

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Самарский государственный университет"

Кафедра математического моделирования в механике

Л.В. Степанова

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ
РАЗРУШЕНИЯ**

*Рекомендовано Учебно-методическим советом
по математике и механике Учебно-методического объединения
по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по специальностям
"Механика" и "Прикладная математика"*

Самара
Издательство "Самарский университет"
2006

УДК 539.375
ББК 22.251
С 794

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко

Отв. редактор д-р физ.-мат. наук, проф. В.И. Астафьев

Степанова Л.В.

С 794 **Математические методы механики разрушения:** учебн. пособие / Л.В. Степанова; Федер. агентство по образованию. – Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. – 232 с.

ISBN 5-86465-409-4

В настоящем учебном пособии, посвященном динамично развивающемуся направлению современной механики деформируемого твердого тела – механике трещин, – приводятся новые решения как классических задач механики разрушения, так и новых задач, полученные в самое последнее время. Подробно исследуются классические краевые задачи линейной механики разрушения о напряженном состоянии упругого тела с угловым разрезом с помощью новых подходов (метод конформных отображений, гамильтонов формализм). Обсуждаются проблемы, связанные с влиянием накопления повреждений в окрестности как стационарной, так и растущей трещин. Приводится детальное исследование собственных значений в разложении по собственным функциям поля напряжений в окрестности вершин трещин антиплоского сдвига и нормального отрыва.

Учебное пособие предназначено для студентов механико-математических факультетов университетов специальностей «Механика» и «Прикладная математика», специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.

УДК 539.375
ББК 22.251

ISBN 5-86465-409-4

© Степанова Л.В., 2006
© Самарский государственный университет, 2006
© Изд-во «Самарский университет», оформление, 2006

Оглавление

	Введение	6
I.	Об одной форме точных решений для трещины в линейно упругом материале	8
	1. Постановка задачи. Трещина антиплоского сдвига	8
	2. Конформное отображение	10
	3. Решение в плоскости ζ	13
	4. Решение в плоскости z	14
	5. Трещины типа I и II	16
	6. Упругопластическая граница	17
	7. Задачи	25
II.	Решение Уильямса	28
	1. Определение механических полей в окрестности вершины трещины по Уильямсу	28
III.	Гамильтонова система уравнений в механике разрушения	32
	1. Фундаментальные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах	32
	2. Преобразование на основе радиальной координаты ξ	36
	3. Преобразование на основе угловой координаты θ	42
	4. Общее решение	43
	5. Решение, построенное на основе радиальной координаты ξ	46
	6. Решение, построенное на основе угловой координаты θ	56
IV	Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом материале	60
	1. Постановка задачи	60

	2.	Асимптотический анализ	62
	3.	Задачи	66
V		Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упругопластическом материале в условиях антиплоского сдвига. Метод годографа Нейбера - Райса	68
	1.	Постановка задачи. Основные гипотезы и упрощения	68
	2.	Основные уравнения на плоскости деформаций .	71
	3.	Острый вырез в полубесконечной плоскости .	76
	4.	Случай малых размеров области пластического течения вблизи трещин и вырезов	92
	5.	Задачи	101
VI.		Аналитическое решение задачи о трещине антиплоского сдвига в упрочняющемся пластическом материале.	
		Высшие приближения	102
	1.	Основные уравнения	102
	2.	Решение на плоскости годографа	103
	3.	Асимптотический анализ	106
	4.	Задачи	120
VII.		Собственные значения в задаче о неподвижной трещине антиплоского сдвига и остром вырезе в материале со степенными определяющими уравнениям	124
	1.	Постановка задачи. Основные уравнения .	124
	2.	Собственные значения	126
	3.	Условие разрешимости	130
	4.	Приложение к исследуемой проблеме	134
	5.	Задачи	136
VIII.		Собственные значения в задаче о трещине нормального отрыва	137
	1.	Трещина нормального отрыва.	
		Постановка задачи	137
	2.	Собственные значения	139
	3.	Условие разрешимости	141
	4.	Приложение к исследуемой проблеме о трещине нормального отрыва	143
IX.		Поле напряжений у V-образного выреза в материале со степенными определяющими уравнениями	147
	1.	Основные уравнения. Метод решения .	147
	2.	Задача Хатчинсона - Райса - Розенгрена	155
X.		Законы сохранения	159

1.	Теорема Нетер	159
2.	J -интеграл	164
3.	Задачи	166
XI.	Метод годографа в задаче о трещине типа III в среде с поврежденностью	167
1.	Основные уравнения	167
2.	Высшие приближения	174
3.	Задачи	187
XII.	Усталостный рост трещины в среде с поврежденностью	188
1.	Асимптотический анализ усталостного роста трещины в среде с поврежденностью	188
2.	Численное решение	193
3.	Задачи	199
XIII.	Влияние скоростей упругих деформаций на докритический рост трещины в упругом нелинейно-вязком материале	200
1.	Постановка задачи. Трещина антиплоского сдвига	204
2.	Метод разложения по собственным функциям. Асимптотический анализ поля скоростей деформаций	206
3.	Асимптотический анализ "дальнего" поля напряжений	211
4.	Оценка скорости роста трещины	212
5.	Трещина нормального отрыва	213
6.	Область процесса накопления повреждений	215
7.	Задачи	219
	Именной указатель	220
	Литература	221

Введение

Данное учебное пособие "Математические методы механики разрушения" посвящено сравнительно молодому и динамично развивающемуся направлению современной механики деформируемого твердого тела – механике разрушения.

В настоящее время имеются первоклассные руководства по теории трещин и по механике разрушения в целом, раскрывающие суть идей и гипотез, на основе которых строится современная теория разрушения. Стали классическими и хорошо зарекомендовали себя монографии и руководства по механике трещин и по механике разрушения Г.П. Черепанова [41], Л.М. Качанова [13], Л.И. Слепяна [35], В.З. Партон и Е.М. Морозова [26], [27], Н.Ф. Морозова [19], Дж. Ф. Нотта [25], К. Хеллана [40], семитомное издание "Разрушение" под редакцией Г. Либовица. В последние десять лет появились исследования, посвященные специальным разделам механики разрушения – физически и геометрически нелинейной механике трещин [43], механике динамического распространения трещин [64], механике разрушения композиционных материалов [9], пространственным задачам механики разрушения [44], экспериментальным [1] и асимптотическим [87] методам механики разрушения, нелинейным задачам механики разрушения [16], моделям и критериям механики разрушения [18], вопросам вязкого разрушения [83]. Однако, в силу своего быстрого развития, механика разрушения постоянно обогащается как новыми теоретическими подходами и результатами, так и новыми методами решения краевых задач. Существующие руководства и учебники по механике разрушения просто не могут охватить весь спектр рассматриваемых в теории разрушения проблем и краевых задач, исследуемых в последнее время. Настоящее учебное пособие не ставит своей целью систематическое изложение классических для теории трещин вопросов, но пытается акцентировать внимание читателя на тех классических задачах механики трещин, имеющих принципиальное значение для понимания круга изучаемых проблем, и содержит решения ряда совершенно новых задач, обсуждение которых просто отсутствует в современной учебной литературе по механике разрушения.

Так, в настоящем учебном пособии приводятся решения классических простейших задач о напряженном состоянии упругого тела с угловым разрезом, данное Эйфантисом и Герберичем (1978 г.). Несмотря на то, что данные решения могут быть получены другими способами и являются классическими результатами линейной механики разрушения, предлагаемое решение основано на методе конформных отображений и

несомненно является интересным.

В настоящем пособии приводится давно ставшее уже классическим решение Дж. Райса о трещине антиплоского сдвига, полученное с помощью годографа. В продолжение решения Райса приводится исследование высших приближений в асимптотическом решении задачи о неподвижной трещине (или остром вырезе) антиплоского сдвига в материале, упрочняющемся по степенному закону. Данное решение позволяет найти собственные значения и собственные функции для любого порядка в разложениях компонент тензора напряжений и деформаций аналитически для любого значения показателя упрочнения материала. Исследование собственных значений задачи о трещине антиплоского сдвига относится к девяностым годам и не нашло еще своего отражения в современной русскоязычной литературе по механике разрушения.

Вопросам, связанным с нахождением собственных чисел в задачах механики разрушения, отведен дополнительный раздел, где приводится решение Анхеузера и Гросса (1994 г.). Подход, развитый авторами, позволяет аналитически определить зависимость собственного числа от показателя упрочнения (рассматривается степенной закон упрочнения в качестве определяющих соотношений задачи), если известно собственное число соответствующей линейной задачи, что дает многообещающий метод определения собственных чисел не только для проблем антиплоского сдвига, но и для более сложных с математической точки зрения задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига.

Наряду с исследованиями собственных чисел в задачах на собственные значения, к которым приводят проблемы механики разрушения, в учебном пособии рассматриваются отдельные результаты, относящиеся к классу так называемых связанных задач, а именно задач об установившемся росте трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью. Отличительной особенностью данного класса задач является то обстоятельство, что в них осуществлена попытка учесть влияние вклада скоростей упругих деформаций в общее поле скоростей деформаций (учитывались как скорости деформаций ползучести, так и скорости упругих деформаций). Показано, что скоростями упругих деформаций пренебрегать нельзя по сравнению со скоростями деформаций ползучести (тогда как в большинстве случаев априори скорости упругих деформаций не учитывают).

Таким образом, настоящее учебное пособие содержит ряд задач, не нашедших своего отражения в современной учебной литературе по механике разрушения, и может быть полезным для студентов, обучающихся по специальностям "механика" и "прикладная математика".

I. Об одной форме точных решений для трещины в линейно упругом материале

Исследование распределения напряжений и деформаций вблизи края поверхности разрыва в линейно упругом теле было начато Вестергардом [108], [109], Снеддоном [100], [101], Снеддоном и Эллиотом [102] и было продолжено Баренблаттом Г.И. [5], [6], [7], Уильямсом [110] и Ирвином [75], [76], [77]. Классическое представление полей напряжений, деформаций и перемещений в непосредственной окрестности вершины трещины в линейно упругом материале, полученное с помощью метода комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили, приводится во многих блестящих монографиях и руководствах по теории упругости и механике трещин – монографиях Н.И. Мусхелишвили [20], Г.П. Черепанова [41], Л.М. Качанова [13], М.Я. Леонова [17], В.З. Партона, Е.М. Морозова [27], Дж. Нотта [25], М.П. Саврука [33], учебниках и курсах лекций Л.И. Седова [34], Ю.Н. Работнова [29], В.М. Пестрикова и Е.М. Морозова [28].

В настоящем разделе приводится сравнительно новое решение Эйфанта и Герберича – решение, найденное посредством конформных отображений.

1. Постановка задачи.

Трещина антиплоского сдвига

Рассмотрим полубесконечную область с трещиной длины a , как показано на рис. 1. На бесконечности рассматриваемая область находится под действием равномерно распределенных усилий $\tau_{xz} = \tau_{\infty}$, $\tau_{yz} = 0$. Если бы в рассматриваемой полуплоскости отсутствовала бы трещина, было бы реализовано состояние однородного сдвига

$$\tau_{xz} = \tau_{\infty}, \quad \tau_{yz} = 0, \quad u_z = \tau_{\infty}x/G.$$

Под действием приложенной нагрузки в силу наличия трещины в пластине реализуется напряженное состояние, описываемое тензором напряжений с компонентами

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_x(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_y(x, y). \quad (\text{I. 1.1})$$

Компоненты вектора перемещения и тензора деформаций определя-

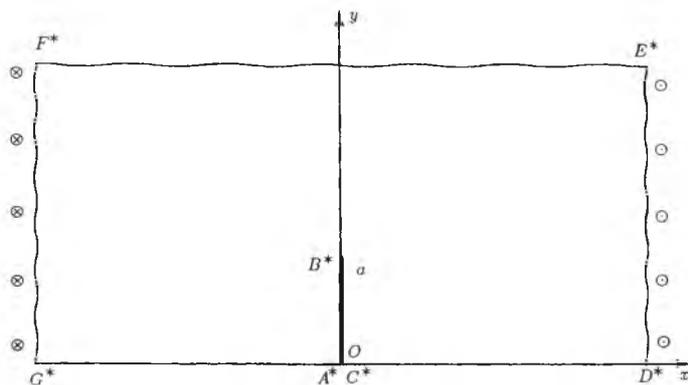


Рис. 1. Полуплоскость, содержащая разрез длины a , нагруженная касательными напряжениями τ_{xz}

ются равенствами

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = w(x, y), \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = 0, \quad (\text{I. 1.2})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{I. 1.3})$$

Уравнение равновесия будет тождественно выполнено, если ввести в рассмотрение функцию $\Phi(x, y)$ такую, что

$$\tau_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (\text{I. 1.4})$$

По закону Гука соответствующие компоненты тензора напряжений и деформаций будут связаны линейными соотношениями и, используя выше приведенные формулы, можно найти

$$\tau_x = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_y = G \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (\text{I. 1.5})$$

Таким образом, из уравнения равновесия следует, что единственная

отличная от нуля компонента вектора перемещения w является гармонической функцией

$$\Delta w = 0. \quad (\text{I. 1.6})$$

При построении решения будем пользоваться методами теории функций комплексного переменного. Введем сопряженную гармоническую функцию w^* и перейдем к комплексному потенциалу

$$\Omega(z) = w + iw^*, \quad z = x + iy, \quad (\text{I. 1.7})$$

вещественной частью которого будет смещение $w(x, y)$, т.е.

$$w = \frac{1}{G} \text{Re} [\Omega(z)]. \quad (\text{I. 1.8})$$

С помощью формул (I. 1.5) и соотношений Коши-Римана можно найти, что

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + i \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \tau_x - i\tau_y. \quad (\text{I. 1.9})$$

Граничные условия задачи формулируются следующим образом: в бесконечно удаленной точке

$$\tau_x = \tau_\infty, \quad \tau_y = 0,$$

на $G^*A^*B^*C^*D^*$

$$\sigma_{ij}n_j = 0, \quad (\text{I. 1.10})$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения. В терминах функции $\Omega(z)$ эти граничные условия принимают вид

$$\Omega'(z) = \frac{d\Omega}{dz} = \tau_\infty \quad \text{на} \quad D^*E^*F^*G^*, \quad (\text{I. 1.11})$$

$$\text{Im}\Omega = 0 \quad \text{на} \quad G^*A^*B^*C^*D^*. \quad (\text{I. 1.12})$$

2. Конформное отображение

Для построения решения¹ будем использовать технику конформных отображений, отображая последовательно полуплоскость с вертикальным разрезом длины a на полуплоскость с горизонтальным разрезом

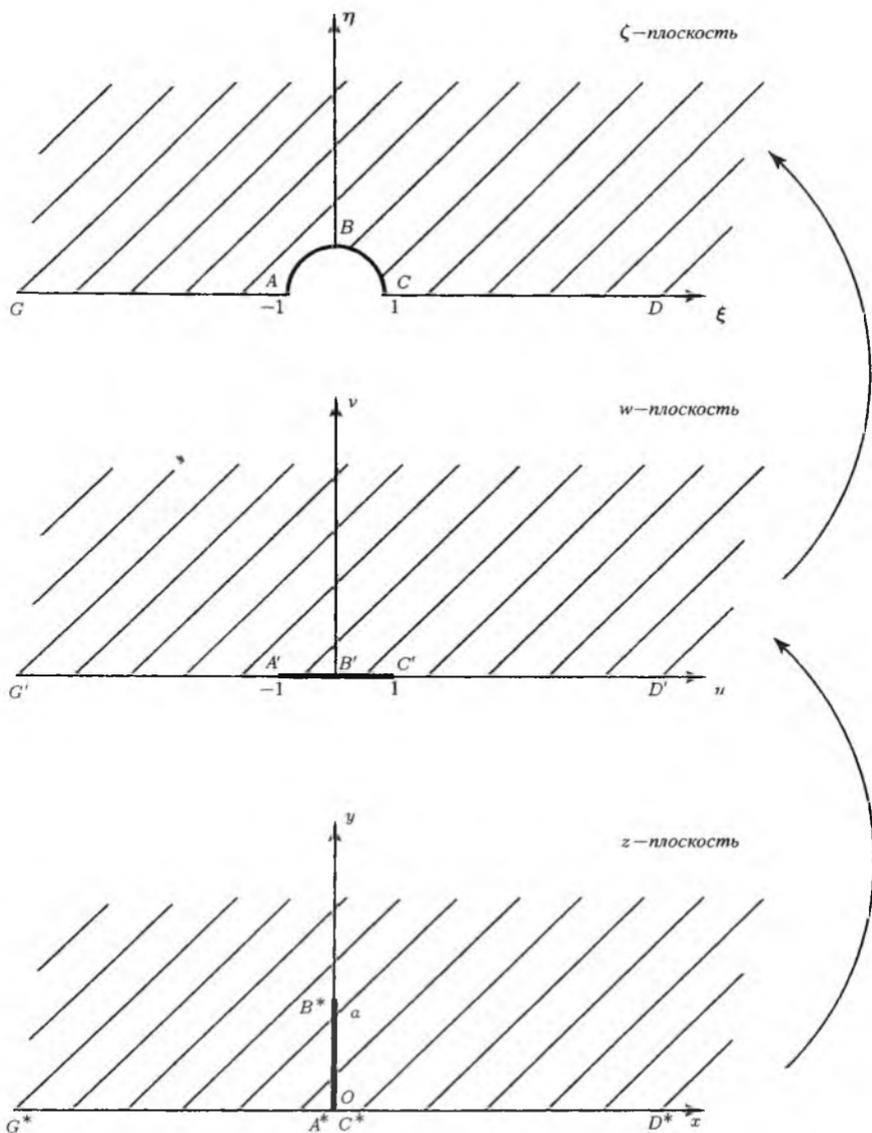


Рис. 2. Последовательное отображение полуплоскости, содержащей вертикальный разрез длины a , на верхнюю полуплоскость с горизонтальным разрезом $[-1, 1]$ и отображение полученной полуплоскости на верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом единичного радиуса

$[-1, 1]$ (рис. 2), а затем полученную область на верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом единичного радиуса.

Отобразим верхнюю полуплоскость плоскости z на верхнюю полуплоскость так, чтобы разрез $0 < z < ai$ был отображен на дугу единичной окружности. Для этого сначала отобразим верхнюю полуплоскость плоскости ζ с единичной полуокружностью на верхнюю полуплоскость плоскости w , требуя, чтобы полуокружность отображалась на отрезок $-1 < w < 1$ как показано на рис. 2. Это отображение хорошо известно [15] и задается формулой

$$w = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (I. 2.1)$$

Затем отобразим верхнюю полуплоскость плоскости w на верхнюю полуплоскость плоскости z с вертикальным разрезом. При этом можно заметить, что исследуемая область $G^*A^*B^*C^*D^*$ может быть рассмотрена как внутренность вырожденного многоугольника с вершинами

$$A_1 = G^* = D^*, \quad A_2 = A^*, \quad A_3 = B^*, \quad A_4 = C^*$$

с соответствующими внутренними углами

$$\alpha_1 = -\pi, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = 2\pi, \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Используя интеграл Шварца – Кристоффеля, можно отобразить внутренность многоугольника $A_1A_2A_3A_4$ на верхнюю полуплоскость плоскости w , причем вершины указанного многоугольника отображаются на точки u_j действительной оси плоскости w .

Указанное отображение задается формулой

$$z = f(w) = A \int \prod_{j=2}^{j=4} (w - u_j)^{\alpha_j/\pi-1} dw + B. \quad (I. 2.2)$$

Выберем

$$u_1 = -\infty, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 1.$$

Интеграл Шварца – Кристоффеля (I. 2.2) в этом случае редуцируется к форме

$$z = A\sqrt{w^2 - 1} + B. \quad (I. 2.3)$$

¹Впервые это решение методом конформных отображений получено в [45].

Постоянные A и B легко определяются из условий

$$ai = f(0), \quad 0 = f(\pm 1).$$

В результате уравнение (I. 2.3) приобретает вид

$$z = a\sqrt{w^2 - 1}. \quad (\text{I. 2.4})$$

Комбинация уравнений (I. 2.1) и (I. 2.4) приводит к функции, отображающей верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом единичного радиуса, на верхнюю полуплоскость с вертикальным разрезом длины a . Разрешая это уравнение относительно ζ , можно получить искомое отображение:

$$\zeta = \frac{1}{a} \left(z \pm \sqrt{z^2 + a^2} \right). \quad (\text{I. 2.5})$$

Требую, чтобы бесконечно удаленная точка плоскости z отображалась в бесконечно удаленную точку плоскости ζ , можно выбрать знак плюс в последнем выражении и искомое отображение представляется в окончательном виде:

$$\zeta = \frac{1}{a} \left(z + \sqrt{z^2 + a^2} \right). \quad (\text{I. 2.6})$$

3. Решение в плоскости ζ

В верхней полуплоскости плоскости ζ с вырезанным полукругом единичного радиуса задача сводится к отысканию комплексного потенциала $\chi(\zeta)$, удовлетворяющего следующим граничным условиям на плоскости ζ :

$$\text{Im}\chi(\zeta) = 0 \quad \text{на} \quad GABCD, \quad (\text{I. 3.1})$$

$$\chi'(\zeta) = \frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{d\Omega}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \tau_{\infty} \frac{a}{2} \quad \text{в бесконечно удаленной точке.}$$

Легко проверяется, что функция, удовлетворяющая всем перечисленным условиям, имеет вид

$$\chi(\zeta) = \frac{\tau_{\infty} a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (\text{I. 3.2})$$

4. Решение в плоскости z

Используя (I. 2.6) и (I. 3.2), комплексный потенциал $\Omega(z)$ представим в виде:

$$\Omega(z) = \tau_{\infty} \sqrt{z^2 + a^2}. \quad (\text{I. 4.1})$$

Следовательно, распределение напряжений определяется выражением

$$\tau_x - i\tau_y = \Omega'(z) = \tau_{\infty} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (\text{I. 4.2})$$

Найденное распределение напряжений полностью совпадает с ранее полученными решениями этой задачи [108], [20].

Разделяя действительную и мнимую части данного выражения, можно найти компоненты тензора напряжений ($x > 0, y > 0$):

$$\tau_x = \frac{1}{\sqrt{2C}} \tau_{\infty} \left\{ x \sqrt{x^2 - y^2 + a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} + y \sqrt{-(x^2 - y^2 + a^2) + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right\}, \quad (\text{I. 4.3})$$

$$\tau_y = -\frac{1}{\sqrt{2C}} \tau_{\infty} \left\{ y \sqrt{x^2 - y^2 + a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} - x \sqrt{-(x^2 - y^2 + a^2) + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}} \right\},$$

где

$$C = (x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2.$$

Графики компонент тензора напряжений τ_x и τ_y как функций от декартовых координат x, y показаны на рис. 3 и 4.

Легко можно проверить, что полученное решение удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \tau_y &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0; & \tau_y &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \\ \tau_x &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq y < a, x = 0; & \tau_x &\rightarrow \tau_{\infty} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

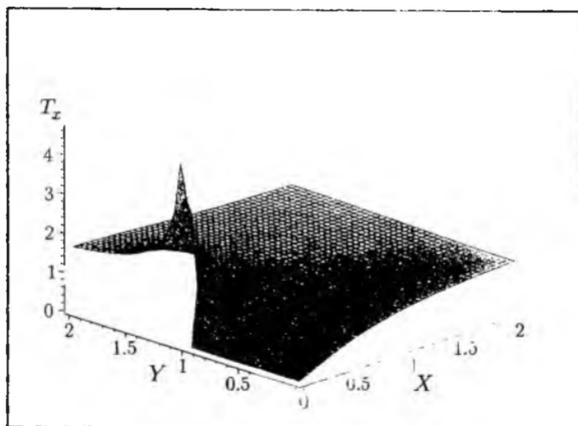


Рис. 3. Компонента тензора напряжений $T_x = T_x(X, Y)$, где $T_x = \tau_x/\tau_\infty$, $X = x/a$, $Y = y/a$

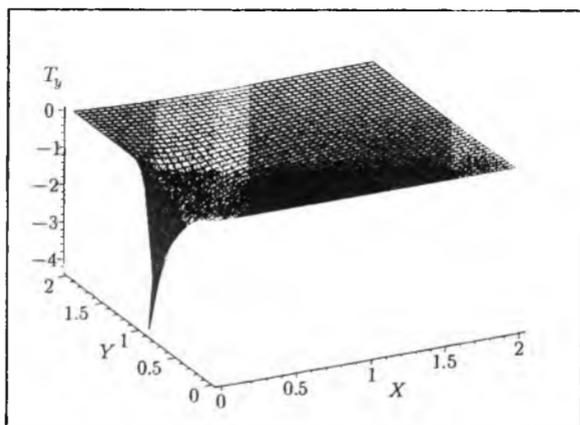


Рис. 4. Компонента тензора напряжений $T_y = T_y(X, Y)$, где $T_y = \tau_y/\tau_\infty$, $X = x/a$, $Y = y/a$

Таким образом, граничные условия задачи выполняются, также как и условия симметрии:

$$\tau_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, y > a. \quad (\text{I. 4.4})$$

Вблизи вершины трещины справедливо

$$\begin{aligned} \tau_x &\rightarrow \infty \quad \text{при} \quad x^2 + (y - a)^2 \rightarrow 0, \\ \tau_y &\rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad x^2 + (y - a)^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{I. 4.5})$$

Заметим, что формулы (I. 4.3) остаются справедливыми и для бесконечной области, содержащей центральную трещину длины $2a$.

Единственная отличная от нуля компонента вектора перемещения w легко находится и определяется выражением

$$w = \frac{1}{G} \text{Re} \left[\tau_\infty \sqrt{z^2 + a^2} \right] \quad (\text{I. 4.6})$$

или

$$w = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{2}G} \sqrt{x^2 - y^2 + a^2 + \sqrt{(x^2 - y^2 + a^2)^2 + 4x^2y^2}}. \quad (\text{I. 4.7})$$

Формула (I. 4.7) остается справедливой и в случае антиплоского сдвига бесконечной области с центральной трещиной длины $2a$.

5. Трещины типа I и II

Аналогичным образом можно получить распределение напряжений для трещин нормального отрыва (трещины типа I) и поперечного сдвига (трещины типа II).

Для трещины нормального отрыва можно получить²

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{X\sqrt{A+B} + Y\sqrt{-A+B}}{B} - Y \frac{\sqrt{-A+B}(2A+B)}{B^3}, \\ T_{yy} &= \frac{X\sqrt{A+B} - Y\sqrt{-A+B}}{B} + Y \frac{\sqrt{-A+B}(2A+B)}{B^3}, \quad (\text{I. 5.1}) \\ T_{xy} &= Y \frac{\sqrt{A+B}(2A-B)}{B^3}, \end{aligned}$$

для трещины поперечного сдвига справедливо

²Здесь трещины расположены вдоль оси Ox в отличие от задачи об антиплоском сдвиге.

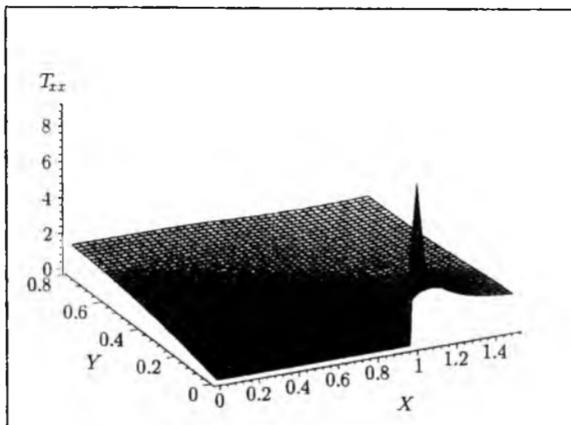


Рис. 5. Компонента тензора напряжений $T_{xx} = T_{xx}(X, Y)$ для трещины нормального отрыва

$$\begin{aligned}
 T_{xx} &= 2 \frac{Y\sqrt{A+B} - X\sqrt{-A+B}}{B} - Y \frac{\sqrt{A+B}(2A-B)}{B^3}, \\
 T_{yy} &= -Y \frac{\sqrt{-A+B}(2A+B)}{B^3}, \\
 T_{xy} &= \frac{X\sqrt{A+B} + Y\sqrt{-A+B}}{B} - Y \frac{\sqrt{-A+B}(2A+B)}{B^3},
 \end{aligned} \tag{I. 5.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{xx} &= \sigma_{xx} \sqrt{2} / \sigma_{\infty}, & T_{yy} &= \sigma_{yy} \sqrt{2} / \sigma_{\infty}, & T_{xy} &= \sigma_{xy} \sqrt{2} / \sigma_{\infty}, \\
 X &= x/a, & Y &= y/a, \\
 A &= X^2 - Y^2 - 1, & B &= \sqrt{(X^2 - Y^2 - 1)^2 + 4X^2Y^2}.
 \end{aligned}$$

6. Упругопластическая граница

Исследование упругопластического состояния для антиплоской деформации тела с разрезом привлекало и привлекает многих исследователей [22], [94]. При построении решения обычно используется метод годографа, который позволяет отобразить неизвестную упругопластическую границу на дугу единичной окружности в случае антиплоской деформации. Однако в случае трещин нормального отрыва и поперечного сдвига

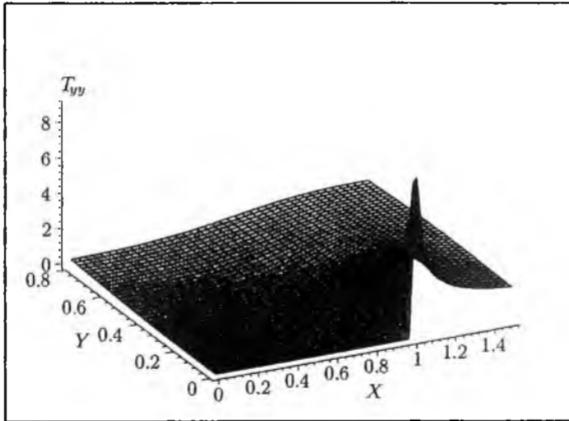


Рис. 6. Компонента тензора напряжений $T_{yy} = T_{yy}(X, Y)$ для трещины нормального отрыва

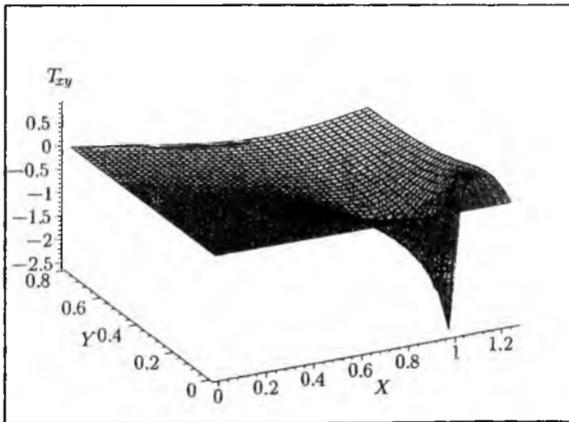


Рис. 7. Компонента тензора напряжений $T_{xy} = T_{xy}(X, Y)$ для трещины нормального отрыва

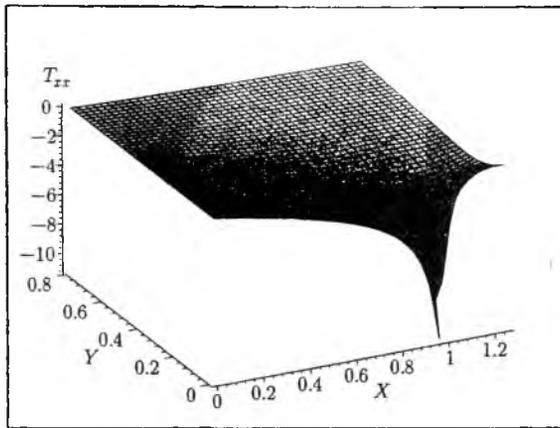


Рис. 8. Компонента тензора напряжений $T_{xx} = T_{xx}(X, Y)$ для трещины поперечного сдвига

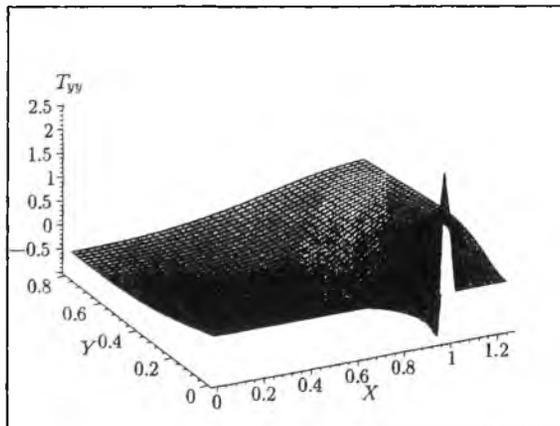


Рис. 9. Компонента тензора напряжений $T_{yy} = T_{yy}(X, Y)$ для трещины поперечного сдвига

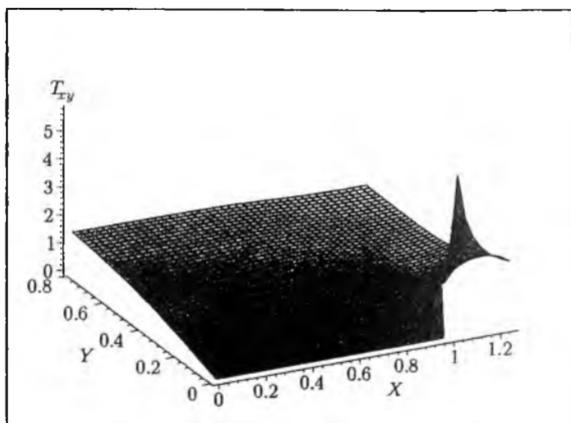


Рис. 10. Компонента тензора напряжений $T_{xy} = T_{xy}(X, Y)$ для трещины поперечного сдвига

такого рода аналитических решений получить не удалось, поэтому часто оценить геометрию области пластического течения в окрестности вершин трещин этого типа можно только приближенно, предполагая, что размеры зоны пластического течения малы по сравнению с характерными линейными размерами, фигурирующими в задаче (длина трещины, характерный линейный размер образца). Принимая данную гипотезу о маломасштабном пластическом течении, можно считать, что конфигурация области пластического течения определяется сингулярным решением линейной теории упругости (первым членом асимптотического разложения компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины). Для трещины антиплоского сдвига упомянутый подход приводит к границам области пластического течения, представляющим собой концентрические окружности с центром в вершине трещины, что, вообще говоря, не соответствует действительности (не соответствует экспериментальным данным и аналитическим результатам, полученным с помощью метода годографа).

В рамках настоящего подхода можно оценить геометрию области пластического течения на основе построенного точного решения задачи (т.о., можно срастить на упругопластической границе не приближенное решение линейной теории упругости, а точное решение с решением в области пластического течения).

Так для антиплоской деформаций условие пластичности Треска и

условие пластичности Мизеса приводят к одному и тому же требованию

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = k^2, \quad (\text{I. 6.1})$$

где k – предел текучести материала.

Подставляя полученные выражения для компонент тензора напряжений (I. 4.3) в упругой области в условие пластического течения (I. 6.1), получаем выражение для границы зоны пластического течения

$$X^2 + Y^2 = \alpha \sqrt{(X^2 - Y^2 + 1)^2 + 4X^2Y^2} \quad (\text{I. 6.2})$$

или в полярных координатах

$$R^2 + 2R \cos \theta + 1 = \alpha \sqrt{R^4 + 4R^2 + 4R^3 \cos \theta}. \quad (\text{I. 6.3})$$

Граница области пластического течения, построенная на основе соотношения (I. 6.2) для различных значений константы $\alpha = \tau_{\infty}/k$, показана на рис. 11.

Аналогичный способ приближенной оценки геометрии области пластического течения применим и для более сложных, с математической точки зрения, и более важных, с практической точки зрения, задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига.

Для задачи о трещине нормального отрыва в предположении реализации плоского деформированного состояния условие пластического течения имеет вид

$$\frac{3}{4} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right] = k^2 \quad (\text{I. 6.4})$$

Подстановка выражений (I. 5.1) в равенство (I. 6.4) приводит к следующему уравнению границы для области пластического течения

$$\sqrt{3}Y = \alpha B^{3/2} \quad (\text{I. 6.5})$$

Упругопластическая граница, полученная в соответствии с точным решением линейной задачи для различных значений постоянной a , изображена на рис. 12.

В случае задачи о трещине нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния условие текучести Мизеса принимает форму

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = 3k^2, \quad (\text{I. 6.6})$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

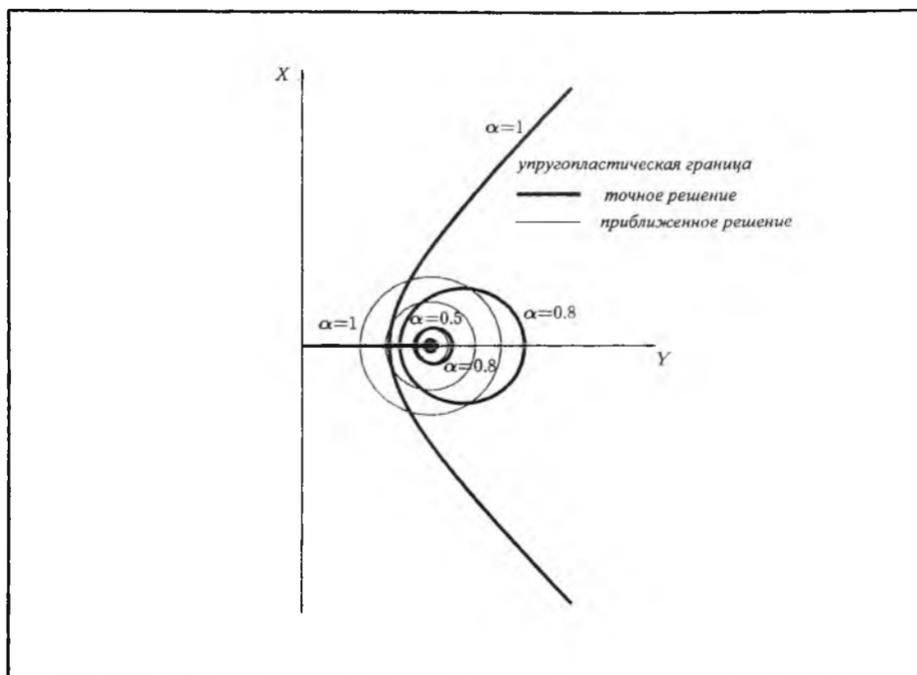


Рис. 11. Уругопластическая граница, построенная в соответствии с точным и приближенным решениями задачи для линейно упругого материала. Цифры представляют собой отношение $\alpha = \tau_{\infty}/k$, где k - предел текучести материала

Аналогично, подставляя решение (I. 5.1) в равенство (I. 6.6), можно получить уругопластическую границу:

$$\sqrt{\left(X\sqrt{A+B} + Y\sqrt{-A+B}\right)^2 + 6Y^2/B} = \sqrt{6}\alpha B, \quad (I. 6.7)$$

где $\alpha = \sigma_{\infty}/k$. Уругопластическая граница, полученная в соответствии с точным решением линейной задачи для различных значений постоянной α , изображена на рис. 13.

