МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИНСТИТУТ РЫНКА

Н. Н. Васин, Л. Н. Балыкова

ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В УПРАВЛЕНИИ

Учебное пособие

САМАРА 2000

УДК 681.5: 004.451.52

Лингвистическая переменная в моделировании экономических параметров в управлении: Учебное пособие / Н. Н. Васин, Л. Н. Балыкова. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. 59 с.

ISBN 5-7883-0108-4

Рассматриваются основные понятия теории лингвистической переменной: нечеткие множества, нечеткие отношения, основные операции с нечеткими множествами и отношениями. Приводятся понятия нечетких высказываний, рассматривается нечеткий вывод на правилах. Приводится пример использования лингвистических переменных для моделирования процесса менеджмента.

Пособие предназначено для студентов, изучающих информатику, системы телекоммуникаций, информационные технологии. Оно может быть полезно также аспирантам и специалистам самостоятельно изучающим новые информационные технологии.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. С. А. Прохоров,
д-р техн. наук, проф. М. А. Кораблин.

ISBN 5-7883-0108-4

Введение

Для познания сущности какого-либо объекта или процесса широко используется математическое моделирование, реализация которого, как правило, происходит с помощью компьютеров. Модель с определенной степенью приближения описывает поведение анализируемого объекта, что позволяет получать новые знания об исследуемом объекте, управлять им, изменять его качества. Однако по мере усложнения объекта, вследствие появления ряда неопределенностей, невозможно построить достаточно точную математическую модель, несмотря на усложнение математических методов. При этом очень часто квалифицированный исследователь или оператор на основе имеющегося опыта способен предсказывать поведение объекта и успешно управлять им, используя нечеткие качественные понятия и оценки. Значения переменной в этом случае задаются с нечетко очерченными (размытыми) границами. Особенно это касается сложных объектов и систем, включающих в своем составе человека. Существует много ситуаций, при которых традиционному математическому моделированию на основе систем алгебраических и дифференциальных уравнений недостает гибкости. Например, в рамках традиционного подхода невозможно формулировать математически и обрабатывать на компьютерах такие выражения, как слегка тепло или довольно холодно, встречающихся при экспертной оценке состояния исследуемого объекта.

При исследовании сложных систем проявляется принцип несовместимости, заключающийся в том, что высокая точность несовместима с большой сложностью системы [1]. Методы анализа систем и их моделирования на ЭВМ, основанные на точной обработке численных данных, не способны охватить огромную сложность процессов человеческого мышления и принятия решений. Поэтому при моделировании сложных систем в последние годы наметилась тенденция некоторого сокращения количественных методов и расширение качественных. В частности, логико-лингвистическое моделирование предполагает, что в качестве значений переменной используются не только числа, но и слова или предложения естественного или искусственного языка. Поэтому возникла необходимость перевода нечетких качественных переменных на язык

ЭВМ. Это стало возможным за счет использования логико-лингвистического моделирования сложных процессов и объектов, в том числе, за счет применения аппарата нечеткой логики при использовании лингвистической переменной [1].

Нечеткая логика (fuzzy logic) и математический аппарат на ее основе используется как для управления сложными системами, так и для построения сравнительно простых контроллеров. Наиболее широкое применение устройства на основе нечеткой логики нашли в Японии и США. Так, американское агентство космических исследований NASA стало использовать нечеткую логику в маневрах стыковки на орбите. На основе нечеткой логики создано достаточно много контроллеров для управления различными объектами и технологическими процессами [2-7].

Ярким примером применения fuzzy logic является решение задач менеджмента. Например, принятие решения при выборе стратегии получения прибыли сводится к выбору наилучшей из некоторых альтернатив. По мере усложнения задач менеджмента, вследствие появления ряда неопределенностей, невозможно построить достаточно точную математическую модель процесса производства и реализации товара, несмотря на усложнение математических методов. Квалифицированный менеджер на основе имеющегося опыта способен предсказывать процесс получения прибыли и управлять им лучше компьютерных систем, для чего использует свои ранее приобретенные знания. При этом реализуется интеллектуальная система управления производством и маркетингом на основе знаний, в которой менеджер выступает в качестве эксперта.

Логико-лингвистическое описание систем позволяет моделировать процесс производства и реализации продукции в терминах, близких и понятных менеджеру, когда производятся операции с нечеткими переменными и множествами. В свою очередь, нечеткие множества являются значениями лингвистической переменной, т.е. переменной значениями которой являются не числа, а слова и предложения, которые для человека являются более естественными.

Глава 1 пособия написана Н.Н. Васиным, глава 3 - Л. Н. Балыковой, глава 2 - совместно. Программное обеспечение компьютерной системы разработано А.В. Васильевым.

Глава 1
НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Логико-лингвистическое описание систем базируется на понятии «лингвистическая переменная». Лингвистической называется переменная, значениями которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка [1]. Так переменная **Прибыль** будет являться лингвистической, если ее значения будут не числовыми (0, 1, 2, 3, ..., 100... *у.е.* - условных единиц), а лингвистическими, например:

планируемая - значение лингвистической переменной **Прибыль** находится в пределах плана;

низкая - прибыль ниже планируемой;

высокая - прибыль выше планируемой;

очень низкая - прибыль значительно ниже планируемой;

очень высокая - значение лингвистической переменной **Прибыль** значительно выше планируемой.

При этом числовая переменная **прибыль**, принимающая значения 0, 1, 2, 3, и т.д. *у.е.*, будет являться базовой переменной для лингвистической переменной **Прибыль**. Совокупность числовых значений базовой переменной называется универсальным множеством и часто обозначается через *U*. Иерархическая структура лингвистической переменной **Прибыль** приведена на рис. 1.1.

Отдельные элементы универсального множества (числовые значения базовой переменной **прибыль**) могут одновременно принадлежать разным подмножествам (разным нечетким переменным). Например, степень принадлежности прибыли в 10 ***у.е.*** значению лингвистической переменной ***планируемая*** равна 1 (рис. 1.1), а остальным значениям лингвистической переменной - степень принадлежности в этом случае равна 0. Прибыль в 10.5 ***у.е.*** в равной мере относится как к значению лингвистической переменной ***планируемая***, так и к значению лингвистической переменной ***высокая***, поэтому степень принадлежности - 0.5 для обоих значений.

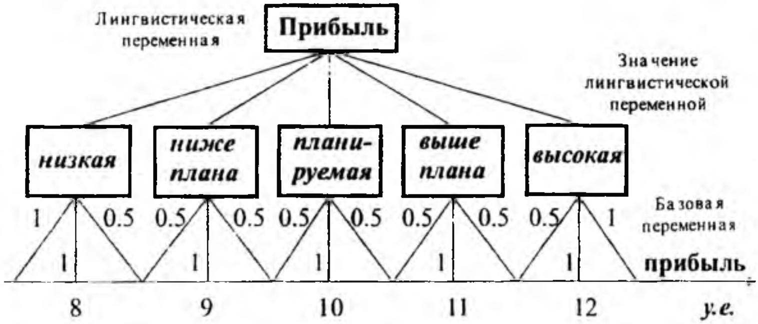


Рис. 1.1. Иерархическая структура лингвистической переменной

Другим примером является лингвистическая переменная **Возраст**, которая может принимать значения: ***очень молодой***, ***молодой***, ***не очень молодой***, ***среднего возраста***, ***пожилой***, ***старый***, ***очень старый*** на универсальном множестве 0, 1, 2, ..., 100. Для измерения температуры человеческого тела используются медицинские термометры со шкалой от 34.5°С до 42°С. Данный диапазон с интервалом в 0.1°С является универсальным множеством лингвистической переменной **Температура** со значениями: ***пониженная***, ***нормальная***, ***повышенная***, ***высокая***, ***очень высокая***. Если речь идет об ощущениях человека от окружающей среды, то необходимо учитывать комплекс температуры, ветра и осадков. Это ощущение можно выразить, например, лингвистической переменной **Состояние погоды**, значениями которой будут: ***жарко***, ***тепло***, ***прохладно***, ***холодно***, ***очень холодно***. Температура воды из крана может характеризоваться значениями ***горячая***, ***теплая***, ***прохладная***, ***холодная*** и др. Подобные нечеткие значения зачастую дают большее представление о состоянии погоды, нежели точные числовые значения температуры, ветра и атмосферного давления.

В приводимых выше примерах лингвистической переменной базовая переменная была числовой. Однако в ряде случаев, например при описании внешности, значениями лингвистической переменной **Внешность** могут быть термы типа ***красивый***, ***некрасивый***, ***очень красивый***, ***не очень красивый*** и т.д. Каждый терм отражает комплекс субъективных характеристик эксперта и, как правило, не является числовым. Следует отметить, что в технических и экономических приложениях базовая переменная в большинстве практических случаев является числовой.

В свою очередь, каждое значение лингвистической переменной, например, значение ***высокая*** переменной **Прибыль**, является нечеткой переменной универсального множества U. Таким образом, значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные, и каждое значение лингвистической переменной является названием нечеткой переменной. В свою очередь нечеткая переменная (ее название) является ограничением для нечеткого подмножества. Поэтому нечеткое подмножество является смыслом нечеткой переменной.

1.2. Нечеткие множества

Основным понятием систем, основанных на нечеткой логике, является понятие нечеткого множества или подмножества. Обычные (не нечеткие или просто четкие) конечные множества $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ записываются в виде

$$U = u_1 + u_2 + ... + u_n \tag{1.1}$$

или

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i . \tag{1.2}$$

Знак «+» в (1.1) и $\sum$ в (1.2) обозначает объединение, а не суммирование.

Подмножество A универсального множества U, элементы которого удовлетворяют ограничению R, является множеством упорядоченных пар

$$A = \{\mu_A(u)/u\}, \qquad (1.3)$$

где $\mu_A(u)$ - **характеристическая функция**, которая равна 1, если u удовлетворяет ограничению R, и равна 0 - если не удовлетворяет.

Например для универсального множества целых чисел 0, 1, 2, ... ∞ подмножество 2, 3, 4, 5 будет являться ограничением. На рис.1.2 представлена соответствующая характеристическая функция μ_A принадлежности подмножества универсальному множеству в графической форме (или просто функция принадлежности).

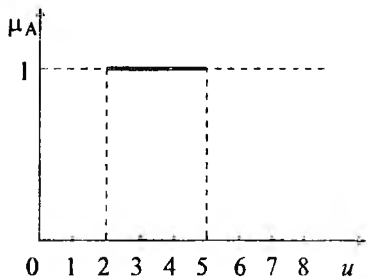


Рис. 1.2. Характеристическая функция μ_A четкого подмножества

Таким образом, подмножество A универсального множества U, элементы которого удовлетворяют ограничению R, может быть определено как множество упорядоченных пар $A = \{\mu_A(u)/u\}$, для которых $\mu_A = 1$. То есть подмножество A действительных чисел от 2 до 5, принадлежащее множеству U чисел от 0 до ∞, может быть представлено характеристической функцией $\mu_A(u)$, которая ставит в соответствие число 1 или 0 каждому элементу в U в зависимости от того, принадлежит данный элемент подмножеству A или нет.

