МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и информатики

В.М. Долгополов, И.Н. Родионова, В.В. Бондаренко

Конформные отображения

Учебное пособие

Издательство «Самарский университет»
2002

Печатается по решению Редакционно-издатепъского совета Самарского государственного университета

ББК 22.141
УДК 517.55 "
Д641

Долгополое В.М., Родионова И.Н., Бондаренко В.В. Конформные отображения: Учеб. пособие. Самара: Издательство "Самарский университет", 2002. 39 с.

В данной работе кратко изложены основные положения теории аналитических функций, которые проиллюстрированы на примерах. Рассмотрены свойства основных элементарных функций: $W=e^{z}$, $W=\frac{az+b}{cz+d}$, $w=z^{a}$, $W=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, а также подробно разобраны задачи на отображения, решаемые с помощью данных функций. В конце читателю предложены задачи для самостоятельного решения.

Предназначено в качестве вспомогательного материала по решению задач на конформные отображения студентам, изучающим теорию функций комплексного переменного.

ББК 22.141

УДК 517.55

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко

Отв. редактор: д-р физ.-мат. наук, проф. Л.А. Сараев

§1. Понятие функции комплексного переменного

Рассмотрим два множества комплексных чисел E и H. Пусть каждому комплексному числу z, принадлежащему множеству E, приводится в соответствие комплексное число w, принадлежащее H, или некоторая совокупность чисел $w \in H$. Тогда говорят, что на множестве E задана комплексная функция комплексного переменного $w = f(z)$, $z \in E$. Функция называется *однозначной*, если каждому $z \in E$ поставлено в соответствие единственное число w, в противном случае она называется *многозначной*.

Примеры

1. Функция

$$w = \frac{1}{z}$$

определена на плоскости с выброшенной точкой $z=0$. Если возьмем любое отличное от нуля комплексное число $z = a + bi$, то соответствующее значение функции

$$w = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad (a^2+b^2 \neq 0)$$

будет единственным. Функция $w = \frac{1}{z}$ однозначна.

2. Полином, или целая рациональная функция

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

с произвольными комплексными коэффициентами есть однозначная функция, определенная на всей комплексной плоскости.

3. Дробная рациональная функция

$$Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}$$

есть однозначная функция на плоскости, из которой выброшены точки, обращающие знаменатель в нуль.

4. Иррациональные функции многозначны.

Так, функция $w = z - \sqrt{z+1}$ определена на всей плоскости и двузначна, так как квадратный корень из числа имеет два значения. Например, если $z=0$, то $w_1 = -1$, $w_2=1$; если $z=-1+2i$, то $w = -1 + 2i - \sqrt{2i} =$ $= -1 + 2i - \sqrt{(1+i)^2}$, значит $w_1 = -2 + i$, $w_2=3i$ и т.п.

Функция $w = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}$ четырехзначна и определена на всей комплексной плоскости. Действительно, каждое из двух значений первого квадратного корня может сочетаться с каждым из двух значений второго, поэтому возможны четыре комбинации. Например, при $z=0$ четыре значения функции таковы $w_1 = i + 1$, $w_2 = i - 1$ $w_3 = -i + 1$, $w_4 = -i - 1$.

Функция

$$w = \frac{z+1}{z - \sqrt[3]{3z+2}}$$

трехзначна и определена всюду, кроме точек $z = 2$, $z = -1$, в которых знаменатель обращается в нуль.

$$(z - \sqrt[3]{3z+2} = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{3z+2} \Rightarrow z^3 = 3z + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (z-2)(z^2+2z+1) \Rightarrow z = 2, z = -1).$$

Выделение вещественной и мнимой частей комплексной функции

Если задана функция

$$w = f(z), \tag{1}$$

то каждому числу $z = x + iy$ поставлено в соответствие число $w = u + iv$. Другими словами, каждое из чисел u и v находится по паре (x, y). А это значит, что u и v являются действительными функциями двух действительных переменных (x, y), т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Отсюда

$$w = u(x, y) + i\, v(x, y). \tag{2}$$

Переход от записи (1) к записи (2) называется определением вещественной и мнимой частей функции комплексной переменной

$$u(x, y) = Re\, w, \qquad v(x, y) = Im\, w.$$

Для нахождения функций u и v нужно в левую часть равенства (1) вместо w подставить $u+iv$, в правую – вместо z подставить $x + iy$, выполнить все указанные действия, затем приравнять действительные и мнимые части равенства. Иногда легче выполнить отделение, если взять z в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Примеры

1. $w = \dfrac{1}{z}$.

Возьмем $w = u + iv$, $z = x + iy$.

$$u + iv = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{(-y)}{x^2+y^2}.$$

Откуда

$$u = \frac{x}{x^2+y^2},\ v = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

2. $w = z^n$. Полагаем $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$u + iv = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)].$$

Откуда $u = r^n \cos n\varphi$, $v = r^n \sin n\varphi$.

Обратно от выражения функции в виде (2) можно перейти к виду (1). При этом получается функция, зависящая от z и $\bar{z}$ (комплексное число, сопряженное к z). Действительно, из $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ находим

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2},\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Отсюда

$$w = u(x,y) + iv(x,y) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Примеры

$$1.\ w = x^2 - y + i(x+y^2) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \frac{z-\bar{z}}{2i} + i\left(\frac{z+\bar{z}}{2} + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(1-i)(z^2+\bar{z}^2) + \frac{1}{2}(1+i)z\bar{z} + iz;$$

$$2.\ w = x^2 - y^2 + 2xyi = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 2i\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} =$$

$$= \frac{z^2+\bar{z}^2}{2} + \frac{z^2-\bar{z}^2}{2} = z^2.$$

Упражнения

1. Отделить действительную и мнимую части, а также найти модуль и аргумент следующих функций:

а) $w = \dfrac{z-1}{z+1}$,

б) $w = z^3$,

в) $w = z - \frac{1}{z}$ (положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$).

2. Выразить через z и $\bar{z}$ следующие функции:

а) $w = x - 2y + i(2x + y)$;

б) $w = x + 3y + i(x - y)$;

в) $w = x^2 - 1$.

3. Вычислить все значения многозначных функций:

а) $w = \dfrac{\sqrt[3]{z} - 1}{z}$ при $z = 1 + i$;

б) $w = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}$ при $z = i$;

в) $w = \sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$ при $z = -1 + i$.

Геометрическое истолкование комплексной функции

Пусть на множестве E задана однозначная функция $w = f(z)$. Возьмем две плоскости: на одной – плоскости аргумента z – будем изображать комплексные числа $z \in E$, на другой – плоскости функции w – соответствующие им комплексные числа $w = f(z)$. Получим, что задание функции позволяет каждой точке $z \in E$ плоскости аргумента поставить в соответствие точку w плоскости функции. Если в плоскости (z) возьмем какую-нибудь кривую C, все точки которой принадлежат множеству E, и для каждой точки z кривой C найдем соответствующую ей точку $w = f(z)$ в плоскости w, то совокупность полученных точек w называется образом K кривой C, и говорят, что функция $w = f(z)$ отображает кривую C в кривую K (рис.1).

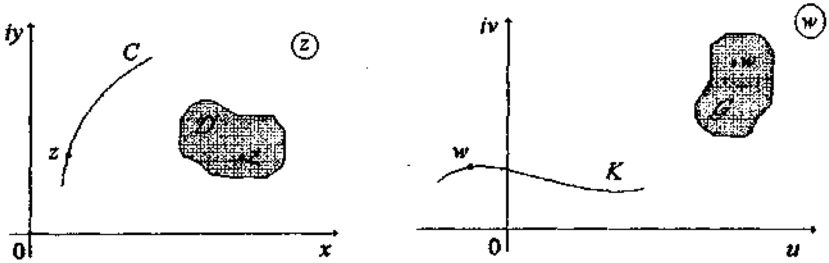


Рис. 1

Аналогично, если в плоскости z возьмем область $\mathcal{D}$, все точки которой принадлежат множеству E, и для каждой точки z области $\mathcal{D}$ найдем образ $w = f(z)$ в плоскости w, то получим в ней образ $\mathcal{G}$ области $\mathcal{D}$.

Однако не всякая функция комплексного переменного отображает кривую в кривую, а область в область. Так, функция $w = Re\, z$ отображает всю плоскость z в действительную ось плоскости w.