Для трещины поперечного сдвига в рамках предположения о реализации плоского деформированного состояния уругопластическая граница определяется равенством:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{B(X^2 + Y^2) - 2\frac{A}{B}Y^2 + \frac{Y^2}{B} - \frac{2XY\sqrt{B^2 - A^2}}{B}} = \alpha B, \quad (I. 6.8)$$

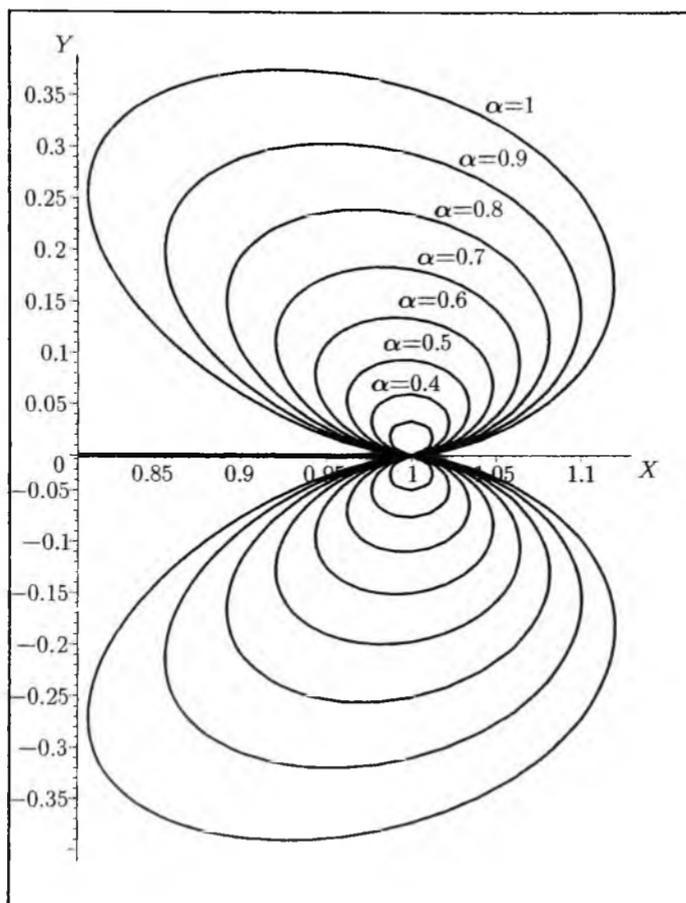


Рис. 12. Упругопластическая граница, построенная в соответствии с точным решением задачи о трещине нормального отрыва (плоское деформированное состояние) для линейно упругого материала. Цифры представляют собой отношение $\alpha = \sigma_{\infty}/k$, где k – предел текучести материала

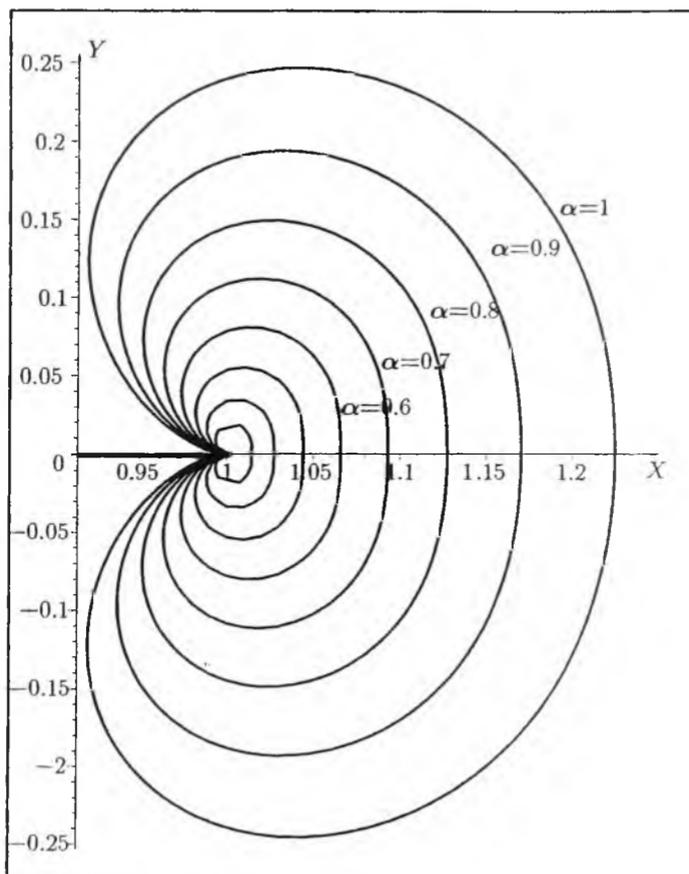


Рис. 13. Упругопластическая граница, построенная в соответствии с точным решением задачи о трещине нормального отрыва (плоское напряженное состояние) для линейно упругого материала. Цифры представляют собой отношения $\alpha = \sigma_\infty/k$, где k – предел текучести материала

где $\alpha = \sigma_\infty/k$. Упругопластическая граница для рассматриваемого случая представлена на рис. 14.

Упругопластическая граница в задаче об угловой трещине длины a , находящейся в условиях поперечного сдвига, в рамках предположения о реализации плоского деформированного состояния определяется выражением

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{7(x^2 + y^2)}{B} + \frac{-2xy\sqrt{B^2 - A^2} - Ax^2 - 2yx - 2y^2 + Ay^2}{B^2} + \\ & + \frac{-2Ayx + 2y^2\sqrt{B^2 - A^2} - 10xy\sqrt{B^2 - A^2} + 5y^2 - 10Ay^2}{B^3} + \\ & + \frac{4A^2y^2 + 4A^2yx + y^2\sqrt{B^2 - A^2} + 9Ay^2}{B^4} - \\ & - \frac{4Axy\sqrt{B^2 - A^2} - 4Ay^2\sqrt{B^2 - A^2}}{B^4} - \\ & - \frac{12A^2y^2 + 4A^2y^2\sqrt{B^2 - A^2}}{B^6} \end{aligned} \right\}^{1/2} = \sqrt{3}\alpha \quad (I. 6.9)$$

и приведена на рис. 15 для различных значений константы α .

7. Задачи

1. Докажите справедливость распределений компонент тензора напряжений в задачах о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига (I. 5.1) и (I. 5.2).

2. Сравните конфигурации областей пластического течения, полученные с помощью особого упругого решения и точного решения, приведенного в данном разделе, для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига.

3. Докажите справедливость уравнений (I. 6.6), (I. 6.7), (I. 6.8) и (I. 6.9).

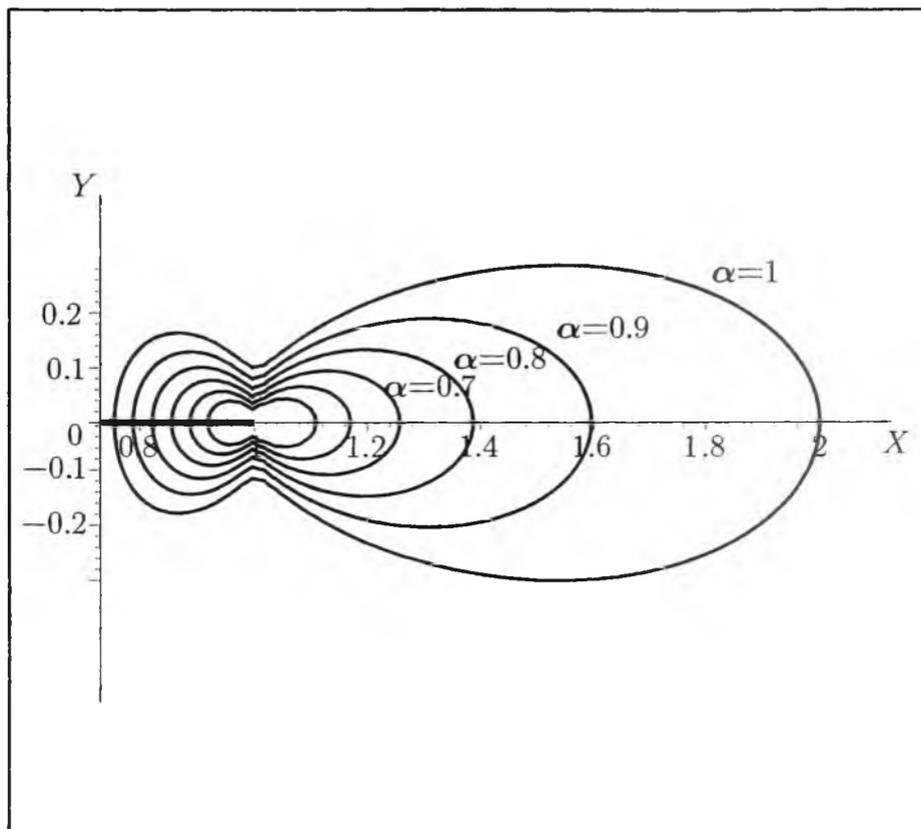


Рис. 14. Уругопластическая граница, построенная в соответствии с точным решением задачи о трещине поперечного сдвига (плоское деформированное состояние) для упругого материала. Цифры представляют собой отношение $\alpha = \sigma_{\infty}/k$, где k – предел текучести материала при чистом сдвиге

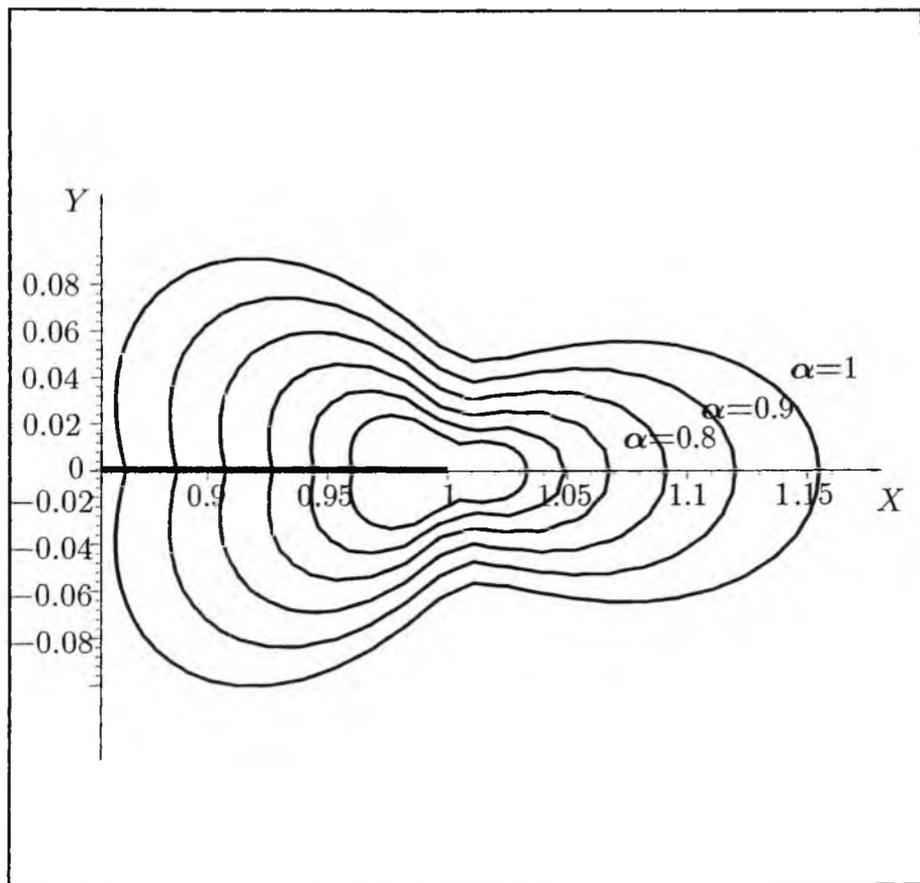


Рис. 15. Уругопластическая граница, построенная в соответствии с точным решением задачи о трещине поперечного сдвига (плоское напряженное состояние) для упругого материала. Цифры представляют собой отношение $\alpha = \sigma_{\infty}/k$, где k - предел текучести материала

II. Решение Уильямса

Концентрация напряжений в окрестности вершины трещины может быть оценена с помощью различных методов. Один из наиболее интересных методов заключается в построении асимптотического разложения в окрестности вершины трещины. Классическое решение, использующее данный подход, – решение Уильямса [110] для бесконечной линейно упругой пластины, содержащей полубесконечную трещину³.

Метод разложения по собственным функциям позволяет выписать асимптотические поля как сингулярные, так и регулярные с помощью функций, зависящих только от нескольких параметров. Эти поля являются "автономными", иначе говоря, распределения напряжений, деформаций и перемещений не зависят от геометрии образца. Интенсивность этих полей может быть связана с реальными граничными условиями посредством разумно выбранных параметров. Во многих случаях достаточно главного члена асимптотического разложения для того, чтобы охарактеризовать поля в окрестности вершины трещины. Когда одного слагаемого не достаточно, можно удержать в решении следующие за главным члены асимптотического разложения.

В целом, в механике разрушения метод разложения по собственным функциям является одним из основных методов исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины.

1. Определение механических полей в окрестности вершины трещины по Уильямсу

Приведем кратко решение Уильямса для полубесконечной трещины в бесконечной линейно упругой пластине. Решение строится с помощью введения функции напряжения Эри и в дальнейшем отыскании асимптотического разложения для этой функции.

В двумерном случае компоненты тензора напряжений могут быть представлены с помощью функции Эри (в этом случае уравнения рав-

³Следует отметить, что решение Уильямса, основанное на построении асимптотического разложения компонент тензора напряжений вблизи острого выреза или трещины, стало первым решением, использующим метод асимптотических разложений или теорию возмущений в механике трещин. Сейчас этот метод широко применяется при решении краевых задач и является одним из самых продуктивных подходов, особенно в нелинейной механике разрушения. Можно отметить работы, посвященные исключительно возможностям данного подхода в механике разрушения [59], [60], [61], [87], [111].

новесия тождественно выполняются)

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta}. \quad (\text{II. 1.1})$$

В линейной теории упругости функция напряжений Эри должна удовлетворять бигармоническому уравнению $\Delta \Delta \Phi$, которое в полярных координатах представляется в форме

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi = 0. \quad (\text{II. 1.2})$$

При исследовании аналогичных задач для более сложных сред (пластических, вязкопластических) можно также использовать данный подход, но функция напряжений Эри будет удовлетворять более сложному уравнению. Предположим теперь, что функция напряжений Эри $\Phi(r, \theta)$ представима в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от r , другая – только от полярного угла θ , причем функция, зависящая от r , имеет степенной характер зависимости от r :

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} r^{\lambda_i+1} F_i(\theta), \quad (\text{II. 1.3})$$

где λ_i – собственные значения, подлежащие определению; $F_i(\theta)$ – непрерывные и дифференцируемые функции θ . Ограничимся одним слагаемым в асимптотическом разложении (II. 1.3) (опуская индекс i) и подставим (II. 1.3) в (II. 1.1). Тогда поле напряжений представляется в форме

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1} \left[\frac{d^2 F}{d\theta^2} + (\lambda + 1)F \right], \quad \sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} \lambda(\lambda + 1)F, \quad \sigma_{r\theta} = -r^{\lambda} \lambda \frac{dF}{d\theta}. \quad (\text{II. 1.4})$$

Подстановка выражений (II. 1.4) в бигармоническое уравнение относительно функции $F(r, \theta)$ (II. 1.2) позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 F}{d\theta^4} + [(\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2] \frac{d^2 F}{d\theta^2} + (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 F = 0. \quad (\text{II. 1.5})$$

Решение линейного дифференциального уравнения (II. 1.5) имеет вид

$$F(\theta) = A \sin \alpha \theta + B \cos \alpha \theta + C \sin \beta \theta + D \cos \beta \theta, \quad (\text{II. 1.6})$$

где A, B, C, D – константы, определяемые из граничных условий, $\alpha = \lambda + 1$, $\beta = \lambda - 1$. Берега трещины должны быть свободны от поверхностных усилий, следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \pm\pi) = \sigma_{r\theta}(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (\text{II. 1.7})$$

Согласно (II. 1.4) $\lambda = 0$ является собственным значением, удовлетворяющим условиям (II. 1.7). Для нахождения других собственных значений подставим (II. 1.4) в (II. 1.7), учитывая (II. 1.6), что приводит к следующей системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha\pi & \cos \alpha\pi & \sin \beta\pi & \cos \beta\pi \\ -\sin \alpha\pi & \cos \alpha\pi & -\sin \beta\pi & \cos \beta\pi \\ \alpha \cos \alpha\pi & -\alpha \sin \alpha\pi & \beta \cos \beta\pi & -\beta \sin \beta\pi \\ \alpha \cos \alpha\pi & \alpha \sin \alpha\pi & \beta \cos \beta\pi & \beta \sin \beta\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0.$$

Для получения нетривиального решения определитель матрицы этой системы линейных алгебраических уравнений должен обращаться в нуль. После ряда простых преобразований легко получить $\lambda = n/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Полагая $n = 1$ и, следовательно, $\lambda = 1/2$, можно найти в соответствии с (II. 1.4) и (II. 1.6) хорошо известное в линейной механике разрушения сингулярное поле напряжений в окрестности вершины трещины

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \left(5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \left(3 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{II. 1.8})$$

где K_I и K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва и поперечного сдвига, зависящие от приложенной нагрузки и от геометрии образца. Для других собственных чисел можно аналогичным способом получить выражения для компонент тензора напряжений, которые также будут зависеть от двух констант.

Поле перемещений определяется следующим образом: находится поле деформаций в соответствии с полученным полем напряжений по закону Гука; затем, путем интегрирования найденных соотношений, выводится

соответствующее поле перемещений:

$$u_r = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[-\cos \frac{3\theta}{2} + (2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} \right] +$$

$$+ \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[3 \sin \frac{3\theta}{2} - (2\chi - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right],$$

(II. 1.9)

$$u_\theta = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\sin \frac{3\theta}{2} - (2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] +$$

$$+ \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[3 \cos \frac{3\theta}{2} - (2\chi + 1) \cos \frac{\theta}{2} \right],$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$.

В случае плоского деформированного состояния в (II. 1.9) следует заменить E на $E/(1-\nu^2)$ и ν - на $\nu/(1-\nu)$.

Другие слагаемые в асимптотическом разложении, в особенности слагаемое, отвечающее $\lambda = 1$ и называемое "Т-напряжением" (T-stress), также оказывают влияние на механические поля в окрестности вершины трещины. Данная терминология была введена Райсом [97]. Описанию процесса разрушения с помощью двух параметров - коэффициента интенсивности напряжений и Т-напряжения посвящены многочисленные теоретические и экспериментальные исследования [51], [106]. Определение Т-напряжений в конструкциях, находящихся под действием различных систем нагрузок и имеющих дефекты, обсуждается в [56], [63], [67], [78], [103], [105].

В приведенном примере метод, используемый Уильямсом, позволяет представить механические поля в окрестности вершины трещины с помощью формул (II. 1.8) и (II. 1.9). Однако, могут возникнуть многочисленные вопросы, относящиеся к данному методу:

- возможность построения решения задачи зависит от существования функции напряжения Эри, с помощью которой строится поле напряжений. В некоторых случаях функция напряжений Эри не существует или математические операции становятся настолько громоздкими, что подход Уильямса, изложенный выше, не может быть применен;

- в настоящее время определение констант K_I и K_{II} является предметом широкого обсуждения и многочисленных исследований. Существует очень немного техник отыскания коэффициентов высших приближений в асимптотических разложениях напряжений.

III. Гамильтонова система уравнений в механике разрушения

Для удобства будем называть метод, обсуждаемый в настоящей главе, "гамильтоновым формализмом в механике разрушения"⁴ Речь идет об определении с помощью нового метода асимптотических полей перемещений, деформаций и напряжений в окрестности вершины трещины. Данный метод опирается на использовании гамильтонова подхода аналитической механики.

В настоящем разделе вводится гамильтонова система уравнений в асимптотический анализ полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины на простом примере решения Уильямса, представленного в предыдущем разделе. Ключевая идея данного метода заключается в соответствующем выборе координаты для представления координаты z , используемой в вариационных принципах и вводимой далее в гамильтонову систему.

Для выбранного примера будем использовать полярную систему координат. После замены переменной $\xi = \ln r$, $r = e^\xi$ полярные координаты (r, θ) трансформируются в координаты (ξ, θ) . Для введения гамильтоновой системы уравнений можно выбрать как координату ξ , так и координату θ в качестве координаты z . Данный выбор зависит от природы задачи, граничных условий и даже от простоты преобразования исходных уравнений. В последующих параграфах мы исследуем задачу с помощью каждой из координат: сначала в качестве координаты z выберем координату ξ , а затем координату θ .

1. Фундаментальные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах

В механике разрушения асимптотическое решение задачи часто разыскивается в цилиндрической системе координат r, θ, z , введенной таким образом, чтобы фронт трещины располагался вдоль оси z . При исследовании двумерных задач вводят в рассмотрение полярную систему координат. Приведем фундаментальные уравнения и некоторое вариационные принципы, сформулированные в полярной системе координат.

⁴Изложение данного раздела следует монографии Жиа Ли и Намана Решо "Асимптотические методы в механике разрушения" (Li, J. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture / J. Li, N. Recho. – Paris, Hermes Science Publications, 2002. – 262 p.)

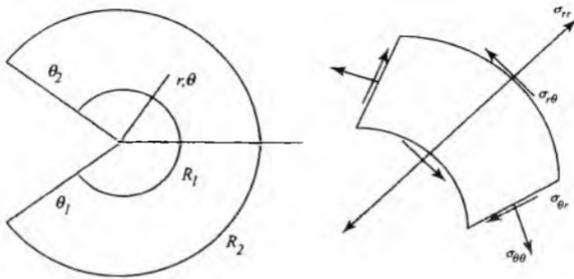


Рис. 16. Схема области и компоненты тензора напряжений

В полярной системе координат типичная область, в которой разыскивается решение, – сектор (рис. 16):

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad \Theta_1 \leq \theta \leq \Theta_2. \quad (\text{III. 1.1})$$

Когда имеется трещина, полюс полярной системы координат совпадают с вершиной трещины. Рассматриваемая область описывается следующим образом: $R_1 = 0$, $R_2 = +\infty$, $\Theta_1 = -\pi$, $\Theta_2 = \pi$.

Не учитывая динамических эффектов и пренебрегая массовыми силами, уравнения равновесия выделенного объема сплошной среды в двумерном случае можно представить как

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{III. 1.2})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0.$$

Компоненты вектора перемещений и тензора деформаций связаны соотношениями Коши

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{III. 1.3})$$

Закон Гука имеет вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}. \quad (\text{III. 1.4})$$

Комбинируя (III. 1.3) и (III. 1.4), можно исключить компоненты деформаций. Таким образом, получаем соотношения, связывающие перемещения и напряжения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}), \\ \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (\text{III. 1.5})$$

Принцип минимума полной потенциальной энергии в линейной теории упругости с учетом равенств (III. 1.3) и (III. 1.4) представляется как

$$\delta\Pi = \delta(U + U_e) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} U = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{4} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)^2 \right] r d\theta dr. \end{aligned} \quad (\text{III. 1.6})$$

Вариационный принцип Хелинджера – Рейсснера в линейной теории упругости записывается следующим образом

$$\delta\Omega = 0,$$

$$\begin{aligned} \Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \left[\sigma_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \sigma_{r\theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2E} (\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - 2\nu \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + 2(1+\nu) \sigma_{r\theta}^2) \right] r d\theta dr, \end{aligned} \quad (\text{III. 1.7})$$

где вариации величин u_r , u_θ , σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ рассматриваются как независимые друг от друга. В случае плоского деформированного состояния в приведенных уравнениях достаточно заменить E на $E/(1-\nu^2)$ и ν на $\nu/(1-\nu)$.

Введем теперь замену переменных следующим образом

$$\xi = \ln r, \quad r = e^\xi, \quad (\text{III. 1.8})$$

$$S_{rr} = r\sigma_{rr}, \quad S_{r\theta} = r\sigma_{r\theta}, \quad S_{\theta\theta} = r\sigma_{\theta\theta}. \quad (\text{III. 1.9})$$

После введения замены переменных уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial S_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} - S_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + S_{r\theta} = 0, \quad (\text{III. 1.10})$$

а зависимости между перемещениями и напряжениями представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} &= \frac{1}{E} (S_{rr} - \nu S_{\theta\theta}), \\ u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} (S_{\theta\theta} - \nu S_{rr}), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} S_{r\theta}. \end{aligned} \quad (\text{III. 1.11})$$

Принцип минимума полной потенциальной энергии становится следующим

$$\delta U = 0,$$

где

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2(1 - \nu^2)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} & \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial \xi} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1 - \nu}{4} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{III. 1.12})$$

Вариационный принцип Хейлинджера - Рейсснера формулируется как

$$\delta \Omega = 0,$$

где

$$\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + S_{\theta\theta} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + S_{r\theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2E} (S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2 - 2\nu S_{rr} S_{\theta\theta} + 2(1 + \nu) S_{r\theta}) \right] d\xi d\theta. \quad (\text{III. 1.13})$$

Как и в (III. 1.7) вариации переменных u_r , u_θ , S_{rr} , $S_{\theta\theta}$, $S_{r\theta}$ являются независимыми. Рассматриваемая область определяется неравенствами

$$-\infty \leq \xi \leq +\infty, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (\text{III. 1.14})$$

Можно отметить, что после замены переменных все слагаемые в уравнениях (III. 1.10) – (III. 1.13) являются постоянными, что существенно упрощает дальнейшие математические операции.

2. Преобразование на основе радиальной координаты ξ

В данном параграфе мы введем гамильтонову систему уравнений [87], выбирая радиальную координату ξ в качестве координаты z . Таким образом, в настоящем параграфе описывается метод, основанный на гамильтоновом формализме в механике разрушения. Этот метод может быть реализован с помощью по меньшей мере трех подходов, а именно:

- с помощью принципа минимума потенциальной энергии;
- с помощью вариационного принципа Хейлинджера – Рейсснера;
- с помощью фундаментальных дифференциальных уравнений.

Эти три подхода и будут продемонстрированы в порядке их перечисления.

Принцип минимума потенциальной энергии.

В этом случае выбираем сначала вектор обобщенных перемещений:

$$\mathbf{q} = \{u_r, u_\theta\}^T \quad (\text{III. 2.1})$$

Будем рассматривать в качестве введенной ранее координаты z радиальную координату ξ и введем обозначение $\partial/\partial\xi = (\cdot)$. Принцип минимума полной потенциальной энергии [87] приводит к уравнению Лагранжа в следующей форме

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (\text{III. 2.2})$$

Осуществим теперь преобразование Лежандра

$$\mathbf{p} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (\text{III. 2.3})$$

Тогда получим

$$\mathbf{p} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \nu \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} S_{rr} \\ S_{r\theta} \end{array} \right\}. \quad (\text{III. 2.4})$$

Равенства (III. 2.4) показывают, что \mathbf{p} представляет собой вектор, компонентами которого являются компоненты девиатора напряжений S_{rr} и $S_{r\theta}$. Можно переписать это уравнение следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{array} \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_r \\ u_\theta \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III. 2.5})$$

или

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}, \quad (\text{III. 2.6})$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\nu & -\nu \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial}{\partial \theta} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (\text{III. 2.7})$$

Подставляя уравнения (III. 2.3) в (III. 2.2) и выполняя интегрирование по частям, можно найти

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{C}\mathbf{p}, \quad (\text{III. 2.8})$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} E & E \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial}{\partial \theta}(E \cdot) & -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(E \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{III. 2.9})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \nu & -\frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial}{\partial \theta}(\nu \cdot) & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 2.10})$$

Уравнения (III. 2.6) и (III. 2.8) образуют систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Удобно сгруппировать дуальные переменные \mathbf{q} и \mathbf{p} , вводя в рассмотрение следующий вектор

$$\boldsymbol{\nu} = \{\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T\}^T. \quad (\text{III. 2.11})$$

Тогда дуальные уравнения (III. 2.6) и (III. 2.8) могут быть представлены с помощью одного уравнения, записанного в матричной форме

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\nu}, \quad (\text{III. 2.12})$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (\text{III. 2.13})$$

Это уравнение является основой метода гамильтонова подхода в механике разрушения. Необходимо отметить, что компонента тензора напряжений $S_{\theta\theta} = r\sigma_{\theta\theta}$ не фигурирует в списке дуальных переменных. Она может быть определена с помощью второго из уравнений (III. 1.11):

$$S_{\theta\theta} = \nu S_{rr} + E \left(u_r + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right). \quad (\text{III. 2.14})$$

Граничные условия на верхнем и нижнем берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \pi) = \sigma_{\theta\theta}(\theta = -\pi) = 0, \quad (\text{III. 2.15})$$

$$\sigma_{r\theta}(\theta = \pi) = \sigma_{r\theta}(\theta = -\pi) = 0.$$

Эти граничные условия могут быть сформулированы следующим образом:

$$S_{r\theta}(\theta = \pm\pi) = 0, \tag{III. 2.16}$$

$$\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu S_{rr}}{E} \right) (\theta = \pm\pi) = 0.$$

Таким образом, решение сформулированной задачи сводится к исследованию уравнения (III. 2.12) с граничными условиями (III. 2.16). Граничные условия в бесконечно удаленной точке $R \rightarrow \infty$ не принимаются во внимание в рамках данного асимптотического анализа.

Преобразование на основе использования вариационного принципа Хейлинджера – Рейсснера

Поскольку радиальная координата ξ принимается в качестве координаты z , компонента $S_{\theta\theta}$ должна быть исключена из системы уравнений. Исключим компоненту $S_{\theta\theta}$ из функционала (III. 1.13), фигурирующего в вариационном принципе Хейлинджера – Рейсснера

$$S_{\theta\theta} = \nu S_{rr} + E \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right). \tag{III. 2.17}$$

Подстановка (III. 2.17) в (III. 1.13) приводит к равенству

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= 0, \\ \Omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + S_{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + S_{rr} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \nu + \right. \\ &+ \frac{E}{2} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2E} \left((1 - \nu^2) S_{rr}^2 + 2(1 + \nu) S_{r\theta}^2 \right) + \\ &\left. + S_{r\theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right] d\xi d\theta. \end{aligned} \tag{III. 2.18}$$

Определим два вектора переменных

$$\mathbf{q} = \{u_r, u_\theta\}^T, \quad \mathbf{p} = \{S_{rr}, S_{r\theta}\}^T, \tag{III. 2.19}$$

где \mathbf{q} соответствует перемещениям, а \mathbf{p} – напряжениям. Тогда вариаци-

онный принцип (III. 2.18) представляется следующим образом:

$$\delta\Omega = 0, \tag{III. 2.20}$$

$$\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] d\xi d\theta,$$

где

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= -S_{rr} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \nu - S_{r\theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) - \frac{E}{2} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2E} \left((1 - \nu^2) S_{rr}^2 + 2(1 + \nu) S_{r\theta}^2 \right) = \tag{III. 2.21} \\ &= -\mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \nu & \nu \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & -1 \end{bmatrix} - \frac{E}{2} \left[\left(1 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \mathbf{q} \right]^2 + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu^2}{E} & 0 \\ 0 & \frac{2(1 + \nu)}{E} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя канонические уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{p}}, \tag{III. 2.22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}},$$

мы можем посредством вариационного принципа (III. 2.20), осуществляя интегрирование по частям, получить следующие дуальные уравнения

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}, \tag{III. 2.23}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{C}\mathbf{p},$$

где матрицы **A**, **B**, **C** и **D** в точности совпадают с матрицами, определенными равенствами (III. 2.7) и (III. 2.9). Определяя вектор $\dot{\nu} = \{\dot{\mathbf{q}}^T, \dot{\mathbf{p}}^T\}^T$, можно представить уравнения (III. 2.23) в матричной форме (III. 2.12), а именно

$$\dot{\nu} = \mathbf{H}\nu \quad \text{где} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}. \tag{III. 2.24}$$

Вместе с граничными условиями (III. 2.16) это уравнение позволяет определить асимптотические поля в окрестности вершины трещины.

Преобразование фундаментальных дифференциальных уравнений

В большинстве случаев дуальные уравнения, такие как (III. 2.23), могут быть получены непосредственно с помощью фундаментальных дифференциальных уравнений. Этот подход иногда является более экономичным. В рассматриваемом случае сначала можно исключить $S_{\theta\theta}$ из второго уравнения (III. 1.11):

$$S_{\theta\theta} = \nu S_{rr} + E \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right). \quad (\text{III. 2.25})$$

Подставим затем (III. 2.25) в уравнения равновесия (III. 1.10) и в первое уравнение системы (III. 1.11). После ряда математических преобразований можно легко вывести дуальные уравнения (III. 2.23).

Хотя последний подход является очень простым в рассматриваемом случае, он не всегда применим в более сложных задачах. В действительности, в большинстве задач не всегда очевидно, как ввести дуальные переменные \mathbf{q} и \mathbf{p} . В таких случаях наиболее простой ход рассуждений заключается в следующем. Сначала можно выделить вектор \mathbf{p} с помощью преобразования Лежандра, а затем использовать основные уравнения для того, чтобы избежать процедуры интегрирования по частям, которая иногда оказывается очень громоздкой.

Осуществляя переход к гамильтоновой системе уравнений тремя возможными способами, мы получили одну и ту же систему дифференциальных уравнений первого порядка (III. 2.24). Вспомним, что в методе Уильямса функция напряжения Эри должна удовлетворять дифференциальному уравнению четвертого порядка; в методе Кондратьева компоненты тензора перемещений должны удовлетворять уравнениям равновесия – системе уравнений второго порядка. В этих двух методах решение дифференциальных уравнений, менее сложное в рассматриваемом случае, может стать весьма сложным, даже невозможным для других задач. Тогда как в новой системе уравнений вектор в пространстве состояний, имеющий $2n$ компонент должен удовлетворять системе уравнений первого порядка, которая может быть сформулирована иногда для очень сложных задач, и, следовательно, может привести к решению.

3. Преобразование на основе угловой координаты θ

В предыдущем параграфе мы осуществили преобразование к гамильтоновой системе уравнений, принимая в качестве обобщенной координаты z радиальную координату ξ . Оказывается, что возможно получить гамильтонову систему уравнений, следуя другим путем, а именно, принимая в качестве обобщенной координаты угловую переменную θ . Данный подход позволит нам не только прийти снова к той же гамильтоновой системе уравнений, но и найти новые способы получения аналитических, полуаналитических или численных результатов при решении весьма сложных задач.

С помощью таких же рассуждений как и ранее выполним преобразование, выбирая в качестве вариационного принципа принцип Хейлинджера – Рейсснера (III. 1.13). На этот раз выразим компоненту $S_{r\tau}$ и найдем

$$S_{r\tau} = \nu S_{\theta\theta} + E \frac{\partial u_r}{\partial \xi}. \quad (\text{III. 3.1})$$

Подстановка (III. 3.1) в вариационный принцип Хейлинджера – Рейсснера приводит к следующей формулировке этого принципа

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= 0 \\ \Omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + S_{\theta\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + S_{\theta\theta} \left(u_r + \nu \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \right) + S_{r\theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} - u_\theta \right) + \right. \\ &\left. + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2E} \left(2(1 + \nu) S_{r\theta}^2 + (1 - \nu^2) S_{\theta\theta}^2 \right) \right] d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{III. 3.2})$$

Переменные перемещений есть u_r, u_θ , тогда как переменные напряжений (нормированные напряжения) есть $S_{r\theta}$ и $S_{\theta\theta}$. Тогда имеем

$$\mathbf{q} = \{u_r, u_\theta\}^T \quad \mathbf{p} = \{S_{r\theta}, S_{\theta\theta}\}. \quad (\text{III. 3.3})$$

Рассматривая $\dot{\mathbf{q}}$ как частную производную по θ , находим

$$\delta\Omega = 0, \quad (\text{III. 3.4})$$

$$\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] d\xi d\theta,$$

где

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -S_{\theta\theta} \left(u_r + \nu \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \right) - S_{r\theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} - u_\theta \right) - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2E} \left(2(1 + \nu) S_{r\theta}^2 + (1 - \nu^2) S_{\theta\theta}^2 \right) \quad (\text{III. 3.5})$$

Выполняя операции варьирования и интегрирование по частям, можно получить систему дуальных уравнений

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{C}\mathbf{p},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{\partial}{\partial \xi} \\ -1 - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \frac{(1 + \nu)}{E} & 0 \\ 0 & \frac{(1 - \nu^2)}{E} \end{bmatrix}, \quad (\text{III. 3.6})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -E \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \\ -1 - \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений (III. 3.6) получена без использования каких-либо граничных условий, формулировка которых не вызывает затруднений. Для рассматриваемой задачи это граничные условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\mathbf{p}(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (\text{III. 3.7})$$

Сформулируем дуальные уравнения в матричной форме

$$\dot{\nu} = \mathbf{H}\nu \quad \text{где} \quad \nu = \{\mathbf{p}^T, \mathbf{q}^T\}^T. \quad (\text{III. 3.8})$$

4. Общее решение

Дадим подробное описание метода определения асимптотических полей у вершины трещины посредством исследования системы линейных однородных уравнений $\dot{\nu} = \mathbf{H}\nu$. Выбранный метод построения решения базируется на теореме о разложении, которую мы опишем в процессе

ее применения. Математическое описание и демонстрация данной теоремы будет осуществлена на применении радиальной координаты ξ . Далее общие решения строятся на основе двух различных подходов:

- первый подход приводит к аналитическому решению, найденному ранее Уильямсом, и базируется на радиальной координате;
- второй подход дает ансамбль аналитических и численных решений на основе угловой координаты.

