множеству U. Управлением центра могут быть материальные выплаты (задача стимулирования), распределяемые ресурсы (задача планирования).

В зависимости от своей целевой функции $f(u)$, при известном управлении центра u агент выбирает действие y, принадлежащее множеству Y. Действие y характеризует тот объем работы, который от него требует центр: количество произведённой продукции, количество отработанных часов. Существует критерий эффективности функционирования системы $K(u,y)$, который зависит от управления центра u и от действия агента y. Допустим, в ходе исследования стала известна ***функциональная зависимость действия агента y на то или иное управление центра u*** (***реакция агента***):

$$y = G(u).$$

$G(u)$ - модель управляемого агента, которая описывает его реакцию на управляющее воздействие. Подставив эту зависимость в критерий эффективности функционирования системы, получим функционал: $\Phi(u) = K(u,G(u))$, который будет зависеть только от управления центра u.

Рис. 1.6. Модель организационной системы

Этот функционал называется эффективностью управления системы. **Задача управления состоит в поиске допустимого управления *u*, которое максимизирует эффективность управления организации:**

$$\Phi(u) = K(u, G(u)) \to \max_{u \in U}.$$

Таким образом, задача управления является оптимизационной задачей. Задача исследователя заключается в построении модели агента $G(u)$, которая для реальной организации может быть очень сложной.

1.8.Планирование и организация исследования систем управления

Эффективность мысли определяется её воплощением в дела.

Абдул-Баха

Этапы исследования систем управления представлены на рис. 1.7.

1-й этап. Построение теоретико-игровой модели. Заключается в описании реальной организационной системы: состава и структуры организационной системы, целевых функций, множества допустимых

Рис. 1.7. Этапы исследования систем управления

стратегий участников системы, их информированности, порядка функционирования, гипотез о поведении.

2-й этап. Анализ модели. Исследование поведения участников при тех или иных механизмах управления. Решение задачи анализа заключается в следующем: для фиксированного механизма управления определяются стратегии агента, которые являются равновесными при этом управлении.

3-й этап. Синтез управления. Решение прямой и обратной задачи управления. Прямая задача управления - синтез оптимальных управлений, заключающийся в поиске допустимых управлений, имеющий максимальную эффективность. Обратная задача управления - это поиск множества допустимых управлений, переводящих организационную систему в заданное состояние. Критериями эффективности управления являются значения целевой функции управляющего органа на множестве решений игры агента.

4-й этап. Исследование устойчивости решений. Исследование устойчивости подразумевает решение двух задач:

1) изучение зависимости оптимального решения от параметров модели.

2) теоретическое исследование адекватности модели в реальной системе.

5-й этап. Идентификация организационной системы. Для того чтобы использовать результаты теоретического исследования, необходимо произвести настройку модели, то есть идентифицировать моделируемую систему.

6-й этап. Имитационное моделирование. Не всегда удается получить аналитическое решение задачи синтеза оптимальных управлений и исследовать позволяет проверить справедливость гипотез, то есть дает дополнительную информацию об адекватности модели без проведения эксперимента. Использование имитационных моделей в учебных целях позволяет управленческому персоналу освоить предлагаемые механизмы управления.

7-й этап. Внедрение. Производится обучение управленческого персонала, внедрение разработанных механизмов управления, оценка эффективности их практического применения.

Контрольные вопросы к главе 1

1. Дайте определение следующим понятиям: организация, исследование, механизм функционирования и управления.
2. Назовите особенности организационных систем по сравнению с техническими.
3. Какова роль исследований в решении задач управления организациями?
4. Перечислите этапы функционирования организационных систем.
5. Назовите параметры, с помощью которых описывается организационная система.
6. Приведите классификацию задач управления.
7. Что такое структура организационной системы? Приведите наиболее распространённые типы структур управления, их преимущества и недостатки.
8. Назовите гипотезы, принимаемые в курсе ИСУ.
9. Что такое объективная и субъективная (игровая) неопределенности?
10. Назовите способы устранения объективной неопределенности.
11. Что такое игра и ситуация равновесия?
12. Назовите ситуации равновесия в теории игр.
13. Назовите основные черты системного подхода.
14. Сформулируйте задачи анализа и синтеза систем управления.
15. Назовите методы исследования систем управления.
16. Назовите математические методы исследования.
17. Дайте характеристику методу игрового имитационного моделирования.
18. Что такое деловая игра?
19. Сформулируйте задачу управления.
20. Назовите этапы исследования систем управления.

Глава 2. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

2.1.Задача планирования

…для того, чтобы управлять, нужно, как-никак, иметь точный план на некоторый, хоть сколько-нибудь приличный срок

Из разговора Воланда с Берлиозом и поэтом Бездомным на Патриарших прудах.

Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТА

Задача планирования относится к задачам мотивационного управления, то есть управляющее воздействие направлено на целевые функции агентов. ***План - это желательное с точки зрения центра состояние организации.*** Центр, как правило, хуже информирован о возможностях агентов, чем они сами. В соответствии с гипотезой детерминизма центр стремится устранить всю имеющуюся неопределенность и принимать решение в условиях полной информированности. У начальника есть несколько путей устранения неопределённости: принцип максимального гарантированного результата, принцип оптимизма, вероятностный подход. Одним из способов устранения неопределённости, часто применяемым на практике, является сбор информации у подчиненных о неизвестных начальнику параметрах. Но в этом случае агенты постараются сообщить такую информацию, чтобы центр принял наиболее выгодное для них решение. То есть информация, которую сообщат агенты, не обязательно будет достоверной. Задача планирования заключается в определении планов центром на основе сообщений агентов, которые в силу своей активности способны к манипулированию – сообщению недостоверной информации [3,7].

Механизм планирования – это процедура определения планов в зависимости от сообщений агентов.

Рассмотрим пример задачи планирования - распределение материальной помощи среди студентов на факультете экономики и управления СГАУ. Имеется ежемесячный фонд материальной помощи 26000 руб., который распределяется между 400 студентами - бюджетниками. В качестве центра выступает стипендиальная комиссия факультета, состоящая из сотрудников деканата и представителей студенческих общественных организаций. Задача стипендиальной комиссии - распределить материальную помощь по критерию социальной справедливости, студентам из семей с низким уровнем доходов, а не всем студентам поровну. Так как центр точно не знает доходы всех студентов и, соответственно, кто из них нуждается в материальной помощи, то организуется процедура сбора заявок – заявлений на материальную помощь. Экспериментально установленный факт - заявления на материальную помощь пишут почти все студенты, сознательно искажая информацию о своих доходах.

Рассмотрим двухуровневую организационную систему, состоящую из центра и n агентов (рис. 2.1).

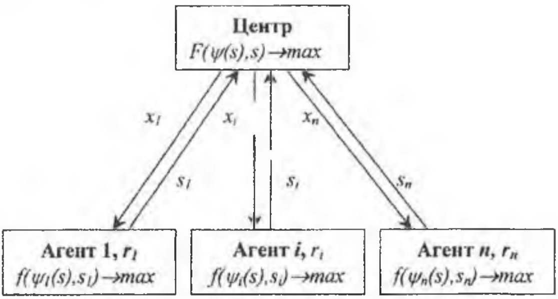

Рис. 2.1. Распределение ресурсов в многоэлементной системе

Модель организационной системы описывается пятью параметрами: **состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность**. Состав данной системы: центр и n агентов. Структура изображена на рис. 2.1. Стратегией каждого из агентов является сообщение центру информации (заявки) $s_i \in S_i$ о значении параметра r_i, который характеризует эффективность агента. Центр на основании сообщённой ему информации назначает агентам планы:

$$x_i = \psi_i(s),$$

где x_i – план для i - го агента, ψ_i - механизм планирования, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ - вектор сообщений всех агентов, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - план центра для всех агентов.

Интересы центра представлены целевой функцией $F(\psi(s), s)$. Предпочтения агентов описываются целевыми функциям $f_i(\psi_i(s), s_i)$, $i = \overline{1,n}$. Множество допустимых значений сообщений и планов – положительная полуось: $s_i \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. План, назначенный i-му агенту, зависит от сообщений всех агентов, следовательно - это игровая ситуация. На момент принятия решения каждому агенту известны: процедура планирования $\psi_i(s_i)$, параметр r_i, который характеризует эффективность агента, целевые функции и допустимые множества всех агентов. Центру известны целевые функции агентов $f_i(\psi_i(s_i), s_i)$, множества возможных сообщений агентов s_i и неизвестны точные значения параметров агентов r_i. Центр выбирает процедуру планирования и сообщает её агентам, агенты при известной процедуре планирования сообщают центру заявки, на основании которых и составляется план.

Так как решение, принимаемое центром, зависит от сообщаемой агентами информации, то агенты могут воспользоваться возможностью своего влияния, сообщая такую информацию, которая максимизирует их целевые функции. Этот эффект сознательного искажения информации называется ***эффектом манипулирования*** информацией. Для центра желательно создать такую систему управления, которая будет побуждать агентов сообщать достоверную информацию. Будем считать, что агенты не образуют коалиции, выбирают доминантные или равновесные стратегии по Нэшу, $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$- вектор равновесных сообщений агентов. Точка равновесия в общем случае зависит от вектора параметров всех агентов $s^* = s^*(r)$.

В теории управления организационными системами основополагающим результатом является **принцип открытого управления** [3]. ***Принцип открытого управления заключается в том, чтобы использовать процедуру планирования, максимизирующую целевую функцию каждого агента в предположении, что сообщаемая ими информация достоверна.*** Другое название механизма открытого управления – механизм честной игры.

Условие

$$f_i(\psi_i(s), s_i) = \max_{x_i \in X_i(s_{-i})} f_i(x_i, s_i),\ i = 1,n,\ s \in \Omega,$$

где $X_i(s_{-i})$ - устанавливаемое центром множество допустимых планов при заданной обстановке $s_{-i} = (s_1, s_2, .., s_{i-1}, s_{i+1}, .., s_n)$ для i- го агента, $i=1,n$, называется ***условием совершенного согласования.*** Процедура планирования, максимизирующая целевую функцию центра $F(\psi, s)$ на множестве планов, удовлетворяющих условиям совершенного согласования, называется законом открытого управления. Для того чтобы сообщение достоверной информации было доминантной стратегией агентов, необходимо и достаточно, чтобы механизм планирования был механизмом открытого управления.

К механизмам планирования относятся: механизмы распределения ресурсов, механизмы внутренних цен, механизмы экспертизы, механизмы распределения затрат.

2.2.Исследование механизмов распределения ресурсов

При изучении наук примеры полезнее правил.
Исаак Ньютон

Задача распределения ресурсов - одна из самых распространённых задач менеджера. Любой начальник обязательно что-то распределяет: финансы, работу подчинённым, сырьё, материалы, льготные путёвки в санаторий и т.д. Можно даже утверждать, что начальник является начальником только, когда он распределяет какой-то ресурс, то есть может оказывать влияние на целевые функции подчинённых.

Рассмотрим производственную фирму, состоящую из центра и n подразделений (агентов) (рис. 2.2).

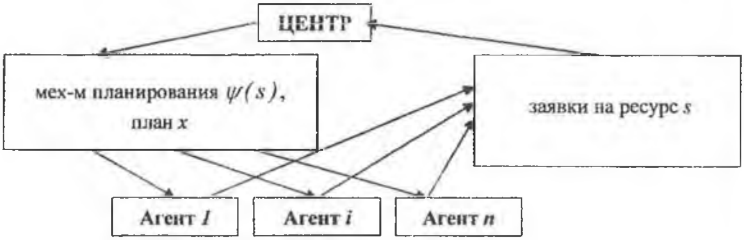

Рис. 2.2. Задача распределения ресурсов

В распоряжении центра имеется ресурс (заказ на производство продукции) в количестве R. Цена единицы продукции p. Затраты агентов $c_i(x_i)=\frac{1}{2r_i}x_i^2$.

Коэффициент r_i характеризует эффективность работы i-го агента, чем больше значение r_i, тем меньше затраты агента при выполнении плана центра, следовательно, больше эффективность агента. Задача центра заключается в том, чтобы создать такой механизм распределения заказа между агентами, который бы максимизировал критерий эффективности – прибыль фирмы.

Будем оценивать эффективность механизма планирования как отношение целевой функции центра к её максимальному значению:

$$K=\frac{F(x)}{F^{\max}(x)}.$$

Для этого определим оптимальное распределение ресурсов с точки зрения центра, которое обеспечивает максимум целевой функции центра $F^{\max}(x)$.

2.2.1.Определение оптимального распределения ресурса для центра

В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.
Леонард Эйлер

В качестве целевой функции центра примем максимизацию прибыли фирмы:

$$F(x)=\pi(x)=Rp-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2r_i}x_i^2\rightarrow max. \tag{2.1}$$

На распределение ресурса центром наложены следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=R,\ x_i\geq 0,\ i=\overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Оптимизационная задача (2.1)-(2.2) относится к задачам на условный экстремум. Перепишем ограничение (2.2) так, чтобы в правой части был 0:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-R=0. \tag{2.3}$$

Используем для решения данной задачи метод множителей Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа как сумму целевой функции (2.1) и ограничения (2.3), умноженного на множитель Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)=Rp-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2r_i}x_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-R\right).$$

Найдём частные производные от функции Лагранжа по неизвестным переменным $x_1,x_2,...,x_n,\lambda$ и приравняем к 0:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=-\dfrac{x_i}{r_i}+\lambda=0,\ i=\overline{1,n};\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-R=0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Из первого уравнения системы (2.4) следует:

$$x_i=\lambda r_i. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение системы (2.4), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda r_i=R.$$

Откуда найдём множитель Лагранжа:

$$\lambda = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} r_i}. \quad (2.6)$$

Подставляя множитель Лагранжа (2.6) в (2.5), получаем оптимальный закон планирования для центра:

$$x_i^{opt} = \frac{r_i}{\sum_{i=1}^{n} r_i} R. \quad (2.7)$$

Оптимальный план распределения заказа с точки зрения центра для i-го агента прямо пропорционален имеющемуся ресурсу R и отношению эффективности i-го агента к сумме эффективностей всех агентов.

Для нахождения максимального значения целевой функции подставим оптимальный план (2.7) в выражение для целевой функции (2.1):

$$F^{max}(x) = \pi^{max}(x) = Rp - \frac{R^2}{2\sum_{i=1}^{n} r_i}.$$

Полученное выражение определяет максимально возможную прибыль для центра.

Пример 2.1. Оптимальное распределение ресурса для центра

Фирма занимается производством делимого продукта. Руководство фирмы (центр) заключило договор на производство продукта количеством R=150 единиц. Этот заказ могут выполнить два подразделения фирмы (агента). Цена единицы продукции p=4000 руб. Функции затрат агентов, соответственно равны $c_1(x_1) = 10x_1^2$ и $c_2(x_2) = 20x_2^2$.

Определить:

1) оптимальное распределение заказа между подразделениями фирмы, в интересах центра;
2) максимальную прибыль агентов и центра.

Решение:

Сформулируем математическую постановку задачи. Запишем целевую функцию центра:

$$F(x_1, x_2) = Rp - c_1(x_1) - c_2(x_2) \to max. \qquad (2.8)$$

Сумма планов для агентов должна быть равна заказу, полученному центром:

$$x_1 + x_2 = R, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \qquad (2.9)$$

Оптимизационная задача (2.8)-(2.9) является задачей на условный экстремум. Ее решение можно найти двумя способами.

<u>I способ:</u> решение методом подстановки.

Выразим план для второго агента из ограничения (2.9) $x_2 = R - x_1$ и подставим в целевую функцию центра:

$$F(x_1) = Rp - 10x_1^2 - 20(R - x_1)^2 \to max. \qquad (2.10)$$

Таким образом, от задачи с двумя переменными и ограничением (2.8)-(2.9) перешли к задаче с одной переменной (2.10).

Для нахождения экстремума функции одной переменной продифференцируем и приравняем к 0 выражение (2.10):

$$\frac{dF(x_1)}{x_1} = -2 \cdot 10x_1 - 2 \cdot 20(R - x_1) \cdot (-1) = 0. \qquad (2.11)$$

Решая уравнение (2.11), получим план для первого агента:

$$x_1 = \frac{2}{3}R = 100.$$

Из ограничения (2.9) определим план для второго агента:

$$x_2 = R - \frac{2}{3}R = \frac{R}{3} = 50.$$

<u>II способ:</u> решение методом множителей Лагранжа.

Перепишем ограничение (2.9) в следующем виде:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - R = 0. \qquad (2.12)$$

Запишем функцию Лагранжа как сумму целевой функции (2.8) и ограничения (2.11), умноженного на множитель Лагранжа λ:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - R).$$

Найдём частные производные от функции Лагранжа по неизвестным переменным x_1, x_2, λ и приравняем к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -2 \cdot 10x_1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -2 \cdot 20x_2 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = R - x_1 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Отнимем из первого уравнения второе, множитель Лагранжа сократится, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2; \\ x_1 + x_2 = R. \end{cases}$$

Решая полученную систему, определим планы для первого и второго агентов:

$$\begin{cases} x_1^{opt} = \dfrac{2}{3}R = 100\,ед.; \\ x_2^{opt} = \dfrac{R}{3} = 50\,ед. \end{cases}$$

Определим максимальную прибыль центра:

$$\pi^{max}(100{,}50) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 = 100 \cdot 4000 - 10 \cdot 100^2 - 20 \cdot 50^2 = 450000 \text{ руб.}$$

Определим прибыль для первого и второго агента:

$$\pi_1(100) = x_1 p - 10x_1^2 = 100 \cdot 4000 - 10 \cdot 100^2 = 300000 \text{ руб.}$$

$$\pi_2(50) = x_2 p - 20x_2^2 = 50 \cdot 4000 - 20 \cdot 50^2 = 150000 \text{ руб.}$$

2.2.2. Определение оптимального распределения ресурса для агентов

> Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, ... и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.
>
> П.Л. Чебышев

Рассмотрим математическую постановку задачи. Фонд заработной платы каждого подразделения составляет определённый процент μ от прибыли, зарабатываемой этим подразделением. Поэтому в качестве целевой функции i-го подразделения будем рассматривать максимизацию зарабатываемой прибыли:

$$f_i(y_i) = y_i p - \frac{1}{2r_i} y_i^2 \to max, \qquad (2.13)$$

где y_i - распределение заказа с точки зрения i-го агента.

Оптимизационная задача (2.13) - это задача на безусловный экстремум функции одной переменной. Для решения задачи продифференцируем эту функцию по y_i и приравняем к нулю:

$$\frac{df_i(y_i)}{dy_i} = p - \frac{y_i}{r_i} = 0. \qquad (2.14)$$

Решая уравнение (2.13), определим оптимальный план для каждого агента:

$$y_i^{opt} = r_i p. \qquad (2.15)$$

Анализируя полученные формулы (2.7) и (2.15), можно сделать вывод о противоречии между интересами центра и агента.

Пример 2.2. Оптимальное распределение ресурса для агентов

Фирма занимается производством делимого продукта. Руководство фирмы (центр) заключило договор на производство продукта количеством R=150 единиц. Этот заказ могут выполнить два подразделения фирмы (агента). Цена единицы продукции p=4000 руб. Затраты первого и второго подразделений зависят от объёма выполняемого заказа $c_1(x_1) = 10x_1^2$ и $c_2(x_2) = 20x_2^2$. Фонд заработной платы каждого подразделения фирмы составляет 10% от прибыли, зарабатываемой этим подразделением.

Определить:

1) оптимальное распределение заказа между подразделениями фирмы в интересах подразделений;
2) максимальную прибыль агентов.