Чтобы найти уравнение образа K кривой C с помощью функции $w = f(z)$, нужно выделить вещественную и мнимую части данной функции

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned},$$

а уравнение кривой C записать в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}.$$

Тогда параметрическими уравнениями кривой K будут

$$\begin{aligned} u &= u[\varphi(t), \psi(t)] \\ v &= v[\varphi(t), \psi(t)] \end{aligned}.$$

Чтобы найти область $\mathcal{G}$, образ области $\mathcal{D}$, часто поступают так: область $\mathcal{D}$ представляют себе как образованную "заметанием" какой-нибудь кривой *C,* зависящей от параметра. Например, круг $\backslash z \backslash < R$ можно мыслить как область, полученную "заметанием" окружностью $\backslash z \backslash = r$ при изменении радиуса *г* от нуля до *R,* или как область, полученную "заметанием" радиусом окружности при вращении его на 360°. Представив себе область ^ об-разованной "заметанием" кривой *C,* кривую *C* отображают в ее образ *K* и смотрят, какую область "заметет" *K,* когда *C* "заметает" область *£).*

Примеры

1. Рассмотрим функцию $w=z^2$ и найдем, в какую кривую она отображает прямую $x=a$, параллельную оси y. Выделим вещественную и мнимую части: $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Положим $x=a$: $u=a^2-y^2$, $v=2ay$. Получили параметрическое уравнение образа прямой $x=a$, параметром является y. Исключим его из уравнений $y=\frac{v}{2a}$, значит $u=a^2-\left(\frac{v}{2a}\right)^2$, или $v^2=-4a^2(u-a^2)$. Это уравнение параболы.

Возьмем теперь полосу, лежащую между прямыми $x=1$, $y=2$. Ее можно себе представить образованной "заметанием" прямой $x=a$, когда a меняется от 1 до 2. При этом парабола $v^2=-4a^2(u-a^2)$ "заметает" область между параболами $v^2=-4(u-1)$ и $v^2=-16(u-4)$ (рис 2).

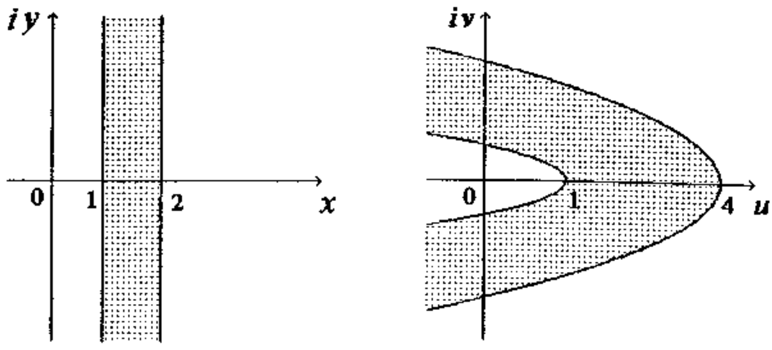


Рис.2

2. Функция $w=z^2$ преобразует луч, выходящий из начала координат, в луч, выходящий из начала координат, но при этом угол наклона его к вещественной оси удваивается. Угол с вершиной в начале координат преобразуется в угол двойного раствора.

Действительно, точка $z = r$ (cos $<p+i$ sin *ip)* опишет луч, если p=const, а *г* изменяется от 0 до оо. Но $w = z^2 = /$ (cos $2<p+i$ sin *2ip).* Отсюда видим, что аргумент *w* равен $2<p$ и, значит, тоже остается постоянным, но вдвое большим, чем аргумент z, а модуль *w* равен $г^2$ и также меняется от 0 до <ю. Следовательно, точка w опишет луч, угол наклона которого вдвое больше первоначального.

Посмотрим, в какую область функция $w=z^2$ отобразит первый квадрант $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Представим его как область, "заметенную" лучом, угол наклона которого к оси OX изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Так как функция $w=z^2$ луч переводит в луч, но угол наклона при этом удваивается, то в плоскости w угол наклона луча-образа будет изменяться от 0 до π, и поэтому луч-образ "заметет" верхнюю полуплоскость. Итак, функция $w=z^2$ первый квадрант отображает в верхнюю полуплоскость.

Аналогично функция $w=z^2$ верхнюю полуплоскость отображает в плоскость w с *разрезом вдоль положительной части вещественной оси.* Дело в том, что граница верхней полуплоскости состоит из двух лучей $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. При преобразовании $w=z^2$ наклон лучей удваивается, т.е. они переводятся в лучи $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$, которые совпадают. *Если различные части границы области переходят при отображении в одну линию, то вдоль этого образа границы делается разрез, который как бы отделяет образ одной части границы от другого* (рис. 3).

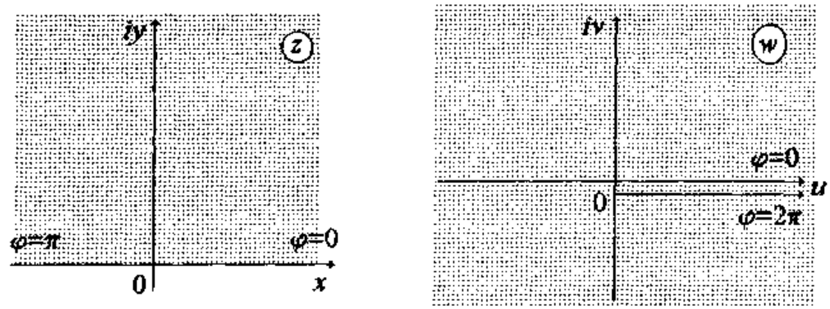


Рис. 3

Упражнения

1. Подвергнуть прямую $x+y=1$ двум преобразованиям: $w=\frac{1}{z}$, $w=z^2$.

2. В какую область функция $w=\frac{1}{z}$ преобразует полосу между прямыми $x=1$, $x=2$.

3. В какую область функция $w=\frac{1}{z}$ преобразует квадрат, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$.

Однолистные функции

Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* на множестве E, если различным значениям аргумента z соответствуют различные значения функции.

Если $w = f(z)$ однолистна на множестве E и множество H является множеством ее значений, то, очевидно, что каждому значению $w \in H$ соответствует единственное значение $z \in E$, т.е. на множестве H определена функция $z = f^{-1}(w)$, которая будет обратной к $f(z)$ и однозначной на H.

Рассмотрим функцию $w = z^2$. Очевидно, что двум точкам z и $-z$, аргументы которых отличаются на π, а модули одинаковы, соответствует одно и то же значение $z^2 = w$. Это значит, что функция $w = z^2$ не является однолистной в плоскости z, однако она будет однолистной в верхней полуплоскости, а также в нижней полуплоскости, которая переходит при отображении $w = z^2$ в плоскость w с разрезом вдоль положительной части вещественной оси (последний факт предлагаем читателю показать самостоятельно).

Определения предела и непрерывности функции комплексной переменной аналогичны соответствующим определениям для вещественной функции, и мы их не приводим. Сформулируем основную теорему об отображении области с границей.

ТРППРМЯ 1

Если функция $w = f(z)$ однолистна в области $\mathcal{D}$ и непрерывна в замкнутой области, то эта функция переводит область $\mathcal{D}$ в область $\mathcal{H}$, причем граница области $\mathcal{D}$ преобразуется в границу области $\mathcal{H}$.

В дальнейшем мы будем решать две задачи на отображение:

I. Дана область $\mathcal{D}$ и функция $w = f(z)$, непрерывная и однолистная в области $\mathcal{D}$. Найти область $\mathcal{H}$, в которую преобразует функция $f(z)$ область $\mathcal{D}$.

II. Даны две области $\mathcal{D}$ и $\mathcal{H}$. Найти функцию $w = f(z)$, переводящую $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}$.

§2. Конформные отображения

Аналитические функции

Напомним основные понятия теории аналитических функций.

Определение 1. Производной функции $w=f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции к приращению независимого переменного при условии, что приращение независимого переменного стремится к нулю, т.е.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

Определение 2. Однозначная функция $w=f(z)$ называется аналитической в некоторой области $\mathcal{G}$, если в каждой ее точке она имеет производную.

Теорема 2

Для того чтобы функция $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ была аналитической в области $\mathcal{G}$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области $\mathcal{G}$ выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

которые называются условиями Эйлера-Даламбера.

Пусть отображение области $\mathcal{G}$ на область $\mathcal{H}$ осуществляется с помощью функции $w=f(z)$, аналитической в области $\mathcal{G}$. Это отображение можно рассматривать как деформацию области $\mathcal{G}$, которая характеризуется в каждой точке $M\in\mathcal{G}$ коэффициентом растяжения k в данном направлении, исходящим из точки M, а также углом поворота α между любыми двумя направлениями, исходящими из точки M.

Определение 3. Отображение области $\mathcal{G}$ на область $\mathcal{H}$ называется конформным, если в каждой точке области $\mathcal{G}$ угол α между двумя любыми направлениями, исходящими из данной точки, сохраняется и коэффициент растяжения k в любом направлении, исходящим из данной точки, имеет одно и то же значение.

Теорема 3

Отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным в любой точке, в которой ее производная отлична от нуля.

Простейшие конформные отображения

Рассмотрим простейшие конформные отображения одной плоскости на другую, совершаемые с помощью основных элементарных функций: дробно-линейной, показательной, степенной и функцией Жуковского.