Теорема о разложении

Выполним разделение переменных следующим образом

$$\nu(\xi, \theta) = \psi(\theta) \exp(\mu\theta), \quad (\text{III. 4.1})$$

где μ – константа, подлежащая определению, $\psi(\theta)$ – вектор, зависящий только от θ . Подставим (III. 4.1) в (III. 2.12):

$$\mathbf{H}\psi(\theta) = \mu\psi(\theta) \quad (\text{III. 4.2})$$

или

$$(\mathbf{H} - \mathbf{I}\mu) \psi(\theta) = 0. \quad (\text{III. 4.3})$$

Тогда сформулированная задача сводится к отысканию собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы оператора \mathbf{H} . Матрица оператора \mathbf{H} обладает рядом важных свойств. Более глубокое теоретическое исследование матрицы оператора \mathbf{H} позволяет заключить, что:

- \mathbf{H} представляет собой матрицу гамильтонова оператора;
- $\mu = 0$ есть кратное собственное значение \mathbf{H} ;
- если μ есть собственное значение матрицы \mathbf{H} , то и $-\mu$ есть также собственное значение;
- пусть μ_i и μ_j – два собственных значения матрицы \mathbf{H} ; ψ_i и ψ_j – два соответствующих им собственных вектора, можно показать, что ψ_i и ψ_j удовлетворяют условию сопряженной симплектической ортогональности

$$\left. \begin{aligned} \langle \psi_i^T, \mathbf{J}, \psi_j \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \psi_i^T \mathbf{J} \psi_j d\theta = 0, & \text{когда} & \quad \mu_i + \mu_j \neq 0 \\ \langle \psi_i^T, \mathbf{J}, \psi_j \rangle &= 1 \\ \langle \psi_i^T, \mathbf{J}, \psi_j \rangle &= -1 \end{aligned} \right\}, \quad \text{когда} \quad \mu_i + \mu_j = 0, \quad (\text{III. 4.4})$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{III. 4.5})$$

В рассматриваемой задаче \mathbf{I}_2 – единичная матрица ранга 2. В равенствах (III. 4.4) собственные векторы ψ_i и ψ_j нормированы.

Теорема о разложении: предположим, что \mathbf{H} имеет $2n$ собственных значений (нулевые собственные значения не учитываются), которые могут быть сгруппированы в две группы следующим образом:

$$(\alpha) \quad \mu_i, \quad \operatorname{Re}(\mu_i) < 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}(\mu_i) = 0 \cap \operatorname{Im}(\mu_i) < 0, \quad (\text{III. 4.6})$$

$$(\beta) \quad \mu_{-i} = -\mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В группе (α) собственные значения классифицируются в соответствии с возрастанием абсолютных значений μ_i . Соответствующие им $2n$ собственных вектора образуют базис в пространстве решений задачи. Решение задачи может быть получено с помощью линейной комбинации собственных векторов:

$$\nu = \sum_{i=1}^n (a_i \exp(\mu_i \xi) \psi_i + b_i \exp(-\mu_i \xi) \psi_{-i}), \quad (\text{III. 4.7})$$

где a_i и b_i – коэффициенты разложения, подлежащие определению из граничных условий в бесконечно удаленной точке. Данная теорема может быть обобщена на случай $n \rightarrow \infty$.

Коэффициенты a_i и b_i могут быть найдены из следующих равенств:

$$a_i = - \langle \exp(-\mu_i \xi) \psi_{-i}, \mathbf{J}, \nu \rangle, \quad (\text{III. 4.8})$$

$$b_i = \langle \exp(\mu_i \xi) \psi_i, \mathbf{J}, \nu \rangle.$$

Оператор в скобках определен в (III. 4.4).

Уравнение (III. 4.3) может быть исследовано многочисленными способами. Для обсуждаемого примера – решения Уильямса мы можем найти явное решение. Но для более сложных задач оказывается необходимой дискретизация матрицы \mathbf{H} .

5. Решение, построенное на основе радиальной координаты ξ

В большинстве случаев в механике разрушения поле перемещений в окрестности вершины трещины представляется в виде суперпозиции симметричной и антисимметричной по отношению к линии продолжения трещины. Для каждого из этих случаев мы определим сингулярное решение с соответствующим коэффициентом интенсивности напряжений: K_I – для случая нормального отрыва, K_{II} – для поперечного сдвига. (Необходимо отметить, что случай антиплоского сдвига здесь не рассматривается). В ходе построения решения мы продемонстрируем возможности данного подхода для построения полей перемещений, деформаций и напряжений в окрестности вершины трещины.

Рассмотрим симметричную деформацию относительно линии продолжения трещины. При деформации трещины, симметричной относительно линии продолжения трещины условия симметрии ($\theta = 0$) имеют вид:

$$u_\theta(\theta = 0) = 0, \quad S_{r\theta}(\theta = 0) = 0. \quad (\text{III. 5.1})$$

После разделения переменных мы получим задачу на собственные значения (III. 4.3). Найденные собственные значения могут быть разделены на две группы согласно (III. 4.6). Можно заметить, что нулевые собственные значения ($\mu = 0$) не учитываются. В действительности, нулевые собственные значения отвечают специальному решению задачи; они соответствуют движению тела как твердого тела. Это решение необходимо при, например, формировании матрицы жесткости сингулярного элемента (при реализации метода конечных элементов).

Решение, соответствующее нулевым собственным значениям

Нулевое собственное значение является кратным. Следовательно, существует несколько соответствующих ему собственных векторов. Для их определения используем матрицы Жордана. Заранее мы не знаем, какая комбинация собственных векторов существует. Поэтому построим последовательно цепочку Жордана и остановимся, когда цепочка прервется. В соответствии с (III. 2.13) и (III. 4.3) и, учитывая (III. 2.7) и (III. 2.9), можно получить уравнения, отвечающие нулевым собственным значени-

ям:

$$\begin{array}{rcccccc}
 -\nu u_r^0 & -\nu \frac{du_\theta^0}{d\theta} & + \frac{1-\nu^2}{E} S_{rr}^0 & +0 & = & 0, \\
 -\frac{du_r^0}{d\theta} & +u_\theta^0 & +0 & + \frac{2(1+\nu)}{E} S_{r\theta}^0 & = & 0, \\
 E u_r^0 & +E \frac{du_\theta^0}{d\theta} & +\nu S_{rr}^0 & -\frac{dS_{r\theta}^0}{d\theta} & = & 0, \\
 -E \frac{du_r^0}{d\theta} & -E \frac{d^2 u_\theta^0}{d\theta^2} & -\nu \frac{dS_{rr}^0}{d\theta} & -S_{r\theta}^0 & = & 0,
 \end{array} \quad (\text{III. 5.2})$$

где

$$\mathbf{H}\psi^0 = 0.$$

Верхний индекс ⁽⁰⁾ показывает, что решение соответствует нулевому собственному значению. Из последних двух уравнений (III. 5.2) следует, что

$$\frac{d^2 S_{r\theta}^0}{d\theta^2} + S_{r\theta}^0 = 0. \quad (\text{III. 5.3})$$

Решение уравнения (III. 5.3) имеет вид

$$S_{r\theta}^0 = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (\text{III. 5.4})$$

Согласно условиям симметрии (III. 5.1) мы непосредственно находим, что $A = 0$. В силу третьего уравнения системы (III. 5.2) и граничных условий (III. 2.15), мы получим $B = 0$, откуда следует, что $S_{r\theta}^0 = 0$. Анализ первого и третьего уравнений (III. 5.2) приводит к $S_{rr}^0 = 0$. Функции u_r^0 и u_θ^0 могут быть легко определены из первых двух уравнений системы (III. 5.2) и условий симметрии (III. 5.1). Таким образом, соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$\psi_1^0 = \{u_r^0 = \cos \theta, u_\theta^0 = -\sin \theta, S_{rr}^0 = 0, S_{r\theta}^0 = 0\}^T, \nu_1^0 = \psi_1^0. \quad (\text{III. 5.5})$$

Индекс ₍₁₎ соответствует первому собственному вектору с собственным значением $\mu = 0$. Это решение отвечает движению тела как твердого тела. Поскольку $\mu = 0$ – кратное собственное значение, существует по крайней мере один собственный вектор формы Жордана первого порядка. Уравнение, используемое для его определения, имеет вид

$$\mathbf{H}\psi_2^0 = \psi_1^0 \quad (\text{III. 5.6})$$

или

$$\begin{aligned}
 -\nu u_r^0 & -\nu \frac{du_\theta^0}{d\theta} + \frac{1-\nu^2}{E} S_{rr}^0 & +0 & = \cos \theta, \\
 -\frac{du_r^0}{d\theta} & +u_\theta^0 & +0 & + \frac{2(1+\nu)}{E} S_{r\theta}^0 = -\sin \theta, \\
 E u_r^0 & +E \frac{du_\theta^0}{d\theta} & +\nu S_{rr}^0 & - \frac{dS_{r\theta}^0}{d\theta} = 0, \\
 -E \frac{du_r^0}{d\theta} & -E \frac{d^2 u_\theta^0}{d\theta^2} & -\nu \frac{dS_{rr}^0}{d\theta} & -S_{r\theta}^0 = 0.
 \end{aligned} \tag{III. 5.7}$$

Как и предыдущем случае, два последних уравнения нам дают $S_{r\theta}^0 = 0$, тогда как первое и третье уравнения приводят к $S_{rr}^0 = E \cos \theta$. Поэтому первые два уравнения нам позволяют найти, что

$$u_r^0 + \frac{du_r^0}{d\theta} = -\nu \cos \theta, \quad \frac{du_r^0}{d\theta} - u_\theta^0 = \sin \theta. \tag{III. 5.8}$$

Учитывая граничные условия и условия симметрии, можно получить

$$u_r^0 = \frac{1-\nu}{2} \sin \theta, \quad u_\theta^0 = \frac{1-\nu}{2} \theta \cos \theta - \frac{1+\nu}{2} \sin \theta.$$

Собственный вектор формы Жордана первого порядка имеет компоненты

$$\psi_2^0 = \left\{ \frac{1-\nu}{2} \theta \sin \theta, \quad \frac{1-\nu}{2} \theta \cos \theta - \frac{1+\nu}{2} \sin \theta, \quad E \cos \theta, \quad 0 \right\}^T. \tag{III. 5.9}$$

Решение задачи, соответствующее найденному собственному вектору, может быть, таким образом, представлено в форме

$$\nu_2^0 = \psi_2^0 + \psi_1^0 \xi. \tag{III. 5.10}$$

Это решение соответствует концентрированной силе P_x , приложенной в вершине трещины. Поскольку $\sigma_{rr} = S_{rr}/r = E \cos \theta/r$, то

$$P_x = \int_{-\pi}^{\pi} -\sigma_{rr} \cos \theta r d\theta = -E\pi, \quad P_y = \int_{-\pi}^{\pi} -\sigma_{rr} \sin \theta r d\theta = 0. \tag{III. 5.11}$$

Можно продолжить процесс построения собственных векторов, соответствующих нулевому собственному значению, путем отыскания формы Жордана следующего порядка, уравнение для которого имеет вид

$\mathbf{H}\psi_3^0 = \psi_2^0$. Однако, можно заметить, что этого решения не существует и цепь Жордана, таким образом, обрывается.

Решение, отвечающее ненулевым собственным значениям

Для ненулевых собственных значений $\mu \neq 0$ из уравнения (III. 4.3) имеем

$$\begin{aligned} -(\mu + \nu)u_r^i & -\nu \frac{du_\theta^i}{d\theta} & + \frac{1 - \nu^2}{E} S_{rr}^i & + 0 & = 0, \\ -\frac{du_r^0}{d\theta} & + (1 - \mu)u_\theta^i & + 0 & + \frac{2(1 + \nu)}{E} S_{r\theta}^i & = 0, \\ E u_r^i & + E \frac{du_\theta^i}{d\theta} & + (\nu - \mu) S_{rr}^i & - \frac{dS_{r\theta}^i}{d\theta} & = 0, \\ -E \frac{du_r^i}{d\theta} & - E \frac{d^2 u_\theta^i}{d\theta^2} & - \nu \frac{dS_{rr}^i}{d\theta} & - (1 + \mu) S_{r\theta}^i & = 0, \end{aligned} \quad (\text{III. 5.12})$$

где индекс ⁽ⁱ⁾ означает компоненту собственного вектора, соответствующего ненулевому собственному значению $\mu_i \neq 0$. Последняя система уравнений (III. 5.12) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $\psi = \mathbf{C} \exp(\lambda\theta)$, где λ – собственное значение по отношению к переменной θ , \mathbf{C} – ненулевой постоянный вектор. Уравнение для определения λ

$$\det \begin{vmatrix} -(\mu + \nu) & \nu\lambda & (1 - \nu^2)/E & 0 \\ -\lambda & 1 - \mu & 0 & 2(1 + \nu)/E \\ E & E\lambda & \nu - \mu & -\lambda \\ -E\lambda & -E\lambda^2 & -\nu\lambda & -(1 + \mu) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III. 5.13})$$

сводится к уравнению

$$\lambda^4 + 2\lambda^2(1 + \mu^2) + (1 - \mu^2)^2 = 0, \quad (\text{III. 5.14})$$

корни которого определяются следующим образом

$$\lambda_{1,2} = \pm i(1 + \mu) \quad \lambda_{3,4} = \pm i(1 - \mu). \quad (\text{III. 5.15})$$

Поскольку мы разыскиваем только решение, симметричное относительно линии продолжения трещины, то удовлетворяя условиям симметрии, можно получить

$$\psi^2(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos(1 + \mu)\theta + C_1 \cos(1 - \mu)\theta \\ A_2 \sin(1 + \mu)\theta + C_2 \sin(1 - \mu)\theta \\ A_3 \cos(1 + \mu)\theta + C_3 \cos(1 - \mu)\theta \\ A_4 \sin(1 + \mu)\theta + C_4 \sin(1 - \mu)\theta \end{array} \right\}. \quad (\text{III. 5.16})$$

Постоянные A_1, \dots, C_1, \dots должны удовлетворять уравнениям (III. 5.12). Тогда справедливо

$$\begin{aligned} -(\mu + \nu)A_1 - \nu(1 + \mu)A_2 + \frac{(1 - \nu^2)}{E}A_3 + 0 &= 0, \\ (1 + \mu)A_1 + (1 - \mu)A_2 + 0 + \frac{2(1 + \nu)}{E}A_4 &= 0, \quad (\text{III. 5.17}) \\ EA_1 + E(1 + \mu)A_2 + (\nu - \mu)A_3 - (1 + \mu)A_4 &= 0, \\ E(1 + \mu)A_1 + E(1 + \mu)^2A_2 + \nu(1 + \mu)A_3 - (1 + \mu)A_4 &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -(\mu + \nu)C_1 - \nu(1 + \mu)C_2 + \frac{(1 - \nu^2)}{E}C_3 + 0 &= 0, \\ (1 - \mu)C_1 + (1 - \mu)C_2 + 0 + \frac{2(1 + \nu)}{E}C_4 &= 0, \quad (\text{III. 5.18}) \\ EC_1 + E(1 - \mu)C_2 + (\nu - \mu)C_3 - (1 - \mu)C_4 &= 0, \\ E(1 - \mu)C_1 + E(1 - \mu)^2C_2 + \nu(1 - \mu)C_3 - (1 + \mu)C_4 &= 0. \end{aligned}$$

В действительности постоянные A_1, \dots, C_1, \dots не являются независимыми. Из (III. 5.17) мы можем найти

$$\begin{aligned} E\mu A_1 &= -(1 + \nu)A_4, \\ E\mu A_2 &= (1 + \nu)A_4, \quad (\text{III. 5.19}) \\ A_3 &= -A_4, \end{aligned}$$

и из (III. 5.18) можно получить

$$\begin{aligned} E\mu(1 - \mu)_1 &= -[-3 + \nu + \mu(1 + \nu)]C_4, \\ E\mu(1 - \mu)_2 &= -[-3 - \nu + \mu(1 + \nu)]C_4, \quad (\text{III. 5.20}) \\ (1 - \mu)C_3 &= (3 - \mu)C_4. \end{aligned}$$

Остается отыскать еще две константы A_4 и C_4 собственное число μ . Подставим (III. 5.16) в граничные условия (III. 2.16) и примем во внимание (III. 5.19) и (III. 5.20), тогда

$$A_4 \sin(1 + \mu)\pi + C_4 \sin(1 - \mu)\pi = 0, \quad (\text{III. 5.21})$$

$$A_4(1 - \mu) \cos(1 + \mu)\pi + C_4(1 + \mu) \cos(1 - \mu)\pi = 0.$$

Постоянные A_4 и C_4 не могут одновременно обращаться в нуль, следовательно, определитель последней системы уравнений (III. 5.21) должен быть равен нулю, что приводит к равенству

$$\sin 2\mu\pi = 0, \quad (\text{III. 5.22})$$

откуда

$$\mu = \pm \frac{n}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{III. 5.23})$$

$$A_4 = C_4 \quad n = \pm 1, 3, 5, \dots \quad (\text{III. 5.24})$$

$$(2 - n)A_4 = -(2 + n)C_4 \quad n = 0, \pm 2, 4, \dots$$

Например, мы сразу определим сингулярное решение линейной теории упругости, если положим $n = 1$ в выражениях (III. 5.19), (III. 5.20), (III. 5.23) и (III. 5.24). Полагая $A_4 = 1/4\sqrt{2\pi}$, согласно (III. 5.16), соответствующий собственный вектор имеет компоненты

$$\psi(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{G} \left[-\cos \frac{3}{2}\theta + (2\chi - 1) \cos \frac{1}{2}\theta \right] \\ \frac{1}{G} \left[\sin \frac{3}{2}\theta - (2\chi + 1) \sin \frac{1}{2}\theta \right] \\ -\cos \frac{3}{2}\theta + 5 \cos \frac{1}{2}\theta \\ \sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \end{array} \right\}, \quad (\text{III. 5.25})$$

$$\nu = K_I \exp(\xi/2) \psi(\theta),$$

где G — модуль сдвига $G = E/2(1 + \nu)$; $\chi = 3 - 4\nu$ — для случая плоского деформированного состояния и $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ — для случая плоского напряженного состояния; K_I — коэффициент интенсивности напряжений. Это решение может быть представлено в более удобной форме. Вернемся к исходной переменной $\xi = \ln r$, $S_{ij} = \sigma_{ij}r$. В силу (III. 2.14) мы окончательно находим

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[-\cos \frac{3}{2}\theta + (2\chi - 1) \cos \frac{1}{2}\theta \right], \\ u_\theta &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\sin \frac{3}{2}\theta - (2\chi + 1) \sin \frac{1}{2}\theta \right], \\ \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi}r} \left[-\cos \frac{3}{2}\theta + 5 \cos \frac{1}{2}\theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi}r} \left[\cos \frac{3}{2}\theta + 3 \cos \frac{1}{2}\theta \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi}r} \left[\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{III. 5.26})$$

Это распределение напряжений полностью соответствует решению Уильямса [110] (см. также предыдущий раздел), но получено другим способом. Одним из преимуществ такого подхода является то, что компоненты тензора напряжений и компоненты вектора перемещений определяются одновременно. К тому же в рамках данного подхода получены общие формулы для всех собственных значений задачи. Необходимо отметить, что процедура вычисления компонент вектора перемещений является более длинной.

Обратимся к исследованию антисимметричной деформации по отношению к линии продолжения трещины.

В случае деформации антисимметричной относительно линии продолжения трещины условия при $\theta = 0$ имеют вид

$$u_r(\theta = 0) = 0, \quad S_{\theta\theta}(\theta = 0) = \left[E \frac{du_\theta}{d\theta} + \nu S_{rr} \right] (\theta = 0) = 0. \quad (\text{III. 5.27})$$

Решение, соответствующее нулевым собственным значениям

Из системы уравнений (III. 4.3) можно получить уравнения, отвечающие нулевым собственным значениям. Для рассматриваемого случая они идентичны уравнениям (III. 5.2). Согласно двум последним уравнениям системы (III. 5.2), справедливо равенство

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1 \right) \left(u_r^0 + \frac{du_\theta^0}{d\theta} + \frac{\nu}{E} S_{rr}^0 \right) = 0. \quad (\text{III. 5.28})$$

В соответствии с граничными условиями (III. 2.16) и условиями антисимметрии (III. 5.27) можно найти, что

$$u_r^0 + \frac{du_\theta^0}{d\theta} + \frac{\nu}{E} S_{rr}^0 = 0$$

и затем $S_{r\theta}^0$. Первое и третье уравнения показывают, что $S_{rr}^0 = 0$. Затем в силу двух первых уравнений и условий антисимметрии можно найти $u_r^0 = \sin \theta$, $u_\theta^0 = \cos \theta$. Собственный вектор, соответствующий нулевым собственным значениям, имеет компоненты

$$\psi_1^0 = \{ u_r^0 = \sin \theta \quad u_\theta^0 = \cos \theta \quad S_{rr}^0 = 0 \quad S_{r\theta}^0 \}^T, \quad \nu_1^0 = \psi_1^0. \quad (\text{III. 5.29})$$

Данное решение соответствует движению этого тела как твердого тела. Продолжим процесс отыскания формы Жордана следующего поряд-

ка:

$$\begin{aligned}
 -\nu u_r^0 & -\nu \frac{du_\theta^0}{d\theta} & \frac{1-\nu^2}{E} S_{rr}^0 & +0 & = \sin \theta, \\
 -\frac{du_r^0}{d\theta} & +u_\theta^0 & +0 & +\frac{2(1+\nu)}{E} S_{r\theta}^0 & = \cos \theta, \\
 E u_r^0 & +E \frac{du_\theta^0}{d\theta} & +\nu S_{rr}^0 & -\frac{dS_{r\theta}^0}{d\theta} & = 0, \\
 -E \frac{du_r^0}{d\theta} & -E \frac{d^2 u_\theta^0}{d\theta^2} & -\nu \frac{S_{rr}^0}{d\theta} & -S_{r\theta}^0 & = 0.
 \end{aligned}
 \tag{III. 5.30}$$

Аналогично находим, что

$$u_r^0 + \frac{du_\theta^0}{d\theta} + \frac{\nu}{E} S_{rr}^0 = 0,$$

а затем и $S_{r\theta}^0$ в силу двух последних уравнений и граничных условий. Эти результаты вместе с первым уравнением позволяют заключить, что $S_{rr}^0 = E \sin \theta$. Тогда два первых уравнения принимают вид

$$u_r^0 + \frac{du_\theta^0}{d\theta} = -\nu \sin \theta, \quad -\frac{du_r^0}{d\theta} + u_\theta^0 = \cos \theta. \tag{III. 5.31}$$

Принимая во внимание условия антисимметрии (III. 5.27), мы можем найти собственный вектор формы Жордана:

$$\psi_2^0 = \left\{ -\frac{1-\nu}{2} \theta \cos \theta \quad \frac{1-\nu}{2} \theta \sin \theta + \frac{1+\nu}{2} \cos \theta \quad E \sin \theta \quad 0 \right\},
 \tag{III. 5.32}$$

$$\nu_2^0 = \psi_2^0 + \psi_1^0 \xi.$$

Это решение отвечает сосредоточенной силе P_y , приложенной в вершине трещины. Действительно,

$$P_y = \int_{-\pi}^{\pi} -\sigma_{rr} \sin \theta r d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} -E \sin^2 \theta r d\theta,
 \tag{III. 5.33}$$

$$P_x = \int_{-\pi}^{\pi} -\sigma_{rr} \cos \theta r d\theta = 0.$$

Можно проверить, что форма Жордана следующего порядка не существует.

Решение, отвечающее ненулевым собственным значениям

Соответствующие этому случаю уравнения идентичны уравнениям (III. 5.12). Но сейчас нам необходимо определить решение, антисимметричное по отношению к лучу $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} u_r^i &= B_1 \sin(1 + \mu)\theta + D_1 \sin(1 - \mu)\theta, \\ u_\theta^i &= B_2 \cos(1 + \mu)\theta + D_2 \cos(1 - \mu)\theta, \\ S_{rr}^i &= B_3 \sin(1 + \mu)\theta + D_3 \sin(1 - \mu)\theta, \\ S_{r\theta}^i &= B_4 \cos(1 + \mu)\theta + D_4 \cos(1 - \mu)\theta, \end{aligned} \quad (\text{III. 5.34})$$

где

$$\begin{aligned} E\mu B_1 &= (1 + \nu)B_4, \\ B_2 &= B_1, \\ B_3 &= B_4, \end{aligned} \quad (\text{III. 5.35})$$

$$\begin{aligned} E\mu(1 - \mu D_1) &= -[3 - \nu - \mu(1 + \nu)]D_4, \\ E\mu(1 - \mu D_2) &= -[3 - \nu + \mu(1 + \nu)]D_4, \\ (1 - \mu)D_3 &= (\mu - 3)D_4. \end{aligned} \quad (\text{III. 5.36})$$

Подставляя (III. 5.34) в граничные условия (III. 2.16) и учитывая равенства (III. 5.35) и (III. 5.36), можно получить

$$B_4 \cos(1 + \mu)\pi + D_4 \cos(1 - \mu)\pi = 0, \quad (\text{III. 5.37})$$

$$B_4(1 - \mu) \sin(1 + \mu)\pi + D_4(1 + \mu) \sin(1 - \mu)\pi = 0.$$

Поскольку B_4 и D_4 не могут одновременно обращаться в нуль, определитель матрицы коэффициентов последней системы уравнений должен быть равен нулю. Как и в предыдущем случае это требование приводит к условию

$$\sin 2\mu\pi = 0, \quad (\text{III. 5.38})$$

откуда

$$\mu = \pm \frac{n}{2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{III. 5.39})$$

$$B_4 = -D_4 \quad n = 0, \pm 2, 4, \dots, \quad (\text{III. 5.40})$$

$$(2 - n)B - 4 = (2 + n)D_4 \quad n = \pm 1, 3, \dots$$

Полагая $D_4 = 1/4\sqrt{2\pi}$, получаем классическое сингулярное в окрестности вершины трещины решение линейной теории упругости для $n = 1$ с помощью формул (III. 5.35), (III. 5.36), (III. 5.39) и (III. 5.40):

$$\psi(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{G} \left[3 \sin \frac{3}{2}\theta - (2\chi - 1) \sin \frac{1}{2}\theta \right] \\ \frac{1}{G} \left[3 \cos \frac{3}{2}\theta - (2\chi + 1) \cos \frac{1}{2}\theta \right] \\ 3 \sin \frac{3}{2}\theta - 5 \cos \frac{1}{2}\theta \\ 3 \cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{III. 5.41})$$

$$\nu = K_{II} \exp(\xi/2) \psi(\theta),$$

где K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений в случае трещины типа II. Компоненты вектора перемещений и напряжений вычисляются в соответствии с выражениями:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[3 \sin \frac{3}{2}\theta - (2\chi - 1) \sin \frac{1}{2}\theta \right], \\ u_\theta &= \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[3 \cos \frac{3}{2}\theta - (2\chi + 1) \cos \frac{1}{2}\theta \right], \\ \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \sin \frac{3}{2}\theta - 5 \sin \frac{1}{2}\theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[-\sin \frac{3}{2}\theta - 3 \cos \frac{1}{2}\theta \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left[3 \cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{1}{2}\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{III. 5.42})$$

Другие собственные векторы находятся из общих равенств (III. 5.34). Необходимо отметить, что собственные значения $\mu = \pm 1$ соответствуют двум специальным случаям. Проанализируем сначала $\mu = 1$. Из системы (III. 5.36) следует, что $D_4 = 0$, тогда $B_4 = B_3 = B_2 = B - 1 = 0$. Полагая $D_2 = 1$, мы имеем соответствующий собственный вектор

$$\psi^1 = \{0, 1, 0, 0\}^T, \quad \nu^1 = \{0, r, 0, 0\}^T. \quad (\text{III. 5.43})$$

Таким образом, найденное решение соответствует вращательному движению твердого тела вокруг вершины трещины.

Для $\mu = -1$ также справедливо $B_4 = -D_4$, согласно (III. 5.40). В соответствии с (III. 5.36) находим, что $B_3 = B_4 + D_4$, $B_1 = B_2 = (1 + \nu)D_4/E$. Тогда соответствующий собственный вектор имеет компоненты

$$\psi^{-1} = \{2 \sin \theta, (1 + \nu) + (1 - \nu) \cos 2\theta, -2E \sin 2\theta, -E + E \cos 2\theta\}^T, \quad (\text{III. 5.44})$$

$$\nu^{-1} = \frac{1}{r} \psi^{-1}.$$

Это решение соответствует моменту M , приложенному в вершине трещины, поскольку в данном случае

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} r \sigma_{r\theta} r d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} E(\cos 2\theta - 1) d\theta = -E2\pi. \quad (\text{III. 5.45})$$

Мы нашли все собственные векторы, формирующие полный базис пространства решений, из которых три собственных вектора соответствуют перемещениям тела как твердого тела и перемещениям, возникающим при действии сосредоточенных сил, приложенных в вершине трещины. Таким образом, все возможные решения могут быть получены с помощью теоремы о разложении.

6. Решение, построенное на основе угловой координаты θ

Как и в случае радиальной координаты, мы можем разрешить уравнение задачи (III. 3.8), разделяя переменные. Примем, что

$$\nu(\xi, \theta) = \psi(\theta) \exp(\mu\xi), \quad (\text{III. 6.1})$$

μ — константа, подлежащая определению. Поскольку в случае угловой координаты $\dot{\nu}(\xi, \theta) = \dot{\psi}(\theta) \exp(\mu\xi)$, подставляя (III. 6.1) в (III. 3.8), мы получим

$$\dot{\psi}(\theta) = \mathbf{H}\psi(\theta), \quad (\text{III. 6.2})$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \mu & 2(1 + \nu)/E & 0 \\ -1 - \nu\mu & 0 & 0 & (1 - \nu^2)/E \\ -E\mu^2 & 0 & 0 & 1 - \nu\mu \\ 0 & 0 & -(1 + \mu) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 6.3})$$

Интересно отметить, что \mathbf{H} есть постоянная матрица, зависящая от параметра μ вместо матрицы оператора в предыдущем случае, где радиальная координата ξ являлась базовой координатой. Это обстоятельство является главным преимуществом данного подхода по сравнению с предыдущим, ибо система дифференциальных уравнений (III. 6.2) является однородной системой уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и найти ее решение гораздо проще.

Для рассматриваемого примера может быть построено аналитическое решение. Достаточно предположить, что $\psi(\theta) = \mathbf{C} \exp(\lambda\theta)$, где \mathbf{C} – постоянный вектор и λ – собственное значение, подлежащее определению. Тогда уравнение (III. 6.2) принимает вид

$$[\mathbf{H}(\mu) - \mathbf{I}\lambda] \mathbf{C} = 0. \quad (\text{III. 6.4})$$

Вектор \mathbf{C} не может быть нулевым, следовательно, определитель матрицы коэффициентов этой системы уравнений $[\mathbf{H}(\mu) - \mathbf{I}\lambda]$ должен обращаться в нуль:

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 - \mu & 2(1 + \nu)/E & 0 \\ -1 - \nu\mu & -\lambda & 0 & (1 - \nu^2)/E \\ -E\mu^2 & 0 & -\lambda & 1 - \nu\mu \\ 0 & 0 & -(1 + \mu) & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{III. 6.5})$$

что приводит к алгебраическому уравнению

$$\lambda^4 + \lambda^2 2(1 + \mu^2) + (1 - \mu^2)^2 = 0, \\ \lambda_{1,2} = \pm i(1 + \mu) = \pm i\alpha \quad \lambda_{3,4} = \pm i(1 - \mu) = \pm i\beta. \quad (\text{III. 6.6})$$

Констатируем, что (III. 6.6) идентично выражениям (III. 5.15), найденным ранее в рамках предыдущего подхода. Тогда вектор дуальных переменных принимает форму

$$\psi(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos \alpha\theta + B_1 \sin \alpha\theta + C_1 \cos \beta\theta + D_1 \sin \beta\theta \\ A_2 \sin \alpha\theta + B_2 \cos \alpha\theta + C_2 \sin \beta\theta + D_2 \cos \beta\theta \\ A_3 \sin \alpha\theta + B_3 \cos \alpha\theta + C_3 \sin \beta\theta + D_3 \cos \beta\theta \\ A_4 \cos \alpha\theta + B_4 \sin \alpha\theta + C_4 \cos \beta\theta + D_4 \sin \beta\theta \end{array} \right\}, \quad (\text{III. 6.7})$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ – константы, подлежащие определению. Рассмотрим сначала случай деформации симметричной относительно линии продолжения трещины. Подставляя (III. 6.7) в (III. 6.2), мы получаем две

группы уравнений относительно констант A_1, C_1, \dots :

$$\begin{aligned}
 A_1(1 + \mu) + A_2(1 - \mu) + A_3 \frac{2(1 + \nu)}{E} &= 0, \\
 -A_1(1 + \nu\mu) - A_2(1 - \mu) + A_4 \frac{1 - \nu^2}{E} &= 0, \\
 -A_3(1 + \mu) - A_1 E \mu^2 + A_4(1 - \nu\mu) &= 0, \\
 A_4(1 + \mu) - A_3(1 + \mu) &= 0, \\
 C_1(1 - \mu) + C_2(1 - \mu) + C_3 \frac{2(1 + \nu)}{E} &= 0, \\
 -C_2(1 - \mu) - C_1(1 + \nu\mu) + C_4 \frac{1 - \nu^2}{E} &= 0, \\
 -C_3(1 - \mu) - C_1 E \mu^2 + C_4(1 - \nu\mu) &= 0, \\
 C_4(1 - \mu) - C_3(1 + \mu) &= 0.
 \end{aligned} \tag{III. 6.8}$$

В этих группах уравнений видно, что константы A_i и C_i не все являются независимыми. Действительно, имеются только две независимые константы A_3 и C_3 . Если константы A_3 и C_3 известны, то другие могут быть определены из следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 E\mu A_1 &= -(1 + \nu)A_3, \\
 E\mu A_2 &= (1 + \nu)A_3, \\
 A_4 &= A_3 \\
 \text{и} & \\
 E\mu(1 - \mu)C_1 &= [3 - \nu - \mu(1 + \nu)] C_3, \\
 E\mu(1 - \mu)C_2 &= -[3 - \nu + \mu(1 + \nu)] C_3, \\
 (1 - \mu)C_4 &= (1 + \mu)C_3.
 \end{aligned} \tag{III. 6.9}$$

Граничные условия (III. 3.7) приводят к выражениям

$$\begin{aligned}
 A_3 \sin(1 + \mu)\pi + C_3 \sin(1 - \mu)\pi &= 0, \\
 A_3(1 - \mu) \cos(1 + \mu)\pi + C_3(1 + \mu) \cos(1 - \mu)\pi &= 0.
 \end{aligned} \tag{III. 6.10}$$

Поскольку константы A_3 и C_3 не могут одновременно обращаться в нуль, то мы имеем следующее уравнение для определения собственного значения μ :

$$\sin 2\mu\pi = 0, \tag{III. 6.11}$$

откуда легко получить

$$\mu = \pm \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III. 6.12})$$

и

$$\begin{aligned} A - 3 &= C - 3, & \text{если } n &= \pm 1, 3, 5, \dots \\ (2 - n)A_3 &= -(2 + n)C_3, & \text{если } n &= \pm 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем те же собственные значения, что и в предыдущем разделе. Далее с помощью аналогичных рассуждений определяются собственные вектора. Например, для $\mu = 1/2$ собственный вектор приводит к следующим полям перемещений и напряжений в окрестности вершины трещины

$$u_r = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \exp(\xi/2) \left[-\cos \frac{3}{2}\theta + (2\chi - 1) \cos \frac{1}{2}\theta \right], \quad (\text{III. 6.13})$$

$$u_\theta = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \exp(\xi/2) \left[\sin \frac{3}{2}\theta - (2\chi + 1) \sin \frac{1}{2}\theta \right], \quad (\text{III. 6.14})$$

$$S_{r\theta} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \exp(\xi/2) \left[\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \right], \quad (\text{III. 6.15})$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4G\sqrt{2\pi}} \exp(\xi/2) \left[\cos \frac{3}{2}\theta + \cos \frac{1}{2}\theta \right]. \quad (\text{III. 6.16})$$

Если в последней группе формул перейти к компонентам тензора напряжений, то получаем классические результаты линейной механики разрушения.

IV. Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом материале

1. Постановка задачи

В настоящем разделе приведен анализ напряженного состояния в окрестности стационарной трещины поперечного сдвига (тип II) в идеально пластическом материале в условиях плоского напряженного состояния⁵. Полученное решение дополняет существующий класс решений задач исследования напряженного состояния в окрестности вершин трещин различных типов в идеально пластическом материале. Хорошо известен анализ полей напряжений в окрестности вершин трещин типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний, а также трещины типа II в условиях плоского деформированного состояния. Однако, для трещины типа II в предположении реализации плоского напряженного состояния решения, по-видимому, получено не было. Установлено, что в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в идеально пластическом материале в случае плоского напряженного состояния существуют три сектора, внутри которых поле напряжений определяется различными выражениями. В двух секторах, прилегающих к берегу трещины и центральном, реализуется равномерное напряженное состояние. В оставшемся секторе имеет место центрированное поле. Значения углов, соответствующих границам между секторами, определяются численно путем решения системы уравнений алгоритмом, адаптированным специально для рассматриваемой проблемы. Безусловно, решение будет полным, если будет исследована и кинематика течения. Однако, в рамках данного исследования удастся получить лишь асимптотику поля деформаций только в центрированном поле, где деформации ведут себя как $1/r$, поскольку определение поля деформаций в оставшихся областях встречает большие трудности.

Целью настоящего исследования является изучение полей напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины поперечного сдвига в идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. Приводимый анализ следует рассматривать как приближен-

⁵Изложение следует [36].

ный. поскольку речь не идет о полном решении упругопластической задачи, включающем определение напряженно-деформированного состояния как в пластической, так и в упругой областях и нахождение упругопластической границы. Поле напряжений в упругой зоне, окружающей пластическую область, и геометрия пластической области не будут анализироваться. Однако детальное исследование даже напряжений в пластической зоне в настоящее время, по-видимому, отсутствует. Имеются и, более того, стали уже классическими, результаты исследования полей напряжений в идеально пластическом теле в непосредственной окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний и в окрестности трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния [72], [94].

