

САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени академика
С. П. КОРОЛЕВА

*В. В. КОТЛЯР,
В. А. СОЙФЕР*

ИТЕРАТИВНЫЕ
МЕТОДЫ
ДЛЯ ДИФРАКЦИОННОЙ
ОПТИКИ

САМАРА

1995

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

В. В. КОТЛЯР, В. А. СОЙФЕР

ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДИФРАКЦИОННОЙ ОПТИКИ

Учебное пособие

САМАРА 1995

УДК 535.8+523.8

Итеративные методы для дифракционной оптики: Учеб. пособие
/В. В. Котляр, В. А. Сойфер; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара,
1995. 88 с. ISBN 5-230-16960-5.

Рассматриваются итеративные методы решения обратных задач скалярной теории дифракции в применении к расчету фазовых оптических элементов, формирующих произвольно заданные распределения интенсивности или фазы лазерного светового поля в различных зонах пространства. Такие оптические элементы являются представителями дифракционной оптики. Дифракционная оптика в отличие от классической лучевой оптики рассчитывается и изготавливается по новой технологии и обладает существенными преимуществами: новыми функциями и уменьшенными массой и габаритами. Последнее свойство элементов дифракционной оптики гарантирует эффективность их использования в бортовых оптических устройствах аэрокосмических аппаратов.

Предназначено для студентов специальности 01.02, специализирующихся по "Компьютерной оптике" и "Обработке изображений". Подготовлено на кафедре технической кибернетики.

Ил. 40. Библиогр.: 55 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва

Рецензент доц. С. В. Карпеев

ISBN 5-230-16960-5

© Самарский государственный
аэрокосмический университет,
1995

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Адаптивные итеративные алгоритмы для расчета киноформов	6
1.1. Алгоритм Герчберга-Секстона	6
1.2. Адаптивно-аддитивный алгоритм	10
1.3. Адаптивно-мультипликативный алгоритм	17
1.4. Алгоритм экстраполяции и интерполяции фазы киноформов	21
2. Итеративные алгоритмы для расчета киноформов, формирующих радиально-симметричные изображения	30
2.1. Расчет киноформов, формирующих радиально-симметричные дифракционные картины	32
2.2. Расчет киноформов-аксиконов	37
2.3. Расчет радиально-симметричных киноформов с квантованной фазой	43
3. Алгоритм расчета формирователей волновых фронтов	48
3.1. Расчет фазовых формирователей волновых фронтов	49
3.2. Амплитудные транспаранты для формирования волновых фронтов	52
4. Расчет фазовых формирователей гауссовых и бesselевых мод	58
4.1. Киноформы для формирования бesselевых мод	58
4.2. Формирователи бesselевых квазимод	64
4.3. Киноформы для формирования гауссовых мод	67
Заключение	79
Библиографический список	80
Приложение А	83
Приложение В	86
Приложение С	88

Введение

Основной изображающий элемент классической оптики — это сферическая линза. Обе поверхности линзы — участки сфер. Именно такой должна быть поверхность линзы, чтобы сконцентрировать всю энергию падающей плоской световой волны в одной точке геометрического фокуса. Линзе соответствует элемент дифракционной оптики — фазовая зонная пластинка Френеля. Это первый представитель киноформов. Киноформ — это фазовый оптический элемент, формирующий заданное изображение. Изготавливаются зонные пластинки и киноформы по технологии микрофотографии и представляют собой плоскопараллельную стеклянную пластину с протравленным микрорельефом на одной из поверхностей. Максимальная оптическая глубина микрорельефа пластинки должна быть равна малому числу длин волн используемого излучения.

Технология фотолитографии, применяемая традиционно для изготовления больших интегральных микросхем, позволяет изготовить оптический элемент с произвольным фазовым профилем. Поэтому в настоящее время эффективно развивается новая область вычислительной оптики — дифракционная оптика. Содержание этой области знаний составляет совокупность методов решения прямых и обратных задач скалярной теории дифракции. Большая часть из этих методов, позволяющая решать задачи приближенно, но эффективно в вычислительном плане, носит итеративный характер. Итеративные методы решения нелиней-

ных интегральных уравнений позволяют получать на каждом шаге итераций приближенную оценку искомой фазовой функции оптического элемента. Причем в ходе расчета фазовой функции также происходит проверка работы оптического элемента, т. е. на каждом шаге итераций можно видеть, насколько хорош полученный элемент.

Итеративные методы расчета киноформов существенно расширили область задач, для которых возможно получать приближенные решения. Заметим, что идеально точного решения задачи и не требуется, т. к. любая технология изготовления оптических элементов вносит определенные искажения. Также не требуется единственности при расчете киноформов, т. к. одно изображение могут формировать и несколько оптических элементов.

Рассматриваемые в данной работе итеративные методы расчета оптических элементов охватывают почти весь спектр возможных задач.

1. АДАПТИВНЫЕ ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КИНОФОРМОВ

В этом разделе рассматриваются итеративные алгоритмы для решения нелинейного интегрального уравнения Френеля, которые предназначены для расчета фазовых оптических элементов, формирующих произвольно заданное распределение интенсивности монохроматического когерентного света в некоторой плоскости, перпендикулярной оптической оси.

Свет считается монохроматическим и когерентным, если он описывается комплексной функцией, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца. Поляризационные эффекты не учитываются — рассматривается скалярная теория дифракции.

Адаптивность рассматриваемых алгоритмов заключается в том, что новая оценка искомой функции на каждом шаге итераций выбирается не только в зависимости от требуемой функции интенсивности, но и от предыдущей ее оценки.

Базовым вычислительным алгоритмом при реализации рассматриваемых методов является алгоритм быстрого двумерного преобразования Фурье.

1.1. АЛГОРИТМ ГЕРЧБЕРГА – СЕКСТОНА

Для расчета киноформов [1] — фазовых оптических элементов, формирующих заданное распределение интенсивности света в некоторой плоскости, перпендикулярной оптической оси, широко применяются итеративные алгоритмы [2, 3].

В рамках скалярной теории дифракции комплексная амплитуда света в плоскости оптического элемента

$$f(x, y) = A(x, y) \exp[i\varphi(x, y)]$$

связана с комплексной амплитудой света в плоскости наблюдения

$$F(\xi, \eta) = B(\xi, \eta) \exp[i\psi(\xi, \eta)],$$

в которой формируется требуемое распределение интенсивности $I_0(\xi, \eta)$, интегральным преобразованием [4]

$$F(\xi, \eta) = \frac{ik}{2\pi z} e^{ikz} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) H(x - \xi, y - \eta, z) dx dy \quad (1)$$

Здесь

$$H(x, y, z) = \exp\left[\frac{ik}{2z} \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\}\right] \quad (1^*)$$

является функцией импульсного отклика свободного пространства в приближении Френеля, z — расстояние между плоскостями киноформа и наблюдения, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны

λ . В (1) комплексная амплитуда $f(x, y)$ в приближении тонкого оптического элемента (приближение транспаранта), когда не учитывается рефракция лучей, равна произведению комплексной амплитуды света

$f_0(x, y)$, освещающего киноформа, на функцию пропускания самого киноформа $\tau(x, y)$:

$$f(x, y) = f_0(x, y) \tau(x, y). \quad (2)$$

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать только фазовые оптические элементы, если специально не оговорено обратное, то функция пропускания киноформа выбирается в виде

$$\tau(x, y) = \exp[i\psi(x, y)], \quad (3)$$

где $\psi(x, y)$ — искомая фаза киноформа.

Рис. 1 иллюстрирует введенные выше обозначения.

Задача поиска фазовой функции киноформа $\psi(x, y)$ формально сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

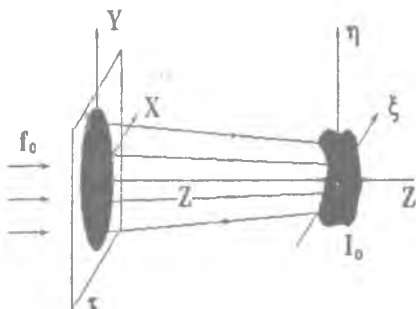


Рис. 1. Оптическая схема формирования изображения с помощью киноформа

$$I_0(x, y) = |F(x, y)|^2 = \left| \int \int A_0(x, y) e^{i\varphi(x, y)} H(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \right|^2. \quad (4)$$

где $I_0(\xi, \eta)$ — требуемая интенсивность в плоскости наблюдения, $A_0(x, y)$ — амплитуда освещающего киноформ светового пучка, $\varphi(x, y) = v(x, y) + v_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ — фаза освещающего пучка.

Итеративный алгоритм поиска фазы $\varphi(x, y)$, а значит и фазы киноформа $v(x, y)$, состоит в решении методом последовательных приближений уравнения (4). Алгоритм Герчберга—Секстона (ГС) [3] состоит из следующих шагов.

1. Выбирается начальная оценка фазы $\varphi_0(x, y)$.

2. От функции $A_0(x, y) \exp[i\varphi_0(x, y)]$ вычисляется интегральное преобразование (1).

3. Полученная функция комплексной амплитуды $F(\xi, \eta)$ в плоскости формирования изображения заменяется на функцию $\bar{F}(\xi, \eta)$ по правилу

$$\bar{F}(\xi, \eta) = B_0(\xi, \eta) F(\xi, \eta) |F(\xi, \eta)|^{-1}. \quad (5)$$

$$\text{где } B_0(\xi, \eta) = \sqrt{I_0(\xi, \eta)}.$$

4. От функции $\bar{F}(\xi, \eta)$ вычисляется обратное к (1) преобразование

$$f(x, y) = \frac{ik}{2\pi z} e^{ikz} \int \int \bar{F}(\xi, \eta) H^*(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (6)$$

5. Полученная функция комплексной амплитуды $f(x, y)$ в плоскости киноформа заменяется на функцию $\tilde{f}(x, y)$ по правилу

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} A_0(x, y) f(x, y) |f(x, y)|^{-1}, & (x, y) \in W; \\ 0, & (x, y) \notin W. \end{cases} \quad (7)$$

где W — форма апертуры киноформа.

6. Переход к п. 2.

Этот итеративный процесс повторяется до тех пор, пока ошибки δ_f и δ_f не перестают заметно изменяться:

$$\delta_f^2 = \frac{\int \int_{\sigma} [|F| - B_0]^2 d\xi d\eta}{\int \int_{\sigma} B_0^2(\xi, \eta) d\xi d\eta}, \quad (8)$$

$$\delta_f^2 = \frac{\int \int_{\sigma} [|f| - A_0]^2 dx dy}{\int \int_{\sigma} A_0^2(x, y) dx dy}. \quad (9)$$

Алгоритм ГС называют также алгоритмом сокращения ошибки, т. к. доказано [5], что ошибки (8) и (9) в ходе итераций убывают. Кроме того, показано, что ГС-алгоритм является разновидностью метода условного градиента, с помощью которого минимизируется функционал среднего квадратичного отклонения амплитуды восстановленного изображения от заданного [6, 7]:

$$M_0 = \int \int_{\sigma} [|F(\xi, \eta)| - B_0(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta. \quad (10)$$

Однако процессу сходимости алгоритма ГС присущ эффект стагнации, когда за первые несколько итераций ошибка δ_f (или δ_f) убывает быстро, а за все последующие итерации уменьшается незначительно. Чтобы увеличить скорость сходимости итеративной процедуры, применяются различные адаптивные алгоритмы, в которых вводятся некоторые параметры, регулирующие скорость сходимости.

В последующих двух разделах рассматриваются два таких адаптивных алгоритма. А д а п т и в н о с т ь в данном случае понимается как зависимость последующего шага аппроксимации изображения от предыдущего.

1.2. АДАПТИВНО-АДДИТИВНЫЙ АЛГОРИТМ

Для увеличения скорости сходимости ГС-алгоритма был предложен алгоритм входа-выхода [8], в котором предлагается вместо замены (7) в плоскости оптического элемента использовать следующую замену:

$$\bar{f}_n(x, y) = \begin{cases} \bar{f}_{n-1} & , (x, y) \in W; \\ \bar{f}_{n-1} - \beta f_n & , (x, y) \notin W. \end{cases} \quad (11)$$

где $\bar{f}_{n-1}(x, y)$ — амплитуда на $(n-1)$ -м шаге итераций после замены и $f_n(x, y)$ — амплитуда на n -м шаге итераций до замены, $0 < \beta < 1$ — постоянная, регулирующая скорость сходимости.

Алгоритм входа-выхода применялся первоначально для восстановления фазы светового поля по измерению одной интенсивности в плоскости пространственных частот. Такая задача характерна в звездной интерферометрии. Также этот алгоритм был с успехом применен для расчета фазы киноформов [9]. Недостатком этого алгоритма является отсутствие его теоретического обоснования.

Ниже обосновывается разновидность алгоритма входа-выхода, которая приспособлена для расчета киноформов и названа **а д а п т и в н о - а д д и т и в н ы м** (АА) алгоритмом.

Рассмотрим подробнее замену (5) в ГС-алгоритме. Согласно этой замене амплитуда света в плоскости наблюдения, рассчитанная на n -м шаге итераций $|F_n(\xi, \eta)|$, заменяется на требуемую амплитуду изображения $B_0(\xi, \eta)$. Однако функция $B_0(\xi, \eta)$ может быть задана произвольно и не являться аналитической функцией. Хотя известно, что результатом интегрального преобразования Фурье (или Френеля) от функции с ограниченным носителем является аналитическая целая функция экспоненциального типа [10]. Поэтому имеет смысл вместо замены (5) попытаться использовать замену, в которой обе функции (требуемая и рассчитанная аналитическая) участвуют в виде линейной комбинации с разными весами

$$|F_n^0(\xi, \eta)| = \lambda B_0(\xi, \eta) + (1 - \lambda) |F_n(\xi, \eta)|. \quad (12)$$

При этом замена (5) в итеративном алгоритме ГС будет иметь следующий вид:

$$\bar{F}_n(\xi, \eta) = \left| F_n^0(\xi, \eta) \right| F_n(\xi, \eta) \left| F_n(\xi, \eta) \right|^{-1}. \quad (13)$$

Область изменения параметра λ находится из условия, что среднее отклонение M_0 , определенное соотношением (10), при замене (12) не увеличивается. Пусть выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \bar{M}_{on} &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| F_n^0 \right| - B_0 \right]^2 d\xi d\eta = \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lambda B_0 + (1 + \lambda) \left| F_n \right| - B_0 \right]^2 d\xi d\eta = \\ &= (1 - \lambda)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| F_n \right| - B_0 \right]^2 d\xi d\eta \leq M_{on} = \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| F_n \right| - B_0 \right]^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует, что $0 < \lambda \leq 2$. Заметим, что при $\lambda = 1$ замена (13) переходит в замену (5) алгоритма ГС. При $\lambda = 2$ получается замена "зеркального отображения" [11, 12]

$$\left| F_n^0(\xi, \eta) \right| = 2B_0(\xi, \eta) - \left| F_n(\xi, \eta) \right|. \quad (15)$$

В этом случае ($\lambda = 2$) рассчитанная на n -м шаге итераций амплитуда в плоскости наблюдения $\left| F_n(\xi, \eta) \right|$ заменяется на свое "зеркальное отображение" относительно заданного распределения амплитуды $B_0(\xi, \eta)$.

Из (12) также видно, что при $1/2 < \lambda < 1$ вклад амплитуды B_0 в результирующую амплитуду $\left| F_n^0 \right|$ меньше, чем вклад амплитуды $\left| F_n \right|$, а при $0 < \lambda < 1/2$ наоборот. Этим можно пользоваться, изменяя в ходе итераций значение параметра λ .

Покажем далее, что итеративный АА-алгоритм с заменой (13) является разновидностью метода условного градиента, который максимизирует следующий функционал.

$$M_1 = \int \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta - \lambda \int \int_{\gamma} [B_0(\xi, \eta) - |F(\xi, \eta)|]^2 d\xi d\eta. \quad (16)$$

Первое слагаемое в (16) равно полной энергии света в плоскости наблюдения, рассчитанной на каком-либо шаге итеративного процесса, а второе слагаемое в (16) есть среднее квадратичное отклонение амплитуды рассчитанного поля от требуемой, т. е. первое слагаемое можно рассматривать как сигнал, а второе как шум. Поэтому максимизировать функционал (16) — это значит увеличить отношение сигнал/шум.

Вариация функционала M_1 относительно функции $F(\xi, \eta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \delta M_1 &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(F F^*) - \lambda \left[\delta(B_0^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta(F F^*) - 2 B_0 \delta(\sqrt{F F^*}) \right] \right\} d\xi d\eta = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{\gamma} G(\xi, \eta) \delta F^*(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из формулы (17) имеем

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) &= \left\{ \lambda B_0(\xi, \eta) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda) |F(\xi, \eta)| \right\} \frac{F(\xi, \eta)}{|F(\xi, \eta)|}, \end{aligned} \quad (18)$$

где * — знак комплексного сопряжения, $\operatorname{Re}\{__\}$ — реальная часть комплексной функции.

При получении (17) было использовано соотношение

$$\delta(F F^*) = F^* \delta F + F \delta F^* = 2 \operatorname{Re}(F \delta F^*). \quad (19)$$

Заметим, что вариация (18) заведомо будет положительной при $\lambda \leq 1$. При $1 < \lambda \leq 2$ для гарантии положительности вариации (17) следует в выражении (18) выбирать абсолютное значение сомножителя в фигурных скобках.

Так как функции $F(\xi, \eta)$ и $f(x, y)$ связаны линейным интегральным оператором (1)

$$F = \hat{L} f, \quad (20)$$

причем оператор является унитарным: $\hat{L}^* = \hat{L}^{-1}$. то, введя обозначение скалярного произведения

$$(p, q) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{-x}^x p(x, y) q^*(x, y) dx dy \right\}, \quad (21)$$

нетрудно убедиться, что имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \delta M_1 &= (G, \delta F) = (G, \delta [\hat{L} f]) = (G, \hat{L} \delta f) = \\ &= (\hat{L}^{-1} G, \delta f) = (g, \delta f) = \delta M_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \hat{L}^{-1} G(\xi, \eta) = \\ &= \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int \int_{-y}^y G(\xi, \eta) H^*(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\delta M_2 = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{-x}^x g(x, y) \delta f^*(x, y) dx dy \right\}, \quad (24)$$

где δM_2 — вариация функционала в плоскости киноформа.

Равенства (22) показывают, что вариация функционала в плоскости наблюдения равна вариации функционала в плоскости киноформа. Поэтому, чтобы наискорейшим образом максимизировать функционал M_2 , на n -м шаге итераций следует выбирать такую оценку фазы $\varphi(x, y)$ светового поля вблизи киноформа, чтобы максимизировать положительную вариацию функционала (24)

$$\begin{aligned} \delta M_2 &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{-r}^r g_n \delta f_n^* dx dy \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{-r}^r g_n [A_0 e^{-i\varphi_{n+1}} - A_0 e^{-i\varphi_n}] dx dy \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

Максимум выражения (25) достигается при максимальном первом слагаемом, т. к. второе слагаемое фиксировано (фаза φ_n уже рассчитана). Максимум же первого слагаемого в (25), равного

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{-r}^r |g_n| A_0 \exp[i v_n - i \varphi_{n+1}] dx dy \right\}, \quad (26)$$

достигается при

$$v_n = \arg g_n = \varphi_{n+1}. \quad (27)$$

Из приведенных рассуждений следует процедура максимизации функционалов M_1 и M_2 методом условного градиента [13];

- а) Выбирается начальная оценка фазы $\varphi_0(x, y)$;
- б) Вычисляется функция $G(\xi, \eta)$ по формуле (18);
- в) Вычисляется функция $g(x, y)$ по формуле (23);
- г) Выбирается следующая оценка фазы $\varphi_1(x, y)$ по формуле (27);
- д) Переход к п. б) и т. д.

Нетрудно заметить, что эта итеративная процедура совпадает с шагами ГС-алгоритма, но вместо замены (5) используется замена (13) или (18).

Преимущества описанного АА-алгоритма демонстрируются на следующих конкретных примерах. Рассчитывается киноформ, который при освещении лазерным пучком света с гауссовым распределением интенсивности

$$A_0(x, y) = \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{r^2} \right], \quad (28)$$

должен формировать в дальней зоне дифракции изображение "мягкого квадрата". То есть требуемое распределение амплитуды в плоскости наблюдения выбирается в виде супер-гауссовой функции

$$B_0(\xi, \eta) = \exp\left[-\frac{\xi^{2n} + \eta^{2n}}{a^{2n}}\right], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где $2a$ — эффективный размер стороны квадрата, r — радиус гауссового пучка.

Прямое (1) и обратное (6) преобразования Френеля вычислялись с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Размер массива отсчетов — 256×256 . Интенсивность гауссового освещающего пучка на краях квадратной апертуры киноформа составляла 0,01 % от максимального значения в центре. Длина стороны изображения квадрата равна около 10 диаметров диска Эйри (минимального дифракционного пятна). Число итераций — 10.

На рис. 2 показаны:

- а) фаза киноформа по модулю 2π , в полутонах, 16 градаций, рассчитанная по ГС-алгоритму;
- б) изображение, сформированное в дальней зоне;
- в) горизонтальное сечение распределения интенсивности в изображении.