В качестве примера может быть рассмотрена числовая переменная **температура** воды из крана, принимающая значения 0, 1, 2, 3, ..., 100, т.е. в интервале [0, 100]. В данном универсальном множестве U можно выделить ряд подмножеств, например, подмножество ***холодная***, ограничив его интервалом от 0 до 15°С. Очевидно, что такое ограничение является чрезмерно жестким, поскольку до пятнадцати градусов - вода холодная, а с шестнадцати градусов - уже не холодная. Согласно определению $\mu_A(u)$ можно интерпретировать элементы, которым поставлена в соответствие 1, как элементы, находящиеся во множестве A, а элементы, которым поставлен в соответствие 0 - как элементы, не находящиеся во множестве A. Однако такой подход не является гибким. Поэтому более естественно и удобно в таких случаях использовать размытые (нечеткие) границы между холодной и не очень холодной водой. В качестве примера нечетких границ ограничения на рис.1.3 приведена характеристическая функция подмножества ***холодная***, характеризующего температуру воды из крана.

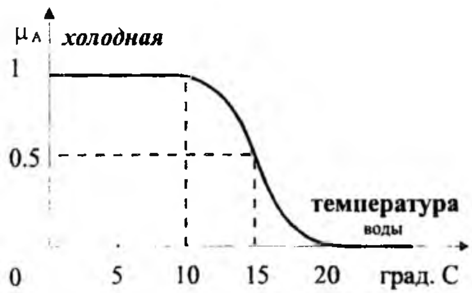


Рис. 1.3. Характеристическая функция μ_A нечеткого подмножества

В этом случае подмножеству ***холодная*** принадлежат значения универсального множества **температура** (воды из крана) от 0 до 20°С, причем функция принадлежности $\mu_A(u)$ в пределах от 0 до 10°С точно равна 1, а от 10 до 20 плавно снижается со значения 1 до 0. То есть температура 15°С принадлежат подмножеству ***холодная*** со степенью принадлежности 0.5; у воды с температурой более 20°С степень принадлежности этому подмножеству близка к 0.

Итак, нечеткое подмножество A универсального множества U определяется как множество упорядоченных пар

$$A = \{\mu_A(u)/u\}, \qquad (1.4)$$

где $\mu_A(u)$ **функция принадлежности**, которая ставит в соответствие каждому элементу $u \in U$ число $\mu_A(u)$ из интервала [0, 1], которое характеризует степень принадлежности элемента u подмножеству A.

Выражения (1.3) и (1.4) внешне идентичны, но в отличие от (1.3) в выражении (1.4) функция $\mu_A(u)$ может принимать значения в некотором множестве принадлежностей M, например M = [0, 1]. Если же функция принадлежности принимает только 2 значения, т.е. M = {0, 1}, то подмножество A является обычным (не нечетким).

Носителем нечеткого множества A является множество точек в U, для которых $\mu_A(u)$ положительна.

Точкой перехода нечеткого множества A называется элемент множества U, у которого значение функции принадлежности $\mu_A(u) = 0.5$. В примере рис.1.2 точкой перехода является значение возраста, равное 25.

Форма записи нечетких подмножеств (множеств) аналогична (1.1), (1.2), но с указанием значения функции принадлежности каждого элемента

$$A = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n$$

или

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \,, \qquad (1.5)$$

а также

$$A = \mu_1 / u1 + \mu_2 / u_2 + \ldots + \mu_n / u_n$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \,/\, u_i \,, \qquad (1.6)$$

Если универсальное множество $U = \{a, b, c, d\}$ или $U = a + b + c + d$, т.е. задано буквенными символами, то нечеткое подмножество, у которого $\mu_A(a) = 0.2$; $\mu_A(b) = 0.5$; $\mu_A(c) = 1$; $\mu_A(d) = 0.6$, может быть представлено в следующем виде

$$A = \{0.2/a;\ 0.5/b;\ 1/c;\ 0.6/d\}$$

или в виде (1.5)

$$A = 0.2a + 0.5b + 1c + 0.6d.$$

Если же универсальное множество является целочисленным $U = 1 + 2 + 3 + 4$, то для устранения неоднозначности нечеткое подмножество A необходимо записать в форме (1.6) $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1/3 + 0.6/4$. Например, для универсального множества $U = 1 + 2 + ... + 10$ подмножество ***несколько*** можно определить следующим образом

$$\textbf{\textit{несколько}} = 0.2/2 + 0.4/3 + 0.5/4 + 1/5 + 0.7/6.$$

Если носитель нечеткого множества непрерывный, то используется следующая форма записи

$$A = \int_U \mu_A(u) / u,$$

здесь $\int$ обозначает объединение нечетких одноточечных множеств $\mu_A(u)/u$, $u \in U$.

Для представления нечетких подмножеств используется также аналитическая форма записи функции принадлежности [1, 3]. Например, нечеткое подмножество ***малый*** универсального множества $U = 0 + 1 + ... + n + ...$ может быть задано в следующем виде

$$\textbf{\textit{малый}} = \sum_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2} / u.$$

Точкой перехода подмножества ***малый*** является значение $u = 10$. Другим примером является подмножество ***горячая*** (вода из крана)

$$\textbf{\textit{горячая}} = \int_{75}^{100} \frac{1}{1+\left(\frac{2.5}{u-75}\right)^2} / u. \qquad (7)$$

Графическая форма функции принадлежности подмножества ***горячая*** приведена на рис. 1.4.

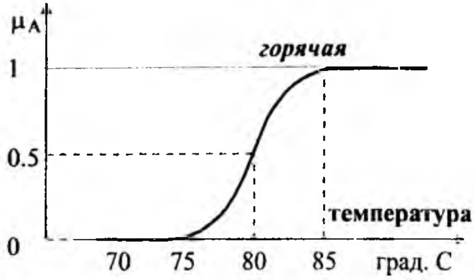


Рис. 1.4. Функция принадлежности подмножества *горячая*

Функция принадлежности μ_A равна 0 при температуре, равной 75, и увеличивается, стремясь к 1 по мере увеличения возраста. Точкой перехода является **температура** = 80.

Очень часто функция принадлежности $\mu_R(x)$ нечетких подмножеств, являющихся значениями лингвистической переменной, задается треугольной или трапецеидальной формы. Например, такой формы заданы функции принадлежности μ подмножеств ***низкая*** (***низк.***), ***ниже планируемой*** (< ***пл.***), ***планируемая*** (***план***), ***выше планируемой*** (> ***пл.***), ***высокая*** (***высок.***) лингвистической переменной **Прибыль** (рис.1.5)

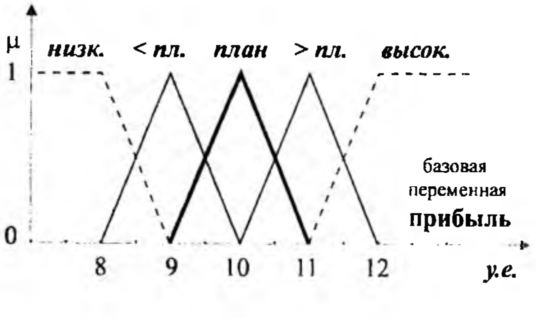


Рис. 1.5. Функции принадлежности μ подмножеств лингвистической переменной **Прибыль**

Высотой нечеткого множества A является $\sup\limits_{U} \mu_A(u)$.

Нечеткое множество **нормально**, если его высота равна 1. Множество (7), высота которого стремится к 1, но не равна ей, в [1] также считается нормальным. Множество $A = 0.3/2 + 0.4/3 + 0.7/4 + 0.2/5$ является субнормальным. Субнормальное множество можно нормализовать, если поделить $\mu_A(u)$ на $\sup\limits_{U} \mu_A(u)$.

Включение. Нечеткое подмножество A может быть подмножеством другого подмножества B. Подмножество A содержится в B, или B доминирует A, если $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ для любого $u \in U$, т.е.

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(u) \le \mu_B(u),\ u \in U.$$

Например: $A \subset B$, если $U = a + b + c + d$, $A = 0.2a + 0.9c + 0.6d$, $B = 0.8a + 0.1b + 1c + 0.6d$.

Множеством α - уровня (A_α) нечеткого множества A называется четкое подмножество элементов универсального множества U, степень принадлежности которых нечеткому множеству A больше или равна α

$$A_\alpha = \{\, u \in U \mid \mu_A(u) \ge \alpha \}.$$

Нечеткое множество A можно разложить по его множествам уровня

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha$$

или

$$A = \sum_\alpha \alpha A_\alpha\,, \qquad (1.8)$$

где $\alpha\, A_\alpha$ - произведение числа α на множество A_α, а $\int_0^1$, $\sum_\alpha$ - знаки объединения множеств A_α по α от 0 до 1.

Например, нечеткое множество

$$A = 0.1/1 + 0.2/3 + 0.4/5 + 1/7 + 0.7/9$$

можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} A = {} & 0.1(1/1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9) + \\ & + 0.2(1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9) + \\ & + 0.4(1/5 + 1/7 + 1/9) + \\ & + 0.7(1/7 + 1/9) + \\ & + 1(1/7), \end{aligned}$$

т.е. подмножество A представлено в виде объединения (1.8) с четкими множествами уровней

$$A_{0.1} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9,$$
$$A_{0.2} = 3 + 5 + 7 + 9,$$
$$A_{0.4} = 5 + 7 + 9,$$
$$A_{0.7} = 7 + 9,$$
$$A_1 = 7.$$

1.3. Операции над нечеткими множествами

1. <u>**Операция дополнения**</u> соответствует логическому отрицанию «НЕ» нечеткого множества A, обозначается как $\rceil A$ или $\overline{A}$ и определяется в аналитической форме как

$$\overline{A} = \int_U \left(1 - \mu_A(u)\right) / u.$$

Например, в случае универсального множества

$$U = 1 + 2 + \ldots + 10$$

дополнением подмножества

$$A = 0.7/2 + 0.4/5 + 1/7$$

будет подмножество

$$\rceil A = 1/1 + 0.3/2 + 1/3 + 1/4 + 0.6/5 + 1/8 + 1/9 + 1/10.$$

Пример дополнения в графической форме представлен на рис. 1.6.

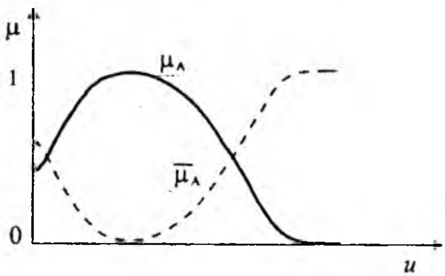


Рис. 1.6. Дополнение нечеткого множества

2. **Объединение** (дизъюнкция) нечетких множеств A и B соответствует логической операции «ИЛИ», т.е. нахождению максимума (max) нечетких множеств, обозначается как $A + B$ или $A \cup B$ и определяется следующим образом:

$$A + B = \int_U (\mu_A(u) \vee \mu_B(u)) / u.$$

Для универсального множества

$$U = 1 + 2 + ... + 10$$

и подмножеств

$A = 0.7/2 + 0.4/5 + 1/7$ и $B = 0.3/2 + 0.8/6 + 1/7 + 0.2/8$ (1.9)

их объединение будет равно

$$A + B = 0.7/2 + 0.4/5 + 0.8/6 + 1/7 + 0.2/8.$$

В графической форме объединение подмножеств $A + B$ представлено на рис.1.7.

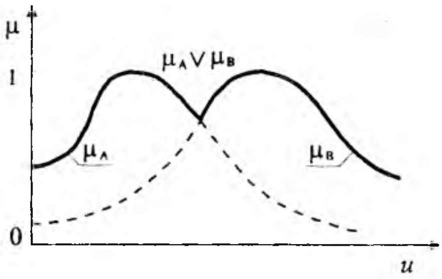


Рис. 1.7. Объединение нечетких множеств

3. **Пересечение** (конъюнкция) логических множеств A и B соответствует логической операции «И», т.е. нахождению минимума (min) множеств, обозначается $A \cap B$ или A & B и определяется следующим образом:

$$A \cap B = \int_U (\mu_A(u) \wedge \mu_B(u)) / u.$$

Пересечение подмножеств A и B (9), используемых в примере объединения, будет равно

$$A \cap B = 0.3/2 + 1/7.$$

В графической форме пересечение подмножеств A и B представлено на рис.1.8.