Пусть пластическая область полностью окружает вершину трещины. Принимая данное предположение, приходим к статически определимой задаче: если на границе тела заданы напряжения, то имеется полная система уравнений для определения напряженного состояния (независимо от деформаций). Таким образом, должно выполняться условие текучести. Примем, что это условие текучести Мизеса: $T = \sqrt{3}k$, где $T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2}$ – интенсивность напряжений; k – предел текучести на сдвиг. Условие Мизеса в рассматриваемом случае принимает вид

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 = 3k^2. \quad (\text{IV. 1.1})$$

К условию текучести (IV. 1.1) следует присоединить также два дифференциальных уравнения равновесия, которые в предположении отсутствия объемных сил принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (\text{IV. 1.2})$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что напряженное состояние может быть найдено без рассмотрения деформаций, и исследуем его, переходя к полярной системе координат r, θ с полюсом в вершине трещины. Дифференциальные уравнения равновесия и условие текучести в поляр-

ной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3 \sigma_{r\theta}^2 &= 3k^2. \end{aligned} \quad (\text{IV. 1.3})$$

Граничные условия задачи есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pi) = 0. \quad (\text{IV. 1.4})$$

В силу симметрии задачи можно перейти к изучению одной из полуплоскостей, заменяя граничные условия на одном из берегов трещины условиями симметрии при $\theta = 0$:

$$\sigma_{rr}(r, \theta = 0) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = 0. \quad (\text{IV. 1.5})$$

2. Асимптотический анализ

Поскольку в идеально пластическом материале напряжения являются ограниченными величинами и не могут превзойти предела текучести материала k (это обстоятельство исключает отрицательную степень r в асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины; положительные степени должны отсутствовать, так как изучаемый материал является идеально пластическим и, следовательно, напряжения при $r \rightarrow 0$ должны стремиться к конечному пределу), можно искать напряжения в окрестности вершины трещины в виде разложения по собственным функциям:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + O(r^\alpha), \quad (\alpha > 0, r \rightarrow 0). \quad (\text{IV. 2.1})$$

Подставляя (IV. 2.1) в разрешающую систему уравнений (IV. 1.3) и пренебрегая малыми при $r \rightarrow 0$ величинами, можно прийти к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\sigma_{r\theta}}{d\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{d\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0, \quad (\text{IV. 2.2})$$

и алгебраическому условию:

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3 \sigma_{r\theta}^2 = 3k^2 \quad (\text{IV. 2.3})$$

(верхний индекс ⁽⁰⁾ опущен). Условие текучести удовлетворяется, если взять⁶

$$\sigma_{rr} = k \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2k \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{r\theta} = k \sin(\theta + c_1), \quad (\text{IV. 2.4})$$

где c_1 – произвольная постоянная. Известно [72] и иное представление компонент тензора напряжений, ведущее к выполнению условия (IV. 2.3)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a + b \cos 2\vartheta(\theta) + c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= a - b \cos 2\vartheta(\theta) - c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{r\theta} &= -b \sin 2\vartheta(\theta) + c \cos 2\vartheta(\theta), \end{aligned} \quad (\text{IV 2.5})$$

где a, b, c – такие постоянные, что

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3k^2. \quad (\text{IV. 2.6})$$

Необходимо отметить, что найти решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на берегу трещины и условиям симметрии на продолжении трещины, используя лишь одно из представлений (IV. 2.4) или (IV. 2.5), не удастся. Поэтому предполагается, что поле напряжений описывается формулами (IV. 2.4) или (IV. 2.5), в различных характерных областях полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$. Границы областей определяются из условий непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через эти границы. Компонента σ_{rr} может претерпевать разрыв. Установлено, что существуют три характерные клинообразные области с границами $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$. В области $0 \leq \theta \leq \theta_\alpha$ поле напряжений определяется формулами (IV. 2.4). В областях $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$ и $\theta_\beta \leq \theta \leq \pi$ реализуется равномерное напряженное состояние и поле напряжений определяется формулами (IV. 2.5). В секторе $\theta_\beta \leq \theta \leq \pi$, примыкающему к свободному от нагрузок берегу трещины, напряжения без труда определяются из условий отсутствия поверхностных условий на верхнем берегу трещины и, следовательно, постоянные a, b, c известны. Условия непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ на лучах $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$ выполняются за счет постоянных a, b, c поля напряжений центрального сектора $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$ и положений θ_α и θ_β . Действительно, на пять неизвестных постоянных $a, b, c, \theta_\alpha, \theta_\beta$ накладываются пять условий: требование (IV. 2.6) и четыре условия, следующие из непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через границы $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$ рассматриваемых областей. Если теперь удовлетворить двум условиям непрерывности компонент тензора

⁶ Данное распределение напряжений, удовлетворяющее условию пластического течения Мизеса для случая плоского напряженного состояния, впервые было предложено Хиллом [68].

при $\theta = \theta_\beta$ за счет выбора a, b, c в решении для напряжений в секторе $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$, связанных также уравнением (IV 2.6), то величины углов θ_α и θ_β определяются из условий непрерывности при $\theta = \theta_\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_\alpha &= -\frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \sin 2(\theta_\alpha - \theta_\beta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \cos 2(\theta_\alpha - \theta_\beta), \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta_\alpha &= \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\theta_\beta) - \\ &-\frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_\beta) \cos 2(\theta_\alpha - \theta_\beta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \sin 2(\theta_\alpha - \theta_\beta). \end{aligned} \quad (\text{IV. 2.7})$$

Решение последней системы уравнений разыскивалось численно последовательным перебором выбранной сетки точек квадрата со стороной, равной π , плоскости $\theta_\alpha, \theta_\beta$. Этот прием оказался более предпочтительным в данном случае по сравнению с методом наискорейшего спуска, поскольку

- 1) задана область поиска корней системы уравнений;
- 2) при применении данного метода не стоит задача выбора нулевого приближения, что является важным при использовании градиентных методов.

Решение системы тригонометрических уравнений (IV. 2.7) есть $\theta_\alpha = 51,09^\circ$ и $\theta_\beta = 117,86^\circ$. Распределение напряжений в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом материале, подчиняющемся критерию текучести Мизеса, в каждой из трех характерных клинообразных областей задается формулами (далее компоненты тензора напряжений относятся к величине $\sqrt{3}k$, где k – предел текучести материала на сдвиг и символ ⁽⁰⁾ опускается):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \quad \theta_\alpha = 51,09^\circ \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta, \quad \theta_\beta = 117,86^\circ \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_\beta) + \\ + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_\beta) \cos 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\theta_\beta) - \\ - \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_\beta) \cos 2(\theta - \theta_\beta) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_\beta) \sin 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_\beta \cos 2(\theta - \theta_\beta), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\beta \leq \theta \leq \pi \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right.$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 18. При $\theta = \theta_\beta$ напряжения σ_{rr} терпят разрыв.

Приведенное решение можно сравнить с полем напряжений в окрестности вершины для материала, подчиняющегося степенному закону, связывающему деформации и напряжения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} B T^{n-1} s_{ij}, \quad (\text{IV. 2.8})$$

где B , n – постоянные материала, в предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$, что соответствует идеально пластическому материалу. В соответствии с подходом, реализованным в [94], [72] или в [4], решение разыскивается в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K r^\lambda f_{ij}(\theta), \quad (\text{IV. 2.9})$$

и для получения угловых распределений компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (или одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, если использовать функцию напряжений Эри) (подробно см. [4]). Устремляя n к бесконечности

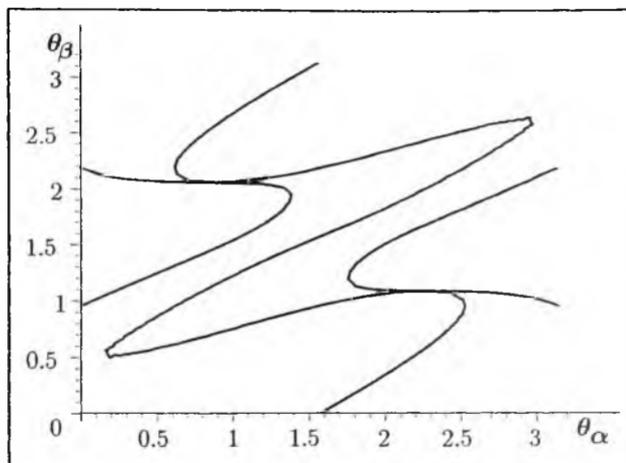


Рис. 17. Графическое решение системы алгебраических уравнений (IV. 2.7)

(в ходе численного счета обычно полагают $n = 100, 300, 500$), можно получить уже другим способом угловые распределения компонент тензора напряжений (рис. 19). Сравнение угловых распределений полученных компонент тензора напряжений показывает, что две схемы построения поля напряжений приводят к одному и тому же результату. Следует подчеркнуть, что полученное решение не является полным, поскольку не исследована кинематика течения. Исследованы лишь уравнения для напряжений, поэтому речь не идет о полном решении упругопластической задачи.

3. Задачи

1. Получите численное решение системы двух уравнений (IV. 2.7) с помощью любой программы символьной математики.
2. Найдите графическое решение той же системы уравнений.
3. Сформулируйте аналогичную задачу для трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния и постройте численное решение соответствующей данной задаче системы уравнений.

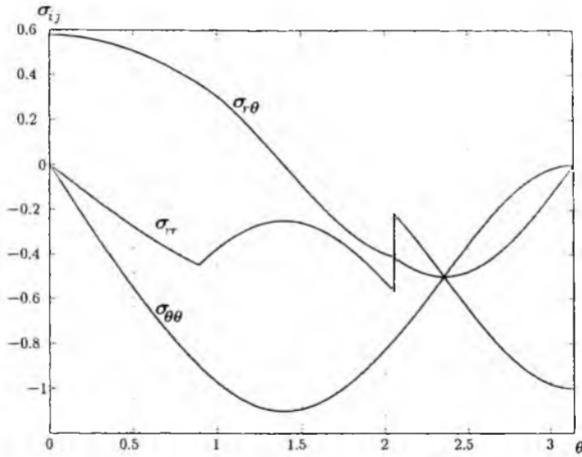


Рис. 18. Зависимость компонент тензора напряжений от полярного угла. Аналитическое решение статически определимой задачи

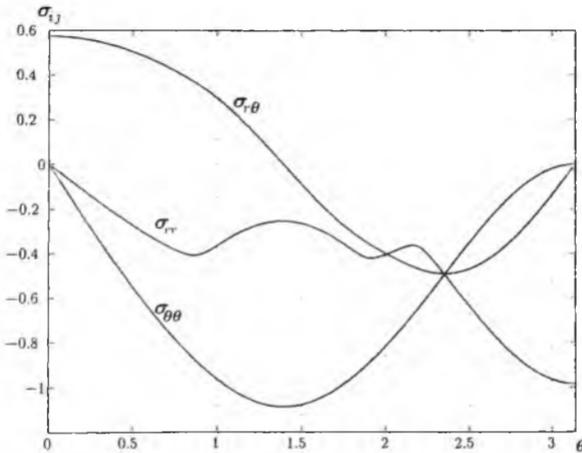


Рис. 19. Зависимость компонент тензора напряжений от полярного угла. Численное решение задачи для упрочняющегося по степенному закону материала для $n = 150$

V. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упругопластическом материале в условиях антиплоского сдвига. Метод годографа Нейбера - Райса

В данном разделе⁷ приведены результаты исследования напряжений в упрочняющемся упругопластическом теле с острым вырезом или в предельном случае с трещиной, вызванных приложенным на бесконечности, равномерным полем напряжений. Сложность математических расчетов уменьшается при рассмотрении более простого случая антиплоских продольных деформаций сдвига и использования деформационной теории пластичности. В результате получается общее решение, пригодное для любого соотношения между напряжением и деформацией в области упрочнения, пока значение напряжения не превосходит начального предела текучести. При степенной зависимости напряжения от деформации в области упрочнения решение, полученное на основе деформационной теории, является также точным решением, даваемым теорией течения при низких уровнях приложенного напряжения, вызывающих пластические деформации в области, масштаб которой мал по сравнению с глубиной выреза. Показано, что для трещин поле деформаций вблизи конца трещины зависит от нагрузок и геометрических размеров тела только через упругий коэффициент интенсивности напряжений при малом масштабе пластической области, и тогда граница упругих и пластических деформаций представляет собой круг.

1. Постановка задачи. Основные гипотезы и упрощения

Точное определение полей напряжений и деформаций вблизи различных концентраторов напряжений и, в частности, трещин при условии использования некоторой действительной зависимости между напряжением и деформацией является задачей первостепенной важности для механического описания процесса разрушения и явления усталости.

⁷Изложение данного раздела следует статье: Райс, Дж. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упруго-пластическом материале при продольном сдвиге/Дж. Райс// Труды Американского общества инженеров-механиков. - Серия E. - Прикладная механика. - 1967. - №2. - С. 32-46.

Такие расчеты сопровождаются известными математическими сложностями. Однако, если ввести некоторые упрощения, существенно уменьшающие математическую сложность задачи, то можно непосредственно исследовать класс задач о трещинах и острых вырезах в плоских сечениях, выделенных в упрочняющихся упругопластических материалах, подверженных действию приложенных на бесконечности постоянных полей напряжений.

Первое из этих упрощений имеет кинематический характер. Рассмотрим случай продольного сдвига, когда перемещения происходят только в направлении, перпендикулярном плоскости, содержащей трещину или вырез. Если оси x, y лежат в указанной плоскости, а ось z направлена перпендикулярно, то это означает, что компонента вектора перемещения $w = w(x, y)$ является единственным, отличным от нуля, перемещением. Следовательно, все компоненты тензора деформации тождественно равны нулю, за исключением продольных сдвигов γ_{xz} и γ_{yz} . Вводя обозначения $\gamma_x = \gamma_{xz}$ и $\gamma_y = \gamma_{yz}$, имеем

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (\text{V. 1.1})$$

Условие совместности деформаций получается из требования независимости производной $\partial^2 w / \partial x \partial y$ от порядка дифференцирования, так что

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = 0. \quad (\text{V. 1.2})$$

В рамках обычных предположений об изотропности материала и малости деформаций все напряжения равны нулю, кроме касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

Обозначая $\tau_x = \tau_{xz}$ и $\tau_y = \tau_{yz}$, получим единственное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0. \quad (\text{V. 1.3})$$

Добавив к уравнениям (V. 1.2) и (V. 1.3) соотношение между напряжением и деформацией, в общем случае получим нелинейные уравнения, которые должны быть решены с учетом соответствующих граничных условий. Предполагается, что полученное решение, пригодное для случая продольного сдвига, прольет свет на аналогичные и более важные задачи с деформациями, вызванными растягивающими силами.

В частности, из результатов Ирвина, посвященных исследованию упругих деформаций, вызванных трещиной, следует, что коэффициент интенсивности напряжений в задаче о трещине продольного сдвига обычно хорошо аппроксимирует, а в некоторых случаях дает точные значения для коэффициента интенсивности напряжений для задачи о трещине нормального отрыва при одинаковой геометрии, когда слагаемое, выражающее приложенный продольный сдвиг и фигурирующее в формуле для коэффициента напряжений, заменяется слагаемым, выражающим растягивающее напряжение. Макклиток и Ирвин [89] показали, что некоторые важные наблюдаемые особенности влияния пластичности на распространение трещины при нормальном отрыве можно предсказать на основании идеально пластических решений для трещин при продольном сдвиге.

Второе упрощение, введенное при рассмотрении трещин и вырезов в упрочняющихся материалах, относится к основному соотношению: используется деформационная теория пластичности, связывающая напряжение с полной деформацией изотропно, так что направление главного напряжения и главной деформации сдвига совпадают. Более подходящей [94] является теория пластического течения. Однако при монотонном нагружении ошибки будут незначительны и, действительно, для случая степенной зависимости между напряжениями и деформациями в области упрочнения показано, что решение, данное деформационной теорией пластичности, совпадает с решением, полученным по теории пластического течения, когда пластичность охватывает малую зону. Следует отметить, что деформационную теорию пластичности можно использовать для получения решений и для нелинейно упругих материалов. Зависимость между напряжением и деформацией характеризуется функцией $\tau = \tau(\gamma)$, связывающей главное напряжение и главную деформацию, которые определяются выражениями:

$$\tau = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{1/2}, \quad \gamma = (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}. \quad (\text{V. 1.4})$$

На рис. 20 показана характерная зависимость между напряжением и деформацией при упрочнении, являющаяся линейной вплоть до достижения некоторого первоначального предела текучести τ_0 с соответствующим сдвигом γ_0 ($\tau_0/\gamma_0 = G$), где G – упругий модуль сдвига.

Более общая зависимость, пригодная для нелинейно упругого материала, показана на рис. 21, т.к. $\gamma_x/\gamma = \tau_x/\tau$, то зависимость между ком-

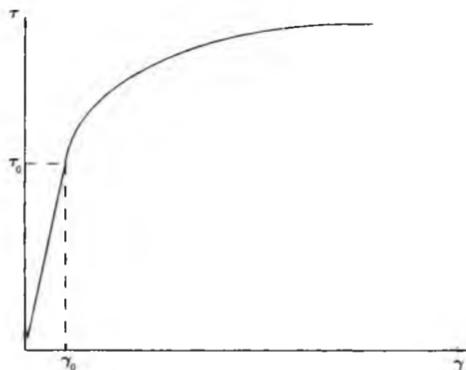


Рис. 20. Упрочняющийся упругопластический материал

понентами тензора напряжений и тензора деформаций будет

$$\tau_x = \gamma_x \frac{\tau(\gamma)}{\gamma}, \quad \tau_y = \gamma_y \frac{\tau(\gamma)}{\gamma}. \quad (V. 1.5)$$

С точки зрения граничных условий, из этих соотношений следует, например, что, если $\tau_x = 0$ на некоторой части границы, то компонента γ_x на этой же части границы также обращается в нуль.

2. Основные уравнения на плоскости деформаций

Нелинейные уравнения задач продольного сдвига можно привести к линейным уравнениям, если физические координаты рассмотреть как функции от деформаций или, что эквивалентно, от напряжений. Это означает, что $x = x(\gamma_x, \gamma_y)$ и $y = y(\gamma_x, \gamma_y)$ или $x = x(\tau_x, \tau_y)$ и $y = y(\tau_x, \tau_y)$.

Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \gamma_x} d\gamma_x + \frac{\partial x}{\partial \gamma_y} d\gamma_y = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \gamma_x} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial x}{\partial \gamma_y} \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} dy \right) \end{aligned}$$

и аналогичное равенство для dy и приравнивая коэффициенты при произвольных значениях dx и dy , получим систему из четырех линейных уравнений в частных производных от γ_x, γ_y по x, y с коэффициентами,

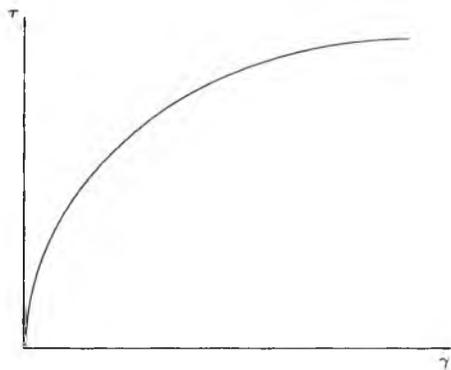


Рис. 21. Нелинейно упругий материал

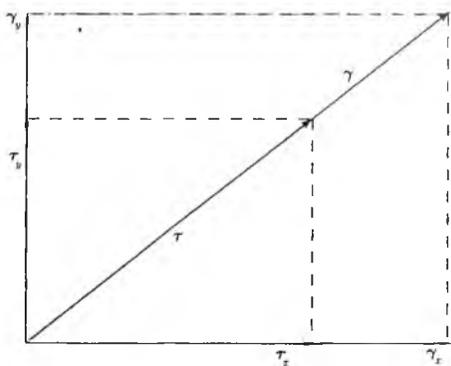


Рис. 22. Векторы $\tau = \tau_x i + \tau_y j$ и $\gamma = \gamma_x i + \gamma_y j$ коллинеарны

зависящими от частных производных, фигурирующих в уравнении совместности. Делая подстановку с учетом однородности условия совместности, получим

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma_y} - \frac{\partial y}{\partial \gamma_x} = 0 \tag{V. 2.1}$$

во всех точках плоскости деформаций, где якобиан преобразования не обращается в нуль (т.е. во всех точках, где конечная площадь или дуга в физической плоскости не отображается в точку на плоскости деформаций). Такие преобразования применялись в работах Хальта, Макклинтока [39], Коскинена [14], Райса [31] и Нейбера [22] при получении некоторых решений для нелинейных материалов, которые являются предельным случаем результатов, полученных далее.

Аналогичные способы применяются в рамках метода годографа в механике жидкостей, приводящего нелинейные уравнения плоского сжимаемого течения к линейным уравнениям в зависимости от компонент вектора скорости. Очевидно, что успешное применение таких преобразований зависит от рассматриваемой задачи при переходе от физической плоскости к плоскости деформаций и вообще от существования взаимно однозначного соответствия.

Удобно записать общие результаты в векторном обозначении так, чтобы можно было легко преобразовать основные уравнения к наиболее подходящей для рассматриваемой задачи системы координат в плоскости деформаций. Не равные нулю компоненты тензора напряжений и деформаций образуют двумерные векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ и заданы в декартовых координатах соответственно выражениями:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_x \mathbf{i} + \tau_y \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \gamma_x \mathbf{i} + \gamma_y \mathbf{j}, \tag{V. 2.2}$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} – единичные векторы в направлении осей x, y , $\tau = |\boldsymbol{\tau}|$, $\gamma = |\boldsymbol{\gamma}|$. Градиенты $\nabla_{\boldsymbol{\tau}}$ и $\nabla_{\boldsymbol{\gamma}}$ определены в системах координат в плоскости напряжений и деформаций и в декартовых координатах имеют вид

$$\nabla_{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial \tau_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial \tau_y}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial \gamma_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial \gamma_y}. \tag{V. 2.3}$$

Обозначая через $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ положение радиус-вектора точки на физической плоскости, для уравнений совместности и равновесия получим

$$\nabla_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{r} = 0, \quad \nabla_{\boldsymbol{\tau}} \times \mathbf{r} = 0. \tag{V. 2.4}$$

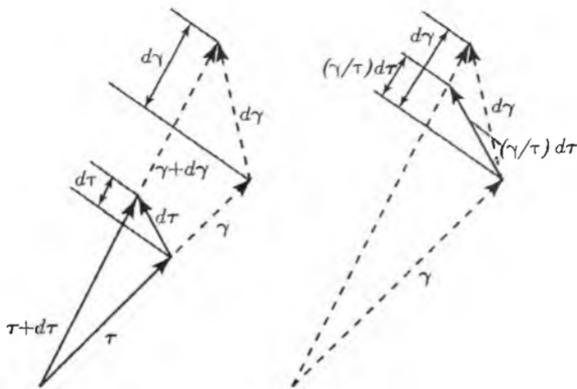


Рис. 23. Векторы напряжения и деформации и их приращения

Для изменений векторов $(d\gamma, d\tau)$ векторов (γ, τ) по определению градиента имеем

$$d\tau \cdot \nabla_\tau = d\gamma \cdot \nabla_\gamma. \tag{V. 2.5}$$

На рис. 23 показаны векторы напряжения (сплошная линия) и деформации (пунктир) и малые их приращения; деформационная теория требует, чтобы векторы γ и $\gamma + d\gamma$ были коллинеарны векторам τ и $\tau + d\tau$. На рис. 23 видно, что вектор $d\gamma$ представляет собой сумму вектора в направлении $d\tau$ и вектора в направлении γ . Вследствие геометрического подобия вклад в $d\gamma$ в направлении $d\tau$ будет $(\gamma/\tau)d\tau$. Из геометрического построения (рис. 23) следует, что величина вклада в направлении γ равна, с учетом членов первого порядка, $d\gamma - (\gamma/\tau)d\tau$, т.к. γ/γ является единичным вектором в направлении γ . В векторной форме эта величина равна $[(d\gamma/d\tau) - \gamma/\tau] (\gamma/\gamma)d\tau$. Заметим, что вообще $d\tau, d\gamma$ не равны $|d\tau|$ и $|d\gamma|$, но представляют собой изменение скалярных длин векторов τ и γ .

Так как $\tau^2 = \tau \cdot \vec{\tau}$, $d\tau = (\tau/\tau) \cdot d\tau = (\gamma/\gamma) \cdot \tau$, то вклад в направление γ будет

$$\left(\frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{\gamma}{\tau} \right) \frac{\gamma}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{\gamma} \cdot d\tau \right). \tag{V 2.6}$$

Суммируя эти две величины, получим

$$d\gamma = \frac{\gamma}{\tau} \left[d\tau + \left(\frac{\tau d\gamma}{\gamma d\tau} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{\gamma} \cdot d\tau \right) \right]. \tag{V. 2.7}$$

Подставляя выражение для $d\gamma$ в уравнение (V 2.5), связывающее градиенты, получим

$$d\tau \cdot \nabla_\tau = \frac{\gamma}{\tau} d\tau \cdot \left\{ \nabla_\gamma + \frac{\gamma}{\tau} \left(\frac{\tau d\gamma}{\gamma d\tau} - 1 \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma} \cdot d\tau \right) \right\}. \quad (\text{V. 2.8})$$

Поскольку это уравнение должно иметь место при произвольных значениях $d\tau$ для связи градиентов, выраженных через напряжения и деформации, с учетом соотношения $\tau = \tau(\gamma)$ между напряжениями и деформациями получим

$$\nabla_\tau = \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \left\{ \nabla_\gamma + \frac{\gamma}{\tau} \left[\frac{\tau(\gamma)}{\tau'(\gamma)} - 1 \right] \left(\frac{\gamma}{\gamma} \cdot \nabla_\gamma \right) \right\}. \quad (\text{V. 2.9})$$

Таким образом, основные уравнения равновесия и совместности сформулированы на плоскости годографа (на плоскости деформаций)

$$\nabla_\gamma \times \mathbf{r} = 0, \quad (\text{V. 2.10})$$

$$\nabla_\gamma \cdot \mathbf{r} + \left[\frac{\tau(\gamma)}{\tau'(\gamma)} - 1 \right] \frac{\gamma}{\tau} \cdot \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma} \cdot \nabla_\gamma \right) \mathbf{r} \right] = 0. \quad (\text{V. 2.11})$$

Эти уравнения можно привести к одному, если заметить, что уравнение (V. 2.10) допускает существование скалярной потенциальной функции $\psi = \psi(\gamma)$ такой, что физические координаты задаются с помощью нее следующим образом:

$$\mathbf{r} = \nabla_\gamma \psi. \quad (\text{V. 2.12})$$

Таким образом, уравнение (V. 2.10) удовлетворяется тождественно, а оставшееся уравнение (V. 2.11) приводит к уравнению для ψ :

$$\nabla_\gamma \psi + \left[\frac{\tau(\gamma)}{\tau'(\gamma)} - 1 \right] \frac{\gamma}{\tau} \cdot \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma} \cdot \nabla_\gamma \right) (\nabla \psi) \right] = 0. \quad (\text{V. 2.13})$$

Заметим, что для линейно упругого материала имеет место линейное соотношение $\tau(\gamma) = G\gamma$ и $\tau(\gamma)/(\tau'(\gamma)\gamma) = 1$, таким образом, полученное уравнение сводится к уравнению Лапласа.

В декартовой системе координат

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x}, \quad y = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y}, \quad (\text{V. 2.14})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_y^2} + \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{\tau(\gamma)}{\gamma \tau'(\gamma)} - 1 \right] \left[\gamma_x^2 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x^2} + 2\gamma_x \gamma_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_x \partial \gamma_y} + \gamma_y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma_y^2} \right] = 0.$$

Последнее дифференциальное уравнение принимает значительно более простой вид, если использовать полярную систему координат в плоскости γ_x, γ_y , состоящую из величины γ главного сдвига и из угла θ – угла между направлением главной деформации сдвига (или направлением главного напряжения) и осью Oy . В этой системе координат с радиальным и угловым единичными векторами (\mathbf{l}, \mathbf{k})

$$\gamma = \gamma \mathbf{k}, \quad \nabla_\gamma = \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{V. 2.15})$$

При $\psi = \psi(\gamma, \theta)$ координаты радиус-вектора \mathbf{r} в радиальном и угловом направлениях γ и θ можно получить из формулы (V. 2.12). В декартовых координатах имеем

$$x = -\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\cos \theta}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad y = \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\sin \theta}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (\text{V. 2.16})$$

Уравнение (V. 2.15) для ψ будет иметь вид

$$\frac{\tau(\gamma)}{\gamma \tau'(\gamma)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (\text{V. 2.17})$$

Такая запись уравнения в полярных координатах особенно удобна при рассмотрении задач о трещинах или острых вырезах в упругопластических материалах до тех пор, пока пластическая область полностью не охватывает вырезанную плоскость.

Для вывода выражения для перемещения w в зависимости от потенциальной функции ψ заметим, что

$$dw = \gamma \cdot d\mathbf{r} = d(\gamma \cdot \mathbf{r}) - d\gamma \cdot \mathbf{r}, \quad (\text{V. 2.18})$$

так как $\mathbf{r} = \nabla_\gamma \psi$, $d\gamma \cdot \mathbf{r} = d\gamma \cdot \nabla_\gamma \psi = d\psi$ является полным дифференциалом. Интегрируя (V. 2.18), получим

$$w = \gamma \cdot \nabla_\gamma \psi - \psi + const. \quad (\text{V. 2.19})$$

3. Острый вырез в полубесконечной плоскости

В этом разделе дана общая формулировка задачи об остром вырезе с углом 2α и глубиной a в полубесконечной плоскости, подверженной действию на бесконечности напряжений, как это показано на рис. 24.

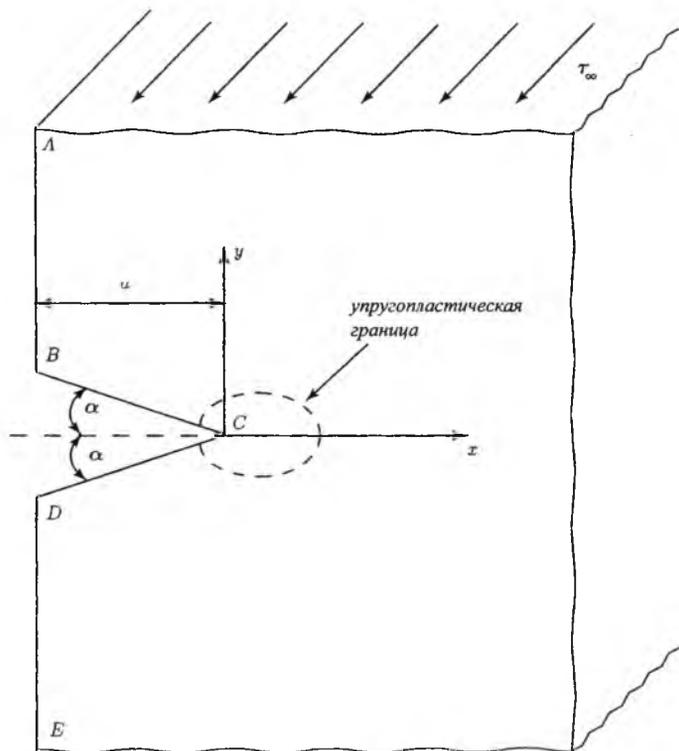


Рис. 24. Антиплоский сдвиг полупространства с острым вырезом с углом 2α и глубиной a

Решение этой задачи в случае идеально пластического материала приведено в работах Макклинтока, Коскинена, Райса [39], [14], [31].

Заметим, что вследствие симметрии решение будет также пригодным в случае внутреннего выреза с двумя вершинами (при добавлении зеркально отображенной части (рис. 24) в бесконечной области, поскольку τ_x и, следовательно, γ_x равны нулю вдоль центральной линии.

Интересно отметить, что решение можно получить в наиболее общем виде, не предполагая существования определенной зависимости между напряжением и деформацией $\tau = \tau(\gamma)$ в области упрочнения.

Геометрический вид отображенной физической плоскости (рис. 24) на плоскость деформаций γ_x, γ_y показан на рис. 25 и определяется с учетом направления вектора деформации в различных точках вдоль границы.

Заметим, что вдоль AB $\gamma_x = 0$, $\theta = 0$. Граничные условия в свободном от напряжений угле B требуют, чтобы $\gamma_x = 0$ и $\gamma_y = 0$ в этой точке; точка A находится на бесконечности, где деформации постоянны $\gamma_x = 0$ и $\gamma_y = \gamma_\infty$. Следовательно, в плоскости деформаций γ_x, γ_y прямая AB отображается в отрезок оси γ_y между 0 и γ_∞ . Вдоль границы выреза BC $\theta = \pi/2 - \alpha$. Так как вектор деформации должен скачкообразно менять направление в точке C , в этой точке имеется особенность и BC образует угол α с отрицательным направлением оси γ_x в плоскости γ_x, γ_y с точкой C_∞ на бесконечности.

Аналогичным образом находятся отображения границ CD и DE . Совпадение AB и DE соответственно с верхней и нижней сторонами разреза в плоскости деформаций на рис. 25 можно доказать, если заметить, что на рис. 24 γ_x отрицательна на малых расстояниях от AB и положительна на малых расстояниях от DE .

Для определения граничных условий в плоскости деформаций необходимо отметить, что $x = -a$ вдоль AB и DE . Если учесть, что физические координаты связаны с градиентом потенциала деформации соотношениями (V. 2.12), то на AB DE получим

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x} \right|_{\gamma_x=0} = - \left. \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = -a. \quad (\text{V. 3.1})$$

На границе выреза BC имеем $y + x \operatorname{tg} \alpha = 0$. Подставляя значения x и y из (V. 2.16) в полярных координатах и полагая $\theta = \pi/2 - \alpha$, получим на BC

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2-\alpha} = 0. \quad (\text{V. 3.2})$$

Аналогично на CD имеем

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{\theta=-\pi/2-\alpha} = 0. \quad (\text{V. 3.3})$$

Принимая во внимание, что ψ удовлетворяет уравнению (V. 2.13), получим формулировку полной краевой задачи в плоскости деформаций. Геометрический вид разреза затрудняет решение задачи в общем случае произвольной нелинейной зависимости $\tau(\gamma)$ и для произвольного нагружения τ_∞ . Однако, когда на начальной стадии деформирования рассматриваемый материал является линейно упругим, как это показано на рис. 20, а потенциальная функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla_\gamma^2 \psi = 0 \quad \text{при} \quad \gamma < \gamma_0 \quad (\text{V. 3.4})$$

($\gamma = \gamma_0$ представляет собой отображение упругопластической границы) и если $\gamma_\infty < \gamma_0$, то разрез полностью находится в области, где имеет место уравнение Лапласа, то для нахождения решения в сложной геометрической области можно применять мощные методы теории аналитических функций.

Решение для ψ сводится к определению произвольной аналитической функции в упругой области ($\gamma < \gamma_0$) с помощью последовательных использований конформных отображений, введения зеркально отображенной плоскости и сведению к краевой задачи Гильберта. В пластической области ($\gamma > \gamma_0$) применяется метод разделения переменных и ψ выражается в виде суммы решений уравнения (V. 2.17) с подлежащими определению постоянными коэффициентами. Наконец, оба решения соединяются на упругопластической границе ($\gamma = \gamma_0$), что приводит к бесконечной системе уравнений относительно различных неизвестных величин. Эта система решается с помощью разложения в ряды по величине приложенной на бесконечности деформации к деформации, соответствующей начальному пределу текучести.

Решение в упругой области $\gamma < \gamma_0$

Поскольку в этой части плоскости деформаций $\nabla_\gamma^2 \psi = 0$, ψ можно представить как мнимую часть некоторой аналитической функции

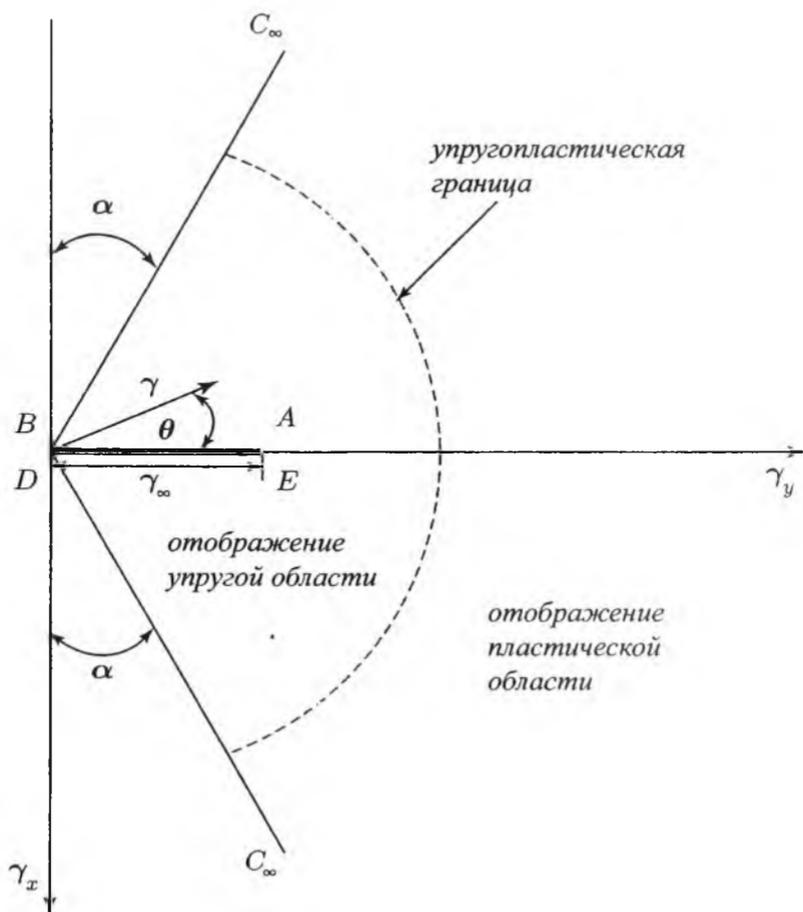


Рис. 25. Отображение физической плоскости на плоскость деформаций

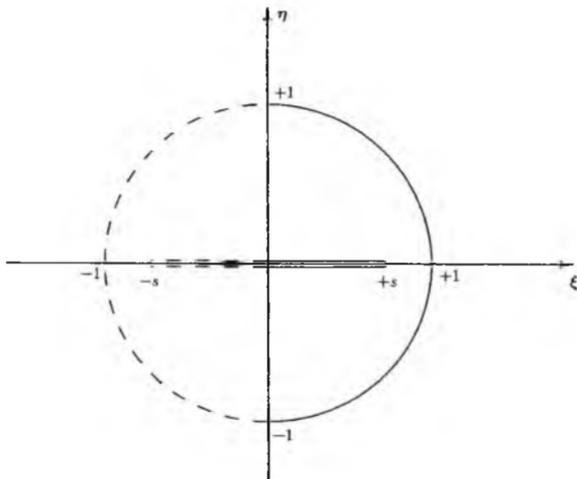


Рис. 26. Конформное отображение упругой области плоскости деформаций в полукруг с разрезом в плоскости ζ : пунктиром показана зеркально отображенная область

от $\gamma_y - i\gamma_x = \gamma e^{i\theta}$. Конформное отображение $\zeta = \xi + i\eta = \zeta(\gamma_y - i\gamma_x)$ позволяет представить ψ в виде $\psi = Im[h(\zeta)]$ и преобразует нормальные производные, фигурирующие в граничных условия, в нормальные производные в плоскости ζ . Преобразование

$$\zeta = \xi + i\eta = \left(\frac{\gamma_y - i\gamma_x}{\gamma_0} \right)^\lambda = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^\lambda e^{i\lambda\theta}, \quad (V. 3.5)$$

где λ связана с половиной угла выреза α соотношением

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha}, \quad (V. 3.6)$$

отображает сектор с разрезом, охватывающий упругую область на рис. 24 в полукруг с разрезом плоскости ζ , как показано на рис. 26, где разрез занимает отрезок $0 \leq \xi \leq s$ оси ξ , а s обозначает безразмерную приложенную нагрузку

$$s = \left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} \right)^\lambda = \left(\frac{\tau_\infty}{\tau_0} \right)^\lambda. \quad (V. 3.7)$$

Первые производные ψ по γ_x и γ_y дают физические координаты. Усло-

вия Коши – Римана приводят к следующему соотношению

$$\begin{aligned} -x + iy &= -\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_x} + i\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_y} = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + i\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} \right) = \\ &= \frac{\lambda}{\gamma_0} \zeta^{(\lambda-1)/\lambda} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + i\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right) = \frac{\lambda}{\gamma_0} \zeta^{(\lambda-1)/\lambda} h'(\zeta). \end{aligned} \quad (\text{V. 3.8})$$

Используя равенство (V. 3.8) для установления связи между производными в плоскости деформаций и в плоскости ζ , находим, что граничные условия (V. 3.2) и (V. 3.3) на наклонных линиях на рис. 24 переходят в условие

$$\left. \frac{d\psi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (\text{V. 3.9})$$

на оси η (рис. 26), а условие (V. 3.1) на разрезе (рис. 24) – в условие

$$\left. \frac{d\psi}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\gamma_0}{\lambda} \xi^{-(\lambda-1)/\lambda} a, \quad 0 < \xi < s \quad (\text{V. 3.10})$$

на отображенном вдоль оси ξ разрезе.