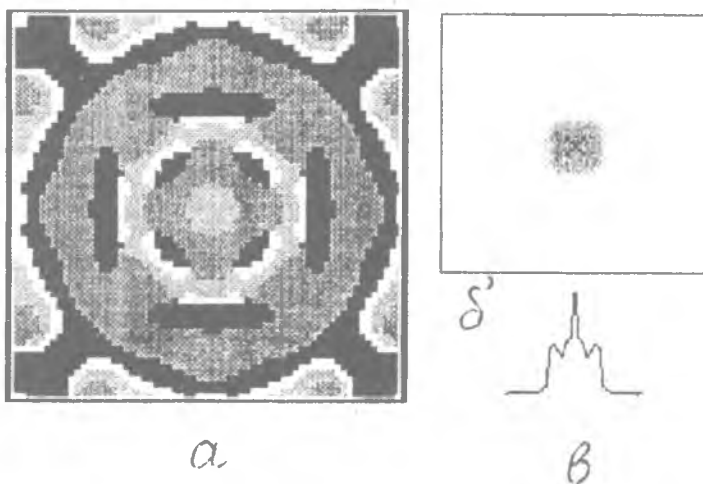


Рис. 2. Расчет киноформа по ГС-алгоритму

На рис. 3 показаны аналогичные результаты, но полученные с помощью АА-алгоритма ($\lambda = 2$):

- а) фаза киноформа;
- б) сформированное изображение;
- в) сечение интенсивности в изображении.

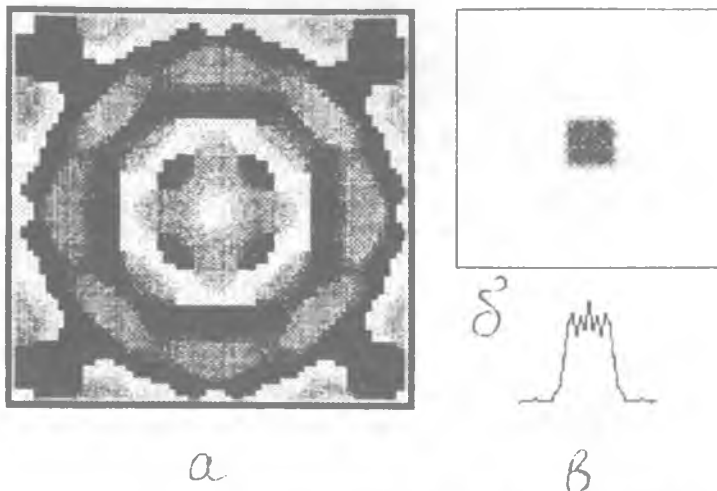


Рис. 3. Расчет киноформа АА-методом

Из рис. 2 и 3 видно, что фазы, рассчитанные обоими методами, почти не отличаются друг от друга. Однако малое их отличие приводит к существенному различию в формируемых изображениях. Среднее квадратичное отклонение δ_F (выражение (8)) сформированного распределения интенсивности от требуемого для данного примера равно: 16 % — для ГС-алгоритма и 4 % — для АА-алгоритма.

На рис. 4, а показаны зависимости значений функционала M_0 от числа итераций для АА-алгоритма при различных значениях множителя λ : 0,25 (кривая 1); 0,5 (2); 1,0 (3); 1,25 (4); 1,5 (5); 2 (6). Из рис. 4, а видно, что скорость сходимости итеративного алгоритма увеличивается с ростом λ от 0 до 2. На рис. 4, б показаны зависимости для M_1 от числа итераций при различных λ : 0,25 (1); 1 (2); 2 (3).

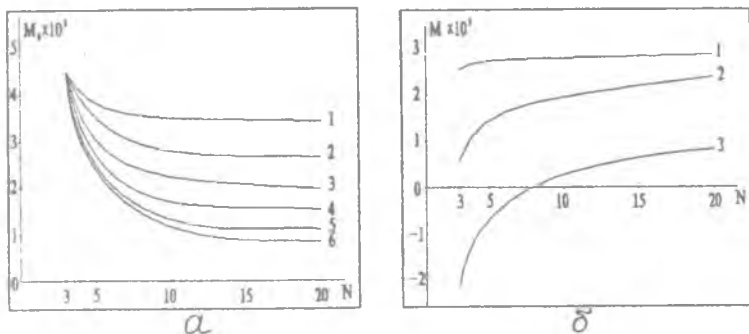


Рис. 4. Зависимости функционалов M_0 и M_1 от числа итераций

1.3. АДАПТИВНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ

В этом разделе рассматривается еще один итеративный алгоритм для расчета киноформов, который также увеличивает скорость сходимости ГС-алгоритма.

Проще всего прийти к этому алгоритму исходя из тождества, которое должно иметь место в плоскости формирования изображения:

$$I_0(\xi, \eta) = F(\xi, \eta)F^*(\xi, \eta). \quad (30)$$

С помощью обратного оператора \hat{L}^{-1} в плоскости киноформа получим

$$f(x, y) = \hat{L}^{-1} \left[\frac{I_0(\xi, \eta)}{F(\xi, \eta)} \right] = \hat{L}^{-1} \left[\frac{I_0 F}{|F|^2} \right]. \quad (31)$$

Выражение (31) позволяет предложить итеративную процедуру для поиска фазы киноформа (аргумента функции $f(x, y)$), которая аналогична алгоритму ГС, но вместо замены (5) следует использовать замену

$$\bar{F}(\xi, \eta) = I_0(\xi, \eta) F(\xi, \eta) |F(\xi, \eta)|^{-2}. \quad (32)$$

Недостатком замены (32) является ее нерегулярность, т. к. возможны случаи равенства нулю модуля функции $F(\xi, \eta)$, который находится в знаменателе.

Регулярная постановка задачи для поиска фазы киноформа должна основываться на рассмотрении некоторого функционала

невязки с регуляризацией [14]. Для этого рассмотрим функционал вида

$$M_3 = \int \int_{-\infty}^{\infty} [|F|^2 - I_0]^2 d\xi d\eta + \alpha \int \int_{\sigma}^{\infty} Q|F|^2 d\xi d\eta. \quad (33)$$

Первое слагаемое в (33) представляет собой среднее квадратичное отклонение сформированной интенсивности в плоскости наблюдения от требуемой интенсивности $I_0(\xi, \eta)$. Это слагаемое в отличие от функционала (10) является функционалом четвертой степени относительно амплитуды светового поля. Второе слагаемое в (33) является стабилизирующим. При этом действительная положительно-определенная функция $Q(\xi, \eta)$ согласно требованиям метода тихоновской регуляризации [15] должна иметь вид

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^N |C_n| (\xi^2 + \eta^2)^n, \quad (34)$$

где C_n — произвольные коэффициенты. Стабилизирующая постоянная $\alpha \geq 0$ определяет нижнюю границу изменения функционала M_3 .

Минимизировать функционал M_3 — это значит среди множества функций $F(\xi, \eta)$, наиболее близких по модулю к функции $\sqrt{I_0(\xi, \eta)}$, выбрать наиболее гладкую функцию. Итеративная процедура минимизации функционала (33) строится с помощью промежуточных квадратичных относительно искомой функции $G_n(\xi, \eta)$ функционалов

$$M_{3n} = \int \int_{\sigma}^{\infty} |F_n G_n^* - I_0|^2 d\xi d\eta + \alpha \int \int_{\sigma}^{\infty} Q|G_n|^2 d\xi d\eta, \quad (35)$$

где $F_n(\xi, \eta)$ — комплексная амплитуда, рассчитанная на n -м шаге итераций в плоскости наблюдения, $G_n(\xi, \eta)$ — функция, которую следует найти, чтобы минимизировать функционал M_{3n} .

Вариация функционала (35) относительно функции G_n имеет вид

$$\delta M_{3n} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int \int_{-x}^x \left[|F_n|^2 G_n - I_0 F_n + \alpha Q G_n \right] \delta G^* d\xi d\eta \right\}. \quad (36)$$

Минимум функционала (35) достигается при равенстве нулю вариации (36). Из (36) видно, что это возможно при выполнении равенства

$$G_n = \frac{I_0 F_n}{|F_n|^2 + \alpha Q}. \quad (37)$$

Из сравнения (37) и (32) видно, что функция $G_n(\xi, \eta)$ является регулярным аналогом функции $\bar{F}(\xi, \eta)$. Замена (37) минимизирует промежуточные функционалы M_{3n} на каждом шаге итераций. Но при сходимости итеративного процесса, когда разница $|F_n - G_n|$ с увеличением n убывает, функционалы M_{3n} стремятся к функционалу M_3 . Поэтому замена (37) в пределе будет минимизировать исходный функционал (33).

Предыдущие рассуждения обосновывают возможность итеративного поиска фазы киноформа, аналогичного ГС-алгоритму, но вместо замены (5) следует использовать замену (37).

Этот алгоритм мы назвали **а д а п т и в н о - м у л ь т и п л и к а т и в н ы м** (АМ) в отличие от АА-алгоритма. Его преимущество по сравнению с ГС-алгоритмом видно из следующих численных результатов.

Рассчитывался киноформ, который при освещении лазерным пучком света с гауссовым распределением интенсивности должен формировать в дальней зоне дифракции изображение "мягкого круга". Требуемая интенсивность в плоскости наблюдения задавалась формулой

$$I_0(\xi, \eta) = \exp \left[-2 \left\{ \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} \right\}^n \right]. \quad (38)$$

где a — эффективный радиус "мягкого круга", $n=1, 2, 3, \dots$. Радиус a выбирался равным около 20 радиусов диска Эйри. Размер массива отсчетов 256×256 .

На рис. 5 показаны: фаза киноформа по модулю 2π (16 градаций), рассчитанная по ГС-алгоритму за 20 итераций (а); сформированная дифракционная картина (б) и распределение интенсивности света в центральном сечении этой картины (в).

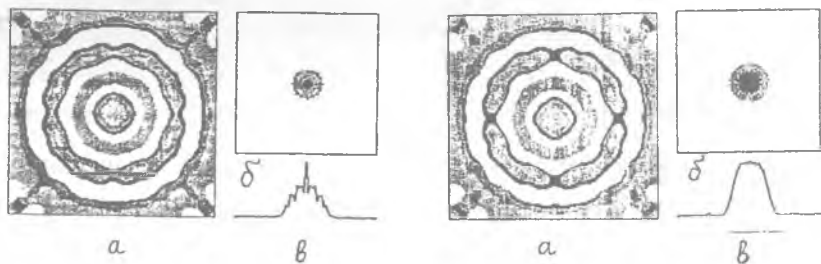


Рис. 5. Расчет киноформа ГС-методом Рис. 6. Расчет киноформа АМ-методом

На рис. 6 показаны аналогичные результаты для АМ-алгоритма: фаза, рассчитанная за 20 итераций (а); картина дифракции (б) и ее центральное сечение в относительных единицах (в).

Из сравнения рис. 5 и рис. 6 видно, что обе фазы слабо отличаются друг от друга. Однако это малое отличие тем не менее приводит к существенному отличию в сформированных картинах дифракции.

На рис. 7 показано, как с ростом числа итераций меняется значение функционала M_3 из (33): кривая 1 — для ГС-алгоритма ($\alpha = 0$); кривая 2 — для АМ-алгоритма ($\alpha = 10^{-8}$). Из рис. 7 видно, что адаптивный алгоритм имеет большую скорость сходимости: кривая 2 достигает единичного значения за 4 итерации, а кривая 1 достигает значения 1.2 за 20 итераций. Однако виден и недостаток АМ-алгоритма: его немонотонная сходимость. Заметим, что если рассматривать значения функционала (33) через итерацию (см. рис. 7, кривая 2), то они будут уменьшаться монотонно. Начальная оценка фазы в приведенных здесь примерах и во всех других выбиралась в виде случайной функции.

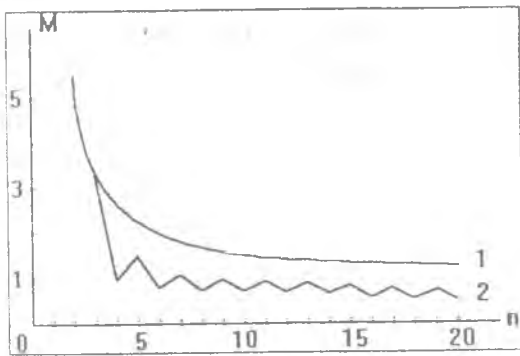


Рис. 7. Зависимость функционала M_3 от числа итераций

1.4. АЛГОРИТМ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФАЗЫ КИНОФОРМОВ

Рассмотренные в предыдущих разделах итеративные алгоритмы для расчета киноформов позволяют вычислять массивы отсчетов фазы киноформов на персональном компьютере. Однако за приемлемое время можно рассчитать киноформ размерностью 512×512 отсчетов. Чтобы рассчитывать требуемые массивы отсчетов фазы размерностью $10^4 \times 10^4$, потребуется десятки часов машинного времени. Поэтому имеет смысл разрабатывать алгоритмы, которые бы позволяли по малому базовому массиву отсчетов фазы киноформа строить большие массивы без существенного искажения формируемых изображений.

В этом разделе, рассматриваются в одном формализме алгоритмы экстраполяции и интерполяции отсчетов фаз киноформов, которые позволяют из двух массивов размерностью $N \times N$, предварительно рассчитанных с помощью итеративных процедур, сформировать массив фаз киноформа размерностью $N^2 \times N^2$.

1.4.1. Алгоритм экстраполяции отсчетов фазы

В работе [1] был предложен простой метод получения массива фаз киноформа любой размерности. Для этого требуется исходный базовый массив отсчетов фазы φ_{nm} , $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$ повторить нужное число раз. Такой киноформ будет иметь вид двумерного

растра или двумерной дифракционной решетки, периодом которой является базовая функция φ_{nm} .

Однако этот метод имеет существенный недостаток. Изображение, сформированное таким растровым киноформом, деградирует (распадается) на отдельные изолированные светлые пятна, размер которых обратно пропорционален числу повторений базового массива фазы. Ниже, на основе идеи [16], рассматривается метод экстраполяции отсчетов фазы базового массива, свободный от этого недостатка.

Рассмотрим для простоты одномерный вариант. Пусть требуется вычислить отсчеты фазы φ_n , $n = \overline{1, N}$ киноформа, который формирует заданное распределение интенсивности с отсчетами I_k в плоскости пространственного спектра (в фокальной плоскости линзы). Известно [17], что отсчеты светового поля F_k в плоскости пространственного спектра связаны с пропусканием киноформа $\exp[i\varphi_n]$ дискретным преобразованием Фурье

$$F_k = \sum_{n=1}^N \exp(i\varphi_n) \exp[-2\pi i kn / N], k = \overline{1, N}. \quad (39)$$

Чтобы найти φ_n , требуется решить методом последовательных приближений нелинейную систему алгебраических уравнений:

$$I_k = |F_k|^2 = \left| \sum_{n=1}^N \exp(i\varphi_n) \exp[-2\pi i kn / N] \right|^2, k = \overline{1, N}. \quad (40)$$

Предположим, что система (40) решена и найдены отсчеты базового массива фазы киноформа φ_n , $n = \overline{1, N}$. Далее рассматривается процедура построения отсчетов фазы большого массива ψ_m , $m = \overline{1, MN}$, который также формирует в дальней зоне дифракции отсчеты интенсивности I_k . Будем строить большой массив фазы ψ_m с помощью мультипликации базового массива φ_n с добавлением дополнительных фазовых сдвигов v_m , $m = \overline{1, M}$:

$$\psi_m = \begin{cases} \varphi_n + v_1, & m = \overline{1, N}; n = \overline{1, N}; \\ \varphi_n + v_2, & m = \overline{(N+1), 2N}; n = \overline{1, N}; \\ \dots & \dots \\ \varphi_n + v_M, & m = \overline{(MN - N + 1), MN}; n = \overline{1, N} \end{cases} \quad (41)$$

В этом случае оптический элемент с фазой ψ_m , $m = \overline{1, MN}$ будет формировать в плоскости пространственного спектра следующие отсчеты комплексной амплитуды:

$$\begin{aligned} R_k &= \sum_{m=1}^{MN} \exp(i\psi_m) \exp(-2\pi i k m / MN) = \\ &= \exp(2\pi i k / M) \left[\sum_{n=1}^N \exp(i\varphi_n) \exp(-2\pi i k n / MN) \right] * \\ &* \left[\sum_{m=1}^M \exp(i v_m) \exp(-2\pi i k m / M) \right] = \\ &= \exp(2\pi i k / M) P_k Q_k. \end{aligned} \quad (42)$$

Отсчеты функции P_k будут совпадать с отсчетами заданной функции F_n из уравнения (39) в точках $k = M(n-1) + 1$, $n = \overline{1, N}$

$$F_n = P_{M(n-1)+1} \quad (43)$$

Если выбрать дополнительные фазы v_m равными нулю, то получим

$$Q_k = \begin{cases} 1, & k = M(n-1) + 1, n = \overline{1, N}; \\ 0, & k \neq M(n-1) + 1, n = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (44)$$

Когда $v_k = 0$, то киноформ получается просто повторением базовой фазы φ_n и имеет вид раstra, как это предлагается в [1]. В результате этого восстановленное изображение в плоскости спектра будет состоять из набора изолированных световых пятен:

$$R_k = \begin{cases} F_k, & k = M(n-1) + 1, n = \overline{1, N}; \\ 0, & k \neq M(n-1) + 1, n = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (45)$$

Для того чтобы не происходило расщепление изображения на изолированные точки, нужно, чтобы модуль функции Q_k был равен 1 при $k = 1, M$. Предлагается итеративно решать следующую систему алгебраических уравнений:

$$1 = \left| \sum_{k=1}^M \exp(i v_k) \exp(-2\pi i k l / M) \right|^2, \quad l = \overline{1, M}. \quad (46)$$

Тогда из (42) следует, что отсчеты интенсивности изображения $|R_k|^2$ будут равны отсчетам требуемой интенсивности I_k при всех $k = 1, MN$. Время, требуемое для расчета большого массива фазы ψ_m , сократится при этом в несколько раз. Действительно, вместо расчета итерациями массива размерностью $MN \times MN$, мы решаем две системы уравнений с размерностями $N \times N$ и $M \times M$. При $M = N$ получается, что вместо затрат времени, пропорциональных M^2 , получаются затраты, пропорциональные $2M$, то есть выигрыш во времени $M/2$ раз. Заметим, что в (46) можно вместо единицы выбирать функции, согласованные с изменением рассчитанной интенсивности, что будет способствовать уменьшению искажений при мультипликации базового массива.

Проиллюстрируем рассмотренный метод численным примером. Предварительно насчитывался базовый массив отсчетов фазы размерностью 32×32 для киноформа, восстанавливающего световой квадрат с постоянной интенсивностью в плоскости пространственного спектра и размерностью 16×16 отсчетов. За 100 итераций ГС-алгоритмом с адаптивной коррекцией [10] была рассчитана фаза, показанная на рис. 8, а. На рис. 8, б показан результат восстановления квадрата таким киноформом. Эффективность восстановления, т. е. отношение энергии света, попавшей в заданную область спектра, к полной энергии, равна 70%, а относительное среднее квадратичное отклонение рассчитанной интенсивности в спектре от требуемой постоянной равно 9%.

На рис. 9, а показана фаза растрового киноформа размерностью 256×256 отсчетов, сформированная из отсчетов базовой фазы (рис. 8, а) путем простой мультипликации. На рис. 9, б показан результат восстановления. Видно, что изображение квадрата распалось в набор регулярных световых пятен.

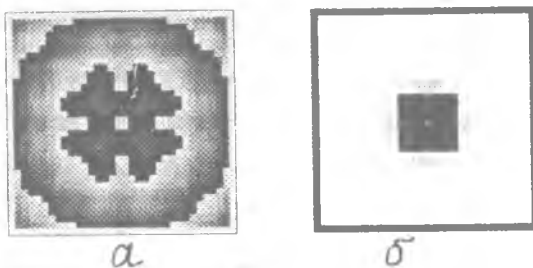


Рис. 8. Расчет базового киноформа

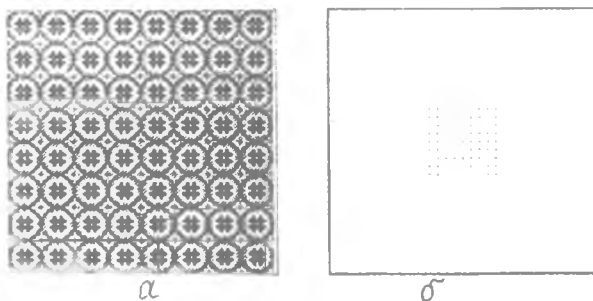


Рис. 9. Экстраполяция фазы без сдвигов

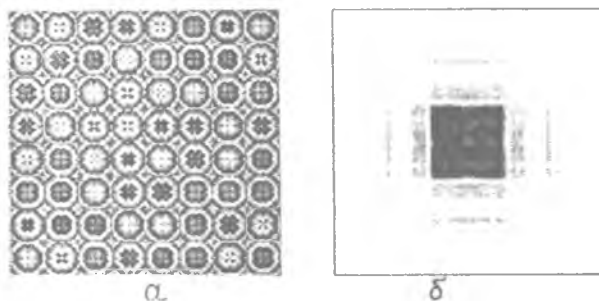


Рис. 10. Экстраполяция фазы со сдвигами

На рис. 10, а показана фаза растрового киноформа размерностью 256×256 отсчетов, сформированная путем мультипликации базовой фазы (рис. 8, а) с дополнительными фазовыми сдвигами, которые рассчитывались при итеративном решении системы (46) размерностью 8×8 . На рис. 10, б показан результат восстановления квадрата таким киноформом. Эффективность восстановления

изменилась незначительно — 68%, а среднеквадратичная ошибка увеличилась — 16%. Такое увеличение ошибки связано с тем, что увеличился размер квадрата в 8 раз, т. е. появилось больше точек на квадрате, по которым насчитывается эта ошибка. Увеличение размеров восстановленного изображения есть один из недостатков метода экстраполяции. Поэтому далее рассматривается метод интерполяции, который не приводит к увеличению изображения.

