МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА"
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.М. КНУТОВА, С.Я. ШАТСКИХ

КОМБИНАТОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева" в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика и специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

САМАРА
Издательство Самарского университета
2019

УДК 519.11 (075)
ББК 22.141 я7
К 537

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. О. В. Горячкин
д-р техн. наук, проф. А. Ю. Привалов

Кнутова, Елена Михайловна

К 537 **Комбинаторные вероятности:** учеб. пособие /*Е.М. Кнутова, С.Я. Шатских.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2019. – 84 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1372-6

Данное пособие предназначено для студентов специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность и направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика, изучающих в рамках курса "Теория вероятностей и математическая статистика"комбинаторные методы вычисления вероятностей (в рамках классического определения). Пособие содержит большое количество задач, многие из которых сопровождаются несколькими вариантами решения. Такой подход наилучшим образом позволяет выработать у студентов "комбинаторную"интуицию. Одна из глав данного учебного пособия посвящена разбиениям множеств, которые редко встречаются в отечественной литературе.

Подготовлено совместно на кафедре технической кибернетики и кафедре функционального анализа и теории функций.

УДК 519.11 (075)
ББК 22.141 я7

ISBN 978-5-7883-1372-6
©Самарский университет, 2019

Оглавление

Введение

Настоящая брошюра ориентирована на студентов 3-го курса математической специальности ”Компьютерная безопасность”, приступающих к изучению курса ”Теория вероятностей и математическая статистика”. Несмотря на то, что к третьему курсу студенты уже знакомы с основами комбинаторики, на первых практических занятиях по теории вероятностей весьма желательно дать краткое напоминание основных определений и методов комбинаторики. Для этой цели и написано данное пособие. Кроме того, это пособие может служить и для первоначального ознакомления с предметом. В настоящем пособии принято элементарное изложение, поэтому в нем нет производящих функций [1, стр. 47]. Более продвинутое изложение комбинаторных методов можно найти в книгах [2, 3].

Осенью 1968 года Шатских С.Я., аспиранту первого года кафедры вычислительной математики Казанского университета, поручили вести практические занятия по курсу ”Теория вероятностей”. Напутствуя его перед началом занятий, профессор А.В. Сульдин сказал: ”Только не увлекайтесь задачами на комбинаторные вероятности, наши студенты их довольно плохо решают, а за несколько часов Вы их комбинаторике все равно не научите”.

Осенью 1982 года во время разговора с профессором Б.В. Гнеденко на кафедре теории вероятностей Московского государственного университета я услышал от Бориса Владимировича следующее: ”Только не давайте на экзамене задачи на комбинаторные вероятности, их быстро решают даже студенты, не посещавшие занятий, поэтому хорошее решение этих задач не может служить основой для проверки знаний материала курса теории вероятностей”.

Сравнение этих двух высказываний показывает не только разницу уровней студентов мехматов МГУ и КГУ, но и существование определенной методической проблемы преподавания комбинаторики.

По своему опыту могу отметить, что хорошие студенты, без всяких дополнительных объяснений, довольно быстро справляются с стандартными задачами на комбинаторные вероятности, хотя подчас и не могут хорошо объяснить решение. Средние студенты решают такие задачи довольно плохо даже после подробных объяснений. Разумеется, подобные ситуации возникают и при изучении других разделов математики. Однако при изучении комбинаторики эти проблемы выражены наболее резко.

И здесь важно объяснить студентам то обстоятельство, что основные объекты комбинаторики могут рассматриваться с различных точек зрения. Так перестановки множества различных элементов являются упорядоченными выборками максимального объема без возвращения, а перестановки с повторениями, так же, как и перетасовки, – упорядоченными разбиениями. Неупорядоченные выборки без возвращения можно рассматривать и как подмножества, и как "маршруты", и как способы" расселения скворцов по скворечникам". Именно решение такого рода задач позволяет выработать "комбинаторную" интуицию.

Чтобы показать, что разные точки зрения приводят к одному и тому же результату, лучше всего использовать биективное доказательство: "Лучше предъявить явно взаимно однозначное соответствие (биекцию) между двумя конечными множествами, чем просто доказать, что они имеют одинаковое число элементов. Доказательство, которое показывает, что некоторое множество S содержит m элементов, построением явной биекции между S и некоторым другим множеством, заведомо имеющим m элементов, называется *комбинаторным* или *биективным доказательством*" (см. [4, стр. 27]).

В настоящем пособии теоремы и задачи нумеруются по главам, а для рисунков используется сквозная нумерация через весь документ.

1 Перестановки

1.1 Правило суммы и произведения

При решении комбинаторных задач часто используют следующие простые правила[1].

Правило суммы. *Пусть требуется выполнить n действий. Если первое действие можно выполнить m_1 способами, второе действие – m_2 способами и так далее, n-ое действие – m_n способами, и нет двух различных действий, которые можно было бы выполнить одним общим способом, то выполнение всех n действий можно осуществить $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ числом способов.*

Правило произведения. *Пусть требуется выполнить одно за другим n действий. Причем выполнение каждого последующего действия не зависит от выполнения предыдущих. Если первое действие можно выполнить m_1 способами, второе действие – m_2 способами и так далее, n-ое действие – m_n способами, то последовательное выполнение всех n действий можно осуществить $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ числом способов.*

Для иллюстрации правила произведения рассмотрим две простые задачи.

Задача 1.1. Из Самары до Москвы можно добраться тремя способами: поездом, самолетом и пароходом. Из Москвы до Санкт-Петербурга – четыремя: поездом, самолетом, пароходом, и автобу-

[1] Правила суммы и произведения можно обосновать с помощью метода математической индукции. Однако, по словам Дж. Риордана [3, стр. 9], "правила эти по своей природе являются определениями, и их скорее нужно понимать, нежели доказывать".

сом. Каким числом способов можно добраться из Самары до Санкт-Петербурга через Москву?

Решение. Здесь под "действием" будем понимать выбор средства передвижения. Нетрудно видеть, что в этой задаче число различных способов равно $3 \cdot 4 = 12$:

$$\boxed{\text{САМАРА}} \;\; \begin{matrix} \xrightarrow{\text{поезд}} \\ \xrightarrow{\text{самолет}} \\ \xrightarrow{\text{пароход}} \end{matrix} \;\; \boxed{\text{МОСКВА}} \;\; \begin{matrix} \xrightarrow{\text{поезд}} \\ \xrightarrow{\text{самолет}} \\ \xrightarrow{\text{пароход}} \\ \xrightarrow{\text{автобус}} \end{matrix} \;\; \boxed{\text{С-Пб.}}$$

Задача 1.2. В первенстве России по футболу принимают участие 16 команд. Каким числом способов могут быть награждены команды золотой, серебрянной и бронзовой медалями?

Решение. В этой задаче под "действием" понимаем выбор команды для награждения. Золотую медаль может получить каждая из 16 команд. После того как определен владелец золотой медали, серебрянную медаль может получить каждая из 15 оставшихся команд. После того как определены владельцы золотой и серебрянной медали, бронзовую медаль может получить каждая из 14 оставшихся команд. Следовательно, общее число способов которыми могут быть награждены команды золотой, серебрянной и бронзовой медалями равно $16 \cdot 15 \cdot 14 = 4360$.

Замечание. Правила суммы и произведения можно сформулировать в теоретико-множественных терминах. Ниже через $|A|$ будем обозначать число элементов конечного множества A.

Правило суммы: если конечные множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны, т.е.*

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \; \textit{при } i \neq j,$$

то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Правило произведения: для конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *справедливо равенство*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|,$$

где $\times$ – знак декартового произведения множеств.

1.2 Перестановки

Слово "перестановка" употребляется в обыденной речи как изменение порядка следования каких-либо предметов. Например, можно говорить о перестановке слов в предложении или о перестановке мебели в квартире. При этом слово "перестановка" может связываться как с некоторым действием, так и с его результатом, являясь синонимом расположения предметов в каком-либо новом порядке.

В комбинаторике перестановки конечных множеств также рассматривают с двух различных точек зрения.

Согласно первой точке зрения, перестановка конечного множества X есть взаимно однозначное отображение (биекция) множества X на себя

$$\pi : X \longrightarrow X.$$

Вторая точка зрения предполагает, что для элементов множества X есть некоторый естественный порядок следования элементов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ как, например, для множества первых n натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$, а перестановка множества X представляет собой набор всех элементов этого множества, но расположенных в некотором другом порядке $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.

Разумеется, эти точки зрения легко согласуются друг с другом[2]. Для такого согласования достаточно считать, что

$$\pi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_n} \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \quad x_{i_k} = \pi(x_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

[2]Вторая точка зрения более "алгебраична", как известно из курса алгебры, перестановки можно перемножать, при этом совокупность всех перестановок множества из n различных элементов образует симметрическую группу S_n.

Пример. Перестановки множества $X = \{a,\, b,\, c\}$ из трех элементов

$$\{a,\, b,\, c\},\quad \{a,\, c,\, b\},\quad \{b,\, a,\, c\},$$
$$\{b,\, c,\, a\},\quad \{c,\, a,\, b\},\quad \{c,\, b,\, a\}.$$

При решении многих комбинаторных задач конкретная природа множества

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

состоящего из n различных элементов, не играет роли. Поэтому можно отождествлять элемент множества с его номером:

$$x_k \longleftrightarrow k, \qquad k = \overline{1, n},$$

а само множество X отождествлять с множеством первых n натуральных чисел: $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$.

В следующей теореме будет установлена формула для числа различных перестановок множества $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$.

Теорема 1.1. *Число различных перестановок множества* $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ *равно* $n!$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Обозначим число перестановок множества состоящего из n элементов через P_n. Ясно, что при $n = 1$ утверждение теоремы выполняется, так как для одноэлементного множества существует только одна перестановка. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для множества $X = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ состоящего из $(k-1)$–го элемента:

$$P_{k-1} \;=\; (k-1)!, \quad k \geq 3.$$

Выберем произвольную перестановку элементов этого множества $\{x_{i_1},\, x_{i_2},\, \ldots,\, x_{i_{k-1}}\}$ и добавим к ней элемент x_k. В результате получим перестановку из k элементов. Как показывают стрелки на рис. 1 дополнительный элемент x_k можно поместить на k местах: до элемента x_{i_1}, до элемента x_{i_2}, и так далее, до элемента $x_{i_{k-1}}$ и после элемента $x_{i_{k-1}}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{9}{c}{x_k}\\ \hline
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
 & x_{i_1}, & & x_{i_2}, & & \ldots, & & x_{i_{k-1}} &
\end{array}$$

Рис. 1.

Таким образом, каждая перестановка из $(k-1)$-го элемента порождает семейство, состоящее из k различных перестановок k элементов. Нетрудно видеть, что при таком построении разные перестановки из $(k-1)$-го элемента порождают различные семейства перестановок из k элементов.

Таким образом,

$$P_{k-1} \cdot k = P_k.$$

Теорема доказана.

Пример. Шесть различных книг можно разместить на полке 6!=720 способами.

Задача 1.3. Каким числом способов можно рассадить n человек за круглый стол (на n стульях)? Два размещения по местам будем считать совпадающими, если при таких размещениях, каждый человек имеет одних и тех же левых и правых соседей.

Решение.

1-ый вариант. Занумеруем n стульев, стоящих вокруг круглого стола. Тогда общее число рассаживаний n человек (вокруг стола) на эти занумерованные стулья равно $n!$. С другой стороны, если при двух рассаживаниях вокруг стола, каждый человек имеет одних и тех же левых и правых соседей, то такие рассаживания совпадают при некотором "повороте" (циклической перестановке). Заметим, что общее число рассаживаний совпадающих друг с другом при "поворотах" равно n. Обозначим искомое число способов рассадить n человек за круглый стол через $r(n)$. Тогда

$$r(n) \cdot n = n!$$

Таким образом, существует

$$r(n) = (n-1)\,!$$

различных способов рассадить n человек за круглый стол.

2-ой вариант. Докажем равенство $r(n) = (n-1)\,!$ по индукции. При $n = 1, 2$ утверждение справедливо: $r(1) = 0! = 1$, $r(2) = 1! = 1$. Предположим, $r(n) = (n-1)\,!$. Выберем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольное рассаживание n человек за круглым столом и добавим к ним $(n+1)$–го человека x_{n+1}.

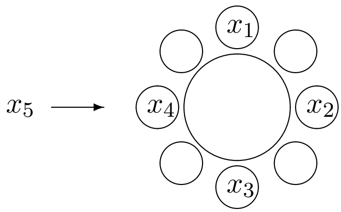

Рис. 2

В результате получим рассаживание за столом $n+1$ человека. Как показывают "пустые" круги (стулья) на рис. 2 ($n = 4$), дополнительного человека x_{n+1} можно поместить на n свободных местах: между x_1 и x_2, между x_2 и x_3, и так далее, между x_n и x_1. Таким образом, каждая круговая перестановка из n элементов порождает семейство n различных круговых перестановок, состоящих из $(n+1)$–го элемента. Причем, при таком построении разные круговые перестановки из n элементов порождают различные семейства круговых перестановок, состоящих из $(n+1)$-го элемента. Таким образом,

$$r(n+1) = n \cdot (n-1)\,! = n\,!,$$

что и требовалось доказать.

Задача 1.4. Найти число всех биекций n-множества X на n-множество Y :

$$f : X \longrightarrow Y, \quad (|X| = n,\ |Y| = n).$$

Решение. Так как число всех биекций

$$f : X \longrightarrow Y, \quad (|X| = n, \, |Y| = n).$$

совпадает с числом всех биекций множества X на себя

$$f : X \longrightarrow X,$$

а каждая такая биекция представляет собой перестановку конечного множества X, то число всех биекций $n-$множества X на $n-$множество Y равно $n!$.

Задача 1.5 *(первая задача о восьми ладьях).* Каким числом способов можно расположить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Решение. Прежде всего отметим, что при таком расположении фигур на каждой горизонтали и на каждой вертикали находится по одной ладье (£):

8			£					
7	£							
6					£			
5								£
4						£		
3				£				
2		£						
1							£	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 3

Введем параметризацию расположения восьми ладей на шахматной доске с помощью перестановок. Для этого обозначим через

a_1 – номер поля, занятого ладьей на 1-ой горизонтали,
a_2 – номер поля, занятого ладьей на 2-ой горизонтали,
$\vdots$
a_8 – номер поля, занятого ладьей на 8-ой горизонтали.

Теперь в качестве параметризации расположения восьми ладей на шахматной доске будем рассматривать упорядоченный набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$. Отметим, что каждая такая параметризация является перестановкой чисел $(1, 2, \ldots, 8)$. Так расположение восьми ладей на рисунке 3 имеет в качестве параметризации следующую перестановку

$$(7,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 5,\ 1,\ 3).$$

Нетрудно видеть, что принятая параметризации устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством перестановок натуральных чисел $(1, 2, \ldots, 8)$ и множеством расположений восьми ладей на шахматной доске, при котором эти ладьи не бьют друг друга. Следовательно, существует $8\,! = 40\,320$ способов расположения восьми ладей на шахматной доске так, что они не могут бить друг друга.

Замечание. Для вычисления факториалов больших натуральных чисел удобно пользоваться
асимптотической формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}[1 + o\,(1)], \quad \text{когда } \ n \longrightarrow \infty.$$

1.3 Перестановки с повторениями

Рассмотрим множество, среди элементов которого имеются одинаковые (неотличимые) элементы разных типов. Перестановки такого множества называются *перестановками с повторениями.* В следующей теореме устанавливается формула для числа различных перестановок с повторениями.

Теорема 1.2. *Пусть множество W состоит из n элементов, среди которых имеется $r_1 > 0$ одинаковых элементов первого типа, $r_2 > 0$ одинаковых элементов второго типа и так далее, $r_k > 0$ одинаковых элементов $k-$го типа таких, что*

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.$$

Тогда число различных перестановок с повторениями множества W равно

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}.$$

Доказательство. 1-ый вариант. Обозначим число всех различных перестановок с повторениями множества W через

$$P(n, k; r_1, r_2, \ldots r_k).$$

Рассмотрим одну перестановку с повторениями множества W и заиндексируем в ней все одинаковые элементы таким образом, что они станут отличимыми друг от друга. Тогда, переставляя заиндексированные элементы внутри каждого типа, из одной такой перестановки можно составить ровно

$$r_1!r_2!\ldots r_k!$$

различных перестановок. Следовательно, из всех перестановок с повторениями можно сделать

$$P(n, k; r_1, r_2, \ldots r_k) \cdot r_1!r_2!\ldots r_k! = n!,$$

перестановок. Теорема доказана.