1. *Дробно-линейное преобразование*

Определение 4. Функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3}$$

где $ad - bc \neq 0$, называется дробно-линейной. Если c=0, то мы получаем линейную функцию

$$w = az + b \quad (a \neq 0).$$

Рассмотрим вначале преобразование, осуществляемое линейной функцией. Частные случаи его:

1) $w = z + c$ – преобразование переноса на вектор c, c – комплексное число;

2) $w = e^{i\varphi} \cdot z$ – преобразование поворота на угол φ, φ – вещественное число;

3) $w = k\,z$ – преобразование подобия, k>0 (k – вещественное число).

Таким образом, всякое линейное преобразование можно расчленить на преобразование переноса, подобия и поворота.

Рассмотрим теперь преобразование

$$w = \frac{R^2}{z}. \tag{*}$$

Положим $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Тогда

$$w = \frac{R^2}{r} e^{-i\varphi}.$$

Отсюда $|w| = \dfrac{R^2}{r} = \dfrac{R^2}{|z|}$, arg $w = -\varphi$. Таким образом, аргумент меняет знак на противоположный, а $|w| \cdot |z| = R^2$, т.е. произведение расстояний точек z и w от начала координат равно квадрату радиуса окружности $|z| = R$.

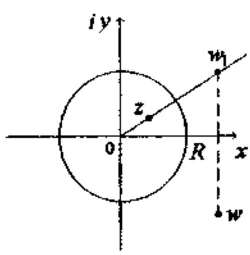


Рис. 4

Отсюда следует, что преобразование (*) равносильно инверсии в окружности $|z| = R$ с последующим зеркальным отображением относительно вещественной оси (рис. 4).

Рассмотрим теперь преобразование (3) при $c \neq 0$ и выделим целую часть дроби, при этом обозначим

$$\frac{bc-ad}{c^2}=R^2e^{i\alpha}.$$

Тогда функция (3) примет вид

$$w=\frac{a}{c}+e^{i\alpha}\frac{R^2}{z+\frac{d}{c}}.$$

Отсюда видно, что точку w можно построить так: сначала находим точку w_1, перенеся точку z на вектор $\frac{d}{c}$; затем находим точку $w_2=\frac{R^2}{w_1}$, совершив инверсию относительно окружности $|z|=R$, и зеркальное отображение относительно оси OX; затем находим точку $w_3=e^{i\alpha}w_2$ поворотом точки w_2 на угол α вокруг начала координат; наконец, находим искомую точку $w=w_3+\frac{a}{c}$ переносом точки w_3 на вектор $\frac{a}{c}$.

Сформулируем **основные свойства дробно-линейной функции**.

Положив $w(\infty)=\frac{a}{c}$ и $w(-\frac{d}{c})=\infty$, мы определяем функцию (3) на расширенной комплексной плоскости. Непосредственным вычислением доказывается, что функция (3) осуществляет взаимно-однозначное отображение расширенной плоскости (z) на расширенную плоскость (w).

Дробно-линейная функция является аналитической на расширенной комплексной плоскости и осуществляет конформное отображение. Действительно,

$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0.$$

Теорема 5

Дробно-линейным преобразованием можно одну плоскость конформно отобразить в другую так, чтобы произвольно заданные три различные точки первой плоскости перешли в произвольно заданные три различные точки второй.

Найдем вид дробно-линейной функции, переводящей точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3.

Имеем:

$$w_1=\frac{az_1+b}{cz_1+d},\ w_2=\frac{az_2+b}{cz_2+d},\ w_3=\frac{az_3+b}{cz_3+d}.$$

Из полученных равенств, с учетом формулы (3), исключим a, b, c, d, получим:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \qquad (4)$$

Пример

Найти дробно-линейное преобразование, переводящее точки $z=-1$, 1, ∞ в точки $w=0, 1, -1$. Воспользуемся формулой (4):

$$\frac{w-0}{w-1}:\frac{-1}{-1-1}=\frac{z+1}{z-1}:\frac{\infty+1}{\infty-1},$$

откуда

$$\frac{2w}{w-1}=\frac{z+1}{z-1} \text{ или } w=\frac{z+1}{-z+3}.$$

Иногда дробно-линейную функцию удобнее записывать в виде

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\beta}. \qquad (5)$$

Так как $w(\alpha)=0$, а $w(\beta)=\infty$, то числа α и β называются соответственно нулем и полюсом дробно-линейной функции.

Отметим еще некоторые важные отображения, осуществляемые дробно-линейной функцией.

Теорема 6

Для того чтобы дробно-линейная функция осуществляла отображение верхней полуплоскости в единичный круг $|w|<1$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\ |k|=1,\ \mathrm{Im}\,\alpha>0.$$

Теорема 7

Для того чтобы функция (3) отображала верхнюю полуплоскость в себя, необходимо и достаточно, чтобы a, b, c, d были вещественными и $ad-bc>0$.

Теорема 8

Для того чтобы дробно-линейная функция отображала единичный круг $|z|<1$ в единичный круг $|w|<1$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$w=k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z},\ где\ |k|=1,\ |\alpha|<1.$$

Причем функция, о которой идет речь в теоремах 6–8, будет однозначно отображать область $\mathcal{D}$ на область $\mathcal{G}$, если, кроме требования об отображении, поставить еще одно из следующих дополнительных требований:

1) произвольно заданную внутреннюю точку $z_0 \in \mathcal{D}$ отобразить в произвольно заданную внутреннюю точку $w_0 \in \mathcal{G}$ и заданное в z_0 направление перевести в заданное в w_0 направление;

2) две произвольно заданные точки: z_0 – внутри, z_1 – на границе $\mathcal{D}$ перевести в произвольно заданные точки соответственно w_0 – внутри $\mathcal{G}$, w_1 на границе $\mathcal{G}$;

3) три произвольно заданные граничные точки области $\mathcal{D}$ перевести в три произвольно заданные граничные точки области $\mathcal{G}$.

Примеры

1. Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$.

Решение. В силу теоремы 6 вид такой дробно-линейной функции

$$w = k\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},$$

а так как $|k| = 1$, то

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}.$$

Требуется найти α и φ.

Из первого условия имеем

$$w(i) = e^{i\varphi}\frac{i-\alpha}{i-\bar{\alpha}},$$

откуда $\alpha=i$, следовательно $\bar{\alpha} = -i$. Получаем функцию

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-i}{z+i}.$$

Для отыскания φ найдем производную $\frac{dw}{dz}$:

$$w' = e^{i\varphi}\frac{2i}{(z+i)^2} \qquad w'(i) = e^{i\varphi}\frac{2i}{(2i)^2} = -\frac{ie^{i\varphi}}{2}.$$

Используем второе дополнительное условие

$$\arg w'(i) = \arg(-i) + \arg\frac{1}{2} + \arg\varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} + 0 + \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

откуда $\varphi=0$.

В результате получаем функцию

$$w(z)=\frac{z-i}{z+i}.$$

2. Отобразить верхнюю полуплоскость в себя так, чтобы три точки –1; 0; 1 перешли соответственно в три точки 0; 1; ∞.

Для решения задачи подставим эти соответствующие друг другу значения z и w в равенство

$$w=\frac{az+b}{cz+d}.$$

Получим три уравнения

$$-1=\frac{b}{d},\quad 0=\frac{a+b}{c+d},\quad 1=\frac{a}{c}.$$

Отсюда $b=-a$, $c=a$, $d=a$. Следовательно,

$$w(z)=\frac{z-1}{z+1}.$$

Круговое свойство дробно-линейной функции

Определение 5. Окружностью в широком смысле называется кривая, определяемая уравнением

$$A\,(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0.$$

При $A\neq 0$ это окружность, при $A=0$ – прямая.

Теорема 9

Дробно-линейная функция окружность в широком смысле преобразует в окружность в широком смысле.

Заметим, что если задана прямая или окружность, то легко узнать, перейдет ли она с помощью дробно-линейной функции в прямую или окружность. Очевидно, что в результате преобразования мы получим прямую только в том случае, если на заданной окружности (или прямой) лежит точка, которая преобразованием переводится в бесконечно удаленную точку. Например, функция

$$w=\frac{z+1}{2z+1}$$

отображает окружность $4x^2+4y^2+2x-5y=1$ в окружность, а окружность $4x^2+4y^2+2x-5y=0$ в прямую. Действительно, точка $z=-\frac{1}{2}$ – полюс дробно-линейной функции $w(-\frac{1}{2})=\infty$. Эта точка лежит на второй окружности, но не лежит на первой, т.е. одна точка второй окружности преобразованием переводится в бесконечно удаленную, поэтому вторая окружность переходит в прямую. Все точки первой окружности переходят в конечные точки, поэтому окружность переходит в окружность.

Следует отметить, что дробно-линейная функция удовлетворяет условиям теоремы 1 (об отображении области с границей).

<u>Определение 6</u>. Точки A и B будем называть симметричными относительно окружности K, если каждая из них является инверсией другой относительно окружности K.