1.4.2. Алгоритм интерполяции отсчетов фазы

Известны оптические элементы — фокусаторы [18], которые так же, как и киноформы являются только фазовыми элементами, но которые в комбинации со сферической линзой фокусируют лазерное излучение в малые области пространственного спектра порядка нескольких диаметров диска Эйри. Для расчета таких фокусаторов метод экстраполяции непригоден, так как он приводит к увеличению размеров формируемой дифракционной картины (изображения), что снижает плотность световой энергии.

Ниже рассматривается алгоритм интерполяции отсчетов фазы киноформа, который приводит к увеличению размеров массива отсчетов фазы, но не приводит к увеличению размера изображения.

Пусть уже рассчитан базовый массив фазы φ_n , $n = \overline{1, N}$, которая удовлетворяет системе алгебраических уравнений (40). Сформируем большой массив отсчетов фазы ψ_m , $m = \overline{1, MN}$ с помощью дополнительных фазовых сдвигов v_k , $k = \overline{1, M}$ по правилу:

$$\psi_m = \begin{cases} \varphi_1 + v_k, & m = \overline{1, M}; k = \overline{1, M}; \\ \varphi_2 + v_k, & m = \overline{(M+1), 2M}; k = \overline{1, M}; \\ \vdots \\ \varphi_{l-1} + v_k, & m = \overline{(lM+1), (l+1)M}; k = \overline{1, M}; \\ \vdots \\ \varphi_N + v_k, & m = \overline{(MN-N+1), NM}; k = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (47)$$

Согласно (47) большой массив фазы ψ_m получается как результат повторения M раз каждого отсчета базового массива φ_n , но с

добавлением дополнительных отсчетов v_k . Поэтому размерность большого массива будет в M^2 раз большей, чем базового.

Киноформ с такой фазой ψ_m сформирует в фокальной плоскости линзы следующие отсчеты интенсивности, которые можно записать через дискретное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
 R_k &= \sum_{m=1}^{MN} \exp(i\psi_m) \exp\left(-\frac{i2\pi}{MN} km\right) = \\
 &= \exp\left(\frac{i2\pi k}{N}\right) \left[\sum_{n=1}^N \exp(i\varphi_n) \exp\left(-\frac{i2\pi}{N} kn\right) \right] \times \\
 &\times \left[\sum_{l=1}^M \exp(i v_l) \exp\left(-\frac{i2\pi}{NM} kl\right) \right] = \\
 &= \bar{P}_k \bar{Q}_k \exp\left(\frac{i2\pi k}{N}\right), \tag{48}
 \end{aligned}$$

Отсчеты функции \bar{P}_k совпадают с отсчетами заданной функции F_k из уравнения (39), но не только для $k = \overline{1, N}$, но и для $k = \overline{(N+1), 2N}$, $k = \overline{(2N+1), 3N}$ и т. д. То есть киноформ с фазой, определенной уравнением (47), сформирует требуемое изображение в M дифракционных порядках, амплитуды которых будут изменяться от порядка k порядку в соответствии со вторым множителем \bar{Q}_k из уравнения (48). Однако распределение световой энергии по порядкам дифракции можно регулировать с помощью подходящего выбора дополнительных фазовых сдвигов v_n . Например, если требуется сосредоточить всю световую энергию в нулевом порядке дифракции, где формируется требуемое изображение F_k , то можно выбрать все дополнительные фазы нулевыми: $v_k = 0$, $k = \overline{1, M}$. В этом случае второй сомножитель в (48) примет вид

$$\bar{Q}_k = \sin c \frac{\pi k}{N}, \quad k = \overline{1, MN}. \tag{49}$$

Такой вид будет при этом иметь функция распределения энергии света по порядкам дифракции. Максимум этой функции будет совпадать с нулевым порядком. Однако недостатком функции (49) является искажение отсчетов требуемой интенсивности I_k , $k = 1, N$ при k вблизи от N в самом нулевом порядке. Идеальной функцией, которая обнуляет интенсивность света во всех порядках кроме нулевого и равна постоянному значению в нулевом порядке, будет функция гест:

$$\bar{Q}_k = \text{rect}(k / N) = \begin{cases} 1, & k < N; \\ 0, & k > N. \end{cases} \quad (50)$$

При этом дополнительные отсчеты v_k следует искать как решение системы алгебраических уравнений, аналогичной системе (40):

$$\text{rect}(k/N) = \left| \sum_{l=1}^M \exp(i v_l) \exp\left(-\frac{2\pi}{MN} kl\right) \right|^2, \quad k = 1, MN \quad (51)$$

Решение уравнения (51) можно искать методом итераций, как в [3, 11].

Итак, мы показали, что для генерации интерполированного массива фазы киноформа размерностью $MN \times MN$ по формуле (47) следует методом итераций решить уравнение (40) и найти базовый массив фазы размерностью $N \times N$, а также решить уравнение (51) и найти массив дополнительных фазовых сдвигов размерностью $M \times M$.

Если требуется сформировать изображение, локализованное в области низких пространственных частот фокальной плоскости линзы (такие изображения формируют фокусаторы), то можно

воспользоваться выбором дополнительных отсчетов с нулевыми значениями, т. е. сформировать фазу голограммы в виде растра.

Проиллюстрируем работу алгоритма интерполяции на конкретных примерах. На рис. 11, а показана базовая фаза (в полутонах и по модулю 2π) кино-

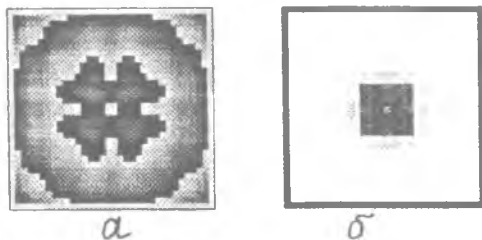


Рис. 11. Расчет базового массива

форма (32x32 отсчета), которая была рассчитана итеративным методом [11] за 30 итераций. Киноформ с такой фазой должен формировать в фокальной плоскости линзы световой квадрат с постоянной интенсивностью и размером 9x9 пикселей. На рис. 11, б показан сформированный базовой голограммой квадрат. Среднее квадратичное отклонение интенсивности сформированного квадрата (рис. 11, б) от заданного постоянного значения составило 10%, а энергетическая эффективность киноформа, то есть часть энергии света, идущей на формирование изображения, составила 89%.

На рис. 12, а показана интерполированная фаза голограммы (256x256 отсчетов), которая получается из базовой фазы (рис. 11, а) путем восьмикратного повторения в вертикальном и горизонтальном направлениях каждого отсчета базовой фазы. Это соответствует алгоритму интерполяции с помощью дополнительных фазовых сдвигов, когда эти сдвиги выбираются равными нулю (см. формулы (47), (49)). На рис. 12, б показан световой квадрат (9x9 пикселей), который сформирован киноформом с такой фазой (рис. 12, а). В этом случае средняя ошибка несколько увеличилась (13%), а эффективность уменьшилась (85%). Однако эти изменения несут незначительные изменения в практическом смысле.

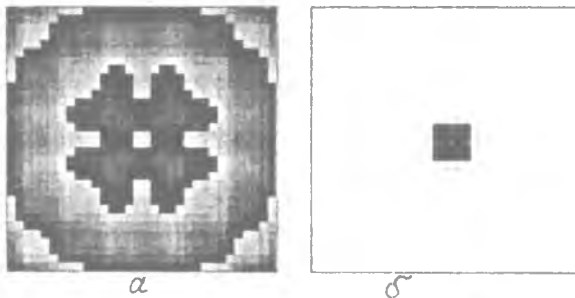


Рис. 12. Интерполяция фазы без сдвигов

На рис. 13, а показана интерполированная фаза голограммы (256x256 отсчетов), которая также получена из базовой фазы (рис. 11, а) путем восьмикратного повторения каждого отсчета, но с дополнительными фазовыми сдвигами, которые уже не были равны нулю, а находились с помощью итеративного решения системы (51). На рис. 13, б показан сформированный голограммой с такой фазой световой квадрат. При этом средняя ошибка

отклонения интенсивности квадрата от постоянного значения составила 11%, а дифракционная эффективность снизилась до 79%.

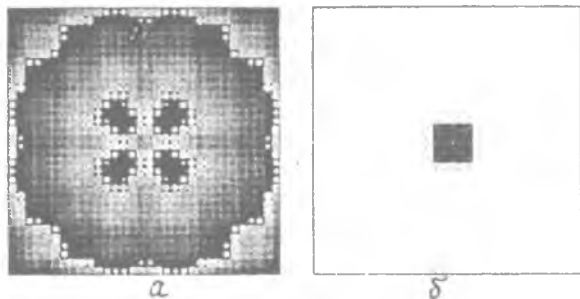


Рис. 13. Интерполяция фазы со сдвигами

Таким образом, из приведенных расчетных примеров видно, что предложенный алгоритм интерполяции отсчетов голограммы работоспособен: при увеличении числа отсчетов в 64 раза (от 32×32 до 256×256) восстановленное изображение отклонилось от заданного почти на такую же величину, как и в случае базовой киноформа, то есть при интерполяции предложенным способом не происходит существенного искажения формируемого изображения.

2. ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КИНОФОРМОВ, ФОРМИРУЮЩИХ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Для расчета оптических элементов, формирующих в некоторой плоскости пространства распределения интенсивности с круговой симметрией, целесообразно использовать полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \rho \cos \theta, \\ \eta = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (52)$$

Тогда интегральное преобразование Френеля (1) в полярных координатах будет иметь вид

$$F(\rho, \theta) = kz^{-1} e^{ikz} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \varphi) \exp \left[\frac{ik}{2z} \{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)\} \right] r dr d\varphi \quad (53)$$

Чтобы модуль комплексной амплитуды $F(\rho, \theta)$ в плоскости наблюдения не зависел от азимутального угла θ , ограничим рассмотрение множеством функций $f(r, \varphi)$, имеющих вид

$$f(r, \varphi) = g(r) \exp(im\varphi), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (54)$$

При этом вместо (53) получим

$$F(\rho, \theta) = 2\pi i^m k z^{-1} e^{ikz} e^{im\theta} \int_0^{\infty} g(r) \exp \left[\frac{ik}{2z} (r^2 + \rho^2) \right] J_m(kr\rho/z) r dr. \quad (55)$$

Здесь

$$J_m(x) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(mt + x \cos t)] dt \quad (56)$$

является функцией Бесселя m -го порядка первого рода.

Из (55) следует, что для поиска фазы киноформа в рамках скалярной теории дифракции Френеля требуется решить следующее интегральное уравнение:

$$I_0(\rho) = |F(\rho, \theta)|^2 = \left| 2\pi k z^{-1} \int_0^R A_0(r) e^{i\psi(r)} \exp \left[\frac{ikr^2}{2z} \right] J_m(kr\rho/z) r dr \right|^2. \quad (57)$$

где $I_0(\rho)$ — радиальное распределение интенсивности для изображения, которое требуется сформировать на расстоянии z от плоскости киноформа, $A_0(r)$ — радиальное распределение амплитуды освещающего пучка, $\psi(r)$ — искомая фаза киноформа.

Ниже рассматриваются итеративные методы решения уравнения (57) для различных ситуаций: для формирования требуемого изображения в плоскости пространственного спектра и для формирования осевых световых пучков с требуемой интенсивностью вдоль оптической оси.

**2.1. РАСЧЕТ КИНОФОРМОВ, ФОРМИРУЮЩИХ
РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ КАРТИНЫ**

Из уравнения (57) следует, что для итеративного поиска фазы киноформа требуется вычисление прямого и обратного преобразований Ханкеля:

$$H(\rho) = \int_0^{\infty} h(r) J_m(r\rho) r dr, \quad (58)$$

$$h(r) = \int_0^{\infty} H(\rho) J_m(r\rho) \rho d\rho. \quad (59)$$

Для быстрого вычисления преобразования Ханкеля (58), (59) можно воспользоваться методом экспоненциальной замены переменных [19]. Идея метода заключается в том, чтобы с помощью экспоненциальной замены переменных свести преобразование Ханкеля к интегралу типа свертки, который может быть вычислен с помощью преобразования Фурье.

Действительно, после замены переменных

$$r = r_0 \exp(x), \quad \rho = \rho_0 \exp(y), \quad (60)$$

где r_0 и ρ_0 — постоянные, вместо (58) получим выражение

$$\bar{H}(y) = r_0^2 \int_x^{\infty} \bar{h}(x) S(x+y) e^{2x} dx, \quad (61)$$

где

$$\bar{h}(x) = h(r_0 e^x),$$

$$S(x+y) = J_m(r_0 \rho_0 e^{x+y}),$$

$$\bar{H}(y) = H(\rho_0 e^y).$$

Чтобы функция $S(x)$ стремилась к нулю при $x \Rightarrow \pm\infty$, ее можно домножить на $\exp(x/4)$, а чтобы при этом не изменилось подынтегральное выражение в (61), следует также умножить функцию $\bar{h}(x)$ на $\exp(-x/4)$. Так как функция пропускания киноформа $h(r)$ ограничена апертурой $r \in [0, R]$, R — радиус апертуры,

то для функции $\bar{h}(x)$ не возникает проблем при $x \Rightarrow \pm\infty$. Итак, после переобозначений получим

$$h_1(x) = \bar{h}(x)r_0^2 e^{7x/4}, \quad S_1(x+y) = S(x+y)\exp\left(\frac{x+y}{4}\right),$$

$$H_1(y) = \bar{H}(y)e^{y/4}$$

и вместо выражения (61) получим интеграл типа свертки

$$H_1(y) = \int_{-\infty}^a h_1(x)S_1(x+y)dx, \quad a = \ln(R/r_0). \quad (62)$$

Интеграл (62) представим через преобразования Фурье в виде

$$H(\rho) = \left[\frac{\rho}{\rho_0}\right]^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} P(-w)U(w)\exp[iw \ln(\rho/\rho_0)]dw, \quad (63)$$

где $P(w)$ — Фурье-образ функции $h_1(x)$, $U(w)$ — Фурье-образ функции $S_1(y)$.

Аналогичным образом можно представить обратное преобразование Ханкеля (59). Известны и другие методы быстрого вычисления преобразования Ханкеля [20, 21].

Возвращаясь к задаче решения уравнения (57), мы объединим оба показателя экспонент в одну функцию, которую и будем искать:

$$\bar{\psi}(r) = \psi(r) + \frac{k}{2z} r^2. \quad (64)$$

Решение уравнения (57) итерациями аналогично алгоритму Герчберга—Секстона и основано на последовательном применении пары прямого и обратного преобразований Ханкеля с выполнением ограничивающих замен как в плоскости оптического элемента, так и в плоскости наблюдения. На n -м шаге итеративного процесса функция $g_n(r)$, рассчитанная в плоскости киноформа, заменяется на функцию $\bar{g}_n(r)$ по правилу

$$\bar{g}_n(r) = \begin{cases} A_0(r)g_n(r)|g_n(r)|^{-1}, & r \in [0, R]; \\ 0, & r \notin [0, R], \end{cases} \quad (65)$$

а рассчитанная функция комплексной амплитуды $F_n(\rho)$ в плоскости наблюдения заменяется на функцию $\bar{F}_n(\rho)$ по формуле

$$\bar{F}_n(\rho) = \sqrt{I_0(\rho)} F_n(\rho) |F_n(\rho)|^{-1}. \quad (66)$$

Замены (65) и (66) отличаются от соответствующих замен для двумерного ГС-алгоритма (5) и (7) несущественно. Чтобы увеличить скорость сходимости алгоритма, также можно вместо замены (66) использовать замены (13) или (37) с соответствующим переходом от двумерного случая к радиальному одномерному варианту.

Алгоритм (65), (66) позволяет рассчитывать киноформы, формирующие в фокальной плоскости линзы или в дальней зоне дифракции изображения типа круга, кольца или набора колец [22, 23].

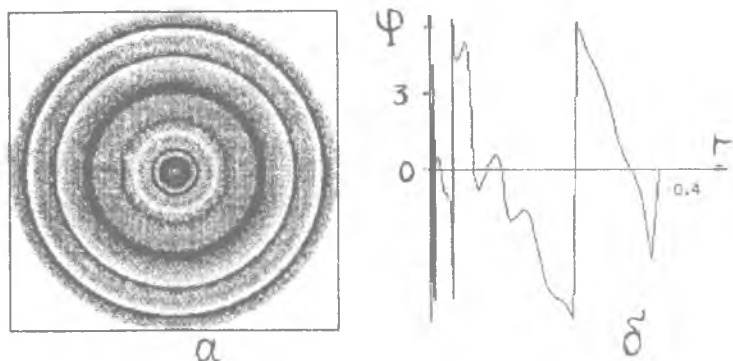


Рис. 14. Фаза фокусатора в круг

На рис. 14, а показана рассчитанная за 22 итерации фаза киноформа, который при освещении его лазерным пучком света с гауссовым распределением интенсивности должен формировать в фокусе линзы круг с постоянной интенсивностью. Интенсивность гауссового пучка на краях апертуры киноформа составляла 0,1 часть от максимального ее значения в центре пучка. Радиус киноформа $R = 0,4$ мм, число отсчетов на радиусе киноформа —

256, $k/f = 100 \text{ мм}^{-2}$. f — фокусное расстояние линзы (в соотношениях (57) и (64) вместо z следует подставить f), радиус круга в плоскости изображения равен 0,3 мм и составляет около трех радиусов минимального дифракционного пятна (диска Эйри). На рис. 14, б показано радиальное сечение фазы киноформа. На рис. 15 показана дифракционная картина, сформированная в фокальной плоскости киноформом с такой фазой (а) и ее радиальное сечение (б). При этом среднее квадратичное отклонение сформированной интенсивности в области задания круга от постоянного значения равно 6%. А эффективность фокусировки лазерного излучения в круг заданного радиуса составила 91%. В данном случае расчет производился с помощью преобразования Ханкеля (при $m = 0$ — преобразование Фурье-Бесселя).

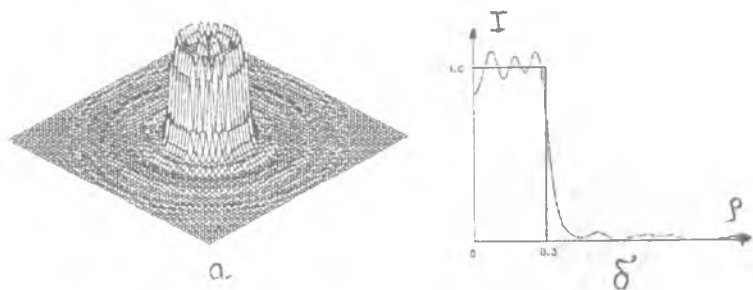


Рис. 15. Сформированное изображение

Если же требуется рассчитать киноформ с радиальной фазой, формирующий кольцевое распределение интенсивности, и если такой расчет проводить с помощью преобразования Ханкеля нулевого порядка, то в центре кольца почти всегда будет иметь место пик интенсивности. Это иллюстрируется следующим примером. На рис. 16 показана радиальная фаза киноформа, рассчитанная при $m = 0$ за 50 итераций (а) и дифракционная картина, формирующаяся в фокальной плоскости (б). Видно, что в центре кольца интенсивность имеет локальный максимум.

Если же проводить расчет с помощью преобразования Ханкеля, например, пятого порядка ($m = 5$) и воспользоваться для фазы такого киноформа представлением в виде (54), то получим результат, представленный на рис. 17: фаза киноформа (а) (уже не

радиальная) и дифракционная картина (б), на которой интенсивность в центральной части близка к нулю. Внешний и внутренний радиусы кольца на рис. 16 и 17 равны соответственно 0,5 мм и 0,8 мм, а остальные параметры моделирования такие же, как и в предыдущем случае. Эффективность фокусировки в кольцо составила: 82% (рис. 16, б) и 86% (рис. 17, б), а среднее квадратичное отклонение соответственно — 4% и 6%.