Решение:

Сформулируем математическую постановку задачи. Запишем целевые функции агентов:

$$f_1(y_1)=y_1p-10y_1^2 \to max \quad f_2(y_2)=y_2p-20y_2^2 \to max$$

Возьмем производную от целевых функций и приравняем к нулю:

$$\frac{df_1(y_1)}{y_1}=p-2\cdot 10y_1=0, \quad \frac{df_2(y_2)}{y_2}=p-2\cdot 20y_2=0.$$

Решив полученные уравнения, определим оптимальные планы для подразделений:

$$y_1^{opt}=\frac{p}{20}=\frac{4000}{20}=200 \ ед., \quad y_2^{opt}=\frac{p}{40}=\frac{4000}{40}=100 \ ед.$$

Максимальная прибыль агентов составит:

$$\pi_1^{max}(200)=y_1p-10y_1^2=200\cdot 4000-10\cdot 200^2=400000 \ руб.$$

$$\pi_2^{max}(100)=y_2p-20y_2^2=100\cdot 4000-20\cdot 100^2=200000 \ руб.$$

Сравнивая с прибылью подразделений при оптимальном плане центра, приходим к выводу о противоречиях в интересах центра и агентов.

2.3. Исследование приоритетных механизмов распределения ресурсов

…никогда и ничего не просите! Никогда и ничего, и в особенности у тех, кто сильнее вас. Сами предложат и сами всё дадут.

Совет Воланда Маргарите.

Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТА

В приоритетных механизмах распределение ресурса происходит на основе заявок агентов, с учетом приоритетов (предпочтений) центра. Каждый агент получает запрашиваемое количество ресурса, если сумма всех заявок на ресурс не превышает количество имеющегося ресурса. В противном случае ресурс между агентами делится пропорционально заявкам с учетом приоритетов. Приоритетные механизмы в общем случае описываются выражением

$$x_i(S_i)=\begin{cases} s_i, \ если \ \sum_{j=1}^{n} s_j \le R; \\ min[s_i, \gamma\eta_i(s_i)], \ если \ \sum_{j=1}^{n} s_j > R, \end{cases} \qquad (2.16)$$

где s_i-величина заявки i-го агента на ресурс; n – число агентов: $\eta_i(s_i)$-монотонная функция приоритета i-го агента в зависимости от его заявки. Операция минимума в данной формуле отражает простое условие: агент получает ресурс в количестве не более заявляемой величины;

γ-общий для всех агентов параметр, задаваемый в условии полного использования ресурса:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} min[s_i, \gamma\eta_i(s_i)] = R. \qquad (2.17)$$

В зависимости от вида функции $\eta_i(s_i)$ можно выделить два вида приоритетов:

1. Прямой приоритет при возрастающей функции $\eta_i(S_i)$.
2. Обратный приоритет при убывающей функции $\eta_i(S_i)$.

2.3.1.Исследование механизма прямых приоритетов

Ничто так не раздражает, как хороший пример.
Марк Твен

Функцией приоритетов в данном механизме является заявка агента $\eta_i(s_i) = s_i$. Подставим функцию приоритетов в условие (2.17) и определим параметр γ:

$$\gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} s_i}.$$

Подставив параметр γ в (2.16), получим формулу для распределения ресурса в механизме прямых приоритетов:

$$x_i(s_i) = \begin{cases} s_i, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} s_j \le R; \\ \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i} R, \text{ если } \sum_{j=1}^{n} s_j > R. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Математическую формулу (2.18) можно выразить девизом "**больше просишь – больше получаешь**". Распределение ресурса происходит пропорционально заявкам агентов s_i. Если целевая функция агента является строго возрастающей функцией от x_i, то все агенты будут сообщать максимальные заявки на ресурс. Если в системе заданы ограничения на величину максимальной заявки $s_i \le D_i$, то все агенты в равновесной ситуации заявят величину $s_i^* = D_i$. Это явление в экономике известно как тенденция завышения заявок на сырьё, энергию, финансы, приводящая к искусственному дефициту. Поэтому механизм прямых приоритетов, который является неэффективным, обоснованно критикуют. ***Недостатки*** механизма прямых приоритетов:

1. Существует тенденция завышения заявок на ресурс, агентам выгодно предоставить недостоверную информацию. Механизм является манипулируемым.
2. Небольшой дефицит порождает большой искусственный дефицит.
3. Недополучение прибыли центром.

Пример 2.3. Распределение ресурса по принципу прямых приоритетов

Фирма занимается производством делимого продукта. Руководство фирмы (центр) заключило договор на производство продукта количеством R=150 единиц. Этот заказ могут выполнить два подразделения фирмы (агента). Цена единицы продукции p=4000 руб. Затраты первого и второго подразделений зависят от объёма выполняемого заказа $c_1(x_1) = 10x_1^2$ и $c_2(x_2) = 20x_2^2$. Центр не имеет информации об эффективности агентов и использует для распределения заказа механизм прямых приоритетов, ограничивая заявку агентов величиной R.

Определить:

1) равновесные заявки агентов в случае использования центром принципа прямых приоритетов;
2) распределение ресурса в равновесной ситуации;
3) прибыль центра и агентов в равновесной ситуации;

4) убытки центра по сравнению с оптимальным распределением ресурса (решением задачи 2.1);

5) эффективность механизма прямых приоритетов.

Решение:

Оптимальной стратегией агентов в случае использования центром принципа прямых приоритетов является заказ максимально возможного количества ресурсов $s_1^* = s_2^* = R = 150$. Эти заявки соответствуют равновесной ситуации Нэша.

В результате распределения ресурса каждый агент в равновесной ситуации получит план:

$$x_1^* = \frac{s_1^*}{s_1^* + s_2^*} R = \frac{150}{150+150} \cdot 150 = 75 \text{ ед.};$$

$$x_2^* = \frac{s_2^*}{s_1^* + s_2^*} R = \frac{150}{150+150} \cdot 150 = 75 \text{ ед.}$$

Прибыль центра составит:

$$\pi(75{,}75) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 = 150 \cdot 4000 - 10 \cdot 75^2 - 20 \cdot 75^2 = 431250 \text{ руб.}$$

Прибыль агентов:

$$\pi_1(75) = x_1 p - 10x_1^2 = 75 \cdot 4000 - 10 \cdot 75^2 = 243750 \text{ руб.}$$

$$\pi_2(75) = x_2 p - 20x_2^2 = 75 \cdot 4000 - 20 \cdot 75^2 = 187500 \text{ руб.}$$

Потери центра из-за неэффективного управления равны:

$$\Delta\pi(x_1, x_2) = \pi^{max} - \pi = 450000 - 431250 = 18750 \text{ руб.}$$

Эффективность механизма прямых приоритетов:

$$K = \frac{\pi(x)}{\pi^{max}(x)} = \frac{431250}{450000} = 0{,}96 .$$

Для производственных предприятий недополучение прибыли из-за неэффективной системы управления может составлять большую величину.

2.3.2. Исследование механизма обратных приоритетов

Функцией приоритетов в данном механизме является эффективность i- го агента:

$$\eta_i(s_i)=\frac{A_i}{s_i},$$

где A_i – эффект (объём продукции, производимый агентом, прибыль агента).

Функция приоритетов $\eta_i(s_i)=\frac{A_i}{s_i}$ определяет удельный эффект от использования ресурсов - **эффективность.** Механизмы обратных приоритетов называют механизмами распределения ресурса пропорционально эффективности. При распределении ресурса приоритет агента тем выше, чем меньшее количество ресурса он заказывает, т.е. приоритет обратно пропорционален заявке на ресурс. Центр руководствуется следующими рассуждениями: если агенты планируют получить одинаковую прибыль, но при этом агенты запрашивают различные количества ресурса, то агент, запрашивающий меньшее количество ресурса, будет использовать его эффективнее.

Процедура распределения ресурса на основе принципа обратных приоритетов может быть представлена в следующем виде:

$$x_i(s_i)=\begin{cases} s_i,\ \text{если} \sum\limits_{j=1}^{n} s_j \le R; \\ \min\left[s_i, \gamma\left(\frac{A_i}{s_i}\right)\right],\ \text{если} \sum\limits_{j=1}^{n} s_j > R. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Определим ситуацию равновесия Нэша для агентов. Так же как и для механизма прямых приоритетов считаем, что целевая функция агентов является возрастающей функцией заявки. Определим, какую заявку должен подать i-ый агент, чтобы получить максимальный ресурс x_i. На рис. 2.3 изображён график функции $\min\left[s_i, \gamma\left(\frac{A_i}{s_i}\right)\right]$ в случае дефицита.

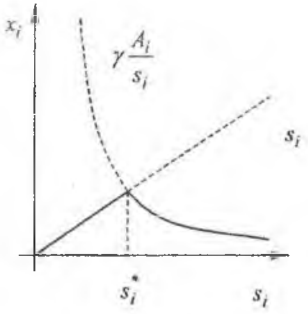

Рис. 2.3. График функции $min\left[s_i, \gamma\left(\frac{A_i}{s_i}\right)\right]$

Функция $min\left[s_i, \gamma\left(\frac{A_i}{s_i}\right)\right]$ достигает максимума в точке s_i^*, которая удовлетворяет условию:

$$s_i^* = \gamma \frac{A_i}{s_i}.$$

Из этого условия определим заявку агентов в равновесной ситуации:

$$s_i^* = x_i^* = \sqrt{\gamma A_i}\,. \qquad (2.20)$$

Выбирая вместо s_i^* любую другую стратегию s_i, i-ый агент лишь уменьшает выделяемый ему ресурс x_i. Подставив (2.20) в ограничение (2.17)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^*(s_i) = \sqrt{\gamma} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i} = R,$$

найдём параметр γ:

$$\gamma = \left[\frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}}\right]^2. \qquad (2.21)$$

Подставив (2.21) в (2.20), получим выражение для равновесных заявок и планов:

$$s_i^* = x_i^* = \frac{\sqrt{A_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}} R \qquad (2.22)$$

Из балансового условия (2.17)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(s_i) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A_i}{s_i} \right) = R$$

определим параметр γ :

$$\gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} A_i / s_i}.$$

Подставив γ в выражение (2.19), получим формулу для распределения ресурса в механизме обратных приоритетов:

$$x_i(s_i) = \begin{cases} s_i, \ \text{если} \sum_{j=1}^{n} s_j \le R; \\ \min \left[s_i, \dfrac{A_i / s_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i / s_i} R \right], \ \text{если} \sum_{j=1}^{n} s_j > R. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Математическую формулу (2.23) можно выразить девизом "**больше просишь – меньше получаешь**". Стратегии агентов s_i^* (2.22) являются гарантирующими, то есть максимизируют их выигрыши при любых стратегиях остальных агентов.

Преимущества принципа обратных приоритетов:

1. В равновесной ситуации все агенты получают то количество ресурса, которое заказали, следовательно суммарный спрос равен имеющемуся количеству ресурса.
2. Отсутствует тенденция завышения заявок на ресурс, все агенты заказывают не больше оптимального количества.

Недостатки принципа обратных приоритетов:

1. Полученное распределение ресурса не является оптимальным по критерию всей системы, следовательно, центр недополучает прибыль, но в меньшем количестве, чем в механизме прямых приоритетов.
2. Теряется информация о реальной потребности в ресурсе, а следовательно о величине дефицита.

Пример 2.4. Распределение ресурса по принципу обратных приоритетов

Фирма занимается производством делимого продукта. Руководство фирмы (центр) заключило договор на производство продукта количеством R=150 единиц. Этот заказ могут выполнить два подразделения фирмы (агента). Цена единицы продукции p=4000 руб. Затраты первого и второго подразделений зависят от объёма выполняемого заказа $c_1(x_1)=10x_1^2$ и $c_2(x_2)=20x_2^2$. Центр не имеет информации об эффективности агентов и использует для распределения заказа механизм обратных приоритетов.

Определить:

1) равновесные заявки агентов в случае использования центром принципа обратных приоритетов. В качестве эффекта агентов принять максимальную прибыль, которую могут заработать агенты (задача 2.2);
2) распределение ресурса в равновесной ситуации;
3) прибыль центра и агентов в равновесной ситуации;
4) убытки центра по сравнению с оптимальным распределением ресурса (решением задачи 2.1);
5) эффективность механизма обратных приоритетов.

Решение:

Определим заявки агентов в равновесной ситуации Нэша:

$$s_1^* = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}}R = \frac{\sqrt{400000}}{\sqrt{400000}+\sqrt{200000}}150 \approx 87{,}87 \text{ ед.}$$

$$s_2^* = \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}}R = \frac{\sqrt{200000}}{\sqrt{400000}+\sqrt{200000}}150 \approx 62{,}13 \text{ ед.}$$

Определим план центра в равновесной ситуации Нэша:

$$x_1^* = \frac{A_1/s_1}{A_1/s_1 + A_2/s_2} R = \frac{400000/87{,}87}{200000/87{,}87 + 200000/62{,}13} 150 \approx 87{,}87 \text{ ед.}$$

$$x_2^* = \frac{A_2/s_2}{A_1/s_1 + A_2/s_2} R = \frac{200000/62{,}13}{400000/87{,}87 + 200000/62{,}13} 150 \approx 62{,}13 \text{ ед.}$$

Рассчитаем прибыль центра:

$$\pi(87{,}87;62{,}13) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 = 150 \cdot 4000 - 10 \cdot (87{,}87)^2 - 20 \cdot (62{,}13)^2 = 445584 \text{ руб.}$$

Прибыль агентов:

$$\pi_1(87{,}87) = x_1 p - 10x_1^2 = 87{,}87 \cdot 4000 - 10 \cdot (87{,}87)^2 = 274264 \text{ руб.}$$

$$\pi_2(62{,}13) = x_2 p - 20x_2^2 = 62{,}13 \cdot 4000 - 20 \cdot (62{,}13)^2 = 171320 \text{ руб.}$$

Потери Центра из-за неэффективного управления равны:

$$\Delta\pi(x_1, x_2) = \pi^{max} - \pi = 450000 - 445584 = 4416 \text{ руб.}$$

Эффективность механизма обратных приоритетов

$$K = \frac{\pi(x)}{\pi^{max}(x)} = \frac{445584}{450000} = 0{,}99.$$

2.4. Исследование конкурсных механизмов распределения ресурса

Конкурсные механизмы относятся к приоритетным механизмам, в которых на основе приоритетов определяется множество победителей. Широкое распространение получили конкурсные механизмы, в которых агенты участвуют в соревновании на получение ресурса, льготных условий финансирования, права на участие в выполнении заказа. **Конкурс агентов называется тендером.**

Соревнование между агентами приводит к повышению эффективности управления. В отличие от механизма обратных приоритетов, где заказ распределяется пропорционально эффективности $\eta_i(s_i)=\frac{A_i}{s_i}$ **всем агентам**, в конкурсном механизме ресурс получают только **победители конкурса**.

Агенты сообщают центру две величины: заявку на ресурс s_i и оценку ожидаемого эффекта от его использования A_i. Следовательно, ожидаемая эффективность i-го агента равна $\alpha_i=\frac{A_i}{s_i}$.

Организатор конкурса (центр) упорядочивает агентов в соответствии с порядком убывания ожидаемой эффективности: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Тогда имеющийся в распоряжении центра ресурс распределяется следующим образом: агент, имеющий наибольшую ожидаемую эффективность, получает ресурс в запрашиваемом объёме, затем (если ресурс не закончился) второй агент и т.д. Агенты, получившие ресурс в полном объёме, называются ***победителями конкурса.***

Возникающая при этом проблема заключается в том, что агенты могут исказить сообщаемую информацию (манипулировать) с целью победы в конкурсе.

Различают ***дискретные*** и ***непрерывные*** конкурсы. В случае дискретного конкурса агентам требуется определённое количество ресурса, меньшее количество их не устраивает, так как приводит к нулевому эффекту (не позволяет реализовать инвестиционный проект, выпустить новый вид продукции). В случае непрерывных конкурсов агент, получая ресурс в количестве меньше запрашиваемого, может получить эффект, отличный от нуля.

Центром при использовании конкурсного механизма организуется система контроля за исполнением взятых обязательств, а именно вводится функция штрафа:

$$g_i=\beta(A_i-\varphi_i(s_i))=\beta(\alpha_i s_i-\varphi_i(s_i)),\ \beta>0,\ i=1,2...n,$$

где $A_i=\alpha_i s_i$ - ожидаемый эффект от полученного ресурса;

$\varphi_i(s_i)$ - реальный эффект от полученного ресурса.

Целевая функция i-го агента

$$f_i(\varphi_i,\alpha_i)=\mu\varphi_i(s_i)-\beta(A_i-\varphi_i(s_i)),\ i=\overline{1,n}.$$

где μ - процент отчислений от эффекта агенту. Агент штрафуется в том случ… если $A_i>\varphi_i(s_i)$, в противном случае функция штрафа равняется нулю.

2.5.Исследование механизмов внутренних цен

Правду говорить легко и приятно.
Из разговора бродячего философа Иешуа … прокуратора Иудеи Понтия Пилата.
Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТ…

В разделе (2.2), при решении задачи распределения ресурса, был определё… оптимальный план для центра (2.7) $x_i^{opt}=\frac{r_i}{\sum_{i=1}^{n}r_i}R$ и каждого агента (2.15)

$y_i^{opt}=r_i p$. Из анализа полученных выражений был сделан вывод о конфликте интересов центра и агентов. Агентам выгодно производить продукцию в объёме, превышающем имеющийся у центра ресурс R:

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^{opt}=p\sum_{i=1}^{n}r_i>R.$$

Агенты, желая в сумме получать больше ресурса, чем имеется в наличии у центра, будут предоставлять недостоверную информацию. Попробуем создать такую систему управления, в которой отсутствует конфликт интересов, интересы центра и агентов согласованы. Анализируя формулу (2.15), замечаем, что оптимальный план i-го агента зависит от рыночной цены p. Уменьшая цену p, можно добиться того, чтобы сумма оптимальных планов для агентов была равна имеющемуся ресурсу R. Центр не может повлиять на рыночную цену p, но может ввести **внутрифирменную цену** a для взаиморасчётов с агентами. В случае, если сумма выгодных планов агентов равна имеющемуся ресурсу $\sum_{i=1}^{n}y_i^{opt}=a\sum_{i=1}^{n}r_i=R$, интересы центра и агентов согласованы, для агентов отсутствует причина предоставлять недостоверные данные. Задача для центра усложняется, кроме определения плана распределения ресурса x необходимо определить внутреннюю цену a, учитывая, что агенты выбирают действия исходя из максимизации своих целевых функций.

Сформулируем математическую постановку задачи:

$$\begin{cases} Rp - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2r_i} x_i^2 \to \max_{x_i}; & (2.24) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = R; & (2.25) \\ x_i^* = \arg\max_{y_i \ni Y_i} (y_i a - \frac{1}{2r_i} y_i^2). & (2.26) \end{cases}$$

Из (2.26) определим оптимальный план i-го агента как функцию внутренней цены:

$$x_i^* = y_i^{opt} = r_i a. \quad (2.27)$$

Подставив (2.27) в ограничение (2.25), определим внутреннюю цену:

$$a = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} r_i}. \quad (2.28)$$

Решим задачу (2.24)-(2.26) методом множителей Лагранжа (см. раздел 2.2.1). Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = Rp - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2r_i} x_i^2 + \lambda \left(R - \sum_{i=1}^{n} x_i \right).$$

Найдём частные производные от функции Лагранжа по неизвестным переменным $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda$ и приравняем к 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r_i} - \lambda = 0, \ i = 1,2...n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i - R = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Решая полученную систему уравнений, определим множитель Лагранжа:

$$\lambda = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} r_i} \quad (2.30)$$

и оптимальный план x:

$$x_i^{opt} = \frac{r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} R. \qquad (2.31)$$

Сравнивая (2.30) и (2.28), приходим к выводу, что экономическим смыслом множителя Лагранжа является внутренняя цена a.