При геометрическом представлении функции ψ как высоты некоторой поверхности, измеренной перпендикулярно от плоскости ξ, η , условие (V. 3.10) соответствует занижению поверхности на верхней стороне разреза и повышению на нижней стороне путем применения вращения $\partial\psi/\partial\eta|_{\eta=0}$ вокруг оси ξ , в то время как (V. 3.9) требует, чтобы вращение вокруг оси η в точках на этой оси были равны нулю. Такое же искажение (и, таким образом, идентичное решение) получается, если рассмотреть круговую область, содержащую разрез $-s < \xi < +s$ с таким же вращением поверхности ψ в точках ξ и $-\xi$. Таким образом, введение зеркально отображенного разреза, показанного на рис. 26 пунктирной линией, с $(\partial\psi/\partial\eta)(\xi, 0) = (\partial\psi/\partial\eta)(-\xi, 0)$ тождественно удовлетворяет условию (V. 3.9).

Продолжая аналитически $h(\zeta)$ в область $\xi < 0$ и принимая во внимание равенство $2(\partial\psi/\partial\eta) = h'(\zeta) + \bar{h}'(\bar{\zeta})$, из граничных условий на верхней стороне разреза и его зеркального отображения получим следующее соотношение:

$$[h'(\xi)]^+ + [\bar{h}'(\xi)]^- = \frac{2\gamma_0}{\lambda} |\xi|^{(\lambda-1)/\lambda} a, \quad -s < \xi < +s, \quad (\text{V. 3.11})$$

где $[q(\xi)]^+$ и $[\bar{q}(\xi)]^-$ обозначают значения $q(\zeta)$, когда ζ стремится к оси ξ сверху и снизу соответственно. Аналогично условия на нижней стороне будут

$$[h'(\xi)]^- + [\bar{h}'(\xi)]^+ = \frac{2\gamma_0}{\lambda} |\xi|^{(\lambda-1)/\lambda} a, \quad -s < \xi < s. \quad (\text{V. 3.12})$$

Вычитая (V. 3.12) из (V. 3.11), получим

$$[h(\xi) - \bar{h}(\xi)]^+ = [h(\xi) - \bar{h}(\xi)]^-, \quad -s < \xi < s, \quad (\text{V. 3.13})$$

откуда вытекает, что $h(\zeta) - \bar{h}(\zeta)$ однозначна вдоль разреза и, следовательно, аналитична всюду внутри единичного круга $|\xi| \leq 1$, включая точки вдоль разреза. Однако вследствие симметрии имеем $(\partial\psi/\partial\xi)(\xi, 0) = h(\xi) - \bar{h}(\xi)$ (для $1 < |\xi| > s$), тогда вследствие аналитичности функция $h(\zeta) - \bar{h}(\zeta)$ будет равна всюду нулю в единичном круге и $h(\zeta) = \bar{h}(\zeta)$. Следовательно, (V. 3.11) и (V. 3.12) принимают вид

$$[h'(\xi)]^+ + [h'(\xi)]^- = \frac{2\gamma_0}{\lambda} |\xi|^{(\lambda-1)/\lambda} a, \quad -s < \xi < s. \quad (\text{V. 3.14})$$

Следуя Мусхелишвили [20], введем функцию $(\zeta^2 - s^2)^{1/2}$, принимающую значения $\pm i(s^2 - \xi^2)^{1/2}$ на верхней и нижней сторонах, так что

$$\begin{aligned} & [(\xi^2 - s^2)^{1/2} h'(\xi)]^+ - [(\xi^2 - s^2)^{1/2} h'(\xi)]^- = \\ & = \frac{2i\gamma_0}{\lambda} |\xi|^{-(\lambda-1)/\lambda} (s^2 - \xi^2)^{1/2} a, \quad -s < \xi < +s. \end{aligned} \quad (\text{V. 3.15})$$

Поскольку однозначность функции $(\xi^2 - s^2)^{1/2}$ при $|\xi| > s$ и предыдущие замечания относительно симметрии требуют, чтобы разность в (V. 3.15) равнялась нулю на $1 > |\xi| > s$, то получим [20] следующее частное решение $h'_p(\zeta)$ уравнения (V. 3.15):

$$(\zeta^2 - s^2)^{1/2} h'_p(\zeta) = \frac{\gamma_0 a}{\lambda\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{(s^2 - \mu^2)^{1/2} |\mu|^{-(\lambda-1)/\lambda}}{\mu - \zeta} d\mu. \quad (\text{V. 3.16})$$

Полное решение уравнения (V. 3.15) можно получить путем добавления наиболее общего однородного решения $h'_H(\zeta)$, которое просто состоит в том, чтобы функция $(\zeta^2 - s^2)h'_H(\zeta)$ была аналитична всюду в единичном круге. Для того чтобы удовлетворить условиям симметрии

$(\partial\psi/\partial\eta)(\xi, 0) = (\partial\psi/\partial\eta)(-\xi, 0)$ вне разреза $1 > |\xi| > s$, это условие принимает вид

$$(\zeta^2 - s^2)^{1/2} h'_H(\zeta) = \zeta g(\zeta), \quad (\text{V. 3.17})$$

где $g(\zeta)$ аналитична всюду при $|\zeta| < 1$ и ее разложение в ряд Тейлора содержит только четные степени ζ .

Складывая (V 3.16) и (V. 3.17), учитывая, что, согласно (V. 3.8), физические координаты даны соотношением

$$-x + iy = (\lambda/\gamma_0) \zeta^{(\lambda-1)/\lambda} [h'_p(\zeta) + h'_H(\zeta)],$$

и подставляя вместо переменной интегрирования в (V. 3.16) величину $t = (\mu/s)^{-\lambda}$, получим

$$\begin{aligned} -x + iy &= (\lambda/\gamma_0) \zeta^{(\lambda-1)/\lambda} (\zeta^2 - s^2)^{-1/2} \times \\ &\times \left\{ g(\zeta) + \frac{2}{\pi} \gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda} \int_0^1 \frac{(1-t^{2\lambda})^{1/2} dt}{s^2 t^{2\lambda} - \zeta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V. 3.18})$$

Если бы рассматриваемый материал оставался линейно упругим для $\gamma > \gamma_0$, то решение (V. 3.18) было бы пригодным также и для всех $|\zeta| > 1$ и из требования чтобы $-x + iy \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ (конец трещины $x = y = 0$ соответствует бесконечно удаленной точке в плоскости деформаций), вытекало бы $g(\zeta) = 0$. Однако для упругопластического материала функция $g(\zeta)$ должна быть определена, как это будет показано в последующем из требования, чтобы x и y были непрерывными функциями от γ и θ на упругопластической границе $\gamma = \gamma_0$.

Решение в пластической области

Уравнение (V 2.15) для ψ справедливо в пластической области, где $\tau = \tau(\gamma)$ представляет собой связь между напряжением и деформацией при упрочнении. Уравнения (V. 3.2) и (V. 3.3) показывают, что удобнее исследовать это уравнение в полярных координатах (V. 2.17), решение которого, найденное методом разделения переменных, будет

$$\psi(\gamma, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k f_k(\gamma) \sin[(2k-1)\lambda\theta], \quad (\text{V. 3.19})$$

где λ определяется выражением (V. 3.6), а $f_k(\gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\tau(\gamma)}{\gamma\tau'(\gamma)}f_k''(\gamma) + \frac{1}{\gamma}f_k'(\gamma) - \frac{(2k-1)^2\lambda^2}{\gamma^2}f_k(\gamma) = 0 \quad (\text{V. 3.20})$$

при следующих условиях

$$f_k(\gamma_0) = 1, \quad f_k'(\infty) = 0. \quad (\text{V. 3.21})$$

Последнее из условий (V. 3.21) вытекает из того, что $x = y = 0$ (конец трещины) для бесконечных деформаций; первое из этих условий налагается просто для определенности функций $f_k(\gamma)$.

Можно допускать довольно общие виды для функции $\tau(\gamma)$, и, действительно, нет необходимости, чтобы производная функции $\tau(\gamma)$ была непрерывна в области упрочнения. Кроме удовлетворения требованиям (V. 3.21) условие непрерывности x и y как функций от γ и θ требует, чтобы $f_k(\gamma)$ и $f_k'(\gamma)$ были непрерывными в точках разрыва функции $\tau'(\gamma)$. Интересным и особенно важным для практических применений механики хрупкого разрушения является тот факт, что в случае трещины решение для $f_1(\gamma)$ можно найти с помощью одной квадратуры, содержащей функцию $\tau(\gamma)$. Однако, определение неизвестных D_k для завершения решения зависит только от совокупности функций $f_k'(\gamma_0)$ и не зависит от функционального вида $f_k(\gamma)$. Это обстоятельство позволяет найти общее решение, пригодное для любой зависимости между напряжением и деформацией в области упрочнения.

Уравнения (V. 2.16) для физических координат можно записать в следующем, более компактном, виде:

$$-x + iy = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right). \quad (\text{V. 3.22})$$

Определяя производные на упругопластической границе и учитывая, что $f_k(\gamma_0) = 1$, получим

$$\begin{aligned} (-x + iy)|_{\gamma=\gamma_0} &= \frac{e^{-i\theta}}{2\gamma_0} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \{ [(2k-1)\lambda + \\ &+ \gamma_0 f_k'(\gamma_0)] e^{i(2k-1)\lambda\theta} + [(2k-1)\lambda - \\ &- \gamma_0 f_k'(\gamma_0)] e^{-i(2k-1)\lambda\theta} \}. \end{aligned} \quad (\text{V. 3.23})$$

Соединение решений

Формулы для физических координат были получены как для упругой ($\gamma < \gamma_0$), так и для пластической ($\gamma > \gamma_0$) областей плоскости деформаций. Из условия совпадения этих решений на упругопластической границе $\gamma = \gamma_0$ можно найти неизвестную функцию $g(\zeta)$ и постоянные D_k . Рассмотрим величину $\sigma = e^{i\lambda\theta}$, представляющую собой значение ζ на $\gamma = \gamma_0$. Приравнявая (V. 3.18) выражению (V. 3.23) при $\zeta = \sigma$ и решая полученное уравнение относительно $g(\zeta)$, получим требуемое условие непрерывности решения

$$\begin{aligned}
 g(\zeta) = & \frac{2}{\pi} \gamma_0 s^{(1+\lambda)/\lambda} \sigma^{-2} \int_0^1 \frac{(1-t^{2\lambda})^{1/2} dt}{1-(s^2 \sigma^{-2}) t^{2\lambda}} + \\
 & + \frac{1}{2\lambda} (1-s^2 \sigma^{-2})^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \{ [(2k-1)\lambda + \\
 & + \gamma_0 f'_k(\gamma_0)] \sigma^{2(k-1)} + [(2k-1)\lambda - \gamma_0 f'_k(\gamma_0)] \sigma^{-2k} \}.
 \end{aligned}
 \tag{V. 3.24}$$

Заметим, что правая часть этого выражения содержит как положительные, так и отрицательные степени σ^2 , но следует вспомнить, что $g(\zeta)$ аналитична в упругой области $|\zeta| \leq 1$ и, таким образом, ее значение на границе $g(\sigma)$ может содержать лишь неотрицательные степени σ^2 . Приравнявая нулю коэффициенты при $\sigma^{-2}, \sigma^{-4}, \dots, \sigma^{-2k}$, получим бесконечную систему линейных уравнений для определения $D_1, D_2, \dots, D_{2k}, \dots$. После определения этих величин и подстановки их в (V. 3.19), с учетом (V. 3.22) получим значения физических координат точек, деформируемых в пластической области. Подставляя D_k в (V. 3.24) и заменяя σ на ζ , определим функции $g(\zeta)$, а из (V. 3.18) – физические координаты точек, деформируемых в упругой области⁸.

Применим метод разложения решений по степеням безразмерной приложенной нагрузки $s = (\gamma_0/\gamma_0)^\lambda = (\tau_0/\tau_0)^\lambda$.

Представим функцию $g(\zeta)$ в виде

$$g(\zeta) = -\frac{1}{2} \gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\zeta) s^{2j},
 \tag{V. 3.25}$$

где функция $G_j(\zeta)$ не зависит от s и аналитична в единичном круге

⁸К настоящему времени, по-видимому, не получено решения уравнений для D_k в замкнутом виде и для исследования системы уравнений относительно D_k можно применить метод разложения решений по степеням безразмерной приложенной нагрузки $s = (\gamma_0/\gamma_0)^\lambda = (\tau_0/\tau_0)^\lambda$.

$|\zeta| \leq 1$. Постоянный коэффициент D_k представляется в виде

$$D_k = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{2(k-1)\lambda - \gamma_0 f'_k(\gamma_0)} \sum_{j=0}^{\infty} d_{k,j} s^{2j}, \quad (\text{V. 3.26})$$

где $d_{k,j}$ не зависят от s . Интеграл, фигурирующий в (V. 3.24), можно разложить в ряд Лорана при $s < 1$; положим

$$\sum_{j=0}^{\infty} B_j \sigma^{-2j} s^{2j} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t^{2\lambda})^{1/2} dt}{1 - (s^2 \sigma^{-2}) t^{2\lambda}}, \quad (\text{V. 3.27})$$

где постоянные B_j выражены через гамма-функции следующим образом:

$$B_j = \frac{4}{\pi} \int_0^1 t^{2j\lambda} (1-t^{2\lambda})^{1/2} dt = \frac{\Gamma\left(j + \frac{1}{2\lambda}\right)}{\lambda\sqrt{\pi}\Gamma\left(j + \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2}\right)}. \quad (\text{V. 3.28})$$

Подставляя эти выражения в (V. 3.24), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\sigma) s^{2j} = & -\sum_{j=0}^{\infty} B_j \sigma^{-2(j+1)} s^{2j} + \\ & + (1 - s^2 \sigma^{-2})^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} s^{2j} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,j} \left[C_k \sigma^{2(k-1)} + \sigma^{-2k} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{V. 3.29})$$

где

$$C_k = \frac{(2k-1)\lambda + \gamma_0 f'_k(\gamma_0)}{(2k-1)\lambda - \gamma_0 f'_k(\gamma_0)}. \quad (\text{V. 3.30})$$

Неизвестные величины определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях s . Приравнявая коэффициенты при s^0 , получим

$$G_0(\sigma) = -B_0 \sigma^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,0} \left[C_k \sigma^{2(k-1)} + \sigma^{-2k} \right]. \quad (\text{V. 3.31})$$

Так как вследствие аналитичности функции $G_0(\zeta)$ отрицательные степени σ отсутствуют, решение для $d_{k,0}$ будет

$$d_{1,0} = B_0, \quad d_{k,0} = 0, \quad k \geq 2, \quad (\text{V. 3.32})$$

подставляя эти значения в (V. 3.31), получим

$$G_0(\zeta) = B_0 C_1. \quad (\text{V. 3.33})$$

Приравнивая затем коэффициенты при s^2 в (V. 3.29) с учетом выражений (V. 3.32), получим

$$G_1(\sigma) = -B_1 \sigma^{-4} - \frac{1}{2} \sigma^{-2} \{ B_0 [C_1 + \sigma^{-2}] \} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,1} [C_k^{2(k-1)} + \sigma^{-2k}]. \quad (\text{V. 3.34})$$

Поскольку отрицательные степени отсутствуют

$$d_{1,1} = \frac{1}{2} B_0 C_1, \quad (\text{V. 3.35})$$

$$d_{2,1} = B_1 + \frac{1}{2} B_0, \quad (\text{V. 3.35})$$

$$d_{k,1} = 0, \quad k \geq 3, \quad (\text{V. 3.36})$$

подставляя в (V. 3.34), находим

$$G_1(\zeta) = \frac{1}{2} B_0 C_1^2 + \left(B_1 + \frac{1}{2} B_0 \right) C_2 \zeta^2 \quad (\text{V. 3.37})$$

Продолжая таким же образом, можно определить $d_{k,2}$ и $G_2(\zeta)$, $d_{k,s}$ и $G_3(\zeta)$ и т.д. Можно установить рекуррентную формулу для определения $G_j(\zeta)$ и $d_{k,j}$ через $d_{p,j-1}$, $d_{q,j-2}$ и т.д. Пусть

$$\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p \sigma^{-2p} s^{2p} = 1 - (1 - s^2 \sigma^{-1})^{1/2},$$

$$\beta_1 = 1/2, \quad \beta_2 = 1/8, \quad \beta_3 = 1/16, \quad \beta_4 = 5/128, \quad (\text{V. 3.38})$$

$$\beta_p = \frac{1}{4^{p-1}} \frac{(2p-3)!}{(p-2)! p!}, \quad p \geq 2,$$

где коэффициенты β_p получаются с помощью формулы бинома Ньютона. При подстановке этого ряда в (V. 3.29) вместо выражения $(1 - s^2 \sigma^{-2})^{1/2}$ и нахождения после умножения бесконечных рядов коэффициента при

s^{2j} получим для $j \geq 1$

$$G_j(\sigma) = -B_j \sigma^{-2(j+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,j} \left[C_k^{2(k-1)} + \sigma^{-2k} \right] - \sum_{i=0}^{j-1} \beta_{j-i} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,i} \left[C_k \sigma^{2(k-1-j-1)} + \sigma^{-2(k+j-i)} \right] \right\}. \tag{V. 3.39}$$

После многочисленных преобразований и суммирований оказалось возможным нахождение коэффициентов при каждой отрицательной степени σ в правой части (V. 3.39). Далее, приравнявая эти коэффициенты нулю, можно определить $d_{k,j}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) в зависимости от $d_{r,j-1}, d_{r,j-2}, \dots, d_{r,0}$ ($r = 1, 2, 3, \dots$). В результате получим пригодное для $j \geq 1$ рекуррентное решение, так что начиная расчет от значения $d_{r,0}$, данного формулами (V. 3.33), можно вычислить последовательность значений $d_{r,1}$, затем, исходя из двух последовательностей $d_{r,0}$ и $d_{r,1}$, вычислим последовательность $d_{r,2}$ и т.д. Рекуррентные уравнения будут

$$d_{1,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \beta_{j-i} d_{j-i,i} C_{j-i},$$

$$d_{k,j} = \sum_{i=j+1-k}^{j-1} \beta_{j-i} d_{k-j+i,i} + \sum_{i=0}^{j-k} \beta_{j-i} d_{j-k+1-i,i} C_{j-k+1-i}, \quad 2 \leq k \leq j, \tag{V. 3.40}$$

$$d_{k,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \beta_{j-i} d_{k-j+i,i}, \quad j+2 \leq k < \infty.$$

Так как после вычислений мы должны определить решение для $d_{k,j}$ в виде ряда от $d_{k,j}$ (V. 3.26), очень полезным является тот факт, что

$$d_{k,j} = 0, \quad \text{если} \quad k \geq j+2. \tag{V. 3.41}$$

Легко видеть из (V. 3.32) и (V. 3.35), что это верно для $d_{k,0}$ и $d_{k,1}$. Тогда из последней рекуррентной формулы (V. 3.40) непосредственно вытекает, что (V. 3.41) верно и для всех j . Предположим, что мы пренебрегаем по сравнению с единицей слагаемыми, содержащими степени s выше $2j$

(или в силу (V. 3.7)) слагаемыми, содержащими степени выше $2\lambda J$) в выражениях для D_k . Тогда, приравнявая нулю все пренебрегаемые члены высшего порядка (V. 3.26) и (V. 3.41), получим

$$D_k = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{(2k-1)\lambda - \gamma_0 f'_k(\gamma_0)} \sum_{j=k-1}^J d_{k,j} s^{2j},$$

$$k = 1, 2, \dots, J+1, \quad (\text{V. 3.42})$$

$$D_k = 0, \quad k = J+2, J+3, \dots$$

Таким образом, удерживая первые $J+1$ слагаемые в решении (V. 3.19) для ψ и вычисляя коэффициенты согласно (V. 3.42) при конечном числе $d_{k,j}$, определяемых из рекуррентных формул (V. 3.42), находим значения физических координат, соответствующих заданной деформации, с точностью до членов порядка $(\gamma_\infty/\gamma_0)^{2\lambda(J+1)}$. Интересно также отметить тот факт, что решение, определенное с любой заранее заданной точностью, удовлетворяет всем граничным условиям и основным уравнениям в плоскости деформаций на рис. 26, за исключением условия непрерывности вдоль дуги $\gamma = \gamma_0$, которое удовлетворяется с выбранной точностью. В физической плоскости на рис. 24 это означает, что граничное условие отсутствия напряжений на берегах разреза удовлетворяется точно, а уравнения равновесия, условия совместности деформаций и соотношения, связывающие напряжения с деформациями, удовлетворяются точно в упругой и пластической областях физической плоскости, являющихся отображениями областей $\gamma < \gamma_0$ и $\gamma > \gamma_0$ в плоскости деформаций. Приближенность формулы (V. 3.42) проявляется в том, что значения физических координат, соответствующих заданным деформациям, верны с точностью до $(\gamma_\infty/\gamma_0)^{2\lambda(J+1)}$; ошибка такого же порядка возникает при определении положения упругопластической границы в физической плоскости из решений в упругой и пластической областях в отдельности и, следовательно, при определении истинного положения этой границы. Аналитические функции $G_j(\zeta)$, фигурирующие в формуле (V. 3.25) для $g(\zeta)$, получаются из (V. 3.39). Убедившись, что в решении для $d_{k,j}$ все отрицательные степени σ исключены, и используя (V. 3.41), получим

$$G_j(\zeta) = \sum_{q=0}^j d_{q+1,j} C_{q+1} \zeta^{2q} + \sum_{p=0}^{j-1} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \beta_{j-i} d_{j+p+1-i,i} C_{j+p+1-i} \right) \zeta^{2p}, \quad (\text{V. 3.43})$$

так что $G_j(\zeta)$ представляет собой полином от ζ степени $2j$.

Решение с точностью порядка s^{12}

Приведем формулы для D_k , где членами порядка s^{10} пренебрегают; физические координаты, соответствующие заданным деформациям в пластической области, могут быть определены из (V. 3.20) и (V. 3.23). Для трещины $\alpha = 0$ и $\lambda = 1$, так что ошибка в определении физических координат будет порядка $(\gamma_\infty/\gamma_0)^{12}$; для 90°-ного выреза $\alpha = \pi/4$ $\lambda = 2$, так что ошибка будет порядка $(\gamma_\infty/\gamma_0)^{24}$. Определяя $d_{k,j}$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) из (V. 3.41) и подставляя в (V. 3.42), получим

$$D_1 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f'_1(\gamma_0)} \left\{ B_0 + \frac{1}{2} B_0 C_1 s^2 + \frac{1}{4} B_0 C_1^2 s^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left[\left(B_1 + \frac{1}{2} B_0 \right) C_2 + B_0 C_1^3 \right] s^6 + \frac{1}{16} \left[\left(B_1 + \frac{5}{4} B_0 \right) C_2 C_1 + B_0 C_1^4 \right] s^8 + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \left[\left(B_2 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{8} B_0 \right) C_3 + \frac{1}{2} (B_1 + 2B_0) C_1 C_1^2 + \frac{1}{2} B_0 C_1^5 \right] s^{10} \right\},$$

$$D_2 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{3\lambda - \gamma_0 f'_2(\gamma_0)} \left\{ \left(B_1 + \frac{1}{2} B_0 \right) s^2 + \frac{3}{8} B_0 C_1 s^4 + \right. \\ \left. + \frac{3}{16} B_0 C_1^2 s^6 + \frac{1}{8} \left[\left(B_1 + \frac{1}{2} B_0 \right) C_2 + \frac{3}{4} B_0 C_1^2 \right] s^8 + \right. \\ \left. + \frac{3}{64} \left[\left(B_1 + \frac{3}{2} B_0 \right) C_1 C_2 + B_0 C_1^4 \right] s^{10} \right\},$$

$$D_3 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{5\lambda - \gamma_0 f'_3(\gamma_0)} \left\{ \left(B_2 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{8} B_0 - 0 \right) s^4 + \right. \\ \left. + \frac{5}{16} B_0 C_1 s^6 + \frac{5}{32} B_0 C_1^2 s^8 + \right. \quad (V. 3.44) \\ \left. + \frac{15}{128} \left[\left(B_1 + \frac{1}{2} B_0 \right) C_2 + \frac{2}{3} B_0 C_1^3 \right] s^{10} \right\},$$

$$D_4 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{7\lambda - \gamma_0 f'_4(\gamma_0)} \left\{ \left(B_2 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{3}{8} B_1 + \frac{5}{16} B_0 \right) s^6 + \right. \\ \left. + \frac{35}{128} B_0 C_1 s^8 + \frac{35}{256} B_0 C_1^2 s^{10} \right\},$$

$$D_5 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{9\lambda - \gamma_0 f'_5(\gamma_0)} \left\{ \left(B_4 + \frac{1}{2}B_3 + \frac{3}{8}B_2 + \frac{5}{16}B_1 + \frac{35}{128}B_0 \right) s^8 + \frac{63}{256}B_0 C_1 s^{10} \right\},$$

$$D_6 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{11\lambda - \gamma_0 f'_6(\gamma_0)} \left(B_5 + \frac{1}{2}B_4 + \frac{3}{8}B_3 + \frac{5}{16}B_2 + \frac{35}{128}B_1 + \frac{63}{256}B_0 \right) s^{10},$$

$$D_k = 0, \quad k = 7, 8, 9, \dots$$

Сравнивая эти уравнения с формулами (V. 3.35), можно определить $d_{k,j}$ и на основе (V. 3.25) и (V. 3.43) с такой же точностью функцию $g(\zeta)$, если бы потребовалось найти решение в упругой области. Кроме того, точность решения в пластической области можно улучшить путем добавления членов порядка s^{12} и s^{14} и т.д., после вычисления значений необходимых констант $d_{k,6}$, $d_{k,7}$ и т.д. из (V. 3.40). Однако вышеприведенные уравнения достаточно точны, за исключением случая, когда имеющая место на бесконечности деформация γ_∞ очень близка деформации при начальном пределе текучести γ_0 и s близко к единице (все рассматриваемые ряды расходятся при $s = 1$; физически это вытекает из того факта, что при данном условии упругопластическая граница простирается в бесконечность).

4. Случай малых размеров области пластического течения вблизи трещин и вырезов

Когда величина приложенного на бесконечности безразмерного напряжения $s = (\tau_\infty/\tau_0)^\lambda$ мала по сравнению с единицей и величиной s^2 можно пренебречь, то пластические деформации происходят в малой зоне, размеры которой пренебрежимо малы по сравнению с глубиной выреза a . В этом случае решение сводится к решению Нейбера [22], с той существенной разницей, что решение Нейбера не дает четкой зависимости между константой, связанной с приложенной нагрузкой, и геометрией выреза. Пренебрегая в (V. 3.44) всеми членами порядка s^2 или выше по сравнению с единицей, получим

$$D_1 = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f'_1(\gamma_0)}, \tag{V. 4.1}$$

$$D_k = 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

так что из (V. 3.19) имеем

$$\psi = -\frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f_1'(\gamma_0)} f_1(\gamma) \sin \lambda\theta. \quad (\text{V. 4.2})$$

Следовательно, в случае маломасштабного пластического течения физические координаты в пластической области (V. 2.16), соответствующие заданной деформации γ , составляющей угол θ с осью y , будут

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f_1'(\gamma_0)} \left[\frac{\lambda f_1(\gamma)}{\gamma} \cos \theta \cos \lambda\theta + f_1'(\gamma) \sin \theta \sin \lambda\theta \right], \\ y &= \frac{\lambda\gamma_0 a s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f_1'(\gamma_0)} \left[\frac{\lambda f_1(\gamma)}{\gamma} \sin \theta \cos \lambda\theta - f_1'(\gamma) \cos \theta \sin \lambda\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{V. 4.3})$$

При $\gamma = \gamma_0$ эти выражения дают параметрические уравнения упругопластической границы в зависимости от θ , учитывая, что на оси x за вершиной выреза $\theta = 0$, на основе (V.4.3) можно найти связь между деформацией и расстоянием от вершины выреза.

Спрашивается, какие соотношения, если таковые имеются, между напряжением и деформацией в области упрочнения $\tau = \tau(\gamma)$, использованные в рассматриваемой деформационной теории, приведут к решению, которое будет правильным и для теории течения. Это имеет место, если для точек в пластической области направление вектора деформации не зависит от приложенной нагрузки. Это означает, что при нахождении θ в зависимости от x и y получающееся в результате выражение не зависит от s . Исследуя решение (V.4.3) для случая малых размеров зоны пластичности, легко показать, что это требование равносильно тому, чтобы θ зависел только от соотношения x/y , так что отношение x/y , определенное из (V.4.3), не зависит от γ . Тогда можно показать, что x/y не зависит от γ , только если $f_1(\gamma)$ пропорциональна некоторой степени γ . Подставляя в (V. 3.21), находим, что решение (V. 4.3) для случая малых размеров зоны пластичности является решением теории течения лишь в том смысле, если зависимость между напряжением и деформацией при упрочнении имеет вид

$$\tau(\gamma) = \tau_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^N, \quad \gamma > \gamma_0. \quad (\text{V. 4.4})$$

Случай малых размеров зоны пластичности вблизи трещины

Когда угол выреза $\alpha = 0$, получим трещину длины a под действием постоянного поля напряжений. В этом случае из (V. 3.6) имеем $\lambda = 1$ и из уравнений (V. 3.20) и (V. 3.21) можно определить функцию $f_1(\gamma)$, фигурирующую в (V. 4.2) и (V. 4.3) с помощью одной квадратуры. Путем непосредственной подстановки можно доказать, что решение имеет вид

$$f_1(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma_0} \left[\int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right]^{-1} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)}. \quad (\text{V. 4.5})$$

Подставляя это выражение в (V. 4.2) и полагая $\lambda = 1$ и, согласно формуле (V. 3.28), $B_0 = 1$, получим

$$\psi = -\gamma_0 \tau_0 s^2 a \left[\gamma \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right] \sin \theta. \quad (\text{V. 4.6})$$

Интересно отметить, что выражение

$$K_{III} = \tau_{\infty} \sqrt{\pi a} = \tau_0 s \sqrt{\pi a} \quad (\text{V. 4.7})$$

представляет собой упругий коэффициент интенсивности напряжений для рассматриваемой задачи о трещине и напряжения по линейно упругому закону имеют следующий вид

$$\tau_y - i\tau_x = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi(x - iy)}}. \quad (\text{V. 4.8})$$

Поскольку предполагается, что пластическая область пренебрежимо мала по сравнению с геометрическими размерами (в масштабе длин, сравнимых с размерами пластической области), трещина будет полубесконечной, как это показано на рис. 27, и соответствующие граничные условия заключаются в том, что искомое решение асимптотически приближается к упругому решению (V. 4.8). На рис. 27 показано отображение полуразрезанной физической плоскости на плоскость деформаций. Граничные условия формулируются следующим образом

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = \pm \pi/2. \quad (\text{V. 4.9})$$

Так как $\tau_y - i\tau_x = (\tau_0/\gamma_0)\gamma e^{i\theta}$ в упругой области $\gamma < \gamma_0$ и

$$-x + iy = e^{-i\theta} [(1/\gamma)(\partial\psi/\partial\theta) + i(\partial\psi/\partial\gamma)],$$

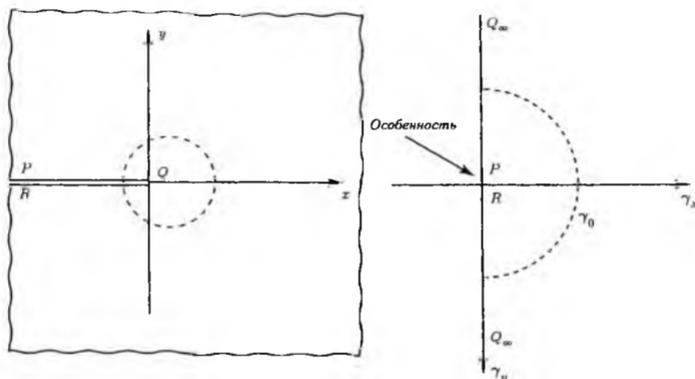


Рис. 27. Случай малой пластической зоны вблизи конца трещины

асимптотическое условие

$$\tau_y - i\tau_x \rightarrow \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi(x - iy)}} \quad \text{при} \quad |x + iy| \rightarrow \infty \quad (\text{V. 4.10})$$

эквивалентно условию

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \rightarrow -\frac{K_{III}^2 \gamma_0^2}{2\pi \tau_0^2 \gamma^2} e^{-i\theta} \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (\text{V. 4.11})$$

Интегрируя (V. 4.11), потребуем, чтобы функция ψ имела особенность вида

$$\psi \rightarrow -\frac{K_{III}^2 \gamma_0^2 \sin \theta}{2\pi \tau_0^2 \gamma} \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (\text{V. 4.12})$$

Решение для ψ , удовлетворяющее основному уравнению (V. 2.17), граничным условиям и имеющее требуемую особенность, будет

$$\psi = -\frac{K_{III}^2 \gamma_0^2}{2\pi \tau_0^2} \left\{ \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma_0^2} \left[2\gamma_0 \tau_0 \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} - 1 \right] \right\} \sin \theta, \quad \gamma < \gamma_0, \quad (\text{V. 4.13})$$

$$\psi = -\frac{\gamma_0}{\pi \tau_0} K_{III}^2 \left[\gamma \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right] \sin \theta, \quad \gamma > \gamma_0.$$

Когда K_{III} равно значению, данному (V 4.7), последнее уравнение в (V 4.13) идентично уравнению (V. 4.6); тем самым доказана общность зависимости решений от упругих коэффициентов интенсивности напряжений при малой пластической зоне.

Уравнения (V. 2.16) совместно с последним уравнением (V 4.13) дают следующие выражения для физических координат, соответствующих деформациям в пластической области:

$$x = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left\{ \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)} \cos 2\theta + \left[2\gamma_0\tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} - \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)} \right] \right\}, \quad (V. 4.14)$$

$$y = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)} \sin 2\theta.$$

Вычитая независимый от θ член из первого уравнения (V 4.14), возводя в квадрат оба уравнения и складывая их, находим уравнения линий постоянных деформаций γ и напряжений $\tau(\gamma)$ в пластической области

$$[x - X(\gamma)]^2 + y^2 = [R(\gamma)]^2, \quad (V. 4.15)$$

представляющих собой круги с центрами на расстояниях

$$X(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left[2\gamma_0\tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} - \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)} \right] \quad (V. 4.16)$$

от конца трещины и с радиусами

$$R(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)}. \quad (V. 4.17)$$

Аналогично упругопластическая граница также представляет собой круг с центром и радиусом

$$X(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left[2\gamma_0\tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} - 1 \right], \quad R(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2}. \quad (V. 4.18)$$

Интересно отметить, что в случае малой пластической зоны радиус пластической зоны не зависит от соотношения между напряжением и

деформацией при упрочнении. Пластическая зона простирается на расстояние $X(\gamma_0) + R(\gamma_0)$ от конца трещины в положительном направлении оси x и на расстояние $R(\gamma_0) - X(\gamma_0)$ в отрицательном направлении. После деления второго из уравнений (V. 4.14) на первое получим

$$\frac{y}{x - X(y)} = \operatorname{tg} 2\theta, \quad (\text{V. 4.19})$$

так что, если в заданной точке x, y имеется деформация величины γ согласно (V. 4.15), то соответствующий угол θ между вектором деформации и осью y равен половине угла, составленного прямой, соединяющей точку $(X(\gamma), 0)$ с точкой (x, y) , с осью x . Эти геометрические характеристики поля деформаций в пластической области показаны на рис. 28, где упругопластическая граница показана пунктирным кругом, а линии постоянной величины деформации $\gamma > \gamma_0$ — сплошным неконцентрическим кругом. Физические координаты, соответствующие деформациям в упругой области, можно вычислить из решения для ψ в первом уравнении (V. 4.14). Проводя вычисления, можно показать, что получающееся в результате соотношение между напряжениями и координатами будет

$$\tau_y - i\tau_x = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi [x - X(\gamma_0) - iy]}}. \quad (\text{V. 4.20})$$

Сравнивая (V. 4.10), можно увидеть, что напряжения в упругой области для упругопластического случая даны первоначальным линейно упругим решением, но для более длинной трещины с вершиной в центре пластической зоны $(X(\gamma_0), 0)$ вместо точки $(0, 0)$. Для идеально пластического случая аналогичный результат был получен в работах [96], [74]. Из уравнения (V. 4.20) вытекает, что линии постоянной величины деформации $\gamma < \gamma_0$ представляют собой концентрические круги с упругопластической границей, так что, если $l = \sqrt{[x - X(\gamma_0)]^2 + y^2}$ — расстояние от центра пластической зоны до заданной точки (x, y) , то соответствующая величина деформации равна

$$\gamma = \frac{\gamma_0 K_{III}}{\tau_0 \sqrt{2\pi l}}. \quad (\text{V. 4.21})$$

Угол θ между вектором деформации и осью y равен половине угла между осью x и прямой, соединяющей центр $[X(\gamma_0), 0]$ пластической зоны с точкой (x, y) . Эти геометрические свойства решения для случая малой пластической зоны в упругой области показаны на рис. 28.