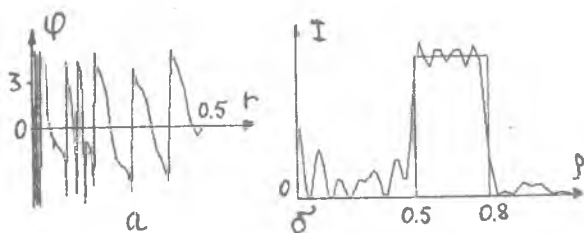


Рис. 16. Радиальный киноформ в кольцо

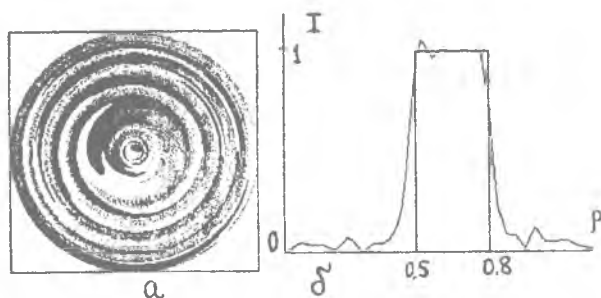


Рис. 17. Нерадиальный киноформ в кольцо

Заметим, что азимутальный множитель в (54), имеющий вид $\exp(im\varphi)$, представляет немалый интерес сам по себе как фазовый оптический элемент, с помощью которого можно выполнять различные оптические преобразования: преобразование Ханкеля m -го порядка [24]; формирование бесселевых пучков высших порядков [25]; оптическое дифференцирование радиально-симметричных световых пучков [26], а также радиальный аналог преобразования Гильберта [27].

2.2. РАСЧЕТ КИНОФОРМОВ-АКСИКОНОВ

Фазовые оптические элементы, совместно со сферической линзой формирующие световые поля с увеличенной глубиной фокуса, называются фокусаторами в продольной отрезок [28]. Такие оптические элементы можно рассматривать как обобщенные аксиконы [29]. Они имеют широкое практическое применение: для исследования лазерного пробоя газовых сред [30], для записи и считывания данных с оптических дисков [31], для тестирования поверхности [32] и т. д.

Ниже рассматриваются итеративные алгоритмы, позволяющие рассчитывать киноформы (обобщенные аксиконы), которые формируют световые пучки с заданным распределением интенсивности вдоль своей центральной оси.

Пусть требуется рассчитать радиальную фазовую функцию $\varphi(r)$ оптического элемента, который формирует световой отрезок вдоль оптической оси, ограниченный точками z_1 и z_2 , и с заданным распределением интенсивности вдоль оси $I_0(z)$, $z \in [z_1, z_2]$. Тогда выражение (55) при $m = 0$ запишется в виде

$$F(\rho, z) = kz^{-1} e^{ikz} \exp \left[i \frac{k \rho^2}{2z} \right] \int_0^R \exp \left[i \varphi(r) + i \frac{kr^2}{2z} \right] J_0(kr \rho / z) r dr, \quad (67)$$

где R — радиус оптического элемента, $\varphi(r)$ — искомая фаза киноформа, $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. В (67) предполагается, что оптический элемент освещается плоской волной света.

Так как задана интенсивность вдоль оси z , то положим в (67) $\rho = 0$, тогда получим

$$F(0, z) = kz^{-1} \int_0^R \exp \left[i \varphi(r) + i \frac{kr^2}{2z} \right] r dr. \quad (68)$$

После переобозначения

$$\xi = \frac{k}{z}, \quad x = \frac{r^2}{2} \quad (69)$$

вместо (68) получим выражение

$$\xi^{-1} F(\xi) = \int_0^a \exp[i\varphi(x) + ix\xi] dx, \quad a = R^2/2. \quad (70)$$

Как видно из (70), искомая функция пропускания киноформа—аксикона $\exp[i\varphi(r)]$ связана с комплексной амплитудой света вдоль оптической оси $F(\xi)$ одномерным преобразованием Фурье.

Таким образом, задача свелась к решению одномерного интегрального уравнения

$$\xi^{-2} I_0(\xi) = \left| \int_0^a \exp[i\varphi(x) + ix\xi] dx \right|^2, \quad (71)$$

для решения которого прямо применимы все алгоритмы, рассмотренные в первом разделе.

Если требуется рассчитать аксикон как дополнение к сферической линзе, то фазу в (68) следует представить в виде

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) - \frac{kr^2}{2f}, \quad (72)$$

где f — фокусное расстояние сферической линзы.

Тогда вместо выражения (68) можно записать следующее выражение:

$$F(0, z) = kz^{-1} e^{ikz} \int_0^R \exp \left[i\varphi_0(r) + i \frac{kr^2}{2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) \right] r dr. \quad (73)$$

Уравнение (73) относительно $\varphi_0(r)$ будет тождественно уравнению (70), если сделать замену переменных

$$\xi = k \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right), \quad x = \frac{r^2}{2}.$$

Для формирования коротких световых отрезков, при выполнении условия $2d = z_2 - z_1 \ll f$, $2d$ — глубина резкости линзы или длина заданного светового отрезка, можно вместо (73) использовать более простое уравнение

$$F(\Delta z) = kf^{-1} \int_0^R \exp \left[i \varphi_0(r) + i \frac{k \Delta z}{2f^2} r^2 \right] r dr, \quad (74)$$

где $\Delta z \in [-d, d]$, $f = (z_1 + z_2) / 2$. После замены переменных

$$\xi = \frac{k \Delta z}{f^2}, \quad x = \frac{r^2}{2}$$

окончательно получим уравнение для поиска фазы киноформа:

$$I_0(\xi) = \left| kf^{-1} \int_0^d \exp [i \varphi_0(x) + i x \xi] dx \right|^2. \quad (75)$$

Уравнение (75) может быть решено с помощью итераций [33, 34]. Причем степень близости оценочной функции интенсивности

$I_n(\xi) = |F_n(\xi)|^2$ к требуемой $I_0(\xi)$ определяется с помощью средней квадратичной ошибки

$$\delta = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} |I_n(\xi) - I_0(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} I_0^2(\xi) d\xi \right]^{-1/2}, \quad (76)$$

Эффективность формирования светового отрезка вдоль оси можно характеризовать следующей функцией:

$$\varepsilon_k = \left[\int_0^{\rho_0} I(\rho, z_k) \rho d\rho \right] \left[\int_0^{\infty} I(\rho, z_k) \rho d\rho \right]^{-1}, \quad (77)$$

где $I(\rho, z_k)$ — интенсивность, рассчитанная в плоскости, отстоящей на расстояние z_k от киноформа, ρ_0 — радиус первого локального минимума интенсивности $I(\rho, z_k)$. Функция ε_k показывает часть световой энергии света, которая идет на формирование минимального дифракционного пятна в данной плоскости наблюдения.

Заметим, что если требуемую интенсивность $I_0(z)$ задать в виде

$$I_0(z) = I_0 \sum_{n=1}^N \delta(z - z_n), \quad (78)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, то решение уравнения (75) будет являться фазой N -фокусной линзы, имеющей N продольных фокусов с равной интенсивностью I_0 .

На рис. 18, а показана рассчитанная за 100 итераций с помощью решения уравнения (75) ГС-алгоритмом фаза киноформа, формирующего световой пучок с осевым распределением интенсивности в виде прямоугольного импульса (рис. 18, б). На рис. 18, в показана эта же фаза в виде амплитудной маски.

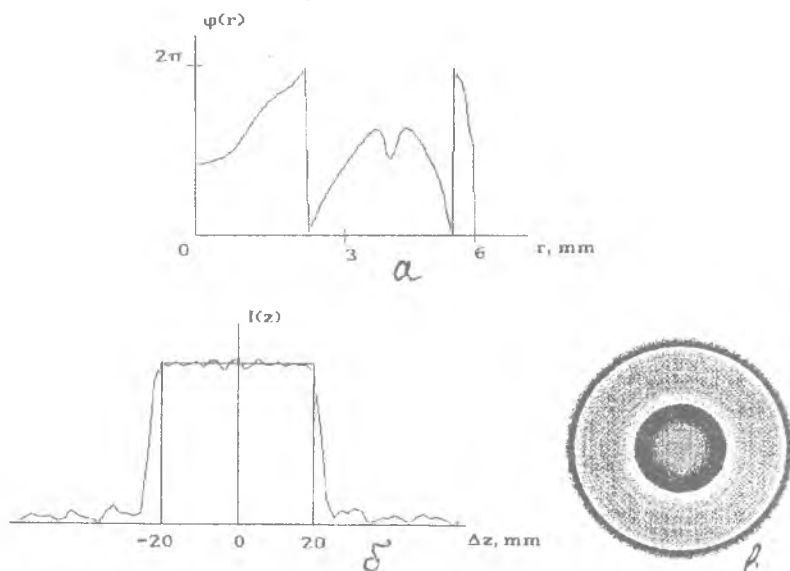


Рис. 18. Фокусатор-киноформ в осевой отрезок

Параметры расчета: $N = 256$ — общее число отсчетов, $R = 6$ мм — радиус киноформа, $f = 400$ мм — фокусное расстояние линзы, в окрестности фокальной плоскости которой формируется световой отрезок длиной $2a = 40$ мм. Длина волны света равна $0,63$ мкм. Освещающий световой пучок предполагается плоским. Ошибка δ в данном случае (рис. 18, б) равна 2%. Эффективность фокусировки ϵ_k изменяется вдоль отрезка сложным образом (рис. 19) и лежит в диапазоне от 15% до 85%. На рис. 20 показан трехмерный график распределения интенсивности $I(\rho, z)$, которую формирует кино-

форм с фазой (рис. 18, в). Длина отрезка составляет около четырех длин Френеля.

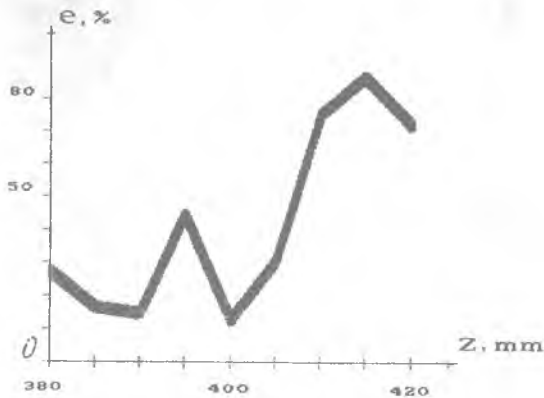


Рис. 19. Распределение эффективности вдоль оси

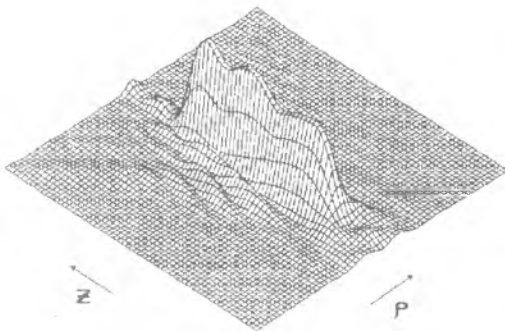


Рис. 20. Распределение интенсивности вдоль оси

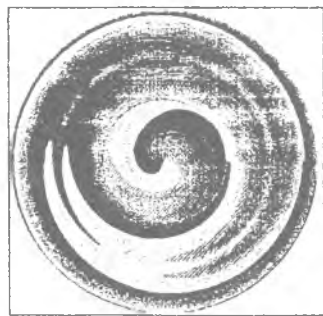


Рис. 21. Фаза киноформа световой трубки

С помощью фазового винтового фильтра (54) можно сформировать осевую световую "трубку", то есть световой пучок с нулевой интенсивностью на оптической оси. Для этого к фазе $\varphi_0(r)$, рассчитанной с помощью уравнения (75), нужно добавить винтовое слагаемое $m\theta$, θ — полярный угол. На рис. 21 показана такая фаза, полученная путем добавки к фазе на рис. 18, в винтового слагаемого с $m = 1$.

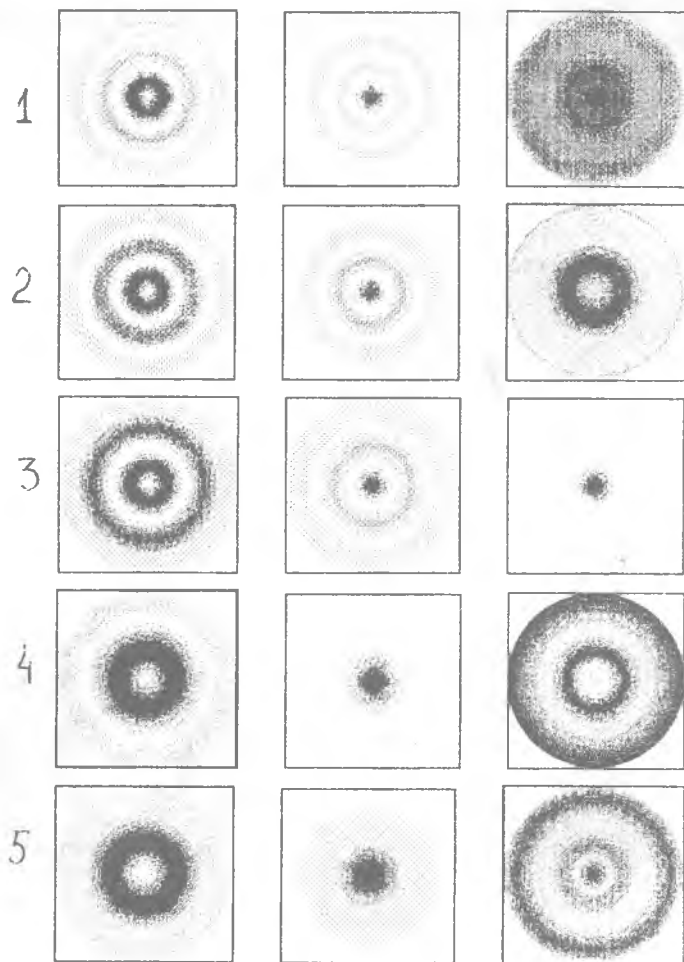


Рис. 22. Распределения интенсивности вдоль оси

На рис. 22 для сравнения показаны дифракционные картины на разных расстояниях, которые формируют линза без киноформа (правый столбец), линза с киноформом с фазой $\varphi_0(r)$ (рис. 18, в) (центральный столбец) и линза с киноформом с фазой $\varphi_0(r) + \theta$ (рис. 21) (левый столбец): $z = 380$ мм (1); $z = 390$ мм (2); $z = 400$ мм (3); $z = 410$ мм (4); $z = 420$ мм (5).

С помощью формул (75) и (78) может быть рассчитана фаза многофокусной линзы. На рис. 23, а показано радиальное распределение фазы киноформа, который формирует десять продольных фокусов с равной интенсивностью (рис. 23, б).

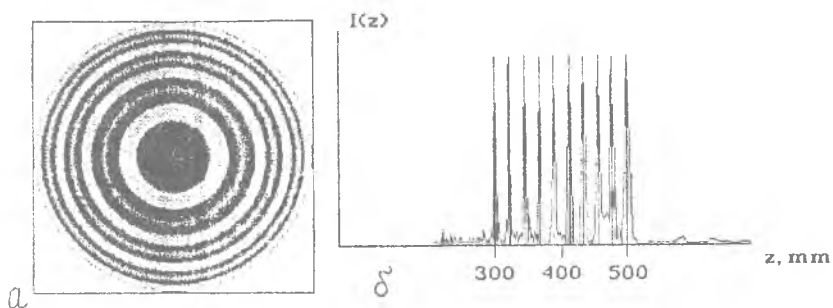


Рис. 23. Расчет многофокусной линзы

2.3. РАСЧЕТ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ КИНОФОРМОВ С КВАНТОВАННОЙ ФАЗОЙ

В этом разделе рассмотрим итеративный алгоритм, позволяющий рассчитывать радиально-симметричные киноформы с малым числом градаций фазы, что является существенным при их изготовлении по технологии фото- или электронной литографии.

Практически такие киноформы могут быть использованы для расширения минимального дифракционного пятна. Эта задача актуальна для устройств лазерной печати. Например, чтобы расширить в два раза дифракционное пятно (диск Эйри), можно в два раза увеличить фокусное расстояние линзы или в два раза уменьшить радиус апертуры диафрагмы линзы. Но первый способ приводит к изменению конструкции устройства, а второй — к падению энергетической эффективности в 4 раза. С помощью комбинации "киноформ плюс линза" можно решить эту задачу более эффективно.

Итак, пусть требуется рассчитать фазу киноформа $\varphi(r)$, зависящую только от радиальной переменной. И пусть этот киноформ формирует в фокальной плоскости линзы требуемое распределение интенсивности $I_0(\rho)$. Тогда вместо (57) можно записать уравнение для расчета фазы $\varphi(r)$

$$I_0(\rho) = \left| \int_0^R A_0(r) e^{i\varphi(r)} J_0(kr\rho/f) r dr \right|^2, \quad (79)$$

где $A_0(r)$ — амплитуда освещающего киноформ пучка, f — фокусное расстояние линзы.

Пусть далее выполняется условие, что $A_0(r) = 1$. Будем искать функцию $\varphi(r)$ в кусочно-постоянном виде (рис. 24). В этом случае комплексная амплитуда света в фокальной плоскости линзы $F(\rho)$ может быть представлена как сумма амплитуд, которые получаются при дифракции плоской волны на кольцевой апертуре

$$F(\rho) = 2\pi \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\varphi_{n+1}} \left[r_{n+1} \frac{J_1(k\rho r_{n+1}/f)}{\rho} - r_n \frac{J_1(k\rho r_n/f)}{\rho} \right], \quad (80)$$

где φ_{n+1} — значения фазы $\varphi(r)$ при $r \in [r_n, r_{n+1}]$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $r_0 = 0$, $r_N = R$, R — радиус киноформа, N — число точек разбиения на радиусе киноформа.

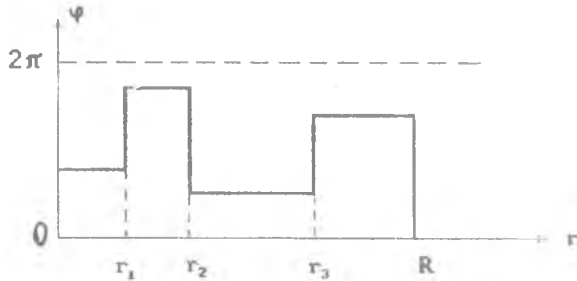


Рис. 24. Кусочно-постоянная фаза

После подходящей комбинации слагаемых в (80) получим

$$F(\rho) = \frac{2\pi}{\rho} \sum_{n=1}^N C_n J_1(\gamma_n \rho/a), \quad (81)$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} C_n = r_n [e^{i\varphi_n} - e^{i\varphi_{n+1}}]; \\ C_N = R \exp[i\varphi_N], \end{cases} \quad (82)$$

где γ_n — нули функции Бесселя первого порядка: $J_1(\gamma_n) = 0$.

Из сравнения (81) и (80) следует, что точки разбиения r_n должны удовлетворять условию

$$r_n = \frac{\gamma_n^f}{ka}, \quad a \geq R, \quad (83)$$

где a — постоянная, регулирующая масштаб разбиения киноформа на кольца.

Введя далее обозначение $\bar{F}(\rho) = (2\pi)^{-1} \rho F(\rho)$, получим вместо (81) выражение

$$\bar{F}(\rho) = \sum_{n=1}^N C_n J_1(\gamma_n \rho/a). \quad (84)$$

Используя свойство ортогональности функции Бесселя

$$\int_0^1 J_m(\gamma_p x) J_m(\gamma_q x) x dx = \begin{cases} [J'_m(\gamma_p)]^2 / 2, & p = q, \\ 0, & p \neq q, \end{cases} \quad (85)$$

где $J'_m(\gamma_p)$ — производная функции Бесселя в точке γ_p , коэффициенты суммы (84) найдем по формулам

$$C_n = 2 [J'_1(\gamma_n) a]^2 \int_0^a \bar{F}(\rho) J_1(\gamma_n \rho/a) \rho d\rho. \quad (86)$$

Соотношения (84) и (86) позволяют организовать следующую итеративную процедуру для решения уравнения (79).

1. Выбериается начальная оценка комплексной амплитуды $\bar{F}(\rho)$ в виде

$$\bar{F}(\rho) = \sqrt{I_1(\rho)} \exp[i \psi_0(\rho)], \quad (87)$$

где $I_1(\rho) = (2\pi)^2 \rho^2 I_0(\rho)$, $I_0(\rho)$ — требуемая функция интенсивности света в фокальной плоскости линзы, $\psi_0(\rho)$ — случайная оценка фазы.

2. На k -м шаге итераций функция $\bar{F}_k(\rho)$ представлена в виде суммы (84) с коэффициентами $\bar{C}_n^{(k)}$, которые найдены по формулам (86) и подвергнуты замене по правилу

$$\bar{C}_n^{(k)} = B_n \exp[i v_{nk}], \quad n = \overline{1, N}. \quad (88)$$

Из (88) находим

$$B_n = 2r_n \sin \left[\frac{\varphi_n - \varphi_{n+1}}{2} \right]. \quad (89)$$

$$\begin{cases} \varphi_n = \pi - \varphi_{n+1} - 2v_{nk}, & n = N-1, N-2, \dots, 1; \\ \varphi_N = v_{Nk}, \end{cases} \quad (90)$$

где также $v_{nk} = \arg C_n^{(k)}$.