Воспользоваться формулой (2.28) центру затруднительно, так как параметры r_i не известны, но зато известны их оценки s_i, сообщаемые агентами. Подставим сообщения агентов в полученные формулы (2.28), (2.31). Формула для внутренней цены запишется:

$$a = \frac{R}{\sum\limits_{i=1}^{n} s_j}. \qquad (2.32)$$

Формула для нахождения оптимального плана совпадает с аналогичной формулой механизма прямых приоритетов:

$$x_i^{opt} = \frac{s_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j} R. \qquad (2.33)$$

Подставим в целевую функцию агента $f_i(y_i) = y_i a - \frac{1}{2r_i} y_i^2$ внутреннюю цену (2.32) и план (2.33):

$$f_i(y_i) = \frac{s_i}{(\sum\limits_{j=1}^{n} s_j)^2} R^2 - \frac{1}{2r_i} \frac{s_i^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n} s_j)^2} R^2 = \frac{R^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n} s_j)^2} (s_i - \frac{s_i^2}{2r_i}), \ i = 1,n. \qquad (2.34)$$

Полученная целевая функция зависит только от сообщений агентов s_i. Определим оптимальную величину заявки i-го агента. Введём гипотезу ***слабого влияния: каждый агент своим сообщением не влияет на общий для всех агентов управляющий параметр – внутрифирменную цену а.*** Гипотеза слабого влияния выполняется в организациях с большим числом агентов, когда влияние одного агента на общее управление мало. Знаменатель целевой функции тогда не будет зависеть от сообщения i-го агента, будем считать его

...ситной. Дифференцируя (2.34) и приравнивая к нулю, получим $s_i^{*} = r_i, i = 1,n$. Сообщение достоверной информации выгодно всем агентам, следовательно механизм внутренних цен является неманипулируемым.

Введём понятие внутренней прибыли. ***Внутренняя прибыль – это фиктивная прибыль, рассчитанная на основе внутренней цены и используемая для взаимных расчетов между центром и агентами.***
Внутренняя прибыль рассчитывается:

$$\pi_i^{вн} = ax_i - \frac{1}{2r_i}x_i^2, i = 1,n \quad (2.35)$$

Фактическая прибыль агентов определяется:

$$\pi_i = \frac{\pi_i^{вн}}{\sum_{i=1}^{n}\pi_i^{вн}}\pi .$$

Фактическая прибыль каждого агента π_i тем больше, чем больше фактическая прибыль фирмы π и внутренняя прибыль каждого агента. В случае сообщения достоверной информации $s_i = r_i, i = 1,n$ распределение ресурса будет оптимальным, а прибыль фирмы - максимальной. Таким образом, новый механизм действует полностью аналогично принципу прямых приоритетов при одном условии, что агенты честно сообщают информацию о своих параметрах. Это то преимущество, которое получил центр, перейдя на новые правила игры. Механизм внутренних цен является механизмом открытого управления (честной игры).

Преимущества механизма внутренних цен:

1. Сообщение достоверной информации агентами.
2. Интересы центра и агентов согласованы.
3. Центр получает максимально возможную прибыль.

Пример 2.5 Распределение ресурса с использованием механизма внутренних цен

Фирма занимается производством делимого продукта. Руководство фирмы (центр) заключило договор на производство продукта количеством

R=150 единиц. Этот заказ могут выполнить два подразделения фирмы (агента). Цена единицы продукции p=4000 руб. Затраты первого и второго подразделений зависят от объёма выполняемого заказа $c_1(x_1)=10x_1^2$ и $c_2(x_2)=20x_2^2$. Центр не имеет информации об эффективности агентов и использует для распределения заказа механизм внутренних цен.

Рассмотреть три случая:

а) предоставление подразделениями **достоверной информации**. (В качестве достоверной заявки выбрать выгодные для подразделений планы - решение задачи 2.2);

б) завышение вторым подразделением заявки на 20-50%;

в) занижение вторым подразделением заявки на 20-50%.

Определить:

1) внутреннюю цену *а*;
2) прибыль центра и подразделений (внутреннюю, фактическую). Выполнить проверку, сравнив фактическую прибыль с заработанной;
3) эффективность механизма внутренних цен.

Решение:

а) предоставление достоверной информации.

При предоставлении достоверной информации заявки подразделений равны оптимальным для них планам, определённым в задаче 2.2: $s_1 = y_1^{opt} = 200$ и $s_2 = y_2^{opt} = 100$.

Определим внутрифирменную цену:

$$a = \frac{R}{s_1 + s_2} p = \frac{150}{200+100} 4000 = 2000 \ руб.$$

Планы для подразделений:

$$x_1 = \frac{s_1}{s_1 + s_2} R = \frac{200}{200+100} 150 = 100;$$

$$x_2 = \frac{s_2}{s_1 + s_2} R = \frac{100}{200+100} 150 = 50.$$

Внутренняя прибыль каждого агента равна:

$$\pi_1^{вн}(100) = x_1 a - 10x_1^2 = 100 \cdot 2000 - 10 \cdot 100^2 = 100000 \text{ руб.}$$

$$\pi_2^{вн}(50) = x_2 a - 20x_2^2 = 50 \cdot 2000 - 20 \cdot 50^2 = 50000 \text{ руб.}$$

Прибыль центра составляет:

$$\pi(100,50) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 = 100 \cdot 4000 - 10 \cdot 100^2 - 20 \cdot 50^2 = 450000 \text{ руб.}$$

Фактическая прибыль каждого агента равна:

$$\pi_1 = \frac{\pi_1^{вн}}{\pi_1^{вн} + \pi_2^{вн}} \pi = \frac{100000}{100000 + 50000} \cdot 450000 = 300000 \text{ руб;}$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_2^{вн}}{\pi_1^{вн} + \pi_2^{вн}} \pi = \frac{50000}{100000 + 50000} \cdot 450000 = 150000 \text{ руб.}$$

Рассчитаем заработанную прибыль подразделений, если бы они сами реализовывали продукцию по рыночной цене:

$$\pi_1^{зар} = x_1 a - 10x_1^2 = 100 \cdot 4000 - 10 \cdot 100^2 = 300000 \text{ руб;}$$

$$\pi_2^{зар} = x_2 a - 20x_2^2 = 50 \cdot 4000 - 20 \cdot 50^2 = 150000 \text{ руб.}$$

Заработанная прибыль агентами в случае сообщения достоверной информации равна фактической прибыли, распределяемой центром на основе внутренней прибыли.

Потери центра из-за неэффективного управления равны:

$$\Delta\pi(x_1, x_2) = \pi^{max} - \pi = 450000 - 450000 = 0 \text{ руб.}$$

Эффективность механизма внутренних цен

$$K = \frac{\pi(x)}{\pi^{max}(x)} = \frac{450000}{450000} = 1.$$

При сообщении достоверной информации центр получает максимальную прибыль (отсутствует недополучение прибыли).

б) предоставление завышенной заявки.

Первое подразделение сообщает достоверную информацию о своём выгодном плане, $s_1 = y_1^{opt} = 200$, второе подразделение сообщает завышенную оценку $s_2 = 120$.

Определим внутрифирменную цену:

$$a = \frac{R}{s_1 + s_2} p = \frac{150}{200 + 120} 4000 = 1875 \text{ руб.}$$

Планы для подразделений:

$$x_1 = \frac{s_1}{s_1 + s_2} R = \frac{200}{200 + 120} 150 = 94;$$

$$x_2 = \frac{s_2}{s_1 + s_2} R = \frac{120}{200 + 120} 150 = 56.$$

Внутренняя прибыль каждого агента равна:

$$\pi_1^{вн}(94) = x_1 a - 10x_1^2 = 94 \cdot 1875 - 10 \cdot 94^2 = 87891 \text{ руб.};$$

$$\pi_2^{вн}(56) = x_2 a - 20x_2^2 = 56 \cdot 1875 - 20 \cdot 56^2 = 42188 \text{ руб.}$$

Прибыль центра составляет:

$$\pi(94;56) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 = 94 \cdot 4000 - 10 \cdot 94^2 - 20 \cdot 56^2 = 448828 \text{ руб.}$$

Фактическая прибыль каждого агента равна:

$$\pi_1 = \frac{\pi_1^{вн}}{\pi_1^{вн} + \pi_2^{вн}} \pi = \frac{87891}{87891 + 42188} \cdot 448828 = 303262 \text{ руб.};$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_2^{вн}}{\pi_1^{вн} + \pi_2^{вн}} \pi = \frac{50000}{87891 + 42188} \cdot 448828 = 145566 \text{ руб.}$$

Рассчитаем заработанную прибыль подразделений, если бы они сами реализовывали продукцию по рыночной цене:

$$\pi_1^{зар} = x_1 a - 10x_1^2 = 94 \cdot 4000 - 10 \cdot 94^2 = 287109 \text{ руб.};$$

$$\pi_2^{зар} = x_2 a - 20x_2^2 = 56 \cdot 4000 - 20 \cdot 56^2 = 161719 \text{ руб.}$$

Потери центра

$$\Delta\pi(x_1, x_2) = \pi^{max} - \pi = 450000 - 448828 = 1172 \text{ руб.}$$

Эффективность механизма внутренних цен

$$K = \frac{\pi(x)}{\pi^{max}(x)} = \frac{448828}{450000} = 0{,}99.$$

Потери второго агента по сравнению с сообщением достоверной информации

$$\Delta\pi_2(x_2) = \pi_2^{достов} - \pi_2 = 150000 - 145566 = 4434 \text{ руб.}$$

При сообщении завышенной заявки второй агент получает прибыли меньше, чем при сообщении достоверной информации.

в) предоставление заниженной заявки.

Первое подразделение сообщает достоверную информацию о своём выгодном плане, $s_1 = y_1^{opt} = 200$, второе подразделение сообщает заниженную оценку $s_2 = 80$.

Определим внутрифирменную цену:

$$a = \frac{R}{s_1 + s_2} p = \frac{150}{200 + 80} \cdot 4000 = 2143 \text{ руб.}$$

Планы для подразделений:

$$x_1 = \frac{s_1}{s_1 + s_2} R = \frac{200}{200 + 80} \cdot 150 = 107;$$

$$x_2 = \frac{s_2}{s_1 + s_2} R = \frac{80}{200 + 80} \cdot 150 = 43.$$

Внутренняя прибыль каждого агента равна:

$$\pi_1^{вн}(107) = x_1 a - 10x_1^2 = 107 \cdot 2143 - 10 \cdot 107^2 = 114796 \text{ руб.};$$

$$\pi_2^{вн}(43) = x_2 a - 20x_2^2 = 43 \cdot 2143 - 20 \cdot 43^2 = 55102 \text{ руб.}$$

Прибыль центра

$$\pi(107{,}43) = Rp - 10x_1^2 - 20x_2^2 = 107 \cdot 4000 - 10 \cdot 107^2 - 20 \cdot 43^2 = 448469 \text{ руб.}$$

Фактическая прибыль каждого агента равна:

$$\pi_1 = \frac{\pi_1^{вн}}{\pi_1^{вн} + \pi_2^{вн}} \pi = \frac{114796}{114796 + 55102} \cdot 448469 = 303020 \text{ руб.};$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_2^{вн}}{\pi_1^{вн} + \pi_2^{вн}} \pi = \frac{55102}{114796 + 55102} \cdot 448469 = 145450 \text{ руб.}$$

Рассчитаем заработанную прибыль подразделений, если бы они сами реализовывали продукцию по рыночной цене:

$$\pi_1^{зар} = x_1 a - 10x_1^2 = 107 \cdot 4000 - 10 \cdot 107^2 = 313776 \text{ руб.};$$

$$\pi_2^{зар} = x_2 a - 10x_2^2 = 43 \cdot 4000 - 10 \cdot 43^2 = 134694 \text{ руб.}$$

Потери центра

$$\Delta\pi(x_1, x_2) = \pi^{max} - \pi = 450000 - 448469 = 1531 \text{ руб.}$$

Эффективность механизма внутренних цен

$$K = \frac{\pi(x)}{\pi^{max}(x)} = \frac{448469}{450000} = 0,99.$$

Потери второго агента по сравнению с сообщением достоверной информации

$$\Delta\pi_2(x_2) = \pi_2^{достов} - \pi_2 = 150000 - 145450 = 4550 \text{ руб.}$$

При сообщении заниженной заявки второй агент получает прибыли меньше, чем при сообщении достоверной информации.

2.6. Экспертные оценки в исследовании систем управления

Даже если все эксперты согласны, не исключено что они ошибаются.

Бертран Рассел

В управлении социально-экономическими системами важную роль играют экспертные оценки. ***Механизмы получения и обработки информации от экспертов – специалистов в конкретных областях называются механизмами экспертизы.*** Рассмотрим механизм экспертизы на примере задачи распределения ресурса. Для определения плана распределения ресурса центр привлекает n экспертов. Каждому из n экспертов предлагается сообщить величину выделяемого ресурса s_i i-му агенту из отрезка $[d,D]$, где d- минимальная, а D - максимальная оценка. В дальнейшем на основании экспертных оценок определяется план распределения ресурса x. Проблема состоит в том, чтобы определить план x, исходя из заданных s_i, $i = 1,n$.

Обозначим r_i - истинное мнение i-го эксперта. Обычно предполагается, что эксперты сообщают свои истинные мнения r_i, $i = 1,n$. Если каждый из экспертов немного несознательно ошибается, то среднее арифметическое мнений экспертов

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \tag{2.36}$$

даст объективную оценку плана x. Однако у такого механизма есть недостаток. Если эксперт заинтересован в том, чтобы итоговая оценка x совпала с его мнением r_i, то он может попытаться сообщить оценку $s_i \neq r_i$. Механизм (2.36) является манипулируемым, так как допускает искажение информации, которое приводит к изменению итогового решения.

Каждый i-й эксперт заинтересован в том, чтобы результат экспертизы x был максимально близок к его мнению r_i. В качестве целевой функции i-го эксперта примем минимизацию разность между итоговым решением x и своей оценкой r_i:

$$f_i(x,r_i) = |x - r_i| \to \min_{s_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Опишем механизм выработки экспертной оценки x, являющийся механизмом открытого управления [7, 35]. Будем считать, что оценки экспертов расположены по неубыванию:

$$s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n.$$

Вычисляются n вспомогательных чисел, которые делят отрезок $[d,D]$ на n равных частей:

$$v_i = D - (i-1)\frac{D-d}{n}, \; i = \overline{1,n}.$$

Для каждого i-го берётся меньшее из двух чисел s_i и v_i:

$$min\{s_i, v_i\}.$$

Из всех минимумов выбирается наибольший, который и является итоговой экспертной оценкой:

$$x^* = \max_{1 \le i \le n} min\{s_i, v_i\}.$$

В этом механизме предполагалась, что мнения экспертов равнозначны. Можно ввести в этом механизме весовые коэффициенты, которые будут учитывать различную квалификацию экспертов.

Пример 2.6 Распределение ресурса на основе экспертного опроса

Фирма занимается производством делимого продукта. Руководство фирмы (центр) заключило договор на производство продукта количеством R=150 единиц. Этот заказ могут выполнить два подразделения фирмы (агента). Цена единицы продукции p=4000 руб. Для распределения заказа между подразделениями Центр производит опрос экспертов. Пять экспертов сообщили следующие оценки из интервала [150; 250] для первого подразделения 160, 240, 210, 200, 190 и оценки из интервала [50; 150] для второго подразделения 60, 70, 100, 110, 130.

Определить: итоговое мнение экспертов.

Решение:

Определим итоговое мнение экспертов распределения ресурса первому подразделению. Вычислим числа $v_i,\ i = 1,.\imath$

$$v_1 = D-(i-1)\frac{D-d}{n} = 250-(1-1)\frac{250-160}{5} = 250.$$

Аналогично вычисляется и другие значения. Для каждого эксперта выбирается наименьшее из двух чисел s_i и v_i. Результаты расчётов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Расчёт итоговой оценки для первого подразделения

№	1	2	3	4	5
s_i	160	190	200	210	240
v_i	250	230	210	190	170
$min(s_i, v_i)$	160	190	***200***	190	170

В качестве итоговой оценки распределяемого ресурса для первого агента выбирается максимальное число в последней строке $x_1 = 200$ *ед.*

Определим итоговую экспертную оценку распределения ресурса второму подразделению. Результаты расчётов приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Расчёт итоговой оценки для второго подразделения

№	1	2	3	4	5
s_i	60	70	100	110	130
v_i	150	130	110	90	70
$min(s_i, v_i)$	60	70	***100***	90	70

В качестве итоговой оценки распределяемого ресурса для второго агента выбирается максимальное число в последней строке $x_2 = 100$ *ед.*

2.7.Исследование механизмов распределения затрат

Рассмотрим задачу распределения затрат на производство или покупку общего блага, которым будет пользоваться каждый из агентов. В качестве общего блага могут выступать новые технологии, оборудование, здание, мост и т.д. Сколько должен заплатить каждый из агентов или как распределить затраты между ними? Если центр знает доход каждого агента от использования общественного блага, то можно предполагать различные принципы распределения затрат. Как правило, потребности агентов в общем благе известны только им самим. А если затраты агентов зависят от их сообщений, которые невозможно или трудно проверить, то агенты постараются понести затрат как можно меньше. Поэтому в механизме распределения затрат возникает проблема предоставления достоверной информации или проблема манипулируемости. В качестве примера можно привести ситуацию, которая возникает в студенческом общежитии при желании студентов, проживающих в одной комнате купить магнитофон или другую бытовую технику.

Пусть имеются n агентов и им необходимо купить новое оборудование, которое они будут использовать для производства продукции. Стоимость оборудования C руб. Доходы агентов от использования общественного блага $D_i, i = \overline{1,n}$. Покупка нового оборудования выгодна для агентов, т.к. сумма доходов больше, чем затраты агентов: $\sum_{i=1}^{n} D_i > C$. Существуют следующие механизмы распределения затрат между агентами:

Принцип равного распределения.

Принцип равного распределения предполагает равное распределение затрат между агентами $c_i = \frac{C}{n}$. Значение целевой функции i-го агента представляет собой разность между доходом от общего блага и затратами на его покупку:

$$f_i = D_i - c_i \to \max . \tag{2.37}$$

Если доход каждого агента больше, чем затраты $D_i > \frac{C}{n}$, то этот вариант распределения затрат реализуем.

Преимущества: механизм является неманипулируемым.

Недостатки:

1. Возможна ситуация, когда затраты агента больше чем его доход, последует отказ от участия одного из агентов, следовательно проект не состоится.
2. Принцип равного распределения несправедлив, т.к. если доходы агентов не равны, то затруднительно заставить агентов платить равные части.

Принцип пропорционального распределения.