2-ой вариант доказательства теоремы 1.2 будет представлен в параграфе 2.3.

Пример. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова "математика"?

Решение. В этом примере число всех букв $n = 10$, число букв "м"($r_1 = 2$), число букв "а"($r_2 = 3$), число букв "т"($r_3 = 2$), число букв "е"($r_4 = 1$), число букв "и"($r_5 = 1$), число букв "k"($r_6 = 1$), причем 2+3+2+1+1+1=10.

Поэтому

$$P(10, 6; 2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151\,200.$$

1.4 Перетасовки

Для множества первых n натуральных чисел будем использовать обозначение

$$\mathbb{Z}_n = \{1, \cdots, n\}.$$

Для множества первых $p+q$ натуральных чисел

$$\mathbb{Z}_{p+q} = \{1, \cdots, p, p+1, \cdots, p+q\}.$$

будем рассматривать $(p,q)-$*перетасовки*, т.е. такие перестановки элементов этого множества, в результате которых порядок следования первых p элементов и последних q элементов не нарушается[3]. Другими словами, если удалить из множества, полученного в результате $(p,q)-$перетасовки, элементы $1, \cdots, p$, оставшиеся элементы $p+1, \cdots, p+q$ будут идти в порядке возрастания; и наоборот, после удаления элементов $p+1, \cdots, p+q$ элементы $1, \cdots, p$ располагаются в порядке возрастания.

Приведем пример (3,4)-перетасовки множества $\mathbb{Z}_7$:

$$\mathbb{Z}_7 \mapsto \{4,\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 3,\ 7\}.$$

Обозначим число всех $(p,q)-$перетасовок множества $\mathbb{Z}_{p+q}$ через $\pi(p,q)$.

Теорема 1.3. *Число всех $(p,q)-$перетасовок множества $\mathbb{Z}_{p+q}$*

$$\pi(p,q) = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,.$$

Доказательство.

1-ый вариант доказательства.

Рассмотрим произвольную перестановку элементов множества $\mathbb{Z}_{p+q}$:

$$\{a_1, \ldots, a_{p+q}\}. \tag{1.1}$$

[3] Между элементами подмножеств $\{1, \cdots, p\}$ и $\{p+1, \cdots, p+q\}$ порядок следования может нарушаться.

С помощью последовательного выполнения перестановок элементов $\{1, \ldots, p\}$, а затем $\{p+1, \ldots, p+q\}$ перестановку (1.1) можно преобразовать в перестановку

$$\{b_1, \ldots, b_{p+q}\},$$

которая является $(p, q)-$перетасовкой множества $\mathbb{Z}_{p+q}$. Ясно, что каждую перестановку элементов множества $\mathbb{Z}_{p+q}$ можно получить в результате последовательного выполнения трех перестановок: перестановки элементов $\{1, \ldots, p\}$, перестановки элементов $\{p+1, \ldots, p+q\}$ и некоторой $(p, q)-$перетасовки. Вспоминая, что число всех перестановок множества $\mathbb{Z}_{p+q}$ равно $(p+q)!$, будем иметь

$$p!\, q! \pi(p, q) = (p+q)!$$

Таким образом,

$$\pi(p, q) = \frac{(p+q)!}{p!\, q!}.$$

Теорема доказана.

2-о й в а р и а н т доказательства будет изложен в параграфе 2.3.

Пример. Число всех различных (3,4)-перетасовок множества $\mathbb{Z}_7$ равно

$$\frac{(3+4)!}{3!\, 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Замечание. Перетасовки представляют собой пример "перестановок с запретами". Более подробно такие перестановки будут рассмотрены в третьей главе.

2 Выборки

2.1 Основные определения

Рассмотрим множество состоящее из n различных элементов:

$$\mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Считая это множество *неупорядоченным*, будем называть его *генеральной совокупностью.* Число элементов генеральной совокупности будем называть ее *объемом* и обозначать через $|\mathcal{M}|$. В нашем случае $|\mathcal{M}| = n$.

Из генеральной совокупности $\mathcal{M}$ будем извлекать элементы, образовывая выборки. Число элементов некоторой выборки $\mathcal{A}$ будем называть *объемом* этой выборки и обозначать через $|\mathcal{A}|$.

Будем классифицировать выборки по двум признакам:

1. *упорядоченные/неупорядоченные выборки;*
2. *выборки с возвращением/без возвращения.*

В результате получим 4 вида выборок:

1. *упорядоченные с возвращением;*
2. *упорядоченные без возвращения;*
3. *неупорядоченные без возвращения;*
4. *неупорядоченные с возвращением.*

Вначале рассмотрим выборки без возвращения. При формировании таких выборок элементы генеральной совокупности извлекаются и обратно в генеральную совокупность не возвращаются. Поэтому в выборках без возвращения все элементы различны, а число элементов не превосходит объема генеральной совокупности.

Упорядоченная выборка без возвращения представляет собой подмножество генеральной совокупности:

$$\{a_{i(1)}, \ldots, a_{i(k)}\} \subseteq \mathcal{M}, \quad \text{где } k \leq n, \tag{2.1}$$

которое получено в результате последовательного извлечения элементов[4]: первым извлечен элемент $a_{i(1)}$, вторым – элемент $a_{i(2)}$, и т. д., наконец, последним – элемент $a_{i(k)}$.

Таким образом, упорядоченные выборки являются упорядоченными подмножествами генеральной совокупности. Порядок следования элементов в таких выборках играет важную роль:

две упорядоченные выборки считаются равными, если они совпадают по составу (состоят из одних и тех же элементов) и по порядку следования элементов.

Неупорядоченная выборка без возвращения представляет собой неупорядоченное подмножество генеральной совокупности:

$$\{a_{i(1)}, \ldots, a_{i(k)}\} \subseteq \mathcal{M}, \quad \text{где } k \leq n.$$

Порядок следования элементов в неупорядоченных выборках не играет роли:

две неупорядоченные выборки считаются равными, если они совпадают только по составу (состоят из одних и тех же элементов).

Чтобы при написании отличать упорядоченные выборки от неупорядоченных будем использовать обозначение с круглыми скобками

$$(a_{i(1)}, \ldots, a_{i(m)})$$

для упорядоченных выборок и с квадратными

$$[a_{i(1)}, \ldots, a_{i(m)}]$$

для неупорядоченных.

[4]Если считать, что выборка извлечена из генеральной совокупности целиком, то располагая элементы этой выборки в одну строку, как это сделано в формуле (2.1), мы тем самым устанавливаем порядок следования элементов.

Пример. Для генеральной совокупности

$$\mathcal{M} = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}.$$

опишем все выборки без возвращения объема 2.

неупорядоченные выборки	*упорядоченные выюорки*
$[\clubsuit, \diamondsuit]$	$(\clubsuit, \diamondsuit)$, $(\diamondsuit, \clubsuit)$
$[\clubsuit, \heartsuit]$	$(\clubsuit, \heartsuit)$, $(\heartsuit, \clubsuit)$
$[\clubsuit, \spadesuit]$	$(\clubsuit, \spadesuit)$, $(\spadesuit, \clubsuit)$
$[\diamondsuit, \heartsuit]$	$(\diamondsuit, \heartsuit)$, $(\heartsuit, \diamondsuit)$
$[\diamondsuit, \spadesuit]$	$(\diamondsuit, \spadesuit)$, $(\spadesuit, \diamondsuit)$
$[\heartsuit, \spadesuit]$	$(\heartsuit, \spadesuit)$, $(\spadesuit, \heartsuit)$

Теперь перейдем к выборкам с возвращением. В таких выборках результат извлечения элемента фиксируется, а сам элемент возвращается обратно в генеральную совокупность. При этом уже извлеченный один раз элемент может оказаться извлеченным еще несколько раз. Поэтому среди элементов выборки с возвращения могут быть одинаковые, а число элементов (объем выборки с возвращением) может быть любым. В частности, объем выборки с возвращением может быть больше объема генеральной совокупности.

Упорядоченная выборка с возвращением представляет собой упорядоченное множество

$$(a_{i(1)}, \ldots, a_{i(m)}), \quad \text{где } a_{i(l)} \in \mathcal{M}, \text{ для всех } l = \overline{1, m}.$$

Неупорядоченная выборка с возвращением представляет собой неупорядоченное множество

$$[a_{i(1)}, \ldots, a_{i(m)}], \quad \text{где } a_{i(l)} \in \mathcal{M}, \text{ для всех } l = \overline{1, m}.$$

Пример. Для генеральной совокупности

$$\mathcal{M} = \{\bigstar, \bigcirc\}$$

опишем все выборки с возвращением объема 3.

неупорядоченные выборки	*упорядоченные выборки*
$[\bigstar,\bigstar,\bigstar]$	$(\bigstar,\bigstar,\bigstar)$
$[\bigstar,\bigstar,\bigcirc]$	$(\bigstar,\bigstar,\bigcirc)$, $(\bigstar,\bigcirc,\bigstar)$, $(\bigcirc,\bigstar,\bigstar)$
$[\bigstar,\bigcirc,\bigcirc]$	$(\bigstar,\bigcirc,\bigcirc)$, $(\bigcirc,\bigstar,\bigcirc)$, $(\bigcirc,\bigcirc,\bigstar)$
$[\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc]$	$(\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc)$

Нашей основной задачей будет подсчет числа выборок различных типов из заданных генеральных совокупностей.

2.2 Упорядоченные выборки с возвращением

Теорема 2.1. *Число всех упорядоченных выборок с возвращением объема m* из генеральной совокупности объема n равно n^m.

Доказательство. 1-ый вариант. При $m = 2$ можно расположить все выборки в клетках таблицы размера $n \times n$

(a_1, a_1)	$\dots$	(a_1, a_j)	$\dots$	(a_1, a_n)
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
(a_i, a_1)	$\dots$	(a_i, a_j)	$\dots$	(a_i, a_n)
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
(a_n, a_1)	$\dots$	(a_n, a_j)	$\dots$	(a_n, a_n)

И, таким образом, в этом случае общее число выборок равно n^2. При $m = 3$ будем рассматривать пару (a_i, a_j) как элемент нового типа. Таких элементов ровно n^2. Каждую упорядоченную тройку (a_i, a_j, a_k) можно рассматривать как (единственную) упорядоченную пару $((a_i, a_j), a_k)$. Но число таких пар равно $n^2 \cdot n = n^3$. Утверждение для любого m получается по индукции.

2-ой вариант. Все упорядоченные выборки с возвращением можно получить в результате последовательного извлечения (и возвращения) элементов генеральной совокупности $\mathcal{M}$. Первый элемент можно извлечь n способами. Второй элемент, а также все последующие, можно извлечь также n способами. Применяя правило произведения, можно утверждать, что общее число извлечений, а стало быть и общее число всех упорядоченных выборок с возвращением, равно $n \cdot \ldots \cdot n = n^m$. Теорема доказана.

Задача 2.1. *Доказать, что число всех отображений*

$$f : X \longrightarrow Y \quad (|X| = m, \, |Y| = n) \tag{2.2}$$

равно n^m.

Решение. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Каждому отображению вида (2.2) можно поставить в соответствие единственную упорядоченную последовательность

$$\{f(x_1), \ldots, f(x_m)\}$$

элементов множества Y. И наоборот, каждая последовательность m элементов

$$\{y_1, \ldots, y_m\}$$

множества Y единственным образом задает отображение:

$$f : X \longrightarrow Y$$

такое, что

$$f(x_1) = y_1, \ldots, \, f(x_m) = y_m.$$

Таким образом, между множеством всех отображений

$$f : X \longrightarrow Y$$

и множеством последовательностей $\{y_1, \ldots, y_m\}$ элементов множества Y установлено взаимно-однозначное соответствие. Осталось заметить, что каждую последовательность m элементов множества Y можно рассматривать как упорядоченную выборку (с возвращением) объема m из генеральной совокупности Y объема n. Но число таких выборок равно n^m.

2.3 Упорядоченные выборки без возвращения

Теорема 2.2. *Число всех упорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n равно*

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Все упорядоченные выборки без возвращения можно получить в результате последовательного извлечения элементов из генеральной совокупности $\mathcal{M}$. Первый элемент можно извлечь n способами. Второй элемент – $(n-1)$ способом, и т.д., последний m–й элемент – $(n-m+1)$ способом. Применяя правило произведения, можно утверждать, что общее число извлечений, а стало быть, и общее число всех упорядоченных выборок без возвращения, равно $n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-m+1)$. Теорема доказана.

Замечание. В комбинаторике используют традиционные обозначения[5] для дроби в правой части равенства (2.3)

$$A_n^m = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

И в этом случае говорят о *"числе размещений из n элементов по m"*. Таким образом, число всех упорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n равно A_n^m – числу размещений из n элементов по m.

Рассмотрим случай, когда $m = n$ (объем выборки совпадает с объемом генеральной совокупности). В этом случае число всех упорядоченных выборок без возвращения равно

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

[5]Функцию $(n)_m := n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-m+1)$, которую рассматривают и для нецелых n, иногда называют *"факториалом числа n порядка m"*.

Причем все выборки совпадают по составу и отличаются лишь порядком следования элементов. Таким образом, мы имеем дело с *перестановками* n различных элементов, число которых, как известно, равно $n!$

Задача 2.2. Из генеральной совокупности, содержащей n элементов, извлекается упорядоченная выборка с возвращением объема m. Найти вероятность события, состоящего в том, что ни один элемент в этой выборке не появляется дважды, т. е. что наша выборка могла быть также получена выбором без возвращения.

Решение. Число всех упорядоченных выборок с возвращением объема m из генеральной совокупности объема n равно n^m. Число всех упорядоченных выборок без возвращением объема m из генеральной совокупности объема n равно

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

Используя классическое определение вероятности случайного события как "*отношения числа благоприятствующих событию исходов к общему числу равновозможных исходов*", находим вероятность искомого события[6]:

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n^m}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим частный случай предыдущей задачи.

Задача 2.3 *(Задача о несовпадении дней рождения).* Пусть n – число дней в году ($n = 365$), а дни рождения m человек образуют упорядоченную выборку объема m из совокупности всех дней года. Считаем, что $m < n$. Найдем вероятность того, что никакие два человека в этой выборке не имеют одинаковых дней рождения.

Решение. Используя формулу (2.4), получаем

$$p = \left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{365}\right).$$

[6] Мы предполагаем равновозможность всех упорядоченных выборок с возвращением.

Замечание. Довольно неожиданные результаты численных расчетов показывают, что при $m = 23$ вероятность $p < \frac{1}{2}$. Таким образом, для 23 человек вероятность того, что по крайней мере у двух из них дни рождения совпадают, больше $\frac{1}{2}$. Более того, среди 68 человек с вероятностью 0.999 по крайней мере двое имеют одинаковый день рождения ("Парадокс дней рождения").

2.4 Неупорядоченные выборки без возвращения

Теорема 2.3. *Число всех неупорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n равно*

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную неупорядоченную выборку объема m из генеральной совокупности $\mathcal{M}$:

$$[a_{i(1)}, \dots, a_{i(m)}]. \tag{2.5}$$

Элементы этой выборки можно перенумеровать с помощью перестановки индексов π:

$$\{1, \dots, m\} \ni l \longmapsto \pi(l) \in \{1, \dots, m\}.$$

В результате получим новую выборку, которую будем считать *упорядоченной*

$$(a_{i(\pi(1))}, \dots, a_{i(\pi(m))}). \tag{2.6}$$

Ясно, что эта выборка по составу совпадает с исходной, но отличается от нее порядком следования элементов. Так как S_m - множество всех перестановок m различных элементов содержит равно $m!$ перестановок, то из одной неупорядоченной выборки (2.5) можно получить множество $m!$ упорядоченных выборок вида (2.6):

$$[a_{i(1)}, \dots, a_{i(m)}] \longrightarrow \{(a_{i(\pi(1))}, \dots, a_{i(\pi(m))})\}, \ \pi \in S_m. \tag{2.7}$$

Причем, все упорядоченные выборки, полученные таким "тиражированием" с помощью перестановок, будут совпадать по составу и отличаться порядком следования элементов. Применяя операцию "тиражирования" вида (2.7), ко всем неупорядоченным выборкам вида (2.5), получим множество всех различных упорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n.