Фазы φ_n ищутся по рекуррентным формулам (90), которые следуют из уравнения (82).

3. Далее формируется $(k+1)$ -я оценка амплитуды $\bar{F}_{k+1}(\rho)$

$$\bar{F}_{k+1} = \sum_{n=1}^N \bar{C}_n^{(k)} J_1(\gamma_n \rho/a). \quad (91)$$

4. Рассчитанная функция $\bar{F}_{k+1}(\rho)$ заменяется на функцию $\hat{F}_{k+1}(\rho)$ по правилу

$$\hat{F}_{k+1}(\rho) = \sqrt{I_1(\rho) \bar{F}_{k+1}(\rho) |\bar{F}_{k+1}(\rho)|^{-1}}. \quad (92)$$

5. Далее следует переход к выполнению п. 2 и т. д.

Данный алгоритм не сходится: ошибка δ с ростом числа итераций меняется квазипериодически. На практике за конечное число итераций (20-30) удастся получить практически интересные результаты.

Пусть требуется вычислить фазу киноформа, который бы увеличивал в два раза минимальное дифракционное пятно, которое формирует линза в фокальной плоскости. Параметры расчета следующие: $k/f = 100 \text{ мм}^{-2}$, $R = 0,5 \text{ мм}$, $N = 7$ — число разбиений радиуса киноформа. Дискретность отсчетов по радиальной переменной ρ равна 2 мкм, а общее число отсчетов — 256.

Для расчета коэффициентов по формуле (86) может быть использован алгоритм преобразования Ханкеля нулевого порядка (63).

Требуемая нормированная функция интенсивности выбирается в виде

$$I_0(\rho) = \left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2, \quad x = \frac{k\rho R}{2f}, \quad (93)$$

что соответствует дифракционной картине, формируемой линзой с радиусом апертуры — $R/2$.

Рис. 25 иллюстрирует результат расчета для линзы без киноформа: постоянная фаза (а); ее радиальное сечение (б); диск Эйри (в) и его радиальное сечение (г).

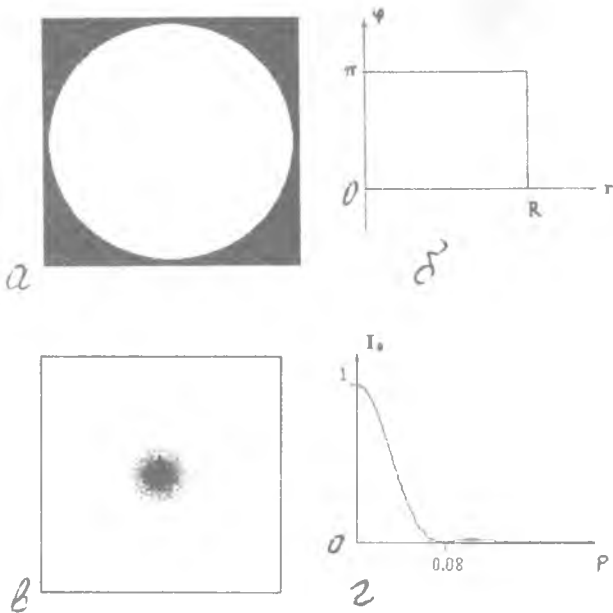


Рис. 25. Фокусировка линзой без киноформа

На рис. 26 показан результат, полученный за 20 итераций для киноформа с трехуровневой фазой ($N = 3$): фаза (а), ее радиальное сечение (б), картина дифракции в фокальной плоскости линзы (в) и распределение интенсивности в ее горизонтальном сечении (г).

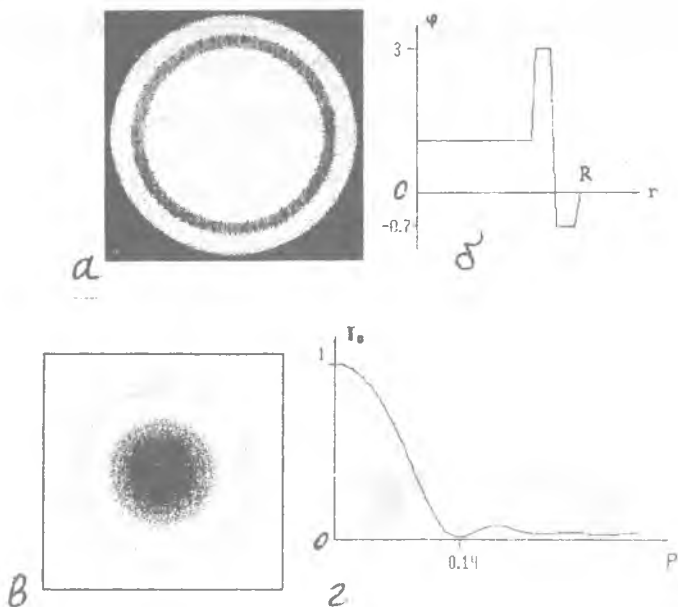


Рис. 26. Фокусировка линзой с киноформом

Заметим, что сформированная интенсивность (рис. 26, г) отличается в среднем от требуемой интенсивности (93) на 12%.

3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ФОРМИРОВАТЕЛЕЙ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

В задачах бесконтактного контроля формы асферических зеркал требуется синтезировать фазовые оптические элементы, формирующие в заданных областях пространства требуемые распределения фазы [35, 36]. Такие оптические элементы называются компенсаторами [35] и предназначаются для формирования эталонных волновых фронтов. Такой фронт при отражении от исследуемой поверхности трансформируется в плоский фронт (или сходящийся сферический), если поверхность идеальная. По отклонению отраженного волнового фронта от плоского, которое можно обнаружить с помощью изгибов полос на интерферограмме, судят о качестве изготовления поверхности.

Расчет таких оптических элементов методом лучевой оптики [35] не принимает во внимание дифракцию световой волны в свободном пространстве. Методы цифровой голографии [36] позволяют синтезировать голограмму, которая будет формировать требуемый волновой фронт в первом порядке дифракции, что снижает энергетическую эффективность оптического элемента.

Ниже рассматриваются итеративные методы, с помощью которых можно рассчитывать формирователи требуемых волновых фронтов, свободные от перечисленных выше недостатков.

3.1. РАСЧЕТ ФАЗОВЫХ ФОРМИРОВАТЕЛЕЙ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Пусть требуется рассчитать фазу оптического элемента $\varphi(x, y)$, который при освещении пучком света с амплитудой $A_0(x, y)$ формировал бы на расстоянии z световое поле с произвольно заданным распределением фазы $\psi_0(\xi, \eta)$. Такая задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения, которое, в отличие от уравнения (4), имеет вид [37]:

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \eta) = \\ = \arg \left\{ \int \int A_0(x, y) e^{i\varphi(x, y)} \exp \left[\frac{ik}{2z} \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right) \right] dx dy \right\}, \quad (94) \end{aligned}$$

где $\arg(a + ib) = \arctg(b/a)$.

Понятно, что итеративное решение уравнения (94) будет отличаться от стандартного ГС-алгоритма [3] несущественно: вместо замены рассчитанной амплитуды на требуемую следует заменять рассчитанную фазу на требуемую. Шаги этого алгоритма следующие.

1. Начальное приближение искомой фазы $\varphi(x, y)$ выбирается случайным.

2. От функции $A_0(x, y) \exp[i\varphi(x, y)]$ вычисляется преобразование Френеля (выражение в фигурных скобках в формуле (94)) с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

3. Полученная функция $F_n(\xi, \eta)$, n — номер итерации, заменяется на функцию $F'_n(\xi, \eta)$ по правилу

$$F'_n(\xi, \eta) = |F_n(\xi, \eta)| e^{i\psi_0(\xi, \eta)}. \quad (95)$$

4. От функции (95) вычисляется обратное преобразование Френеля, и полученная функция $f_n(x, y)$ в плоскости киноформа заменяется на функцию $f'_n(x, y)$ по обычному правилу (7):

$$f'_n(x, y) = \begin{cases} A_0(x, y) f_n(x, y) |f_n(x, y)|^{-1}, & (x, y) \in W; \\ 0, & (x, y) \notin W. \end{cases} \quad (96)$$

5. Переход к п. 2, и т. д.

Степень сходимости рассчитанной фазы $\psi_n(\xi, \eta) \in [0, 2\pi]$ к требуемой фазе $\psi_0(\xi, \eta) \in [0, 2\pi]$ контролируется по значению ошибки

$$\delta_\psi^2 = \left[\int \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0 - \psi|^2 d\xi d\eta \right] \left[\int \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^2 d\xi d\eta \right]^{-1}. \quad (97)$$

Поскольку доказательство сходимости данного алгоритма отличается от доказательства сходимости ГС-алгоритма [5] и получено только "в малом", то есть при условии близости двух последовательных амплитуд света в плоскости наблюдения, то оно приводится в прил. А. Из этого доказательства следует неравенство

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} |A_{n+1} - A_0|^2 dx dy \leq \int \int_{-\infty}^{\infty} |A_n - A_0|^2 dx dy, \quad (98)$$

где $A_{n+1}(x, y)$ и $A_n(x, y)$ — рассчитанные на $(n+1)$ -м и n -м шагах итераций амплитуды света в плоскости киноформа, $A_0(x, y)$ — заданная амплитуда света в плоскости киноформа.

Из (98) следует, что в ходе итераций среднее квадратичное отклонение рассчитанной амплитуды в плоскости киноформа от заданной уменьшается. Доказать аналогичное неравенство для фазы $\psi_n(\xi, \eta)$ не удастся, но в ходе всех численных расчетов ошибка (97) убывает.

Для демонстрации работы алгоритма (94)—(96) выбирались следующие расчетные параметры: число отсчетов в плоскостях киноформа и наблюдения — 128×128 ; радиус киноформа — $5,12$ мм; дискретность отсчетов в плоскостях — $0,04$ мм, $k = 10^4$ мм⁻¹, $z_0 = 325$ мм. Амплитуда освещающего киноформ пучка выбиралась гауссовой

$$A_0(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right]. \quad (99)$$

На рис. 27 показаны рассчитанная за 10 итераций фаза формирователя волнового фронта (а); ее сечение по оси X (б) и фаза, которая формируется на расстоянии z_0 от киноформа (в); ее сечение по координате ξ (г). Требуемая фаза задавалась по формуле

$$\psi_0(\xi, \eta) = -\alpha(\xi^4 + \eta^4), \quad (100)$$

где $\alpha = 0,8$ мм⁻⁴. Отклонение рассчитанной фазы $\psi_n(\xi, \eta)$ от требуемой (100), вычисленное по формуле (97), составило 6%.

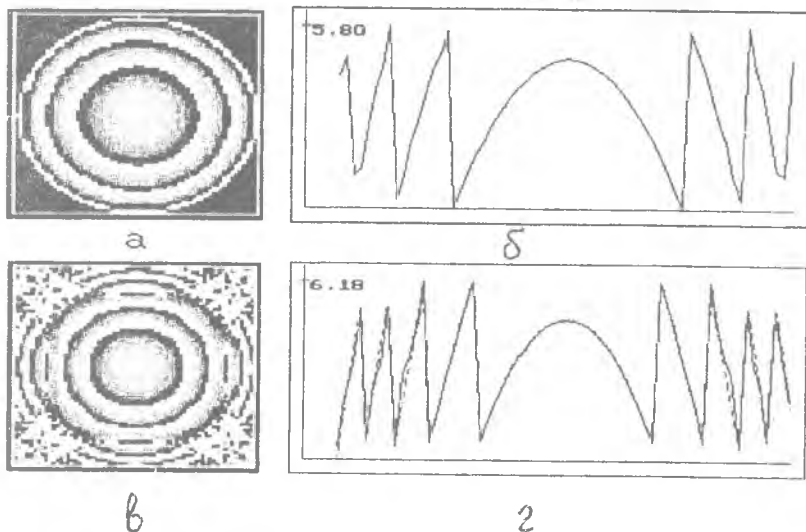


Рис. 27 Расчет фазового формирователя волнового фронта

Этим методом можно рассчитать киноформ, формирующий световое поле с разной кривизной по осям X и y . Например, на рис. 28 показаны: фаза киноформа (а); ее сечение по оси X (б) и фаза (в), сформированная на расстоянии z_0 ; ее сечение по оси ξ (г). Последняя фаза (рис. 28, в) отличается в среднем на 20% от требуемой

$$\psi_0(\xi, \eta) = -\beta(\xi^2 - \eta^4), \quad (101)$$

где $\beta = 0,46 \text{ мм}^{-4}$.

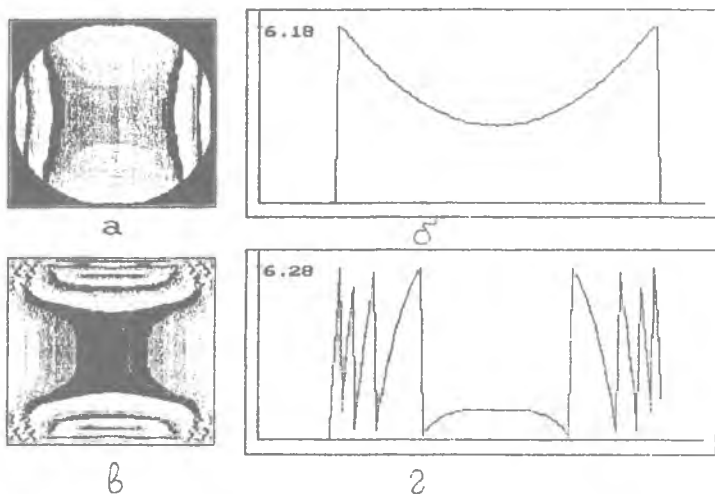


Рис. 28. Расчет фазового формирователя эталонного фронта

3.2. АМПЛИТУДНЫЕ ТРАНСПАРАНТЫ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

В этом разделе рассматривается задача о расчете амплитудного транспаранта (АТ), который при освещении плоской волной когерентного света формирует на некотором расстоянии вдоль оптической оси заданное распределение фазы. В частном случае такой АТ можно рассматривать как амплитудную линзу, которая формирует из падающего плоского фронта сходящийся волновой фронт, что обеспечивает концентрацию световой энергии на оптической оси на заданном расстоянии от АТ. Задача о фоку-

сировке лазерного излучения с помощью АТ была рассмотрена, например, в работе [38].

При расчете киноформа известными считаются амплитуды в плоскостях оптического элемента и наблюдения, а найти требуется фазу киноформа. Ниже рассматривается "обратная" задача: считаются известными фаза светового поля в плоскостях АТ и наблюдения, а найти требуется амплитудное пропускание АТ.

Формально такая задача эквивалентна решению интегрального уравнения вида

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \eta) = \\ = \arg \left\{ \int \int_{\sigma} A(x, y) e^{i\varphi_0(x, y)} \exp \left[\frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right] dx dy \right\}, \quad (102) \end{aligned}$$

где $\psi_0(\xi, \eta)$ и $\varphi_0(x, y)$ — заданные фазы в плоскости наблюдения, отстоящей на расстоянии z от АТ и в плоскости транспаранта соответственно, $A(x, y)$ — искомая функция амплитудного пропускания транспаранта.

Уравнение (102) отличается от уравнения (94) тем, что в подынтегральном выражении в уравнении (94) неизвестной считается фаза, а в уравнении (102) — амплитуда. Поэтому алгоритм решения уравнения (102) будет иметь те шаги, что и алгоритм решения уравнения (94), но вместо замены (96) следует использовать замену [39]:

$$f'_n(x, y) = \begin{cases} |f_n(x, y)| e^{i\varphi_0(x, y)}, & (x, y) \in W; \\ 0, & (x, y) \notin W. \end{cases} \quad (103)$$

где W — форма апертуры АТ.

Если транспарант освещается плоской волной, то $\varphi_0(x, y)$ будет постоянной величиной.

Для такого итеративного алгоритма решения уравнения (102) можно доказать сходимости в среднем. При этом для любого номера n, n — шаг итераций, имеет место неравенство

$$\int \int_{\gamma} |A_{n-1}(x, y) - A_n(x, y)|^2 dx dy \leq$$

$$\leq \int \int_{\gamma} |A_n(x, y) - A_{n-1}(x, y)|^2 dx dy. \quad (104)$$

Неравенство (104) показывает, что в ходе итераций среднее квадратичное отклонение между двумя последовательными амплитудами в плоскости АТ не будет возрастать.

Аналогично можно показать, что для амплитуд поля в плоскости наблюдения также имеет место неравенство

$$\int \int_{\gamma} |B_{n-1}(\xi, \eta) - B_n(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \int \int_{\gamma} |B_n(\xi, \eta) - B_{n-1}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta, \quad (105)$$

где B_{n-1} , B_n , B_{n-1} — амплитуды светового поля в плоскости наблюдения на соответствующих шагах итераций. Доказательство неравенства (105) приведено в прил. В.

Доказать уменьшение в ходе итераций средней ошибки отклонения фазы (97) не удастся, но на конкретных численных примерах показано, что в тех точках плоскости (ξ, η) , где амплитуда $B_n(\xi, \eta)$ близка к нулю, фаза $\psi_n(\xi, \eta)$ может существенно отличаться от заданной фазы $\psi_0(\xi, \eta)$. То есть сходимость амплитуды, следующая из неравенства (105), влечет за собой сходимость фазы, но функция, к которой сходится фаза $\psi_n(\xi, \eta)$, может отличаться от заданной фазы в точках поля, где световая энергия почти нулевая.

На рис. 29 показаны: функция пропускания АТ (а), которая рассчитана по итеративному алгоритму за 800 итераций; фаза (б, сплошная линия), которая формируется транспарантом на расстоянии $z_0 = 20$ мм и которая отличается от требуемой фазы (б, пунктирная линия) в точках малой интенсивности; распределение интенсивности (в), которое формируется этим транспарантом на расстоянии $z = 900$ мм. Параметры расчета: $k = 10^4$ мм⁻¹, дискретность отсчетов в плоскости АТ равна 0,01 мм, число отсчетов — 128.

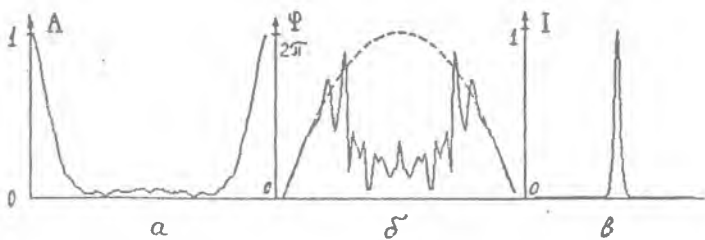


Рис. 29. Расчет амплитудного транспаранта

Отличие сформированной фазы (рис. 29, б) от заданной носит специфический характер: в тех точках, где распределение интенсивности заметно отличается от нуля (распределение интенсивности в плоскости наблюдения имеет почти такой же вид, как и в плоскости самого АТ, (рис. 29, а), совпадение рассчитанной и заданной фаз удовлетворительное, а существенное отличие между этими фазами наблюдается как раз в тех точках, где интенсивность светового поля близка к нулю.

Требуемая функция фазы выбиралась в виде

$$\psi_0(\xi) = -\alpha\xi^2, \quad (106)$$

где $\alpha = 2 \text{ мм}^{-2}$.

Заметим, что связь распределения амплитуды на транспаранте (рис. 29, а), и амплитуды поля на большом расстоянии от транспаранта (рис. 29, в), по крайней мере, качественно может быть понята из известного интеграла:

$$\int_a^a [a^2 - x^2]^{1/2} e^{ix\xi} dx = \pi J_0(a\xi), \quad (107)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

На рис. 30 показана зависимость от числа итераций среднего квадратичного отклонения (105) для амплитуды поля в плоскости формирования заданного волнового фронта. Видно, что ошибка не возрастает с ростом итераций, что согласуется с доказательством, приведенном в прил. В.

Применение итеративного алгоритма к расчету АТ, формирующего расходящиеся волновые фронты, приводит к более очевидному успеху.

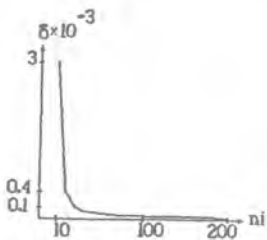


Рис. 30. График ошибки от числа итераций

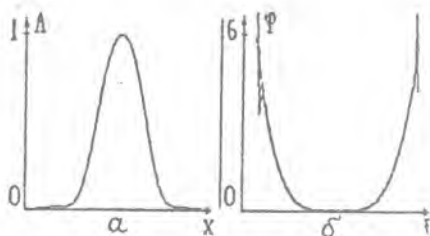


Рис. 31. Расчет амплитудного транспаранта

На рис. 31 показаны: функция пропускания АТ (а), рассчитанная за 100 итераций (параметры расчета те же) и фаза (б, сплошная линия), которую формирует этот транспарант на расстоянии z_0 и которая почти не отличается от требуемой фазы (б, пунктирная линия):

$$\psi_0(\xi) = \beta \xi^4, \quad (108)$$

где $\beta = 17 \text{ мм}^4$.