Затраты распределяются пропорционально сообщаемым агентами оценкам доходов s_i, т.к. центр не знает истинных доходов агентов:

$$c_i = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i} C \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.38}$$

Принцип пропорционального распределения можно сформулировать следующим образом «**кому общественное благо нужнее, пусть тот больше и платит**». Очевидно, что покупка оборудования возможна только в случае, если сумма заявок больше чем затраты:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i > C \tag{2.39}$$

Для того чтобы целевые функции были не отрицательными затраты агента должны быть меньше дохода:

$$c_i \le D_i \tag{2.40}$$

Т.к. функция (2.38) монотонна по s_i , а целевая функция 2.37 убывает по c_i, то оба агента будут стремиться снизить свои заявки. Увеличивая оценку s_i, i-й агент увеличивает свои затраты. Уменьшая оценку s_i, i-й агент останавливает совместный проект. Сообщение достоверной информации в механизме рационального распределения не является равновесием Нэша. Механизм пропорционального распределения является ***механизмом равных рентабельностей. Рентабельность - это отношение прибыли к затратам (прибыль на единицу затрат):***

$$\rho_i = \frac{s_i - c_i}{c_i}. \tag{2.41}$$

Подставляя (2.38) в (2.41) получаем, что рентабельности агентов одинаковы:

$$\rho_i = \frac{C}{\sum_{i=1}^{n} c_i} - 1 = const\,.$$

Принцип равной прибыли.

При использовании данного механизма затраты распределяются так, чтобы прибыли агентов были одинаковыми.

$$c_i = \frac{C}{n} + \frac{(s_i - \sum_{j \neq i}^{n} s_j)}{n} \quad i = 1, n\,.$$

Недостатками механизмов пропорционального распределения и равной прибыли является их манипулируемость.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Назовите определение механизма планирования.
2. Сформулируйте задачу планирования.
3. В чем заключается эффект манипулирования информацией?
4. Сформулируйте принцип открытого управления.
5. Сформулируйте задачу распределения ресурса.
6. Как оценивается эффективность механизма планирования?
7. Сформулируйте и решите задачу распределения ресурса в интересах центра.
8. Сформулируйте и решите задачу оптимального распределения ресурса в интересах агентов.
9. Приведите классификацию приоритетных механизмов, общую формулу для распределения ресурса.
10. Дайте характеристику механизму прямых приоритетов, приведите формулу для распределения ресурса.
11. Назовите недостатки механизма прямых приоритетов.
12. Дайте характеристику механизму обратных приоритетов.
13. Выведите формулу для распределения ресурса в механизме обратных приоритетов.
14. Назовите преимущества и недостатки механизма обратных приоритетов.
15. Дайте характеристику конкурсному механизму распределения ресурса, в чём отличие от механизма обратных приоритетов?
16. Сформулируйте задачу согласования интересов центра и агентов на основе механизма внутренних цен.
17. Сформулируйте алгоритм механизма внутренних цен.
18. Назовите преимущества механизма внутренних цен.
19. Что такое механизм экспертизы?
20. Сформулируйте механизм экспертизы, являющийся механизмом открытого управления.
21. Сформулируйте задачу распределения затрат.
22. Назовите и дайте характеристику механизмам распределения затрат.

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Оскорбление является обычной наградой за хорошую работу.
Из разговора Азазелло с Маргаритой.
Булгаков М.А. МАСТЕР И МАРГАРИТА

3.1.Постановка задачи стимулирования

Стимулированием называется побуждение агентов к совершению определённых действий, осуществляемое воздействием центра на их целевые функции.

Механизмом стимулирования называется правило принятия центром решений относительно материальных выплат агентам. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, определяемую функцией стимулирования, которая задаёт зависимость вознаграждения агента, получаемого им от центра $\sigma(y)$ от выбираемых действий y. Термины «механизм стимулирования», «система стимулирования», «функция стимулирования» в дальнейшем будут употребляться как синонимы.

Рассмотрим простейшую организационную систему, модель которой описывается пятью параметрами: **состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность**. Структура данной системы изображена на рис. 3.1. В качестве центра может выступать работодатель, руководитель агента или организация, заключившая договор с агентом. В качестве агента может выступать наёмный работник, подчинённый или организация, являющаяся второй стороной по договору. В договорах российских организаций под центром понимается «ЗАКАЗЧИК», а под агентом – «ИСПОЛНИТЕЛЬ».

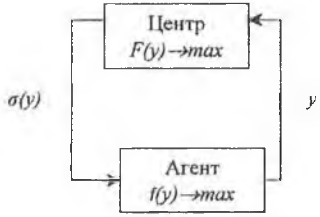

Рис. 3.1. Структура базовой организационной системы

Стратегией агента является выбор действия $y \in Y$ (количество произведённой продукции, количество отработанных часов). Стратегией центра является выбор функции вознаграждения $\sigma(y) \in M$, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение. Множество допустимых вознаграждений M может ограничиваться законодательно (минимальным размером оплаты труда), экономическими критериями деятельности центра, тарифно-квалификационными требованиями к оплате. Множество допустимых действий – положительная полуось $y \geq 0$.

Выбор действия y требует от агента затрат $c(y)$, выраженных в денежной форме, и приносит центру доход $H(y)$. Интересы участников системы выражены их целевыми функциями (функциями полезности, предпочтения). Целевая функция агента – это разность между функцией стимулирования (количеством материальных выплат, которые он получает) и функцией затрат:

$$f(y) = \sigma(y) - c(y) \to max .$$

С экономической точки зрения затраты агента можно интерпретировать как денежный эквивалент тех усилий, которые агент должен произвести для достижения действия y.

Для центра целевой функцией является разность между доходом и затратами на стимулирование агента:

$$F(y) = H(y) - \sigma(y) \to max.$$

Функция стимулирования и доход измеряются в денежных единицах. Рациональное поведение агентов заключается в максимизации своей целевой функции путем выбора действия y. Определим информированность и порядок функционирования системы. На момент принятия решения о том, какую систему стимулирования следует установить агентам, центр имеет информацию о том, какие действия агент может выбрать и о предпочтениях агента (его целевой функции). Агент знает выбранную систему стимулирования, то есть функциональную зависимость материального вознаграждения от действия. Центр, обладая правом первого хода, сообщает агенту выбранную функцию стимулирования, после чего агент выбирает действие, максимизирующее его целевую функцию. Основная идея стимулирования заключается в том, что, изменяя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия. Целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции, называется множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования:

$$P(y) = \arg\max_{y \in Y} \{\sigma(y) - c(y)\}. \quad (3.1)$$

Зная, что агент выбирает действия из множества (3.1), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Так как множество $P(y)$ может содержать более одной точки, необходимо ввести дополнительные предположения о выборе агента. Примем ***гипотезу благожелательности – из всех действий, обеспечивающих одинаковое значение его целевой функции, агент выбирает то действие, которое благоприятно для центра.***

Эффективностью системы стимулирования называется значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} F(y).$$

Прямая задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

$$K(\sigma) = \max_{\sigma \in M} F(y).$$

Обратная задача стимулирования заключается в поиске множества систем стимулирования, реализующих заданное действие с заданными свойствами (например с минимальными затратами на стимулирование).

Предполагается, что у агента имеется альтернатива - заключить договор с другой организацией (другим центром) или получать пособие по безработице. Альтернативный доход агента (в терминологии теории контрактов [36] - резервная заработная плата reservation wage constraint) обозначим U. Часто под альтернативным доходом понимается средняя заработная плата на рынке. Центр должен обеспечить агенту значение целевой функции не меньшее, чем получение $U \geq 0$.

Задача стимулирования заключается в том, чтобы выбрать оптимальную систему стимулирования, то есть систему, имеющую максимальную эффективность:

$$\begin{cases} H(y^*) - \sigma(y^*) \to max; \\ y^* = \arg\max_{y \in Y} \{\sigma(y) - c(y)\}; \\ \sigma(y^*) - c(y^*) \geq U. \end{cases} \tag{3.2}$$

Конкретизируем функцию стимулирования и функцию затрат агента. Рассмотрим следующую задачу стимулирования: центр поручает агенту выполнение работы по производству продукции, используя следующую систему стимулирования: $\sigma(y,a) = \alpha y$, где a – ставка оплаты единицы произведенной агентом продукции (рис. 3.1). Цена, по которой центр продаёт продукцию - p. Затраты агента, выраженные в денежной форме: $c(y) = \frac{y^2}{2r}$, где r – коэффициент, который характеризует квалификацию агента и переводит затраты в денежное выражение. Чем выше квалификация агента, тем меньше его усилия по производству продукции. Необходимо определить параметр системы стимулирования α. Запишем целевую функцию центра:

$$F(y,\alpha) = py - \alpha y \to max$$

и целевую функцию агента:

$$f(y,\alpha) = \alpha y - \frac{y^2}{2r} \to max\,;$$

Задача стимулирования формулируется:

$$\begin{cases} py^* - \alpha y^* \to max\,; & (3.3) \\ y^* = \underset{y \in Y}{arg\,max} \{ \alpha y - \frac{y^2}{2r} \}. & (3.4) \end{cases}$$

Данная задача решается в 2 этапа. На первом этапе из выражения (3.4) определяется реакция агента как аналитическая зависимость от параметра системы стимулирования центра α. На втором этапе полученная аналитическая зависимость подставляется в формулу (3.3), получается задача безусловной оптимизации. Решая эту задачу, определим параметр системы стимулирования α.

Первый этап. Найдем реакцию агента из решения оптимизационной задачи (3.4). Для этого продифференцируем выражение (3.4) по y и приравняем к нулю:

$$\frac{df(y,\alpha)}{dy} = \alpha - \frac{y^*}{r} = 0.$$

Решая уравнение, определим реакцию агента:

$$y^* = \alpha r\,.$$

Реакция агента, то есть объём производимой им продукции, который максимизирует его прибыль, прямо пропорционален ставке оплаты продукции α и квалификации агента r.

Второй этап. Подставим реакцию агента в целевую функцию (3.3):

$$F(\alpha) = p\alpha r - \alpha^2 r \to max\,.$$

Вычислим первую производную и приравняем к нулю:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = pr - 2\alpha r = 0\,.$$

Решая уравнение, определим параметр α:

$$\alpha = \frac{P}{2}.$$

Параметр системы стимулирования α зависит только от цены продукции.

В том случае, если действие агента не определяется аналитически, задачу стимулирования возможно решить с помощью численного алгоритма, основанного на методе Ньютона [30, 31].

Алгоритм поиска оптимального параметра системы стимулирования

1.С помощью метода Ньютона решается оптимизационная задача для центра (3.3). Задаются начальные приближения для параметра системы стимулирования $\alpha[0]$.

2.В точке $\alpha[k], k = 0,1,2....$, вычисляются первая и вторая производные целевой функции центра по приближённым формулам:

$$\frac{d\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]} \approx \frac{\Phi(y^*,\alpha[k]+2h_\alpha)-\Phi(y^*,\alpha[k])}{2h_\alpha}, \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]^2} \approx \frac{\Phi(y^*,\alpha[k])-2\Phi(y^*,\alpha[k]+h_\alpha)+\Phi(y^*,\alpha[k]+2h_\alpha)}{h_\alpha^2}, \tag{3.6}$$

где h_α - приращение параметра $\alpha[k]$ на k-й итерации.

Для численного дифференцирования по формулам (3.5)-(3.6) необходимо вычислять значение целевой функции центра $\Phi(y^*,\alpha[k])$ в трёх точках $\alpha[k], \alpha[k]+h_\alpha, \alpha[k]+2h_\alpha$. Целевая функция центра зависит от параметра системы стимулирования $\alpha[k]$ и реакции агента y. Для определения реакции агента y^* на k итерации необходимо решить оптимизационную задачу (3.4). Для решения оптимизационной задачи агента также используется метод Ньютона (пункты 2.1-2.3). После нахождения первой и второй производных целевой функции центра осуществляется переход к пункту 3.

Алгоритм поиска реакции агента при заданном параметре $\alpha[k]$.

2.1.Задаются начальные приближения для реакции агента $y[0]$.

2.2.В точке $y[j]$, $j=0,1,2,...$, вычисляются первая и вторая производные функции агента.

Для численного дифференцирования целевой функции агента используются следующие приближенные формулы:

$$\frac{df(y[j],\alpha[k])}{dy[j]} \approx \frac{f(y[j]+2h_y,\alpha[k])-f(y[j],\alpha[k])}{2h_y},$$

$$\frac{d^2 f(y[j],\alpha[k])}{dy[j]^2} \approx \frac{f(y[j],\alpha[k])-2f(y[j]+h_y,\alpha[k])+f(y[j]+2h_y,\alpha[k])}{h_y^2}$$

где h_y - приращение для реакции агента $y[j]$ на j-ой итерации.

2.3.На каждой j-ой итерации поиска реакции агента вычисляются значения $y[j+1]$ при известном параметре системы стимулирования $\alpha[k]$ в соответствии с методом Ньютона:

$$y[j+1]=y[j]-\left(\frac{d^2 f(y[j],\alpha[k])}{dy[j]^2}\right)^{-1}\frac{df(y[j],\alpha[k])}{dy[j]}.$$

2.4.Проверяется условие выхода из итерационного процесса

$$|y[j+1]-y[j]|\le\varepsilon_y,$$

где ε_y - заданная малая величина для итерационного процесса поиска реакции агента y^*.

Если условие выполняется, то итерационный процесс прекращается, в противном случае осуществляется переход к пункту 2.2. В случае останова итерационного процесса и успешного определения реакции агента y осуществляется возврат к пункту 2.

3.На каждой k-й итерации поиска параметра системы стимулирования вычисляется новое значение параметра α в соответствии с методом Ньютона:

$$\alpha[k+1]=\alpha[k]-\left(\frac{d^2\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]^2}\right)^{-1}\frac{d\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]}.$$

4.Проверяется условие выхода из итерационного процесса поиска параметра системы стимулирования:

$$|\alpha[k+1]-x[k]|\le\varepsilon_\alpha,$$

где ε_α - заданная малая величина для итерационного процесса поиска параметра α.

Если условие выполняется, то итерационный процесс прекращается, в противном случае осуществляется переход к пункту 2.

Пример 3.1. Задача стимулирования для одноэлементной системы

Руководитель поручает рабочему производство продукции, используя следующую систему стимулирования: $\sigma(y,a)=\alpha y$, где a – ставка оплаты единицы произведенной агентом продукции. Цена, по которой центр продаёт продукцию, $p=1000$ *руб.* Затраты агента, выраженные в денежной форме: $c(y)=0,1y^2$. *Определить* параметр системы стимулирования α.

Решение:

Запишем целевую функцию центра:

$$F(y,\alpha)=1000y-\alpha y\to max$$

и целевую функцию агента:

$$f(y,\alpha)=\alpha y-0,1y^2\to max.$$

Задача стимулирования формулируется:

$$\begin{cases} 1000y^*-\alpha y^*\to \max; & (3.7)\\ y^*=\arg\max\limits_{y\ge 0}\{\alpha y-0,1y^2\}. & (3.8)\end{cases}$$

Первый этап. Найдем реакцию агента из решения оптимизационной задачи (3.8). Для этого продифференцируем выражение (3.8) по y и приравняем к нулю:

$$\frac{df(y,a)}{dy}=\alpha-0,2y=0.$$

Решая уравнение, определим реакцию агента:

$$y^*=\frac{\alpha}{0,2}.$$

Второй этап. Подставим реакцию агента в целевую функцию (3.7):

$$F(\alpha)=1000\frac{\alpha}{0,2}-\alpha\frac{\alpha}{0,2}\to max.$$

Вычислим первую производную и приравняем к нулю:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1000}{0,2}-2\frac{\alpha}{0,2}=0.$$

Решая уравнение, определим параметр α:

$$\alpha = 500.$$

3.2.Оптимальное решение задачи стимулирования

Задача стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность. Решение задачи сложное, поэтому попытаемся угадать оптимальную систему стимулирования, а затем обосновать ее оптимальность.

Изобразим графики функции дохода центра и затрат агента (рис.3.2).

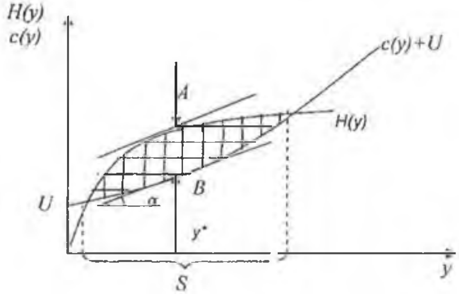

Рис. 3.2. Графики дохода центра и затрат агента

Агент согласится выполнять действие *y*, если вознаграждение, которое он получит, будет не меньше, чем его затраты *c(y)*. Агента устраивает оплата выше функции затрат плюс резервная зарплата *U*. Центр не может заплатить агенту больше, чем доход, который он получает от деятельности агента. Для центра выгодна область ниже дохода *H(y)*. Пересечение двух областей даёт **область компромисса** *S*. На рис. 3.2 область компромисса заштрихована. В области компромисса доход агента и центра не превосходит их затрат. Определим, какую точку из области компромисса выгодно выбрать центру. Центр стремится, чтобы агент работал за минимально возможную оплату, следовательно, с точки зрения центра необходимо сдвигаться по области компромисса вниз до точки В. Стимулирование в точности должно равняться сумме затрат агента и резервной полезности. Этот важный вывод получил название ***«принцип компенсации затрат»: чтобы побудить агента выбрать определённое действие, центру достаточно, помимо резервной заработной платы, компенсировать затраты агенту.***

С точки зрения агента, наоборот, при фиксированных затратах он хотел бы получать больше, значит, оптимальной для него является точка А на верхней границе области компромисса.

Центр обладает правом первого хода. Центр сообщает агенту: «Ты выбираешь определенное действие, я за него компенсирую тебе затраты. За любое другое действие оплаты не будет». Данная система стимулирования называется компенсаторной:

$$\sigma_K(x,y)=\begin{cases} c(x)+U+\delta, \ y=x; \\ 0, y\neq x, \end{cases}$$

где δ – мотивационная надбавка.

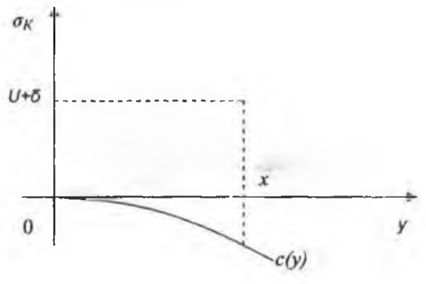

Рис. 3.3. Компенсаторная система стимулирования

Компенсаторная система приобретает следующий вид: вознаграждение должно быть равно сумме затрат агента, надбавки δ, резервной заработной платы U. Целевая функция агента изображена на рис. 3.3. Вычитая из положительного стимулирования затраты, получаем, что целевая функция агента равна отрицательным затратам во всех точках, кроме точки x. Таким образом, перешли от систем стимулирования общего вида к системе стимулирования, зависящей от двух скалярных параметров: плана x и материального вознаграждения агента σ_K. Определим оптимальное значение параметра x – *плана центра.* Запишем целевую функцию центра при использовании компенсаторной системы стимулирования:

$$F(x) = H(x) - c(x) \rightarrow max. \tag{3.9}$$

Так как мотивационная надбавка $\delta = const$ и резервная зарплата $U = const$, то их можно не учитывать, на оптимальное решение они не влияют.