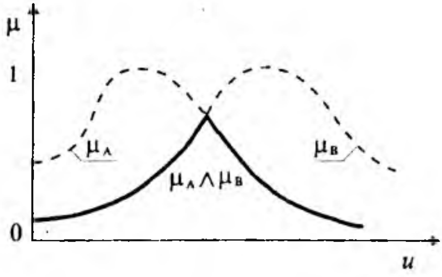


Рис. 1.8. Пересечение нечетких множеств

Логические операции над нечеткими множествами характеризуются теми же свойствами, что и операции с обычными множествами. Например, для нечетких множеств A, B, C выполняются следующие свойства: коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, правила де Моргана.

Коммутативность - $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

ассоциативность - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

дистрибутивность - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

правила де Моргана - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Однако для нечетких множеств $A \cap \overline{A} \neq 0$; $A \cup \overline{A} \neq 1$, что продемонстрировано на рис. 1.9.

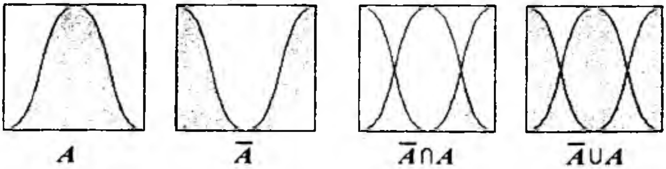


Рис. 1.9. Пересечение и объединение нечетких множеств A и $\overline{A}$

4. **Алгебраическое произведение** подмножеств A и B определяются следующим выражением:

$$AB = \int_U \mu_A(u)\mu_B(u) / u .$$

Произведение подмножеств A и B (1.9), используемых в примерах объединения и пересечения, будет равно

$$A\,B = 0.21/2 + 1/7.$$

5. На практике также часто используются операция **концентрирования**

$$\mathrm{CON}\,(A) = A^2,$$

т.е. возведения в квадрат, и операция **растяжения**

$$\mathrm{DIL}\,(A) = A^{0.5}.$$

Графическая форма операций концентрирования и растяжения приведены на рис.1.10 а, б.

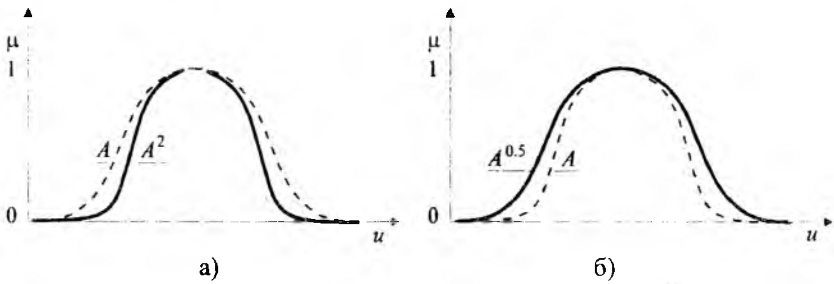


Рис. 1.10. Операции концентрирования и растяжения нечетких множеств

6. **Декартово произведение** нечетких подмножеств A_1, A_2, ... A_n, соответствующих универсальных множеств U_1, U_2, ... U_n определяется как нечеткое подмножество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множества $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. Функция принадлежности Декартова произведения равна

$$\mu_{A1 \times A2 \times An}\,(u_1, u_2, \ldots u_n) = \mu_{A1}(u_1) \wedge \mu_{A2}(u_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{An}(u_n),$$

а нечеткое подмножество

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \int_{U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n} \left(\mu_{A1}(u_1) \wedge \mu_{A2}(u_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{An}(u_n)\right) / \left(u_1, u_1, \ldots u_n\right)$$

Например, в случае универсальных множеств $U_1 = U_2 = 2 + 3 + 6$ и подмножеств $A_1 = 0.3/2 + 0.7/3 + 1/6$, $A_2 = 1/2 + 0.4/6$ Декартово произведение будет состоять из 6-ти элементов:

$$A_1 \times A_2 = 0.3(2, 2) + 0.7(3, 2) + 1(6, 2) + 0.3(2, 6) + 0.4(3, 6) + 0.4(6, 6).$$

Описание ряда других алгебраических и логических операций с нечеткими множествами можно найти в [2, 4].

1.4. Нечеткие отношения

Нечеткие отношения используются при качественном анализе взаимосвязей между отдельными элементами системы. Если для четких отношений характерны термины ***связь присутствует***, ***связь отсутствует***, то типичными примерами нечетких отношений являются следующие: ***имеет сходство***, ***имеет отношение***, ***много больше чем***, ***близко к*** [1]. Обычное четкое n-арное отношение R определяется как подмножество декартового произведения n множеств

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Под нечетким отношением понимают функцию R, отображающую декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ либо в отрезок вещественной прямой [0,1], либо в подмножество вещественных чисел, либо подмножество нечетких или лингвистических переменных. По аналогии с нечеткими множествами нечеткое отношение можно задать с помощью функции принадлежности.

На практике наиболее часто используются бинарные нечеткие отношения, функция принадлежности которых определена на отрезке [0,1]. В этом случае нечетким отношением между множеством X и Y называется функция R, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x, y) \in X \times Y$ значение функции принадлежности $\mu_R(x,y) \in [0,1]$. Для обозначения нечетких отношений используются различные формы записи, например:

$$R: X \times Y \to [0,1]$$

$$\mu_R: X \times Y \to [0,1],$$

$$x \in X, y \in Y:\ xR\,y,$$

$$XRY,$$

$$R(X,Y).$$

Очень часто бинарные нечеткие отношения задаются в табличной форме, например, как показано в табл. 1.1.

Таблица 1.1

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0.2	0.7	0.4
x_2	0.3	0.5	1	0.7
x_3	0.6	1	1	0.8

Другим примером является отношение «*у* ***много больше чем*** *х*» ($y >> x$) [1] для множеств $X = Y = 1 + 2 + 3 + 4$, которое может быть определено в следующем виде:

Таблица 1.2

R	y=1	y=2	y=3	y=4
x=1	0	0.3	0.8	1
x=2	0	0	0	0.8
x=3	0	0	0	0.3
x=4	0	0	0	0

Отношение, подобно нечеткому множеству, может быть задано функцией принадлежности, например, отношение «*x* ***много больше*** *y*» ($x >> y$) [3]

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le y \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}}, \text{ если } x > y. \end{cases}$$

В случае конечных множеств нечеткое отношение XRY можно представить в виде графа [2, 3], в котором каждая пара вершин (x_i, y_j) соединяется ребром с весом $\mu_R(x_i, y_j)$. Так, например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ граф (рис. 1.11) задает нечеткое отношение XRY, соответствующее вышеприведенному отношению в табличной форме (табл. 1.1).

Если множества X и Y совпадают, то нечеткое отношение R: $X \times X \to [0,1]$ называется нечетким отношением на множестве X.

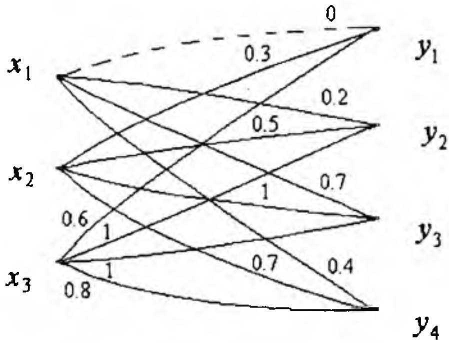


Рис.1.11. Граф нечеткого отношения XRY

1.5. **Операции над нечеткими отношениями**

1. **Объединением** двух нечетких отношений R_1 и R_2, которое обозначается $R_1 \cup R_2$, называется отношение, функция принадлежности которого равна

$$\mu_{R1 \cup R2}(x, y) = \mu_{R1}(x) \vee \mu_{R2}(y).$$

Например, объединение двух отношений $xR_1 y$ (числа x и y очень близкие) и $xR_2 y$ (числа x и y очень различные) дает новое отношение $xR_1 \cup R_2 y$ (числа x и y очень близкие или очень различные). Графическая форма указанных отношений приведена на рис. 1.12 [3].

Аналитическая форма отношения $\mu_{R1\cup R2}(x, y)$ будет следующая:

$$\mu_{R_1\cup R_2}(x,y)=\begin{cases}\mu_{R_1}(x,y), & |y-x|\le k,\\ \mu_{R_2}(x,y), & |y-x|>k,\end{cases}$$

где k - значение $|y-x|$, при котором $\mu_{R1}(x, y) = \mu_{R2}(x, y)$.

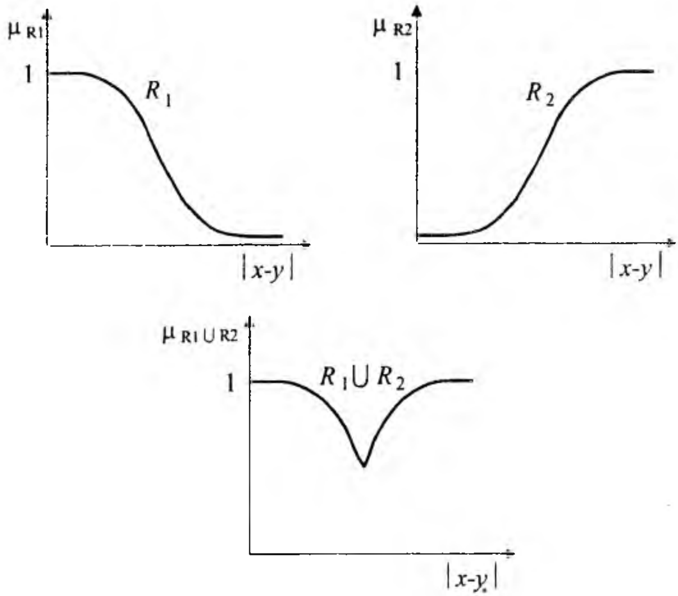


Рис. 1.12. Графическая форма объединения отношений

Ниже приведен пример объединения двух отношений, представленных в табличной форме:

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0.8	0.3
x_2	1	0.1	0.6

R_2	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.4	1
x_2	0.3	0.9	0.5

$R_2\cup R_1$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.8	1
x_2	1	0.9	0.6

2. **Пересечением** двух нечетких отношений R_1 и R_2, которое обозначается $R_1 \cap R_2$, называется отношение, функция принадлежности которого равна

$$\mu_{R1\cap R2}(x, y) = \mu_{R1}(x) \wedge \mu_{R2}(y).$$

На рис.1.13 приведен пример пересечения двух отношений xR_1y (модуль разности $|y\text{-}x|$ близок к k_1) и xR_2y (модуль разности $|y\text{-}x|$ близок к k_2) [3].