Обозначим через X число всех всех неупорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n. Используя теорему 2.2 и приведенные выше рассуждения, можно утверждать, что

$$X \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Таким образом,

$$X = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Теорема доказана.

В комбинаторике используются традиционные обозначения

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{2.8}$$

и в этом случае говорят о "*числе сочетаний из n элементов по m*".

Замечание. Таким образом, число всех неупорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n равно C_n^m - числу сочетаний из n элементов по m.

Задача 2.4. Придумать новый вариант доказательства теоремы 2.3 с помощью превращения упорядоченных выборок в неупорядоченные, используя преобразование "стирания порядка следования элементов" т.е. на основе отображения, обратного отображению (2.7)

$$[a_{i(1)}, \ldots, a_{i(m)}] \longleftarrow \{(a_{i(\pi(1))}, \ldots, a_{i(\pi(m))})\},\ \pi \in S_m.$$

Вернемся к **теоремам 1.2** и **1.3** первой главы. Теперь, используя сочетания, мы можем изложить 2-ой вариант доказательства этих теорем.

2-ой вариант доказательства **теоремы 1.2**. Рассмотрим множество, состоящее из n ячеек:

		...		
1	2		$n-1$	n

Разобьем процедуру размещения n элементов по этим ячейкам (по одному элементу в каждую ячейку), что соответствует перестановке этих n элементов, на k последовательных действий:

1-ое действие. Сначала разместим r_1 одинаковых элементов 1-го типа. Для этого произвольным образом выберем какие-либо r_1 ячеек из данных n. 1-ое действие можно осуществить $C_n^{r_1}$ способами (в силу неразличимости элементов одного типа).

2-ое действие. Затем разместим r_2 одинаковых элементов 2-го типа. Для этого произвольным образом выберем какие-либо r_2 ячеек из оставшихся свободных $n - r_1$ ячеек. 2-ое действие можно осуществить $C_{n-r_1}^{r_2}$ способами.

$\vdots$

$(k-1)$-ое действие. В свободных $n-r_1-r_2-...-r_{k-2}$ ячейках разместим r_{k-1} одинаковых элементов $(k-1)$-го типа $C_{n-r_1-r_2-...-r_{k-2}}^{r_{k-1}}$ способами.

k-ое действие. В оставшиеся $n - r_1 - r_2 - ... - r_{k-1}$ ячейки единственным образом поместим r_k одинаковых элементов k-го типа (что также совпадает с $C_{n-r_1-r_2-...-r_{k-1}}^{r_k}$).

По правилу произведения для получения общего числа способов выполнить последовательно данные k действий следует перемножить полученные числа сочетаний:

$$C_n^{r_1} \cdot C_{n-r_1}^{r_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-r_1-r_2-...-r_{k-2}}^{r_{k-1}} \cdot C_{n-r_1-r_2-...-r_{k-1}}^{r_k}.$$

Расписывая каждый множитель по формуле (2.8) и сокращая соответствующие факториалы, получим утверждение теоремы 1.2.

2-ой вариант доказательства **теоремы 1.3**. Рассмотрим множество, состоящее из $p + q$ ячеек:

		…				…	
1	2		p	$p+1$	$p+2$		$p+q$

В этом множестве произвольным образом отметим p ячеек, в которые поместим элементы $1, \dots, p$ в порядке возрастания. В оставшиеся q ячеек поместим в порядке возрастания элементы $p+1, \dots, p+q$. Заметим, что p ячеек из данных $p+q$ можно выбрать числом способов, равным C_{p+q}^{q}. Это и будет число всех $(p, q)-$перетасовок, поскольку заполнение p отмеченных и q оставшихся ячеек проводится единственно возможным способом. Теорема доказана.

2.4.1 Бином Ньютона

Теорема 2.4. *Имеет место равенство*[7]

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \, x^m \, y^{n-m} \qquad \textit{(бином Ньютона).}$$

Доказательство. Запишем $n-$ю степень в виде произведения n "скобок"

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y). \tag{2.9}$$

"Скобки стоящие в правой части этого равенства, можно занумеровать:

$$\underbrace{(x+y)}_{1}\,\underbrace{(x+y)}_{2}\dots\underbrace{(x+y)}_{n}.$$

Используя введенную нумерацию, можно считать, что "скобки" с разными номерами различны, и все они образуют $n-$элементную генеральную совокупность. Ясно, что при вычислении произведения в правой части равенства (2.9) мы в некоторых m "скобках"

[7] Более общая полиномиальная теорема будет доказана в главе, посвященной разбиениям множеств.

$(x+y)$ выберем x, а в оставшихся $n-m$ "скобках" выберем y. В результате раскрытия скобок получим сумму слагаемых следующего вида

$$x^m y^{n-m}, \qquad m = \overline{0, n}. \tag{2.10}$$

Однако выбор m "скобок" можно производить несколькими способами. И для фиксированного m слагаемые вида (2.10) будут встречаться в сумме столько же раз, сколько существует неупорядоченных выборок без возвращения объема m из генеральной совокупности объема n. Число таких выборок равно C_n^m. Следовательно,

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \, x^m \, y^{n-m}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Коэффициенты C_n^m в формуле бинома Ньютона называют *биномиальными* коэффициентами.

Следствие. *Справедливы тождества*

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n, \qquad \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0. \tag{2.11}$$

Доказательство. Для доказательства этих тождеств достаточно положить в формуле бинома Ньютона сначала $x = y = 1$, а затем $x = -y = 1$.

Задача 2.5. Доказать, что наибольшее из чисел C_n^m $(m = \overline{0, n})$ достигается при

$$m = \left[\frac{n}{2}\right], \text{ где } [\alpha] \text{ – целая часть числа } \alpha.$$

Решение. Решение этой задачи сразу следует из пары легко доказываемых неравенств

$$C_n^{m+1} > C_n^m \text{ при } m < \frac{n-1}{2} \quad \text{ и } \quad C_n^{m+1} < C_n^m \text{ при } m > \frac{n-1}{2}.$$

Задача 2.6. Доказать, что для простого числа p и $r = \overline{1, p-1}$, величина C_p^r делится на p.

Решение. Так как целое число $r = \overline{1, p-1}$, то произведение r чисел

$$p\,(p-1)\dots(p-r+1)$$

делится на $r!$. Но число $r!$ взаимно просто с p, следовательно, и произведение

$$(p-1)\,(p-2)\dots(p-r+1)$$

делится на $r!$. Таким образом,

$$C_p^r = \frac{p\,!}{(p-r)!\,r!} = p\,\frac{(p-1)\,(p-2)\dots(p-r+1)}{r!}$$

делится на p.

В следующих параграфах мы приведем различные интерпретации понятия "неупорядоченная выборка без возвращения", которые оказываются весьма полезными при решении многих комбинаторных задач.

2.4.2 Подмножества, коллекции Шпернера

Каждая неупорядоченная выборка без возвращения является (неупорядоченным) подмножеством генеральной совокупности. Поэтому утверждения, доказанные для неупорядоченных выборок без возвращения можно переформулировать на языке подмножеств.

Теорема 2.5. *1. Число всех $m-$подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно C_n^m.*

2. Число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Доказательство. Утверждение п.1 следует из теоремы 2.3, а п.2 – из первого равенства (2.11).

Определение. *Если семейство подмножеств $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$*

$n-$множества $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$A_i \nsubseteq A_j, \;\; i \neq j,$$ [8]

то такое семейство называется коллецией Шпернера множества $\mathcal{M}$.

Пример. Для множества $\mathcal{M} = \{a_1,\, a_2,\, a_3\}$, семейства

$$\mathcal{A}_1 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}, \;\; \mathcal{A}_2 = \{\{a_1,\, a_2\}, \{a_1,\, a_3\}, \{a_2,\, a_3\}\}$$

образуют коллекции Шпернера, а семейство

$$\mathcal{A}_3 = \{\{a_1\}, \{a_1,\, a_2\}, \{a_2,\, a_3\}\}$$

не образует коллекцию Шпернера.

Теорема 2.6. *Если семейство подмножеств $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ $n-$множества $\mathcal{M}$ образует коллецию Шпернера и $|A_i| = r_i$, то*

$$\frac{1}{C_n^{r_1}} + \frac{1}{C_n^{r_2}} + \ldots + \frac{1}{C_n^{r_k}} \le 1.$$

Доказательство. Вначале рассмотрим *полную цепочку* подмножеств

$$\varnothing = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_i \subset \ldots \subset B_n \subset \mathcal{M}, \;\; |B_i| = i.$$

Так как каждый последующий член такой цепочки получается добавлением ровно одного элемента множества $\mathcal{M}$ к предыдущему члену, то полная цепочка является неуплотняемой в том смысле, что между ее элементами нельзя вставить дополнительного подмножества из $\mathcal{M}$. Нетрудно видеть, что число полных цепочек в $n-$множестве $\mathcal{M}$ равно $n!$. Действительно, одноэлементное подмножество B_1 можно выбрать n способами, двухэлементное подмножество B_2, содержащее в себе B_1, можно выбрать $(n-1)-$им способом и так далее, последнее множество выбирается только одним

[8] Т.е. ни одно из множеств $A_1, \ldots, A_k$ не является частью другого.

способом. Зафиксируем подмножество A_i, $(1 \le i \le k)$, и рассмотрим полную цепочку, "проходящую через" это подмножество. Такая цепочка имеет вид

$$\varnothing = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{r_i-1} \subset A_i \subset B_{r_i+1} \subset \ldots \subset B_n \subset \mathcal{M}.$$

Число подцепочек

$$\varnothing = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{r_i-1} \subset A_i$$

равно $|A_i|! = r_i!$. С другой стороны, нетрудно видеть, что число подцепочек, начинающихся с фиксированного множества A_i

$$A_i \subset B_{r_i+1} \subset \ldots \subset B_n \subset \mathcal{M},$$

равно $(n - r_i)!$. Поэтому общее число полных цепочек, проходящих через подмножество $|A_i|$, равно $r_i!\,(n - r_i)!$. При $i \neq j$ полные цепочки, проходящие соответственно через фиксированные подмножества A_i и A_j, различны. В самом деле, предположение о существовании одной полной цепочки, содержащей подмножества A_i и A_j, приводит к соотношениям

$$A_i \subset A_j \ \text{ или } \ A_j \subset A_i,$$

что противоречит определению коллекции Шпернера. Таким образом, общее число полных цепочек, проходящих через все подмножества коллекции $\mathcal{A}$, равно

$$\sum_{i=1}^{k} r_i!\,(n - r_i)!.$$

Но эта величина не может превосходить общее число всех полных цепочек

$$\sum_{i=1}^{k} r_i!\,(n - r_i)! \le n!,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i!\,(n - r_i)!}{n!} \le 1.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если для $n-$множества $\mathcal{M}$ семейство подмножеств $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ образует коллецию Шпернера, то*

$$|\mathcal{A}| = k \leq C_n^{[\frac{n}{2}]} \qquad \textit{(неравенство Шпернера).}$$

Доказательство. Применить неравенство задачи 2.4.

2.4.3 Расселение скворцов по скворечникам

Рассмотрим множество скворечников, которые будем считать отличимыми друг от друга. Скворцов же, наоборот, будем считать друг от друга неотличимыми.

Задача 2.7. Каким числом способов m скворцов могут поселиться в n скворечниках? Считаем, что в каждом скворечнике не более одного скворца и $m \leq n$.

Решение. Рассмотрим множество всех скворечников в качестве генеральной совокупности. Скворцы, выбирая скворечники для поселения, извлекают из этой генеральной совокупности выборку без возвращения (в занятом скворечнике находится только один скворец). Так как порядок следования заселенных скворечников не играет роли (скворцы неотличимы дгуг от друга), то мы имеем неупорядоченную выборку. Ответ: C_n^m.

Замечание. Хотя решение этой задачи тривиально, тем не менее, взгляд на неупорядоченную выборку без возвращения, как на способ "расселения скворцов по скворечникам" часто оказывается весьма полезным.

2.4.4 Постройка лестницы

Задача 2.8. Из плит сечением 30 на 50 см строится лестница, ведущая из точки A в точку B (см. рис. 4). Расстояние AC равно 4,5 м, а расстояние CB – 1,5 м. Высота каждой ступеньки равна

30 см, а её ширина – целое, кратное 50 см. Сколькими способами можно построить лестницу?[9]

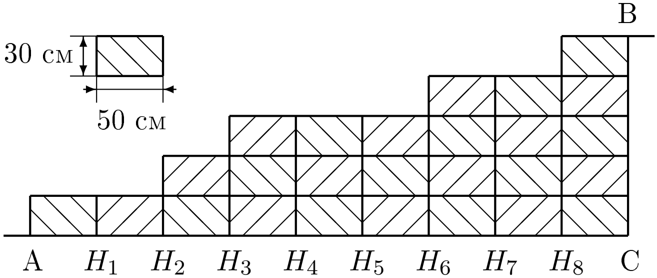

Рис. 4

Решение.

1-ый вариант. Из условия задачи очевидно, что лестница должна иметь 5 ступенек, а нижний ее "слой" состоит из 9 плит. Каждую ступеньку можно рассматривать как подъем на 30 см по отношению к предшествующему уровню. Будем считать, что всякая лестница обязательно начинается с первого подъема в точке A, а в точке B подъем не осуществляется никогда.[10] Тогда задача постройки лестницы сводится к выбору четырех точек подъема из восьми точек $H_1, H_2, ..., H_8$. К примеру, при постройке лестницы на рис. 4 подъем осуществляется в точках H_2, H_3, H_6 и H_8 (кроме точки A). При этом порядок выбора точек не важен, поскольку подъемы будут осуществляться последовательно слева направо в выбранных точках. Ответ: $C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$ способов.

2-ой вариант решения этой задачи будет рассмотрен в параграфе 2.5.

2.4.5 Маршруты в прямоугольном городе

Задача 2.9. Рассмотрим город с прямоугольной сеткой улиц, состоящий из $m \times n$ кварталов (см. рис. 5). Каково число различных

[9] См. [5, стр. 65]

[10] В решении этой задачи, представленном в [5], предполагается, что ступеньки лестницы можно строить во всех 10 точках $A, H_1, ..., H_8, C$.

кратчайших путей на на этой сетке, ведущих из левого нижнего угла (точка $A(0,0)$) в правый верхний угол (точка$B(m,n)$)?

Решение. Вначале отметим, что при движении по кратчайшему пути, мы всегда двигаемся "вправо" или "вверх". Далее, двигаясь по любому кратчайшему пути из пункта $A(0,0)$ в пункт $B(m,n)$, мы обязательно проходим m кварталов по горизонтали и n кварталов по вертикали. При этом разные кратчайшие пути будут отличаться лишь порядком прохождения кварталов по горизонтали и по вертикали. Поэтому каждый кратчайший путь можно "закодировать" последовательностью m букв "Г" (движение по горизонтали), и n букв "В" (движение по вертикали).

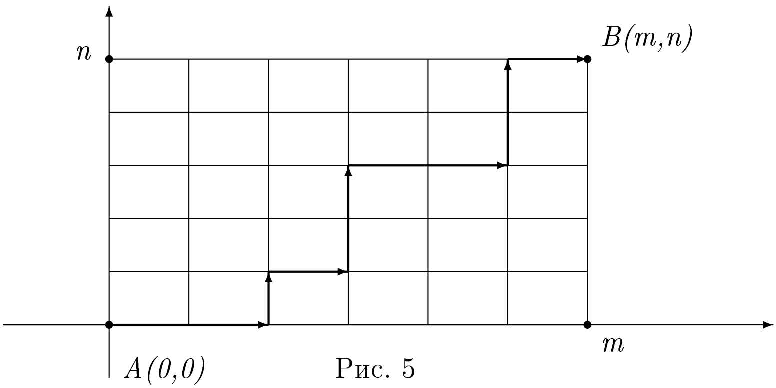

Рис. 5

Например, путь изображенный на рис. 5, имеет следующую кодировку:

$$\{Г,\ Г,\ В,\ Г,\ В,\ В,\ Г,\ Г,\ В,\ В,\ Г\}.$$

Поэтому общее число кратчайших путей из пункта $A(0,0)$ в пункт $B(m,n)$ равно числу способов, которыми m букв "Г" можно "расселить" на $m+n$ местах, т.е. числу C_{m+n}^{m}.