На рис. 4 точки z и w_1 симметричны относительно окружности радиуса R: $|z|\cdot|w_1| = R^2$. Причем центру окружности симметричной (инверсной) точкой будет бесконечно удаленная точка.

Теорема 10

Когда дробно-линейная функция переводит одну окружность в широком смысле в другую, то точки, симметричные относительно первой, переходят в точки, симметричные относительно второй.

Пример

Отобразить единичный круг в себя так, чтобы точка α перешла в центр круга.

Если положим $\alpha = r\,e^{i\varphi}$, то симметричной точкой относительно единичной окружности будет

$$\frac{1}{r}e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{-i\varphi}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}.$$

В силу принципа симметрии, из того, что $z=\alpha$ переходит в $w=0$, следует, что точка $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$ переходит в $w=\infty$, т.е. $w(\alpha)=0$ и $w(\frac{1}{\bar{\alpha}}) = \infty$, и функция должна иметь вид

$$w = k_1\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}} = k\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

Определим k из условия, что граница переходит в границу, т.е. если $|z|=1$, то $|w|=1$. Но

$$|w| = |k|\frac{|z-\alpha|}{|1-\bar{\alpha}z|}.$$

Отсюда

$$1 = |k|\frac{|z-\alpha|}{|z(\frac{1}{z}-\bar{\alpha})|} \text{ или } 1 = |k|\frac{|z-\alpha|}{|\bar{z}-\bar{\alpha}|},$$

т.к. из $|z|=1$ следует, что $z=e^{i\psi}$, а значит $\frac{1}{z}=e^{-i\psi}=\bar{z}$. Но у сопряженных комплексных чисел модули равны, следовательно, $|z-\alpha|=|\bar{z}-\bar{\alpha}|$. Окончательно, $|k|=1$. Отсюда $k=e^{i\varphi}$.

Итак, преобразование единичного круга в себя имеет вид:

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

Данный пример доказывает теорему 8.

Рассмотрим еще задачу, решаемую с помощью дробно-линейной функции.

Во что преобразуется квадрант $x>0$, $y>0$ с помощью дробно-линейной функции

$$w=\frac{z-i}{z+i}.$$

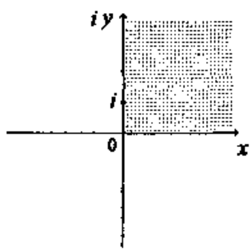


Рис. 5

Решение. Границей области являются координатные оси (рис. 5). Выясним, во что переходит граница при данном отображении. Так как $w(-i)=\infty$, т.е. полюс дробно-линейной функции лежит на мнимой оси, то мнимая ось переходит в прямую, а вещественная ось переходит в окружность. Далее заметим, что

$$w(bi)=\frac{bi-i}{bi+i}=\frac{b-1}{b+1},$$

т.е. чисто мнимые числа преобразуются в вещественные. Значит, ось OY переходит в вещественную ось. Так как при конформном отображении сохраняются углы между направлениями, то образы вещественной (окружность) и мнимой (вещественная ось) осей будут ортогональны.

Найдем дополнительно образы общих точек оси OX и оси OY. Таких точек две – начало координат и бесконечно удаленная точка. Имеем

$$w(0)=\frac{-i}{i}=-1, \quad w(\infty)=1.$$

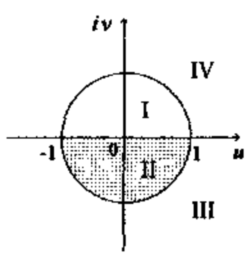


Рис. 6

Таким образом, окружность, в которую отобразится вещественная ось, пройдет через точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ортогонально вещественной оси OU (рис. 6).

Для того чтобы узнать, в какую из полученных четырех областей отобразился первый квадрант, нужно найти образ любой внутренней точки этого квадранта, например, $z=1+i$. Вычислением получаем

$$w(1+i)=\frac{1+i-i}{1+i+i}=\frac{1-2i}{5}.$$

Эта точка принадлежит нижней половине круга $|w|<1$. Таким образом, область $x>0$, $y>0$ с помощью функции

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

отобразилась в область $|w|<1$, $v<0$.

2. Преобразование $w=z^{\alpha}$ (α – действительное)

Полагая $z=r\,e^{i\varphi}$, находим $w=r^{\alpha}\,e^{i\alpha\varphi}$. Отсюда $|w|=|z|^{\alpha}$, $\arg w=\alpha\cdot\varphi=\alpha\cdot\arg z$, т.е. при преобразовании модуль возводится в степень α, а аргумент умножается на α. Следовательно, точки луча OC, выходящего из начала координат под углом λ на плоскости z, взаимно однозначно отображаются в точки луча $O\Delta$, выходящего из начала координат под углом $\alpha\lambda$ на плоскости w.

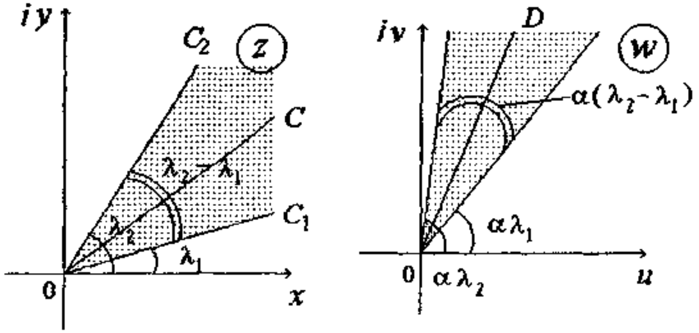


Рис. 7

Возьмем в плоскости z угол $\angle C_1OC_2$ с вершиной в начале координат, стороны которого образуют с положительным направлением вещественной оси углы λ_1 и λ_2 (рис. 7). Рассмотрим этот угол как область, заметаемую лучом OC, когда угол наклона его λ изменяется от λ_1 до λ_2. Луч OC отображается в луч $O\Delta$ плоскости w, образующий с осью u угол $\alpha\lambda$. Когда угол наклона луча OC изменяется от λ_1 до λ_2, то угол наклона луча $O\Delta$ изменяется от $\alpha\lambda_1$ до $\alpha\lambda_2$. Следовательно, на плоскости w получим угол раствора $\alpha(\lambda_2-\lambda_1)$, если только $\alpha(\lambda_2-\lambda_1)\le 2\pi$. Итак, преобразование $w=z^{\alpha}$ угол с вершиной в начале координат плоскости z взаимно однозначно и конформно отображает в угол с вершиной в начале координат плоскости w раствора в α раз большего, если раствор не превосходит 2π. Конформность следует из того, что производная $w' = \alpha z^{\alpha-1}$ внутри угла в ноль не обращается.

Пример

Функция $w = \sqrt{z}$ отображает плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси в верхнюю полуплоскость.

Этот факт мы будем в дальнейшем учитывать при решении задач на отображение.

3. Функция Жуковского

Это функция вида $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Для выделения ее вещественной и мнимой частей положим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, подставим в формулу, получим

$$w = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right],$$

откуда получаем ее вещественную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\left(r + \tfrac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ v &= \tfrac{1}{2}\left(r - \tfrac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что формулы (6) при фиксированном r являются параметрическими уравнениями эллипса, а при фиксированном φ – параметрическими уравнениями гиперболы (рис. 8). Поэтому точки окружности радиуса r $|z|=r$ функция Жуковского взаимно однозначно отображает в точки эллипса с полуосями $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)(r \neq 1)$.

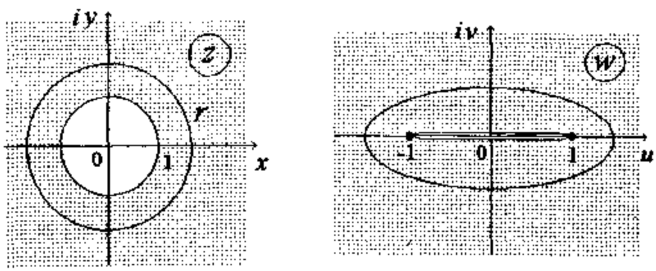


Рис. 8

Возьмем внешность единичной окружности $|z|>1$. Ее можно рассматривать как область, заметаемую окружностью $|z|=r$, когда радиус r меняется от единицы до бесконечности ($r\neq 1$). Окружность преобразуется в эллипс. При $r\to\infty$ обе полуоси будут бесконечно расти, а при $r\to 1$ большая полуось стремится к единице, а малая к нулю. Мы получаем вырожденный в отрезок $[-1, 1]$ эллипс. Причем в этот отрезок отображаются и верхняя, и нижняя полуокружности единичного радиуса. Следовательно, делаем разрез вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси u, отделяя тем самым образы различных частей границы $|z|=1$. Итак, если окружность заметает внешность единичного круга плоскости z, то ее образ-эллипс заметет всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ вещественной оси. Конформность отображения следует из того, что производная $w' = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{z^2}\right]$ в области $|z|>0$ не обращается в ноль.