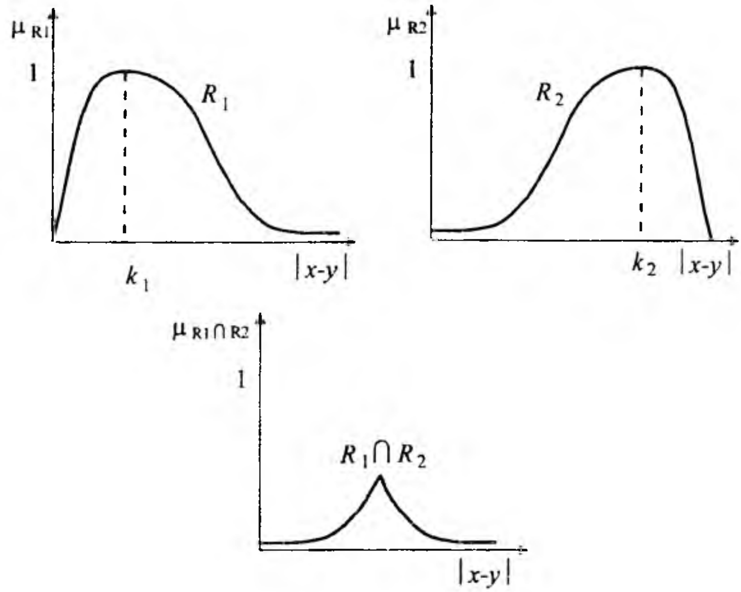


Рис. 1.13. Пересечение двух нечетких отношений

Ниже представлен пример пересечения двух отношений (тех же, что в примере объединения) в табличной форме:

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0.8	0.3
x_2	1	0.1	0.6

R_2	y_1	y_2	y_3
x_1	0.2	0.4	1
x_2	0.3	0.9	0.5

$R_2 \cup R_1$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0.4	0.3
x_2	0.3	0.1	0.5

3. **Дополнением** нечеткого отношения R является отношение $\bar{R}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$$

Например,

R	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0	0.8
x_2	1	0.7	0

$\overline{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.9	1	0.2
x_2	0	0.3	1

Описание других алгебраических и логических операций с нечеткими отношениями, так же как с нечеткими множествами, можно найти в [2, 4].

4. **Проекции нечеткого отношения**. Если $R(X,Y)$ - бинарное отношение (рис. 1.14) в декартовом произведении $R(X) \times R(Y)$,

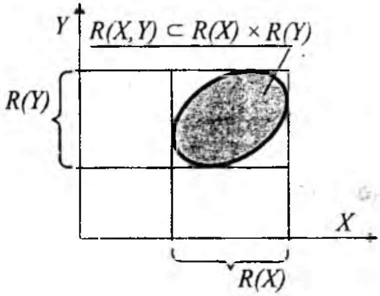


Рис. 1.14. Проекции нечеткого отношения

то проекциями бинарного отношения будут:

1) первой проекцией нечеткого отношения $R(X,Y)$ на X - нечеткое множество $R(X)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{R_1}(x) = \max_y \mu_R(x,y),$$

2) второй проекцией нечеткого отношения $R(X,Y)$ на Y - нечеткое множество $R(Y)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{R_2}(y) = \max_x \mu_R(x,y).$$

Ниже приведен пример проекций нечеткого отношения в табличной форме.

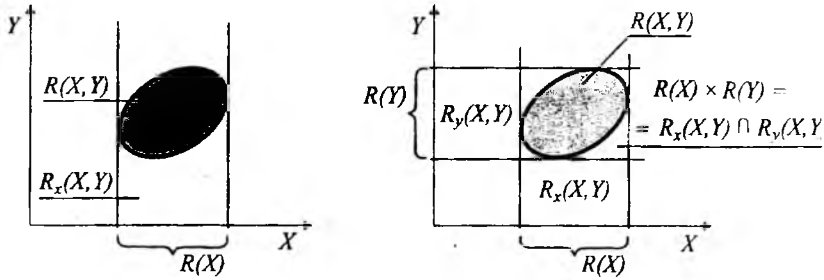
Таблица 1.3

$R(X,Y)$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
$x1$	0.2	0.8	1	0.4
$x2$	0.7	0.6	0.1	0.2
$x3$	0	0.3	0.5	0.1

$R(X)$
1
0.7
0.5

$R(Y)$	0.7	0.8	1	0.4

5. **Цилиндрические продолжения проекций нечеткого отношения**. Из рис. 1.14 и таблиц достаточно понятно, что различные нечеткие отношения могут иметь одинаковые проекции на универсальные множества (сомножители декартового произведения, например на X и Y). Однако для каждого конкретного нечеткого отношения можно указать одно наибольшее отношение, содержащее все другие отношения, проекции которых равны проекции исходного отношения на одно из универсальных множеств декартова произведения. Это наибольшее отношение называется цилиндрическим продолжением проекции нечеткого отношения. Иллюстрация цилиндрического продолжения $R_x(X)$ проекции $R(X)$ нечеткого отношения $R(X,Y)$ приведена на рис. 1.15а.



а) б)

Рис. 1.15. Цилиндрические продолжения проекций нечеткого отношения

Декартово произведение $R(X) \times R(Y) = R_x(X,Y) \cap R_y(X,Y)$, нечеткое множество $R(X,Y)$, его проекции $R(X)$, $R(Y)$ и их цилиндрические продолжения $R_x(X,Y)$, $R_y(X,Y)$ приведены на рис.1.15б. Для вышеприведенного примера проекций нечеткого отношения в табличной форме (табл. 1.3) цилиндрическими продолжениями проекций будут:

1) для проекции $R(X)$

Таблица 1.4

$R(X)$
1
0.7
0.5

$R_x(X,Y)$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
$x1$	1	1	1	1
$x2$	0.7	0.7	0.7	0.7
$x3$	0.5	0.5	0.5	0.5

2) для проекции $R(Y)$

Таблица 1.5

$R(Y)$	0.7	0.8	1	0.4
$R_y(X,Y)$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
$x1$	0.7	0.8	1	0.4
$x2$	0.7	0.8	1	0.4
$x3$	0.7	0.8	1	0.4

Важным выводом из таблиц 1.3, 1.4, 1.5 является то, что для любого значения X выполняется условие

$$\mu_R(X) = \mu_{Rx}(X,Y), \qquad (1.10)$$

и для любого значения Y - условие

$$\mu_R(Y) = \mu_{Ry}(X,Y). \qquad (1.11)$$

Нечеткие отношения бывают **сепарабельными** и **несепарабельными**. Сепарабельным называется отношение равное пересечению цилиндрических продолжений своих проекций (например,

$R_x(X,Y) \cap R_y(X,Y)$) или равное декартову произведению своих проекций (например, $R(X) \times R(Y)$), поскольку $R(X) \times R(Y) = R_x(X,Y) \cap R_y(X,Y)$, что следует из рис.15б. Сепарабельное отношение образуется невзаимодействующими переменными. Если найти декартово произведение $R(X) \times R(Y)$ (или пересечение $R_x(X,Y) \cap R_y(X,Y)$) для вышеприведенного табличного примера (табл. 1.3), то полученное отношение (табл. 1.6) не будет равно исходному. Это говорит о том, что исходное отношение было несепарабельным, т.е. было образовано взаимодействующими переменными.

Таблица 1.6

$R(X) \times$ $\times R(Y)$	$y1 = 0.7$	$y2 = 0.8$	$y3 = 1$	$y4 = 0.4$
$x1 = 1$	0.7	0.8	1	0.4
$x2 = 0.7$	0.7	0.7	0.7	0.4
$x3 = 0.5$	0.5	0.5	0.5	0.4

6. **Композиция нечетких отношений.** Если R - отношение в $X \times Y$, а S - отношение в $Y \times Z$, то композицией R и S будет нечеткое отношение в $X \times Z$, которое определяется следующим образом

$$R \circ S = \int_{X \times Z} \bigvee_{Y} \left(\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)\right) / (x,z). \qquad (1.12)$$

Такое отношение называется также максминной (или max-min) композицией двух отношений. Например, если исходные отношения R_1 и R_2 заданы в табличной форме,

$R1$	$y1$	$y2$	$y3$
$x1$	0.2	1	0.7
$x2$	0.6	0.4	0.9

$R2$	$z1$	$z2$	$z3$	$z4$
$y1$	0.3	0.9	0.2	0.1
$y2$	0.5	0.6	1	0.1
$y3$	0.4	1	0.6	0.3

то для нахождения степени принадлежности каждого элемента композиции, т.е. для получения $\mu(x_i,z_j)$, производится конъюнктивное умножение i-й строки отношения $R1$ на j-й столбец $R2$ и полученные результаты складываются по правилу дизъюнкции.

$R1° R2$	$z1$	$z2$	$z3$	$z4$
$x1$	0.5	0.7	1	0.3
$x2$	0.4	0.9	0.6	0.3

Композиция нечетких отношений играет важную роль при реализации композиционного правила вывода, используемого для логико-лингвистического описания систем и нечетких моделей.

Глава 2
ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

2.1. Основные параметры лингвистической переменной

Моделирование объектов и протекающих в них процессов удобно проводить на основе нечетких высказываний, выражаемых на естественном или близком к естественному языке. При этом используется лингвистическая переменная (ЛП), определение и основные понятия которой даны в разделе 1.1. В общем случае ЛП характеризуется набором:

$$\chi,\ T(\chi),\ U,\ G,\ M \qquad (2.1)$$

где χ - название переменной;

$T(\chi)$ - терм-множество, т.е. множество названий лингвистических значений переменной χ;

U - универсальное множество с базовой переменной u;

G - синтаксическое правило для формирования названий значений лингвистической переменной;

M - семантическое правило, которое формирует нечеткое множество каждому значению лингвистической переменной, т.е. каждой нечеткой переменной ставит в соответствие ее смысл.

Терм-множество представляет собой совокупность значений лингвистической переменной. Например, терм-множество лингвистической переменной **Прибыль** (см. рис.1.1) является объединением ее значений, т.е. объединением нечетких переменных (объединением термов):

T(**Прибыль**) = ***низкая*** + ***ниже планируемой*** + ***планируемая*** +
+ ***выше планируемой*** + ***высокая***.

В общем случае терм-множество, состоящее из m элементов, может быть представлено в следующей форме:

$$T = \{T_i\},\ i \in L = \{1, 2, ..., m\}. \qquad (2.2)$$

С лингвистической переменной связаны синтаксическая и семантическая процедуры. Для генерации новых термов применяются синтаксические процедуры с использованием связок «*и*», «*или*» и модификаторов «*очень*», «*слегка*», «*не*» и др. Например, из первичного терма ***высокая*** синтаксическая процедура позволяет получить новые термы: ***очень высокая*** и ***не высокая***.

Семантическая процедура позволяет вычислять смысл нового полученного значения ЛП, т.е. формировать нечеткое множество, соответствующее новому значению переменной. Семантическая процедура указывает правила формирования новых нечетких множеств. Так нечеткое множество ***очень высокая*** переменной **температура** (рис. 2.1) сформировано путем возведения в квадрат значений функции совместимости множества ***высокая*** (функций принадлежности), т.е. с использованием оператора концентрирования (CON), а множество ***не высокая*** - путем вычитания из 1 значений функции совместимости первичного терма, т.е. с использованием операции дополнения.

Рис. 2.1. Пример формирования новых термов

Для сокращения количества используемых символов на практике символом χ обозначается как название самой переменной, так и общего названия значений переменной. Например, если обратиться к лингвистической переменной χ = **Прибыль**, то лингвистическими значениями переменной **Прибыль** могут быть: ***низкая***, ***высокая***, ***не***

очень низкая и не высокая, и т.д. Следует отметить, что каждое значение ЛП, например ***планируемая***, является нечеткой переменной и характеризуется тройкой:

$$X,\ U,\ R(X;\ u),$$

где X - название нечеткой переменной,

U - универсальное множество,

u - общее название элементов множества U,

$R(X;\ u)$ - нечеткое подмножество множества U, представляющее собой нечеткое ограничение на значения переменной u, обусловленное X. На практике ограничение часто записывается в следующем виде: $R(X)$ или $R(u)$ или $R(x)$.