Нетрудно видеть, что вместо буквы "Г" можно взять и букву "В". Поэтому общее число кратчайших путей из пункта $A(0,0)$ в пункт $B(m,n)$ равно числу способов, которыми n букв "В" можно разместить на $m+n$ местах, т.е. C_{m+n}^{n}.

Таким образом, мы не только решили задачу, но и попутно, без всяких вычислений, установили равенство[11]

$$C_{m+n}^{m}=C_{m+n}^{n}.$$

Замечание. Решение этой задачи, позволяет рассматривать неупорядоченные выборки без возвращения, в качестве "кратчайших путей в прямоугольном городе". Такая точка зрения нередко оказывается весьма полезной.

2.4.6 Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 2.7. *Справедливо равенство*

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Приведем три различных доказательства этого равенства.

1-ый вариант. Чисто алгебраическое. Пользуясь формулой (2.8), будем иметь

$$C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=\frac{(n-1)!}{m!\,(n-1-m)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!\,(n-m)+(n-1)!\,m}{m!\,(n-m)!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C_n^m.$$

2-ой вариант. Будем рассматривать неупорядоченные выборки без возвращения как подмножества генеральной совокупности[12]

$$\mathcal{M}=\{a_1,\ldots,a_n\}.$$

[11]В справедливости этого равенства легко убедиться простым вычислением, используя формулу (2.8).

[12]Напомним, что в этом случае мы рассматриваем саму генеральную совокупность и ее подмножества как неупорядоченные множества.

Выберем некоторый элемент $a_i \in \mathcal{M}$ и все $m-$элементные подмножества $\mathcal{M}$ разобьем на два класса:

1) подмножества, которые не содержат a_i,

2) подмножества, которые содержат a_i.

Заметим, что число всех $m-$элементных подмножеств генеральной совокупности $\mathcal{M}$ равно C_n^m. Число подмножеств в первом классе равно C_{n-1}^m, так как каждое такое подмножество является $m-$элементным подмножеством множества $\mathcal{M} \setminus \{a_i\}$. Наконец, число подмножеств второго класса равно C_{n-1}^{m-1}, поскольку каждое такое подмножество является объединением фиксированного элемента $\{a_i\}$ и некоторого $(m-1)-$элементного подмножества множества $\mathcal{M}\setminus\{a_i\}$.

Следовательно,

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

3-ий вариант. Будем рассматривать неупорядоченные выборки без возвращения как кратчайшие пути в прямоугольном городе.

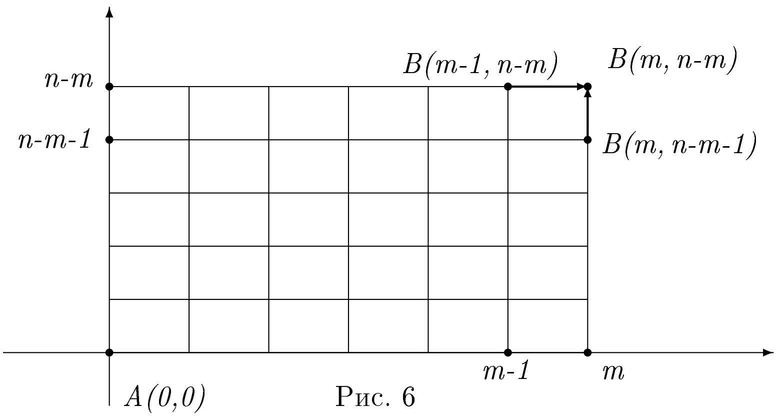

Рис. 6

Как видно на рис. 6, число кратчайших путей из точки A(0,0) в точку *B(m, n-m)* равно $C_{m+(n-m)}^m = C_n^m$. Множество таких путей можно разделить на два подмножества:

1) пути, проходящие через точку *B(m-1, n-m)*,

2) пути, проходящие через точку *B(m, n-m-1)*.

Число путей, принадлежащих первому подмножеству, равно

$C_{m-1+n-m}^{m-1} = C_{n-1}^{m-1}$, а второму – $C_{n-m-1+m}^{m} = C_{n-1}^{m}$. Следовательно,

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Используя утверждение теоремы 4, для подсчета числа кратчайших путей из точки *A(0,0)* в диагональные точки *B(m,n-m)*, $m = \overline{0,n}$, нетрудно провести построение треугольника Паскаля для чисел C_n^m.

Задача 2.10. Доказать тождество

$$C_{2n}^n = \sum_{m=0}^{n} (C_n^m)^2.$$

Решение. Для доказательства этого тождества будем использовать модель кратчайших путей в прямоугольном городе.

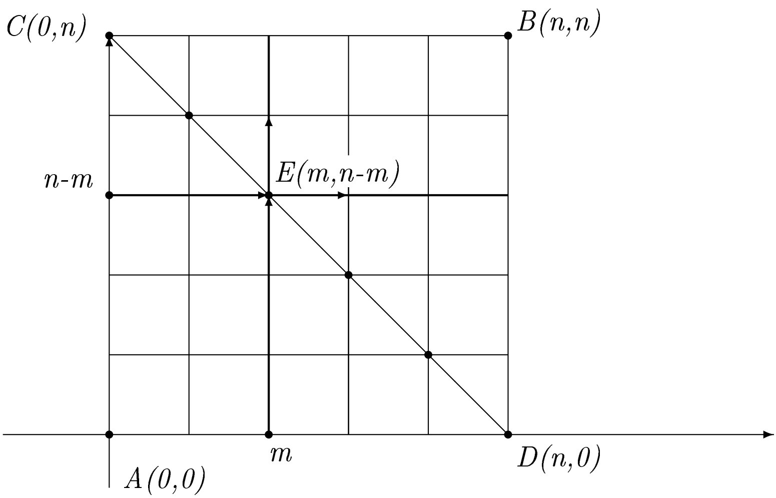

Рис. 7

Число кратчайших путей из точки *A(0,0)* в точку *B(n,n)* равно C_{2n}^n (см. рис. 7). Каждый такой путь проходит через одну и только одну из диагональных точек

$$E(m,n\text{-}m), \;\; m = \overline{0,n}.$$

Число кратчайших путей из точки $A(0,0)$ в точку $E(m,n\text{-}m)$ равно $C^m_{m+n-m} = C^m_n$. Ввиду зеркальной симметрии относительно диагонали $\overline{C(0,n)D(n,0)}$, каждому кратчайшему пути из точки $A(0,0)$ в точку $E(m,n\text{-}m)$ соответствует единственный кратчайший путь из точки $E(m,n\text{-}m)$ в точку $B(n,n)$. Поэтому число кратчайших путей из точки $E(m,n\text{-}m)$ в точку $B(n,n)$ совпадает с числом кратчайших путей из точки $A(0,0)$ в точку $E(m,n\text{-}m)$ и также равно C^m_n. Следовательно, на основе правила умножения, можно утверждать, что число кратчайших путей из точки $A(0,0)$ в точку $B(n,n)$, проходящих через точку $E(m,n\text{-}m)$, равно $C^m_n \cdot C^m_n = (C^m_n)^2$.

Суммируя числа кратчайших путей, проходящих через все диагональные точки, получаем равенство

$$C^n_{2n} = \sum_{m=0}^{n} (C^m_n)^2.$$

Задача 2.11. Доказать тождество (свертка Коши)

$$C^k_{m+n} = \sum_{i=0}^{k} C^i_m \, C^{k-i}_n.$$

Решение. Воспользуемся формулой бинома Ньютона для каждой степени следующего тождества

$$(1+x)^m \, (1+x)^n \; = \; (1+x)^{m+n}.$$

Тогда коэффициент при x^k в правой части этого тождества равен C^k_{m+n}, а в левой части тождества коэффициент при x^k равен

$$\sum_{i=0}^{k} C^i_m \, C^{k-i}_n.$$

Как известно, два многочлена равны для всех действительных x тогда и только тогда, когда равны коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x. Поэтому можно утверждать, что для любого k такого, что $0 \le k \le m+n$, выполняется равенство

$$C_{m+n}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_m^i \, C_n^{k-i}.$$

Задача 2.12. Доказать равенство

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, C_k^m = 0, \quad (0 \le m \le n). \tag{2.13}$$

Решение. Последовательно m раз продифференцируем по x тождество

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k.$$

Получим равенство

$$n(n-1)\ldots(n-m+1)(1+x)^{n-m} = \sum_{k=m}^{n} C_n^k \, k(k-1)\ldots(k-m+1)\, x^{k-m}.$$

Умножая обе части этого равенства на

$$\frac{(-1)^m}{m!},$$

при $x=-1$ получим соотношение (2.13)

$$0 = \sum_{k=m}^{n} C_n^k \, \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m!} \, (-1)^k = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \, C_n^k \, C_k^m.$$

Следующее свойство биномиальных коэффициентов связано с обращением матриц специального вида. Вначале доопределим выражение биномиального коэффициента C_n^m для $m>n$ с помощью равенства

$$C_n^m \equiv 0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.8. *Матрицы*

$$\boldsymbol{A} = \left[\, C_i^j \,\right] \quad \textit{и} \quad \boldsymbol{B} = \left[\, (-1)^{i+j}\, C_i^j \,\right], \qquad (i, j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

взаимно обратны:

$$\mathbf{B} \;=\; \mathbf{A}^{-1}\,, \quad \mathbf{A} \;=\; \mathbf{B}^{-1}.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \;=\; \mathbf{E}\,,$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Обозначим элементы произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ через d_{ij}.

Вначале вычислим диагональные элементы:

$$d_{ii} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_i^k\, (-1)^{\,k+i}\, C_k^i \;=$$

$$=\; (-1)^{\,i} \left[\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{\,k}\, C_i^k\, C_k^i + (-1)^{\,i} C_i^i C_i^i + \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{\,k}\, C_i^k\, C_k^i \right].$$

По свойству (2.14) первая и последняя суммы в квадратных скобках равны нулю, поэтому

$$d_{ii} \;=\; (-1)^{\,2i} \left[\, C_i^i \,\right]^2 \equiv 1.$$

Далее, для $i < j$

$$d_{ij} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_i^k\, (-1)^{\,k+j}\, C_k^j \;=\; (-1)^j \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\,k}\, C_i^k\, C_k^j \;=$$

$$= (-1)^j \left[\sum_{k=0}^{i} (-1)^{\,k}\, C_i^k\, C_k^j \;+\; \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{\,k}\, C_i^k\, C_k^j \right] \;=\; 0,$$

так как по свойству (2.14) обе суммы в квадратных скобках равны нулю.

Равенство

$$d_{ij} = 0, \quad \text{при} \quad i > j$$

доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие *(формулы обращения).*

Если $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \, b_k$ *для любого* $n \geq 0$, *то* $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \, C_n^k \, a_k$.

Доказательство. Так как матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ взаимно обратны: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, то из соотношения

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \text{следует равенство} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Поэтому, если

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, b_k, \quad \text{то} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \, C_n^k \, a_k.$$

Следствие доказано.

2.4.7 Метод траекторий. Задача о баллотировке

В параграфе 2.4.5, рассматривая свойства биномиальных коэффициентов, мы убедились в том, насколько полезной может быть интерпретация комбинаторных задач в терминах "кратчайших путей в прямоугольном городе". Рассмотрим еще один вариант этого геометрического метода. Обозначим через

$$s_k = \delta_1 + \ldots + \delta_k, \text{ где } \delta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, k}, \ k = \overline{1, \infty}.$$

Введем *траектории* (ломаные) $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_k)$, выходящие из начала координат $O(0, 0)$ и проходящие через точки

$$A_1(1, s_1), \ A_2(2, s_2), \ldots, \ A_k(k, s_k). \tag{2.15}$$

Нетрудно видеть, что поведение таких траекторий зависит от распределения знаков (+) и (−) величин δ_i. На следующем рисунке изображена траектория $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_{10})$, соединяющая начало координат $O(0,0)$ с точкой $A_{10}(10,2)$ и проходящая через точки $A_1(1,1)$, $A_2(2,2)$, $A_3(3,1)$, $A_4(4,0)$, $A_5(5,-1)$, $A_6(6,0)$, $A_7(7,1)$, $A_8(8,2)$, $A_9(9,3)$. У этой траектории $\delta_1 = \delta_2 = +1$, $\delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = -1$, $\delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = \delta_9 = +1$, $\delta_{10} = -1$.

Заметим, что все траектории вида (2.15), выходящие из точки $O(0,0)$ и заканчивающиеся в точке $A_{10}(10,2)$, обязательно содержатся в прямоугольнике $OBA_{10}D$. Причем наборы параметров δ_i, определяющие такие траектории, будут содержать одинаковое количество (+1), равное 6. Как нетрудно видеть на рисунке 8, при повороте прямоугольника $OBA_{10}D$ (против часовой стрелки) на угол 45°, мы получим схему кратчайших маршрутов в прямоугольном городе, которая ранее была рассмотрена в параграфе 2.7.

Как видно на рисунке 8, траектории $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ вида (2.15) не проходят через все целочисленные точки $(x, y)-$плоскости. В самом деле, если $x = k$ и $y = s_k$, то $x \geq |y|$, а сами числа x и y должны иметь одинаковую четность.

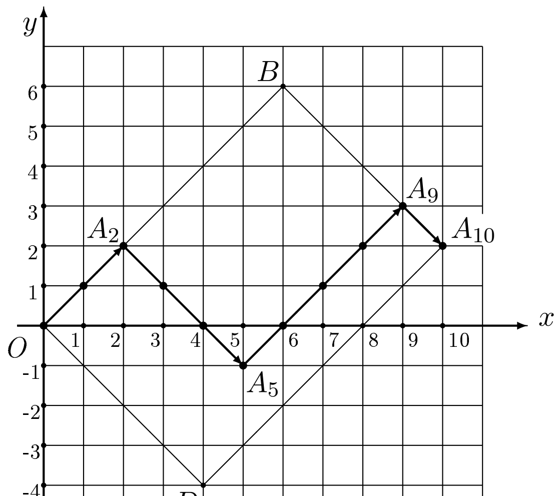

Рис. 8

Обозначим через $N(x, y)$ число всех траекторий $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_x)$ вида (2.15), соединяющих начало координат $O(0,0)$ с целочисленной точкой (x, y).

Теорема 2.9. *Если целые числа $x \geq 0$ и y имеют одинаковую четность и $x \geq |y|$, то*

$$N(x,y) \;=\; \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!} \;=\; C_x^{(x+y)/2}, \tag{2.16}$$

если же числа x и y имеют разную четность или $x < |y|$, то

$$N(x,y) \;=\; 0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Рассмотрим траектории $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_x)$, соединяющие начало координат $O(0,0)$ с целочисленной точкой (x, y). Для таких траекторий выполняется равенство $y = \delta_1 + \ldots + \delta_x$. Так как числа x и y фиксированны, то наборы параметров $\{\delta_1, \ldots, \delta_x\}$ наших траекторий будут содержать одинаковое число $(+1)$. Обозначим это число через m, тогда среди параметров $\{\delta_1, \ldots, \delta_x\}$ ровно m равны $+1$, а остальные $x - m$ параметров равны -1. Поэтому $y = m - (x - m) = 2m - x$, т.е.

$$m \;=\; \frac{x+y}{2}, \;\; x - m \;=\; \frac{x-y}{2}. \tag{2.18}$$

Таким образом, число всех траекторий $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_x)$, соединяющих начало координат $O(0,0)$ с целочисленной точкой (x, y), равно числу способов, которыми m $(+1)$ можно разместить на x местах, т.е. C_x^m. Отсюда, используя соотношение (2.18), получаем равенство (2.16). Доказательство равенства (2.17) очевидно. Теорема доказана.