Для нахождения оптимального плана x^* необходимо решить задачу оптимального согласованного планирования:

$$x^* = arg\,max\{H(x) - c(x)\}.$$

Это выражение означает, что разность между доходом центра и затратами агента - «толщина» области компромисса - должна быть максимальной. Производная имеет смысл угла наклона касательной. Продифференцируем (3.9) и приравняем нулю: $\frac{dH(x^*)}{d(x^*)} - \frac{dc(x^*)}{d(x^*)} = 0$. Из этого выражения следует равенство:

$$\frac{dH(x^*)}{d(x^*)} = \frac{dc(x^*)}{d(x^*)}. \tag{3.10}$$

При дифференцировании в точке x^* угол наклона касательной к функции дохода центра будет равен углу наклона касательной к функции затрат. $\frac{dH(x^*)}{d(x^*)}$ называется предельной производительностью агента *MRP (marginal rate of production)*; $\frac{dc(x^*)}{d(x^*)}$ называется предельными затратами *MC (marginal costs).*

Из формулы (3.10) следует, что предельная производительность агента равна предельным затратам:

$$MRP = MC.$$

Если первый ход делает центр, то он выбирает оптимальный план x^*, а в качестве материального стимулирования выбирается точка B. Если же первый ход делает агент, то он предлагает то же самое действие x^*, а оплату запрашивает максимальную, соответствующую точке A. В этом случае всю прибыль будет забирать агент. Если мы сложим целевые функции центра и агента, то сократятся значения функции стимулирования и останется разность доходов и затрат:

$$\begin{array}{c} F(y)=H(y)-\sigma(y) \\ f(y)=\sigma(y)-c(y) \\ \hline F(y)+f(y)=H(y)-c(y) \end{array}.$$

Значит, действие x^*, которое является решением задачи стимулирования, максимизирует сумму целевых функций. Действие агента, которое реализует центр, оптимально по Парето. Возможно определение компромисса между центром и агентом, они могут договориться делить прибыль пополам или в каком-то соотношении.

Компенсаторная система стимулирования не является единственной оптимальной системой. Для того чтобы агент по-прежнему выбирал действия $y=x^*$, достаточно, чтобы функция стимулирования проходила через точку с координатами $(x^*;c(x^*))$, а во всех остальных точках была бы не больше, чем затраты агента: $\sigma(x^*)-c(x^*)\geq\sigma_l(y)-c_l(y)$, так как $\sigma_l(y)\leq c_l(y)$.

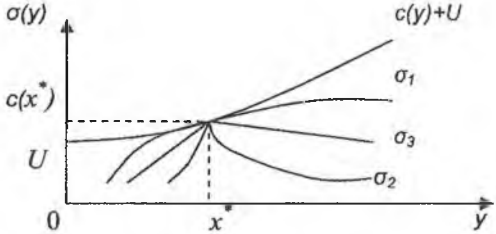

Рис. 3.4. Оптимальные системы стимулирования

Любая кривая, проходящая через точку с координатами $(x^*;c(x^*))$ и лежащая ниже функции затрат, является решением задачи стимулирования (рис. 3.4). Имеется бесконечное число решений этой задачи. Если одно и то же действие может быть реализовано несколькими системами стимулирования, то очевидно, что большей эффективностью обладает та из них, которая характеризуется меньшими затратами на стимулирование. Оптимальным является класс систем стимулирования, реализующий любое действие агента с минимальными затратами центра на стимулирование.

3.3. Базовые системы стимулирования

Все существующие формы заработной платы можно свести к базовым системам стимулирования или их комбинациям [22]. Существует четыре базовых системы стимулирования: скачкообразная, компенсаторная, пропорциональная и комиссионная (рис. 3.5).

Рис.3.5. Базовые системы стимулирования

1. Скачкообразная система стимулирования (С – типа)

Агент получает вознаграждение при условии, что выбранное им действие не меньше заданного и нулевое вознаграждение при выборе меньших действий:

$$\sigma_c(x,y)=\begin{cases}c, y\ge x;\\0, y<x,\end{cases}$$

где $x \in X$, x – план центра.

Скачкообразная система стимулирования изображена на рис. 3.6.

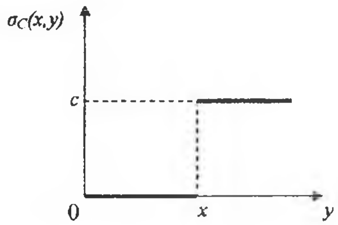

Рис. 3.6. Скачкообразная система стимулирования

Системы C-типа могут интерпретироваться как аккордные, соответствующие фиксированному вознаграждению при заданном результате (например: объем работ не ниже заданного) или когда вознаграждение выплачивается за количество отработанных часов без надбавок и оценок качества деятельности.

2. Компенсаторная система стимулирования (К - типа)

Центр компенсирует затраты агенту при условии, что его действия лежат в определенном диапазоне:

$$\sigma_к(x,y)=\begin{cases}c(y), y\le x;\\y>x,\end{cases}\quad \text{где } x\le\frac{1}{c(y)}.$$

Компенсаторная система стимулирования изображена на рис. 3.7.

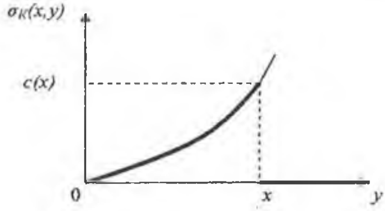

Рис. 3.7. Компенсаторная система стимулирования

Центр компенсирует затраты агента при $y \le x$ и не оплачивает выбор больших действий.

3. Пропорциональные системы стимулирования (L - типа)

Широкое применение получили системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование ставки оплаты единицы рабочего времени, сдельная – существование ставки оплаты за единицу продукции. Объединяет эти системы то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объёму выпущенной продукции), а ставка оплаты α является коэффициентом пропорциональности:

$$\sigma_L(\alpha, y) = \alpha y.$$

Пропорциональная система стимулирования изображена на рис. 3.8.

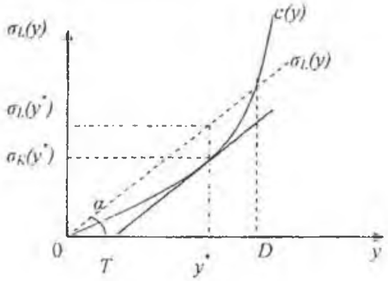

Рис. 3.8. Пропорциональная система стимулирования

Угол наклона прямой α является ставкой оплаты единицы продукции или единицы времени. Целевая функция запишется:

$$f(y, \alpha) = \alpha y - c(y) \to max.$$

Для нахождения максимума целевой функции агента продифференцируем её и приравняем к нулю:

$$\alpha - \frac{dc(y)}{dy} = 0.$$

Из условия максимума целевой функции следует, что агент выберет такое действие y^*, при котором угол наклона касательной к его функции затрат равен ставке оплаты α (см. рис. 3.8). За выбор этого действия центр при использовании пропорциональной системы должен заплатить агенту величину $\sigma_L(y^*)$, а при компенсаторной меньшую величину - $\sigma_K(y^*)$. Таким образом для побуждения агента к одному и тому же действию, при использовании пропорциональной системы стимулирования центр вынужден заплатить больше, чем при использовании компенсаторной системы стимулирования. Центр переплачивает агенту сверх необходимого минимума. Тогда возникает вопрос, почему же в практической деятельности фирм так распространена пропорциональная система стимулирования? Дело в том, что пропорциональная система стимулирования является устойчивой. Неправильная оценка функции затрат агента центром приводит в случае использования компенсаторной системы стимулирования к негативным последствиям. Для того, что бы сделать пропорциональную систему стимулирования такой же эффективной, как компенсаторная нужно сделать её ломанной. Центр начинает платить с норматива Т, а норматив и угол наклона подбирает так, чтобы прямая касалась функции затрат агента в нужной точке $\{y^*, \sigma_K(y^*)\}$.

В общем случае, возможно, что часть вознаграждения агенту выплачивается независимо от его действий:

$$\sigma_L(y) = \alpha_0 + \alpha y.$$

4. Комиссионная система стимулирования, основанная на перераспределении дохода (D-типа)

Стимулирование агента зависит от величины дохода центра:

$\sigma_D(y) = \beta H(y)$, где β- процент отчислений агенту от доходов центра.

3.4. Операции над базовыми системами стимулирования

Перечисленные системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить более сложные системы стимулирования. Для конструирования сложных систем возможны следующие операции.

Рис.3.9. Базовые системы стимулирования

1. Переход к «квази» - системе стимулирования. Вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом. Операция изображена на рис. 3.10.

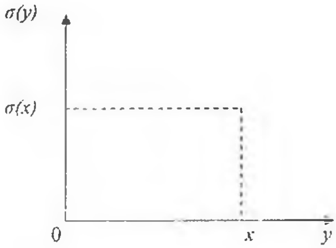

Рис. 3.10. «Квази»-система стимулирования

Данная операция практически не используется.

2. Разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование разных базовых систем стимулирования на разных подмножествах.

Например, центр может фиксировать планы x_1, x_2 и использовать систему С-типа со скачком в точке x_1 и пропорциональную систему L – типа при действиях $y \geq x_2$ (рис. 3.11).

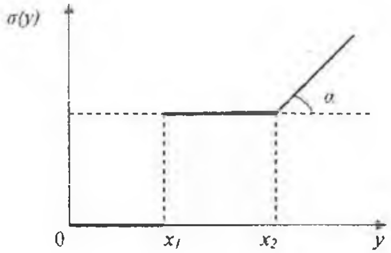

Рис. 3.11. Система стимулирования *CL*-типа

3.Алгебраическое суммирование двух систем стимулирования.

Например, алгебраическое суммирование скачкообразной и пропорциональной систем стимулирования создаёт систему $C + L$ типа (рис. 3.12).

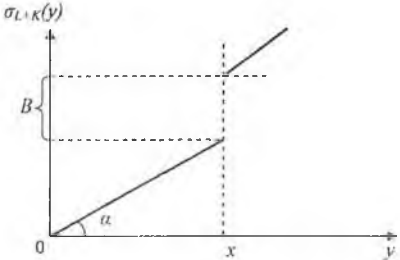

Рис. 3.12. Система стимулирования $C+L$-типа

3.5.Формы индивидуальной заработной платы

В практической деятельности фирм существуют следующие формы индивидуальной заработной платы [22] (рис. 3.13).

Рис. 3.13. Формы индивидуальной заработной платы

Рассмотрим эти формы индивидуальной заработной платы более подробно.

1.Тарифная форма оплаты - ***это форма оплаты, при которой индивидуальное вознаграждение агента не связано явным образом с количественными показателями его деятельности, а определяется ее содержанием, квалификационными требованиями и другими нормативами.***

Тарифная форма заработной платы существует в виде следующих форм:

1.1) окладно-премиальная;

1.2) плавающие оклады.

При использовании *окладно-премиальной* формы оплаты индивидуальное вознаграждение складывается из оклада (тарифа) и премии, определяющейся по результатам деятельности организации или подразделения.

В случае использования *плавающих окладов* тариф на каждый период рассчитывается с учетом результатов деятельности в предыдущих периодах.

2.Повременная форма оплаты - ***это форма оплаты, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от отработанного времени с учетом квалификации и качества труда.***

Повременная форма заработной платы реализовывается в виде следующих форм оплаты:

2.1) простая повременная;

2.2) повременно-премиальная.

При применении *простой повременной формы оплаты* используется постоянная ставка оплаты за единицу времени. Если под действием агента понимать отработанное время, то данной системе оплаты соответствует система стимулирования *L*-типа.

В случае реализации *повременно-премиальной формы оплаты* к сумме заработка по тарифу (при условии выполнения и/или перевыполнения нормативов, например – плана x) добавляется премия (обозначим ее ставку $\Delta\alpha$), измеренная, например, в процентах к тарифной ставке. Данной форме оплаты соответствует система стимулирования *LL*-типа (рис. 3.14).

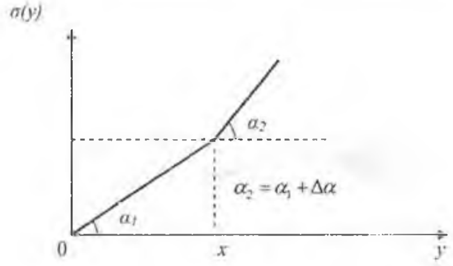

Рис. 3.14. Повременно-премиальная форма оплаты

3.Сдельная форма оплаты - ***это форма оплаты, при использовании которой индивидуальное вознаграждение агента зависит от количества произведенной продукции.***

Сдельная форма заработной платы реализовывается в виде следующих форм оплаты:

3.1) прямая сдельная;

3.2) *сдельно-премиальная*;

3.3) *сдельно-прогрессивная*;

3.4) *косвенно-сдельная*;

3.5) *аккордная*.

При применении *прямой сдельной формы оплаты* используется постоянная ставка материального вознаграждения, не зависящая от объема выпуска продукции. Если под действием агента понимать количество произведенной продукции, то данной форме оплаты соответствует система стимулирования *L*-типа.

При использовании *сдельно-премиальной формы оплаты*, помимо базового тарифа, выплачивается премия, например, за перевыполнение нормативов (рис. 3.15). Данной форме оплаты соответствует система стимулирования *L+C* - типа или в общем случае *LL+ C*-типа, $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

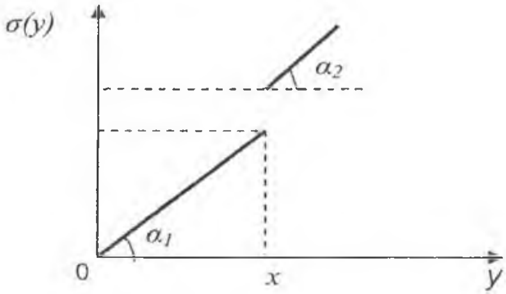

Рис. 3.15. Сдельно-премиальная форма оплаты

В случае реализации *сдельно-прогрессивной формы оплаты* выработка сверхустановленной нормы оплачивается по повышенным расценкам и ей соответствует система стимулирования *LL*-типа.

Косвенно-сдельная форма оплаты используется для оплаты труда вспомогательных рабочих. При этом размер их заработка может составлять определенный процент от заработка основных рабочих. Данной форме оплаты соответствует система стимулирования, основанная на перераспределении дохода – *D*-типа.

При использовании *аккордной формы оплаты* совокупный индивидуальный заработок выплачивается за фиксированные стадии работы или за выполнение полного комплекса работ. Данной форме оплаты соответствует система стимулирования C - типа. Разновидностью аккордной системы оплаты являются так называемые *аккордно-премиальные системы оплаты*, в которых дополнительная премия выплачивается за качество работ, сокращение сроков и другие показатели.

4.Участие в доходе (*участие в прибылях, выплаты бонуса*).

Например – приобретение акций компании (*опционы*). Совпадает с системой стимулирования D-типа.

5.Комиссионные - *это форма заработной платы, величина которой определяется как процент от выбранного показателя деятельности агента:*

$$\sigma(y) = \alpha y.$$

В качестве показателя используется: количество проданных единиц продукции, объем заключенного договора и т.д. Комиссионные могут рассматриваться либо как система стимулирования, основанная на перераспределении дохода (или прибыли) от продаж - системы стимулирования D - типа, либо как пропорциональная система стимулирования L - типа.

6.Премия – *дополнительное по сравнению с заработной платой вознаграждение, выплачиваемое в определенных случаях.*

Премии разделяются на регулярные и единовременные (поощрительные). Регулярные премии выплачиваются в зависимости от индивидуальных показателей деятельности агента за учетный период. Часто премии основываются на результатах долгосрочных достижений работника. Единовременные не зависят от показателей деятельности агента и выплачиваются, например, к юбилейным датам и т.д.

Различают регулярные премии следующих двух видов. В первом случае абсолютная величина премии, например, при выполнении и/или перевыполнении плановых заданий, оговорена заранее, чему соответствует система стимулирования $A+C$-типа, где A – некоторая базовая система стимулирования. Величина премии может быть пропорциональна базовому окладу (без учета премиальных, прогрессивных и других надбавок).

Во втором случае абсолютная величина премии определяется как заранее установленный процент от заработка за учетный период. Такие сложные системы премирования используются достаточно редко.

Важную роль, помимо основной заработной платы, также играет *дополнительная заработная плата* в форме различных доплат - доплаты за совмещение, сверхурочную работу и т.д., надбавок - за квалификацию, выслугу лет, стаж работы в данной организации и т.д. и единовременных вознаграждений. В отличие от премий, например, надбавки включаются в состав заработной платы регулярно. Основная и дополнительная заработные платы совместно могут рассматриваться как некоторая единая суммарная система стимулирования.

В качестве примера приведём оплату труда работников ОАО «АВТОВАЗ» [31,38]. На рис. 3.16 представлены основные элементы заработной платы производственных рабочих ОАО «АВТОВАЗ». Основу заработной платы производственных рабочих составляет тарифная ставка (постоянная часть). Помимо тарифа в структуру входят также доплаты и компенсационные выплаты. В соответствии с этим все стимулирующие доплаты объединены в группу доплат за интенсивность выполнения операций на конвейере (переменная часть). Дополнительная оплата за условия и напряженность норм труда определяется условиями работы рабочего и не зависит от интенсивности выполняемых на конвейере операций. Данные виды доплат в соответствии с этим можно отнести к постоянной части заработной платы. К компенсационным выплатам относятся выплаты, предусмотренные ТК РФ и не определяемые интенсивностью труда производственного рабочего. В данном случае это доплаты за ночную работу, за работу в выходные дни, за вынужденные простои не по вине рабочих, прочие компенсационные выплаты. На рис. 3.17 приводится структура среднемесячной заработной платы рабочих сборочно-кузовного производства (СКП) по данным за 2004 год.

Рис. 3.16. Схема начисления заработной платы рабочих ОАО «АВТОВАЗ»

Оплата по тарифу в совокупности с доплатами за условия труда и напряженность норм труда в структуре заработной платы составляет 45,6 %. Доля компенсационных выплат в структуре заработной платы составляет примерно 9,2%. Около 45,2% всей совокупности заработной платы приходится на доплаты, стимулирующие рост производительности труда рабочих. Соотношение постоянной и переменной частей заработной платы приводится на рис. 3.18. Дополнительная оплата производственным рабочим начисляется только при превышении уровня выполнения нормированного задания 80%. Если не достигается норматив в 80%, дополнительная оплата не начисляется, начисляется лишь оплата по тарифу в совокупности с доплатами за напряженность норм и условия труда. Графическая иллюстрация действующей системы стимулирования производственных рабочих представлена на рис. 3.19. Параметр α, характеризует величину доплат за выполнение планового задания.

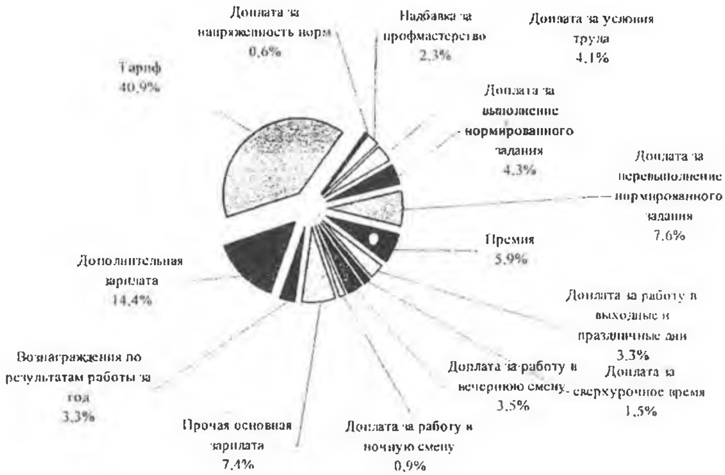

Рис 3.17. Структура среднемесячной заработной платы рабочих СКП (по данным за 2004 г)

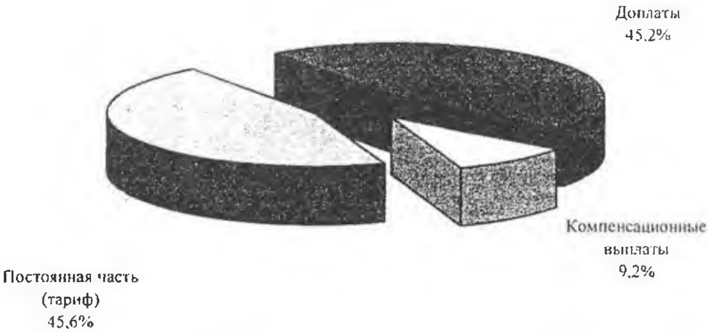

Рис. 3.18. Соотношение постоянной и переменной частей оплаты труда производственных рабочих сборочного производства

Рис. 3.19. Система стимулирования производственных рабочих

3.6.Исследование механизмов стимулирования в многоэлементных системах

В реальных организациях присутствует множество агентов. Рассмотрим многоэлементную систему (рис. 3.20).