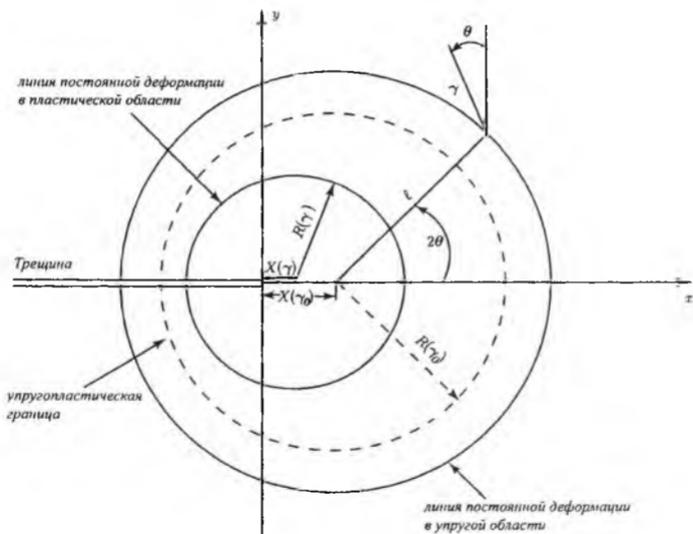


Рис. 28. Геометрическая картина при малой пластической зоне вблизи конца трещины

Соотношение между напряжением и деформацией в точке, находящейся непосредственно впереди конца трещины на расстоянии x от конца трещины до рассматриваемой точки, представляет некоторый интерес для механики хрупкого разрушения. Учитывая, что $\theta = 0$ впереди конца трещины, из (V. 4.14) и (V. 4.21) для этого соотношения получим

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{K_{III}^2}{\pi \tau_0^2} \gamma_0 \tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} = X(\gamma) + R(\gamma) = \\
 &= \frac{K_{III}^2}{\pi \tau_0^2} \left\{ \frac{\gamma_0 \tau_0}{\gamma(\tau) \tau} - \gamma_0 \tau_0 \int_{\tau}^{\infty} \frac{dt}{t^2 \gamma(t)} \right\}, \quad \gamma > \gamma_0, \\
 x &= \frac{K_{III}^2}{\pi \tau_0^2} \left\{ \gamma_0 \tau_0 \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^2 - 1 \right] \right\} = \quad (V. 4.22) \\
 &= \frac{K_{III}^2}{\pi \tau_0^2} \left\{ 1 - \tau_0 \gamma_0 \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2 \gamma(t)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^2 - 1 \right] \right\}, \quad \gamma < \gamma_0.
 \end{aligned}$$

Последние уравнения являются более подходящими, если мы хотим оперировать напряжениями, что всегда допустимо, за исключением случая, когда напряжение конечной величины вызывает бесконечно большую деформацию.

Используя (V. 2.19) и полагая произвольным образом перемещение $w = 0$ в конце трещины, для перемещения в точке $x = -[R(\gamma_0) - X(\gamma_0)]$, где упругопластическая граница пересекает верхнюю поверхность трещины, получим

$$w_0 = \frac{\gamma_0 K_{III}^2}{\pi \tau_0^2}. \quad (\text{V. 4.23})$$

Это выражение не зависит от использованного соотношения между напряжением и деформацией при упрочнении.

Некоторые частные примеры

Если предположить, что при упрочнении имеет место степенной закон

$$\tau(\gamma) = \tau_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^N, \quad (\text{V. 4.24})$$

то решение для малой пластической зоны будет правильным и для теории течения. При изменении N от нуля до единицы определяющее соотношение (V. 4.24) описывает все состояния от идеальной пластичности до идеальной упругости. Для значений N больше единицы соотношение (V. 4.24) описывает затвердевающий материал. Параметры, описывающие геометрию пластической области согласно вышеизложенному и рис. 28, будут

$$X(\gamma) = \frac{1 - N K_{III}^2}{1 + N 2\pi\tau_0^2} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{N+1}, \quad (\text{V. 4.25})$$

$$R(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{N+1},$$

и круглая пластическая зона простирается на расстояние $R(\gamma_0) + X(\gamma_0) = K_{III}^2 / [(1 + N)\pi\tau_0^2]$ впереди и на расстояние $R(\gamma_0) - X(\gamma_0) = N K_{III}^2 / [(1 + N)\pi\tau_0^2]$ позади конца трещины. Из (V. 4.22) находим соотношение между расстоянием впереди конца трещины и деформациями на продолжении

трещины в пластической зоне

$$x = \frac{1}{N+1} \frac{K_{III}^2}{\pi \tau_0^2} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{N+1}, \quad (\text{V. 4.26})$$

так что для $x > 0$ в пластической области

$$\gamma_y(x, 0) = \gamma_0 \left[\frac{K_{III}^2}{(N+1)\pi \tau_0^2 x} \right]^{1/(N+1)}, \quad (\text{V. 4.27})$$

$$\tau_y(x, 0) = \tau_0 \left[\frac{K_{III}^2}{(N+1)\pi \tau_0^2 x} \right]^{N/(N+1)}.$$

В предположении билинейной зависимости между напряжением и деформацией в области упрочнения имеем

$$\tau(\gamma) = \tau_0 + \epsilon \frac{\tau_0}{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0), \quad (\text{V. 4.28})$$

где ϵ представляет собой отношение модуля сдвига при упрочнении к упругому модулю сдвига. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} X(\gamma) &= \frac{K_{III}^2}{2\pi \tau_0^2} \left\{ \frac{2\gamma_0}{(1-\epsilon)\gamma} - \frac{\gamma_0^2}{\gamma[(1-\epsilon)\gamma_0 + \epsilon\gamma]} + \right. \\ &+ \left. \frac{2\epsilon}{(1-\epsilon)^2} \ln \left[\frac{\epsilon\gamma}{(1-\epsilon)\gamma_0 + \epsilon\gamma} \right] \right\}, \quad (\text{V. 4.29}) \\ R(\gamma) &= \frac{K_{III}^2}{2\pi \tau_0^2} \frac{\gamma_0^2}{\gamma[(1-\epsilon)\gamma_0 + \epsilon\gamma]}, \end{aligned}$$

пластическая область простирается на расстояние $R(\gamma_0) + X(\gamma_0) = [1 + \epsilon(1-\epsilon)^{-1} \ln \epsilon] K_{III}^2 / [(1-\epsilon)\pi \tau_0^2]$ впереди конца трещины. Попытка выразить γ в зависимости от x в (V. 4.22) сопряжена со значительными трудностями, однако можно определить характер особенности у вершины трещины. При $\epsilon \neq 0$ вычисления показывают, что

$$\frac{2\pi \epsilon \tau_0^2 \gamma^2}{K_{III}^2 \gamma_0^2} [X(\gamma) + R(\gamma)] \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow \infty,$$

так что для очень малых $x = X(\gamma) + R(\gamma)$ (т.е. для больших γ , или, точнее, для $\gamma \gg (1-\epsilon)\gamma_0/\epsilon$) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_y(x, 0) &\rightarrow \frac{\gamma_0 K_{III}}{\tau_0 \sqrt{2\pi \epsilon x}}, & \tau_y(x, 0) &\rightarrow \frac{\sqrt{\epsilon} K_{III}}{\sqrt{2\pi x}}, \\ &\text{при} \quad x \rightarrow 0, & &\text{если} \quad \epsilon \neq 0. \end{aligned}$$

5. Задачи

1. Получите уравнение (V. 2.17).

2. Докажите, что в случае маломасштабного пластического течения решение задачи в упругой и пластической областях определяется выражениями (V. 4.13).

3. Рассмотрите в качестве примера определяющего соотношения дробно-линейный закон ползучести и проанализируйте асимптотическое поведение скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины.

VI. Аналитическое решение задачи о трещине антиплоского сдвига в упроч- няющемся пластическом материале. Высшие приближения

Метод годографа был применен Райсом [94] для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в упругопластическом материале с произвольным законом упрочнения. Для получения точных решений о трещинах антиплоского сдвига в бесконечной полосе и в полубесконечных телах были использованы также преобразование Меллина и техника Винера – Хопфа [46], [49]. Эти решения представляют декартовы координаты физической плоскости x, y в виде асимптотических разложений по параметру, в качестве которого выступает интенсивность сдвиговых деформаций (таким образом строится решение на плоскости годографа – плоскости деформаций). Обращая эти разложения, можно получить двухчленное асимптотическое разложение интенсивности деформаций γ при $\theta = 0$ как функций от физических координат [46]. Аравас и Блазо [48] представили процедуру, позволяющую найти и угловые распределения интенсивности деформаций.

Следует отметить, что решение задачи о трещине антиплоского сдвига, полученное с помощью метода годографа, дает основу для понимания более сложных случаев нагружения – трещин нормального отрыва и поперечного сдвига.

1. Основные уравнения

Рассмотрим материал, определяющие соотношения которого имеют вид

$$\frac{\bar{\gamma}_\beta}{\gamma_0} = \alpha \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau_0} \right)^{n-1} \frac{\bar{\tau}_\beta}{\tau_0}, \quad \beta = 1, 2 \quad \text{или} \quad \beta = x, y. \quad (\text{VI. 1.1})$$

где $\bar{\gamma}_\beta = \bar{\gamma}_{\beta z}$, $\bar{\tau}_\beta = \bar{\tau}_{\beta z}$, $\bar{\tau}^2 = \bar{\tau}_\beta \bar{\tau}_\beta$, τ_0 и γ_0 – интенсивности касательных напряжений и сдвиговых деформаций соответственно. Введем безраз-

мерные величины согласно следующим формулам

$$\tau_{\beta} = \frac{\bar{\tau}}{\tau_0}, \quad \gamma_{\beta} = \frac{\bar{\gamma}_{\beta}}{\gamma_0}, \quad (\text{VI. 1.2})$$

$$x_{\beta} = \frac{\bar{x}_{\beta}}{L}, \quad w = \frac{\bar{w}}{\gamma_0 L}, \quad (\text{VI. 1.3})$$

где L – некоторая характерная длина. Определяющие уравнения задачи (VI. 1.1) могут быть представлены в форме

$$\gamma = \alpha \tau^n, \quad (\text{VI. 1.4})$$

$$\gamma_{\beta} = \alpha \tau^{n-1} \tau_{\beta}, \quad (\text{VI. 1.5})$$

где $\gamma^2 = \gamma_{\beta} \gamma_{\beta}$, $\tau^2 = \tau_{\beta} \tau_{\beta}$, – интенсивность сдвиговых деформаций и касательных напряжений соответственно.

Условие совместности и уравнение равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}, \quad (\text{VI. 1.6})$$

$$\tau_{\beta, \beta} = 0. \quad (\text{VI. 1.7})$$

Связь между перемещением и деформациями определяется равенствами

$$\gamma_{\beta} = \frac{\partial w}{\partial x_{\beta}}. \quad (\text{VI. 1.8})$$

Необходимо сформулировать условия отсутствия поверхностных усилий при $\theta = \pi$ и условия симметрии при $\theta = 0$:

$$\gamma_x(\theta = 0) = 0, \quad \gamma_y(\theta = \pi) = 0. \quad (\text{VI. 1.9})$$

2. Решение на плоскости годографа

Очевидно, что сформулированная система уравнений является нелинейной системой уравнений в частных производных и ее решение получается методом годографа, позволяющего получить линейные уравнения на плоскости годографа. Согласно процедуре метода годографа физические координаты (x, y) рассматриваются как функции компонент

тензора деформаций на плоскости годографа (плоскости деформаций).
С помощью введения функции $\psi(\gamma_x, \gamma_y)$ такой, что

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x}, \quad y = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y}, \quad (\text{VI. 2.1})$$

условие совместности деформаций на плоскости годографа

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma_y} = \frac{\partial y}{\partial \gamma_x} \quad (\text{VI. 2.2})$$

удовлетворяется тождественно.

Введем полярную систему координат на плоскости деформаций (γ_x, γ_y) согласно зависимостям

$$\gamma_x = -\gamma \sin \chi, \quad \gamma_y = \gamma \cos \chi. \quad (\text{VI. 2.3})$$

Уравнения (VI. 2.1) могут быть представлены с помощью полярных координат на плоскости годографа следующим образом

$$x = r \cos \theta = -\psi_{,\gamma} \sin \chi - \frac{1}{\gamma} \psi_{,\chi} \cos \chi, \quad (\text{VI. 2.4})$$

$$y = r \sin \theta = \psi_{,\gamma} \cos \chi - \frac{1}{\gamma} \psi_{,\chi} \sin \chi, \quad (\text{VI. 2.5})$$

где запятая означает производную по указанной переменной.

Окончательно, с помощью соотношений (VI. 1.4) и (VI. 2.1) уравнение равновесия задачи и граничные условия могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} n\psi_{,\gamma\gamma} + \frac{1}{\gamma}\psi_{,\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\psi_{,\chi\chi} &= 0, \\ \psi_{,\gamma} &= 0 \quad \text{при} \quad \chi = 0, \\ \psi_{,\chi} &= 0 \quad \text{при} \quad \chi = \pi/2. \end{aligned} \quad (\text{VI. 2.6})$$

Решение полученного линейного дифференциального уравнения будем искать методом разделения переменных:

$$\psi(\gamma, \chi) = \gamma^\delta \bar{\psi}(\chi). \quad (\text{VI. 2.7})$$

Подстановка (VI. 2.7) в линейное дифференциальное уравнение и краевые условия (VI. 2.6) приводит к следующей краевой задаче

$$\bar{\psi}'' + \lambda^2 \bar{\psi} = 0, \tag{VI. 2.8}$$

$$\bar{\psi}(0) = 0, \quad \bar{\psi}'(\pi/2) = 0, \tag{VI. 2.9}$$

где штрих означает производную по полярному углу на плоскости годографа χ и $\lambda^2 = \delta[n(\delta - 1) + 1]$.

Решение дифференциального уравнения (VI. 2.8) имеет вид

$$\bar{\psi} = -B \sin \lambda \chi, \tag{VI. 2.10}$$

где $\lambda = 2k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Следовательно, решение дифференциального уравнения (VI. 2.6) принимает форму

$$\psi = - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \gamma^{\delta_k} \sin(2k - 1)\chi, \tag{VI. 2.11}$$

где $0 > \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \dots$ и

$$\delta_k = \frac{1}{2n} \left[n - 1 - \sqrt{(n - 1)^2 + 4n(2k - 1)^2} \right] \tag{VI. 2.12}$$

Подставляя (VI. 2.11) в уравнения (VI. 2.4), (VI. 2.5), можно получить

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\chi) \gamma^{\delta_k - 1}, \tag{VI. 2.13}$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\chi) \gamma^{\delta_k - 1}, \tag{VI. 2.14}$$

где

$$a_k = B_k [\delta_k \sin \chi \sin(2k - 1)\chi + (2k - 1) \cos \chi \cos(2k - 1)\chi], \tag{VI. 2.15}$$

$$b_k = -B_k [\delta_k \cos \chi \sin(2k - 1)\chi - (2k - 1) \sin \chi \cos(2k - 1)\chi]. \tag{VI. 2.16}$$

Уравнения (VI. 2.11) – (VI. 2.15) представляют собой точное решение задачи о трещине типа III на плоскости годографа. Заметим, что постоянные B_k – неизвестные константы, определяемые геометрией образца и приложенной нагрузкой. Уравнения (VI. 2.13) – (VI. 2.15) дают также и асимптотическое представление физических координат x, y в терминах полярного угла χ и интенсивности сдвиговых деформаций γ при $\gamma \rightarrow \infty$. Данные асимптотические представления необходимо обратить для получения γ и χ как функций полярных координат на физической плоскости r, θ .

Используя соотношения (VI. 2.3), (VI. 1.4), компоненты тензора деформаций и напряжений могут быть представлены в форме:

$$\gamma_r = \gamma(r, \theta) \sin(\theta - \chi), \quad (\text{VI. 2.17})$$

$$\gamma_\theta = \gamma(r, \theta) \cos(\theta - \chi), \quad (\text{VI. 2.18})$$

$$\tau_r = \tau(r, \theta) \sin(\theta - \chi), \quad (\text{VI. 2.19})$$

$$\tau_\theta = \tau(r, \theta) \cos(\theta - \chi). \quad (\text{VI. 2.20})$$

3. Асимптотический анализ

Асимптотическое поведение функции $\psi(\gamma, \chi)$ при $\gamma \rightarrow \infty$ непосредственно связано с асимптотическим поведением интенсивности деформаций $\gamma(r, \theta)$ и полярного угла $\chi(r, \theta)$ вблизи вершины трещины $r \rightarrow 0$. Представим асимптотические разложения интенсивности деформаций сдвига и полярного угла в форме:

$$\gamma(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\theta) r^{t_i}, \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{VI. 3.1})$$

$$\chi(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(\theta) r^{q_i}, \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{VI. 3.2})$$

где $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ и $0 = q_1 < q_2 < q_3 < \dots$.

Величины $C_i(\theta)$, $\chi_i(\theta)$, t_i и q_i – неизвестные функции, подлежащие определению.

Определение степеней асимптотического разложения интенсивности деформаций t_i

Поскольку $\chi = 0$ при $\theta = 0$, из формулы (VI. 3.2) следует, что $\chi_i(\theta) = 0$ для $i = 1, 2, 3, \dots$ при $\theta = 0$. Поэтому удобно обратить асимптотическое разложение для x (равенство (VI. 2.13)) и тем самым найти степени разложения t_i . При $\theta = 0$ $r = x$ и $\gamma = |\gamma_y|$. Подстановка (VI. 2.13) в (VI. 3.1) приводит к выражению

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma^{\delta_k - 1} \right)^{t_i}, \quad r \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0. \quad (\text{VI. 3.3})$$

Раскладывая правую часть последнего равенства в ряд при $\gamma \rightarrow \infty$ и удерживая четыре слагаемых в разложении, можно найти

$$\begin{aligned} \gamma = & C_1 a_1^{\delta_1} \gamma^{(\delta_1 - 1)t_1} \left[1 + t_1 (A_{21} \gamma^{\delta_2 - \delta_1} + A_{31} \gamma^{\delta_3 - \delta_1} + A_{41} \gamma^{\delta_4 - \delta_1} + \dots) + \right. \\ & \left. + \frac{t_1(t_1 - 1)}{2} (A_{21}^2 \gamma^{2(\delta_2 - \delta_1)} + 2A_{21}A_{31} \gamma^{\delta_2 + \delta_3 - 2\delta_1} + \dots) + \right. \\ & \left. + \frac{t_1(t_1 - 1)(t_1 - 2)}{3!} (A_{21}^3 \gamma^{3(\delta_2 - \delta_1)} + \dots) + \dots \right] + \\ & + C_2 a_1^{t_2} \gamma^{(\delta_1 - 1)t_2} \left[\frac{t_1(t_1 - 1)}{2} 1 + t_2 (A_{21} \gamma^{\delta_2 - \delta_1} + A_{31} \gamma^{\delta_3 - \delta_1} + \dots) + \right. \\ & \left. + \frac{t_2(t_2 - 1)}{2} (A_{21}^2 \gamma^{2(\delta_2 - \delta_1)} + \dots) + \dots \right] + \\ & + C_3 a_1^{t_3} \gamma^{(\delta_1 - 1)t_3} [1 + t_3 (A_{21} \gamma^{\delta_2 - \delta_1} + \dots) + \dots] + \\ & + C_4 a_1^{t_4} \gamma^{(\delta_1 - 1)t_4} [1 + t_4 A_{21} \gamma^{\delta_2 - \delta_1} + \dots] + \dots \end{aligned}$$

при $\gamma \rightarrow \infty$ и при $\theta = 0$, где $A_{m1} = a_m/a_1$, $m = 2, 3, \dots$.

Далее, собирая слагаемые, имеющие одинаковые степени γ , и приравнявая коэффициенты при них к нулю (учитывая, что $t_i < t_{i+1}$), получим: слагаемые первого порядка

$$(\delta - 1)t_1 = 1, \quad C_1 a_1^{t_1} - 1 = 0, \quad (\text{VI. 3.4})$$

или

$$t_1 = \frac{1}{\delta_1 - 1}, \quad C_1 a_1^{t_1} = 1; \quad (\text{VI. 3.5})$$

слагаемые второго порядка

$$\begin{aligned}(\delta_1 - 1)t_2 &= (\delta_1 - 1)t_1 + \delta_2 - \delta_1, \\(C - 2a_1^{t_2} + C_1 a_1^{t_1} t_1 A_{21}) \gamma^{(\delta_1 - 1)t_2} &= 0,\end{aligned}$$

или

$$t_2 = t_1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_1 - 1}, \quad (\text{VI. 3.6})$$

$$C_2 a_1^{t_2} + t_1 A_{21} = 0; \quad (\text{VI. 3.7})$$

слагаемые третьего порядка

$$\begin{aligned}(\delta_1 - 1)t_3 &= (\delta_1 - 1)t_1 + \max\{2(\delta_2 - \delta_1), \delta_3 - \delta_1\} = (\delta_1 - 1)t_1 + 2(\delta_2 - \delta_1), \\ \left[C_3 a_1^{t_3} + C_2 a_1^{t_2} t_2 A_{21} + \frac{t_1(t_1 - 1)}{2} A_{21}^2 \right] \gamma^{(\delta_1 - 1)t_3} &= 0,\end{aligned}$$

или

$$t_3 = t_1 + \frac{2(\delta_2 - \delta_1)}{\delta_1 - 1} = 2t_2 - t_1, \quad (\text{VI. 3.8})$$

$$C_3 a_1^{t_3} - t_1 \left(t_2 - \frac{t_1 - 1}{2} \right) A_{21}^2 = 0. \quad (\text{VI. 3.9})$$

слагаемые четвертого порядка

$$\begin{aligned}(\delta_1 - 1)t_4 &= (\delta_1 - 1)t_1 + \max\{\delta_3 - \delta_1, 3(\delta_2 - \delta_1)\} = \\ &= (\delta_1 - 1)t_1 + \delta_3 - \delta_1, \\ [C_4 a_1^{t_4} + C_1 a_1^{t_1} t_1 A_{31}] \gamma^{(\delta_1 - 1)t_4} &= 0,\end{aligned} \quad (\text{VI. 3.10})$$

или

$$t_4 = t_1 + \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_1 - 1}, \quad (\text{VI. 3.11})$$

$$C_4 a_1^{t_4} + t_1 A_{31} = 0. \quad (\text{VI. 3.12})$$

Данная процедура может быть продолжена для отыскания членов более высокого порядка малости, что позволяет отыскать степени асимптотического разложения интенсивности деформаций сдвига, например, до двенадцатой включительно:

$$\begin{aligned}t_5 &= t_1 + \frac{3(\delta_2 - \delta_1)}{\delta_1 - 1} = 3t_2 - 2t_1, \\ t_6 &= t_1 + \frac{\delta_2 + \delta_3 - 2\delta_1}{\delta_1 - 1} = t_2 + t_4 - t_1, \\ t_7 &= t_1 + \frac{\delta_4 - \delta_1}{\delta_1 - 1}, \dots, \quad t_{12} = t_1 + \frac{\delta_5 - \delta_1}{\delta_1 - 1}, \dots\end{aligned} \quad (\text{VI. 3.13})$$

Степени асимптотического разложения интенсивности деформаций сдвига могут быть непосредственно выражены через показатель упрочнения n :

$$\begin{aligned}
 t_1 &= -\frac{n}{n+1}, & t_2 &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n3^2} - 3n - 1}{2(n+1)}, \\
 t_3 &= 2t_2 - t_1, & t_4 &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n5^2} - 3n - 1}{2(n+1)}, \\
 t_5 &= 3t_2 - 2t_1, & t_6 &= t_2 + t_4 - t_1, \\
 t_7 &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n7^2} - 3n - 1}{2(n+1)}, \dots, & t_{12} &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n9^2} - 3n - 1}{2(n+1)}, \dots
 \end{aligned}$$

Из полученных соотношений видно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} t_i = -1$ для всех значений i (что соответствует идеально пластическому материалу).

Определение степеней q_i

Степени q_i , фигурирующие в асимптотическом разложении полярного угла χ на плоскости годографа, могут быть непосредственно найдены из равенства (VI. 2.17). Поскольку

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i r^{q_i} \tag{VI. 3.14}$$

при $r \rightarrow 0$, то множитель $\sin(\theta - \chi)$ может быть представлен в форме разложения по степеням r :

$$\begin{aligned}
 \sin(\theta - \chi) &= \sin\left(\theta - \chi_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \chi_k r^{q_k}\right) = \sin(\theta - \chi_1) - \\
 &- (\chi_2 r^{q_2} + \chi_3 r^{q_3} + \chi_4 r^{q_4} + \dots) \cos(\theta - \chi_1) - \\
 &- (\chi_2^2 r^{2q_2} + 2\chi_2 \chi_3 r^{q_2+q_3} + \dots) \frac{1}{2} \sin(\theta - \chi_1) + \\
 &+ \frac{1}{6} \chi_2^3 r^{3q_2} \cos(\theta - \chi_1) + \dots
 \end{aligned}$$

Если

$$\gamma_{\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{\beta}^{(i)}(\theta) r^{t_i} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0 \quad (\text{VI. 3.15})$$

и

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\theta) r^{t_i} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{VI. 3.16})$$

то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_r^{(i)} r^{t_i} = \sin(\theta - \chi) \sum_{i=1}^{\infty} C_i r^{t_i}, \quad (\text{VI. 3.17})$$

или

$$\begin{aligned} & \gamma_r^{(1)} r^{t_1} + \gamma_r^{(2)} r^{t_2} + \gamma_r^{(3)} r^{t_3} + \gamma_r^{(4)} r^{t_4} + \dots = \\ & = C_1 \left[r^{t_1} \sin(\theta - \chi_1) - (\chi_2 r^{t_1+q_2} + \chi_3 r^{t_1+q_3} + \chi_4 r^{t_1+q_4} + \dots) \cos(\theta - \chi_1) - \right. \\ & - \frac{1}{2} (\chi_2^2 r^{t_1+2q_2} + 2\chi_2\chi_3 r^{t_1+q_2+q_3} + \dots) \sin(\theta - \chi_1) + \\ & \left. + \frac{1}{6} \chi_2^3 r^{t_1+3q_2} \cos(\theta - \chi_1) + \dots \right] + \\ & + C_2 \left[r^{t_2} \sin(\theta - \chi_1) - (\chi_2 r^{t_2+q_2} + \chi_3 r^{t_2+q_3} + \dots) \cos(\theta - \chi_1) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \chi_2^2 r^{t_2+2q_2} \sin(\theta - \chi_1) + \dots \left. \right] + \\ & + C_3 [r^{t_3} \sin(\theta - \chi_1) - (\chi_2 r^{t_3+q_2} + \dots) \cos(\theta - \chi_1)] + \\ & + C_4 [r^{t_4} \sin(\theta - \chi_1) + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Асимптотический анализ слагаемых, входящих в последнее уравнение, позволяет установить, что

$$t_2 = t_1 + q_2, \quad t_3 = t_1 + q_3 = t_2 + q_2, \quad t_4 = t_1 + q_4, \quad (\text{VI. 3.18})$$

или

$$q_2 = t_2 - t_1, \quad q_3 = t_3 - t_1, \quad q_4 = t_4 - t_1 \quad (\text{VI. 3.19})$$

и

$$\begin{aligned}
C_1 \sin(\theta - \chi_1) &= \gamma_r^{(1)}, \\
-C_1 \chi_2 \cos(\theta - \chi_1) + C_2 \sin(\theta - \chi_1) &= \gamma_r^{(2)}, \\
-C_1 \chi_3 \cos(\theta - \chi_1) - \frac{\chi_2^2}{2} C_1 \sin(\theta - \chi_1) - C_2 \chi_2 \cos(\theta - \chi_1) + & \text{(VI. 3.20)} \\
+C_3 \sin(\theta - \chi_1) &= \gamma_r^{(3)}, \\
-C_1 \chi_4 + C_4 \sin(\theta - \chi_1) &= \gamma_r^{(4)}.
\end{aligned}$$

Равенства (VI. 3.19) могут быть обобщены $q_i = \Delta t_i = t_i - t_1$ для всех значений i .

Определение угловых распределений $C_i(\theta)$, $\chi_i(\theta)$

Подставляя (VI. 3.2) в (VI. 2.15) и в (VI. 2.16), можно получить асимптотические разложения величин a_k и b_k в форме

$$a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} r^{\Delta t_i}, \quad \text{(VI. 3.21)}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki} r^{\Delta t_i}, \quad \text{(VI. 3.22)}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{k1} &= -\frac{B_k}{2} [\delta_k^- \cos 2k\chi_1 - \delta_k^+ \cos 2(k-1)\chi_1], \\
a_{k2} &= \frac{B_k}{2} \chi_2 F_{ka}(\chi_1), \\
a_{k3} &= \frac{B_k}{2} \{ \chi_3 F_{ka}(\chi_1) + 2\chi_2^2 [\delta_k^- k^2 \cos 2k\chi_1 - \delta_k^+ (k-1)^2 \cos 2(k-1)\chi_1] \}, \\
a_{k4} &= \frac{B_k}{2} \chi_4 F_{ka}(\chi_1), \\
a_{k5} &= \frac{B_k}{2} \left\{ \chi_5 F_{ka}(\chi_1) - \frac{4}{3} \chi_2^3 [\delta_k^- k^3 \sin 2k\chi_1 - \delta_k^+ (k-1)^3 \sin 2(k-1)\chi_1] + \right. \\
&\quad \left. + 4\chi_2 \chi_3 [\delta_k^- k^2 \cos 2k\chi_1 - \delta_k^+ (k-1)^2 \cos 2(k-1)\chi_1] \right\},
\end{aligned}$$

$$b_{k1} = -\frac{B_k}{2} [\delta_k^- \sin 2k\chi_1 + \delta_k^+ \sin 2(k-1)\chi_1],$$

$$b_{k2} = -\frac{B_k}{2} \chi_2 F_{kb}(\chi_1),$$

$$b_{k3} = -\frac{B_k}{2} \{ \chi_3 F_{kb}(\chi_1) - 2\chi_2^2 [\delta_k^- k^2 \sin 2k\chi_1 + \delta_k^+ (k-1)^2 \sin 2(k-1)\chi_1] \},$$

$$b_{k4} = -\frac{B_k}{2} \chi_4 F_{kb}(\chi_1),$$

$$b_{k5} = -\frac{B_k}{2} \left\{ \chi_5 F_{kb}(\chi_1) - \frac{4}{3} \chi_2^3 [\delta_k^- k^3 \cos 2k\chi_1 + \delta_k^+ (k-1)^3 \cos 2(k-1)\chi_1] - \right. \\ \left. - 4\chi_2 \chi_3 [\delta_k^- k^2 \sin 2k\chi_1 + \delta_k^+ (k-1)^2 \sin 2(k-1)\chi_1] \right\},$$

$$\delta_k^- = \delta_k - 2k + 1, \quad \delta_k^+ = \delta_k + 2k + 1, \\ F_{ka} = 2\delta_k^- k \sin 2k\chi_1 - 2\delta_k^+ (k-1) \sin 2(k-1)\chi_1, \\ F_{kb} = 2\delta_k^- k \cos 2k\chi_1 + 2\delta_k^+ (k-1) \cos 2(k-1)\chi_1.$$

Используя (VI. 3.1) и биномиальную теорему, γ^{δ_k-1} можно представить как

$$\gamma^{\delta_k-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i r^{t_i} \right)^{\delta_k-1} = (C_1 r^{t_1})^{\delta_k-1} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki} r^{\Delta t_i}, \quad (\text{VI. 3.23})$$

где

$$D_{k1} = 1, \quad D_{k2} = (\delta_k - 1) \frac{C_2}{C_1}, \\ D_{k3} = (\delta_k - 1) \left(\frac{C_3}{C_1} + \frac{\delta_k - 2}{2} \frac{C_2^2}{C_1^2} \right), \quad D_{k4} = (\delta_k - 1) \frac{C_4}{C_1}.$$

Подстановка (VI. 3.21) – (VI. 3.23) в (VI. 2.13) и (VI. 2.14) приводит

к следующим асимптотическим разложениям

$$\begin{aligned}
 r \cos \theta = & C_1^{\delta_1-1} r^{(\delta_1-1)t_1} [a_{11} + (a_{11}D_{12} + a_{12}D_{11}) r^{\Delta t_2} + \\
 & + (a_{11}D_{13} + a_{13}D_{11} + a_{12}D_{12}) r^{\Delta t_3} + (a_{11}D_{14} + a_{14}D_{11}) r^{\Delta t_4} + \dots] + \\
 & + C_1^{\delta_2-1} r^{(\delta_1-1)t_1+t_2} [a_{21}D_{21} + (a_{21}D_{22} + a_{22}D_{21}) r^{\Delta t_2} + \\
 & + (a_{21}D_{23} + a_{23}D_{21} + a_{22}D_{22}) r^{\Delta t_3} + \dots] + \\
 & + C_1^{\delta_3-1} r^{(\delta_1-1)t_1+\Delta_4} [a_{31}D_{31} + (a_{31}D_{32} + a_{32}D_{31}) r^{\Delta t_2} + \dots] + \\
 & + C_1^{\delta_4-1} r^{(\delta_4-1)t_1} [a_{41}D_{41} + \dots] + \\
 & + \dots,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r \sin \theta = & C_1^{\delta_1-1} r^{(\delta_1-1)t_1} [b_{11} + (b_{11}D_{12} + b_{12}D_{11}) r^{\Delta t_2} + \\
 & + (b_{11}D_{13} + b_{13}D_{11} + b_{12}D_{12}) r^{\Delta t_3} + (b_{11}D_{14} + b_{14}D_{11}) r^{\Delta t_4} + \dots] + \\
 & + C_1^{\delta_2-1} r^{(\delta_1-1)t_1+t_2} [b_{21}D_{21} + (b_{21}D_{22} + b_{22}D_{21}) r^{\Delta t_2} + \\
 & + (b_{21}D_{23} + b_{23}D_{21} + b_{22}D_{22}) r^{\Delta t_3} + \dots] + \\
 & + C_1^{\delta_3-1} r^{(\delta_1-1)t_1+\Delta_4} [b_{31}D_{31} + (b_{31}D_{32} + b_{32}D_{31}) r^{\Delta t_2} + \dots] + \\
 & + C_1^{\delta_4-1} r^{(\delta_4-1)t_1} [b_{41}D_{41} + \dots] + \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Собирая слагаемые, содержащие одинаковые степени r , и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r к нулю, получаем алгебраические уравнения относительно функций $C_i(\theta)$ и $\chi_i(\theta)$:

слагаемые первого порядка⁹

⁹Следует отметить, что нахождение угловых распределений асимптотических разложений компонент тензора напряжений и деформаций в задаче о трещине антиплоского сдвига при использовании метода годографа было предметом исследований в [98], [112], [113]. Если ввести функцию $\Phi(r, \theta)$ такую, что $\tau_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ и $\tau_\theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, и искать решение задачи в виде $\Phi(t, \theta) = -\sum_k A_k r^{\delta_k+1} f_k(\theta)$, то

$$\begin{aligned} C_1^{\delta_1-1} a_{11} - \cos \theta &= 0, \\ C_1^{\delta_1-1} b_{11} - \sin \theta &= 0; \end{aligned}$$

слагаемые второго порядка

$$C_1^{\delta_2-\delta_1} a_{21} D_{21} + a_{11} D_{12} + a_{12} D_{11} = 0, \quad (\text{VI. 3.24})$$

$$C_1^{\delta_2-\delta_1} b_{21} D_{21} + b_{11} D_{12} + b_{12} D_{11} = 0; \quad (\text{VI. 3.25})$$

слагаемые третьего порядка

$$C_1^{\delta_2-\delta_1} (a_{21} D_{22} + a_{22} D_{21}) + a_{11} D_{13} + a_{13} D_{11} + a_{12} D_{12} = 0, \quad (\text{VI. 3.26})$$

$$C_1^{\delta_2-\delta_1} (b_{21} D_{22} + b_{22} D_{21}) + b_{11} D_{13} + b_{13} D_{11} + b_{12} D_{12} = 0; \quad (\text{VI. 3.27})$$

слагаемые четвертого порядка

$$C_1^{\delta_3-\delta_1} a_{31} D_{31} + a_{11} D_{14} + a_{14} D_{11} = 0, \quad (\text{VI. 3.28})$$

$$C_1^{\delta_3-\delta_1} b_{31} D_{31} + b_{11} D_{14} + b_{14} D_{11} = 0; \quad (\text{VI. 3.29})$$

слагаемые пятого порядка

$$\begin{aligned} C_1^{\delta_2-\delta_1} (a_{21} D_{23} + a_{22} D_{22} + a_{23} D_{21}) + \\ + a_{11} D_{15} + a_{12} D_{13} + a_{13} D_{12} + a_{14} D_{11} = 0, \quad (\text{VI. 3.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1^{\delta_2-\delta_1} (b_{21} D_{23} + b_{22} D_{22} + b_{23} D_{21}) + \\ + b_{11} D_{15} + b_{12} D_{13} + b_{13} D_{12} + b_{14} D_{11} = 0. \quad (\text{VI. 3.31}) \end{aligned}$$

Разрешая последовательно полученные соотношения (VI. 3.24) – (VI. 3.30), приходим к функциям

$$C_i = E_i \tilde{\gamma}^{(i)}(\theta), \quad (\text{VI. 3.32})$$

$$\chi_i = G_i \tilde{\chi}^{(i)}(\theta), \quad (\text{VI. 3.33})$$

для первого слагаемого в последнем асимптотическом разложении получено [98], [112]

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{n+1}, \\ f_1(\theta) &= \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{[\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta + \cos \theta}] [\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta - k \cos \theta}]^k}{2(1-k)^k}}, \quad k = \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