Теорема 2.10 *(Принцип зеркального отражения.)*
Если $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ – точки с целочисленными координатами такие, что

$$x_2 > x_1 \geq 0, \;\; y_1 > 0, \;\; y_2 > 0,$$

а точка $\tilde{A}_1(x_1, -y_1)$ *симметрична точке* $A_1(x_1, y_1)$ *относительно оси* OX, *то число всех траекторий из* $A_1(x_1, y_1)$ *в* $A_2(x_2, y_2)$, *которые пересекают ось* OX *или имеют с ней общую точку, равно числу траекторий из* $\tilde{A}_1(x_1, -y_1)$ *в* $A_2(x_2, y_2)$.

Доказательство. Каждой траектории $\gamma(A_1, A_2)$, идущей из точки A_1 в точку A_2, которая пересекает или касается оси OX, поставим в соответствие единственную траекторию $\gamma(\tilde{A}_1, A_2)$ (см. рис. 9) по следующему правилу. Если B – первая общая точка траектории $\gamma(A_1, A_2)$ и оси OX ($B = min\{x : \gamma(A_1, A_2) \cap OX\}$), то участок $(\tilde{A}_1, B)$ траектории $\gamma(\tilde{A}_1, A_2)$ является зеркальным отражением участка (A_1, B) траектории $\gamma(A_1, A_2)$, правее же точки B траектории $\gamma(\tilde{A}_1, A_2)$ и $\gamma(A_1, A_2)$ совпадают.

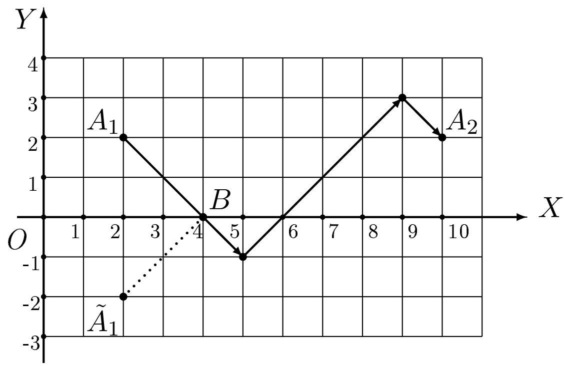

Рис. 9

Рассмотренное соответствие траекторий обратимо, т.к. обратимо зеркальное отражение. Таким образом, можно утверждать, что каждой траектории $\gamma(\tilde{A}_1, A_2)$, идущей из точки $\tilde{A}_1$ в точку A_2, соответствует единственная траектория вида $\gamma(A_1, A_2)$. Следовательно, между множеством траекторий, идущих из точки A_1 в точку A_2, которые пересекают или касаются оси OX, и множеством всех траекторий, идущих из $\tilde{A}_1$ в A_2, существует взаимно однозначное соответствие. Осталось заметить, что конечные равномощные множества состоят из одинакового числа элементов. Теорема доказана.

Теорема 2.11. *Если $x > 0$, $y > 0$, то число всех траекторий, идущих из точки $O(0,0)$ в точку $A_2(x,y)$ и не имеющих вершин*[13] *на оси OX, равно*

$$\frac{y}{x} N(x,y).$$

Доказательство. Как видно на рис. 10, все траектории, соединяющие точки $O(0,0)$ и $A_2(x,y)$ и не имеющие вершин на оси OX, проходят через точку $A_1(1,1)$.

Число всех траекторий, ведущих из точки A_1 в точку A_2, равно $N(x-1, y-1)$. Для этого достаточно считать точку A_1 началом координат. Число всех траекторий, ведущих из точки A_1 в точку A_2 и пересекающих ось OX, равно, в силу принципа зеркального отражения, числу всех траекторий, ведущих из точки $\tilde{A}_1$ в точку A_2. Но это число равно $N(x-1, y+1)$. Для этого достаточно считать точку $\tilde{A}_1$ началом координат.

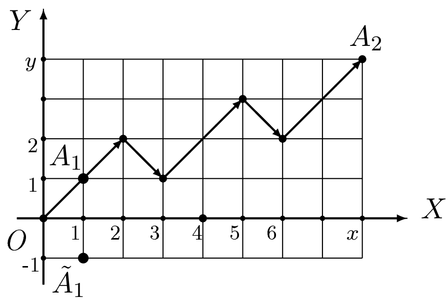

Рис. 10

Поэтому, общее число траекторий, идущих из точки $O(0,0)$ в точку $A_2(x,y)$ и не имеющих вершин на оси OX, равно

$$N(x-1, y-1) - N(x-1, y+1) =$$

$$= \frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}-1\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!} - \frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}-1\right)!} =$$

$$= \frac{y}{x} \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)!\left(\frac{x-y}{2}\right)!} = \frac{y}{x} N(x,y).$$

[13] Кроме точки $O(0,0)$.

Теорема доказана.

Задача 2.13(*о баллотировке*).[14] В выборах участвовали два кандидата. Победил кандидат A, собрав a голосов, кандидат B собрал b голосов ($a > b$). Сколько существует вариантов последовательного подсчета бюллетений, при которых кандидат A будет всегда впереди по количеству поданных за него голосов? (Предполагая, что все избиратели голосуют за кандидатов A и B с равными вероятностями, найти вероятность события, состоящего в том, что при последовательном подсчете бюллетений кандидат A был всегда впереди по количеству поданных за него голосов.)

Решение. Воспользуемся методом траекторий. Будем считать, что

$$\delta_i = \begin{cases} +1, & \textit{если } i\textit{-ый голос подан за } A; \\ -1, & \textit{если } i\textit{-ый голос подан за } B. \end{cases}$$

Положим $s_k = \delta_1 + \ldots + \delta_k$. Так как общее число избирателей равно $a+b$, то $s_{a+b} = a - b$. Таким образом, каждому способу подачи голосов соответствует определенная траектория $\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_{a+b})$, которая выходит из точки $O(0,0)$, проходит через точку $A_1(1,1)$ и, не пересекая ось абсцисс, заканчивается в точке $F(a+b, a-b)$. Но как следует из предыдущей теоремы ($x = a+b,\ y = a-b$), число всех таких траекторий равно

$$\frac{a-b}{a+b} N(a+b, a-b) = \frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^{a}.$$

2.5 Неупорядоченные выборки с возвращением

Рассмотрим задачу о числе всех неупорядоченных выборок с возвращением. Будем рассматривать каждую неупорядоченную вы-

[14] Задачу о баллотировке рассматривал в 1887 году известный французский математик Ж.Бертран (1822-1900).

борку с возвращением объема m из генеральной совокупности объема n как один из способов расселения m скворцов по n скворечникам без ограничений на количество скворцов, поселяемых в одном скворечнике.

Для описания расселения скворцов по скворечникам воспользуемся следующей геометрической схемой: будем обозначать m скворцов звездочками, а n скворечников изобразим с помощью $n+1$ вертикальной черточки (стенок скворечника). Например, последовательность

$$|\star\star|\ |\star\star|\ |\star|\star\star\star|\ | \tag{2.19}$$

означает, что 8 скворцов расселены по 7 скворечникам, причем, в первом и третьем скворечнике – по 2 скворца, во втором, четвертом и седьмом – нет скворцов, в пятом – 1 скворец, в шестом – 3 скворца.

Теорема 2.12. *Число всех неупорядоченных выборок с возвращением объема m из генеральной совокупности объема n равно C_{m+n-1}^m.*

Доказательство. Заметим, что при любом расселении m скворцов по n скворечникам соответствующая последовательность звездочек и черточек вида (2.19) будет обязательно начинаться и заканчиваться черточками. Остальные $n-1$ черточка и m звездочек могут располагаться (между первой и последней черточками) в произвольном порядке на $m+n-1$ местах. При этом каждое расселение однозначно определяется выбором m мест для звездочек. Таким образом, мы свели нашу задачу к задаче о расселении m скворцов в $m+n-1$ скворечнике с ограничением: в каждом скворечнике можно поселить не более одного скворца.

Следовательно, число всех неупорядоченных выборок с возвращением объема m из генеральной совокупности объема n равно C_{m+n-1}^m. Теорема доказана.

Замечание. В комбинаторике неупорядоченные выборки с возвращением объема m из генеральной совокупности объема n называются *сочетаниями из n элементов по m элементов с повторениями.*

Пример. Кости домино можно рассматривать, как сочетания с повторениями из семи цифр
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ по две цифры. Поэтому общее число костей домино равно

$$C^2_{2+7-1} = C^2_8 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28.$$

Задача 2.14. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n\,?$$

Решение. Натуральное число n является суммой n единиц. Поэтому каждое решение нашего уравнения можно получить, располагая любое число единиц[15] от нуля до n на m местах занимаемых неизвестными x_i $(i = \overline{1, m})$. Следовательно, общее число решений нашего уравнения равно числу всех неупорядоченных выборок с возвращением объема m из генеральной совокупности объема n, т.е. C^m_{m+n-1}.

Задача 2.15. Сколько целых положительных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n\,?$$

Решение. Для существования по крайней мере одного решения этого уравнения в целых положительных числах необходимо достаточно выполнения неравенства $n \geq m$. Натуральное число n является суммой n единиц. Поэтому выберем из них m единиц и расположим их по одной на m местах, занимаемых неизвестными x_i $(i = \overline{1, m})$. Оставшиеся $n - m$ единиц можно располагать на этих m местах произвольным образом.

Ответ: Общее число целых положительных решений нашего уравнения равно $C^{n-m}_{m+n-m-1} = C^{n-m}_{n-1} = C^{m-1}_{n-1}$.

2-ой вариант **решения задачи 2.8.** Нетрудно заметить, что всякая лестница, удовлетворяющая условиям задачи, обязательно

[15] Здесь единицы играют роль скворцов, а места, занимаемые неизвестными x_i, – скворечников.

содержит 5 "столбиков" высотой в 1, 2, 3, 4 и 5 блоков соответственно (см. рис. 11).

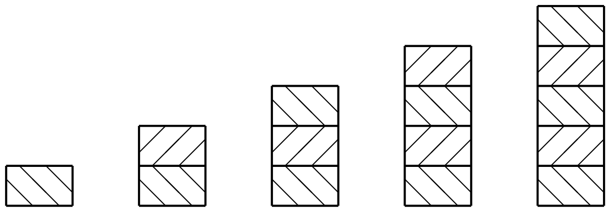

Рис. 11

Остальные "столбики" ($9 - 5 = 4$ штуки) могут быть любой из указанных высот (причем их высоты могут повторяться, например, все 4 "столбика" могут быть одной высоты). Остается выбрать с возвращением 4 значения из 5 возможных вариантов высот и "расширить" исходные пять "столбиков", приставляя к ним столбики выбранных высот. Поскольку не имеет значения, с какой стороны приставить добавочные "столбики", имеем неупорядоченную выборку (с возвращением). Число способов выбрать 4 из 5 вариантов неупорядоченно с возвращением равно $C^4_{4+5-1} = C^4_8 = 70$.

К тому же типу выборок можно прийти, рассматривая разные высоты "столбиков"как 5 упорядоченных скворечников, в которые нужно распределить 9 неразличимых скворцов так, чтобы не было пустых скворечников. Или решая уравнение $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 9$ в натуральных числах.

Ответ: $C^4_{4+5-1} = C^4_8 = 70$.

2.6 Задачи, связанные с играми в покер и бридж

Рассмотрим несколько комбинаторых задач, связанных с карточными играми в покер и бридж.

Игра в покер означает по определению выбор пяти карт из колоды в 52 карты [6, стр. 18].

Задача 2.16. Найти вероятность того, что у игрока в покер будет 5 различных значений карт.

Решение. При игре в покер порядок карт несущественен, и, следовательно, имеется

$$C_{52}^5 = 2598960$$

различных комбинаций состоящих из пяти карт. Число различных комбинаций состоящих из пяти различных по значению карт равно

$$4^5 \cdot C_{13}^5.$$

Следовательно вероятность того, что один (фиксированный) игрок имеет 5 различных значений карт, равна

$$\frac{4^5 C_{13}^5}{C_{52}^5} \approx 0,5071.$$

Задача 2.17.[16] Найти вероятность того, что у игрока в покер будет

1. **флеш рояль (royal flush)** (десятка, валет, дама, король и туз одной масти);
2. **флеш стрит (straight flush)** (пять последовательных по значению карт одной масти, но не флеш рояль);
3. **каре (four of a kind)** (четыре карты одного значения);
4. **фул хаус (full house)** (три карты одного значения и две карты другого значения);
5. **флеш (flush)**(пять карт одной масти, но не флеш ройаль и не флеш стрит)
6. **стрит (straight)** (пять последовательных по значению карт, но не все одной масти);

[16]См. [6, стр. 71].

7. **тройка (three of a kind)** (три карты одного значения и две карты другого значения, различающиеся по значению между собой);

8. **две пары (two pair)** (первая двойка карт одного значения, вторая двойка карт другого значения, плюс пятая карта третьего значения);

9. **пара (pair)** (пара карт одного значения плюс три отличные от них по значению и различные по значению между собой карты).

Решение. При игре в покер порядок карт игрока несущественен, поэтому число всех возможных комбинаций из пяти карт у одного игрока равно

$$n = C_{52}^5 = 2\,598\,960.$$

Для каждого варианта задачи найдем число благоприятствующих комбинаций m_i и соответствующую (классическую) вероятность:

$$p_i = \frac{m_i}{n}, \quad i = \overline{1,9}.$$

1. (Флеш рояль.) В каждой масти есть один флеш рояль. Поэтому $m_1 = 4$ и

$$p_1 = \frac{4}{C_{52}^5} \approx 0.000\,002.$$

2. (Флеш стрит.) Есть 4 варианта выбора масти, в каждой масти 8 способов получить пять последовательных по значению карт, не считая флеш рояль.

Поэтому $m_2 = C_4^1 \cdot 8 = 32$, а

$$p_2 = \frac{32}{C_{52}^5} \approx 0.000\,012.$$

3. (Каре.) Есть 13 вариантов выбора значений карт, только один способ выбора 4-х карт одного фиксированного значения, 48 вариантов выбора пятой карты.

Поэтому $m_3 = C_{13}^1 \cdot 1 \cdot C_{48}^1 = 624$, а

$$p_3 = \frac{624}{C_{52}^5} \approx 0.000\,240.$$

4. (Фул хаус.) Есть 13 способов выбрать тройку карт одного значения и C_4^3 способов выбора масти каждой такой тройки карт, 12 способов выбора пары карт одного значения и C_4^2 способов выбора масти каждой такой пары карт.

Поэтому $m_4 = 13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2 = 3744$, а

$$p_4 = \frac{3744}{C_{52}^5} \approx 0.\,001\,441.$$

5. (Флеш.) Есть 4 варианта выбора масти, C_{13}^5 способов выбора 5 карт одной фиксированной масти, не считая флеш ройаля и флеш стрита.

Поэтому $m_5 = 4 \cdot C_{13}^5 - 4 \cdot 9 = 1287$, а

$$p_5 = \frac{1287}{C_{52}^5} \approx 0.\,000\,495.$$

6. (Стрит.) Для каждой масти есть 9 вариантов выбора 5 последовательных по значению карт, 4 способа выбора масти каждого значения, не считая флеш ройаля и флеш стрита.

Поэтому $m_6 = 9 \cdot 4^5 - 4 \cdot 9 = 9180$, а

$$p_6 = \frac{9180}{C_{52}^5} \approx 0.\,003\,532.$$

7. (Тройка.) Есть 13 вариантов выбора значения карты, C_4^3 способов выбора масти 3 карт одного фиксированного значения, C_{12}^2 выбора пары карт другого значения, 4^2 способов выбора масти такой пары карт.

Поэтому $m_7 = 13 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^2 \cdot 4^2 = 54912$, а

$$p_7 = \frac{54912}{C_{52}^5} \approx 0.\,021\,128.$$

8. (Две пары.) Двойку различных по значению карт одной масти можно выбрать C_{13}^2 способами, для каждой пары карт одного фиксированного значения существует C_4^2 вариантов выбора масти, 44 варианта выбора пятой карты третьего значения.

Поэтому $m_8 = C_{13}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 44 = 123552$, а

$$p_8 = \frac{123552}{C_{52}^5} \approx 0.047\,539.$$

9. (Пара.) Есть 13 вариантов выбора значения карты, C_4^2 вариантов выбора пары карт одного фиксированного значения, C_{12}^3 вариантов выбора тройки различных по значению карт одной масти, для каждой тройки различных по значению карт существует 4^3 вариантов выбора масти.