Из формулы (6) видно, что если точка z описывает верхнюю полуокружность $|z|=r$ ($r>1$), $0<\varphi<\pi$, то ее образ-точка w будет описывать верхнюю половину эллипса, т.к. v в формуле (6) при таких значениях r и φ будет положительным. Отсюда следует, что направления обхода окружности и ее образа-эллипса совпадают.

Из вышесказанного следует: функция $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ конформно отображает внешность единичного круга на плоскость w с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси. Так как функция Жуковского не меняется при замене z на $\frac{1}{z}$, но при этом внешность круга $|z|>1$ переходит во внутренность $|z|<1$, то она отображает внутренность единичного круга тоже на плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ вещественной оси. Окружность $|z|=\frac{1}{r}$ ($r>1$) отображается в тот же эллипс, в который переходила окружность $|z|=r$, однако направление обхода их будет противоположным.

Примеры

1. Найти область, на которую функция Жуковского отобразит угол

$$\frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{\pi}{2}+\alpha,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Выясним, во что переходит граница области, а именно лучи $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ и $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$. Подставим в формулы (6) значение φ_0, получим

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}\left(r+\tfrac{1}{r}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tfrac{1}{2}\left(r+\tfrac{1}{r}\right)\sin\alpha \\ v &= \tfrac{1}{2}\left(r-\tfrac{1}{r}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tfrac{1}{2}\left(r-\tfrac{1}{r}\right)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Из системы (7) исключим параметр r. Для этого первое равенство поделим на $\sin\alpha$, второе на $\cos\alpha$, затем возведем обе части каждого из полученных равенств в квадрат и из первого вычтем второе. Получим

$$\frac{u^2}{\sin^2\alpha}-\frac{v^2}{\cos^2\alpha}=1.$$

Это каноническое уравнение гиперболы в плоскости w. Однако при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ в формуле (7) $u>0$, следовательно, мы получаем только правую ветвь гиперболы с фокусами в точках $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Аналогичными рассуждениями получаем, что луч $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ отображается в левую ветвь той же гиперболы. Остается выяснить, в какую область отобразится данный угол: во внутреннюю или во внешнюю часть области, ограниченной гиперболами. Учитывая, что внутренняя точка области переходит во внутреннюю, возьмем внутри угла точку i (можно любую другую) и найдем ее образ:

$$w(i)=\frac{1}{2}\left(i+\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{2}(i-i)=0.$$

Таким образом, $w(i)=0$, и мы получаем внутреннюю часть области (рис.9).

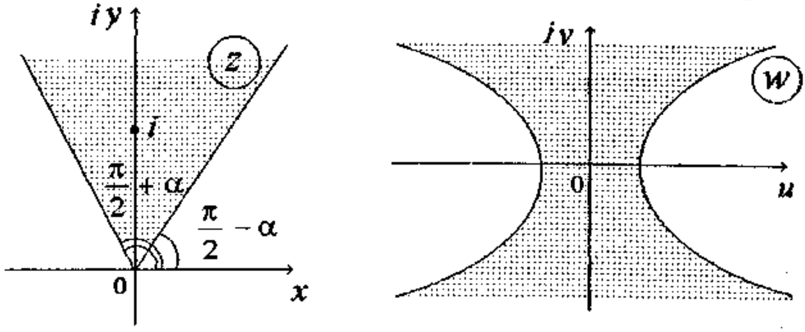


Рис. 9

2) Во что функция Жуковского переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$?

Выясним сначала, во что перейдет граница области, состоящая из двух лучей $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, $0<r<+\infty$. Подставим в формулы (6) $\varphi=0$, получим

$$\left.\begin{aligned} u&=\tfrac{1}{2}\left(r+\tfrac{1}{r}\right)\\ v&=0\end{aligned}\right\}.$$

Причем, если r меняется от нуля до единицы, точка $(u, 0)$ стремится вдоль вещественной оси u из плюс бесконечности к точке $(1, 0)$. А при изменении r от единицы до плюс бесконечности точка $(u, 0)$ возвращается по тому же пути в плюс бесконечность, т.е. если $0<r<+\infty$, то точка $(u, 0)$ дважды проходит луч $[1, +\infty)$ вещественной оси. Делая вдоль этого луча разрез, мы получаем вырожденную правую ветвь гиперболы. Аналогичными рассуждениями показываем, что луч $\varphi=\pi$ $(0<r<+\infty)$ отображается в сдвоенный луч $(-\infty, -1]$ вещественной оси. Производя разрез, получаем вырожденную левую ветвь гиперболы (рис.10).

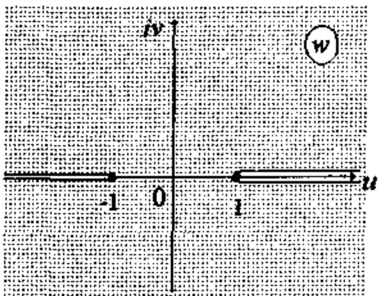


Рис. 10

Если теперь вернемся к предыдущему примеру и представим верхнюю полуплоскость как область, заметенную лучом $\varphi=\alpha$, в котором α меняется от нуля до π, то его образ — ветвь гиперболы — *заметет всю плоскость с* разрезами по лучам $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ вещественной оси. Причем при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ мы получаем мнимую ось на плоскости w. Ее тоже можно рассматривать как вырожденную в прямую правую ветвь гиперболы, которая при изменении φ от $\frac{\pi}{2}$ до π переходит в левую ветвь и описывает левую полуплоскость, переходя в разрез по лучу $(-\infty, -1]$.

Замечание. Из приведенных выше рассуждений следует, что функция Жуковского не является однолистной на всей плоскости z, однако она будет однолистной в следующих областях:

$$|z|<1; \qquad |z|>1; \qquad \operatorname{Im} z>0; \qquad \operatorname{Im} z<0,$$

которые отображаются ею в плоскости w с разрезами.

4. Показательная функция $w = e^z$

Показательная функция определяется формулой: $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Ее вещественная и мнимая части:

$$\left.\begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Непосредственно из определения показательной функции следуют ее свойства:

1) e^z аналитическая на всей комплексной плоскости (выполняются условия Эйлера-Даламбера);

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

3) $e^{z+2\pi i}=e^{z}\cdot e^{2\pi i}=e^{z}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^{z}\ \Rightarrow$ периодичность с периодом $T=2\pi i$;

4) e^{z} не обращается в ноль ни при каком значении аргумента;

5) $(e^{z})'=e^{z}\Rightarrow$ конформность отображения;

6) так как функция $w=e^{z}$ является периодической с периодом $T=2\pi i$, то она не может быть однолистной на плоскости z, ибо значениям аргумента, отличающимся друг от друга на число, кратное $2\pi i$ соответствует одно и то же значение функции. Областью однолистности является горизонтальная полоса не шире 2π.

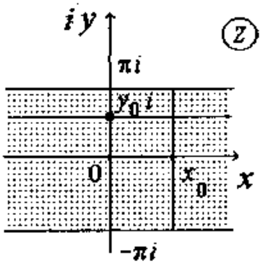


Рис. 11

Рассмотрим одну из таких полос $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ и выясним, во что отображает функция $w=e^{z}$ прямые и отрезки, параллельные координатным осям, заключенные в данной полосе (рис. 11). Возьмем $x=x_0$ $(-\pi<y<\pi)$, подставим в систему (8) и исключим y, получим:

$$\left.\begin{array}{l} u=e^{x_0}\cos y \\ v=e^{x_0}\sin y \end{array}\right\}\Rightarrow u^2+v^2=(e^{x_0})^2.$$

Мы получили на плоскости w окружность радиуса e^{x_0}.

Возьмем $y=y_0$ $(-\infty<x<+\infty)$ и подставим в систему (8):

$$\left.\begin{array}{l} u=e^{x}\cos y_0 \\ v=e^{x}\sin y_0 \end{array}\right\}.$$

Исключим x, поделив второе равенство на первое, получим:

$$\frac{v}{u}=\operatorname{tg} y_0\Rightarrow v=u\operatorname{tg} y_0.$$

Это луч с аргументом y_0 в плоскости w.

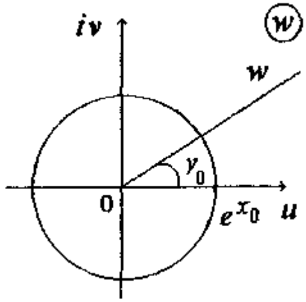


Рис. 12

Представим полосу $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ как область, заметенную прямой $y=y_0$, если y_0 изменяется от $-\pi$ до π. Тогда луч $v=u\operatorname{tg} y_0$ – образ этой прямой, поворачиваясь против часовой стрелки, опишет всю плоскость w. Граница области – прямые $y=-\pi$ и $y=\pi$, она перейдет в один луч, а именно, в отрицательную часть вещественной оси, вдоль которой сделан разрез (рис. 12).