где $E_i = E_i(B_k)$, $G_i = G_i(B_k)$ – коэффициенты исходных асимптотических разложений C_i и χ_i . Величины, снабженные знаком $\bar{\cdot}$, представляют собой угловые распределения, которые не зависят от B_k . Множители E_i , G_i и угловые распределения $\tilde{\gamma}^{(i)}$, $\tilde{\chi}^{(i)}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} G_1 &= 1, & E_1 &= B_1^{1/(1-\delta_1)}, \\ G_2 &= B_1^{(\delta_2-1)/(1-\delta_1)} B_2, & E_2 &= B_1^{\delta_2/(1-\delta_1)} B_2, \\ G_3 &= B_1^{2(\delta_2-1)/(1-\delta_1)} B_2^2, & E_3 &= B_1^{2\delta_2-1/(1-\delta_1)} B_2^2, \\ G_4 &= B_1^{(\delta_3-1)/(1-\delta_1)} B_3, & E_4 &= B_1^{\delta_3/(1-\delta_1)} B_3, \\ G_5 &= B_1^{3(\delta_2-1)/(1-\delta_1)} B_2^3, & E_5 &= B_1^{3\delta_2-2/(1-\delta_1)} B_2^3, \end{aligned} \quad (\text{VI. 3.34})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{(1)} &= \left[\frac{\delta_1^2 + 1 - (\delta_1^2 - 1) \cos 2\chi_1}{2} \right]^{1/(2(1-\delta_1))}, \\ \tilde{\chi}^{(1)} &= \arctg \left(\frac{-(n+1) \operatorname{ctg} \theta + \sqrt{(n-1)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + 4n}}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \frac{(\tilde{\gamma}^{(1)})^{\delta_2} (\delta_2 - 3) \cos(\theta - 4\chi_1) - (\delta_2 + 3) \cos(\theta + 2\chi_1)}{2(\delta_1 - 1) \cos(\theta - 2\chi_1)},$$

$$\tilde{\chi}^{(2)} = \frac{(\tilde{\gamma}^{(1)})^{\delta_2-\delta_1} (\delta_2 - 3) \sin(\theta - 4\chi_1) - (\delta_2 + 3) \sin(\theta + 2\chi_1)}{2(\delta_1 - 1) \cos(\theta - 2\chi_1)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{(3)} &= -\frac{-\tilde{\gamma}^{(1)}}{(\delta_1 + 1) \cos 2\chi_1 - (\delta_1 - 1)} \times \\ &\times \left\{ 2\tilde{\chi}_2^2 + \frac{(\tilde{\gamma}^{(1)})^{\delta_2-\delta_1}}{\delta_1 - 1} [2\tilde{\chi}_2 (2\delta_2^- \sin 2\chi_1 - \delta_2^+ \sin 4\chi_1) - \right. \\ &\left. - (\delta_2 - 1) \frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{\tilde{\gamma}^{(1)}} (\delta_2^- \cos 2\chi_1 - \delta_2^+ \cos 4\chi_1)] \right\} - \frac{(\delta_1) (\tilde{\gamma}^{(2)})^2}{2 \tilde{\gamma}^{(1)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(3)} &= \frac{1}{(\delta_1 + 1) \cos 2\chi_1 - (\delta_1 - 1)} \left\{ (\delta_1 + 1) \tilde{\chi}_2^2 \sin 2\chi_1 + \right. \\ &+ \frac{(\tilde{\gamma}^{(1)})^{\delta_2-\delta_1}}{\delta_1 - 1} \left\{ \tilde{\chi}_2 [(\delta_1^- \delta_2^+ - 2\delta_1^+ \delta_2^-) \cos 4\chi_1 + (2\delta_1^- \delta_2^- - \delta_1^+ \delta_2^+) \cos 2\chi_1] + \right. \\ &\left. + (\delta_2 - 1) \frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{\tilde{\gamma}^{(1)}} [(3\delta_1 - \delta_2) \sin 4\chi_1 - (3\delta_1 + \delta_2) \sin 2\chi_1] \right\} \left. \right\} - (\delta_1 - 1) \tilde{\chi}_2 \frac{\tilde{\gamma}^{(2)}}{\tilde{\gamma}^{(1)}}, \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}^{(4)} = \frac{(\bar{\gamma}^{(1)})^{\delta_3} (\delta_3 - 5) \cos 4\chi_1 - (\delta_3 + 5) \cos 6\chi_1}{2(\delta_1 - 1) \cos(\theta - 2\chi_1)},$$

$$\bar{\chi}^{(4)} = \frac{(\bar{\gamma}^{(1)})^{\delta_3 - \delta_1} (\delta_3 - 5) \sin(\theta - 6\chi_1) - (\delta_3 + 5) \sin(\theta + 4\chi_1)}{2(\delta_1 - 1) \cos(\theta - 2\chi_1)},$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{(5)} = & \frac{(\bar{\gamma}^{(1)})^{\delta_1}}{\delta_1^- \cos(2\chi_1 - \theta)} \left\{ -2\delta_1^- \bar{\chi}^{(2)} \bar{\chi}^{(3)} - (\bar{\gamma}^{(1)})^{\delta_2 - \delta_1} \left\{ -\frac{\delta_2 - 1}{2} \left[\frac{\bar{\gamma}^{(3)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\delta_2 - 2}{2} \left(\frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} \right)^2 \right] (\delta_2^- \cos 2\chi_1 - \delta_2^+ \cos 4\chi_1) + \frac{\delta_2 - 1}{2} \frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} \bar{\chi}^{(2)} R_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\bar{\chi}^{(3)} R_2 + 2 (\bar{\chi}^{(2)})^2 (4\delta_2^- \cos 2\chi_1 - \delta_2^+ \cos 4\chi_1) \right] \right\} - \right. \\ & \left. - (\delta_1^-)^2 \frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} (\bar{\chi}^{(2)})^2 \right\} - (\delta_1 - 2) \frac{\bar{\gamma}^{(2)} \bar{\gamma}^{(3)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} - \frac{(\delta_1 - 2)(\delta_1 - 3)}{6} \frac{(\bar{\gamma}^{(2)})^3}{(\bar{\gamma}^{(1)})^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(5)} = & -\frac{1}{\delta_1^- \cos(2\chi_1 - \theta)} \left\{ -\frac{2}{3} (\bar{\chi}^{(2)})^3 \delta_1^- \cos(2\chi_1 - \theta) - \delta_1^- \bar{\chi}^{(2)} \bar{\chi}^{(3)} \sin(2\chi_1 - \theta) + \right. \\ & \left. + (\bar{\gamma}^{(1)})^{\delta_2 - \delta_1} \left\{ \frac{\delta_2 - 1}{2} \left[\frac{\bar{\gamma}^{(3)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} + \frac{\delta_2 - 2}{2} \left(\frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} \right)^2 \right] [\delta_2^- \sin(4\chi_1 - \theta) + \delta_2^+ \sin(2\chi_1 + \theta)] - \right. \right. \\ & \left. - \frac{\delta_2 - 1}{2} \frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} \bar{\chi}^{(2)} S_2 + \frac{1}{2} \left\{ \bar{\chi}^{(3)} S_2 - 2 (\bar{\chi}^{(2)})^2 [4\delta_2^- \sin(4\chi_1 - \theta) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \delta_2^+ \sin(2\chi_1 + \theta)] \right\} + \frac{\delta_1^-}{2} \left[\frac{\bar{\gamma}^{(3)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} + \frac{\delta_1 - 2}{2} \left(\frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} \right)^2 \right] \bar{\chi}^{(2)} S_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\delta_1^-}{2} \bar{\chi}^{(3)} S_1 - 2\delta_1^- (\bar{\chi}^{(2)})^2 \sin(2\chi_1 - \theta) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_k &= 2\delta_k^- k \sin 2(k-1)\chi_1 - 2\delta_k^+ (k-1) \sin 2k\chi_1, \\ S_k &= 2\delta_k^- k \cos(2k\chi_1 - \theta) - 2\delta_k^+ (k-1) \cos[2(k-1)\chi_1 + \theta], \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Подставляя асимптотические разложения для интенсивности деформаций γ и для угла χ (VI. 3.1) и (VI. 3.2) в выражения (VI. 2.17), получим следующие асимптотические разложения для γ_β , τ и τ_β , представленные с помощью физических координат (r, θ)

$$\gamma_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \bar{\gamma}_\beta^{(i)} r^{t_i}, \quad \beta = r, \theta, \quad (\text{VI. 3.35})$$

$$\tau = \alpha^{-1/n} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \tilde{\tau}^{(i)} r^{s_i}, \quad (\text{VI. 3.36})$$

$$\tau_{\beta} = \alpha^{-1/n} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \tilde{\tau}_{\beta}^{(i)} r^{s_i}, \quad \beta = r, \theta, \quad (\text{VI. 3.37})$$

где $A_i = A_i(B_k)$,

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1^{1/((1-\delta_1)n)}, \\ A_2 &= B_1^{1+n(\delta_2-1)/((1-\delta_1)n)} B_2, \\ A_3 &= B_1^{1+2n(\delta_3-1)/((1-\delta_1)n)} B_2^2, \\ A_4 &= B_1^{1+n(\delta_3-1)/((1-\delta_1)n)} B_3, \\ A_5 &= B_1^{2+n(\delta_2-1)/((1-\delta_1)n)} B_2^3. \end{aligned}$$

В (VI. 3.36) и (VI. 3.37) $s_i = (t_1/n) + \Delta t_i$. Угловые распределения асимптотических разложений для $\tilde{\gamma}_{\beta}^{(i)}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\beta}^{(1)} &= \tilde{\gamma}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \\ \tilde{\gamma}_{\beta}^{(2)} &= \tilde{\gamma}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 2} + \tilde{\gamma}^{(2)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \\ \tilde{\gamma}_{\beta}^{(3)} &= \tilde{\gamma}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 3} + \tilde{\gamma}^{(3)} \bar{\Phi}_{\beta 1} + \tilde{\gamma}^{(2)} \bar{\Phi}_{\beta 2}, \\ \tilde{\gamma}_{\beta}^{(4)} &= \tilde{\gamma}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 4} + \tilde{\gamma}^{(4)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \\ \tilde{\gamma}_{\beta}^{(5)} &= \tilde{\gamma}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 5} + \tilde{\gamma}^{(2)} \bar{\Phi}_{\beta 3} + \tilde{\gamma}^{(3)} \bar{\Phi}_{\beta 2} + \tilde{\gamma}^{(5)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{r1} &= \sin(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{r2} &= -\bar{\chi}_2 \cos(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{r3} &= -\left[\bar{\chi}_3 \cos(\theta - \chi_1) + \frac{\bar{\chi}_2^2}{2} \sin(\theta - \chi_1) \right], \\ \bar{\Phi}_{r4} &= -\bar{\chi}_4 \cos(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{r5} &= -\bar{\chi}_5 \cos(\theta - \chi_1) + \frac{\bar{\chi}_2^3}{6} \cos(\theta - \chi_1) - \bar{\chi}_2 \bar{\chi}_3 \sin(\theta - \chi_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{\theta 1} &= \cos(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{\theta 2} &= \bar{\chi}_2 \sin(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{\theta 3} &= \bar{\chi}_3 \sin(\theta - \chi_1) - \frac{\bar{\chi}_2^2}{2} \cos(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{\theta 4} &= \bar{\chi}_4 \sin(\theta - \chi_1), \\ \bar{\Phi}_{r5} &= \bar{\chi}_5 \sin(\theta - \chi_1) - \frac{\bar{\chi}_2^3}{6} \sin(\theta - \chi_1) - \bar{\chi}_2 \bar{\chi}_3 \cos(\theta - \chi_1).\end{aligned}$$

Функции $\bar{\tau}^{(i)}$ и $\bar{\tau}_{\beta}^{(i)}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}\bar{\tau}^{(1)} &= \left(\bar{\gamma}^{(1)}\right)^{1/n}, \\ \bar{\tau}^{(2)} &= \frac{1}{n} \left(\bar{\gamma}^{(1)}\right)^{(1-n)/n} \bar{\gamma}^{(2)}, \\ \bar{\tau}^{(3)} &= \frac{1}{n} \left(\bar{\gamma}^{(1)}\right)^{1/n} \left[\frac{\bar{\gamma}^{(3)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} + \frac{1-n}{2n} \left(\frac{\bar{\gamma}^{(2)}}{\bar{\gamma}^{(1)}}\right)^2 \right], \\ \bar{\tau}^{(4)} &= \frac{1}{n} \left(\bar{\gamma}^{(1)}\right)^{(1-n)/n} \bar{\gamma}^{(4)}, \\ \bar{\tau}^{(5)} &= \frac{1}{n} \left(\bar{\gamma}^{(1)}\right)^{1/n} \left[\bar{\gamma}^{(5)} + \frac{1-n}{2n} \frac{\bar{\gamma}^{(2)} \bar{\gamma}^{(3)}}{\bar{\gamma}^{(1)}} \right], \\ \bar{\tau}_{\beta}^{(1)} &= \bar{\tau}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \\ \bar{\tau}_{\beta}^{(2)} &= \bar{\tau}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 2} + \bar{\tau}^{(2)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \\ \bar{\tau}_{\beta}^{(3)} &= \bar{\tau}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 3} + \bar{\tau}^{(3)} \bar{\Phi}_{\beta 1} + \bar{\tau}^{(2)} \bar{\Phi}_{\beta 2}, \\ \bar{\tau}_{\beta}^{(4)} &= \bar{\tau}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 4} + \bar{\tau}^{(4)} \bar{\Phi}_{\beta 1}, \\ \bar{\tau}_{\beta}^{(5)} &= \bar{\tau}^{(1)} \bar{\Phi}_{\beta 5} + \bar{\tau}^{(2)} \bar{\Phi}_{\beta 3} + \bar{\tau}^{(3)} \bar{\Phi}_{\beta 2} + \bar{\tau}^{(5)} \bar{\Phi}_{\beta 1}.\end{aligned}$$

Угловые распределения компонент тензора напряжений (коэффициенты асимптотических разложений для компонент тензора напряжений), определяемые последними равенствами, показаны на рис. 30 – 35. Подставляя выражения для $C_k(\theta)$, $\chi_i(\theta)$ и t_i в равенства (VI. 3.5), (VI. 3.6), (VI. 3.8) и (VI. 3.11), легко можно видеть, что эти уравнения выполняются, а коэффициенты разложения $\gamma_r^{(k)}$ принимают форму

$$\gamma_r^{(k)} = E_k(B_L) \bar{\gamma}^{(k)}(\theta). \quad (\text{VI. 3.38})$$

Подстановка выражений для $C_k(\theta)$, $\gamma_r^{(k)}$ и χ_k в (VI. 3.20) приводит к тождественному выполнению этих уравнений.

Коэффициент A_1 может быть связан с инвариантным J -интегралом:

$$A_1 = \alpha^{1/n} \left(\frac{J}{\alpha \tau_0 \gamma_0 I_n L} \right)^{1/(n+1)}, \quad I_n = \frac{\pi(n+1)}{2n}. \quad (\text{VI. 3.39})$$

Выразим степени асимптотических разложений компонент тензора напряжений $s_i = (t_1/n) + \Delta t_i = t_i - t_1(1 - 1/n)$ через показатель степенного закона n :

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{n+1}, & s_2 &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n3^2} - n - 3}{2(n+1)}, \\ s_3 &= 2s_2 - s_1, & s_4 &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n5^2} - n - 3}{2(n+1)}, \\ s_5 &= 3s_2 - 2s_1, & s_6 &= s_2 + s_4 - s_1, \\ s_7 &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n7^2} - n - 3}{2(n+1)}, \dots & s_{12} &= \frac{\sqrt{(n-1)^2 + 4n9^2} - n - 3}{2(n+1)}, \dots \end{aligned}$$

Графическое изображение зависимостей степеней асимптотических разложений компонент тензора напряжений как функций от показателя степенного закона представлено на рис. 29.

Из последних соотношений видно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_i = 0.$$

Перемещение можно легко получить, интегрируя уравнение $\gamma_r = \partial w / \partial r$:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \tilde{w}^{(k)}(\theta) r^{t_k+1} + w^R, \quad (\text{VI. 3.40})$$

где $\tilde{w}^{(k)} = \tilde{\gamma}_r^{(k)} / (t_k + 1)$ и w^R - перемещение тела как твердого тела.

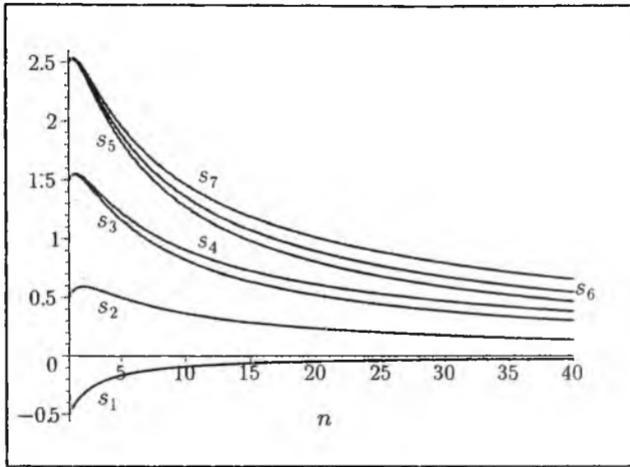


Рис. 29. Графики зависимости степеней асимптотического разложения напряжений в зависимости от показателя степенного закона, связывающего деформации и напряжения (точное решение)

Метод годографа, используемый в данной задаче, позволяет построить аналитическое решение задачи о неподвижной трещине антиплоского сдвига (типа III) в упругопластическом материале в пластической области и найти не только главные члены асимптотических разложений компонент тензора напряжений и деформаций, но и построить слагаемые более высоких порядков и определить при этом как показатели степеней асимптотических разложений, так и найти их коэффициенты аналитически.

4. Задачи

1. Докажите справедливость равенства для функции $f_1(\theta)$ в формуле (III.3.25).
2. Постройте график этой функции как функции полярного угла на физической плоскости и сравните с численным решением нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения для данной функции.
3. Обоснуйте выражение (VI. 3.39) для коэффициента A_1 .

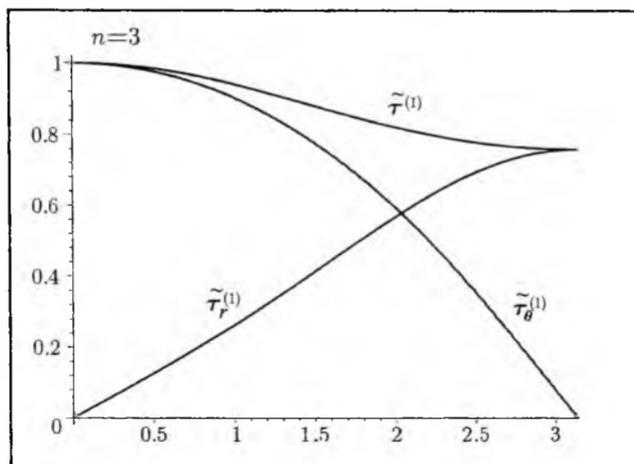


Рис. 30. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\beta^{(1)}$ и интенсивность напряжений $\tilde{\tau}^{(1)}$ для $n = 3$

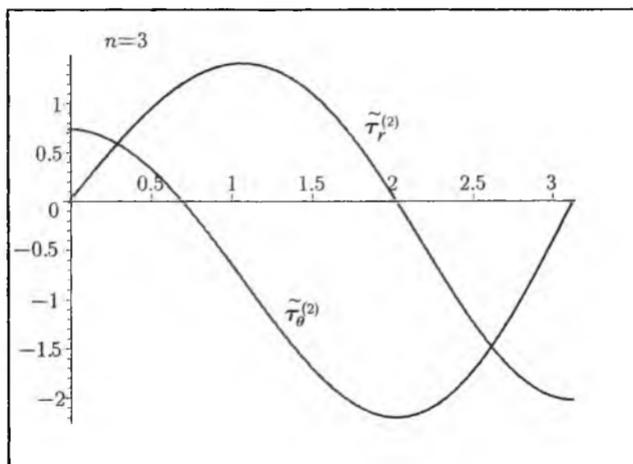


Рис. 31. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\beta^{(2)}$ для $n = 3$

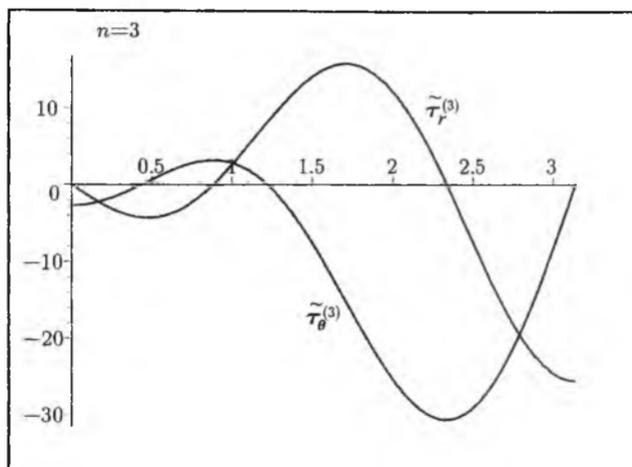


Рис. 32. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\theta^{(3)}$ для $n = 3$

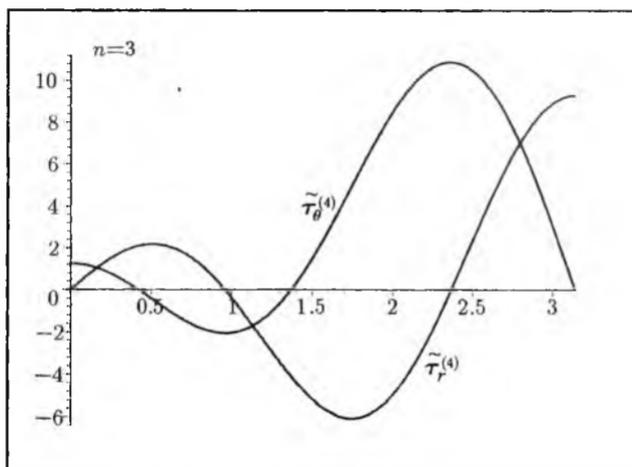


Рис. 33. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\theta^{(4)}$ для $n = 3$

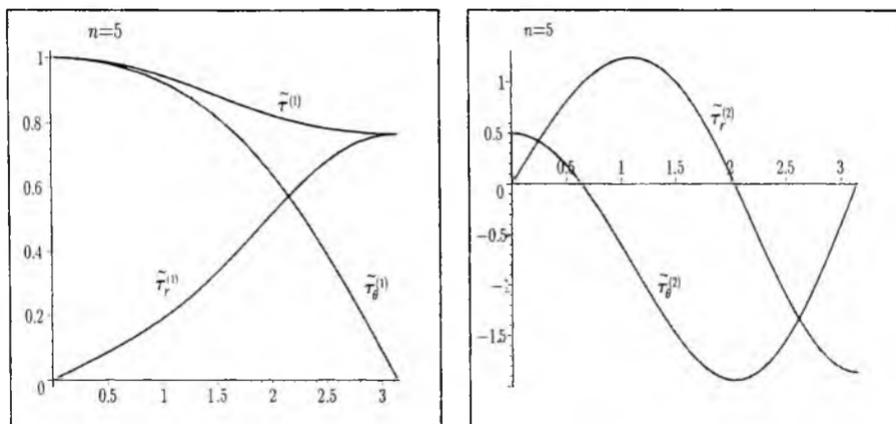


Рис. 34. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\beta^{(1)}$ и $\tilde{\tau}_\beta^{(2)}$ для $n = 5$

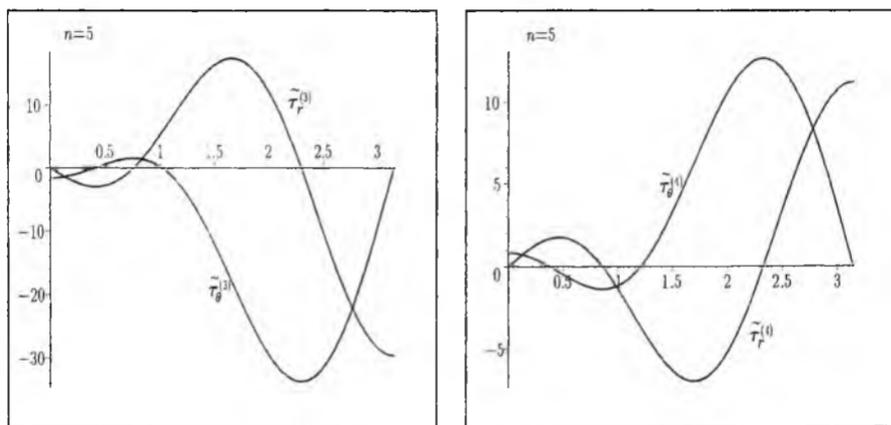


Рис. 35. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\beta^{(3)}$ и $\tilde{\tau}_\beta^{(4)}$ для $n = 5$

VII. Собственные значения в задаче о неподвижной трещине антиплоского сдвига и остром вырезе в материале со степенными определяющими уравнениям

1. Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим острый вырез с раствором 2α в бесконечной плоскости, находящейся в условиях продольного сдвига. Уравнения равновесия и условие совместности деформаций в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0, \quad -\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \gamma_{\theta z} = 0. \quad (\text{VII. 1.1})$$

Определяющие соотношения представляют собой степенную зависимость, связывающую деформации и напряжения (в зарубежной литературе для такого типа определяющих уравнений принято название уравнений Рамберга – Осгуда):

$$\gamma_{rz} = \frac{3}{2} B \tau^{n-1} \tau_{rz}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{3}{2} B \tau^{n-1} \tau_{\theta z}, \quad \tau^2 = 3 (\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2), \quad (\text{VII. 1.2})$$

где τ – интенсивность касательных напряжений; показатель упрочнения n и B – постоянные материала. Будем предполагать заранее, что компоненты тензоров напряжения и деформации отнесены к τ_0 и γ_0 соответственно, где τ_0 – предел текучести материала и γ_0 – значение деформации, соответствующее этому пределу.

Введение функции напряжения $\Phi(r, \theta)$ такой, что

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (\text{VII. 1.3})$$

приводит к тождественному удовлетворению уравнения равновесия.

Оставшееся условие совместности деформаций определяет уравнение для потенциальной функции $\Phi(r, \theta)$. Решение этого уравнения в окрестности вершины трещины или острого выреза можно искать в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра r :

$$\Phi(r, \theta) = r^s f_1(\theta) + r^t f_2(\theta) + \dots, \quad s < t < \dots \quad (\text{VII. 1.4})$$

Найдем главный член асимптотического разложения (VII. 1.4)

$$\Phi(r, \theta) = r^s f_1(\theta). \quad (\text{VII. 1.5})$$

В соответствии с (VII. 1.3) компоненты тензора напряжения в окрестности вершины трещины представляются в форме:

$$\tau_{ij}(r, \theta) = r^{s-1} \bar{\tau}_{ij}(\theta). \quad (\text{VII. 1.6})$$

Подставляя (VII. 1.5) в (VII. 1.3) и последовательно в (VII. 1.2) и (VII. 1.1), можно получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f_1(\theta)$:

$$f_1'' (n(f_1')^2 + s^2 f_1^2) + f_1 (C_1(f_1')^2 + C_2 f_1^2) = 0, \quad (\text{VII. 1.7})$$

где

$$C_1 = s(n-1)(2s-1) + s^2, \quad C_2 = s^3(n-1)(s-1) + s^4. \quad (\text{VII. 1.8})$$

Вместе с граничными условиями уравнение (VII. 1.7) определяет нелинейную задачу на собственные значения s , где собственная функция $f_1(\theta, n)$ должна удовлетворять граничным условиям (граничные условия обсуждаются ниже). Заметим, что, поскольку поток энергии, поступающей в вершину трещины, должен быть ограниченным, собственное число s должно удовлетворять неравенству

$$s > \frac{n-1}{n+1}. \quad (\text{VII. 1.9})$$

Имеются три типа граничных условий, которые могут быть сформулированы на берегах трещины или острого выреза:

(А) условия отсутствия поверхностных условий на берегах трещины:

$$f_1|_{\theta=\pm(\pi-\alpha)} = 0; \quad (\text{VII. 1.10})$$

(В) условия на жестких (закрепленных) поверхностях (в задачах с жесткими включениями), когда условие $\gamma_{rz}|_{\theta=\pm(\pi-\alpha)}$ ведет к требованию

$$f_1'|_{\theta=\pm(\pi-\alpha)} = 0; \quad (\text{VII. 1.11})$$

(С) смешанные граничные условия, когда один из берегов трещины свободен от поверхностных усилий, а второй жестко закреплен

$$f_1|_{\theta=-(\pi-\alpha)} = 0, \quad f_1'|_{\theta=(\pi-\alpha)} = 0. \quad (\text{VII. 1.12})$$

В частном случае линейно упругого материала ($n = 1$) уравнение (VII. 1.7) принимает простую форму

$$f_1'' + s^2 f_1 = 0. \quad (\text{VII. 1.13})$$

Из общего решения последнего уравнения легко можно найти собственные функции и собственные числа:

(А) для условий отсутствия поверхностных условий на берегах трещины:

$$f_1(\theta) = A \cos \left(s\theta + \frac{k-1}{2}\pi \right), \quad s = \frac{k\pi}{2(\pi - \alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (\text{VII. 1.14})$$

(В) для условий на жестких (закрепленных) поверхностях (в задачах с жесткими включениями):

$$f_1(\theta) = A \sin \left(s\theta + \frac{k-1}{2}\pi \right), \quad s = \frac{k\pi}{2(\pi - \alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (\text{VII. 1.15})$$

(С) для смешанных граничных условий:

$$f_1(\theta) = A [\cos(s\theta) + (-1)^{k+1} \sin(s\theta)], \quad s = \frac{(2k-1)\pi}{4(\pi - \alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{VII. 1.16})$$

Следует заметить, что в силу линейности задачи при $n = 1$ суперпозиция собственных функций является решением задачи, что, естественно, не справедливо в нелинейном случае.

Из (VII. 1.14) следует, что при $k = 1$ и $\alpha = 0$ собственное число, отвечающее главному члену асимптотического разложения для случая трещины равно $s = 1/2$. Аналогичным образом можно установить, что для $\alpha = \pi/2$ (полуплоскость) наименьшее собственное число ($k = 1$) определяется равенством $s = 1$. В соответствии с (VII. 1.6) поле напряжений регулярно в отличие от предыдущего случая, когда поле напряжений в окрестности вершины трещины сингулярно. Тоже собственное значение получается для $k = 2$ и $\alpha = 0$. Соответствующая собственная функция является угловым распределением (коэффициентом) второго члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений. Решение (VII. 1.16) для смешанных граничных условий ведет к собственному числу $s = 1/2$, если $k = 1$, $\alpha = 0$ (доминирующее решение для случая трещины). Для $k = 1$, $\alpha = \pi/2$ получаем $s = 1/2$, тогда как для комбинаций $k = 1$, $\alpha = 3\pi/4$ и $k = 2$, $\alpha = \pi/4$ собственное число равно $s = 1$.

2. Собственные значения

Аналитическое выражение для собственных значений задачи на собственные значения для дифференциального уравнения (VII. 1.7) с крайними условиями (VII. 1.10), (VII. 1.11) или (VII. 1.12) можно получить с

помощью методов теории возмущений. С этой целью собственное число s представим в форме

$$s = s_0 + \varepsilon, \quad (\text{VII. 2.1})$$

где s_0 относится к линейной, "невозмущенной" задаче и ε – отклонение собственного значения от значения линейной задачи, обусловленное нелинейностью¹⁰

Представим показатель упрочнения n и функцию напряжений $f_1(\theta)$ в виде

$$n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots \quad (\text{VII. 2.2})$$

$$f_1(\theta) = f_1^{(0)}(\theta) + \varepsilon f_1^{(1)}(\theta) + \varepsilon^2 f_1^{(2)}(\theta) + \dots,$$

где n_0 и $f_1^{(0)}(\theta)$ относятся к линейной задаче.

Подставляя (VII. 2.1) и (VII. 2.2) в уравнение (VII. 1.7) и собирая слагаемые с одинаковой степенью n , получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: & \quad (f_1^{(0)})'' + s_0^2 f_1^{(0)} = 0, \\ \varepsilon^1: & \quad (f_1^{(1)})'' + s_0^2 f_1^{(1)} = s_0 [n_1(s_0 - 1) + 2] f_1^{(0)}, \\ \varepsilon^2: & \quad (f_2^{(0)})'' + s_0^2 f_2^{(0)} = - (f_2^{(0)})'' \left[n_2 \left((f_2^{(0)})' \right)^2 + (f_2^{(0)})^2 \right] \frac{1}{s_0^2} + \\ & \quad + f_2^{(0)} \left[C_1^2 \left((f_2^{(0)})' \right)^2 + C_2^2 (f_2^{(0)})^2 \right] \frac{1}{s_0^2}, \end{aligned} \quad (\text{VII. 2.3})$$

где

$$C_1^2 = n_1(4s_0 - 1) + n_2 s_0(2s_0 - 1) + 1, \quad C_2^2 = s_0^3 [n_2(s_0 - 1) + n_1].$$

¹⁰ Таким образом, необходимо найти весь спектр собственных значений сформулированной задачи на собственные значения. Следует отметить, что достаточно долго интерес исследователей вызывало построение высших приближений в асимптотических разложениях полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, по заданному главному члену асимптотического разложения – решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена [53], [54], [88], [92], [93], [113], [115]. Но сейчас отмечается необходимость нахождения всего спектра собственных чисел. Так, концепция маломасштабного пластического течения и связанного с ней асимптотического граничного условия в бесконечно удаленной точке и необходимость более тщательного исследования асимптотики дальнего поля напряжений и, следовательно, определения других собственных чисел в разложениях напряжений по собственным функциям, является предметом дискуссии в [71].

Первое уравнение описывает линейную задачу, решение которой для различных граничных условий, сформулированных ранее, известно. Используя это решение, можно легко определить решения следующих уравнений, последовательно находя функции $f_1^{(1)}$, $f_1^{(2)}$, Принимая обычное предположение, согласно которому секулярные слагаемые должны исчезать в решении, получаем последовательность условий для определения n_1, n_2, \dots . В результате первое из уравнений системы (VII. 2.2) в случае, когда $s_0 \neq 1/2$ асимптотическое разложение для показателя упрочнения принимает вид

$$n = 1 + \frac{s_*}{s_0 - s_*} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{s_0 - s_*} \right)^l - \frac{1}{s_0 - 1} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{s_0 - 1} \right)^l = \\ = \frac{s}{s - s_*} - \frac{s}{s - 1}, \quad (\text{VII. 2.4})$$

где

$$s_* = \frac{s_0^2}{2s_0 - 1}, \quad (\text{VII. 2.5})$$

откуда может быть найдена следующая аналитическая зависимость собственного числа s от показателя упрочнения n :

$$s = \frac{(n+1)s_0^2 + (n-1)(2s_0-1)}{2n(2s_0-1)} + \\ + \frac{\sqrt{((n+1)s_0^2 + (n-1)(2s_0-1))^2 - 4n^2s_0^2(2s_0-1)}}{2n(2s_0-1)} \quad (\text{VII. 2.6})$$

Для $s_0 = 1/2$ асимптотическое разложение показателя упрочнения принимает форму

$$n = 1 - \frac{1}{s_0 - 1} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{s_0 - 1} \right)^l = -\frac{s}{s - 1}, \quad (\text{VII. 2.7})$$

что эквивалентно равенству

$$s = \frac{n}{n+1}. \quad (\text{VII. 2.8})$$

В частном случае $s_0 = 1$ собственное число s не зависит от значения показателя упрочнения n $s = s_0 = 1$. Несмотря на то, что асимптотическое представление (VII. 2.4) в этом случае не является справедливым, значение $s = s_0 = 1$ содержится в (VII. 2.6).

Таким образом, формулы (VII. 2.6) и (VII. 2.8) полностью определяют собственное число s нелинейной задачи, если собственное число s_0 известно (выбрано из каких-либо дополнительных соображений). Зависимость s от s_0 для различных значений показателя упрочнения показана на рис. 36 – 38.

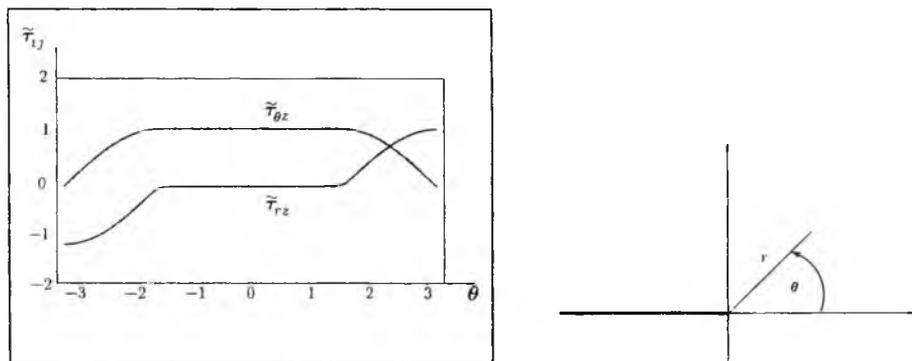


Рис. 36. Угловые распределения $\bar{\tau}_\beta$ для $n = 1000$, $s_0 = 1/2$ в случае трещины со свободными от нагрузок берегами

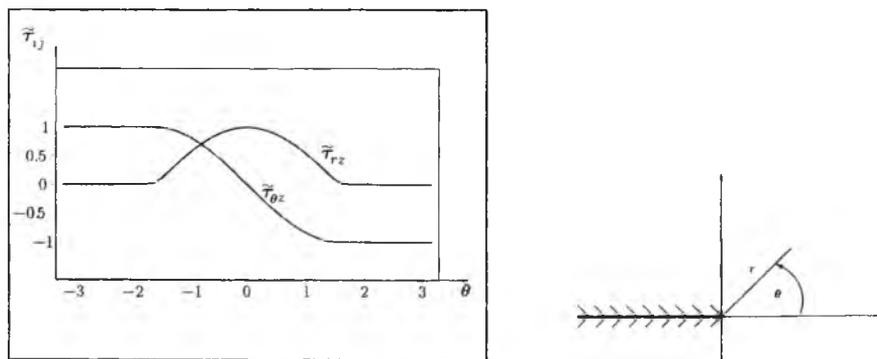


Рис. 37. Угловые распределения $\bar{\tau}_\beta$ для $n = 1000$, $s_0 = 1/2$ в случае трещины $\alpha = 0$ с жесткими берегами

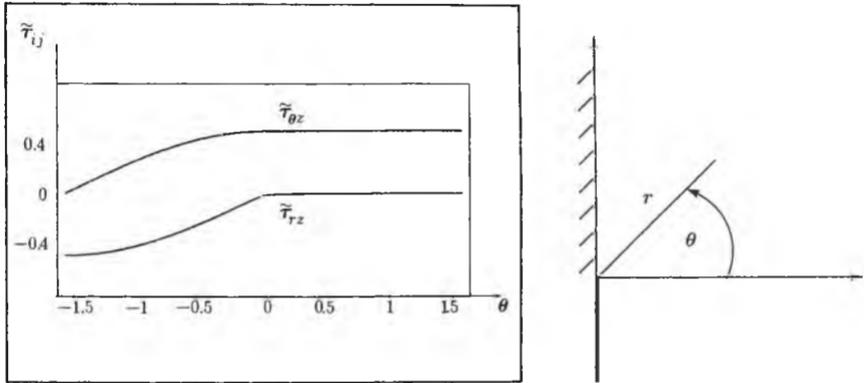


Рис. 38. Угловые распределения $\tilde{\tau}_\beta$ для $n = 1000$, $s_0 = 1/2$. Случай смешанных граничных условий, $\alpha = \pi/2$

3. Условие разрешимости

В настоящем параграфе рассматривается более общий подход исследования собственных значений задачи, основанный на формулировке условия разрешимости краевой задачи для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения. Данный метод может быть использован для решения задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига.

Следует отметить [21], что в процессе использования методов возмущений возникают совокупности задач, которые должны решаться последовательно, одна за другой. При этом задача первого порядка обычно оказывается однородной, в то время как задачи высших порядков будут неоднородными, но линейными. Если соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение, то неоднородная задача не будет иметь решение, если только не окажется выполненным соответствующее условие разрешимости.