Поэтому $m_8 = 13 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot 4^3 = 549120$, а

$$p_9 = \frac{549120}{C_{52}^5} \approx 0.211\,285.$$

При игре в бридж полная колода (52 карты) делится на четыре равные части между четыремя участниками игры.

Задача 2.18. Найти вероятность события, состоящего в том, что при игре в бридж один (фиксированный) игрок имеет 13 различных значений карт.

Решение. При игре в бридж порядок карт игрока несущественен, и, следовательно, имеется

$$C_{52}^{13} = 635013559600$$

различных комбинаций карт у одного игрока. Число различных комбинаций, состоящих из 13 различных по значению карт, равно 4^{13}. Поэтому вероятность того, что один (фиксированный) игрок имеет 13 различных значений карт, равна

$$\frac{4^{13}}{C_{52}^{13}} \approx 0,000106.$$

Задача 2.19. Найти вероятность того, что у какого-либо игрока в бридж будет пять пик, четыре червы, три бубны и одна трефа.

Ответ:

$$\frac{C_{13}^5 C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^1}{C_{52}^{13}} = \frac{3421322190}{635013559600} \approx 0,005388.$$

3 Разбиения конечных множеств

Договоримся обозначать число элементов (мощность) конечного множества W через $|W|$. Например, $|\{1,2,3,4\}| = 4$.

Определение. *Разбиением конечного множества W с $|W| = n$ называется система его подмножеств*

$$\{A_1, \ldots, A_k\}, \quad k \leq n,$$

такие, что

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \text{когда } i \neq j; \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = W.$$

Подмножества A_i называются атомами разбиения, а числа $|A_i|$– мощностями атомов.

Будем рассматривать два типа разбиений множеств: *упорядоченные* и *неупорядоченные*[17]. Два неупорядоченных разбиения конечного множества считаются равными, если они совпадают по составу, т.е. каждый атом одного разбиения является атомом другого и наоборот. Два упорядоченных разбиения считаются равными, если они совпадают по составу и по порядку следования атомов[18]. Заметим, что исходное множество W и все его подмножества (атомы) A_i мы считаем неупорядоченным.

[17]В англоязычной литературе для упорядоченных разбиений используют термин *division*, а для неупорядоченных – *partition*.

[18]При нахождении объединения атомов порядок следования атомов не играет роли, тем не менее в некоторых задачах комбинаторики удобно различать разбиения совпадающие по составу, но отличающиеся порядком следования атомов.

3.1 Упорядоченные разбиения

Рассмотрим *упорядоченное разбиение $n-$элементного множества W с заданными мощностями атомов*

$$\{A_1, \ldots, A_k\};\ \ r_i = |A_i| \geq 0,\ i = \overline{1, k}\,;\ \ r_1 + \ldots + r_k = n.$$

Обозначим класс всех таких разбиений через $\mathcal{A}_W(r_1, \ldots, r_k)$. Говоря об упорядоченных разбиениях с заданными мощностями атомов, будем считать, что порядок следования атомов A_i определяется порядком следования мощностей этих атомов r_i. Отметим, что введенное определение допускает *нулевые* мощности атомов.

Примеры. Рассмотрим множество $W = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Вначале перечислим все упорядоченные разбиения класса

$$\mathcal{A}_W(1, 3)$$

множества W на два атома $\{A_1, A_2\}$ таких, что $|A_1| = 1, |A_2| = 3:$

$$\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\};\ \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\};\ \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\};\ \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Как видно из этого примера, каждое упорядоченное разбиение произвольного $n-$элементного множества W на *два* атома с заданной мощностью

$$\{A_1, A_2\} \in \mathcal{A}_W(r, n-r),\quad |A_1| = r \leq n,\quad |A_2| = n - r,$$

однозначно определяется выбором атома (подмножества) A_1. В этом случае число всех разбиений множества W на два атома равно числу всех подмножеств множества W с заданной мощностью r, т.е. числу сочетаний из n по r: $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$.

2. Перечислим все упорядоченные разбиения класса $\mathcal{A}_W(1, 0, 3)$ множества W на три атома $\{A_1, A_2, A_3\}$ таких, что $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_2| = 3:$

$$\{\{1\}, \varnothing, \{2, 3, 4\}\};\ \{\{2\}, \varnothing, \{1, 3, 4\}\};$$

$$\{\{3\}, \varnothing, \{1, 2, 4\}\};\ \{\{4\}, \varnothing, \{1, 2, 3\}\}.$$

3. Перечислим все упорядоченные разбиения класса $\mathcal{A}_W(1,1,2)$ множества W на три атома

$\{A_1, A_2, A_3\}$ таких, что $|A_1| = 1, |A_2| = 1, |A_2| = 2:$

$$
\begin{array}{ll}
\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}; & \{\{2\},\{1\},\{3,4\}\}; \\
\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}; & \{\{3\},\{1\},\{2,4\}\}; \\
\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}; & \{\{4\},\{1\},\{3,4\}\}; \\
\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\}; & \{\{3\},\{2\},\{1,4\}\}; \\
\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\}; & \{\{4\},\{2\},\{1,3\}\}; \\
\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}; & \{\{4\},\{3\},\{1,2\}\}.
\end{array}
$$

Как видно из этого примера, упорядоченные разбиения

$$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\} \text{ и } \{\{2\},\{1\},\{3,4\}\}$$

рассматриваются как различные. В случае неупорядоченных разбиений эти разбиения считаются равными.

Рассмотрим вопрос о числе всех упорядоченных разбиений конечного множества с заданными мощностями атомов.

Обозначим [7, стр. 610] через $C_n(r_1, \ldots, r_k)$ число всех упорядоченных разбиений

$$\mathcal{A}_W(r_1, \ldots, r_k) = \{A_1, \ldots, A_k\}$$

$n-$элементного множества W на k атомов с заданными мощностями

$$r_1 = |A_1| \geq 0, \ldots, r_k = |A_k| \geq 0, \quad r_1 + \ldots + r_k = n.$$

Теорема 3.1.

$$C_n(r_1, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Разбиение (= выборку подмножеств)

$$\mathcal{A}_W(r_1, \ldots, r_k) = \{A_1, \ldots, A_k\}$$

можно получить в результате последовательного извлечения подмножеств A_i из множества W. Действительно, подмножество A_1

можно извлечь из множества W с помощью $C_n^{r_1}$ способов[19]. Следующее подмножество A_2 можно извлечь из множества $W \backslash A_1$ с помощью $C_{n-r_1}^{r_2}$ способов и т.д. Последнее подмножество A_k остается после извлечения подмножества A_{k-1} из множества $W \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-2})$. И оно извлекается одним способом. Используя комбинаторное "правило умножения", будем иметь

$$C_n(r_1, \ldots, r_k) =$$

$$= C_n^{r_1} \cdot C_{n-r_1}^{r_2} \cdot C_{n-r_1-r_2}^{r_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-r_1-\ldots-r_{k-1}}^{r_k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r_1)!\, r_1!} \cdot \frac{(n-r_1)!}{(n-r_1-r_2)!\, r_2!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-r_1-r_2)!}{(n-r_1-r_2-r_3)!\, r_3!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-r_1-\ldots-r_{k-1})!}{0!\, r_k!} =$$

$$= \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}.$$

Теорема доказана.

Задача 3.1. Подсчитать число упорядоченных разбиений в примерах 1, 2 и 3.

Ответ:

$$\mathbf{1.}\ C_4(1,3) = \frac{4!}{1!\,3!} = 4; \quad \mathbf{2.}\ C_4(1,0,3) = \frac{4!}{1!\,0!\,3!} = 4;$$

$$\mathbf{3.}\ C_4(1,1,2) = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12.$$

Задача 3.2. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Каким числом способов они могут это сделать?

Решение. В задаче идет речь о числе всех упорядоченных разбиений множества 28 костей на четыре равные части. Число таких разбиений равно

$$C_{28}(7,7,7,7) = \frac{28!}{(7!)^4} = (4.725...) \cdot 10^{14}.$$

[19] Если $r_1 = 0$, то можно считать, что пустое подмножество $A_1 = \varnothing$ извлекается из множества W ровно одним способом: $C_n^0 = 1$.

Задача 3.3. При игре в бридж полная колода (52 карты) делится на четыре равные части между четыремя участниками игры. Подсчитать, число различных раскладов.

Решение. В задаче идет речь о числе всех упорядоченных разбиений полной колоды на четыре равные части. Число таких разбиений равно

$$C_{52}(13, 13, 13, 13) = \frac{52!}{13!13!13!13!} = (5, 36...) \cdot 10^{28}.$$

Задача 3.4. Для группы туристов в количестве 20 человек куплены билеты на поезд. Распределение мест по вагонам поезда оказалось следующим: 3-ий вагон – 4 места, 4-ый вагон – 7 мест, 7-ой вагон – 5 мест, 9-ый вагон – 4 места. В остальных вагонах мест нет. Каким числом способов туристы могут расположиться по вагонам, если известно, что в поезде 10 вагонов?

Решение. В задаче идет речь о числе всех упорядоченных разбиений множества 20 туристов на 10 частей (атомов) с заданными мощностями:

$$r_1 = r_2 = r_5 = r_6 = r_8 = r_{10} = 0,$$

$$r_3 = 4, r_4 = 7, r_7 = 5, r_9 = 4.$$

Число таких разбиений равно

$$C_{20}(0, 0, 4, 7, 0, 0, 5, 0, 4, 0) = \frac{20!}{0!0!4!7!0!0!5!0!4!0!} =$$

$$= \frac{20!}{4!7!5!4!} = 4 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 6\,983\,776\,800.$$

Замечание. В случае упорядоченных разбиений с заданными мощностями атомов мы можем установить биекцию между упорядоченным набором атомов и упорядоченным набором "емкостей" и рассматривать процесс разбиения множества на атомы как процесс наполнения этих "емкостей" элементами множества. В этом случае наличие пустых "емкостей" оправдывает равенство нулю некоторых из заданныхмощностей. В последней задаче, к примеру, в роли таких "емкостей" выступают вагоны поезда.

3.2 Перестановки с повторениями

В качестве приложений теоремы 1 рассмотрим доказательство двух утверждений с точки зрения упорядоченных разбиений конечных множеств. Речь пойдет о формуле для числа различных перестановок с повторениями и полиномиальной теореме.

Рассмотрим множество, среди элементов которого имеются одинаковые (неотличимые) элементы разных типов. Как известно (см. параграф 1.2 первой главы), перестановки такого множества называются перестановками с повторениями. В следующей теореме устанавливается формула для числа различных перестановок с повторениями.

Теорема 3.2. *Пусть* $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *- множество из* n *элементов, среди которых имеется* $r_1 > 0$ *одинаковых элементов первого типа,* $r_2 > 0$ *одинаковых элементов второго типа и так далее,* $r_k > 0$ *одинаковых элементов* $k-$*го типа, причем*

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.$$

Тогда число различных перестановок с повторениями равно

$$C_n(r_1, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}.$$

Доказательство. Переформулируем условие теоремы на языке упорядоченных разбиений множеств. Занумеруем места на которых стоят элементы множества S :

$$\{\underbrace{\cdot}_{1}, \underbrace{\cdot}_{2}, \underset{\ldots}{\ldots}, \underbrace{\cdot}_{n}\}.$$

И для множества всех номеров будем использовать обозначение

$$W := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Каждая перестановка с повторениями однозначно определяется номерами мест, на которых расположены элементы первого, второго и так далее, k−го типов. Обозначим через A_i подмножество множества номеров W, на которых расположены элементы i−го типа $(i = \overline{1,\, k})$. Тогда подмножества A_i образуют упорядоченное разбиение множества номеров:

$$W = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \ \text{ и } \ A_i \cap A_j = \varnothing, \ \text{когда } i \neq j.$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & A_2 = \{3,\,5\} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
(\alpha_1, & \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_1, & \alpha_2) \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
 & A_1 = \{1,\,2,\,4\} & & &
\end{array}
$$

Пример разбиения 5−элементного множества на два атома

Поэтому число всех перестановок с повторениями равно числу всех упорядоченных разбиений множества номеров W на k атомов A_i с заданными мощностями $|A_i| = r_i$:

$$C_n(r_1, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3 *(Полиномиальная теорема).*

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geqslant 0, \ldots, r_k \geqslant 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} \!\!\!\ldots\!\!\! \sum \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!} \, x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}.$$

Доказательство. Запишем n−ю степень суммы в виде произведения n "скобок":

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = (x_1 + \ldots + x_k)(x_1 + \ldots + x_k) \ldots (x_1 + \ldots + x_k). \quad (3.2)$$

"Скобки", стоящие в правой части этого равенства, можно занумеровать:

$$\underbrace{(x_1 + \ldots + x_k)}_{1} \underbrace{(x_1 + \ldots + x_k)}_{2} \ldots \underbrace{(x_1 + \ldots + x_k)}_{n}.$$

Используя введенную нумерацию, можно считать, что "скобки" с разными номерами различны и все они образуют $n-$элементное множество, которое будем обозначать буквой W. Ясно, что при вычислении произведения в правой части равенства (3.2) мы в некоторых "скобках" $(x_1 + \ldots + x_k)$ выберем x_1, в некоторых "скобках" выберем x_2 и т.д. и, наконец, в каких-то "скобках" выберем x_k. В результате получим сумму слагаемых вида

$$x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}, \qquad \text{где } r_1 \geqslant 0, \ldots, r_k \geqslant 0, \;\; r_1 + \ldots + r_k = n.$$

Каждое такое слагаемое задает следующее разбиение множества n скобок в равенстве (3.2):

$$\mathcal{A}_W(r_1, \ldots, r_k) = \{A_1, \ldots, A_k\}, \tag{3.3}$$

где A_1- подмножество скобок, в которых был выбран элемент x_1 (в этом случае $|A_1| = r_1$);
A_2- подмножество скобок, в которых был выбран элемент x_2 (в этом случае $|A_2| = r_2$);
и т.д., наконец,
A_k- подмножество "скобок в которых был выбран элемент x_k (в этом случае $|A_k| = r_k$).

Таким образом, при раскрытии скобок элемент $x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$ будет встречаться в сумме столько же раз, сколько разбиений вида (3.3) порождается этим элементом. Но по теореме 1 число таких разбиений равно

$$C_n(r_1, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!}.$$

Осталось заметить, что общее число различных слагаемых при раскрытии скобок в равенстве (3.2) равно числу элементов множества

$$\{(r_1, \ldots, r_1) : r_1 \geqslant 0, \ldots, r_k \geqslant 0, \;\; r_1 + \ldots + r_k = n\}.$$

Таким образом,

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geqslant 0, \ldots, r_k \geqslant 0 \\ r_1 + \ldots + r_k = n}} \!\!\!\cdots \sum \frac{n!}{r_1! \ldots r_k!} \, x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу о нахождении общего числа $C(n,k)$ упорядоченных разбиений $n-$элементного множества на k произвольных атомов

$$\mathcal{A}_W^{(k)} = \{A_1, \dots, A_k\}, \quad k \le n.$$

Так как общее число упорядоченных разбиений равно сумме чисел всех конкретных упорядоченных разбиений с заданными мощностями атомов, то по определению числа $C(n,k)$ имеет место равенство

$$C(n,k) = \sum_{\substack{r_1 \geqslant 0, \dots, r_k \geqslant 0 \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \!\!\!\!\!\cdots\sum C_n(r_1, \dots, r_k).$$

Отсюда, используя предыдущие теоремы, будем иметь

$$C(n,k) = \sum_{\substack{r_1 \geqslant 0, \dots, r_k \geqslant 0 \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \!\!\!\!\!\cdots\sum \frac{n!}{r_1! \dots r_k!} = (1 + \dots + 1)^n = k^n.$$

Теперь нетрудно получить формулу для числа C_n- всех упорядоченных разбиений $n-$элементного множества:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C(n,k) = \sum_{k=1}^{n} k^n.$$

3.3 Неупорядоченные разбиения

Перейдем к изучению *неупорядоченных* разбиений[20] конечных множеств с заданными мощностями атомов. Для этого введем обозначение $\mathcal{P}_W(r_1, \dots, r_k)$ для неупорядоченного разбиения $n-$элементного множества W на атомы

$$\{A_1, \dots, A_k\}, \ \ 0 \le k \le n \tag{3.4}$$

[20] Неупорядоченные разбиения иногда называют *коллекциями* или *блоковыми* разбиениями.