Таким образом, одна из областей однолистности функции $w=e^{z}$ – горизонтальная полоса $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ – отображается этой функцией в плоскость w с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси (рис. 13).

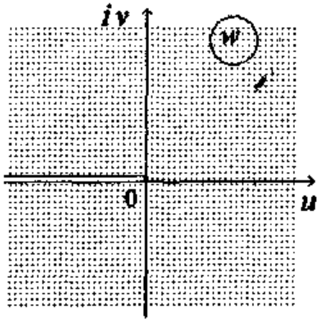


Рис. 13

Аналогичными рассуждениями показываем, что полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ отображается функцией $w = e^z$ в верхнюю полуплоскость. Граница этой области – прямые $y = 0$ и $y = \pi$ – переходит во всю вещественную ось, причем $y = 0$ в ее положительную часть, а $y = \pi$ – в отрицательную.

Возьмем теперь не всю прямую $y = y_0$, а только полупрямую $y = y_0$, $x < 0$. Найдем ее образ при отображении $w = e^z$. Так как абсцисса x меняется от $-\infty$ до 0, то модуль $|w| = e^x$ изменяется от $e^{-\infty}$ до e^0, т.е. от 0 до 1. Поэтому полупрямая $y = y_0$, $x < 0$ отображается в отрезок луча с аргументом y_0 от начала координат до точки, отстоящей от начала координат на расстоянии, равном единице. Отсюда следует, что левая полуполоса $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$, $x < 0$ переходит при отображении $w = e^z$ во внутренность единичного круга $|w| < 1$ с разрезом вдоль отрезка $[-1, 0]$ (рис. 14).

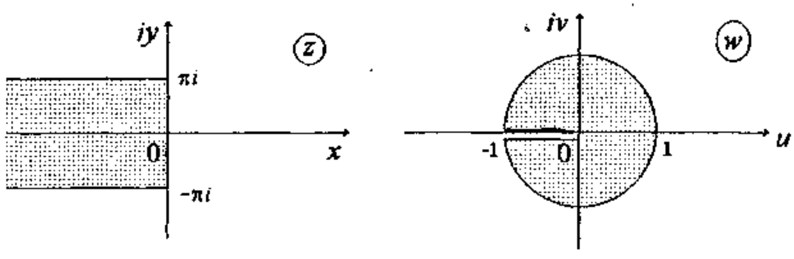
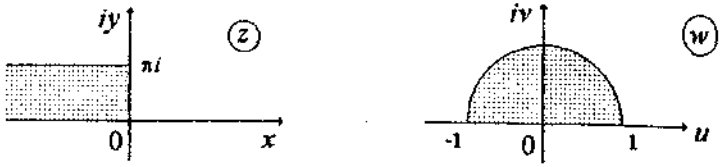


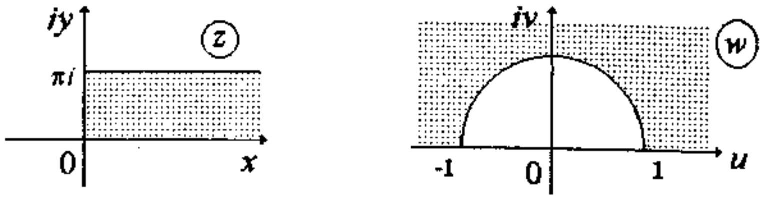
Рис. 14

Рассуждая подобным образом, можно построить следующий ряд отображений, осуществляемых функцией $w = e^z$ (рис. 15-20).



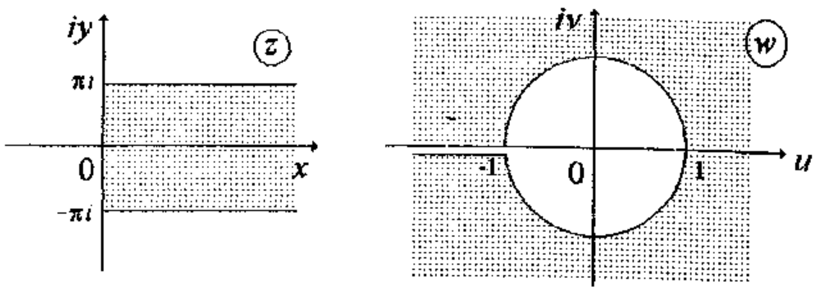
$$\left.\begin{array}{r}0<\operatorname{Im}z<\pi\\ \operatorname{Re}z<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}|w|<1\\ \operatorname{Im}w>0\end{array}\right\}$$

Рис. 15



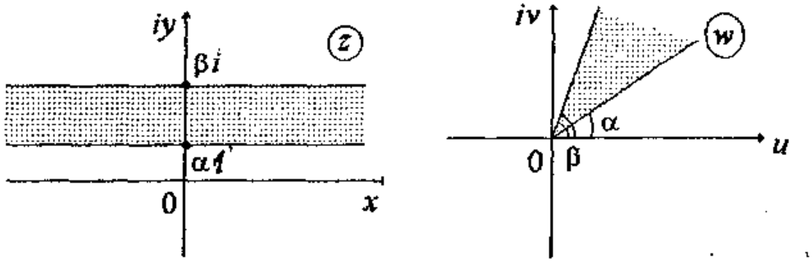
$$\left.\begin{array}{r}0<\operatorname{Im}z<\pi\\ \operatorname{Re}z>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}|w|>1\\ \operatorname{Im}w>0\end{array}\right\}$$

Рис. 16



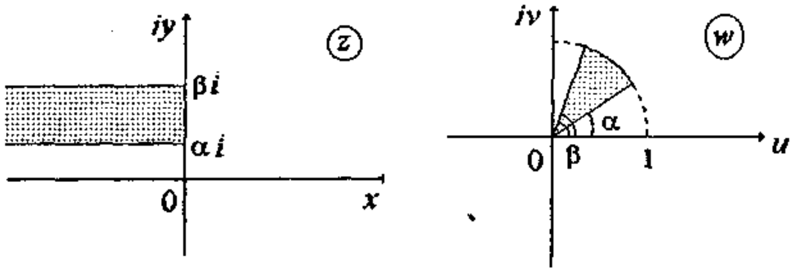
$$\left.\begin{array}{r}-\pi<\operatorname{Im}z<\pi\\ \operatorname{Re}z>0\end{array}\right\}\Rightarrow |w|>1 \text{ с разрезом по лучу } (-\infty,-1]$$

Рис. 17



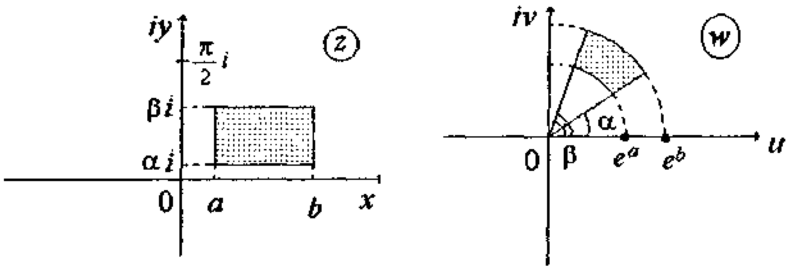
$$\alpha < \operatorname{Im} z < \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha < \arg w < \beta$$

Рис. 18



$$\left.\begin{matrix} \alpha < \operatorname{Im} z < \beta \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} \alpha < \arg w < \beta \\ |w| < 1 \end{matrix}\right\}$$

Рис. 19



$$\left.\begin{matrix} a < \operatorname{Re} z < b \\ \alpha < \operatorname{Im} z < \beta \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} e^a < |w| < e^b \\ \alpha < \arg w < \beta \end{matrix}\right\}$$

Рис. 20

Замечание. Во всех предыдущих примерах вместо области можно было брать область с границей.

§3. Примеры решения некоторых задач на отображения

Рассмотрим несколько задач на отображение, которые решаются с помощью функций, описанных в предыдущем параграфе.

Задача 1.

Отобразить полосу, ограниченную прямыми $y = x$, $y = x + h$ на верхнюю полуплоскость.

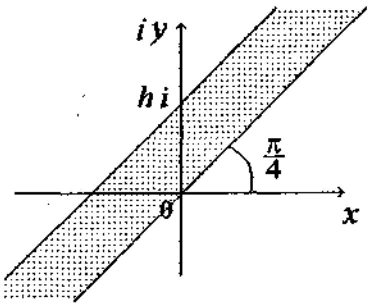


Рис. 21

Решение.

В пункте 4 §2 было показано, что функция $w = e^z$ отображает полосу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ на верхнюю полуплоскость. Поэтому осуществим следующие преобразования: поворот на угол $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; преобразование подобия, чтобы сделать ширину полосы равной π; преобразование $w = e^z$ (рис. 21).