Каждый терм является названием нечеткой переменной со своим ограничением $R(X)$ и это ограничение является смыслом лингвистического значения переменной, например значения ***старый***. Если, например, ограничение R(***старый***) определяется выражением [1]

$$\textbf{\textit{старый}} = \int_{50}^{100} \frac{1}{1+\left(\dfrac{5}{u-50}\right)^2} / u,$$

то смысл лингвистического значения ***старый*** определяется аналогичным выражением

$$\boldsymbol{M(\textit{старый})} = \int_{50}^{100} \frac{1}{1+\left(\dfrac{5}{u-50}\right)^2} / u.$$

Таким образом, смысл лингвистического значения $M(X)$, ограничение нечеткой переменной $R(X)$ и название лингвистического значения X выражают одну и ту же суть и на практике являются взаимозаменяемыми.

При большом числе элементов в терм-множестве для порождения новых элементов и для определения смысла используют алгоритмы, реализуемые на ЭВМ. При этом связка «*и*» соответствует логической операции пересечения, «*или*» - операции объединения, «*не*» - операции дополнения, «***очень***» - операции концентрирования. Операция растяжения в ряде случаев соответствует неопределенности ***более или менее***.

Формирование терм-множества ЛП должно отвечать ряду условий. Так функции принадлежности каждого из термов упорядоченного терм-множества $T = \{T_i\}$, $i \in L = \{1, 2, ..., m\}$ должны отвечать следующим требованиям [2, 4, 8]:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{T_1}(u_{min}) = 1, \ \ \mu_{T_m}(u_{max}) = 1, \\ \forall \ i \in L \ \exists \ u \in U: \ \mu_{T_i}(u) = 1, \\ \forall \ i, \ i+1 \leq m, \ \ 0 < \max\limits_{u \in U}\left\{ \mu_{T_i \cap T_{i+1}}(u)\right\} < 1. \end{array}\right\}, \qquad (2.3)$$

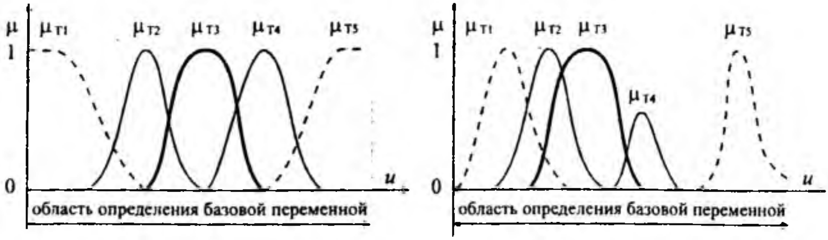
где $\forall$ - квантор общности, $\exists$ - квантор существования, смысл T_i поясняет выражение (2.2).

Первое условие из (2.3) требует, чтобы функции принадлежности крайних термов имели форму «уполовиненного» вида. То есть на границах области определения лингвистической переменной ее значения должны быть равны 1.

Второе условие регламентирует существование хотя бы одного типового представителя каждого понятия. Это означает, что каждое нечеткое множество, входящее в терм-множество, является нормальным, т.е. его высота $\sup\limits_{U} \mu_{T_i}(u) = 1$.

Третье условие запрещает, с одной стороны, существование таких участков из области определения, которым не соответствуют никакие понятия, а с другой стороны - существование неразграниченных понятий.

На рис.2.2 приведены примеры термов ЛП, отвечающих (а) и не отвечающих (б) требованиям условия (2.3).



а) б)

Рис. 2.2. Корректное (а) и некорректное (б) представление термов ЛП

2.2. Нечеткие высказывания

Нечетким высказыванием называется предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или ложности в настоящее время [1, 4]. Степень истинности или ложности принимает значения в интервале [0, 1]. Степень, равная 0.5, называется индифферентностью.

Простое нечеткое высказывание, например, <**Температура *высокая***> означает, что ЛП **Температура** имеет значение ***высокая*** и этому значению соответствует нечеткое множество на шкале базовой переменной **температура**. Если речь идет о температуре тела человека, базовая переменная изменяется в пределах от 35°С до 42°С, а если о температуре воздуха средней полосы России, то - в пределах от -40°С до + 40°С. Модификаторы **очень, не, много больше, более или менее** и другие позволяют сгенерировать нужное количество значений лингвистической переменной.

Составные нечеткие высказывания образуются из простых с помощью союзов «**и**», «**или**», «**если** .., **то**...», «**если** .., **то**.., **иначе** ...», т.е. логических операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания. Пример составного высказывания: «если люди по улице идут под зонтиками, то на улице дождь», где высказывание *А* - «люди по улице идут под зонтиками», высказывание *В* - «на улице дождь», Для нечеткого подмножества *А* универсального множества *X* и нечетких подмножеств B и C универсального множества Y можно указать составное высказывание общего вида [1]:

$$\text{«}\mathbf{если}\ A,\ \mathbf{то}\ B,\ \mathbf{иначе}\ C\text{».} \qquad (2.4)$$

Это высказывание является бинарным нечетким отношением в декартовом произведении $X \times Y$, которое можно представить следующим образом:

$$\text{«}\mathbf{если}\ A,\ \mathbf{то}\ B,\ \mathbf{иначе}\ C\text{»} = A \times B + \neg A \times C.$$

В данном выражении нечеткое множество A - представлено как унарное нечеткое отношение в X, а B и C - как унарные нечеткие отношения в Y. При этом составное нечеткое высказывание является объединением декартова произведения A и B с декартовым произведением $\neg A$ и C. Частным случаем составного высказывания (2.4) является следующее:

$$\text{«}\mathbf{если}\ A,\ \mathbf{то}\ B\text{».} \qquad (2.5)$$

Составные нечеткие высказывания являются основой для логико-лингвистического описания моделируемых систем, которое базируется на использовании естественного языка. Входные и выходные параметры моделируемой системы представлены в виде ЛП, значениями которых являются нечеткие множества. Совокупность правил функционирования моделируемой системы может быть представлена совокупностью высказываний:

1. **если** $A1$, **то** $B1$
2. **если** $A2$, **то** $B2$ (2.6)

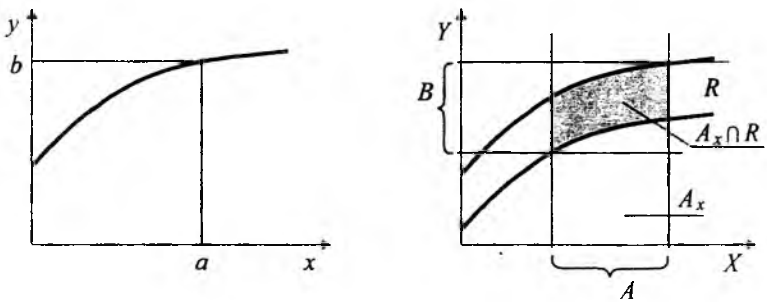
n. **если** An, **то** Bn,

где $A1$, $A2$,... An, - нечеткие множества, заданные на декартовом произведении X универсальных множеств входных ЛП,
$B1$, $B2$,... Bn, - нечеткие множества, заданные на декартовом произведении Y универсальных множеств выходных ЛП.

Составное высказывание (импликация) вида «**если** A, **то** B» отражает функциональную связь входных и выходных параметров системы и является основой для построения нечеткого отношения, соответствующего данному высказыванию. Совокупность (2.6) нечетких высказываний (импликаций) определяет взаимосвязь входных и выходных ЛП и позволяет построить нечеткое отношение $R(X,Y)$ на декартовом произведении $X \times Y$ универсальных множеств входных и выходных переменных.

2.3. Композиционное правило вывода

Согласно основному правилу вывода в традиционной логике об истинности высказывания B можно судить по истинности высказывания A и импликации $A \rightarrow B$ (правило *modus ponens*). Вышеприведенный пример высказывания «если люди по улице идут под зонтиками, то на улице дождь» является приближенным т.е. нечетким, поскольку люди могут продолжать идти по улице под зонтиками, когда дождь уже закончился. Примером точного высказывания является следующее: если $y = f(x)$ и $x = a$, то $y = b$ (рис.2.3а).



а) б)

Рис. 2.3. Композиционное правило вывода

Это правило (*modus ponens*). может быть представлено в следующем виде:

Посылка 1: ЕСЛИ x есть a, ТО y есть b.

Посылка 2: x есть a'.

Следствие: y есть b'.

В [1] проведено обобщение, суть которого сводится к следующему. Предполагается, что A (рис.2.3 б) является нечетким подмножеством оси OX, а R - нечеткое отношение в $X \times Y$. Цилиндрическое нечеткое множество A_x (с основанием A) образует пересечение с нечетким отношением R, т.е. образует новое нечеткое отношение $(A_x \cap R)$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A_x \cap R}(x,y) = \mu_{A_x}(x,y) \wedge \mu_R(x,y).$$

Так как функция принадлежности проекции нечеткого отношения $A_x \cap R$ равна функция принадлежности ее цилиндрического продолжения $\mu_{Rx}(x,y)$, что следует из (1.10, 1.11), то

$$\mu_{A_x}(x,y) \wedge \mu_R(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_R(x,y).$$

Проекцией полученного нечеткого множества $(A_x \cap F)$ на ось $0Y$ является нечеткое множество B, функция принадлежности которого

$$\mu_B(y) = \bigvee_x \left(\mu_A(x) \wedge \mu_R(x,y)\right). \qquad (2.7)$$

Итак, нечеткое множество A и нечеткое отношение R индуцируют в Y нечеткое множество B, представляющее максминную композицию A и R с функцией принадлежности (2.7). Например, если задано нечеткое отношение

$R(X,Y)$	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$
$x1$	0.5	0.9	0.1	0.4
$x2$	0.7	0.6	1	0.2
$x3$	0.2	0.8	0.5	0.1

и нечеткое множество A = 0.3/x1 + 1/x2 + 0.6/x3, то их композиция (нечеткое множество B) будет равна максминному произведению матриц

$$B = A \circ R = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 0.6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 1.0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Итак, если $R(X,Y)$ - отношение в декартовом произведении $X \times Y$, A - нечеткое подмножество в X (нечеткое отношение $R(X) = A$), то нечеткое подмножество B в Y (нечеткое отношение $R(Y) = B$) определяется композицией

$$B = A \circ R(X,Y). \qquad (2.8)$$

Поскольку входных и выходных переменных может быть несколько, то нечеткие множества задаются на декартовых произведениях.

Согласно композиционному правилу вывода (2.8), входное нечеткое множество A, заданное на декартовом произведении входных переменных X, и нечеткое отношение $R(X,Y)$ определяют нечеткое множество B выходной переменной, заданное на декартовом произведении Y, с функцией принадлежности (2.7). Следовательно, композиционное правило вывода задает закон функционирования нечеткой модели системы.

2.4. Логико-лингвистическое описание систем, нечеткие модели

В общем случае входных и выходных переменных может быть несколько. При этом нечеткая лингвистическая модель будет представлена следующей схемой [2, 8]

$$
\begin{aligned}
&\text{ЕСЛИ } X_1 \text{ есть } A_{11} \text{ И} \dots \text{И } X_m \text{ есть } A_{1m}, \\
&\qquad \text{ТО } Y_1 \text{ есть } B_{11} \text{ И} \dots \text{И } Y_n \text{ есть } B_{1n}; \\
&\qquad\qquad \cdot \\
&\text{ЕСЛИ } X_1 \text{ есть } A_{p1} \text{ И} \dots \text{И } X_m \text{ есть } A_{pm}, \\
&\qquad \text{ТО } Y_1 \text{ есть } B_{p1} \text{ И} \dots \text{И } Y_n \text{ есть } B_{pn};
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

где m, n - число входных и выходных лингвистических переменных X_i, Y_j $(i = 1, m,\ j = 1, n)$;

р - число правил в составе лингвистической модели;

$A_{ki} \in U_i$, $B_{kj} \in V_j$ - конкретные лингвистические значения соответствующих входных и выходных переменных в составе k-го правила $(k = 1, p)$;

U_i, V_j - множества допустимых значений, задаваемых для каждой из используемых лингвистических переменных. .