Рассмотрим еще одну частную модернизацию итеративного алгоритма Герчберга—Секстона [3], которая более подходит к расчету амплитудных линз. Под амплитудной линзой мы понимаем амплитудный транспарант, который обеспечивает концентрацию световой энергии в малой области плоскости наблюдения, отстоящей на некотором расстоянии от него.

В этом случае требуется итеративным способом решать вместо уравнения (102) следующее уравнение:

$$I_0(\xi, \eta) = \left| k/z \int \int_x A(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2z} \left| (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right| \right] dx dy \right|^2, \quad (109)$$

где $I_0(\xi, \eta)$ — требуемое распределение интенсивности в плоскости наблюдения, $A(x, y)$ — искомое амплитудное пропускание линзы.

Для обеспечения концентрации световой энергии в малой области плоскости наблюдения предлагается выбирать следующий вид интенсивности:

$$I_0(\xi, \eta) = p \operatorname{rect}(\xi/T_1) + q \operatorname{rect}(\xi/T_2), \quad (110)$$

где $T_1 = \frac{\lambda z}{2a}$ — радиус минимального дифракционного пятна в плоскости наблюдения, $T_2 = a, 2a$ — размер апертуры АТ, $p \gg q$.

В (110) первое слагаемое аппроксимирует центральный пик интенсивности в плоскости фокусировки, а второе слагаемое — неизбежный фон.

Решение уравнения (109) методом итераций аналогично решению уравнения (4) с помощью ГС-алгоритма и формул (5)—(7), но вместо замены (7) в данном случае следует использовать замену

$$\bar{f}_n(x, y) = \begin{cases} |f_n(x, y)|, & (x, y) \in W; \\ 0, & (x, y) \notin W, \end{cases} \quad (111)$$

где $f_n(x, y)$ — рассчитанная на n -м шаге комплексная амплитуда света в плоскости АТ, W — форма апертуры транспаранта.

На рис. 32 показаны: амплитудное пропускание транспаранта (а), рассчитанное за 20 итераций, и распределение интенсивности (б), которое этот транспарант формирует на расстоянии $z_0 = 20$ мм. Подбором постоянных p и q в формуле (110) можно добиться максимально возможной при данных параметрах плотности энергии в центральном пике. На рис. 32 интенсивность центрального пика в 5,6 раза превышает максимальную единичную интенсивность поля вблизи транспаранта и в 50 раз превышает среднее значение интенсивности фона в плоскости фокусировки.

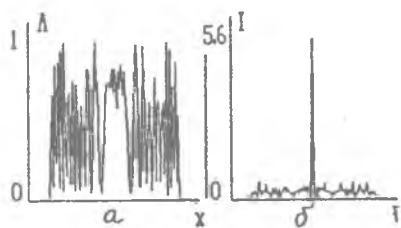


Рис. 32. Расчет амплитудной линзы

Эффективность фокусировки в данном случае равна 5%. Под эффективностью понимается часть световой энергии плоского пучка, освещающего транспарант, которая идет на формирование центрального пика в плоскости наблюдения. Дифракционная эффективность — это часть световой энергии, идущей на формирование центрального пика, от энергии, прошедшей через АТ. В данном случае (рис. 32) дифракционная эффективность составила 17%.

4. РАСЧЕТ ФАЗОВЫХ ФОРМИРОВАТЕЛЕЙ ГАУССОВЫХ И БЕССЕЛЕВЫХ МОД

Известны световые пучки, которые распространяются в свободном пространстве без дифракции (без изменения) [40—43]. Такие пучки называются *бесселевыми модами* и состоят из суперпозиции функций Бесселя.

В круглых световодных волокнах со ступенчатым профилем показателя преломления также распространяются *бесселевые моды* [44].

Известны также световые пучки, которые при распространении в свободном пространстве сохраняют свой вид, но изменяют масштаб. Такие пучки называются *гауссовыми модами* [45]. Гауссовы моды включают моды Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита. Световые пучки, являющиеся комбинацией таких пучков, распространяются в круглых и квадратных световодах с квадратичным показателем преломления.

Ниже рассматриваются итеративные методы, с помощью которых можно рассчитывать фазовые оптические элементы, формирующие такие световые модовые пучки с произвольным заданным составом мод, а также оптические элементы, формирующие световые моды в заданных порядках дифракции.

4.1. КИНОФОРМЫ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ БЕССЕЛЕВЫХ МОД

Комплексную амплитуду светового пучка, распространяющегося без дифракции в свободном пространстве вдоль оси z , можно представить в полярных координатах (r, θ) в виде линейной комбинации *бесселевых мод* [43]:

$$F(r, \theta, z) = e^{i k \alpha z} \sum_{n=-N}^N C_n J_n(\beta r) e^{i n \theta}, \quad (112)$$

где $\alpha = \cos(\nu)$, $\beta = k \sin(\nu)$, ν — угол, который составляют с осью z нормали плоских волн конического спектра *бесселевой моды*.

Из (112) при $N = 0$ следует выражение для *нулевой бесселевой моды*

$$F_0(r, z) = e^{ik \alpha z} J_0(\beta r), \quad (113)$$

описывающее бездифракционный пучок, который был изучен первым [40, 41].

Если сформировать в плоскости $z = 0$ комплексную амплитуду

$$F(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N C_n J_n(\beta r) e^{-in\theta}, \quad (114)$$

то на любой плоскости z в зоне дифракции Френеля световое поле будет отличаться от поля, описываемого выражением (114), только на несущественную фазовую постоянную.

Действительно, преобразование Френеля (1) в полярных координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{F}(\rho, \varphi, z) &= \\ &= \frac{ik}{2\pi z} e^{ikz} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) \exp\left[\frac{ik}{2z}(r^2 + \rho^2) - \frac{ikr\rho}{z} \cos(\theta - \varphi)\right] r dr d\theta, \quad (115) \end{aligned}$$

где (ρ, φ) — полярные координаты в плоскости z .

Подставив в (115) выражение (114), получим

$$\begin{aligned} \bar{F}(\rho, \varphi, z) &= \\ &= \frac{ik}{2\pi z} e^{ikz} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z}\right] \sum_{n=-N}^N C_n \int_0^{\infty} J_n(\beta r) \exp\left[\frac{ikr^2}{2z}\right] r dr * \\ &* \int_0^{2\pi} \exp\left[-in\theta - \frac{ikr\rho}{z} \cos(\theta - \varphi)\right] d\theta. \quad (116) \end{aligned}$$

Известно интегральное представление функции Бесселя [46]]

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \cos t) dt = \\ &= \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-int - ix \cos t) dt. \quad (117) \end{aligned}$$

Если подставить (117) в (116), то получим выражение

$$\begin{aligned} \bar{F}(\rho, \varphi, z) &= \\ &= \frac{ik}{z} e^{ikz} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z}\right] \sum_{n=-N}^N C_n (-i)^n e^{-in\varphi} I_n(\rho), \end{aligned} \quad (118)$$

$$\text{где } I_n(\rho) = \int_0^{\rho} J_n(\beta r) J_n(kr\rho/z) \exp\left[\frac{ikr^2}{2z}\right] r dr.$$

Чтобы вычислить интеграл $I_n(\rho)$, следует воспользоваться справочным интегралом [47, с. 227]

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho} J_n(bx) J_n(cx) e^{iax^2} x dx &= \\ &= \frac{i^{n+1}}{2a} J_n\left(\frac{bc}{2a}\right) \exp\left[-i\frac{b^2+c^2}{4a}\right]. \end{aligned} \quad (119)$$

Тогда с учетом (119) выражение (118) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{F}(\rho, \varphi, z) &= \\ &= \frac{ik}{z} \exp\left[ikz + \frac{ik\rho^2}{2z}\right] \sum_{n=-N}^N (-i)^n e^{-in\varphi} * \\ &* \left\{ \frac{z^{n+1}}{k} J_n(\beta\rho) \exp\left[-\frac{iz\beta^2}{2k} - \frac{ik\rho^2}{2z}\right] \right\} = \\ &= -\exp\left[ikz - \frac{iz\beta^2}{2k}\right] \sum_{n=-N}^N C_n J_n(\beta\rho) e^{-in\varphi}. \end{aligned} \quad (120)$$

Вернемся к выражению (114) и сформулируем задачу следующим образом. Требуется найти такие комплексные коэффициенты C_n в сумме (114), чтобы функция $F(r, \theta)$ имела заданный модуль. В частности, если требуется рассчитать фазовый оптический элемент, то модуль функции $F(r, \theta)$ должен быть равен единице. Решение этой задачи сводится к решению нелинейного уравнения вида

$$I_0(r, \theta) = \left| \sum_{n=-N}^N C_n J_n(\beta r) e^{-in\theta} \right|^2. \quad (121)$$

где $I_0(r, \theta) = |F(r, \theta)|^2$ — требуемое распределение интенсивности в плоскости оптического элемента. Уравнение (121) может иметь множество решений. Принимая во внимание, что значения модулей коэффициентов C_n характеризуют вес вклада одиночной бесселевой моды в сумму мод и влияют на вид поперечного распределения интенсивности формируемого бездифракционного пучка, будем полагать эти модули заданными: $|C_n| = B_n$, а фазы коэффициентов $v_n = \arg C_n$ будут свободными параметрами задачи, которые следует найти.

Уравнение (121) можно приближенно решить с помощью следующей итеративной процедуры. Задается начальное приближение искомой фазы киноформа $\psi_0(r, \theta)$ и формируется начальная оценка комплексной амплитуды света в плоскости киноформа

$$F_0(r, \theta) = \sqrt{I_0(r, \theta)} \exp[i\psi_0(r, \theta)]. \quad (122)$$

Далее, используя ортогональность функции $\exp[in\theta]$, находят коэффициенты суммы по формулам

$$C_n = A_n \int_0^R \int_0^{2\pi} F_0(r, \theta) J_n(\gamma_{no} r/R) e^{in\theta} r dr d\theta. \quad (123)$$

Из (123) имеем

$$A_n = \left\{ \pi \left[R J_n'(\gamma_{no}) \right]^2 \right\}^{-1/2}. \quad (124)$$

При получении выражения (123) были использованы следующие соотношения:

$$\int_0^{2\pi} \exp[i\theta(n-m)] d\theta = 2\pi \delta_{nm}, \quad (125)$$

$$\int_0^R J_n^2(\gamma_{no} r/R) r dr = R^2 \left[J_n'(\gamma_{no}) \right]^2 / 2, \quad (126)$$

где $J_n'(\gamma_{no})$ — производная функция Бесселя в точке γ_{no} , γ_{no} — корень функции Бесселя: $J_n(\gamma_{no}) = 0$, который выбирается как

наиболее близкий к значению βR , R — радиус оптического элемента, δ_{nm} — символ Кронекера.

Найденные на k -м шаге итераций по формулам (123) коэффициенты $C_n^{(k)}$ заменяются на коэффициенты $\bar{C}_n^{(k)}$ по правилу

$$\bar{C}_n^{(k)} = B_n C_n^{(k)} |C_n^{(k)}|^{-1}, \quad n = -N, N. \quad (127)$$

Далее по формуле (114) с коэффициентами (127) находится следующая оценка комплексной амплитуды света в плоскости оптического элемента:

$$F_k(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N \bar{C}_n^{(k)} J_n(\gamma_{no} r/R) e^{in\theta}. \quad (128)$$

Рассчитанная по формуле (128) функция $F_k(r, \theta)$ заменяется на функцию $\bar{F}_k(r, \theta)$ по правилу

$$\bar{F}_k(r, \theta) = \sqrt{I_0(r, \theta)} F_k(r, \theta) |F_k(r, \theta)|^{-1}. \quad (129)$$

Следующая оценка коэффициентов $C_n^{(k+1)}$ ищется по формуле (123), в которой вместо функции $F_0(r, \theta)$ следует использовать функцию $\bar{F}_k(r, \theta)$ из уравнения (129) и т. д.

Сходимость этого итеративного процесса можно контролировать по двум средним квадратичным ошибкам:

$$\delta_I = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{I_0(r, \theta)} - |F_k(r, \theta)| \right]^2 r dr d\theta, \quad (130)$$

$$\delta_C = \sum_n^N \left[B_n - |C_n^{(k)}| \right]^2. \quad (131)$$

Можно показать, что ошибки δ_I и δ_C с ростом числа итераций не будут возрастать. В прил. ζ доказана сходимость такого итеративного алгоритма для любых ортогональных функций. Показано, что итеративное решение уравнения

$$I_0(x, y) = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi_n(x, y) \right|^2, \quad (132)$$

где функции $\psi_n(x, y)$ — ортогональные:

$$\int \int \psi_n(x, y) \psi_m(x, y) dx dy = \delta_{mn} \quad (133)$$

с ограничениями типа (127) и (129), будет сходиться в среднем, и для любого k будут иметь место неравенства:

$$\begin{aligned} & \int \int \left[\sqrt{I_0(x, y)} - |F_{k-1}(x, y)| \right]^2 dx dy \leq \\ & \leq \int \int \left[\sqrt{I_0(x, y)} - |F_k(x, y)| \right]^2 dx dy, \end{aligned} \quad (134)$$

$$\sum_n \left[B_n - |C_n^{(k-1)}| \right]^2 \leq \sum_n \left[B_n - |C_n^{(k)}| \right]^2. \quad (135)$$

Здесь

$$F_{k-1}(x, y) = \sum_n B_n |C_n^{(k-1)}| \psi_n(x, y). \quad (136)$$

На рис. 33 показаны: рассчитанная за 20 итераций фаза (а) оптического элемента, формирующая бездифракционный пучок (б), поперечное распределение интенсивности которого почти не изменяется с расстоянием: $z=80$ мм (1), $z=100$ мм (2), $z=110$ мм (3). При этом в сумме (114) оставались всего три слагаемых с коэффициентами: C_0, C_{-1}, C_{+1} , модули которых были равны. Параметры расчета: $R = 1$ мм — радиус киноформа; число отсчетов по радиальной переменной — 64, по полярному углу — 128.

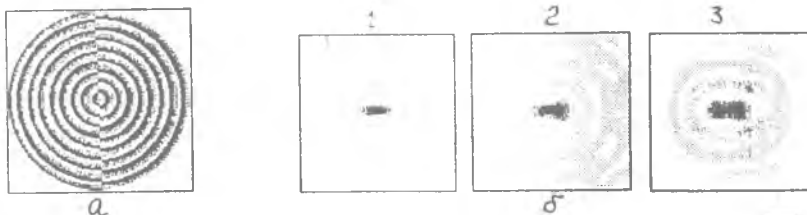


Рис. 33. Расчет фазового формирователя бесселевой моды

4.2. ФОРМИРОВАТЕЛИ БЕССЕЛЕВЫХ КВАЗИМОД

Как уже отмечалось, в работах [40, 41] был исследован бездифракционный пучок нулевого порядка с амплитудой (113). Для формирования такого пучка (нулевой бесселевой моды) требуется либо синтезировать оптический элемент с функцией пропускания (113), либо осветить плоским пучком света узкую кольцевую щель с радиусом $\beta f/k$ и на расстоянии f от нее расположить сферическую линзу с фокусным расстоянием f [41]. Оба этих варианта обладают очевидными недостатками с практической точки зрения. Для того чтобы понять, как можно рассчитать чисто фазовый оптический элемент, который "эффективно" формирует нулевую бесселевую моду, введем понятие "к в а з и м о д ы" [48].

Квазимодой будем называть световое поле, которое является суперпозицией малого числа нулевых бесселевых мод, но с разной шириной:

$$\tilde{F}_0(r) = \sum_{n=K}^L C_n J_0(\gamma_n r/R), \quad (137)$$

где γ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\gamma_n) = 0$, R — радиус киноформа. Центральный корень с номером $n_0 = (K + L) / 2$ выбирается из условия $\gamma_{n_0} = \beta R$, β — постоянная из уравнения (113) характеризует эффективный радиус r_0 нулевой бесселевой квазимоды:

$$r_0 = \gamma_1/\beta, \quad (138)$$

где γ_1 — первый нуль функции Бесселя нулевого порядка: $\gamma_1 = 2,4$.

По мере распространения пучка (137) в свободном пространстве, так как каждая мода (каждое слагаемое в сумме (137)) при распространении имеет свою фазовую скорость, вид всего пучка и его эффективный радиус будут изменяться. Степень дифракционной расходимости пучка квазимоды пропорциональна числу слагаемых суммы (137).

Воспользовавшись ортогональностью функций Бесселя одного порядка

$$\int_0^1 J_n(x \gamma_p) J_n(x \gamma_q) x dx = 0, 5 \left[J_n'(\gamma_p) \right]^2 \delta_{pq}, \quad (139)$$

можно показать, что коэффициенты C_n в (137) ищутся по формулам:

$$C_n = 2 \left[R J_0'(\gamma_n) \right]^2 \int_0^R \hat{F}_0(r) J_0(\gamma_n r/R) r dr. \quad (140)$$

Тогда алгоритм итеративного поиска фазы оптического элемента, формирующего квазимоды нулевого порядка, то есть слаборасходящиеся пучки, являющиеся суперпозицией малого числа бесселевых мод нулевого порядка, близких по эффективным радиусам, будет следующий.

На k -м шаге итераций формируется оценка функции пропускания оптического элемента

$$\hat{F}_k(r) = A_0(r) e^{i \varphi_k(r)}, \quad (141)$$

где $A_0(r)$ — амплитуда светового пучка, освещающего киноформ, $\varphi_k(r)$ — фаза киноформа, рассчитанная на k -й итерации.

Далее по формуле (140) находятся коэффициенты $C_n^{(k)}$, которые заменяются на коэффициенты $\bar{C}_n^{(k)}$ по правилу

$$\bar{C}_n^{(k)} = \begin{cases} B_n \exp \left[i \arg C_n^{(k)} \right], & n \in [K, L]; \\ 0, & n \notin [K, L]. \end{cases} \quad (142)$$

Следующая оценка $\hat{F}_{k+1}(r)$ находится как результат суммирования (137) с коэффициентами (142). После этого у рассчитанной комплексной амплитуды $\hat{F}_{k-1}(r)$ аргумент остается без изменения, а модуль заменяется на заданную функцию, как в выражении (141), и т. д.

Алгоритм, состоящий из формул (137) и (140) — (142), аналогичен алгоритму, состоящему из формул (122) — (128), но более прост при его программной реализации. Доказательство сходимости этого алгоритма аналогично доказательству, приведенному в прил. С.

На рис. 34, а показана фаза, рассчитанная всего за 2 итерации. Оптический элемент с такой фазой имеет Бессель-спектр, показанный на рис. 34, б. Из последнего рисунка видно, что эффективно в сумму (137) вносят вклад только четыре слагаемых с корнями $\gamma_{15} - \gamma_{18}$. Световой пучок, сформированный таким оптическим элементом, будет распространяться почти без дифракции. На рис. 35 показано радиальное распределение интенсивности такого пучка на разных расстояниях: $z = 100$ мм (1), $z = 150$ мм (2), $z = 170$ мм (3). Параметры расчета: $\beta = 50$ мм⁻¹, $R = 1$ мм, $k = 10^4$ мм⁻¹, число отсчетов — 512, дискретность по переменной r — 0,02 мм. При этих параметрах эффективный радиус моды, т. е. расстояние от оси до первого нуля, равен примерно 48 мкм (рис. 35), кривая (4) для гауссового пучка.

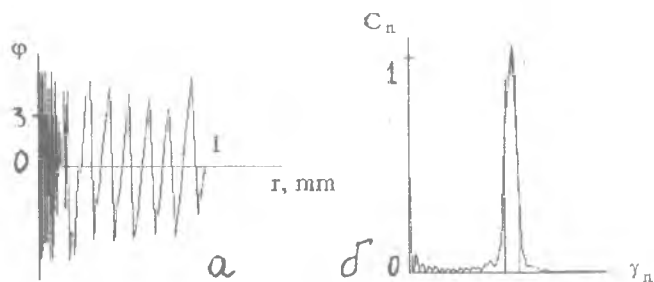


Рис. 34. Расчет формирователя квазимоды

Заметим, что конический аксикон [29] также является фазовым элементом, формирующим квазимоду нулевого порядка. Это следует из разложения

$$\exp[-i\beta r] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta r). \quad (143)$$

В (143) только слагаемое $J_0(\beta r)$ будет давать эффективный вклад в сумму, а вклад остальных слагаемых будет мал из-за дифракции (расходимости) пучков с амплитудой $J_n(\beta r)$, $|n| > 0$.

Заметим также, что фаза, приведенная на рис. 34, а, близка к линейной фазе аксикона (143).

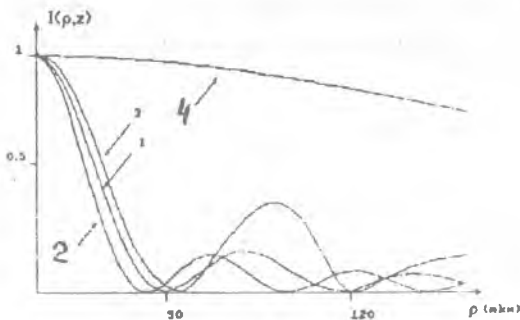


Рис. 35. Интенсивность вдоль оптической оси

4.3. КИНОФОРМЫ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ГАУССОВЫХ МОД

В [49—51] исследовались фазовые оптические элементы (моданы), которые согласованы с гауссовыми модами лазерного излучения и формируют световые пучки, являющиеся суперпозицией мод Гаусса—Эрмита или Гаусса—Лагерра.