В результате получаем:

$$w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z;\ w_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{h} w_1;\ w = e^{w_2},$$

или:

$$w = e^{\frac{\pi}{h}(1-i)z}.$$

Задача 2.

Круговую луночку, ограниченную окружностями $|z| = 2$, $|z - 1| = 1$, отобразить на верхнюю полуплоскость (рис. 22).

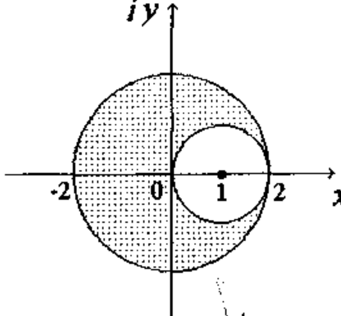


Рис. 22

Решение.

Данную задачу можно решать как и предыдущую, если "вытянуть" обе окружности в прямые с помощью дробно-линейной функции, полюсом которой является $z = 2$. Например, $w_1 = \frac{1}{z-2}$. Так как $w_1(0) = -\frac{1}{2}$, а $w_1(-2) = -\frac{1}{4}$, то обе окружности переходят в прямые, перпендикулярные вещественной оси (вещественная ось переходит в вещественную ось), причем одна прямая пройдет через точку $w_1 = -\frac{1}{2}$, другая через точку $w_2 = -\frac{1}{4}$ (рис. 23). Далее осуществляем преобразование сдвига на $\frac{1}{4}$ вправо вдоль вещественной оси, поворот на угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, растяжение с коэффициентом $k = 4\pi$ и, наконец, преобразование $w = e^{z}$. Будем иметь:

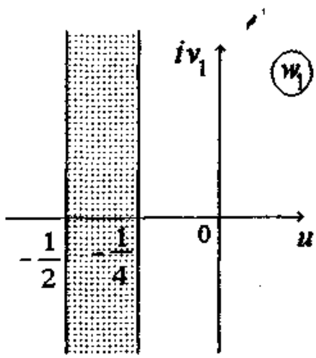


Рис. 23

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{4};\; w_3 = -iw_2;\; w_4 = 4\pi w_3;$$

$$w = e^{w_4},$$

или:

$$w = e^{-4\pi i\left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{4}\right)}.$$

Задача 3.

Плоскость с разрезом по отрезку $[z_1, z_2]$ отобразить на верхнюю полуплоскость (рис. 24).

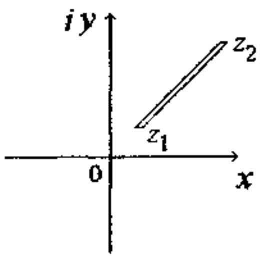


Рис. 24

Решение.

Границей области является разрез $[z_1, z_2]$. Преобразуем его с помощью дробно-линейной функции в луч, исходящий из начала координат. Для этого один из концов отрезка сделаем нулем, а другой полюсом дробно-линейной функции. Например, $w_1 = \frac{z - z_1}{z - z_2}$. Для того чтобы узнать положение луча, найдем образ любой точки разреза $[z_1, z_2]$. Так, точка $\frac{z_1 + z_2}{2} \in [z_1, z_2]$,

$$w_1\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \frac{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_2} = -1.$$

Итак, мы получили, что луч, в который перешел отрезок $[z_1, z_2]$, проходит через начало координат и точку $w_1 = -1$, т.е. в результате преобразования w_1 мы получаем плоскость с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси (рис. 25).

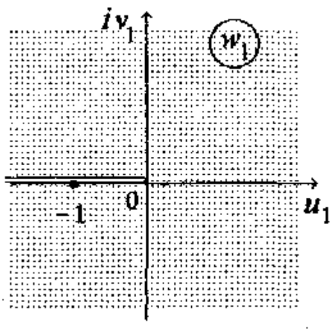


Рис. 25

В пункте 2 §2 было показано, что функция $w=\sqrt{z}$ отображает плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси в верхнюю полуплоскость. Поэтому осуществим преобразование поворота на угол $\varphi=\pi$, $w_2=e^{i\pi}w_1=-w_1$, затем $w=\sqrt{w_2}$. Окончательно получаем:

$$w=\sqrt{\frac{z_1-z}{z-z_2}}.$$

<u>Задача 4.</u>

Отобразить на верхнюю полуплоскость круг $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[\frac{1}{2},1]$ (рис. 26).

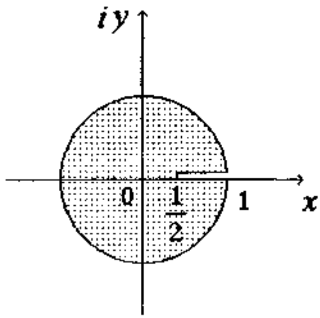


Рис. 26

<u>Решение.</u>

Функция Жуковского $w_1=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ отображает круг $|z|<1$ на плоскость w_1 с разрезом по отрезку $[-1,1]$. Однако к этому разрезу добавится еще образ разреза по отрезку $[\frac{1}{2},1]$. Найдем его. Так как $w_1(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$, а $w_1(1)=1$, то мы получим на плоскости w_1 дополнительный разрез по отрезку $[1,\frac{5}{4}]$. В результате получили на плоскости w_1 разрез по отрезку $[-1,\frac{5}{4}]$ (рис. 27).

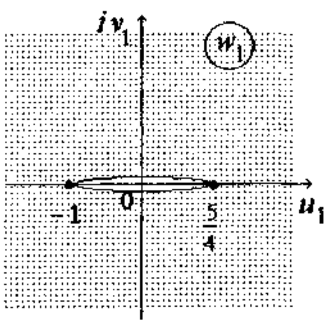


Рис. 27

Далее рассуждения такие же, как и в задаче 3.

$$w_2=\frac{w_1+1}{w_1-\frac{5}{4}};\ w_3=-w_2;\ w=\sqrt{w_3}.$$

Окончательный ответ

$$w=\sqrt{\frac{2(z+1)^2}{5z-2z^2+2}}.$$

Задача 5.

Верхнюю половину круга $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[a\,i,\ i]$ $(0<a<1)$ отобразить на верхнюю полуплоскость (рис. 28).

Решение.

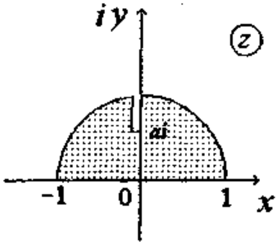


Рис. 28

Задачу можно свести к предыдущей, если вначале применить преобразование $w_1=z^2$. Так как $w_1(ai)=-a^2$, то получаем круг $|w_1|<1$ с разрезами по отрезкам $[-1,-a^2]$ и $[0,1]$ (рис. 29).

Далее, как в предыдущей задаче, применяем функцию Жуковского и выясняем, во что перейдут разрезы:

$$w_2=\frac{1}{2}\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right),$$

$$w_2(-a^2)=-\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=-A^2\ \ (-A^2<-1),$$

$$w_2(1)=1,\ w_2(-1)=-1,\ w_2(0)=\infty.$$

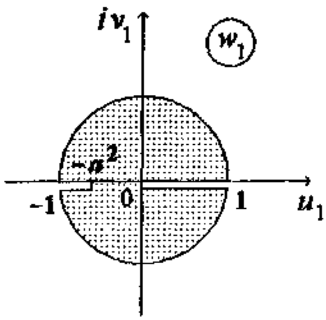


Рис. 29

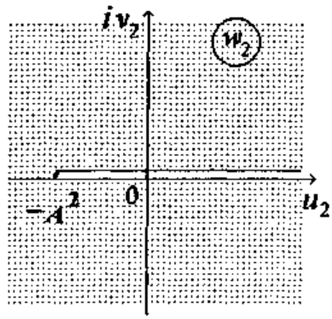


Рис. 30

В результате получаем плоскость w_2 с разрезом по лучу $[-A^2,+\infty]$ (рис. 30). Осуществим сдвиг на A^2 вправо вдоль вещественной оси $w_3=w_2+A^2$ и окончательно:

$$w=\sqrt{w_3}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+A^2}\ .$$

Задача 6.

Отображение круговых луночек (двуугольников) на верхнюю полуплоскость.

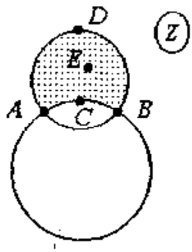


Рис. 31

Под двуугольником будем понимать область, ограниченную двумя пересекающимися окружностями (рис. 31). Очевидно, что таких областей четыре. $A(z_1)$ и $B(z_2)$ – вершины двуугольника.

План решения задачи.

1. С помощью дробно-линейной функции отобразим обе окружности в прямые, пересекающиеся в начале координат. Для этого одну из вершин двуугольника сделаем нулем, а другую полюсом дробно-линейной функции. Например,

$$w_1 = \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

2. Чтобы построить прямые в плоскости w_1, найдем образы любых двух точек, одна из которых принадлежит первой окружности, другая – второй [точки C и D]. После этого прямые будут определены (C_1 и D_1 – соответственно образы точек C и D) (рис.32).