Таким образом, модель (2.9) является совокупностью нечетких высказываний (импликаций). Все параметры данной модели описываются лингвистическими переменными, значения которых (термы) задаются с помощью средств естественного (или искусственного) языка и используются для выражения необходимых качественных оценок. Каждому значению лингвистической переменной ставится в соответствие некоторое нечеткое подмножество с функцией принадлежности

$$\mu_{A_{ki}} \in F(X_i),\ \mu_{B_{kj}} \in F(Y_j),$$

где $F(X_i)$, $F(Y_j)$ - нечеткие подмножества на шкалах базовых переменных X_i, Y_j.

Совокупность продукционных правил задает некоторое отображение множества значений входных лингвистических переменных в аналогичное множество выходных:

$$U^m \to V^n,$$

где $U^m = \underset{i \in I}{\times} U_i$, $V^n = \underset{j \in J}{\times} V_j$.

Соотношению $U^m \to V^n$ можно поставить в соответствие нечеткое отображение [2, 8]

$$S: F(X_i) \to F(Y_j), \qquad (2.10)$$

где $S = \underset{k \in K}{\cup} \mu_{A_k} \times \mu_{B_k}$,

$$\mu_{A_k} = \underset{i \in I}{\times} \mu_{A_{ki}}, \quad \mu_{B_k} = \underset{j \in J}{\times} \mu_{B_{kj}}.$$

Применение нечеткого отображения (2.10) для моделирования сложных систем рассматривается далее на примерах. В качестве примеров использования нечеткой логики в системах управления и моделирования во многих литературных источниках приводятся системы управления: балансировкой вертикальной мачты, контейнерным мостовым краном, нагревом воды, регулирования температуры воды в душе, виброзащитные системы и т.д. [2 - 7]. В большинстве приведенных примеров рассматривается два входных воздействия (две входных ЛП) и один управляющий выходной сигнал (выходная ЛП). При этом все правила управления (нечеткие высказывания) сводятся к следующему виду:

«ЕСЛИ ***значение первой входной переменной*** равно A_i и
ЕСЛИ ***значение второй входной переменной*** равно B_i,
ТО ***значение выходной переменной*** равно C_i»,

где A_i, B_i - лингвистические значения входных переменных, а C_i - лингвистическое значение выходной переменной.

В общем виде управляющее правило может быть представлена в следующей форме:

«Если ($A_i \times B_i$), то C_i»,

где $(A_i \times B_i)$ - элемент декартова произведения нечетких множеств A и B, заданных на универсальных множествах X и Y с функцией принадлежности

$$\mu_{(A_i \times B_i)}(x,y) = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y), \qquad (2.11)$$

т.е. $(A_i \times B_i)$ - значение входного нечеткого множества, C_i - значение нечеткого множества выходной переменной, заданное на универсальном множестве Z.

Для каждого правила необходимо определить нечеткое отношение

$$R_i = (A_i \times B_i) \times C_i$$

с функцией принадлежности

$$\mu_{R_i}((x,y),z) = \left(\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)\right) \wedge \mu_{C_i}(z). \qquad (2.12)$$

Объединение нечетких отношений R_i по совокупности n правил формирует отношение R входных и выходных переменных

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

с функцией принадлежности

$$\mu_R(x,y,z) = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_{R_i}((x,y),z). \qquad (2.13)$$

Конкретные значения ***первой входной переменной*** - $A(x)$ и ***второй входной переменной*** - $B(y)$ обуславливают конкретное значение ***выходной переменной*** - $C(z)$, которое определяется на основе композиционного правила вывода

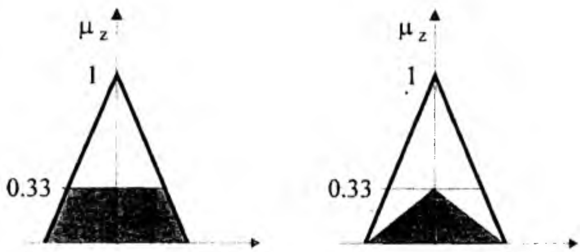
$$C(z) = \left(A(x) \times B(y)\right) \circ R, \qquad (2.14)$$

где $\circ$ - max-min композиция.

Задав функции принадлежности входных переменных (фазификация), можно получить оценку α_A^k, α_B^k степени принадлежности текущих числовых значений входных переменных термам лингвистических переменных, где k - номер правила. Поскольку условная часть правил (антецедент), задаваемая (2.11), объединяется логической связкой И, то обобщенная оценка вычисляется как *min*:

$$\alpha_\Sigma^k = min\left\{\alpha_A^k,\ \alpha_B^k\right\}. \qquad (2.15)$$

Обобщенная оценка (2.15) используется для модификации правой части правил (консеквента). При этом функция принадлежности выходной лингвистической переменной преобразуется одним из двух известных методов [8]. В первом случае используется метод MAX-MIN, когда производится отсечение функции принадлежности выходной переменной по уровню обобщенной оценки (рис.2.4 а).



а) б)

Рис. 2.4. Использование методов MAX-MIN (а) и MAX-DOT (б)

Во втором случае (метод MAX-DOT) производится масштабирование функции принадлежности переменной также по уровню обобщенной оценки (рис.2.4 б). Первый метод более распространен и используется в системах [6, 7], второй метод применяется при реализации нечеткого процессора [8].

Функция принадлежности выходной переменной $C(z)$ получается путем объединения результатов композиционного вывода по всем комбинациям значений входных переменных и имеет следующий вид

$$\mu_C(z) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} \left(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\right) \wedge \mu_R(x,y,z), \qquad (2.16)$$

что полностью соответствует (2.10).

Объединение результатов, полученных по каждому из правил нечеткого вывода (рис. 2.5), позволяет произвести дефазификацию и определить значение выходной переменной. Рис. 2.5а соответствует методу MAX-MIN, а рис. 2.5б - методу MAX-DOT.

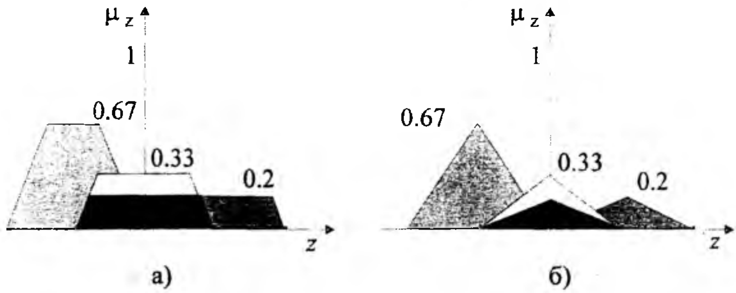


Рис. 2.5. Результат моделирования процесса получения прибыли

Дефазификация (определение числового значения z_0 ***выходной переменной***) производится с использованием различных способов [3]. Обычно определяется центр масс z_0 полученной фигуры (рис. 2.5). Например:

$$z_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} z_n \mu_{C'}(z_n)}{\sum_{n=1}^{N} \mu_{C'}(z_n)}, \qquad (2.17)$$

где z_n - центр масс каждой из N фигур, $\mu_{C'}(z_n)$ - высота нечеткого результата.

Или

$$z_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} z_n \cdot S_n}{\sum_{n=1}^{N} S_n}, \qquad (2.18)$$

где S_n - площадь, а z_n - центр масс каждой из N фигур.

2.5. Нечеткие алгоритмы

Нечетким алгоритмом называется последовательность нечетких операторов, выполнение которых приводит к не полностью определенному, т.е. нечеткому решению [5]. В свою очередь, оператор называется нечетким, если в своей формулировке содержит хотя бы одну нечеткую или лингвистическую переменную, либо нечеткое отношение. Нечеткие алгоритмы удобно представлять в виде блок-схем [1]. В нечетких алгоритмах блок решений (рис. 2.6) должен ответить на вопрос - является ли входная переменная x нечетким подмножеством A, (B, C). В простейшем варианте ответом является Да или Нет.

Рис. 2.6. Блок-схема нечеткого алгоритма

В первом случае переменной соответствует ограничение $R(x) = A$, во втором - $R(x) = \neg A$. Так, если речь идет о температуре блок решений должен дать ответ - соответствует ли текущая температура некоторому значению лингвистической переменной, например, значению ***высокая***. В более сложном варианте ответ должен определяться функцией принадлежности, т.е. Да/μ или Нет/($1-\mu$), где $0 \leq \mu \leq 1$.

В общем случае степень принадлежности μ может принимать не только числовые, но и лингвистические значения. При наличии цепочки блоков решений (см. рис. 2.3) суммарное ограничение будет получено в виде пересечения нечетких подмножеств. Результатом работы нечеткого алгоритма будет принятие решения в одном из блоков (1, 2, 3, 4).

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЫЛИ

3.1. Общее описание системы моделирования

В качестве иллюстрации использования лингвистической переменной в моделировании сложных систем ниже приведен пример моделирования процесса получения прибыли, т.е. процесс менеджмента. Высококвалифицированный менеджер на основе имеющегося опыта в ряде случаев способен управлять процессом получения прибыли лучше компьютерных систем, для чего использует свои ранее приобретенные знания. При этом фактически реализуется экспертная интеллектуальная система управления производством и маркетингом на основе знаний. Разрабатываемая компьютерная система моделирования на основе ЛП характеризуется тем, что ее база знаний создана путем опроса многих наиболее квалифицированных специалистов. Поэтому создаваемая система рассматривается как средство помощи конкретному менеджеру, который при работе с ней пользуется знаниями высококлассных экспертов.

Наибольшее влияние на прибыль оказываст себестоимость единицы продукции C, время выхода продукции на рынок $T_{вых}$, исполнение продукции S, представляющее собой оценку текущих денежных поступлений за всю жизнь проекта, т.е. S - это объем реализации продукции в денежном выражении. В процессе моделирования получения прибыли **Себестоимость** продукции C, **Время** выхода на рынок $T_{вых}$, **Исполнение продукции** S, являются лингвистическими переменными на входе системы принятия решения, а на выходе системы - **Прибыль**.

Значения ЛП определяются, как правило, путем опроса экспертов. Например, лингвистические переменные **Себестоимость** продукции C и **Время** выхода на рынок $T_{вых}$ могут принимать следующие значения: ***план***, ***выше плана***, ***ниже плана***, ***высокая*** (***высокое***), ***низкая*** (***низкое***).

Исполнение продукции

$$S = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot P_i ,$$

где n - количество периодов пересчета t , за каждый из которых изменяется значение P_i в течение всей жизни проекта; Q_i - объем продаж (реализации продукции), P_i - цена продажи единицы продукции (*у.е.*).
В свою очередь, объем продаж

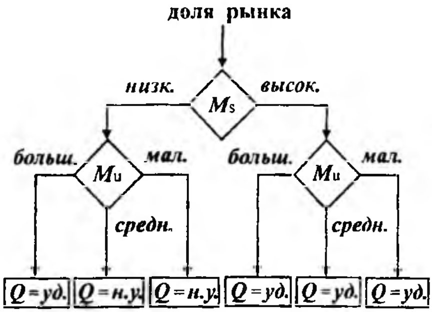
$$Q_i = M_{Si} \cdot M_{Ui},$$

где M_{Si} - доля рынка (%); M_{Ui} - потенциальный размер (емкость) рынка, представляющий собой суммарный уровень продаж всех фирм за период пересчета t.