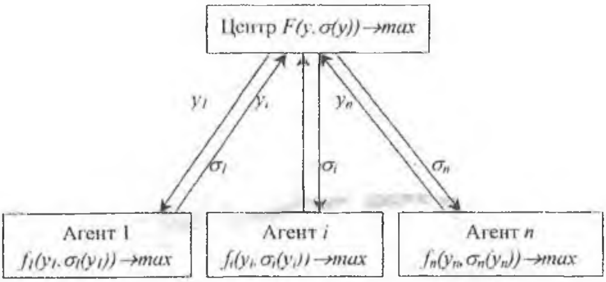

Рис. 3.20. Задача стимулирования в многоэлементной системе

Состав данной системы: центр и n агентов. Структура изображена на рис. 3.20. Множество допустимых действий – положительная полуось $y \geq 0$. Центр имеет информацию о том, какие действия агент может выбрать и о целевой функции агента. Агенты знают выбранную центром систему стимулирования.

Целевая функция i-го агента

$$f_i(y_i) = \sigma_i(y_i) - c_i(y_i) \to max,$$

где $\sigma_i(y_i)$ - функция стимулирования i-го агента, $c_i(y_i)$ - затраты i-го агента.

Целевая функция центра

$$F_i(y_i) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y_i) \to max,$$

где $H(y)$ - доход центра, который зависит от действий всех агентов $y = (y_1, ... y_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y_i)$ - суммарные затраты центра на стимулирование.

Рассмотрим системы, в которых агенты независимы друг от друга. ***Системы, в которых стимулирование и заработная плата каждого агента зависят только от его собственных действий, называются системами с независимыми агентами.***

Сформулируем задачу стимулирования для систем с независимыми агентами:

$$\begin{cases} H(y^*) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y_i^*) \to \max & (3.11) \\ y_i^* = \arg\max_{y_i \geq 0} \{\sigma_i(y_i) - c_i(y_i)\}, \quad i = 1, n; & (3.12) \\ \sigma_i(y_i^*) - c_i(y_i^*) \geq U. & (3.13) \end{cases}$$

Формула (3.11) выражает стремление центра максимизировать разницу между доходом и суммой затрат на стимулирование, которая зависит от выбора i–м агентом действий y_i^*. Формула (3.12) отражает интересы i–го агента, который выбирает действие y_i^*, стремясь максимизировать свою целевую функцию. Ограничение (3.13) учитывает альтернативные возможности получения заработной платы i-го агента.

В практической деятельности организаций, как правило, существует ограничение на суммарное стимулирование. ***Системы, в которых вознаграждение и затраты каждого агента зависят только от его собственных действий, при этом существует ограничение на суммарное стимулирование агентов, называются системами со слабосвязанными агентами.***

Системы, в которых вознаграждение и затраты каждого агента зависят от действий всех агентов, называются системами с сильно связанными агентами.

3.6.1.Исследование механизмов стимулирования в многоэлементных системах со слабосвязанными агентами

Сформируем задачу стимулирования для системы со слабо связанными агентами:

$$\begin{cases} H(y^*)-\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i(y_i^*)\to \max; & (3.14)\\ y_i^* = \arg\max\limits_{y_i\ge 0}\{\sigma_i(y_i)-c_i(y_i)\},\ \ i=1,n; & (3.15)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i(y_i^*)\le R; & (3.16)\\ \sigma_i(y_i^*)-c_i(y_i^*)\ge U. & (3.17)\end{cases}$$

Условие (3.14) учитывает ограниченность фонда заработной платы R. Данная задача решается в два этапа. На первом этапе из выражения (3.15) определяется действие агента как аналитическая зависимость от параметров системы стимулирования центра. На втором этапе полученная аналитическая зависимость подставляется в формулу (3.14), таким образом, получается задача условной оптимизации. Решая эту задачу методом Лагранжа, определяют параметры системы стимулирования.

Рассмотрим задачу стимулирования с квадратичной функцией затрат агентов и пропорциональной системой стимулирования. Руководитель (центр) поручает работу бригаде, состоящей из n-агентов. Центр использует пропорциональную систему стимулирования: $\sigma_i(y_i)=\alpha_i y_i$, где α_i – ставка оплаты единицы произведенной i-м агентом продукции. Известна функция затрат каждого агента: $c_i(y_i)=\dfrac{y_i^2}{2r_i}$, где r_i – коэффициент, который характеризует квалификацию i–го агента и переводит затраты в денежное выражение. Чем выше квалификация агента, тем меньше его усилия по производству продукции. Известна рыночная цена, по которой продается продукция p, фонд заработной платы бригады R. Требуется определить параметры системы стимулирования α_i. Сформулируем задачу стимулирования:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^* p - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^* \to \max; & (3.18) \\ y_i^* = \arg\max\limits_{y_i \geq 0} \{\alpha_i y_i - \dfrac{y_i^2}{2r_i}\}, \quad i = \overline{1,n}; & (3.19) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \leq R. & (3.20) \end{cases}$$

Первый этап. Из выражения (3.19) определим реакцию агента. Для нахождения экстремума функции одной переменной продифференцируем функцию и приравняем к нулю:

$$\frac{df_i(y_i)}{dy_i} = \alpha_i - \frac{y_i}{r_i} = 0.$$

Из решения уравнения следует $y_i^* = \alpha_i r_i$. Стратегия агента по сравнению с одноэлементной задачей не изменилась. Объем произведенной продукции i-го агента прямо пропорционален ставке оплаты единицы продукции α_i и квалификации r_i.

Второй этап. Подставим $y_i^* = \alpha_i r_i$ в выражение для целевой функции центра (3.18) и ограничение (3.19), получим задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} F(\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i r_i p - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i \to max; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i \leq R. \end{cases}$$

Для ее решения применим метод множителей Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа: $L(\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i r_i p - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i + \lambda[R - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i]$.

Найдём частные производные от функции Лагранжа по неизвестным:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial \alpha_i} = pr_i - 2\alpha_i r_i + 2\lambda\alpha_i r_i = 0,\ i = \overline{1,n}; & (3.21)\\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 r_i - R = 0. & (3.22)
\end{cases}
$$

Вынесем в выражении (3.21) общий множитель за скобки:

$$2\alpha_i r_i\left(\frac{p}{2\alpha_i} - 1 + \lambda\right) = 0.$$

Два множителя равны нулю, когда хотя бы один из них равен нулю. Первый множитель не может быть равен нулю из экономического смысла. Значит, нулю равен второй множитель:

$$\frac{p}{2\alpha_i} - 1 + \lambda = 0.$$

Решая уравнение, получаем

$$\alpha_i = \frac{p}{2(1-\lambda)} = \alpha = const. \tag{3.23}$$

Получилось, что параметры функций стимулирования для всех агентов одинаковы. Из ограничения (3.22) определяем параметр системы стимулирования:

$$\alpha = \sqrt{\frac{R}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}}.$$

Ставка оплаты единицы продукции прямо пропорциональна фонду заработной платы и обратно пропорциональна сумме квалификаций агентов. ***Система стимулирования, в которой зависимость вознаграждения от действий агентов одинакова, называется унифицированной.***

Пример 3.2. Задача стимулирования со слабо связанными агентами

Руководитель поручает работу бригаде, состоящей из двух рабочих. Центр использует пропорциональную систему стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \alpha_i y_i$, где α_i – ставка оплаты единицы произведенной i-м агентом продукции. Известна функция затрат каждого агента: $c_1(y_1) = 0{,}4y_1^2$, $c_2(y_2) = 0{,}6y_2^2$. Рыночная цена, по которой продается продукция p=1000 руб., фонд заработной платы бригады R=20000 руб. *Определить* параметры системы стимулирования α_1 и α_2.

Решение. Сформулируем задачу стимулирования:

$$\begin{cases} 1000y_1^* + 1000y_2^* - \alpha_1 y_1^* - \alpha_2 y_2^* \to \max; & (3.24) \\ y_1^* = \arg\max\limits_{y_1 \geq 0}(\alpha_1 y_1 - 0{,}4 y_1^2); & (3.25) \\ y_2^* = \arg\max\limits_{y_2 \geq 0}(\alpha_2 y_2 - 0{,}6 y_2^2); & (3.26) \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \leq 20000. & (3.27) \end{cases}$$

Первый этап. Из выражения (3.25) и (3.26) определим реакцию агентов. Для нахождения экстремума функции одной переменной продифференцируем функции и приравняем к нулю:

$$\frac{df_1(y_1)}{dy_1} = \alpha_1 - 0{,}8y_1 = 0, \qquad \frac{df_2(y_2)}{dy_2} = \alpha_2 - 1{,}2y_2 = 0.$$

Из решения уравнений следует $y_1^* = \dfrac{5\alpha_1}{4}$, $\quad y_2^* = \dfrac{5\alpha_2}{6}$.

Второй этап. Подставив $y_1^* = \dfrac{5\alpha_1}{4}$ и $y_2^* = \dfrac{5\alpha_2}{6}$ в выражение для целевой функции центра (3.24) и ограничение (3.27), получим задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} 1000\dfrac{5\alpha_1}{4} + 1000\dfrac{5\alpha_2}{6} - \dfrac{5\alpha_1^2}{4} - \dfrac{5\alpha_2^2}{6} \to max; \\ \dfrac{5\alpha_1^2}{4} + \dfrac{5\alpha_2^2}{6} \leq 20000. \end{cases}$$

Для ее решения применим метод множителей Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(\alpha_i) = 1250\alpha_1 + \frac{2500\alpha_2}{3} - \frac{5\alpha_1^2}{4} - \frac{5\alpha_2^2}{6} + \lambda(20000 - \frac{5\alpha_1^2}{4} - \frac{5\alpha_2^2}{6}).$$

Найдём частные производные от функции Лагранжа по неизвестным α_1, α_2 и λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 1250 - \dfrac{10\alpha_1}{4} + 10\lambda\dfrac{\alpha_1}{4} = 0; & (3.28) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \alpha_2} = \dfrac{2500}{3} - \dfrac{10\alpha_2}{6} + 10\lambda\dfrac{\alpha_2}{6} = 0; & (3.29) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 20000 - \dfrac{5\alpha_1^2}{4} - \dfrac{5\alpha_2^2}{6} = 0. & (3.30) \end{cases}$$

Выразим из (3.28) и (3.29) неизвестные α_1, α_2:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{500}{(1-\lambda)} = \alpha .$$

Получилось, что параметры функций стимулирования для обоих агентов одинаковы. Из ограничения (3.30) определяем параметр системы стимулирования:

$$\alpha = \sqrt{\frac{20000}{5/4 + 5/6}} = \sqrt{\frac{20000}{50/24}} = 97{,}98 .$$

Данная система стимулирования является унифицированной.

3.6.2. Исследование механизмов стимулирования в многоэлементных системах с сильно связанными агентами

Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, на сколько сможете и на сколько это потребуется вам, чтобы их было легко решить.

Рене Декарт. Рассуждение о методе

Многоэлементная система с сильно связанными агентами представлена на рис. 3.21.

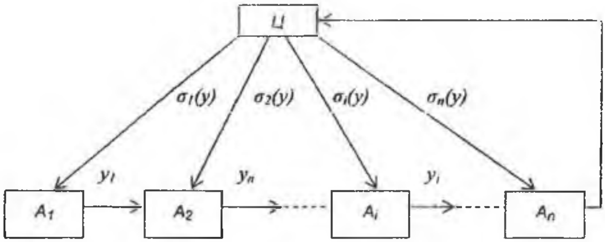

рис. 3.21. Многоэлементная система с сильно связанными агентами

Вектор действия всех агентов $y=(y_1, y_2,...,y_n)$. Интересы и предпочтения участников организационной системы выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $F(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом и суммарным вознаграждением, выплачиваемым агентам:

$$F(\sigma,y)=H(y)-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(y).$$

Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра и затратами:

$$f_i(\sigma_i,y)=\sigma_i(y)-c_i(y).$$

Центру и агентам в момент принятия решения о выбираемых решениях известны целевые функции и допустимые множества всех участников систем.

Центр обладает правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам. После чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции. Так как и затраты, и стимулирование каждого агента в рассматриваемой модели зависят от действий всех агентов, то агенты оказываются вовлеченными в игру, в которой выигрыш каждого зависит от действий всех.

Исходом игры между агентами является равновесие, например равновесие Нэша. Когда агенты независимы, то оптимальной является компенсаторная система стимулирования. Применим эту систему для решения многоэлементной задачи. Центр компенсирует затраты агенту в случае выполнения плана x_i, независимо от того, какие действия выбрали остальные агенты, в случае не выполнения плана центр не выплачивает вознаграждение:

$$\sigma(x,y)=\begin{cases} c_i(x_i,y_{-i})+\delta_i, & y_i=x_i, \\ 0, & y_i\neq x_i. \end{cases} \quad \delta_i\geq 0,\ i=1,n,$$

где $y_{-i}=(y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)$ - совокупность действий остальных игроков, кроме i-го (обстановка игры для i-го игрока).

Используя такое управление, центр декомпозирует игру агентов. ***Принцип декомпозиции – это использование таких управлений, которые декомпозируют взаимодействие агентов, делают возможным в игре агентов равновесие в доминантных стратегиях.*** При использовании компенсаторной системы стимулирования выполнение плана для каждого агента является равновесием Нэша. В этом случае выполнение плана будет максимизировать целевые функции агента, независимо от действий остальных, то есть выполнение плана будет равновесием в доминантных стратегиях.

Компенсаторная система стимулирования реализует вектор плана центра, как равновесие в доминантных стратегиях игры агента, при этом центр платит минимально возможную величину в виде вознаграждения.

Рассмотрим систему стимулирования с сильно связанными агентами. Руководитель (центр) поручает работу бригаде, состоящей из 2 рабочих. Рабочие (агенты) изготавливают однородную продукцию объёмом y_i, которую центр продаёт по цене p. Центр использует пропорциональную систему стимулирования $\sigma(y_i,\alpha_i)=\alpha_i y_i$, где α_i - ставка оплаты единицы продукции. Затраты агентов определяются соответственно $c_1(y_1,y_2)=\beta_1(y_1+\gamma_1 y_2)^2$, $c_2(y_1,y_2)=\beta_2(y_2+\gamma_2 y_1)^2$. Фонд заработной платы, которым располагает центр составляет R денежных единиц. Определить ставку оплаты единицы продукции α_i.

Запишем целевую функцию центра:

$$F=p(y_1+y_2)-\alpha_1 y_1-\alpha_2 y_2\to\max$$

и целевые функции агентов:

$$f_1(y_1, y_2, \alpha_1) = \alpha_1 y_1 - \beta_1 (y_1 + \gamma_1 y_2)^2 \to \max;$$

$$f_2(y_1, y_2, \alpha_2) = \alpha_2 y_2 - \beta_2 (y_2 + \gamma_2 y_1)^2 \to \max.$$

Сформулируем задачу стимулирования:

$$\begin{cases} p(y_1^* + y_2^*) - \alpha_1 y_1^* - \alpha_2 y_2^* \to \max; \\ y_1^* = \arg\max\limits_{y_1 \geq 0} \left(\alpha_1 y_1 - \beta_1 (y_1 + \gamma_1 y_2)^2\right); \\ y_2^* = \arg\max\limits_{y_2 \geq 0} \left(\alpha_2 y_2 - \beta_2 (y_2 + \gamma_2 y_1)^2\right). \end{cases}$$

Первый этап. Найдем реакции агентов из решения оптимизационной задачи. Для этого продифференцируем второе и третье выражения по y_1 и y_2 соответственно и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1(y_1, y_2, \alpha_1)}{dy_1} = \alpha_1 - 2\beta_1 (y_1 + \gamma_1 y_2) = 0; \\ \dfrac{df_2(y_1, y_2, \alpha_2)}{dy_2} = \alpha_2 - 2\beta_2 (y_2 + \gamma_2 y_1) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} y_1^* = \dfrac{\alpha_1 - 2\beta_1 \gamma_1 y_2}{2\beta_1}; \\ y_2^* = \dfrac{\alpha_2 - 2\beta_2 \gamma_2 y_1}{2\beta_2}. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение в первое, после преобразований получим:

$$y_1^* = \frac{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \gamma_1 \alpha_2}{2\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}. \tag{3.31}$$

Аналогично найдём реакцию второго агента:

$$y_2^* = \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \gamma_2 \alpha_1}{2\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}. \tag{3.32}$$

Второй этап. Подставим реакции агентов (3.31), (3.32) в целевую функцию центра:

$$F = p\left(\frac{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \gamma_1 \alpha_2}{2\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)} + \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \gamma_2 \alpha_1}{2\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)}\right) - \alpha_1 \frac{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \gamma_1 \alpha_2}{2\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)} - \alpha_2 \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \gamma_2 \alpha_1}{2\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)} \to \max.$$

После преобразований получим:

$$p\alpha_1\beta_2(1-\gamma_2)+p\alpha_2\beta_1(1-\gamma_1)-\beta_2\alpha_1^2-\beta_1\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)\to\max.$$

Продифференцировав это выражение по α_1, α_2 и приравняв производные нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dF}{d\alpha_1}=\beta_2 p(1-\gamma_2)-2\beta_2\alpha_1+\alpha_2(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)=0;\\ \dfrac{dF}{d\alpha_2}=\beta_1 p(1-\gamma_1)-2\beta_1\alpha_2+\alpha_1(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)=0.\end{cases}$$

Выразим из второго уравнения второй параметр: $\alpha_2=\dfrac{p\beta_1(1-\gamma_1)+\alpha_1(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)}{2\beta_1}$ и подставим его в первое уравнение:

$$\beta_2 p(1-\gamma_2)-2\beta_2\alpha_1+(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)\frac{p\beta_1(1-\gamma_1)+\alpha_1(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)}{2\beta_1}=0.$$

Решая полученное уравнение, найдём первый параметр:

$$\alpha_1=\frac{\beta_1 p(2\beta_2(1-\gamma_2)+(1-\gamma_1)\cdot(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2))}{4\beta_1\beta_2-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)^2}.$$

Аналогично найдём второй параметр:

$$\alpha_2=\frac{\beta_2 p(2\beta_1(1-\gamma_1)+(1-\gamma_2)\cdot(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2))}{4\beta_1\beta_2-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)^2}.$$

Пример 3.3. Задача стимулирования с сильно связанными агентами

Руководитель (центр) поручает работу бригаде, состоящей из 2 рабочих. Рабочие (агенты) изготавливают однородную продукцию объёмом y_i, которую центр продаёт по цене p=1500. Центр использует пропорциональную систему стимулирования $\sigma(y_i,\alpha_i)=\alpha_i y_i$, где α_i - ставка оплаты единицы продукции. Затраты агентов определяются соответственно $c_1(y_1,y_2)=14(y_1+0{,}1y_2)^2$, $c_2(y_1,y_2)=22(y_2+0{,}5y_1)^2$. Фонд заработной платы, которым располагает центр составляет R=37000 денежных единиц. **Определить** ставку оплаты единицы продукции α_i.