с заданными *положительными* мощностями[21]

$$r_1 = |A_1| > 0, \ldots, r_k = |A_k| > 0, \quad r_1 + \ldots + r_k = n.$$

Замечание. Определение (3.4) для любой перестановки π элементов $r_1, \ldots, r_k$ позволяет записать следующее равенство

$$\mathcal{P}_W(\pi_{r_1}, \ldots, \pi_{r_k}) = \mathcal{P}_W(r_1, \ldots, r_k).$$

Поэтому мы всегда можем считать, что

$$r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_k.$$

Если теперь рассматривать процесс разбиения множества на атомы как процесс наполнения "емкостей" элементами множества (см. Замечание к задаче 3.4), то равенство нулю некоторых из заданных мощностей возможно, но не оправдано, поскольку все "емкости соответствующие атомам нулевой мощности, оказываются в начале последовательности "емкостей" и не влияют на дальнейшее наполнение непустых "емкостей". Вот почему в неупорядоченных разбиениях множеств нет смысла рассматривать атомы нулевой мощности.

Так как среди чисел r_i могут быть совпадающие, то будем считать, что m_1 из них равны 1, m_2 равны 2, и т.д. m_n равны n. Тогда числа m_i удовлетворяют соотношениям

$$0 \le m_i \le k,\ i = \overline{1,n}\,;\ m_1 + \ldots + m_n = k;\ 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \ldots + n \cdot m_n = n. \tag{3.5}$$

Заметим, что "одновременно" все числа m_i не могут быть отличны от нуля.

Обозначим [7, стр. 611] через $D_n(m_1, \ldots, m_n)$ число всех неупорядоченных разбиений вида (3.4), где m_i – число атомов одинаковой мощности i, $i = \overline{1,n}$ ($m_1, ..., m_n$ удовлетворяют (3.5)).

Теорема 3.4.

$$D_n(m_1, \ldots, m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (n!)^{m_n} \cdot m_1! \cdot \ldots \cdot m_n!}. \tag{3.6}$$

[21] Таким образом, мы считаем, что атомы неупорядоченных разбиений не являются пустыми множествами.

Доказательство. Так как нас интересуют неупорядоченные разбиения, то будем считать, что атомы в разбиении (3.4) образуют неубывающую по мощности последовательность

$$|A_1| \le |A_2| \le \ldots \le |A_k|,$$

которая состоит из следующих блоков:

$$\begin{array}{l} A_1, \ldots, A_{m_1} \quad \text{– одноэлементные атомы,} \\ r_1 = \ldots = r_{m_1} = 1; \\ A_{m_1+1}, \ldots, A_{m_1+m_2} \quad \text{– 2-элементные атомы,} \\ r_{m_1+1} = \ldots = r_{m_1+m_2} = 2; \\ \vdots \\ A_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}, \ldots, A_{m_1+\ldots+m_n} \quad \text{– n-элементные атомы,} \\ r_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1} = \ldots = r_{m_1+\ldots+m_n} = n. \end{array} \tag{3.7}$$

(В последней серии может быть не более одного атома.)

По теореме 3.1 число всех упорядоченных разбиений вида (3.4) равно

$$\frac{n!}{\underbrace{1!1!\ldots1!}_{m_1}\,\underbrace{2!2!\ldots2!}_{m_2}\ldots\underbrace{n!n!\ldots n!}_{m_n}} = \frac{n!}{(1!\,)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(n!\,)^{m_n}}. \tag{3.8}$$

Ясно, что каждое неупорядоченное разбиение вида (3.4) с помощью перестановок атомов можно привести к виду (3.7). Возьмем произвольное разбиение вида (3.7). Изменяя порядок следования атомов в пределах каждого блока, мы получим $m_1!\cdot\ldots\cdot m_n!$ разбиений, совпадающих по составу и отличающихся порядком следования атомов. Поэтому, ввиду формулы (3.8),

$$D_n(m_1,\ldots,m_n)\cdot m_1!\cdot\ldots\cdot m_n! = \frac{n!}{(1!\,)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(n!\,)^{m_n}}.$$

Теорема доказана.

Замечания.

1. До сих пор мы рассматривали неупорядоченные разбиения *непустых* множеств W на атомы с *положительными* мощностями.

Однако формула (3.6) позволяет рассмотреть случай, когда $|W| = n = 0$. Действительно, так как $n \geq k \geq m_i \geq 0$, то при $n = 0$ мы получим $k = m_i = 0$. для всех $i = \overline{1,n}$. Поэтому использование формулы (3.6) делает естественным следующее определение

$$D_0(0,\ldots,0) = 1. \tag{3.9}$$

2. Так как атомы неупорядоченных разбиений имеют имеют *положительные* мощности, то при $m_1 + \ldots + m_n = k > n$ положим по определению

$$D_n(m_1,\ldots,m_n) = 0.$$

Задача 3.5. В ранней версии шифровальной машины "Энигма" (Германия, 1930 год) в алгоритме plugboard swapped выбиралось 6 пар различных букв алфавита. Каким числом способов это можно сделать? (Считаем, что в алфавите 26 букв.)

Решение. Сначала выбираем 12 букв из 26, а затем разбиваем это множество из 12 букв на пары.

Ответ. $C_{26}^{12} \cdot \frac{12!}{2^6 \cdot 6!}$.

Задача 3.6. В некоторых сельских местностях России существовало когда-то следующее гадание. Девушка зажимает в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывает эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказываются связанными в одно кольцо, то это должно означать, что девушка в текущем году выйдет замуж.

1. Найти вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо.

2. Решить тот же вопрос для случая $2s$ травинок[22].

Решение. Будем решать задачу для случая $2s$ травинок. Считаем, что все травинки неотличимы друг от друга. Тогда число всех попарных связываний (снизу) $2s$ травинок равно числу неупорядоченных разбиений множества $2s$ элементов на двухэлементные атомы. Таким образом, по формуле (3.6) это число равно

$$\frac{(2s)!}{(2!)^s \cdot s!}.$$

[22] См. [8, стр. 17, № 48].

Следовательно, общее число всех попарных связываний снизу и сверху равно

$$\left[\frac{(2s)!}{2^s \cdot s!}\right]^2. \tag{3.10}$$

Нетрудно видеть, что для каждого попарного связывания $2s$ травинок снизу существует по крайней мере одно "благоприятствующее" попарное связывание $2s$ травинок сверху, при котором все $2s$ травинок оказываются связанными в одно кольцо.

Осталось заметить, что все "благоприятствующее" связывания можно рассматривать как "круговые" перестановки $2s$ травинок, образующих одно "благоприятствующее" связывание. Как известно, общее число "круговых" перестановок $2s$ элементов равно $(2s-1)!$

Таким образом, учитывая формулу (3.10), вероятность того, что $2s$ травинок при завязывании наудачу образуют кольцо, равна

$$P^{(2s)}_{\textit{кольцо}} = \frac{(2s-1)!}{\left[\frac{(2s)!}{2^s s!}\right]^2} = \frac{(2s-1)!\,(2^s s!)^2}{[(2s)!]^2}.$$

А так как

$$(2s)! = (2s)!!\,(2s-1)!! \quad \text{и} \quad (2s)!! = 2^s s!,$$

то

$$P^{(2s)}_{\textit{кольцо}} = \frac{(2s-1)!\,(2^s s!)^2}{[(2s)!]^2} = \frac{(2s-2)!!}{(2s-1)!!}.$$

В частности,

$$\text{при } s=3, \ \ P^{(6)}_{\textit{кольцо}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \approx 0,533;$$

$$\text{при } s=5, \ \ P^{(10)}_{\textit{кольцо}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} \approx 0,0407.$$

Замечание. Используя формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}[1+o(1)], \quad \text{когда } n \longrightarrow \infty,$$

нетрудно показать, что при $s \to \infty$ вероятность $P^{(2s)}_{кольцо}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

3.4 Числа Стирлинга второго рода

Рассмотрим задачу о нахождении общего числа $S(n,k)$ всех неупорядоченных разбиений вида (3.4) $n-$элементного множества $W = \{a_1, \ldots, a_n\}$ на k произвольных атомов

$$\mathcal{P}_W^{(k)} = \{A_1, \ldots, A_k\}, \quad 1 \le k \le n.$$

В этой задаче, в отличие от предыдущих разбиений, мощности атомов $|A_i| = r_i$ не являются заданными и могут быть произвольными натуральными числами, но эти числа должны удовлетворять условиям (3.5).

Числа $S(n,k)$, $1 \le k \le n$, называются *числами Стирлинга второго рода*[23]. Положим по определению $S(n,0) = 0$ при $n \ge 1$. Кроме того, определим значения чисел Стирлинга второго рода для пустых множеств $W = \varnothing$ $(n = 0)$. Так при $k = 0$ с помощью формулы (3.9) введем следующее определение

$$S(0,0) = S_0(0\ldots0) = 1, \tag{3.11}$$

При $k > 0$ пустое множество $W = \varnothing$ нельзя разбить на k непустых подмножеств (атомы неупорядоченных разбиений имеют положительные мощности). Поэтому по определению будем считать, что

$$S(0,k) = 0.$$

Примеры. **1.** $W = \{a_1\}$, $\quad S(1,1) = 1$.
2. $W = \{a_1, a_2\}$, $S(2,1) = 1$, т.к. разбиение только одно: $\{a_1, a_2\}$; $S(2,2) = 1$, т.к. разбиение только одно: $\{\{a_1\}, \{a_2\}\}$.

[23] Кроме того, $S(n,k)$ равно числу способов размещения n *различных* предметов по k *одинаковым* ячейкам, при которых ни одна из них не останется пустой.

3. $W = \{a_1, a_2, a_3\}$, $S(3,1) = 1$, т.к. разбиение только одно: $\{a_1, a_2, a_3\}$;

$S(3,2) = 3$, т.к. в этом случае три разбиения:

$$\{\{a_1\}\{a_2, a_3\}\}, \{\{a_2\}, \{a_1, a_3\}\}, \{\{a_3\}, \{a_1, a_2\}\};$$

$S(3,3) = 1$, т.к. разбиение только одно: $\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$.

3.5 Свойства чисел Стирлинга второго рода

Теорема 3.5. *Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \ S(0,0) = 1, \ S(0,k) = 0, \ k > 0.$$

Доказательство. Так как общее число неупорядоченных разбиений равно сумме чисел всех конкретных неупорядоченных разбиений с заданными мощностями атомов, то по определению числа $S(n,k)$ имеет место равенство

$$S(n,k) = \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_n=k \\ 1\cdot m_1+2\cdot m_2+\ldots+n\cdot m_n=n}} \!\!\cdots\sum D_n(m_1, \ldots, m_n).$$

При $n = 1$ и $k = 1$ в справедливости утверждения теоремы легко убедиться простой подстановкой.

Пусть $n \geq 2$. Отметим во множестве $W = \{a_1, \ldots, a_n\}$ элемент a_n и все неупорядоченные разбиения

$$\mathcal{P}_W^{(k)} = \{A_1, \ldots, A_k\}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

разделим на два класса. В первый класс отнесем те разбиения, у которых элемент a_n образует одноэлементный атом. Т.е. существует номер $i(n)$ такой, что

$$A_{i(n)} = \{a_n\}.$$

Во второй класс отнесем все разбиения у которых отмеченный элемент a_n одноэлементный атом не образует.

Если из всех разбиений первого класса удалить атом $\{a_n\}$, то получится совокупность всех разбиений $(n-1)$–элементного множества на $k-1$ атом. Поэтому число всех разбиений первого класса равно $S(n-1, k-1)$.

Перейдем к разбиениям второго класса. Для этого вначале рассмотрим совокупность всех разбиений $(n-1)$–элементного множества $W \setminus \{a_n\} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ на k атомов

$$\mathcal{P}^{(k)}_{W\setminus\{a_n\}} = \{A^*_1, \ldots, A^*_k\}.$$

Число таких разбиений равно $S(n-1, k)$. Добавляя к атомам A^*_i $(i = \overline{1,k})$ элемент a_n, получим атомы разбиения $\mathcal{P}^{(k)}_W$ второго класса

$$A_i = \{A^*_i \cup \{a_n\}\},\ i = \overline{1,k}.$$

Поэтому каждому разбиению

$$\{A^*_1, \ldots, A^*_k\}$$

соответствует k различных разбиений $\mathcal{P}^{(k)}_W$ второго класса

$$\begin{gathered}\{\{A^*_1 \cup \{a_n\}\}, \ldots, A^*_k\}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \{A^*_1, \ldots, \{A^*_k \cup \{a_n\}\}\}.\end{gathered}$$

С другой стороны, удаляя элемент a_n из содержащего его атома произвольного разбиения $\mathcal{P}^{(k)}_W$ второго класса, мы получим разбиение вида $\mathcal{P}^{(k)}_{W\setminus\{a_n\}}$. Таким образом число всех разбиений $\mathcal{P}^{(k)}_W$ второго класса равно

$$kS(n-1, k).$$

Следовательно,

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Теорема доказана.

Задача 3.7. Доказать равенство

$$S(n, 2) \;=\; 2^{n-1} - 1. \tag{3.12}$$

Решение. Проведем доказательство по индукции, используя утверждение предыдущей теоремы. При $n = 1$ формула (3.12) справедлива: $S(1,2) = 0$. Пусть равенство (3.12) справедливо при $n = m$

$$S(m,2) \;=\; 2^{m-1} - 1.$$

Тогда, при $n = m + 1$

$$S(m+1,2) \;=\; S(m,1) \;+\; 2S(m,2) \;=\; 1 + 2(2^{m-1} - 1) \;=\; 2^m - 1,$$

что и требовалось доказать.

Приведем без доказательства[24] две полезные формулы, которым удовлетворяют числа Стирлинга второго рода:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} C_k^m \, m^n,$$

$$t^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(t)_k \;,$$

где для $t \in (-\infty, \infty)$ через $(t)_k$ обозначена *факториальная* функция [9]:

$$(t)_k := t(t-1)\cdots(t-k+1) = C_t^k \, k\,!, \qquad k = 1, 2, \ldots; \; (t)_0 := 1.$$

3.6 Числа Белла

Обозначим через B_n число всех неупорядоченных разбиений $n-$элементного множества
$(n = 1,\, 2,\, \ldots)$. Тогда по определению

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

[24]Доказательства этих формул будут даны в параграфе 3.9.

Числа B_n называются *числами Белла*[25]. Определим значение числа Белла для пустых множеств ($n = 0$). В этом случае естественно считать, что

$$B_0 = S(0, 0).$$

Ввиду формулы (3.11) положим по определению

$$B_0 = 1.$$

Примеры.

1. $W = \{a_1\}, \quad B_1 = 1.$
2. $W = \{a_1, a_2\}$, $B_2 = 2$, т.к. в этом случае 2 разбиения :

$$\{a_1, a_2\};\ \{\{a_1\}, \{a_2\}\}.$$

3. $W = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B_3 = 5$, т.к. в этом случае 5 разбиений :

$$\{a_1, a_2, a_3\};\ \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\};\ \{\{a_2\}, \{a_1, a_3\}\};$$
$$\{\{a_3\}, \{a_1, a_2\}\};\ \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}.$$

Теорема 3.6. *Числа Белла удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$B_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k B_{m-k}.$$

Доказательство. Пусть множество W состоит из $m + 1$ элемента:

$$W = \{a_1, \ldots, a_{m+1}\}.$$

Отметим в этом множестве элемент a_{m+1} и совокупность всех B_{m+1} неупорядоченных разбиений множества W разделим на $m+1$ класс. В первый класс отнесем все разбиения, у которых отмеченный элемент a_{m+1} образует одноэлементный атом. Во второй класс отнесем все разбиения, у которых элемент a_{m+1} входит только в двухэлементные атомы, и т.д. В $m-$ый класс отнесем все разбиения, у которых элемент a_{m+1} входит только в $m-$элементные атомы. Наконец, в последний $(m+1)-$ый класс отнесем разбиение, в котором элемент a_{m+1} входит в единственный $(m + 1)-$элементный атом, совпадающий с множеством $W = \{a_1, \ldots, a_{m+1}\}$.

[25] Подробнее о числах Белла см. в [2].