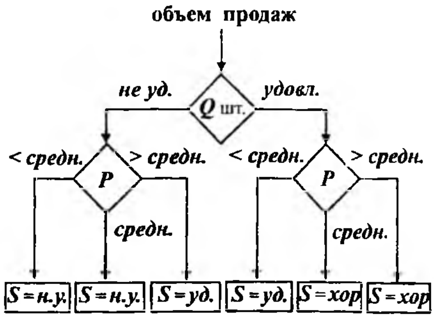
Переменные Q, P, M_S, M_U, также являются лингвистическими, их значения также определяются экспертами. Например, цена продажи P может принимать значения: ***средняя***, ***ниже средней***, ***выше средней***; доля рынка M_S: ***низкая***, ***высокая***; потенциальный размер рынка M_U - ***большая***, ***средняя***, ***малая***. Лингвистическая переменная **Объем продаж** Q в зависимости от значений переменных M_S, M_U может принимать значения: ***удовлетворительная***, ***не удовлетворительная***.

Моделирование влияния входных ЛП на прибыль проводится в два этапа. На первом этапе анализируется влияние исполнения продукции на прибыль с помощью нечеткого алгоритма. На втором этапе при анализе влияния себестоимости продукции и времени выхода на рынок используется композиционное правило вывода [1], когда результат получается на основе процедуры нечеткого вывода на правилах. При сравнительном анализе различных методов многокритериального выбора альтернатив предпочтение отдано именно методу, основанному на правилах, как наиболее устойчивому [7].

В первом решающем блоке нечеткого алгоритма (рис. 3.1) доля рынка M_S в зависимости от конкретного числового значения относится к одному из лингвистических значений ***низкая*** (***низк.***) или ***высокая*** (***высок.***). Результатом пересечения указанных нечетких множеств с соответствующими значениями переменной M_U является соответствующее значение: ***удовлетворительная*** (*уд.*) или ***не удовлетворительная*** (*н.у.*) переменной Q (рис . 3.1). **Объем продаж** Q и **Цена продажи** P определяют значения лингвистической переменной **Исполнение продукции** S, которые могут принимать значения: ***хорошее***, ***удовлетворительное***, ***не удовлетворительное***. В соответствии с полученными значениями S используются три различных нечетких отношения входных (**Себестоимость** - C, **Время** выхода на рынок - $T_{вых}$) и выходной (**Прибыль**) лингвистических переменных.



а)



б)

Рис. 3.1. Нечеткий алгоритм функционирования системы

3.2. Система нечеткого логического вывода

В задаче моделирования процесса получения прибыли функцию принадлежности каждого из подмножеств ЛП (каждого из нечетких множеств) удобно задавать либо треугольной, либо трапецеидальной формы. На рис. 3.2, 3.3 приведены функции принадлежности значений входных лингвистических переменных **Себестоимость** - ***C*** и **Время** выхода на рынок - $T_{вых}$.

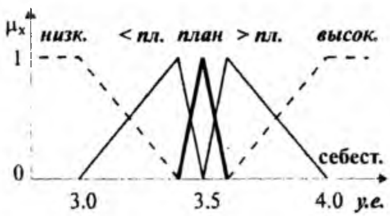


Рис. 3.2. Значения переменной **Себестоимость**

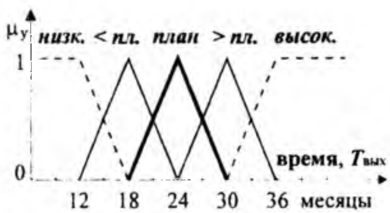


Рис. 3.3. Значения переменной **Время**, $T_{вых}$

Логико-лингвистическое моделирование процесса получения прибыли базируется на основе совокупности правил, выработанных экспертами. Формулируемые правила используют естественный язык и представляют собой составные нечеткие высказывания (импликации) вида: "Если значение первой входной переменной **Себестоимость** равно A_i и если значение второй входной переменной **Время выхода на рынок** равно B_i, то значение выходной переменной **Прибыль** равно C_i". Значения выходной переменной **Прибыль** приведены на рис.3.4.

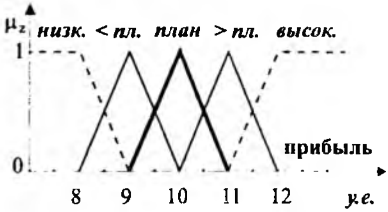


Рис. 3.4. Значения переменной **Прибыль**

Составные нечеткие высказывания отражают функциональную связь входных A_i, B_i и выходной C_i лингвистических значений переменных моделируемой системы. Совокупность этих правил, хранимых в базе знаний компьютерной системы управления, определяет взаимосвязь входных и выходной ЛП, т.е. характеризует **нечеткое отношение** $R((X,Y),Z)$ входных и выходной ЛП. Конкретные значения первой входной переменной ***себестоимость*** - $A(x)$ и второй входной переменной ***время выхода на рынок*** - $B(y)$ обуславливают конкретное значение выходной переменной ***прибыль*** - $C(z)$, которое определяется на основе композиционного правила вывода $C(z) = \left(A(x) \times B(y)\right) \circ R$.

Пример совокупности правил функционирования системы моделирования приведен ниже:

1. Если себестоимость равна плановой и время выхода на рынок - плановое, то прибыль является плановой.
2. Если себестоимость меньше плановой и время выхода на рынок - больше планового, то прибыль является плановой.
3. Если себестоимость низкая и время выхода на рынок - плановое, то прибыль является высокой.
4. ... и т.д.

Совокупность перечисленных правил в табличной форме, хранимых в базе знаний компьютерной системы управления, приведена в табл. 3.1, 3.2, 3.3.

Табличная форма правил принятия решений для $S = уд$.

Таблица 3.1

Время	**Себестоимость,** *с/с*				
$T_{вых}$	***низк***	***< пл.***	***план***	***> пл.***	***высок***
низк	***высок***	***высок***	***высок***	***> пл.***	***план***
< пл.	***высок***	***высок***	***> пл.***	***план***	***< пл.***
план	***высок***	***> пл.***	***план***	***< пл.***	***низк***
> пл.	***> пл.***	***план***	***< пл.***	***низк***	***низк***
высок	***план***	***< пл.***	***низк***	***низк***	***низк***

Табличная форма правил принятия решений для $S = н.у$.

Таблица 3.2

Время	**Себестоимость,** *с/с*				
$T_{вых}$	***низк***	***< пл.***	***план***	***> пл.***	***высок***
низк	***высок***	***высок***	***> пл.***	***план***	***< пл.***
< пл.	***высок***	***> пл.***	***план***	***< пл.***	***низк***
план	***> пл.***	***план***	***< пл.***	***низк***	***низк***
> пл.	***план***	***< пл.***	***низк***	***низк***	***низк***
высок	***< пл.***	***низк***	***низк***	***низк***	***низк***

Табличная форма правил принятия решений для $S = хор$.

Таблица 3.3

Время	**Себестоимость,** *с/с*				
$T_{вых}$	***низк***	***< пл.***	***план***	***> пл.***	***высок***
низк	***высок***	***высок***	***высок***	***высок***	***> пл.***
< пл.	***высок***	***высок***	***высок***	***> пл.***	***план***
план	***высок***	***высок***	***> пл.***	***план***	***< пл.***
> пл.	***высок***	***> пл.***	***план***	***< пл.***	***низк***
высок	***> пл.***	***план***	***< пл.***	***низк***	***низк***

Используя функции принадлежности лингвистических переменных (рис. 3.2, 3.3), правила функционирования системы (табл. 3.1, 3.2, 3.3), а также задав конкретные числовые значения входных переменных (например, для ***S* = *уд*.**, **себестоимость** = 3.58 ***у.е.*** и **время выхода на рынок** $T_{\text{вых}}$ = 22 месяца), можно определить числовое значение выходной переменной **прибыль.** Из рис. 3.2 следует, что числовому значению базовой переменной **себестоимость** = 3.58 у.е. соответствуют два значения лингвистической переменной **Себестоимость**: ***планируемая*** (***план***) со степенью принадлежности 0.2 и ***выше планируемой*** (**> *пл.***) со степенью 0.8. Из рис. 3.3 - числовому значению базовой переменной $T_{\text{вых}}$ = 22 месяцев соответствуют два значения лингвистической переменной **Время выхода на рынок**: ***планируемое*** (***план***) со степенью принадлежности 0.33 и ***ниже планируемого*** (**> *пл.***) со степенью 0.67.

Заданным значениям входных переменных соответствуют 4 нечетких высказывания (4 правила табл. 3.2), определяющих нечеткое отношение входных и выходной лингвистических переменных. Таким образом, для четырех правил (табл. 3.2) получается 4 значения выходной переменной **прибыль**:

1. Если значение переменной **Себестоимость** - ***планируемая*** и если **Время выхода на рынок** - ***планируемое***, то **Прибыль** - ***планируемая*** со степенью принадлежности 0.2. (рис. 3.5)

2. Если значение переменной **Себестоимость** - ***планируемая*** и если **Время выхода на рынок** - ***ниже планируемого***, то **Прибыль** - ***выше планируемой*** со степенью принадлежности 0.2. (рис. 3.6).

3. Если значение переменной **Себестоимость** - ***выше планируемой*** и если **Время выхода на рынок** - ***планируемое***, то **Прибыль** - ***ниже планируемой*** со степенью принадлежности 0.67. (рис. 3.7).

4. Если значение переменной **Себестоимость** - ***выше планируемой*** и если **Время выхода на рынок** - ***ниже планируемой***, то **Прибыль** - ***планируемая*** со степенью принадлежности 0.33. (рис. 3.8).

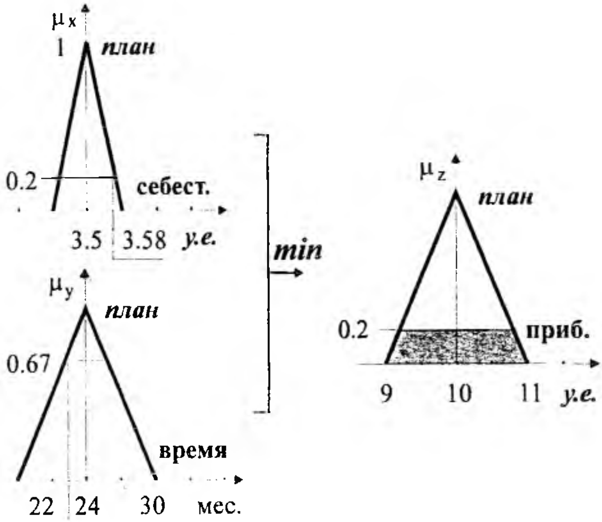


Рис. 3.5. Формирование значения переменной **Прибыль** (правило № 1)

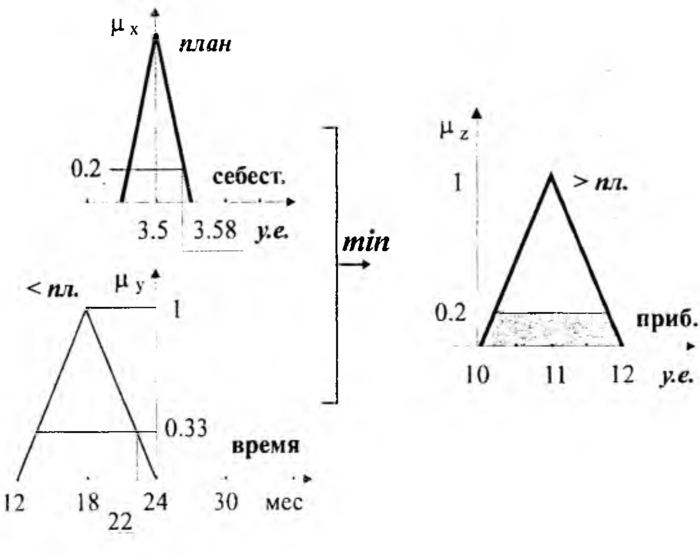


Рис. 3.6. Формирование значения переменной **Прибыль** (правило № 2)