Решение. Запишем целевую функцию центра:

$$F=1500(y_1+y_2)-\alpha_1 y_1-\alpha_2 y_2\to\max$$

и целевые функции агентов:

$$f_1(y_1, y_2, \alpha_1) = \alpha_1 y_1 - 14(y_1 + 0{,}1 y_2)^2 \to \max;$$

$$f_2(y_1, y_2, \alpha_2) = \alpha_2 y_2 - 22(y_2 + 0{,}5 y_1)^2 \to \max.$$

Сформулируем задачу стимулирования:

$$\begin{cases} 1500(y_1^* + y_2^*) - \alpha_1 y_1^* - \alpha_2 y_2^* \to \max; \\ y_1^* = \arg\max\limits_{y_1 \ge 0} \left\{\alpha_1 y_1 - 14(y_1 + 0{,}1 y_2)^2\right\} \\ y_2^* = \arg\max\limits_{y_2 \ge 0} \left\{\alpha_2 y_2 - 22(y_2 + 0{,}5 y_1)^2\right\} \end{cases}$$

Первый этап. Найдем реакцию первого агента из решения оптимизационной задачи. Для этого продифференцируем целевую функцию агента по y_1 и приравняем к нулю:

$$\frac{df_1(y_1, y_2, \alpha_1)}{dy_1} = \alpha_1 - 28(y_1^* + 0{,}1 y_2^*) = 0.$$

Решая уравнение, определим реакцию первого агента $y_1^* = \dfrac{\alpha_1}{28} - 0{,}1 y_2^*$.

Аналогично найдём реакцию второго агента $y_2^* = \dfrac{\alpha_2}{44} - 0{,}5 y_1^*$.

Решив систему уравнений $\begin{cases} y_1^* = \dfrac{\alpha_1}{28} - 0{,}1 y_2^* \\ y_2^* = \dfrac{\alpha_2}{44} - 0{,}5 y_1^* \end{cases}$ относительно y_1^* и y_2^*, получим реакции агентов:

$$y_1^* = \frac{5\alpha_1}{133} - \frac{\alpha_2}{418}, \quad y_2 = \frac{5\alpha_2}{209} - \frac{5\alpha_1}{266}.$$

Второй этап. Подставим реакции агентов в целевую функцию центра:

$$F = 1500\left(\frac{5\alpha_1}{133} - \frac{\alpha_2}{418} + \frac{5\alpha_2}{209} - \frac{5\alpha_1}{266}\right) - \alpha_1\left(\frac{5\alpha_1}{133} - \frac{\alpha_2}{418}\right) - \alpha_2\left(\frac{5\alpha_2}{209} - \frac{5\alpha_1}{266}\right) \to \max.$$

Продифференцировав это выражение по α_1, α_2 и приравняв нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{d\alpha_1} = \dfrac{3750}{133} - \dfrac{10\alpha_1}{133} + \dfrac{31\alpha_2}{1463} = 0; \\ \dfrac{dF}{d\alpha_2} = \dfrac{6750}{209} - \dfrac{10\alpha_2}{209} + \dfrac{31\alpha_1}{1463} = 0. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, определим параметры системы стимулирования $\alpha_1 = 645{,}83$, $\alpha_2 = 961{,}01$.

Таким образом, параметры функций стимулирования для обоих агентов разные.

Контрольные вопросы к главе 3

1. Что называется стимулированием и механизмом (системой стимулирования)?
2. Сформулируйте задачу стимулирования (прямую и обратную) для одноэлементной системы.
3. Что понимается под эффективностью системы стимулирования?
4. Решите задачу стимулирования для одноэлементной системы.
5. Сформулируйте принцип компенсации затрат.
6. Приведите оптимальную систему стимулирования для одноэлементной системы.
7. Назовите базовые системы стимулирования.
8. Приведите операции над базовыми системами стимулирования.
9. Назовите формы индивидуальной заработной платы.
10. Опишите тарифную форму оплаты.
11. Дайте характеристику повремённой форме оплаты.
12. Опишите сдельную форму оплаты.
13. Дайте характеристику форме оплаты: участие в доходе или прибыли.
14. Опишите форму оплаты премии.
15. Дайте характеристику форме оплаты: комиссионные.
16. Сформулируйте задачу стимулирования в многоэлементных системах с независимыми агентами.
17. Сформулируйте задачу стимулирования в многоэлементных системах со слабо связанными агентами.
18. Решите задачу стимулирования в многоэлементных системах со слабо связанными агентами.
19. Сформулируйте задачу стимулирования в многоэлементных системах с сильно связанными агентами.
20. В чем заключается принцип декомпозиции?

Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ В ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Кто выбирает себе нерадивого участника в общем деле, тот должен пенять на самого себя.

Латинская пословица

4.1.Описание производственной системы

Производство любого сложного изделия представляет собой сложную технологическую цепочку, включающую десятки, и даже сотни предприятий, выпускающих отдельные детали и узлы (комплектующие) [1,12,13,16,17,27,28]. Например, у ОАО «АВТОВАЗ» количество поставщиков более 500. Рассмотрим производственную систему, состоящую из заказчика и n-поставщиков (рис. 4.1).

Рис. 4.1 Система «заказчик – n-поставщиков»

Поставщики изготавливают комплектующие детали, объёмом y_i, $i = \overline{1,n}$ шт., из которых заказчик собирает готовые изделия, объёмом x_0 шт. и продаёт по цене p_0 на рынке готовой продукции. Затраты заказчика на сборку готового изделия $C_0(x_0) = k_{01} + k_{02}x_0 + k_{03}x_0^2$. Максимально возможный выпуск продукции заказчика Q_0^{max}. Спрос на готовое изделие R. Договорная цена комплектующих i-го поставщика p_i , применяемость комплектующих - b_i. ***Применяемость - это количество комплектующих одного наименования, используемых для сборки готового изделия***. Затраты поставщиков на производство комплектующих деталей определяются соответственно: $C_i(y_i) = k_{i1} + k_{i2}y_i + k_{i3}y_i^2$, где y_i - объём выпуска комплектующих i-го поставщика. Максимально возможный объём выпуска продукции поставщиками $Q_i^{\max}$.

4.2.Математические модели принятия решений участниками производственной системы

Несовпадение экономических интересов участников производственной системы происходит из-за разных требований, предъявляемых заказчиком и поставщиками к объёмам, срокам поставки, качеству комплектующих и др.

Для исследований процессов взаимодействия участников производственной системы сформулируем модель принятия решений поставщиками и заказчиком для определения оптимального объёма поставки комплектующих.

В качестве целевой функции поставщиков рассматривается максимизация прибыли. Целевые функции поставщиков запишутся:

$$f_i(y_i) = p_i y_i - c_i(y_i) \to \max, \quad i = 1,n , \qquad (4.1)$$

где $p_i y_i$ - выручка от продажи комплектующих, $c_i(y_i)$ - затраты i-го поставщика на производство комплектующих, включающая стоимость сырья и материалов, выплату заработной платы и налогов и др.

В практической деятельности фирм часто затраты представляют собой квадратичную зависимость от объёма выпуска комплектующих:

$$c_i(y_i) = p_i y_i - k_{i1} - k_{i2}y_i - k_{i3}y_i^2, \quad i = 1,n . \qquad (4.2)$$

где k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} - коэффициенты функции затрат.

С учётом выражения для затрат (4.1) целевая функция (4.2) запишется:

$$f_i(y_i) = p_i y_i - c_i(y_i) = p_i y_i - k_{i1} - k_{i2} y_i - k_{i3} y_i^2 \to \max, \quad i = \overline{1,n}.$$

Поставщики не могут производить комплектующих больше, чем максимально возможный объём, из-за ограниченности производственных мощностей:

$$0 \le y_i \le Q_i^{\max}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда модель принятия решений для поставщиков запишется:

$$\begin{cases} f_i(y_i) = p_i y_i - k_{i1} - k_{i2} y_i - k_{i3} y_i^2 \to \max; \\ 0 \le y_i \le Q_i^{\max}; \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.3}$$

Оптимальным решением модели (4.3) является:

$$y_i^{opt} = \min(y_i^*, Q_i^{\max}), \ i = \overline{1,n},$$

где y_i^* - объём выпуска комплектующих i-ым поставщиком, максимизирующий прибыль.

Для нахождения y_i^* продифференцируем целевую функцию $f_i(y_i)$ по y_i и приравняем нулю:

$$\frac{df_i(y_i)}{dy_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\frac{d[p_i y_i - k_{i1} - k_{i2} y_i - k_{i3} y_i^2]}{dy_1} = 0.$$

Для первого поставщика получим уравнение:

$$p_i - k_{i2} - 2k_{i3} y_i = 0.$$

Решая уравнение, найдём объём выпуска комплектующих поставщиками, который максимизирует прибыль:

$$y_i^* = \frac{p_i - k_{i2}}{2k_{i3}}.$$

Определим оптимальный объём выпуска комплектующих, с учётом ограничений:

$$y_i^{opt} = \min(y_i^*, Q_i^{\max}), \ i = \overline{1,n}. \tag{4.4}$$

Количество готовых изделий, которые можно собрать из этого количества комплектующих:

$$y_{0i}^{opt} = \frac{y_i^{opt}}{b_i}, \ i = 1,n.$$

В качестве целевой функции заказчика рассмотрим максимизацию прибыли:

$$F(x_0) = p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{2} p_i b_i x_0 - c_0(x_0) \to \max.$$

где $p_0 x_0$ - выручка от продажи готовых изделий; $\sum_{i=1}^{2} p_i b_i x_0$ - затраты на покупку комплектующих, $c_0(x_0)$- затраты заказчика на сборку готового изделия.

Затраты заказчика на сборку готового изделия представляют собой квадратичную зависимость от объёма выпуска готовой продукции:

$$c_0(x_0) = k_{01} - k_{02} x_0 - k_{03} x_0^2, \tag{4.5}$$

k_{01}, k_{02}, k_{03} - - коэффициенты функции затрат заказчика.

С учётом выражения для затрат (4.5) целевая функция заказчика запишется:

$$F(x_0) = p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i x_0 - k_{01} - k_{02} x_0 - k_{03} x_0^2 \to \max.$$

На объём выпуска готовых изделий наложено ограничение, связанное с невозможностью или нецелесообразностью производить выпуск готовых изделий больше, чем максимально возможный объём выпуска $Q_0^{\max}$ или спрос на изделия R:

$$0 \le x_0 \le \min(Q_0^{\max}, R).$$

Модель принятия решений для заказчика примет вид:

$$\begin{cases} F(x_0) = p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i x_0 - k_{01} - k_{02} x_0 - k_{03} x_0^2 \to \max; \\ x_0 \le \min(Q_0^{\max}, R). \end{cases} \tag{4.6}$$

Оптимальным решением модели (4.6) является:

$$x_0^{opt} = min(x_0^*; Q_0^{max}; R),\qquad (4.7)$$

где x_0^* - объём выпуска изделий заказчиком, максимизирующий прибыль.

Для нахождения x_0^* продифференцируем целевую функцию $F(x_0)$ по x_0 и приравняем нулю:

$$\frac{dF(x_0)}{dx_0} = p_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i - k_{02} - 2k_{03}x_0 = 0 .$$

Решая данное уравнение, получим:

$$x_0^* = \frac{p_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i - k_{02}}{2k_{03}}.$$

Учитывая ограничение, определим оптимальный объём выпуска готовых изделий $x_0^{opt} = min(x_0^*; Q_0^{max} ; R)$.

4.3. Анализ экономических интересов участников производственной системы

Так как оптимальное значение выпуска готовых изделий для заказчика не равно числу готовых изделий, которые могут быть собраны заказчиком при реализации поставщиками собственных стратегий $x_0^{opt} \neq y_{0i}^{opt}$, то в производственной системе имеет место не совпадение экономических интересов между поставщиками и заказчиком (рис. 4.2).

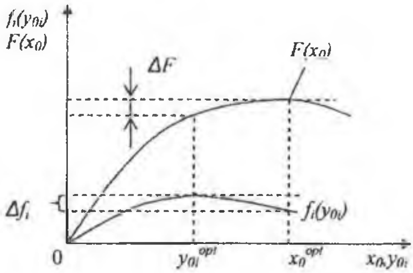

Рис. 4.2. Анализ экономических интересов участников системы

На рис. 4.2. Δf_i - убыток i-го поставщика, определяемый как разность между максимальной прибылью поставщика и прибылью поставщика при выполнении плана заказчика:

$$\Delta f_i = f_i^{\max}(y_i^{opt}) - f_i(x_0^{opt} b_i),\ i = 1,n.$$

ΔF - дополнительный эффект заказчика от согласования своих интересов с интересами поставщиков. Определяется как разность между максимальной прибылью заказчика и прибылью заказчика при реализации поставщиками собственных стратегий:

$$\Delta F = F^{\max}(x_0) - F(y_0),\ i = 1,n,$$

где y_0 - количество готовых изделий, которые может собрать заказчик при реализации поставщиками собственных стратегий. Определяется как операция минимума от количества готовых изделий y_{0i}^{opt}, которые сможет собрать заказчик при реализации каждым i-ым поставщиком своей стратегии:

$$y_0 = \min(y_{01}; y_{02} \dots y_{0n}).$$

Возможно согласование экономических интересов участников производственной системы путем перераспределения дополнительного эффекта заказчика ΔF между поставщиками. Распределение дополнительного эффекта ΔF может быть осуществлено с помощью выплаты **премии** S (функции стимулирования) или изменения **договорных цен комплектующих** p_i.

Пример 4.1. Анализ экономических интересов участников производственной системы.

Дано: производственная система состоит из заказчика и двух поставщиков (рис. 4.3.) Каждый поставщик производит один вид комплектующих. Заказчик собирает из 2-комплектующих конечное изделие.

Поставщики изготавливают комплектующие детали, объёмом y_i, $i = 1,2$ шт., из которых заказчик собирает готовые изделия, объёмом x_0 шт. и продаёт по цене $p_0 = 1900\,руб$. Известны затраты заказчика на сборку готового изделия $C_0(x_0) = 2x_0^2 + 4x_0 + 6$. Максимально возможный выпуск продукции заказчика Q_0^{max}=1400 шт. Спрос на готовое изделие R=1300 шт. Договорные цены

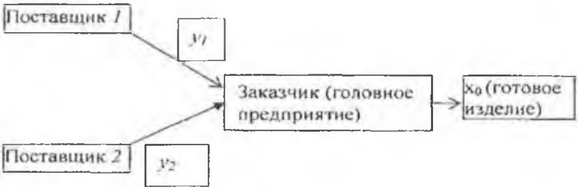

Рис.4.3 Система «заказчик – два поставщика»

комплектующих: $p_1 = 310\,руб.$, $p_2 = 330\,руб.$; применяемость первого поставщика b_1=2; применяемость второго поставщика b_2=1. Затраты на производство поставщиками комплектующих деталей определяются соответственно: $c_1(y_1) = 0{,}2y_1^2 + 2y_1 + 4$, $c_2(y_2) = 0{,}4y_2^2 + y_2 + 2$, где y_i- объём выпуска комплектующих i-го поставщика. Максимально возможный выпуск продукции первым и вторым поставщиками: Q_1^{max} =1800 шт., Q_2^{max} =1500 шт.

Определить:

1)оптимальный объём выпуска комплектующих поставщиками;

2) оптимальный объём выпуска готовых изделий заказчиком;

3)убытки поставщиков при выполнении плана заказчика;

4)дополнительный эффект заказчика при согласовании интересов участников производственной системы.

Решение:

Целевые функции поставщиков запишутся:

$$f_1(y_1) = p_1 y_1 - c_1(y_1) = p_1 y_1 - (0{,}2y_1^2 + 2y_1 + 4) \to max \quad .$$

$$f_2(y_2) = p_2 y_2 - c_2(y_2) = p_2 y_2 - (0{,}4y_2^2 + y_2 + 2) \to max \quad .$$

Поставщики не могут производить комплектующих больше, чем максимально возможный объём, из-за ограниченности производственных мощностей:

$$0 \le y_i \le Q_i^{max}, i = 1,2 .$$

Модель принятия решений для первого поставщика запишется:

$$\begin{cases} f_1(y_1) = p_1 y_1 - 0{,}2y_1^2 - 2y_1 - 4 \to \max; \\ 0 \le y_1 \le 800. \end{cases} \quad (4.8)$$

Соответственно для второго поставщика:

$$\begin{cases} f_1(y_1) = p_2 y_2 - 0{,}4y_2^2 - y_2 - 2 \to \max; \\ 0 \le y_2 \le 500. \end{cases} \quad (4.9)$$

Оптимальным решением моделей (4.8) и (4.9) является:

$$y_i^{opt} = \min(y_i^*, Q_i^{\max}) \; i = 1{,}2,$$

где y_i^* - объём выпуска комплектующих i-ым поставщиком, максимизирующий прибыль.

Для нахождения y_i^* продифференцируем целевую функцию $f_i(y_i)$ по y_i и приравняем нулю:

$$\frac{df_i(y_i)}{dy_i} = 0, i = 1, n.$$

$$\frac{d[\,p_1 y_1 - 0{,}2y_1^2 - 2y_1 - 4\,]}{dy_1} = 0$$

Для первого поставщика получим уравнение:

$$p_1 - 0.4y_1 - 2 = 0.$$

Решая уравнение, определим объём выпуска комплектующих первого поставщика, максимизирующий прибыль:

$$y_1^* = \frac{p_1 - 2}{0{,}4} = \frac{3{:}0 - 2}{0{,}4} = 770\,шт.$$

Так как количество деталей не может быть дробным, округлим результат наших расчетов до ближайшего целого.

Аналогично и для второго поставщика:

$$\frac{d[\,p_2 y_2 - 0{,}4y_2^2 - y_2 - 2\,]}{dy_1} = 0,$$

$$p_2 - 0{,}8y_2 - 1 = 0,$$

$$y_2^* = \frac{p_2 - 1}{0{,}8} = \frac{330 - 1}{0{,}8} = 411\,шт.$$

Определим оптимальный объём выпуска комплектующих, с учётом ограничений:

$$y_1^{opt} = min(770;800) = 770\,шт.,$$

$$y_2^{opt} = \min(411;500) = 411\,шт.$$

Рассчитаем сколько готовых изделий можно собрать из комплектующих, произведённых поставщиками:

$$y_{01}^{opt} = \frac{y_1^{opt}}{b_1} = \frac{770}{2} = 385\,шт., \quad y_{02}^{opt} = \frac{y_2^{opt}}{b_2} = \frac{411}{1} = 411\,шт.$$

Определим количество готовых изделий y_0, которые сможет собрать заказчик при реализации поставщиками собственных стратегий. Определяется как операция минимума от количества готовых изделий y_{0i}^{opt}, которые сможет собрать заказчик при реализации каждым i-ым поставщиком своей стратегии:

$$y_0 = \min(y_{01}; y_{02}) = \min(385;411) = 385\,шт.$$

В качестве целевой функции заказчика рассмотрим максимизацию прибыли:

$$F(x_0) = p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{2} p_i b_i x_0 - c_0(x_0) \to max.$$

На объём выпуска готовых изделий наложено ограничение, связанное с невозможностью или нецелесообразностью производить готовых изделий больше, чем максимально возможный объём выпуска $Q_0^{\max}$ или спрос на изделия R:

$$0 \le x_0 \le min(Q_0^{max}, R).$$

Модель принятия решений для заказчика примет вид:

$$\begin{cases} F(x_0) = p_0 x_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i b_i x_0 - (2x_0^2 + 4x_0 + 6) \to \max; \\ x_0 \le \min(Q_0^{\max}, R). \end{cases} \qquad (4.10)$$

$$x_0^{opt} = min(x_0^*; Q_0^{max}; R).$$

где x_0^* - объём выпуска готовых изделий заказчиком, максимизирующий прибыль.