Возьмем произвольный $(k+1)$–элементный атом, содержащий элемент a_{m+1}. Остальные $m-k$ элементов множества W, не входящие в этот атом, допускают B_{m-k} неупорядоченных разбиений. Отметим, что число всех $(k+1)$–элементных атомов содержащих a_{m+1} равно C_m^k, поэтому число всех разбиений, в которых элемент a_{m+1} входит в произвольный $(k+1)$–элементный атом, равно

$$C_m^k B_{m-k}.$$

Отсюда получаем равенство

$$B_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k B_{m-k}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Можно доказать, что для чисел B_n справедлива следующая формула:

$$B_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \qquad \text{(формула Добинского)}.$$

Таблица чисел Стирлинга второго рода $S(n,k)$

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Таблица первых 10 чисел Белла

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

3.7 Обобщенный покер-тест

В обобщенном покер-тесте $n-$мерной равномерности[26] рассматриваются серии длины n :

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Элементы x_i этих серий являются буквами алфавита длины N $(N > n)$

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}.$$

Функция $t = t(\mathbf{x})$ определяет количество различных элементов, содержащихся в серии $\mathbf{x}$:

$$t(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} \text{ состоит из } n \text{ одинаковых элементов;} \\ 2, & \text{если } \mathbf{x} \text{ содержит ровно 2 различных элемента;} \\ \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n-1, & \text{если } \mathbf{x} \text{ содержит ровно } n-1 \text{ различный элемент;} \\ n, & \text{если в } \mathbf{x} \text{ все } n \text{ элементов различны.} \end{cases}$$

Задача 3.8. Найти число различных серий $\mathbf{x}$, для которых $t(\mathbf{x}) = m$ $(m = \overline{1, n}\,)$. Найти вероятность события, состоящего в том, что для "наугад" выбранной серии $\mathbf{x}$ $\ t(\mathbf{x}) = m$.

Решение. Вначале рассмотрим множество всех серий

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathcal{A},\, i = \overline{1, n}\,\}.$$

[26] См. [10, стр. 159].

Нетрудно видеть, что
$$|\Omega| = N^n.$$
Рассмотрим подмножества $K_m \subset \Omega \ \ (m = \overline{1,n})$, состоящие из серий $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, которые содержат ровно m различных букв:
$$K_m = \{\mathbf{x} \in \Omega : \, t(\mathbf{x}) = m\}.$$
Тогда
$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{n} K_m, \ \text{ и } K_i \cap K_j = \varnothing, \ \ \text{при } i \neq j.$$
Дадим описание атомов разбиения множества K_m. Множество номеров $\{1, \ldots, n\}$ элементов каждой серии
$$(x_1, \ldots, x_n) \in K_m$$
разобьем на m непустых атомов следующим образом. Вначале в каждый атом помещаем номер одного из m различных элементов, а затем оставшиеся места в атомах заполняем номерами элементов, совпадающих с первоначально выбранными. Другими словами, элементы x_i с номерами i, принадлежащими одному атому, являются одинаковыми буквами алфавита $\mathcal{A}$. Если же номера i, j элементов x_i и x_j принадлежат разным атомам, то эти элементы являются разными буквами алфавита $\mathcal{A}$.

первый атом
$$\begin{array}{ccccc} & & \downarrow & & \downarrow \\ (\alpha_s, & \alpha_s, & \alpha_r, & \alpha_s, & \alpha_r) \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$
второй атом
$$\{1,2,3,4,5\} \ = \ \{1,2,4\} \cup \{3,5\}$$
Пример разбиения 5—элементной серии на два атома

Число таких (неупорядоченных) разбиений равно числу Стирлинга второго рода $S(n, m)$. Теперь осталось заметить, что букву $\alpha_{l_1} \in \mathcal{A}$, с которой совпадают элементы с индексами из первого атома, можно выбрать N способами, вторую букву $\alpha_{l_2} \in \mathcal{A}$, с которой совпадают элементы с индексами из второго атома, можно выбрать $N - 1$

способом и т.д., наконец, букву $\alpha_{l_m} \in \mathcal{A}$, с которой совпадают элементы с индексами из $m-$го атома, можно выбрать $N-m+1$ способом. Следовательно, общее число серий $(x_1, \ldots, x_n)$, которые соответствуют одному разбиению множества номеров $\{1, \ldots, n\}$, равно

$$N(N-1)\ldots(N-m+1).$$

Так как число таких разбиений равно $S(n,m)$, то число всех серий

$$(x_1, \ldots, x_n) \in K_m$$

равно

$$N(N-1)\ldots(N-m+1)S(n,m).$$

Используя формулу классической вероятности, можно утверждать, что

$$\mathbb{P}\{\mathbf{x} : t(\mathbf{x}) = m\} = \frac{|K_m|}{|\Omega|} = \frac{(N-1)\ldots(N-m+1)S(n,m)}{N^{n-1}}.$$

Замечание. В классическом покер-тесте рассматривается длина серии $n = 5$.

3.8 Тест "собирателя купонов"

В тесте "собирателя купонов " $n-$мерной равномерности[27] рассматриваются серии длины r :

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r).$$

Элементы x_i этих серий являются буквами алфавита длины N $(r > N)$.

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}.$$

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \mathcal{A},\ i = \overline{1, r}\,\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\,\Omega| = N^{\,r}.$$

[27] См. [10, стр. 159].

Найдем вероятность события, состоящего в том, что серия (минимальной) длины r содержит все буквы алфавита $\mathcal{A}$ (на $r-$ом шаге происходит первый сбор всех "купонов").

Для этого вначале найдем вероятность того, что серия длины r не содержит всех букв алфавита $\mathcal{A}$.

Подсчитаем число серий $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \mathcal{A},\, i = \overline{1, r}\,\}$, которые содержат все буквы алфавита $\mathcal{A}$. Это можно сделать следующим образом. Вначале множество номеров $\{1,\, \ldots,\, r\}$ элементов каждой серии

$$(x_1, \ldots, x_r) \in \Omega$$

разобьем на N непустых атомов следующим образом. В первый атом поместим индексы (номера) первой (произвольно выбранной) буквы алфавита. Это можно можно сделать N способами. Во второй атом поместим индексы (номера) второй (произвольно выбранной) буквы алфавита. Это можно можно сделать $N-1$ способом. И так далее, в последний $N-$ый атом поместим индексы (номера) последней $N-$ой буквы алфавита. Это можно сделать только одним способом. Таким образом, одно разбиение множества номеров $\{1,\, \ldots,\, r\}$ на N атомов порождает $N!$ различных серий $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \mathcal{A},\, i = \overline{1, r}\,\}$, которые содержат все буквы алфавита $\mathcal{A}$. Тогда совокупность всех разбиений множества номеров $\{1,\, \ldots,\, r\}$ на N атомов порождает

$$N!\, S(r, N)$$

различных серий, которые включают в себя все серии, содержащие все буквы алфавита $\mathcal{A}$.

Тогда q_r, вероятность события, состоящего в том, что серия длины r не содержит всех букв алфавита $\mathcal{A}$, равна

$$q_r = 1 - \frac{N!\, S(r, N)}{N^{\,r}}.$$

Обозначим через L_k множество всех серий $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) : x_i \in \mathcal{A},\, i = \overline{1, k}\,\}$, которые не содержат всех букв алфавита $\mathcal{A}$. Тогда

$$L_r \,\subseteq\, L_{r-1}$$

и $L_{r-1} \setminus L_r$ – множество всех серий $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \mathcal{A},\ i = \overline{1, r}\,\}$, которые содержат все буквы алфавита $\mathcal{A}$, причем серии $\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{r-1})\}$ всех букв алфавита $\mathcal{A}$ не содержат. Другими словами, это означает, что серия $(x_1, \ldots, x_{r-1})$ содержит $N-1$ букву алфавита $\mathcal{A}$, а x_r является $N-$ой буквой алфавита, которой нет среди букв серии $(x_1, \ldots, x_{r-1})$. Таким образом, минимальная длина серии, содержащей все буквы алфавита, равна r.

Тогда p_r, вероятность события, состоящего в том, что серия (минимальной) длины r содержит все буквы алфавита $\mathcal{A}$, можно подсчитать по формуле, используя рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода:

$$p_r \,=\, q_{r-1} - q_r = 1 - \frac{N!\,S(r-1,N)}{N^{\,r-1}} - 1 + \frac{N!\,S(r,N)}{N^{\,r}} =$$

$$= \frac{N!}{N^{\,r}}\,[S(r,N) - N\,S(r-1,N)] = \frac{N!}{N^{\,r}}\,S(r-1,N) \,=$$

$$= \frac{(N-1)!}{N^{\,r-1}}\,S(r-1,N).$$

3.9 Отображения конечных множеств и числа Стирлинга второго рода

В этом параграфе будут рассмотрены комбинаторные задачи, связанные с отображениями конечных множеств:

$$f : X \longrightarrow Y \qquad (|X| = m,\, |Y| = n). \tag{3.13}$$

Напомним, что *образом* множества X при отображении f называется множество вида

$$f(X) \,=\, \{y \in Y : y \,=\, f(x) \text{ для некоторого } x \in X\}.$$

Нетрудно видеть, что для числа элементов образа множества X при отображении f справедливо неравенство

$$|f(X)| \,\leq\, \min(m,n).$$

Ранее в параграфе 2.2 было установлено, что число всех отображений

$$f : X \longrightarrow Y \quad (|X| = m,\, |Y| = n)$$

$m-$множества X в $n-$множество Y равно равно n^m, а число всех биекций

$$f : X \longrightarrow Y \quad (|X| = n,\, |Y| = n)$$

$n-$множества X в $n-$множество Y равно $n!$.

Рассмотрим теперь вопрос о числе различных отображения вида (3.13), для которых образы множества X состоят из k элементов[28].

Теорема 3.7. *Число всех отображений*

$$f : X \longrightarrow Y \qquad (|X| = m,\, |Y| = n),$$

для которых образы множества X состоят из k различных элементов

$$|f(X)| \,=\, k \quad\; (1 \,\leq\, k \,\leq\, \min(m,n)), \tag{3.14}$$

равно

$$S(m,k)\, C_n^k\, k!,$$

где $S(m,k)$ – число Стирлинга второго рода.

Доказательство. Для отображения f вида (3.14) введем обозначение $k-$элементного образа множества X :

$$f(X) \,=\, \{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_k\} \subseteq Y.$$

Для любого фиксированного набора различных элементов

$$\{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_k\} \subseteq Y$$

и для любой перестановки π элементов $\{1, \ldots, k\}$ каждое неупорядоченное разбиение множества X на k атомов

$$X \,=\, \bigcup_{s=1}^{k} A_s, \;\text{ где }\; A_{s_1} \cap A_{s_2} \,=\, \varnothing \;\text{ при } s_1 \neq s_2,$$

[28]Близкие вопросы рассматривались в параграфе 3.7. Обобщенный покер-тест.

порождает единственное отображение с $k-$элементным образом

$$f_\pi(A_s) = \widetilde{y}_{\pi(s)}, \quad s = \overline{1,k}, \quad \pi \in S_k.$$

Таким образом, для каждого набора различных элементов

$$\{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_k\} \subseteq Y \tag{3.15}$$

число всех отображений с $k-$элементным образом

$$f(X) = \{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_k\}$$

равно числу всех неупорядоченных разбиений множества X на k атомов, помноженному на $k\,!$, т.е. произведению

$$S(m,k) \cdot k\,!,$$

где $S(m,k)$ – число Стирлинга второго рода. Для доказательства теоремы осталось заметить, что число $k-$элементных (неупорядоченных) подмножеств вида (3.15) равно C_n^k. Теорема доказана.

Следствие. *Число всех сюръективных отображений*

$$f : X \longrightarrow Y \qquad (|X| = m,\ |Y| = n)$$

равно

$$S(m,n) \cdot n!.$$

Теорема 3.8. *Справедливы равенства*[29]

$$1^\circ.\ n^m = \sum_{k=0}^{n} S(m,k)\, C_n^k\, k\,!;$$

$$2^\circ.\ S(m,n) = \frac{1}{n\,!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k}\, C_n^k\, k^m.$$

Доказательство. 1°. С одной стороны, число всех отображений

$$f : X \longrightarrow Y, \quad (|X| = m,\ |Y| = n)$$

[29]Напомним (см. п. 3.4), что $S(0,0) = 1$ и при $n \geq 1$, $S(n,0) = 0$.

$m-$множества X в $n-$множество Y равно равно n^m. С другой стороны, это число можно получить, суммируя по $k = \overline{0,n}$ мощности множеств всех отображений с $k-$элементными образами.

2°. Используя формулы обращения (см. следствие из теоремы 2.8 второй главы), из соотношения (3.16)

$$n^m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, S(m,k) \, k\,!$$

сразу получаем равенство

$$S(m,n) \, n\,! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \, C_n^k \, k^m,$$

откуда следует соотношение (3.17). Теорема доказана.

Исторические замечания

Джеймс Стирлинг (James Stirling 1692-1770 гг.) [30]. Уроженец Шотландии, учился в Оксфордском университете. Из-за участия в политической деятельности, враждебной правящей в те годы в Англии династии (восстание якобитов-католиков), был вынужден эмигрировать в Венецию, где зарабатывал на жизнь частными уроками. В 1725 г. с помощью И. Ньютона Стирлинг вернулся в Англию. В 1735 г. получил пост директора горного предприятия в Шотландии, который занимал до конца своей жизни. Стирлинг имел научные контакты с А. де Муавром (1667-1754 гг.), который будучи гугенотом, был вынужден эмигрировать из Франции в Англию после отмены Людовиком XIV Нантского эдикта в 1685 году. Гугенотами во Франции называли приверженцев кальвинизма. Одно из положений кальвинизма: успех в профессиональной деятельности человека служит подтверждением его избранности.

Кроме чисел Стирлинга второго рода $S(n,k)$ в математике используются и числа Стирлинга *первого* рода, которые обозначаются как $s(n,k)$. Более подробную информацию об этих числах можно найти в [2]. Числа $s(n,k)$ и $S(n,k)$ были введены Дж. Стирлингом в 1730 г. как коэффициенты разложения "факториалов по степеням и степеней по факториалам":

$$(t)_n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\, t^k \ ,$$

$$t^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(t)_k \ ,$$

где через $(t)_k$ обозначен *факториал* (факториальная функция):

$$(t)_k := t(t-1)\cdots(t-k+1),\ \ k = 1,2,\ldots;\ (t)_0 := 1, \quad t \in (-\infty,+\infty).$$

Само название "числа Стирлинга" стало использоваться в математике только с 1906 г.

[30]Который хорошо известен как автор асимптотической формулы для $n!$.

Список литературы

[1] *Ежов, И.И.* Элементы комбинаторики [Текст] / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – М.: Наука, 1977. – 80 с.

[2] *Сачков, В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики [Текст] / В. Н. Сачков. – М.: МЦНМО, 2004. – 424 с.

[3] *Риордан, Дж.* Введение в комбинаторный анализ [Текст] / Дж. Риордан. – М.: ИЛ, 1963. – 288 с.

[4] *Стенли, Р.* Перечислительная комбинаторика [Текст] / Р. Стенли. – М.: Мир, 1990. – 440 с.

[5] *Виленкин, Н.Я.* Комбинаторика [Текст] / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.

[6] *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] / В. Феллер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Мир, 1964. – 498 с.

[7] *Ширяев, А.Н.* Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). Книга 1 [Текст] / А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих, П. А. Яськов. – М.: МЦНМО, 2013. – 648 с.

[8] *Мешалкин, Л.Д.* Сборник задач по теории вероятностей [Текст] / Л. Д. Мешалкин. – М.: Изд-во Московского университета, 1963. – 154 с.

[9] Дискретная математика [Текст]: энциклопедия / гл. ред. В. Я. Козлов. – М.: БРЭ, 2004. – 382 с.

[10] Основы криптологии [Текст] / [Ю. С. Харин и др.] Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.

Учебное издание

Кнутова Елена Михайловна
Шатских Сергей Яковлевич

КОМБИНАТОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерная верстка Е.М. Кнутовой, С.Я. Шатских

Подписано в печать 15.04.2019. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,25.
Тираж 150 экз. (1 з-д 1-25). Заказ № 50.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА"
(САМРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.

443086 Самара, Московское шоссе, 34.