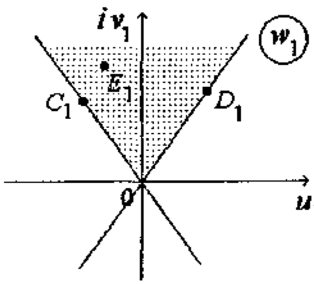


Рис. 32

3. Теперь остается узнать, в какой из четырех углов, образованных прямыми OC_1 и OD_1 плоскости w_1, перейдет нужный нам двуугольник $ADBC$ плоскости z. Для этого берем любую внутреннюю точку E двуугольника и ищем ее образ в плоскости w_1. Пусть внутренняя точка E отображается во внутреннюю точку E_1 угла C_1OD_1 (рис. 32).

4. С помощью функции $w = z^{\alpha}$ "разворачиваем" угол C_1OD_1 до величины π. Пусть $\angle C_1OD_1 = \varphi$ (φ легко вычисляется), тогда $w_2 = w_1^{\pi/\varphi}$.

В результате преобразования w_2 получим полуплоскость (верхнюю, нижнюю, левую или правую). В случае необходимости сделаем дополнительно преобразование поворота.

Рассмотрим конкретный пример.

Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку $|z| > 1$, $|z - i| < 1$.

Решение.

Так как радиусы обеих окружностей равны единице, то легко подсчитать координаты вершин A и B (рис. 33). Получаем

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

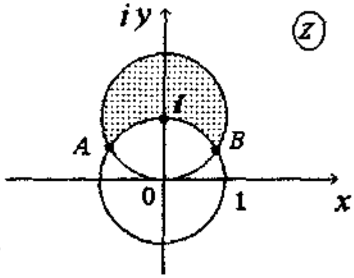


Рис. 33

Далее

$$w_1=\frac{z-B}{z-A}=\frac{2z-\sqrt{3}-i}{2z+\sqrt{3}-i}.$$

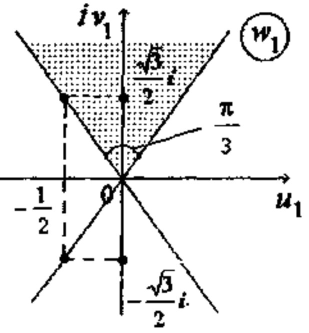
Найдем образы точек $z=0$ и $z=i$. Имеем

$$w_1(0)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ w_1(i)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Построим прямые в плоскости w_1 по двум точкам (рис. 34).

Найдем образ внутренней точки $z=\frac{3}{2}i$:

$$w\left(\frac{3}{2}i\right)=\frac{3i-\sqrt{3}-i}{3i+\sqrt{3}-i}=\frac{2i-\sqrt{3}}{2i+\sqrt{3}}=\frac{1}{7}+\frac{4\sqrt{3}}{7}i.$$



Полученная точка принадлежит углу $\frac{\pi}{3}<\arg w_1<\frac{2\pi}{3}$. Так как величина угла равна $\frac{\pi}{3}$, то следующее преобразование $w_2=w_1^3$. В результате получаем область $\pi<\arg w_2<2\pi$, т.е. нижнюю полуплоскость w_2. Нужная нам верхняя полуплоскость получается поворотом на угол $\varphi=\pi$, т.е. $w=-w_2$.

Окончательный ответ:

$$w=-\left(\frac{2z-\sqrt{3}-i}{2z+\sqrt{3}-i}\right)^3.$$

§4. Примеры для самостоятельной работы

1. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$.

2. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:
   а) верхнюю полуплоскость на себя;
   б) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
   в) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость;
   г) правую полуплоскость на себя.

3. Для функции $w=\frac{1}{z}$ найти образы следующих линий:
   а) семейства окружностей $x^2+y^2=ax$;
   б) семейства окружностей $x^2+y^2=by$;
   в) пучка параллельных прямых $y=x+b$;
   г) пучка прямых $y=kx$;
   д) параболы $y=x^2$.

4. Выяснить, во что преобразуются указанные области при заданных отображающих функциях:
   а) квадрант $x>0, y>0$; $w=\dfrac{z-i}{z+i}$;
   б) полукруг $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$; $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$;
   в) угол $0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$; $w=\dfrac{z}{z-1}$;
   г) полоса $0<x<1$; $w=\dfrac{z-1}{z-2}$;
   д) кольцо $1<|z|<2$; $w=\dfrac{z}{z-1}$.

5. Найти дробно-линейные функции, переводящие точки $-1, \infty, i$ соответственно в точки:
   а) i, 1, $1+i$;
   б) ∞, i, 1;
   в) 0, ∞, 1.

6. Отобразить на верхнюю полуплоскость двуугольники:

а) $|z|<1 \quad |z-i|<1$;

б) $|z|<1 \quad |z-i|>1$;

в) $|z|>2 \quad |z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$.

7. Отобразить на верхнюю полуплоскость следующие области:

а) плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$;

б) плоскость с разрезом по отрезку $[-i, i]$;

в) круг $|z| < 1$ с разрезом по радиусу $[0, 1]$;

г) внешность единичного круга с разрезом по лучу $[1, \infty)$.

8. Найти области, на которые функция Жуковского отображает:

а) круг $|z| < R < 1$;

б) круг $|z| > R > 1$;

в) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$;

г) полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$;

д) угол $\frac{\pi}{2}-\alpha < \arg z < \frac{\pi}{2}+\alpha, \quad \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответы

1. $w = (1 + i)(1 - z)$.

2. a и b – вещественные числа, $a > 0$.
   а) $w = a z + b$;
   б) $w = - a z + b$;
   в) $w = - i (a z + b)$;
   г) $w = a z + b i$.

3.
   а) семейство прямых $u = \frac{1}{a}$, параллельных мнимой оси (не включающее мнимую ось);
   б) семейство прямых $v = -\frac{1}{b}$, параллельных вещественной оси (не включающее вещественную ось);
   в) семейство окружностей $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$, касающихся в начале координат прямой $v = -u$ (включающее саму прямую);
   г) пучок прямых $v = - k u$;
   д) циссоида $u^2 = -\dfrac{v^3}{v+1}$.

4.
   а) в полукруг $|w| < 1$, $\mathrm{Im}\, w < 0$;
   б) в область, содержащую точку $w = 0$ и ограниченную дугами окружностей $|w| = 1$ и $\left|w + \dfrac{5i}{4}\right| < \dfrac{3}{4}$;
   в) в область, полученную из нижней полуплоскости ($\mathrm{Im}\, w<0$) удалением находящейся в этой полуплоскости части круга $\left|w - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\right| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
   г) в область, ограниченную касающимися друг друга окружностями $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ и $\left|w - \dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$;
   д) в двусвязную область, граница которой состоит из прямой $\mathrm{Re}\, w = \dfrac{1}{2}$ и окружности $\left|w - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$.

5.

а) $w=\dfrac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$;

б) $w=\dfrac{iz+2+i}{z+1}$;

в) $w=\dfrac{1-i}{2}(z+1)$.

6.

а) $w=-\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3/2}$;

б) $w=-\left(\dfrac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{3}$;

в) $w=\left(\dfrac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right)^{4}$.

7.

а) $w=\sqrt{\dfrac{z+1}{1-z}}$;

б) $w=\sqrt{\dfrac{z+i}{i-z}}$;

в) $w=\left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^{2}$;

г) $w=\left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^{2}$. При одном выборе ветви $\sqrt{z}$ эта функция дает решение задачи в), а при другом – г).

8.

а), б) внешность эллипса $\dfrac{4u^2}{(R+\frac{1}{R})^2}+\dfrac{4v^2}{(R-\frac{1}{R})^2}=1$;

в) вся плоскость с разрезами вдоль лучей $(-\infty,-1]$ и $[1,\infty)$; нижняя полуплоскость;

г) нижняя полуплоскость;

д) область между ветвями гиперболы $\dfrac{u^2}{\sin^2\alpha}-\dfrac{v^2}{\cos^2\alpha}=1$.

Библиографический список

1. Лаврентьев М.А., ШабатБ.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1999.

3. Маркушевич А.Г. Теория аналитических функций. Т.1, 2. М.: Наука, 1968.

4. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Арамапович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.

Оглавление

Долгополое Вячеслав Михайлович,
Родионова Ирина Николаевна,
Бондаренко Владимир Владимирович

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Т.И.Кузнецова
Компьютерная верстка, макет В.В.Бондаренко

Лицензия ИД № 06178 от 01.11.01. Подписано в печать 08.07.02. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,3; уч.-изд. л. 2,5.
Гарнитура "Times New Roman". Тираж 150 экз. Заказ *N°8G7*
Издательство "Самарский университет". 443011 Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.