Для нахождения x_0^* продифференцируем целевую функцию $F(x_0)$ по x_0 и приравняем нулю:

$$\frac{dF(x_0)}{dx_0} = p_0 - p_1 b_1 - p_2 b_2 - 4x_0 - 4 = 0.$$

Решая, данное уравнение получим:

$$x_0^* = \frac{p_0 - p_1 b_1 - p_2 b_2 - 4}{4} = 237\, шт.$$

Учитывая ограничение, определим $x_0^{opt} = \min(237;400;300) = 237\, шт.$

Таким образом, оптимальное значение выпуска готовых изделий для заказчика $x_0^{opt} = 237\, шт$ не равно числу готовых изделий, которые сможет собрать заказчик при реализации поставщиками своих стратегий $y_0 = 385\, шт.$

Убыток Δf_i i-го поставщика, определяется как разность между максимальной прибылью поставщика и прибылью поставщика при выполнении плана заказчика.

$$\Delta f_i = f_i^{max}(y_i^{opt}) - f_i(x_0 \cdot b_i),\ i = 1,2.$$

Дополнительный эффект заказчика ΔF от согласования своих интересов с интересами поставщиков определяется как разность между максимальной прибылью заказчика и прибылью заказчика при реализации поставщиками собственных стратегий:

$$\Delta F = F^{max}(y_i^{opt}) - F(y_0),\ i = 1,2,$$

где y_0 - количество готовых изделий, которые может собрать заказчик при реализации поставщиками собственных стратегий.

Определим максимальную прибыль поставщиков:

$$f_1^{max}(770) = p_1 y_1 - 0{,}2 y_1^2 - 2y_1 - 4 = 310 \cdot 770 - 0{,}2 \cdot (770)^2 - 2 \cdot 770 - 4 = 118576\, руб.$$

$$f_2^{max}(411) = p_2 y_2 - 0{,}4 y_2^2 - y_2 - 2 = 330 \cdot 411 - 0{,}4 \cdot (411)^2 - 411 - 2 = 67648{,}6\, руб.$$

Определим прибыль поставщиков при плане заказчика:

$$f_1(x_0 b_1) = p_1 x_0 b_1 - 0{,}2(x_0 b_1)^2 - 2x_0 b_1 - 4 = 101052{,}8\, руб.$$

$$f_2(x_0 b_2) = p_2 x_0 b_2 - 0{,}4(x_0 b_2)^2 - x_0 b_2 - 2 = 55503{,}4\, руб.$$

Убытки поставщиков:

$$\Delta f_1 = f_1^{\max}(y_1^{opt}) - f_1(x_0 \cdot b_1) = 118576 - 101052{,}8 = 17523{,}2 \text{ руб.},$$

$$\Delta f_2 = f_2^{\max}(y_2^{opt}) - f_2(x_0 \cdot b_2) = 67648{,}6 - 55503{,}4 = 12145{,}2 \text{ руб.}$$

Суммарные убытки поставщиков расчитываются:

$$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2 = 29668{,}4 \text{ руб.}$$

Максимальная прибыль заказчика:

$$F^{\max}(237) = p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i x_0 - (2x_0^2 + 4x_0 + 6) = 111858 \text{ руб.}$$

Прибыль заказчика при реализации поставщиками собственных стратегий:

$$F(385) = p_0 y_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i b_i y_0 - (2y_0^2 + 4y_0 + 6) = 67754 \text{ руб.}$$

Дополнительный эффект заказчика от согласования интересов участников производственной системы определяется:

$$\Delta F = F^{\max}(x_0^{opt}) - F(y_0) = F(237) - F(385) = 44104 \text{ руб.}$$

4.4. Механизм согласованного взаимодействия участников производственной системы с помощью премирования

Организационно-экономический механизм перераспределения дополнительного эффекта заказчика ΔF между поставщиками с помощью премирования заключается в следующем. Если выполняются все требования заказчика по объёмам, срокам поставки и качеству комплектующих, то заказчик выплачивает премию S поставщикам. Если требования заказчика не выполняются, то заказчик соответственно не выплачивает премию поставщикам.

Для согласования экономических интересов поставщиков и заказчика необходимо, чтобы премия была не меньше суммы убытков поставщиков и не больше дополнительного эффекта заказчика:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \le S < \Delta F. \tag{4.11}$$

Записанное неравенство определяет границы изменения премии для предложенного механизма управления. Нижняя граница изменения премии определяется из интересов поставщиков, а верхняя граница из интересов заказчика. Условие (4.11) определяет область возможного компромисса между участниками производственно-экономической системы. В случае не выполнения этого условия согласование интересов поставщиков и заказчика при существующих параметрах производственной системы невозможно. Для того чтобы согласовать интересы необходимо изменить параметры производственной системы, например цену готового изделия.

Пример 4.2. Согласование интересов участников производственной системы с помощью премирования.

Для производственной системы, рассматриваемой в примере 4.1, **определить** границы изменения премии, согласующей интересы участников производственной системы.

Решение:

Возможно согласование экономических интересов поставщиков и заказчиков путем перераспределения дополнительного эффекта ΔF между поставщиками с помощью выплаты премии S (функции стимулирования) Для согласования экономических интересов поставщиков и заказчика необходимо, чтобы для величины премии выполнялись следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta f_i \le S \le \Delta F .$$

Учитывая результаты, полученные в примере 4.1, запишем условия согласования экономических интересов поставщиков и заказчика:

$$29668{,}4 \le S \le 44104 .$$

Условия согласования экономических интересов выполняются. Таким образом, величина премии, которая может быть выплачена заказчиком поставщикам, находится в диапазоне от 29668,4 руб. до 44104 руб.

4.5. Механизм согласованного взаимодействия участников производственной системы на основе изменения договорных цен

Организационно-экономический механизм перераспределения дополнительного эффекта заказчика ΔF между поставщиками на основе изменения договорных цен заключается в следующем. Заказчиком назначаются две цены за комплектующие детали p_{i1} и p_{i2}. Если выполняются все требования заказчика по объёмам, срокам поставки и качеству комплектующих, то заказчик оплачивает комплектующие по более высокой цене p_{i2}. Если требования заказчика не выполняются, то заказчик оплачивает комплектующие по более низкой цене p_{i1}.

Нижние границы изменения договорных цен определяются из интересов поставщиков, а верхние границы из интересов заказчика. Для того, чтобы экономически заинтересовать i-го поставщика в выполнении планового задания необходимо, чтобы изменение его дохода Δq_i от изменения договорной цены $\Delta p_i = p_{i2} - p_{i1}$ было не меньше, чем его убытки Δf_i при выполнении планового задания:

$$\Delta q_i \geq \Delta f_i \ . \tag{4.12}$$

Определим нижние границы договорных цен. Для определения изменения дохода при изменении цены применим теорию чувствительности. Известно, что для любой дифференцируемой функции $f_i(p_i)$ при достаточно малом изменении аргумента Δp_i имеет место приближённое равенство:

$$\Delta q_i \approx \frac{\partial f_i(y_i)}{\partial p_i}\Delta p_i = \frac{\partial [p_i y_i - c_i(y_i)]}{\partial p_i}\Delta p_i = y_i \Delta p_i .$$

Учитывая неравенство (4.12) получим условие для нижних границ договорной цены

$$y_i \Delta p_i \geq \Delta f_i .$$

Из этого неравенства следует следующее условие:

$$\Delta p_i \geq \frac{\Delta f_i}{y_i} \ . \tag{4.13}$$

Неравенство (4.13) определяет нижнюю границу договорной цены, при которой i-ый поставщик заинтересован в выполнении планового задания заказчика (рис. 4.3).

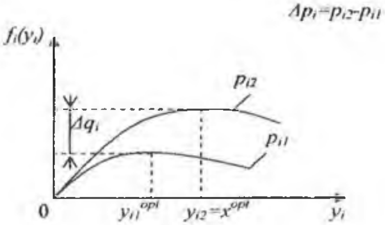

рис. 4.3. Определение нижней границы изменения договорной цены.

Выполнение неравенства (4.13) отражает экономическую заинтересованность поставщика, но при этом не учитывает финансовые возможности заказчика. Величина эффекта, получаемая заказчиком от согласованного взаимодействия, не должна быть меньше суммарного изменения доходов поставщиков.

Определим верхние границы цен, при которых заказчику выгодно делиться с поставщиками частью эффекта (рис.4.4).

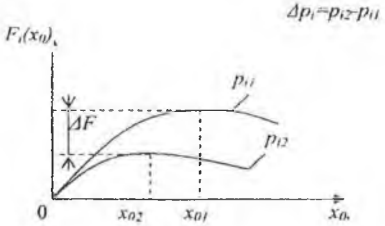

рис. 4.4. Определение верхней границы изменения договорной цены

На рис.4.4 x_{01} - плановый объём выпуска комплектующих при низкой цене комплектующих, x_{02} - плановый объём выпуска комплектующих при высокой цене комплектующих.

Для согласованного взаимодействия участников производственной системы величина дополнительного эффекта заказчика ΔF должна быть не меньше суммарного дохода поставщиков $\sum_{i=1}^{n} \Delta q_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta q_i \leq \Delta F .$$

Учитывая неравенство (4.12) получим следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta p_i \leq \Delta F . \tag{4.14}$$

Верхние границы изменения договорных цен должны удовлетворять неравенству (4.14).

В случае, если дополнительный эффект заказчика перераспределяется между поставщиками равномерно, что отражается в одинаковом изменении договорных цен для всех поставщиков $\Delta p_i = \Delta p$ возможно преобразование неравенства (4.14):

$$\Delta p_i \leq \frac{\Delta F}{\sum_{i=1}^{n} y_i} . \tag{4.15}$$

В этом случае границы для изменения договорных цен поставщиков определятся из условия:

$$\frac{\Delta f_i}{y_i} \leq \Delta p_i \leq \frac{\Delta F}{\sum_{i=1}^{n} y_i}, \quad i = \overline{1,n} . \tag{4.16}$$

Условия (4.12) и (4.14) определяют область возможного компромисса участников производственно-экономической системы. В случае не выполнения этих условий согласование интересов поставщиков и заказчика при существующих параметрах производственной системы невозможно. Для того чтобы согласовать интересы необходимо изменить параметры производственной системы, например цену готового изделия.

Пример 4.3. Согласование интересов участников производственной системы на основе изменения договорных цен.

Для производственной системы, рассматриваемой в примере 4.1, **определить** границы договорных цен, согласующие интересы участников производственной системы.

Решение:

Возможно согласование экономических интересов поставщиков и заказчика на основе изменения договорных цен.

Для определения нижней границы договорных цен комплектующих поставщиков воспользуемся условием:

$$\Delta p_i \geq \frac{\Delta f_i}{y_i}.$$

Учитывая результаты, полученные в примере 4.1, определим нижнюю границу договорной цены комплектующих деталей первого поставщика:

$$\Delta p_1 \geq \frac{\Delta f_1}{y_1} = \frac{17523,2}{770} = 38,53 \text{ руб.}$$

Аналогично определим нижнюю границу договорной цены комплектующих деталей второго поставщика:

$$\Delta p_2 \geq \frac{\Delta f_2}{y_2} = \frac{12145,2}{411} = 29,55 \text{ руб.}$$

Для верхней границы договорных цен поставщиков должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta p_i \leq \Delta F.$$

Суммарное увеличение доходов поставщиков от изменения договорных цен не может быть больше дополнительного эффекта заказчика. Зададим значение верхней границы договорной цены первого поставщика 40 руб. При этом значении выполняется условие согласования экономических интересов первого поставщика и заказчика:

$$38,53 \leq \Delta p_1 \leq 40.$$

Тогда верхняя граница договорной цены второго поставщика определится:

$$\Delta p_2 \leq \frac{\Delta F - y_1 \Delta p_1}{y_2} = \frac{44104 - 770 \cdot 40}{411} = 32,37 \text{ руб.}$$

Условие согласования экономических интересов второго поставщика и заказчика также выполняются:

$$29{,}55 \leq \Delta p_2 \leq 32{,}37\ .$$

Контрольные вопросы к главе 4

1. Приведите описание производственной системы.
2. Сформулируйте модель принятия решечий для каждого поставщика.
3. Найдите оптимальное решение для поставщика.
4. Сформулируйте модель принятия решений для заказчика.
5. Найдите оптимальное решение для заказчика.
6. Как вычисляются убытки поставщиков при выполнении планового задания заказчика?
7. Дайте графическую иллюстрацию вычисления убытков поставщиков при выполнении планового задания заказчика.
8. Как вычисляется дополнительный эффект заказчика при выполнении планового задания поставщиками?
9. Дайте графическую иллюстрацию вычисления дополнительного эффекта заказчика при выполнении планового задания поставщиками.
10. Опишите механизм управления в производственной системе с помощью премирования поставщиков.
11. Приведите условия согласования в механизме управления с помощью премирования.
12. Дайте графическую иллюстрацию условий согласования в механизме управления с помощью премирования.
13. Опишите механизм управления в производственной системе на основе изменения договорных цен.
14. Приведите условия согласования в механизме управления на основе изменения договорных цен.
15. Дайте графическую иллюстрацию условий согласования в механизме управления с помощью премирования.

Список литературы

1. Анисимов В.М., Гришанов Г.М. Согласованное взаимодействие по уровню качества поставок в промышленном комплексе // Актуальные проблемы производства: технология, организация, управление: Сб. науч. тр. Самара: ИПО СГАУ, 1997.- С. 128-137.
2. Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры - М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с.
3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. - М.: Наука, 1977. -255 с.
4. Бурков В.Н. Экономические механизмы развития фирмы. Библиотека технологий управления. - М.: УНПК МФТИ, 1996. - 30 с.
5. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами: Научно-практическое издание. Сер. Информатизация России на пороге XXI века. – М.: Синтег, 1997.-188 с.
6. Бурков В.Н., Новиков В.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. - М.: Синтег, 1999. -128 с.
7. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. - М.: Синтег, 2004.- 400 с.
8. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. - М.: Наука, 1971.- 384 с.
9. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. - М.: Наука, 1976.- 327 с.
10. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. –288 с.
11. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах.–М.: Радио и связь, 1982.–144 с.
12. Гришанов Г.М., Клевлин А.И., Жданов В.И. Согласованные механизмы координации в двухъярусной активной системе «поставщик-потребитель» промышленного комплекса. // Эргатические системы. Организация, управление, автоматизация: Сб. ст. – Самара: СГАУ, 1996. - С. 75-84.

13.Гришанов Г.М., Морозов В.В. Модель задачи организации согласованного взаимодействия в системе (поставщик-потребитель) // Сб. ст. под ред. Буркова В.Н. – Москва-Самара: СГАУ, 1997. - С. 32-36.

14.Гришанов Г.М., Рамзаев В.М., Чумак В.Г. Задачи организации согласованного взаимодействия в иерархических системах с независимыми элементами // Рыночная экономика. Состояние, проблемы, перспективы, методические разработки: Сб. науч. тр. МИРа. - Самара: СамВен, 1995. - С. 70-91.

15.Губко М.В, Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. -М.: Синтег, 2002. – 148 с.

16.Засканов В.Г., Прохоренко А.А. Вопросы совершенствования механизмов функционирования нефтеперерабатывающих предприятий в условиях хозрасчета: - Изд-во Саратовского ун-та, Самарский филиал, 1991.-161 с.

17.Засканов В.Г., Эльдаров М.А., Кондратьев И.И. Внутрипроизводственный учет и контроль в условиях хозяйственного расчета. – Изд-во Саратовского ун-та, Самарский филиал, 1991.-118 с.

18.Коротков Э.М. Исследование систем угравления: Учебник.-М.: Издательско-консалтинговая компания "Дека", 2000. - 285 с.

19.Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем.-М.: Наука, 1974.-528с.

20.Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. -М.: Наука, 1981.-488 с.

21.Нейман Д., Морггенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука, 1970.

22.Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. -М.: Синтег, 2003.-312 с.

23.Новиков Д.А. Теория управления организационными системами: вводный курс // www.mtas.ru

24.Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. -М.: Синтег, 1999. – 108 с.

25.Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. -М.: Синтег, 2003. 160 с.

26. Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. -М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.
27. Павлов О.В. Механизм стимулирования поставщиков за качество работы увеличением объёма заказа. Управление большими системами // Сб. тр. молодых учёных. Вып. 3. Под общ. ред. Д.А. Новикова. -М.: ИПУ РАН, 2003. – С.82-85.
28. Павлов О.В. Механизм управления качеством поставок комплектующих на примере ОАО «АвтоВАз» / Высшее образование, бизнес, предпринимательство 2002 // Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1 – Самара: СГТУ, 2002. -С.131-132.
29. Павлов О.В. Экономические механизмы управления поставщиками на основе балльных оценок качества их работы. Надёжность и качество // Тр. междунар. симпозиума. Ч. II; Под ред. Н.К. Юркова. - Пенза, 2004.- С. 622-624.
30. Павлов О.В. Численный подход к решению задач стимулирования. Современный российский менеджмент: состояние, проблемы, развитие // Сб. ст. междунар. науч.-метод. конф. - Пенза, 2005 – С. 164-169.
31. Павлов О.В., Васильева О.Н. Система стимулирования производственных рабочих сборочно-кузовного производства АО «АВТОВАЗ» / Высшее образование, бизнес, предпринимательство 2003 // Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1. – Самара: СГТУ, 2003. - С. 82-87.
32. Павлов О.В. Васильева О.Н. Задача стимулирования рабочих сборочно-кузовного производства ОАО «АВТОВАЗ». Управление большими системами // Сб. тр. молодых учёных. Вып. 9. Под общ. ред. Д.А. Новикова. -М.:ИПУ РАН, 2004.- С. 186-190.
33. Павлов О.В., Выборнова Л.А. Численный способ решения задач стимулирования на основе метода Ньютона. Управление организационно-экономическими системами: моделирование взаимодействий, принятие решений // Сб. науч. ст. под общ. ред. Д.А. Новикова. -Самара: СГАУ, 2005. – С. 99-104.

34.Цветков А.В. Стимулирование в управлении проектами. -М.: Апостроф, 2001. – 144 с.

35.Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: -М.: Дело, 2000. – 440 с.

36.Щепкин А.В. Внутрифирменное упраьление (модели и методы). -М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.

37.Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts// Advances in economic theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71-155.

38.Mas-Collel A., Whinston M.D. Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

39.Сборник положений по оплате труда работников Волжского автомобильного завода / Сост. Христенко В.Б., Кузнецов А.Н.; АО «АВТОВАЗ». Тольятти, 2000. – 128 с.

Учебное издание

Гришанов Геннадий Михайлович
Павлов Олег Валерьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Т.К. Кретинина

Подписано в печать 25.08.2005. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,44. Усл. кр.-отт. 7,56. Уч.-изд.л. 8.
Тираж 250 экз. Заказ 6 . Арт. С-5(Д3)/2005

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА».
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

РИО государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА».
443086 Самара, Московское шоссе, 34.