Ниже рассматриваются итеративные алгоритмы для расчета таких фазовых оптических элементов.

4.3.1. Алгоритмы для расчета формирователей мод Гаусса-Эрмита

Нетрудно проверить, что частным решением параксиального уравнения в одномерном случае

$$2ik \frac{\partial E(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial x^2} = 0, \quad (144)$$

где z — ось вдоль направления распространения пучка, являются функции вида

$$E_n(x, z) = a^{-n-1} \exp\left[-(x/a)^2\right] H_n(x/a), \quad (145)$$

где $a^2(z) = a_0^2 + 2iz/k$, a_0^2 — радиус пучка при $z = 0$, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита.

Поэтому общее решение уравнения (144) можно записать как линейную комбинацию частных решений (145)

$$E(x, z) = \exp\left[-(x/a)^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{-n-1} H_n(x/a). \quad (146)$$

Чтобы вдоль оси z распространялось световое поле с амплитудой вида (146), требуется в плоскости $z = 0$ сформировать комплексную амплитуду

$$E_0(x) = \exp\left[-(x/a_0)^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} C_n a_0^{n-1} H_n(x/a_0). \quad (147)$$

Поэтому задача расчета фазовых оптических элементов, формирующих эрмитовы пучки с произвольным модовым составом, может быть сформулирована следующим образом [52]. Требуется найти фазу $\varphi(x)$, удовлетворяющую системе из $N + 1$ алгебраических уравнений

$$|C_n| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x) \exp[i\varphi(x)] P_n(x) dx \right|, \quad n = \overline{0, N}. \quad (148)$$

Здесь

$$A_0(x) \exp[i\varphi(x)] = \sum_{n=0}^N C_n P_n(x), \quad (149)$$

$$P_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2} \exp[-x^2/2] H_n(x), \quad (150)$$

где $P_n(x)$ — функция Эрмита, A_0 — амплитуда освещающего пучка. Модули коэффициентов C_n заданы и определяют вклад каждой эрмитовой моды в общий пучок.

Функции Эрмита (150) удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{mn}. \quad (151)$$

Алгоритм поиска приближенного решения системы (148) аналогичен итеративному алгоритму Герчберга—Секстона [3]. Начальная оценка фазы $\varphi_0(x)$ выбирается случайной. Рассчитываются $N + 1$ коэффициентов C_n по формулам (148). Рассчитанные на k -м шаге итераций коэффициенты $C_n^{(k)}$ подвергаются замене

$$\overline{C}_n^{(k)} = B_n C_n^{(k)} |C_n^{(k)}|^{-1}, \quad (152)$$

где $B_n \geq 0$ – заданные числа, характеризующие распределение световой энергии по модам.

Далее вычисляется сумма (149), аргумент которой является новой оценкой искомой фазы $\varphi_k(x)$ и т. д.

Доказательство сходимости этого алгоритма аналогично доказательству, приведенному в прил. С.

Заметим, что все предыдущие рассуждения полностью переносятся на двумерный случай, если требуется найти фазу $\varphi(x, y)$ оптического элемента, формирующего световой пучок, состоящий из заданного набора эрмитовых пучков с требуемыми энергетическими весами:

$$A_0(x, y) \exp[i\varphi(x, y)] = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M C_{mn} P_n(x) P_m(y). \quad (153)$$

При численном моделировании дискретность по переменной x была равна 0,02 мм. Интегрирование в (148) в бесконечных пределах заменялось на интегрирование на отрезке $[-a, a]$, $a = 6$ мм. При увеличении a коэффициенты C_n изменялись на десятую долю процента. Амплитуда освещающего пучка $A_0(x)$ выбиралась гауссовой (рис. 36, а). Число слагаемых N в сумме (149) было равно 20.

На рис. 36, б показана рассчитанная за 10 итераций фаза оптического элемента, который при освещении плоским пучком с гауссовым распределением интенсивности (рис. 36, а) формирует эрмитовый пучок, эффективно являющийся суперпозицией пяти мод Гаусса-Эр-

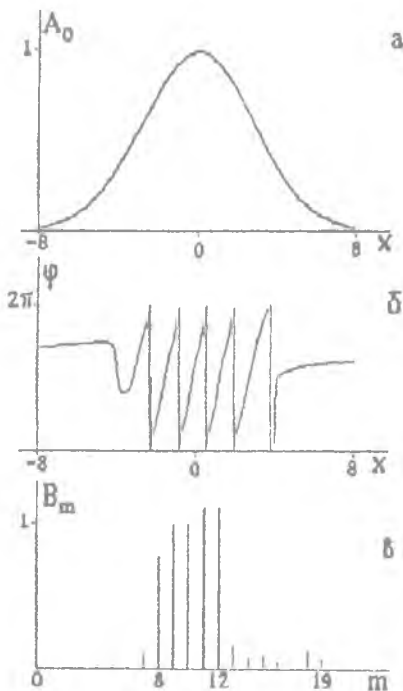


Рис. 36. Расчет эрмитового пучка

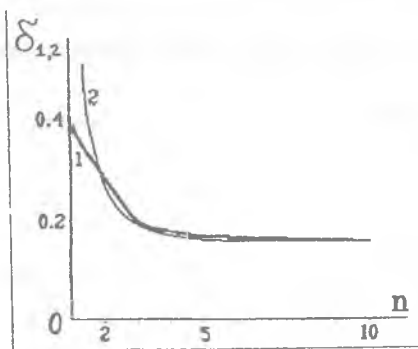


Рис. 37. Кривые ошибок

На рис. 37 показаны средние квадратичные ошибки для амплитуды в плоскости оптического элемента (кривая 1):

$$\delta_A = \left[\int_a^a |A_{k-1} - A_0|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{-a}^a A_0^2 dx \right]^{-1/2} \quad (154)$$

и для коэффициентов ряда (149) (кривая 2):

$$\delta_C = \left[\sum_{n=0}^N \left\{ |C_n^{(k)}| - B_n \right\}^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^N B_n^2 \right]^{-1/2} \quad (155)$$

в зависимости от числа итераций. Из рис. 37 видно, что указанные ошибки монотонно убывают с ростом итераций.

Заметим, что эффективность, с которой эрмитовый пучок представим пятью модами, равна в данном случае (рис. 36, в) 90%. Эффективность определяется следующим выражением:

$$\varepsilon = \left[\sum_{\Omega} |C_n^{(k)}|^2 \right] \left[\sum_{n=0}^N |C_n^{(k)}|^2 \right]^{-1}, \quad (156)$$

где k — номер итераций, Ω — множество таких номеров, коэффициенты с которыми отличны от нуля.

В работе [51] рассмотрены оптические элементы, названные многоканальными модами, которые состоят из набора гауссовых мод, каждая со своей несущей частотой, и которые используются для разветвления освещающего пучка на несколько пучков (каналов), способных возбуждать или анализировать сразу несколько мод параллельно. Их можно применять для параллельного ввода лазерного излучения в набор световых волокон.

мита с постоянными по модулю коэффициентами C_k , $k = 8, 12$. Модули коэффициентов показаны на рис. 36, в.

Заметим, что общий линейный наклон фазы оптического элемента (рис. 36, б), приводящий к осевому смещению эрмитового пучка при его распространении, появляется из-за наличия в сумме (149) мод с нечетными номерами.

Ниже рассматривается задача расчета фазы таких элементов [53]. Эта задача несколько отличается от предыдущей [52], так как в этом случае требуется рассчитать фазовый оптический элемент, формирующий эрмитовые пучки в заданных дифракционных порядках и с требуемым распределением световой энергии по этим порядкам. В данном случае каждая световая мода распространяется под своим углом к оптической оси.

Поэтому для нахождения фазы киноформа $\varphi(x)$ следует использовать вместо уравнения (149) следующее выражение:

$$A_0(x)e^{i\varphi(x)} = \sum_{n=0}^N C_n P_n(x)e^{-i\alpha_n x}, \quad (157)$$

где $P_n(x)$ — функция Эрмита, определенная в (150), α_n — несущая пространственная частота: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$. Модули коэффициентов C_n являются как и прежде фиксированными заданными числами, а их аргументы являются свободными параметрами задачи.

Функции Эрмита являются собственными для преобразования Фурье [54, с. 180]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)e^{-i\alpha x} dx = (-i)^n P_n(\alpha). \quad (158)$$

Используя выражение (158), можно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)\exp[-i(\alpha_n - \alpha_m)x] dx = \\ = i^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\beta)P_m(\alpha_m - \alpha_n - \beta) d\beta. \end{aligned} \quad (159)$$

Функция в правой части уравнения (159) является сверткой двух функций Эрмита и имеет эффективную область изменения аргумента (за пределами которой значением функции можно пренебречь), в два раза большую, чем эффективная область изменения аргумента функции Эрмита большего порядка. Поэтому, выбирая разность между двумя последующими несущими пространственными частотами $|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ достаточно большой

(практически, это означает, что формируемые эрмитовые пучки должны быть с запасом разделены между собой), можно приближенно считать функции

$$P_n(x) \exp[-i \alpha_n x]$$

ортогональными и искать коэффициенты суммы (157) из соотношения

$$C_n = \int_{-x}^x A_0(x) \exp[i \varphi(x) + i \alpha_n x] P_n(x) dx, \quad n = \overline{0, N}. \quad (160)$$

На основе выражений (157) и (160) можно организовать итеративную процедуру поиска фазы $\varphi(x)$ оптического элемента, аналогичную алгоритму (148) — (150).

Вычисленные на k -м шаге итераций по формулам (160) коэффициенты C_n подвергаются замене: их модули заменяются на заданные числа B_n , а фазы (аргументы) оставляются без изменения. Далее вычисляется сумма (157), и результирующая функция подвергается аналогичной замене: ее модуль заменяется на амплитуду освещающего пучка $A_0(x)$, а фаза остается без изменения и является новой оценкой искомой фазы.

Для численного расчета выбирался интервал интегрирования по переменной x , равный $-10 \leq x \leq 10$ с дискретностью 0,02. Число коэффициентов N равно 20. Амплитуда освещающего пучка выбиралась постоянной:

$$A_0(x) = \text{rect}(x/3, 4).$$

Распределение по модам задавалось числами

$$B_n = \begin{cases} 1, & n = 3, 4, 5; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

На рис. 38, а показана рассчитанная за 10 итераций фаза трехканального модана. Освещенный плоской волной света оптический элемент с такой фазой формирует в фокальной плоскости линзы распределение интенсивности, показанное на рис. 38, б, где нулевой порядок соответствует моде $P_4(x)$, минус первый порядок — $P_3(x)$ и плюс первый порядок — $P_5(x)$.

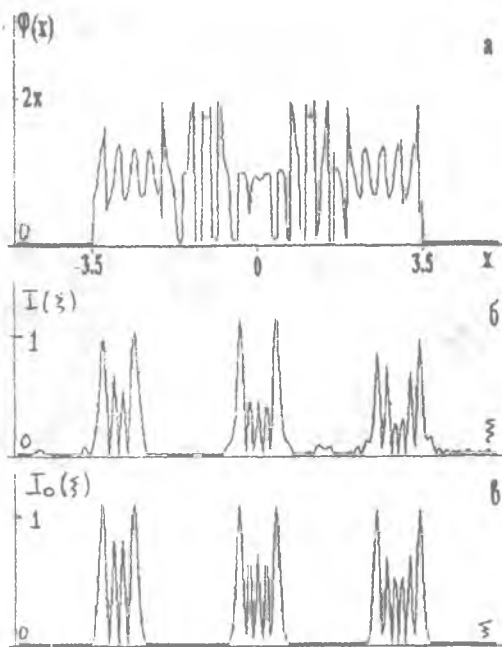


Рис. 38. Расчет фазового трехканального формирователя эрмитовых пучков

Равенство энергии в этих трех порядках соблюдается с точностью 8%, а на формирование этих трех мод идет около 98% световой энергии освещающего пучка.

Среднее отклонение распределения интенсивности сформированных мод (рис. 38, б) от распределения интенсивности истинных мод (рис. 38, в) составило 25%.

Очевидно, что приведенные выше рассуждения применимы и к двумерному случаю, если вместо уравнения (157) использовать следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 A_0(x, y) e^{i\varphi(x, y)} &= \\
 &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M C_{nm} P_n(x) P_m(y) \exp[-i(\alpha_n x + \beta_m y)]. \quad (161)
 \end{aligned}$$

На рис. 39, а показана фаза четырехканального оптического элемента, рассчитанная за 10 итераций. Оптический элемент с такой фазой при освещении плоским пучком света сформирует с эффективностью более 90% в фокальной плоскости линзы четыре разделенные эрмитовы моды (рис. 39, б): в левом верхнем углу —

(0,1), в правом верхнем — (1,1), в левом нижнем — (1,2) и правом нижнем — (2,0). В сумме (161) выбиралось $M = N = 3$. На рис. 39, в показана фаза в частотной плоскости. Видно, что в местах локализации четырех мод фаза имеет характерные скачки на π при переходе нулевых линий интенсивности.

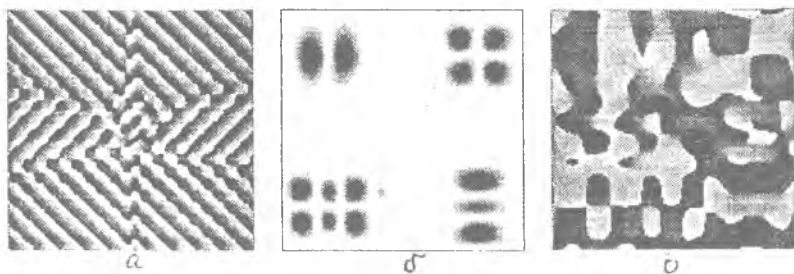


Рис. 39. Расчет четырехканального формирователя эрмитовых мод

4.3.2. Алгоритм для расчета формирователей мод Гаусса—Лагерра

В этом разделе рассматривается задача расчета фазовых оптических элементов, которые формируют аксиальные световые пучки, являющиеся набором мод Гаусса—Лагерра с заданным распределением энергии по модам. А также рассматривается задача расчета многоканальных оптических элементов, формирующих моды Лагерра в заданных порядках дифракции. Ход рассуждений во многом будет совпадать с рассуждениями предыдущего раздела.

Параболическое уравнение (144) в цилиндрических координатах записывается в виде [55]

$$2ik \frac{\partial E(r, \theta, z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial E(r, \theta, z)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E(r, \theta, z)}{\partial \theta^2} = 0, \quad (162)$$

где $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. Для аксиальных пучков $E(x, y, z) = E(r, z)$, и вместо уравнения (162) получим уравнение

$$2ik \frac{\partial E(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 E(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E(r, z)}{\partial r} = 0. \quad (163)$$

Частное решение уравнения (163) имеет вид

$$E_m(r, z) = (1 + iD)^{m-1} \exp\left[-(r/a)^2\right] L_m(r^2/a^2), \quad (164)$$

где $a^2(z) = a_0^2(1 + iD)$, $D = \frac{2z}{ka_0^2}$ — параметр Френеля, a_0 —

эффективный радиус пучка при $z = 0$, $L_m(x)$ — многочлен Лагерра [46].

Общее решение уравнения (163) можно искать как линейную комбинацию частных решений (164).

Поэтому, чтобы сформировать световой пучок, состоящий из заданного набора мод Гаусса—Лагерра, следует искать комплексную амплитуду света при $z = 0$ в виде

$$A_0(r) e^{i\varphi(r)} = \sum_{n=0}^N C_n S_n(r). \quad (165)$$

Откуда

$$S_n(r) = \frac{\sqrt{2} e^{-r^2/2}}{n!} L_n(r^2), \quad (166)$$

где $S_n(r)$ — функция Лагерра, $A_0(r)$ — амплитуда радиально-симметричного освещающего пучка, $\varphi(r)$ — искомая радиально-симметричная фаза киноформа.

Коэффициенты суммы (165) находятся из соотношения

$$C_n = \int_0^{\infty} A_0(r) e^{i\varphi(r)} S_n(r) r dr, \quad (167)$$

которое основано на свойстве ортогональности функций Лагерра

$$\int_0^{\infty} S_n(r) S_m(r) r dr = \delta_{nm}. \quad (168)$$

Соотношения (165) и (167) аналогичны соотношениям (149) и (148), и поэтому итеративный алгоритм поиска фазы будет аналогичным. Задаваясь оценкой искомой фазы $\varphi_k(r)$, по формуле (167) находятся коэффициенты $C_n^{(k)}$, в которых амплитуда заменяется на заданные числа B_n , характеризующие распределение световой энергии по модам, а аргументы остаются неизменными. Следующий

шая оценка фазы $\varphi_{k+1}(r)$ будет равна аргументу функции, которая получится при суммировании по формуле (165) с измененными коэффициентами и т. д.

Сходимость этого алгоритма доказывается аналогично тому, как это сделано в прил. С.

Задача о расчете многоканальных фазовых оптических элементов, формирующих моды Гаусса—Лагерра в заданных порядках дифракции, формулируется аналогично предыдущему рассуждению, исходя из выражения

$$A_0(x, y)e^{i\varphi(x, y)} = \sum_{n=0}^N C_n S_n(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp[-i(\alpha_n x + \beta_n y)], \quad (169)$$

где (α_n, β_n) — вектор несущей пространственной частоты, задающий n -й дифракционный порядок.

В дальнейшем выражение (169) удобно представить в полярных координатах:

$$A_0(r, \theta)e^{i\varphi(r, \theta)} = \sum_{n=0}^N C_n S_n(r) \exp[-ir \rho_n \cos(\theta - \theta_n)], \quad (169)$$

где (ρ_n, θ_n) — вектор несущей пространственной частоты в полярных координатах.

Функция Лагерра (166) — собственная функция преобразования Ханкеля нулевого порядка:

$$\int_0^{\infty} S_n(r) J_0(r\rho) r dr = (-1)^n S_n(\rho). \quad (170)$$

Это легко показать, используя справочный интеграл [47, с. 475]

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\lambda+2} e^{-cx} J_{\lambda}(b\sqrt{x}) L_n^{\lambda}(cx) dx = \\ = \frac{(-1)^n 2b^{\lambda}}{c^{\lambda+1}} \exp\left[-\frac{b^2}{2c}\right] L_n^{\lambda}(b^2/c), \end{aligned} \quad (171)$$

где $L_n^{\lambda}(x)$ — присоединенный (или обобщенный) многочлен Лагерра, $J_{\lambda}(x)$ — функция Бесселя λ -го порядка.

Чтобы можно было вычислить коэффициенты суммы (169) по формуле

$$C_n = \int_0^r \int_0^{2\pi} A_0(r, \theta) e^{i\varphi(r, \theta)} S_n(r) \exp[ir \rho_n \cos(\theta - \theta_n)] r dr d\theta, \quad (172)$$

покажем, что при достаточно большом расстоянии между соседними векторами пространственных частот

$$W_{n, n+1} = [\rho_n^2 + \rho_{n+1}^2 - 2\rho_n \rho_{n+1} \cos(\theta_n - \theta_{n+1})]^{1/2} \quad (173)$$

можно считать функции $S_n(r) \exp[ir \rho_n \cos(\theta - \theta_n)]$ почти ортогональными.

Это будет так, если будет мал следующий интеграл:

$$I_{mn} = \int_0^r \int_0^{2\pi} S_m(r) S_n(r) \exp[ir \rho_m \cos(\theta - \theta_m) - ir \rho_n \cos(\theta - \theta_n)] r dr d\theta. \quad (174)$$

Интеграл (174) после интегрирования по углу θ представим в виде

$$I_{mn} = 2\pi \int_0^r S_m(r) S_n(r) J_0(W_{mn} r) r dr, \quad (175)$$

где W_{mn} — расстояние между двумя векторами пространственных частот, определенное в (173).

Используя справочный интеграл [47, с. 475]

$$\int_0^r x^{(\lambda+\lambda)/2} e^{-cx} J_{\lambda+\gamma}(b\sqrt{x}) L_m^\lambda(cx) L_n^\lambda(cx) dx = \quad (176)$$

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{c^{\lambda+\lambda+1}} \left[\frac{b}{2} \right]^{\lambda-\lambda} \exp\left[-\frac{b^2}{4c}\right] I_m^{\lambda+m-n}(b^2/4c) L_n^{\lambda-m+n}(b^2/4c),$$

имеем

$$L_n^\lambda(x) = \frac{x^{-\lambda} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\lambda} e^{-x}] - \quad (177)$$

— присоединенный многочлен Лагерра, получим вместо выражения (175)

$$I_{mn} = \pi(-1)^{m+n} \exp[-W_{mn}^2 / 4] L_m^n(W_{mn}^2 / 4) L_n^m(W_{mn}^2 / 4). \quad (178)$$

Из (178) видно, что при стремлении W_{mn} к бесконечности I_{mn} спадает экспоненциально, то есть при достаточно большом значении расстояния между двумя последующими векторами пространственных частот значения интегралов (175) будут близкими к нулю, и можно пользоваться формулой (172).