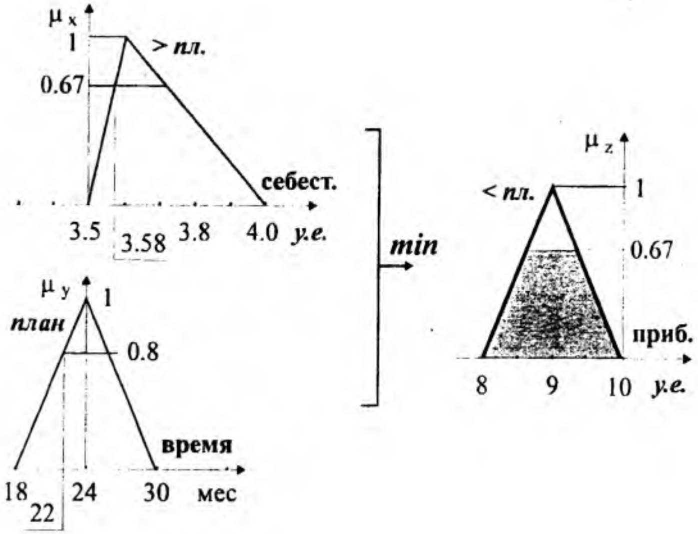


Рис. 3.7. Формирование значения переменной **Прибыль** (правило № 3)

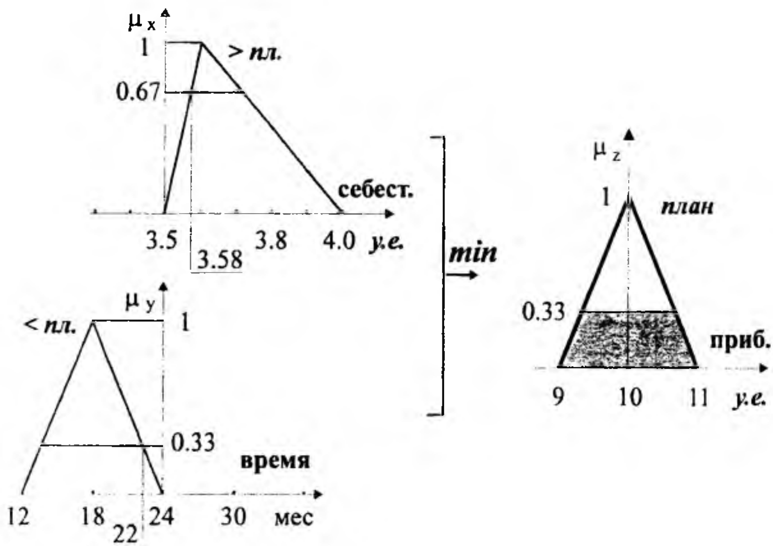


Рис. 3.8. Формирование значения переменной **Прибыль** (правило № 4)

Согласно (2.16), четыре полученные результата объединяются (рис. 3.9) и затем определяется числовое значение выходной переменной **прибыль**.

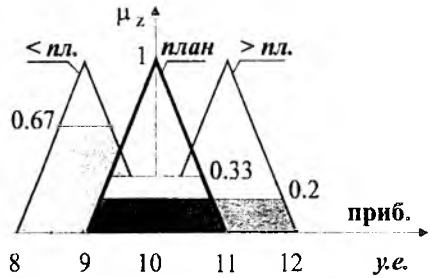


Рис. 3.9. Результат моделирования процесса получения прибыли

Нахождение числового значения (дефазификация) z_0 *у.е.*, как правило, производится с использованием эвристического метода определения центра масс полученной фигуры (2.18). Для заданных значений входных переменных получено $z_0 = 9.57$ ***у.е.***

3.3. **Компьютерная система моделирования**

Гибкость в процессе принятия решения может быть достигнута только в случае использования компьютеров для моделирования процесса производства и реализации товара. Поэтому была разработана компьютерная система моделирования с возможностью использования нескольких лингвистических переменных. В качестве входных переменных используются: долю рынка M_S; потенциальный размер (емкость) рынка M_U; цену продажи P, а следовательно, объем продаж Q и S; а также себестоимость C и время выхода на рынок T. Выходной переменной является прибыль.

Система выполнена в виде нечеткого контроллера (рис. 3.10).

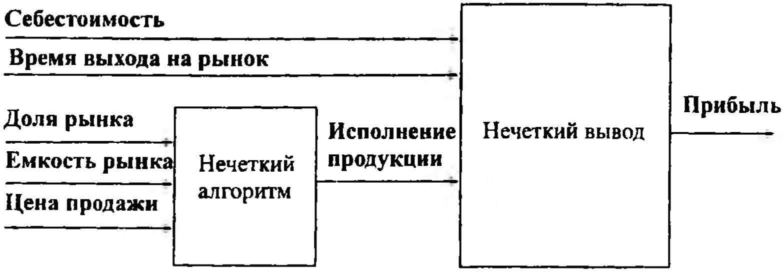


Рис.3.10. Структура системы моделирования

Она предусматривает моделирование переменных **Доля рынка, Емкость рынка, Цена продажи** в виде нечеткого алгоритма (см. рис. 3.1). Его результатом является лингвистическая переменная **Исполнение продукции**, которая может принимать значения: ***хорошее***, ***удовлетворительное***, ***не удовлетворительное***. Лингвистические переменные **Исполнение продукции, Себестоимость, Время выхода на рынок** поступают на вход блока нечеткого вывода, на выходе которого моделируется **Прибыль**.

Система разработана в среде Delfi-4 и представлена пользователю в удобной форме экранных окон. Первое экранное окно системы (рис. 3.11) содержит виртуальные кнопки управления, позволяющие задавать различные режимы работы системы.

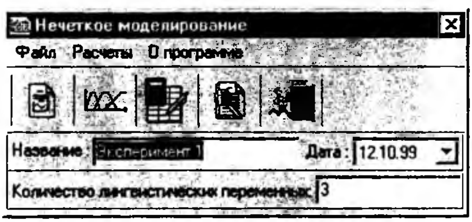


Рис. 3.11. Первое экранное окно компьютерной системы

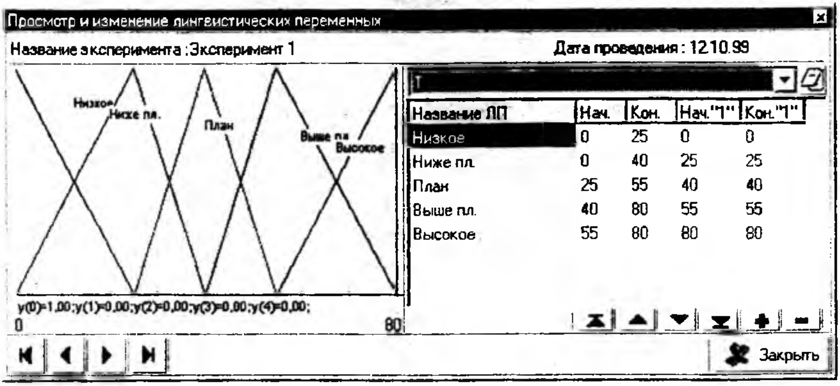


Рис. 3.12. Второе экранное окно компьютерной системы

Первая кнопка ( ) обеспечивает получение информации о системе. Вторая - ( ) позволяет задавать и корректировать термы входных лингвистических переменных. Каждый терм (рис. 3.12) представлен в цифровой и графической форме. Третья виртуальная кнопка ( ) является основной и реализует процесс моделирования, когда на экране монитора формируется основное экранное окно (рис. 3.13). Четвертая кнопка ( ) позволяет просматривать результаты всех экспериментов. Выход из системы реализует пятая кнопка ( ).

Основное экранное окно системы моделирования (рис. 3.13) позволяет задавать значения всех входных лингвистических переменных и получать результат моделирования в цифровой и графической форме. Здесь же приводится набор правил функционирования системы в табличной форме, соответствующий конкретным значениям M_S, M_Σ и P. Система предусматривает возможность изменения функций принадлежности всех лингвистических переменных и введение дополнительной входной переменной, например, характеризующей влияние рекламы на объем продаж.

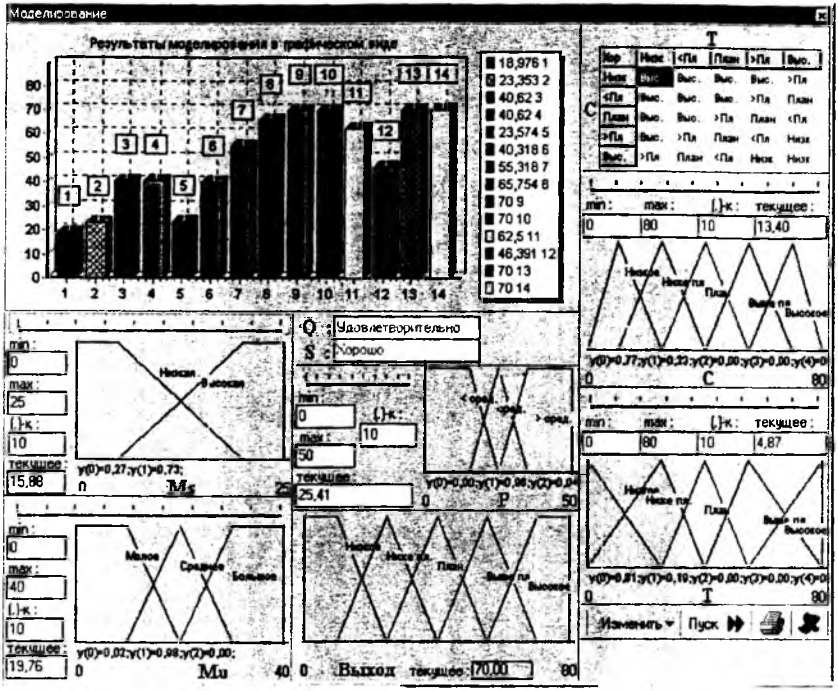


Рис. 3.13. Основное экранное окно системы моделирования

Компьютерная система моделирования использовалась для обучения студентов по специальности 220400 в Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики, в Международном институте рынка, а также в Самарской промышленно-финансовой академии для повышения квалификации менеджеров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
2. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова..М.: Наука, 1986.
3. Пивкин В.Я., Бакулин Е.П., Кореньков Д.И. Нечеткие множества в системах управления / Под ред. Ю.Н. Золотухина. Новосибирск: ИАЭ, 1995.
4. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. М.: Наука, 1990.
5. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев и др. М.: Радио и связь, 1989.
6. P. Bauer, S. Nouak, R Winkler A brief course in Fuzzy Logic and Fuzzy Control / www.flll.uni-linz.ac.at/pdw/fuzzy/fuzzy.htm!
7. Андрейчикова О.Н. Разработка и исследование интеллектуальной системы принятия решений на нечетких множествах // Информационные технологии, № 8, 1999.
8. Макаров И.М., Лохин В.М., Манько С.В. и др. Особенности нечетких преобразований в задачах обработки информации и управления // Информационные технологии, № 10, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