Итеративный расчет фазы оптического элемента, формирующего моды Лагерра в заданных порядках дифракции аналогичен алгоритму из предыдущего раздела. Если имеется оценка искомой фазы $\varphi_k(x, y)$ на k -м шаге итераций, то по формулам (172) находятся коэффициенты $C_n^{(k)}$, в которых модуль заменяется на заданное число B_n , а аргумент остается без изменений. С помощью этих коэффициентов по формуле (169) находят сумму, аргумент которой будет новой оценкой $\varphi_{k+1}(x, y)$ искомой фазы киноформы.

На рис. 40, а показана фаза оптического элемента, рассчитанная за 10 итераций с помощью формул (169) и (172). Оптический элемент с такой фазой при освещении его гауссовым пучком света сформирует в фокальной плоскости линзы с 90-процентной эффективностью первые четыре моды Гаусса—Лагерра, разделенные между собой и имеющие равные энергии.

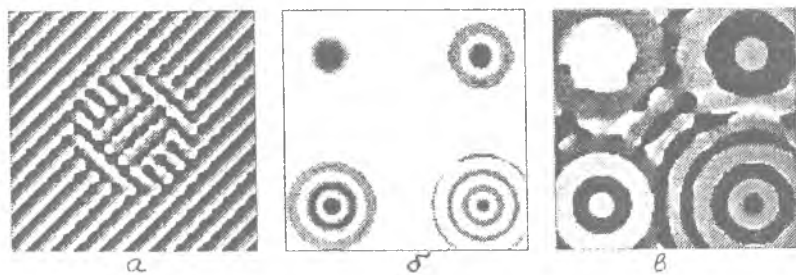


Рис. 40. Расчет четырехканального формирователя мод Гаусса—Лагерра

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные итеративные алгоритмы расчета фазовых оптических элементов, формирующих:

- заданное поперечное распределение интенсивности (изображение);

- заданное поперечное распределение фазы (волновой фронт);

- заданное продольное распределение интенсивности;

- бесселевы моды (бездифракционные пучки);

- квазимоды (почти бездифракционные пучки);

- гауссовы моды в одном и разных порядках дифракции, обладают рядом достоинств:

- универсальность (требуемые изображения могут быть произвольными);

- технологичность (легко программируемые, одна программа для целого класса элементов);

- расчет элемента связан с моделированием его работы;

- возможность получать множество решений одной задачи;

- возможность получать оптимальное решение по двум параметрам;

- точность формирования изображения и энергетическая эффективность;

- и некоторыми недостатками:

- временные затраты на проведение итераций;

- ограниченность размеров массива отсчетов фазы элемента;

- нерегулярная структура фазы киноформа в общем случае.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство неравенства (98), гарантирующего сходимость итеративного процесса (94)—(96), получено при условии малого различия комплексных амплитуд в плоскости наблюдения для двух последующих итераций.

Вводятся обозначения для комплексных амплитуд на n -м шаге:

$$F_n(\xi, \eta) = B_n e^{i\psi_n}, \quad (\text{A1})$$

$$f_n(x, y) = A_n e^{i\varphi_n} \quad (\text{A2})$$

и обозначения для связи амплитуд на разных плоскостях:

$$B_n e^{i\psi_n} = FR \left[A_0 e^{i\varphi_n} \right], \quad (\text{A3})$$

$$A_{n+1} e^{i\varphi_{n+1}} = FR^{-1} \left[B_n e^{i\psi_n} \right], \quad (\text{A4})$$

где A_0 — заданная амплитуда в плоскости киноформа, ψ_0 — заданная фаза в плоскости наблюдения, FR и FR^{-1} — обозначения прямого и обратного преобразования Френеля.

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство типа Парсеваля, означающее сохранение полной световой энергии на поперечных плоскостях:

$$\int \int_x \left| A_0 e^{i\varphi_n} \right|^2 dx dy = \int \int_\xi \left| B_n e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta. \quad (\text{A5})$$

Пользуясь очевидным свойством комплексных чисел, что разность двух комплексных чисел с разными аргументами (но меньшими π) больше, чем их разность с одинаковыми аргументами, получим неравенство

$$\begin{aligned} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_{n+1} - A_0 \right|^2 dx dy &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_{n+1} e^{i\varphi_{n+1}} - A_0 e^{i\varphi_n} \right|^2 dx dy \leq \\ &\leq \int \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_{n+1} e^{i\varphi_{n+1}} - A_0 e^{i\varphi_n} \right|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

На основе равенства Парсеваля (A5) можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Gamma} \left| A_{n-1} e^{i\psi_{n-1}} - A_0 e^{i\psi_0} \right|^2 dx dy = \\ & = \int \int_{\Gamma} \left| B_n e^{i\psi_0} - B_n e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (A7)$$

Далее покажем, что "в малом" имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Gamma} \left| B_n e^{i\psi_0} - B_n e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta \leq \\ & \leq \int \int_{\Gamma} \left| B_{n-1} e^{i\psi_0} - B_n e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (A8)$$

Действительно, при условии

$$\psi_n - \psi_0 = \Delta\psi, \quad |\Delta\psi| \ll 1, \quad (A9)$$

$$\frac{B_{n-1}}{B_n} = 1 + \Delta B, \quad |\Delta B| \ll 1 \quad (A10)$$

получим выражения:

$$\left| e^{i\psi_n} - e^{i\psi_0} \right|^2 = 4 \sin^2 \left[\frac{\psi_n - \psi_0}{2} \right] \approx \Delta\psi^2, \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} & \left| e^{i\psi_n} - \frac{B_{n-1}}{B_n} e^{i\psi_0} \right|^2 = 1 + \left[\frac{B_{n-1}}{B_n} \right]^2 - \\ & - 2 \left[\frac{B_{n-1}}{B_n} \right] \cos(\psi_n - \psi_0) \approx \Delta B^2 + \Delta\psi^2. \end{aligned} \quad (A12)$$

Из формул (A9)–(A12) следует неравенство (A8)

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Gamma} \left| B_n e^{i\psi_0} - B_n e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta = \int \int_{\Gamma} B_n^2 \left| e^{i\psi_0} - e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta = \\ & = \int \int_{\Gamma} B_n^2 \Delta\psi^2 d\xi d\eta \leq \int \int_{\Gamma} B_n^2 [\Delta B^2 + \Delta\psi^2] d\xi d\eta \approx \end{aligned}$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| B_n e^{i\psi_n} - B_{n-1} e^{i\psi_0} \right|^2 d\xi d\eta. \quad (\text{A13})$$

Далее, опять применяя равенство Парсеваля (A5), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| B_{n-1} e^{i\psi_0} - B_n e^{i\psi_n} \right|^2 d\xi d\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_n e^{i\varphi_n} - A_0 e^{i\varphi_0} \right|^2 dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_n - A_0 \right|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

Окончательно из соотношений (A6)—(A8) и (A14) следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_{n+1} - A_0 \right|^2 dx dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_n - A_0 \right|^2 dx dy. \quad (\text{A15})$$

Неравенство (A15) показывает, что итеративный процесс расчета фазы киноформа, формирующего заданное распределение фазы на некотором расстоянии, сходится при условии близости двух последующих оценок комплексной амплитуды света в плоскости наблюдения.

Но на практике, как показывают численные примеры, этот алгоритм сходится при любой начальной оценке комплексных амплитуд света.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для доказательства неравенства (105) введем обозначения

$$B_n e^{i\psi_n} = FR \left[A_{n-1} e^{i\varphi_0} \right], \quad (\text{B1})$$

$$A_n e^{i\varphi_n} = FR^{-1} \left[B_n e^{i\psi_n} \right], \quad (\text{B2})$$

где B и A — амплитуды в плоскостях наблюдения и киноформа, а ψ и φ — фазы в плоскостях наблюдения и киноформа соответственно, FR и FR^{-1} — обозначение прямого и обратного преобразований Френеля. n — номер итерации.

Из условия сохранения световой энергии можно получить равенство Парсеваля (A5), на основе которого и из утверждения, что модуль разности двух комплексных чисел с разными аргументами больше или равен модулю их разности при одинаковых аргументах, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{\xi}^{\infty} |B_{n-1} - B_n|^2 d\xi d\eta = \int \int_{-\infty}^{\infty} |B_{n-1} e^{i\psi_{n-1}} - B_n e^{i\psi_n}|^2 d\xi d\eta \leq \\
& \leq \int \int_{\xi}^{\infty} |B_{n-1} e^{i\psi_{n-1}} - B_n e^{i\psi_n}|^2 d\xi d\eta = \\
& = \int \int_{\xi}^{\infty} |A_n e^{i\varphi_n} - A_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}}|^2 dx dy \leq \\
& \leq \int \int_{\xi}^{\infty} |A_n e^{i\varphi_n} - A_{n-1} e^{i\varphi_{n-1}}|^2 dx dy = \\
& = \int \int_{\xi}^{\infty} |B_n e^{i\psi_n} - B_{n-1} e^{i\psi_{n-1}}|^2 d\xi d\eta = \\
& = \int \int_{\xi}^{\infty} |B_n - B_{n-1}|^2 d\xi d\eta. \tag{B3}
\end{aligned}$$

Сравнивая первое и последнее выражения в цепочке (B3), получим окончательное неравенство

$$\int \int_{\xi}^{\infty} |B_{n-1} - B_n|^2 d\xi d\eta \leq \int \int_{\xi}^{\infty} |B_n - B_{n-1}|^2 d\xi d\eta. \tag{B4}$$

Неравенство (B4) показывает, что среднее квадратичное отклонение двух последующих оценок амплитуды светового поля в плоскости наблюдения в ходе итераций не будет возрастать.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Для доказательства неравенства (134) и (135) введем обозначения для k -го шага итераций:

$$F_k(x, y) = A_k e^{i\varphi_k}, \quad C_n^{(k)} = B_n^{(k)} e^{i\psi_n}, \quad A_0(x, y) = \sqrt{I_0(x, y)}. \tag{C1}$$

$$A_{k-1} e^{i\varphi_{k-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{i\psi_n} \psi_n(x, y). \tag{C2}$$

$$A_0 e^{i\varphi_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(k)} e^{i\nu_{nk}} \psi_n(x, y). \quad (C3)$$

Используя свойство ортогональности функций $\psi_n(x, y)$ из выражения (132), нетрудно убедиться, что имеет место равенство типа Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_k(x, y)|^2 dx dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n^{(k)}|^2. \quad (C4)$$

Далее, используя (C4) и уже применяемое в прил. А и В свойство разности комплексных чисел, можно получить цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 - A_{k+1}|^2 dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 e^{i\varphi_{k+1}} - A_{k+1} e^{i\varphi_{k+1}}|^2 dx dy \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 e^{i\varphi_k} - A_{k+1} e^{i\varphi_{k+1}}|^2 dx dy = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n^{(k)} e^{i\nu_{nk}} - B_n e^{i\nu_{nk}}|^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n^{(k)} e^{i\nu_{nk}} - B_n e^{i\nu_{n,k-1}}|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 e^{i\varphi_k} - A_k e^{i\varphi_k}|^2 dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 - A_k|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (C5)$$

Сравнивая первое и последнее выражения в (C5), получим окончательное неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 - A_{k+1}|^2 dx dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A_0 - A_k|^2 dx dy.$$

Неравенство (C6) совпадает с неравенством (134) и показывает, что в ходе итеративного решения уравнения (132) ошибка (130) не будет возрастать. Аналогично доказывается неравенство (135), которое гарантирует невозрастание ошибки (131) с ростом числа итераций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lesem L. B., Hirsch P. M., Jordan J. A.* The kinoform: A new wave front reconstruction device. // *IBM J. Res. Develop.*, V. 13(2). 1969. P. 150—155.
2. *Hirsch P. M., Jordan J. A., Lesem L. B.* Method of marking an object dependent diffuser. // Patent US. N. 3619022. 1971. P. 95.
3. *Gerchberg R. W., Saxton W. D.* A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. // *Optik*. V. 35 (2). 1972. P. 237—246.
4. *Goodman J. W.* Introduction to Fourier Optics. New York, McGraw—Hill Book Co, 1968.
5. *Lin B., Gallagher N. C.* Convergence of a spectrum shaping algorithm. // *Appl. Opt.* V. 13(11). 1974. P. 2470—2471.
6. *Fienup J. R.* Phase retrieval algorithms: a comparison. // *Appl. Opt.* V. 21(15). 1982. P. 2758—2769.
7. *Воронцов М. А., Матвеев А. И., Сивоконь В. П.* Оптимальное управление волновым фронтом в задачах фокусировки излучения в произвольную область // Доклады АН СССР. Т. 270. № 6. 1986. С. 1354.
8. *Fienup J. R.* Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform. // *Opt. Lett.* V. 3(1). 1978. P. 27—29.
9. *Fienup J. R.* Iterative method applied to image reconstruction and to computer generated holograms. // *Opt. Eng.* V. 19(3). 1980. P. 297—305.
10. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Физитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971, 408 с.
11. *Kotlyar V. V., Nikolsky I. V., Soifer V. A.* Adaptive iterative algorithm for focusator's synthesis. // *Optik*. V. 88(1). 1991. P. 17—19.
12. *Kotlyar V. V., Nikolsky I. V.* Iterative computing of transmittance optical elements focusing at a predetermined area. // *Opt. & Lasers in Eng.* V. 15(5). 1991. P. 323—330.
13. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1981. 400 с.
14. *Тихонова А. И., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979, 286 с.
15. *Василенко Г. И., Тараторин А. М.* Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986, 302 с.
16. *Березный А. Е.* Квазипериодические оптические элементы. // Компьютерная оптика. М.: МЦНТИ. Вып. 6. 1989. с. 19—23.
17. *Панулис А.* Теория систем и преобразования в оптике. М.: Мир, 1971, 495 с.
18. *Golub M. A., Sisakyan I. N., Soifer V. A.* Infra-red radiation focusators. // *Opt. & Lasers in Eng.* V. 15(5). 1991. P. 297—309.

19. *Siegman A. E.*, Quasifast Hankel transform. // Opt. Lett. V. 1(1). 1977. P. 13—15.
20. *Szapiel S.* Rapid evaluation of the zero—order Hankel transform for optical diffraction problems. // Opt. Applicata. V. 17(4). 1987. P. 355—362.
21. *Magni V., Gerullo G., Desilvestry S.* High—accuracy fast Hankel transform for optical beam propagation. // J. Opt. Soc. Am. A. V. 9(11). 1992. P. 2031—2033.
22. *Khonina S. N., Kotlyar V. V., Soifer V. A.* Fast Hankel transform for focusators synthesis. // Optik. V. 88(4). 1991. P. 182—184.
23. *Doskolovich L. L., Khonina S. N., Kotlyar V. V.* et al. Focusators into a ring. // Opt. & Quant. Electr. V. 25. 1993. P. 801—814.
24. *Березный А. Е., Прохоров А. М., Сисахян Н. П.*, и др. Бессель—оптика. // Доклады АН СССР. Т. 274. № 4. 1984. С. 802—805.
25. *Khonina S. N., Kotlyar V. V., Soifer V. A.* et al. Trochoson. // Opt. Comm. V. 91. (3—4). 1992. P. 158—162.
26. *Котляр В. В., Сойфер В. А.* Пространственный фильтр для дифференцирования радиально—симметричных световых полей. // Письма в ЖТФ. Т. 16. № 12. 1990. С. 30—33.
27. *Khonina S. N., Kotlyar V. V.*, et al. The phase rotor filter // J. Mod. Opt. V. 39(5). 1992. P. 1147—1154.
28. *Голуб М. А., Карнеев С. В., Прохоров А. М.* и др. Фокусировка излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм. // Письма в ЖТФ. Т. 7. № 10. 1981. С. 618—623.
29. *McLeod J. H.* The axicon: A new type optical element. // J. Opt. Soc. Am. V. 44(8). 1954. P. 592—597.
30. *Tremblay R., D'Astons V., Rey G., Blanshard M.* Laser plasmasoptically pumped by focusing with axicon a CO₂—TEA laser beam in a high—pressure gas. // Opt. Comm. V. 28(2). 1979. P. 193.
31. *Brenden B. B., Russel J. T.* Optical playback apparatus focusing system for producing a prescribed energy distribution along an axial focal zone. // Appl. Opt. V. 23.(19) 1984. P. 3250.
32. *Michaltsova I. A., Nalivaiko V. I., Soldatenkov I. S.* Kinoform axicon. // Optik. V. 67(3). 1984. P. 267.
33. *Khonina S. N., Kotlyar V. V., Soifer V. A.* Diffraction computation of focusator into longitudinal segment and multi—focal lens. // Proceed. SPIE 1780. 1993. P. 263—272.
34. *Khonina S. N., Kotlyar V. V., Soifer V. A.* Calculation of the focusator into a longitudinal line—segment and study of a focal area. // J. Mod. Opt. V. 40(5). 1993. P. 761—769.
35. *Голуб М. А., Живописцев Е. С., Карнеев С. В.* и др. Получение асферических волновых фронтов при помощи машинных голограмм. // Доклады АН СССР. Т. 253. № 5. 1980. С. 1104—1108.
36. *Fainchild R. C., Fienup J. R.* Computer—oriented aspheric holographic optical elements. // Opt. Engin. V. 21(1). 1982. P. 133—140.
37. *Котляр В. В., Филиппов С. В.* Формирователи волновых фронтов. // Письма в ЖТФ. Т. 19. № 18. 1993. С. 5—9.
38. *Волынкина Е. А., Ибрагимов Э. А., Усманов Т.* Определение класса лазерных пучков, обладающих дифракционной сходимостью. // Оптика и спектроскопия. Т. 72. № 6. 1992. С. 1457—1483.
39. *Котляр В. В., Сойфер В. А., Филиппов С. В.* Амплитудные формирователи волновых фронтов и амплитудные линзы. // Оптика и спектроскопия. Т. 75. № 4. 1993. С. 923—927

40. *Durnin J.* Exact solutions for nondiffracting beam I. The scalar theory. // *J. Opt. Soc. Am.* V. 4(4). 1987. P. 651—654.
41. *Durnin J., Miceli J. J., Eberly J. H.* Comparison of Bessel and Gaussian beams. // *Opt. Lett.* V. 13(2). 1988. P. 79—80.
42. *Валеев А. Б., Кривошников С. Г.* Модовые свойства бesselевых пучков. // *Квантовая электроника.* Т. 16. № 5. 1989. С. 1047—1049.
43. *Бельский А. М.* Самовоспроизводящиеся пучки и их связь с недифрагирующими пучками. // *Оптика и спектроскопия.* Т. 73. № 5. 1992. С. 947—951.
44. *Унгер Х. Г.* Плоскостные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир, 1980.
45. *Яриу А.* Оптическая электроника. М.: Сов. радио, 1986.
46. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
47. *Прудников А. П., Бричков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 749 с.
48. *Котляр В. В., Соифер В. А., Хонина С. Н.* Фазовые оптические элементы для формирования квазимод свободного пространства. // *Квантовая электроника.* Т. 18. № 11. 1991. С. 1391—1394.
49. *Голуб М. А., Карпеев С. В., Казанский Н. Л.* и др. Фазовые пространственные фильтры, согласованные с поперечными модами. // *Квантовая электроника.* Т. 15. № 3. 1988. С. 617—618.
50. *Голуб М. А., Сисакян И. Н., Соифер В. А.* и др. Оптические элементы для анализа и формирования поперечно-модового состава. // *Квантовая электроника.* Т. 16. № 4. 1989. С. 832—840.
51. *Голуб М. А., Сисакян И. Н., Соифер В. А.* Моданы — новые элементы компьютерной оптики. // *Компьютерная оптика.* М.: МЦНТИ. Вып. 8. 1990. С. 3—64.
52. *Котляр В. В., Никольский И. В., Соифер В. А.* Фазовые формирователи эрмитовых пучков. // *Оптика и спектроскопия.* Т. 75. № 4. 1993. С. 918—922.
53. *Котляр В. В., Никольский И. В., Соифер В. А.* Фазовые формирователи эрмитовых мод в дифракционных порядках. // *Письма в ЖГФ.* Т. 19. № 20. 1993. С. 20—23.
54. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4 т. Т. 4. Ч. 1. М.: Наука, 1974.
55. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.

Котляр Виктор Викторович
Сойфер Виктор Александрович

**ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ
ДЛЯ ДИФРАКЦИОННОЙ ОПТИКИ**

Редактор Т. И. Кузнецова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. И. Щелокова
Компьютерная верстка О. А. Карасева

Лицензия ЛР № 020301 от 28.11.91.

Подписано в печать 17.05.95,
Формат 60x34 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,1. Усл. кр.-отт. 5,23. Уч.-изд. л. 5,5
Тираж 100 экз. Заказ № 54. Арт. С—11/95.

Самарский государственный аэрокосмический
университет им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского аэрокосмического университета.
443001, г. Самара, ул. Ульяновская, 18.