Для того чтобы найти условия разрешимости в общем случае, воспользуемся идеей обращения к сопряженной задаче. Рассмотрим краевую задачу для неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x), \quad a < x < b, \quad (\text{VII. 3.1})$$

$$\alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) + \alpha_{13}y'(b) + \alpha_{14}y(b) = \beta_1, \quad (\text{VII. 3.2})$$

$$\alpha_{21}y'(a) + \alpha_{22}y(a) + \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) = \beta_2,$$

где граничные операторы линейно независимы, т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2, и, следовательно, существует по крайней мере одна невырожденная матрица размером 2×2 . Иначе говоря, по крайней мере один из определителей

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{14} \\ \alpha_{22} & \alpha_{24} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{34} = \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

В общем случае граничные условия могут быть смешанными (или неразделенными) (т.е. содержать значения искомой функции и ее производной на обоих концах отрезка $[a, b]$.) Учитывая граничные условия исследуемой задачи (VII. 4.2), рассмотрим случай, когда определитель $\Delta_{24} \neq 0$. Разрешая уравнения (VII. 3.2) относительно $y(a)$ и $y(b)$, можно получить

$$y(a) = \gamma_{11}y'(a) + \gamma_{12}y'(b) + \delta_1, \quad (\text{VII. 3.3})$$

$$y(b) = \gamma_{21}y'(a) + \gamma_{22}y'(b) + \delta_2,$$

где

$$\gamma_{11} = -\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{24}}, \quad \gamma_{12} = -\frac{\Delta_{34}}{\Delta_{24}}, \quad \gamma_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{24}}, \quad \gamma_{22} = -\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{24}},$$

$$\delta_1 = \frac{\beta_1\alpha_{24} - \beta_2\alpha_{14}}{\Delta_{24}}, \quad \delta_2 = \frac{\beta_2\alpha_{12} - \beta_1\alpha_{22}}{\Delta_{24}}.$$

Для нахождения условия разрешимости в общем случае воспользуемся идеей обращений к сопряженной задаче. Умножим дифференциальное

уравнение (VII. 3.1) на функцию $u(x)$, которую называют сопряженным решением, подлежащим определению в ходе дальнейшего исследования. В результате получим

$$p_2 u y'' + p_1 u y' + p_0 u y = g u, \quad a < x < b. \quad (\text{VII. 3.4})$$

Почленное интегрирование этого соотношения от a до b (по отрезку, на котором разыскивается решение краевой задачи) дает

$$\int_a^b p_2 u y'' dx + \int_a^b p_1 u y' dx + \int_a^b p_0 u y dx = \int_a^b g u dx. \quad (\text{VII. 3.5})$$

Далее, интегрируя по частям первые два слагаемых, после ряда преобразований можно получить

$$\begin{aligned} & \int_a^b [p_2 u'' + (2p_2' - p_1) u' + (p_2'' - p_1' + p_0) u] y dx + \\ & + \{p_2 u y' + [(p_1 - p_2') u - p_2 u'] y\} \Big|_a^b = \int_a^b g u dx. \end{aligned} \quad (\text{VII. 3.6})$$

Приравнивая нулю подынтегральное выражение в левой части последнего равенства, получим дифференциальное уравнение относительно функции u :

$$p_2 u'' + (2p_2' - p_1) u' + (p_2'' - p_1' + p_0) u = 0, \quad (\text{VII. 3.7})$$

которое обычно называют сопряженным по отношению к однородному уравнению (VII. 3.1). Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (VII. 3.1), называется самосопряженным, если оно совпадает с сопряженным ему уравнением (VII. 3.7). Эти уравнения совпадают в том случае, если справедливы равенства

$$2p_2' - p_1 = p_1, \quad p_2'' - p_1' = 0 \quad (\text{VII. 3.8})$$

или

$$p_1 = p_2'. \quad (\text{VII. 3.9})$$

При этом однородное уравнение, соответствующее (VII. 3.1), имеет вид

$$p_2 y'' + p_2' y' + p_0 y = 0. \quad (\text{VII. 3.10})$$

Для того чтобы найти вид граничных условий, необходимых для замыкания сопряженной задачи, рассмотрим однородную задачу, соответствующую (VII. 3.1), (VII. 3.2), т.е. положим $g = 0$ и $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$. Тогда соотношение (VII. 3.6) примет вид (в случае самосопряженного уравнения)

$$\{p_2 [uy' - u'y]\} \Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Используя равенства (VII. 3.3), последнее соотношение можно преобразовать к следующей форме

$$\begin{aligned} & [-\gamma_{21} p_2(b) u'(b) - p_2(a) u(a) + \gamma_{11} p_2(a) u'(a)] y'(a) + \\ & + [p_2(b) u(b) - \gamma_{22} p_2(b) u'(b) + \gamma_{12} p_2(a) u'(a)] y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Выберем граничные условия сопряженной задачи таким образом, чтобы коэффициенты при $y'(a)$ и $y'(b)$ обращались в нуль каждый в отдельности:

$$\begin{aligned} p_2(a) u(a) - \gamma_{11} p_2(a) u'(a) + \gamma_{21} p_2(b) u'(b) &= 0, \\ p_2(b) u(b) + \gamma_{12} p_2(a) u'(a) - \gamma_{22} p_2(b) u'(b) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VII. 3.11})$$

Таким образом, функция u представляет собой решение краевой задачи для уравнения

$$p_2 u'' + p_2' u' + p_0 u = 0 \quad (\text{VII. 3.12})$$

с граничными условиями (VII. 3.11).

Определив сопряженную задачу, вернемся к исходной неоднородной задаче (VII. 3.1), (VII. 3.2) с тем чтобы найти вид соответствующего условия разрешимости. Поскольку функция u удовлетворяет уравнению (VII. 3.12), выражение (VII. 3.6) принимает вид

$$\{p_2 [uy' - u'y]\} \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b g u dx. \quad (\text{VII. 3.13})$$

Поскольку решение сопряженной краевой задачи u удовлетворяет граничным условиям (VII. 3.2), то последнее соотношение может быть представлено как

$$\delta_1 p_2(a) u'(a) - \delta_2 p_2(b) u'(b) = \int_a^b g u dx. \quad (\text{VII. 3.14})$$

Равенство (VII. 3.14) является искомым условием разрешимости, где u представляет собой решение сопряженной краевой задачи.

4. Приложение к исследуемой проблеме

Возвращаясь к краевой задаче для неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$f_1'' + s_0^2 f_1 = -s_0 [n_1(s_0 - 1) + 2] f_0, \quad (\text{VII. 4.1})$$

$$f_1(\theta = \pm\pi) = 0, \quad (\text{VII. 4.2})$$

легко установить, что это уравнение является самосопряженным, поскольку в данном случае $p_2 = 1$, $p_1 = 0$ и $p_2' = p_1$, а условие разрешимости формулируется следующим образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} g u d\theta = 0, \quad (\text{VII. 4.3})$$

где g — правая часть уравнения (VII. 4.1):

$$g(\theta) = -s_0 [n_1(s_0 - 1) + 2] f_0(\theta), \quad (\text{VII. 4.4})$$

функция u есть сопряженное решение, совпадающее с функцией $f_0(\theta)$. Ограничиваясь изучением нечетных m , имеем в качестве сопряженного решения

$$u = \cos s_0 \theta. \quad (\text{VII. 4.5})$$

Выполняя несложные вычисления, можно найти, что условие разрешимости удовлетворяется только за счет выбора коэффициента $n_1 = -2/(s_0 - 1)$.

Проводя аналогичные рассуждения для функции $f_2(\theta)$, можно заключить, что условие разрешимости (VII. 4.3) и вид сопряженного решения (VII. 4.5) в этом случае сохраняются. Однако в качестве правой

части $g(\theta)$ необходимо взять правую часть дифференциального уравнения относительно функции $f_2(\theta)$:

$$g(\theta) = - [(\pi_2 f_0'^2 + f_0^2) f_0'' + (C_1^2 f_0'^2 + C_2^2 f_0^2) f_0] / s_0^2. \quad (\text{VII. 4.6})$$

Вновь проводя необходимые вычисления, можно установить, что условие разрешимости выполняется лишь при $n_2 = (4s_0 - 1)/(s_0(s_0 - 1)^2)$.

Обобщая полученные результаты для произвольного коэффициента n_k , можно найти

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{s_0}{s_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{s_0 - s_*} \right)^k - \frac{1}{s_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{s_0 - 1} \right)^k = \\ &= \frac{s}{s - s_*} - \frac{s}{s - 1}, \end{aligned} \quad (\text{VII. 4.7})$$

где $s_* = s_0^2/(2s_0 - 1)$.

Разрешая полученное уравнение относительно s , можно найти зависимость собственного значения от показателя нелинейности материала n и от собственного числа, соответствующего линейной задаче s_0 :

$$\begin{aligned} s &= \frac{n(s_0^2 + 2s_0 - 1) + (s_0 - 1)^2}{2n(2s_0 - 1)} + \\ &+ \frac{\sqrt{[n(s_0^2 + 2s_0 - 1) + (s_0 - 1)^2]^2 - 4n^2 s_0^2 (2s_0 - 1)}}{2n(2s_0 - 1)}. \end{aligned} \quad (\text{VII. 4.8})$$

В случае, когда $s_0 = 1/2$, асимптотическое разложение для показателя нелинейности материала принимает вид

$$n = 1 - \frac{1}{s_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{s_0 - 1} \right)^k = -\frac{s}{s - 1}, \quad (\text{VII. 4.9})$$

откуда получаем хорошо известную зависимость собственного числа от показателя нелинейности, соответствующую решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена:

$$s = \frac{n}{n + 1}. \quad (\text{VII. 4.10})$$

Таким образом, предложен способ определения собственных значений в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенным

определяющим уравнением, основанный на методе возмущений. Следует отметить, что подобная задача была рассмотрена в [47] (см. предыдущий параграф), где авторы получали выражения для коэффициентов разложения n_k путем исключения вековых слагаемых в решениях уравнений относительно функций f_k . Однако наличие вековых слагаемых в решении исследуемой проблемы ничему не противоречит, поскольку решение разыскивается на конечном отрезке $[-\pi, \pi]$, а не на полубесконечном интервале (как известно из теории возмущений, именно наличие бесконечной области и является источником возникновения неравномерно пригодных разложений – в данном случае разложений, имеющих вековые слагаемые). Второй причиной обращения к решению данной задачи послужила невозможность перенесения идеологии, развитой в [47], на случай более сложных, с математической точки зрения, задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига. При исследовании этих типов нагружения тела с трещиной оказалось, что возникают вековые слагаемые двух видов и при исключении вековых слагаемых получались два уравнения для определения одной неизвестной величины n_k на k -том шаге. Представленный в настоящей работе подход лишен указанных ограничений и может быть применен к решению задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига.

5. Задачи

1. Получите обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f_1^{(2)}(\theta)$ (см. систему уравнений (VII. 2.3)).
2. Проверьте представление (VII. 2.4).
3. Рассмотрите случай смешанных граничных условий для различных значений угла раствора α .

VIII. Собственные значения в задаче о трещине нормального отрыва

1. Трещина нормального отрыва.

Постановка задачи

Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины нормального отрыва в материале со степенными определяющими уравнениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (\text{VIII. 1.1})$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, s_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность напряжений, B, n – материальные константы, приводит к необходимости исследования уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{VIII. 1.2})$$

и условия совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (\text{VIII. 1.3})$$

В случае исследования трещины нормального отрыва в предположении реализации плоского деформированного состояния определяющие принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{3}{4} B \sigma_e^{n-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} \sigma_{r\theta}, \quad (\text{VIII. 1.4})$$

где интенсивность напряжений определяется формулой

$$\sigma_e^2 = 3 (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 / 4 + 3 \sigma_{r\theta}^2.$$

В полярных координатах компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри $F(r, \theta)$ в следующем виде

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \quad (\text{VIII. 1.5})$$

Степенной характер определяющих уравнений задачи позволяет обратиться к представлению функции напряжений Эри в виде разложения по собственным функциям:

$$F(r, \theta) = r^{\lambda+1} f(\theta). \quad (\text{VIII. 1.6})$$

Тогда компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= r^{\lambda-1} [(\lambda+1)f + f''], \\ \sigma_{\theta\theta} &= r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1)f, \\ \sigma_{r\theta} &= -r^{\lambda-1} \lambda f', \end{aligned} \quad (\text{VIII. 1.7})$$

условие совместности приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{IV} \left\{ (n-1) [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \right\} + (n-1)(n-3) \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''] (1-\lambda^2)f'' + \right. \\ & \left. + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \right\} [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1) f_e^2 \times \quad (\text{VIII. 1.8}) \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & + C_1 (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} f' + \\ & + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2) f'' = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_e^2 &= [(1-\lambda^2)f + f''] + 4\lambda^2 f'^2, \\ C_1 &= 4\lambda [(\lambda-1)n + 1], \\ C_2 &= (\lambda-1)n [(\lambda-1)n + 2]. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 1.9})$$

Вместе с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0 \quad (\text{VIII. 1.10})$$

уравнение (VIII. 1.8) постулирует краевую задачу на собственные значения: необходимо подобрать собственное число λ , ведущее к выполнению сформулированных граничных условий.

2. Собственные значения

Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 – собственного числа, отвечающего невозмущенной линейной задаче ($n = 1$), может быть найдено с помощью представления

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (\text{VIII. 2.1})$$

где ε – отклонение собственного числа λ от собственного числа λ_0 при изменении n .

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots, \quad (\text{VIII. 2.2})$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots, \quad (\text{VIII. 2.3})$$

где $f_0(\theta)$ – решение линейной задачи ($n = 1$).

Для функции $f_0(\theta)$ легко получить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \quad (\text{VIII. 2.4})$$

решение которого, подчиняющееся граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f_0(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pm\pi) = 0, \quad (\text{VIII. 2.5})$$

в линейной механике разрушения обычно связывают с именем Уильямса [110].

Общее решение уравнения (VIII. 2.4) имеет вид

$$f_0(\theta) = B_1 \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_2 \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_3 \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] + B_4 \sin[(\lambda_0 + 1)\theta]. \quad (\text{VIII. 2.6})$$

Характеристическое уравнение для собственного значения λ_0 легко получается из граничных условий на берегах трещины

$$\sin 2\pi\lambda_0 = 0, \quad (\text{VIII. 2.7})$$

$\lambda_0 = m/2$, где m – целое число.

Используя найденное выражение для собственного значения, можно отыскать соотношения между постоянными интегрирования B_j :

$$B_{3m} = -\frac{m-2}{m+2}B_{1m}, \quad B_{4m} = -B_{2m}, \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \quad (\text{VIII. 2.8})$$

$$B_{3m} = -B_{1m}, \quad B_{4m} = -\frac{m-2}{m+2}B_{2m}, \quad m = 0, 2, \pm 4, \pm 6, \dots$$

Для случая нечетных m решение дифференциального уравнения относительно функции $f_0(\theta)$ имеет вид (с точностью до неопределенного множителя)

$$f_0(\theta) = \beta \cos(\alpha\theta) - \alpha \cos(\beta\theta), \quad (\text{VIII. 2.9})$$

где $\alpha = \lambda_0 - 1$, $\beta = \lambda_0 + 1$.

Неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f_1(\theta)$ имеет вид

$$f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 = -n_1 \frac{x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0)}{g_0} + 2\lambda_0 f_0'' - C_1^1 f_0'' + C_2^1 x_0 + 2\lambda_0 a_0 f_0, \quad (\text{VIII. 2.10})$$

где для краткости приняты обозначения

$$a_0 = 1 - \lambda_0^2, \quad x_0 = a_0 f_0 + f_0'', \quad g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2$$

$$\omega_0 = (x_0')^2 + a_0 x_0 f_0'' + 4\lambda_0^2 (f_0'')^2 + 4\lambda_0^2 f_0' f_0''',$$

$$C_1^1 = 4\lambda_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)], \quad C_2^1 = 2\lambda_0 [1 + n_1(\lambda_0 - 1)].$$

Граничные условия для функции $f_1(\theta)$ формулируются как

$$f_1(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (\text{VIII. 2.11})$$

Таким образом, для определения функции $f_1(\theta)$ получена краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Нетривиальное решение данной краевой задачи будет существовать, если выполнено некоторое условие разрешимости, для формулировки которого обычно обращаются к сопряженной краевой задаче.

3. Условие разрешимости

Краевая задача для неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$p_4(x)\varphi^{IV} + p_3(x)\varphi''' + p_2(x)\varphi'' + p_1(x)\varphi' + p_0(x)\varphi = g(x), \quad (\text{VIII. 3.1})$$

$$\varphi(a) = \beta_1, \quad \varphi'(a) = \beta_2, \quad \varphi(b) = \beta_3, \quad \varphi'(b) = \beta_4. \quad (\text{VIII. 3.2})$$

Умножение обеих частей дифференциального уравнения на $u(x)$, где $u(x)$ – решение сопряженной краевой задачи, подлежащее определению в дальнейшем, приводит к равенству

$$\begin{aligned} \int_a^b p_4 u \varphi^{IV} dx + \int_a^b p_3 u \varphi''' dx + \int_a^b p_2 u \varphi'' dx + \int_a^b p_1 u \varphi' dx + \int_a^b p_0 u \varphi dx = \\ = \int_a^b g u dx, \end{aligned} \quad (\text{VIII. 3.3})$$

которое после ряда преобразований можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi [(p_4 u)^{IV} + (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u] dx + \\ + \{ p_4 u \varphi''' - [(p_4 u)' - p_3 u] \varphi'' + [(p_4 u)'' - (p_3 u)' + p_2 u] \varphi' - \\ - [(p_4 u)''' - (p_3 u)'' + (p_2 u)' - p_1 u] \varphi \} \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b g u dx. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 3.4})$$

Сопряженное уравнение получается путем приравнивания нулю коэффициента при φ в подынтегральном выражении в левой части последнего выражения.

$$(p_4 u)^{IV} + (p_3 u)''' + (p_2 u)'' - (p_1 u)' + p_0 u = 0 \quad (\text{VIII. 3.5})$$

или

$$\begin{aligned} p_4 u^{IV} + (4p_4' - p_3) u''' + (6p_4'' - 3p_3' + p_2) u'' + \\ + (4p_4''' - 3p_3'' + 2p_2' - p_1) u' + (p_4^{IV} - p_3''' + p_2'' - p_1' + p_0) u = 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 3.6})$$

Требование совпадения (VIII. 3.1) и (VIII. 3.6) дает

$$p_3 = 2p'_4, \quad p'_3 = 2p''_4, \quad p_1 = 2p'''_4 - \frac{3}{2}p''_3 + p'_2 = -p'''_4 + p'_2.$$

При этом уравнение (VIII. 3.1) принимает вид

$$p_4\varphi^{IV} + 2p'_4\varphi''' + p_2\varphi'' + (p'_2 - p'''_4)\varphi' + p_0\varphi = 0 \quad (\text{VIII. 3.7})$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p_4 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left[(p_2 - p'''_4) \frac{d\varphi}{dx} \right] + p_0\varphi = 0. \quad (\text{VIII. 3.8})$$

Произвольное самосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка без правой части может быть представлено в форме

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(A_2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left[A_1 \frac{d\varphi}{dx} \right] + A_0\varphi = 0. \quad (\text{VIII. 3.9})$$

Для отыскания сопряженных граничных условий рассматривают соотношение (VIII. 3.4) для однородной задачи:

$$\{ p_4 u \varphi''' - [(p_4 u)' - p_3 u] \varphi'' + [(p_4 u)'' - (p_3 u)' + p_2 u] \varphi' - \\ - [(p_4 u)'''' - (p_3 u)'' + (p_2 u)' - p_1 u] \varphi \} \Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Учитывая граничные условия $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi(b) = \varphi'(b) = 0$, можно найти

$$p_4 u|_{x=b} \varphi'''(b) - [(p_4 u)' - p_3 u]|_{x=b} \varphi''(b) - \\ - p_4 u|_{x=a} \varphi'''(a) + [(p_4 u)' - p_3 u]|_{x=a} \varphi''(a) = 0. \quad (\text{VIII. 3.10})$$

Сопряженные граничные условия выбираются таким образом, чтобы последнее соотношение выполнялось при произвольных значениях $\varphi''(a)$, $\varphi''(b)$, $\varphi'''(a)$ и $\varphi'''(b)$:

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \quad (\text{VIII. 3.11})$$

Таким образом, сопряженная краевая задача — задача для дифференциального уравнения (VIII. 3.5) с граничными условиями (VIII. 3.11).

Для формулировки условия разрешимости неоднородной задачи необходимо вновь обратиться к соотношению (VIII. 3.4). Используя дифференциальное уравнение и граничные условия, которым подчинена функция u , легко установить, что

$$[p_4 u'' \varphi' - (p_4 u''' + 3p_4 u'' - p_3 u'') \varphi]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b u g dx \quad (\text{VIII. 3.12})$$

или

$$\begin{aligned} & (p_4 u'' \beta_4 - p_4 u''' \beta_3 - 3p_4' u'' \beta_3 + p_3 u'' \beta_3) |_{x=b} - \\ & - (p_4 u'' \beta_2 - p_4 u''' \beta_1 - 3p_4' u'' \beta_2 + p_3 u'' \beta_1) |_{x=a} = \int_a^b u g dx. \end{aligned} \quad (\text{VIII. 3.13})$$

Условие (VIII. 3.13) представляет собой искомое условие разрешимости, где функция u – любое нетривиальное решение однородной сопряженной задачи. Выбирая в качестве функции $u(x)$ любое нетривиальное решение однородной сопряженной задачи из выражения (VIII. 3.13) можно получить условие разрешимости исходной краевой задачи (VIII. 3.1), (VIII. 3.2).

4. Приложение к исследуемой проблеме о трещине нормального отрыва

Применение развитой в предыдущем параграфе теории к рассматриваемой задаче о трещине нормального отрыва приводит к следующему условию разрешимости

$$\int_{-\pi}^{\pi} u g d\theta = 0, \quad u = f_0(\theta) = \beta \cos(\alpha\theta) - \alpha \cos(\beta\theta). \quad (\text{VIII. 4.1})$$

Правая часть неоднородного дифференциального уравнения относительно функции $f_1(\theta)$ определяется выражением

$$g(\theta) = -n_1 \frac{x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega \eta)}{g_0} + 2\lambda_0 f_0'' - C_1^1 f_0'' + C_2^1 x_0 + 2\lambda_0 a_0 f_0. \quad (\text{VIII. 4.2})$$

Проводя необходимые преобразования, можно установить, что условие разрешимости краевой задачи для функции $f_1(\theta)$ выполняется, если

$$n_1 = -\frac{2}{\lambda_0 - 1}, \quad (\text{VIII. 4.3})$$

и, следовательно, двучленное асимптотическое разложения показателя нелинейности имеет вид

$$n = 1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda_0 - 1} + O(\varepsilon^2). \quad (\text{VIII. 4.4})$$

Для функции $f_2(\theta)$ неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет существенно более громоздкий вид:

$$\begin{aligned} & g_0^2 [f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2] + \\ & + g_0^2 (-x_0 + C_1^2 f_0'' - C_2^2 x_0 + 2\lambda_0 C_1^1 f_0) + \\ & + n_1 \{ -x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2] + \\ & + g_0 x_0 [-4\lambda_0 x_0' f_0' - 2\lambda_0 a_0 f_0 f_0'' - 2\lambda_0 x_0 f_0'' + 8\lambda_0 (f_0'')^2 + 8\lambda_0 f_0' f_0'''] + \\ & + 2h_0 x_0' [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2] - 2h_0 x_0 [-2\lambda_0 x_0 f_0' - 2\lambda_0 f_0 x_0' + 8\lambda_0 f_0' f_0''] + \\ & + 4\lambda_0^2 h_0 f_0' [-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2] - 2\lambda_0 g_0 f_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) - \\ & - 2\lambda_0 g_0 f_0 f_0^{IV} x_0 + n_1 h_0^2 x_0 + 4\lambda_0 h_0^2 f_0 - 4\lambda_0 g_0 h_0 f_0' - \\ & - x_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0 x_0^2 f_1^{IV} + \\ & + g_0 x_0 [2x_0' x_1' + a_0 f_0'' x_1 + a_0 x_0 f_1'' + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0'' f_1' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''] + \\ & + 2h_0 x_0' [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] - 2h_0 x_0 [x_0 x_1' + x_0' x_1 + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0'' f_1'] + \\ & + 4\lambda_0^2 h_0 f_0' [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0 (f_0^{IV} x_0 + \omega_0) x_1 + 2h_0 g_0 x_1' - \\ & - 2h_0^2 x_1 + 4\lambda_0^2 h_0 g_0 f_1' + f_0^{IV} g_0 x_0 x_1 \} = 0, \end{aligned}$$

$$g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2, \quad h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0'', \quad x_1 = f_1'' + a_0 f_1,$$

где

$$f_1 = -n_1(\beta \cos \alpha \theta - n_1 \alpha \cos \beta \theta) \ln \cos(\theta/2) +$$

$$+ n_1 \beta \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{(2\lambda_0-1)/2} \frac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0 - 1 \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{(1-2\lambda_0)/2} \frac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0 - 1 < 0 \end{array} \right] \cos \alpha \theta +$$

$$+n_1\beta \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{(2\lambda_0-1)/2} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0-1 \geq 0 \\ - \sum_{k=1}^{(1-2\lambda_0)/2} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0-1 < 0 \end{array} \right] \sin \alpha\theta -$$

$$-n_1\alpha \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{(2\lambda_0+1)/2} \frac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0+1 \geq 0 \\ - \sum_{k=1}^{-(1+2\lambda_0)/2} \frac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0+1 < 0 \end{array} \right] \cos \beta\theta -$$

$$-n_1\alpha \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{(2\lambda_0+1)/2} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0+1 \geq 0 \\ - \sum_{k=1}^{-(1+2\lambda_0)/2} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, \quad 2\lambda_0+1 < 0 \end{array} \right] \sin \beta\theta.$$

В силу сложности полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $f_2(\theta)$ к настоящему времени получены лишь следующие асимптотические разложения показателя нелинейности материала n для различных значений собственного числа λ_0 , соответствующего линейной задаче. Однако, используя найденные асимптотические разложения, можно найти оценку для собственных значений λ , отвечающих произвольному n и далее данная оценка должна быть уточнена, например, с помощью численного исследования исходного нелинейного уравнения. Численные значения коэффициентов асимптотических разложений и сами трехчленные разложения показателя

теля нелинейности материала имеют вид:

$$\lambda_0 = -5/2, \quad n = 1 + \frac{4}{7}\varepsilon - \frac{79}{2401}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0 = -3/2, \quad n = 1 + \frac{4}{5}\varepsilon + \frac{669}{625}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0 = -1/2, \quad n = 1 + \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{92}{81}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0 = 1/2, \quad n = 1 + 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0 = 3/2, \quad n = 1 - 4\varepsilon + \frac{53}{5}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0 = 5/2, \quad n = 1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{683}{567}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Для $\lambda_0 = 1/2$ (что соответствует классической задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена) можно показать, что

$$n_k = -\frac{(-1)^k}{(\lambda_0 - 1)^{k+1}},$$

$$n = 1 - \frac{1}{\lambda_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_0 - 1} \right)^k = -\frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

$$\lambda = \frac{n}{n + 1}.$$

Таким образом, получена хорошо известная формула, связывающая собственное число и показатель нелинейности материала.

Для остальных значений собственного значения, соответствующего линейной задаче, получены следующие выражения:

$$\lambda_0 \leq -\frac{3}{2}, \quad n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 12\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 6}{(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1)^4},$$

$$\lambda_0 \geq \frac{3}{2}, \quad n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 10\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 4}{(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1)^4}.$$

Для этих значений необходимо дальнейшее исследование коэффициентов асимптотических разложений показателя нелинейности материала n_k для выяснения возможности представления полученных сумм в виде бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

IX. Поле напряжений у V-образного выреза в материале со степенными определяющими уравнениями

В настоящем разделе приводится описание нового практического метода определения показателя сингулярности поля напряжений вблизи вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями¹¹

1. Основные уравнения. Метод решения

Рассмотрим V-образный вырез с углом раствора γ (рис. 39).

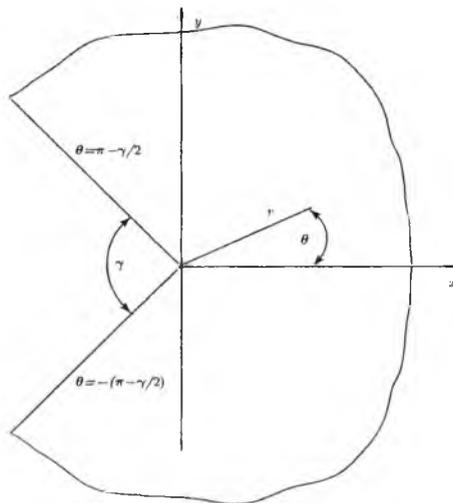


Рис. 39. Геометрия исследуемой области

Предположим, что материал подчиняется закону Рамберга – Осгуда, в соответствии с которым в случае одноосного растяжения

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (\text{IX. 1.1})$$

¹¹ Данный метод дискретизации клиновидной области был предложен в работе Chen, D.H. Plastic stress singularity near the tip of a V-notch/ D.H. Chen, K. Ushijima//Int. J. Fracture. – 2000. – V. 106. – P. 117-134.

где σ_0 и ε_0 – предел пропорциональности и соответствующее ему значение деформации, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$, E – модуль Юнга, n и α – материалыные константы.

Обобщенное на случай сложного напряженного состояния уравнение (IX. 1.1) принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} s_{ij} + \frac{1 - 2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3\alpha}{2E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} s_{ij}, \quad (\text{IX. 1.2})$$

где ν – коэффициент Пуассона, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ – компоненты девиатора напряжений, $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ – интенсивность напряжений.

Предполагается, что в непосредственной окрестности вершины неподвижной трещины вклад упругой составляющей в уравнении (IX. 1.2) пренебрежимо мал по сравнению с пластическими деформациями и, следовательно, в рамках дальнейшего асимптотического анализа определяющие уравнения можно представить в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\alpha}{2E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} s_{ij}, \quad (\text{IX. 1.3})$$

где приняты во внимание лишь пластические деформации.

Для асимптотического исследования полей напряжений и деформаций вблизи углового выреза или вершины трещины удобно ввести полярную систему координат r, θ с полюсом в вершине трещины. С помощью функции напряжений Эри $\bar{\phi}(r, \theta)$ и ее асимптотического представления

$$\bar{\phi}(r, \theta) = K \sigma_0 r^s \bar{\phi}(\theta) \quad (\text{IX. 1.4})$$

поле напряжений вблизи вершины трещины принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K \sigma_0 r^{s-2} \left(s \bar{\phi}(\theta) + \frac{d^2 \bar{\phi}}{d\theta^2} \right) = K \sigma_0 r^{s-2} \bar{\sigma}_r(\theta), \\ \sigma_\theta &= K \sigma_0 r^{s-2} \left(s(s-1) \bar{\phi} \right) = K \sigma_0 r^{s-2} \bar{\sigma}_\theta(\theta), \\ \tau_{r\theta} &= K \sigma_0 r^{s-2} \left((1-s) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} \right) = K \sigma_0 r^{s-2} \bar{\tau}_{r\theta}(\theta), \\ \sigma_e &= K \sigma_0 r^{s-2} \bar{\sigma}_e(\theta). \end{aligned} \quad (\text{IX. 1.5})$$

Из условия совместности деформаций можно получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка отно-

сительно функции $\phi(\theta)$:

$$\begin{aligned} & \left[n(s-2) - \frac{d^2}{d\theta^2} \right] \left\{ \bar{\sigma}_e^{n-1} \left[s(s-3)\bar{\phi} - 2\frac{d^2\bar{\phi}}{d\theta^2} \right] \right\} + \\ & + n(s-2)[n(s-2)+1] \left\{ s(2s-3)\bar{\phi} - \frac{d^2\bar{\phi}}{d\theta^2} \right\} \bar{\sigma}_e^{n-1} + \text{(IX. 1.6)} \\ & + 6(s-1)[n(s-2)+1] \frac{d}{d\theta} \left(\bar{\sigma}_e^{n-1} \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

для плоского напряженного состояния и

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - n(s-2)[n(s-2)+2] \right\} \times \\ & \times \left\{ \bar{\sigma}_e^{n-1} \left[s(2-s)\bar{\phi} + \frac{d^2\bar{\phi}}{d\theta^2} \right] \right\} + 4(s-1) \times \text{(IX. 1.7)} \\ & \times [n(s-2)+1] \frac{d}{d\theta} \left(\bar{\sigma}_e^{n-1} \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

для плоского деформированного состояния.

Решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (IX. 1.6) и (IX. 1.7) должны удовлетворять однородным граничным условиям

$$\bar{\phi}(\theta = \pm(\pi - \gamma/2)) = \frac{d\bar{\phi}}{d\theta}(\theta = \pm(\pi - \gamma/2)) = 0 \quad \text{(IX. 1.8)}$$

– условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины или углового выреза.

В силу однородности полученных уравнений можно сформулировать условия нормировки вида $\bar{\phi}(0) = 1$ и при отыскании решений уравнений (IX. 1.6) и (IX. 1.7) перейти к начальным краевым задачам, применяя какую-либо из схем построения численного решения в сочетании с методом пристрелки. Однако, в отличие от задач антиплоского сдвига, где метод пристрелки является однопараметрическим, в данном случае он является двухпараметрическим – необходимо подобрать два параметра с тем, чтобы выполнялись два граничных условия на берегах трещины или углового выреза и, следовательно, результаты требуют дополнительного обоснования. Далее предлагается подход [55], позволяющий преодолеть указанную сложность при построении численного решения

задачи. Для нахождения численных решений дифференциальных уравнений (IX. 1.6) и (IX. 1.7), подчиняющихся граничным условиям (IX. 1.8), разобьем область $-(\pi - \gamma/2) \leq \theta \leq (\pi - \gamma/2)$ на N равных углов, как показано на рис. 40.

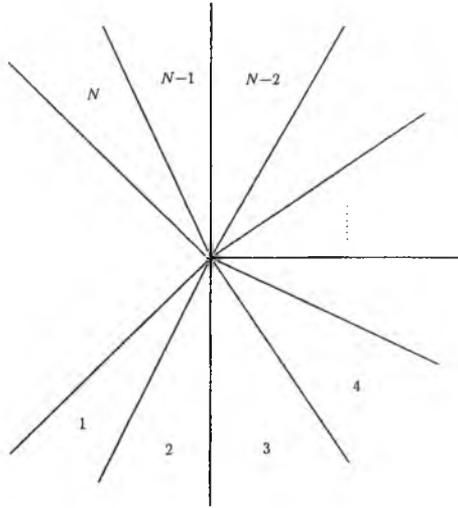


Рис. 40. Разбиение клиновидной области на N секторов

Внутри каждой из полученных областей обозначим значение интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_e(\theta)$ через $\bar{\sigma}_{ei}$, $i = 1, 2, \dots, N$ и предположим, что внутри каждой из областей интенсивность напряжений является постоянной величиной. Поэтому внутри каждого из секторов нелинейные дифференциальные уравнения (IX. 1.6) и (IX. 1.7) становятся линейными и могут быть представлены в виде

$$\frac{d^4 \bar{\phi}}{d\theta^4} + a_2 \frac{d^2 \bar{\phi}}{d\theta^2} + a_4 \bar{\phi} = 0, \quad (\text{IX. 1.9})$$

где

$$a_2 = [s^2 (-n^2 + 6n - 1) + s (4n^2 - 21n + 9) - 4n^2 + 18n - 6] / 2, \quad (\text{IX. 1.10})$$

$$a_4 = ns(s - 2) [2ns^2 + s(3 - 7n) + 6(n - 1)] / 2$$

для плоского напряженного состояния и

$$a_2 = s^2(-n^2 + 4n - 1) + s(4n^2 - 14n + 6) - 4n^2 + 12n - 4, \tag{IX. 1.11}$$

$$a_4 = ns(s - 2)^2[n(s - 2) + 2]$$

для плоского деформированного состояния.

Поскольку уравнение (IX. 1.9) – линейное дифференциальное уравнение, его общее решение представляется в виде линейной комбинации четырех экспонент вида $e^{f_i\theta}$, где f_i – корень характеристического уравнения, с произвольными константами b_1, b_2, b_3 и b_4 . Следовательно, напряжения на границах секторов $\theta_a \leq \theta \leq \theta_b$ выражаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -\tau_{r\theta a} \\ \sigma_{\theta a} \\ -\tau_{r\theta b} \\ \sigma_{\theta b} \end{pmatrix} = K\sigma_0 r^{s-2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \tag{IX. 1.12}$$

и

$$\begin{pmatrix} u_{ra} \\ u_{\theta a} \\ u_{rb} \\ u_{\theta b} \end{pmatrix} = \frac{K^n \alpha \sigma_0}{E} \frac{h_3}{n(s-2)+1} r^{n(s-2)+1} \bar{\sigma}_e^{n-1} \mathbf{B} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \tag{IX. 1.13}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_1 f_1 e^{f_1 \theta_a} & -s_1 f_1 e^{-f_1 \theta_a} & s_1 f_2 e^{f_2 \theta_a} & -s_1 f_2 e^{-f_2 \theta_a} \\ -ss_1 e^{f_1 \theta_a} & -ss_1 e^{-f_1 \theta_a} & -ss_1 e^{f_2 \theta_a} & -ss_1 e^{-f_2 \theta_a} \\ -s_1 f_1 e^{f_1 \theta_b} & s_1 f_1 e^{-f_1 \theta_b} & -s_1 f_2 e^{f_2 \theta_b} & s_1 f_2 e^{-f_2 \theta_b} \\ ss_1 e^{f_1 \theta_b} & ss_1 e^{-f_1 \theta_b} & ss_1 e^{f_2 \theta_b} & ss_1 e^{-f_2 \theta_b} \end{bmatrix}, \tag{IX. 1.14}$$

где $s_1 = s - 1$ и

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_{11}e^{f_1\theta_a} & h_{11}e^{-f_1\theta_a} & h_{12}e^{f_2\theta_a} & h_{12}e^{-f_2\theta_a} \\ -\frac{h_{21}}{ns_2}f_1e^{f_1\theta_a} & \frac{h_{21}}{ns_2}f_1e^{-f_1\theta_a} & -\frac{h_{22}}{ns_2}f_2e^{f_2\theta_a} & \frac{h_{22}}{ns_2}f_2e^{-f_2\theta_a} \\ h_{11}e^{f_1\theta_b} & h_{11}e^{-f_1\theta_b} & h_{12}e^{f_2\theta_b} & h_{12}e^{-f_2\theta_b} \\ -\frac{h_{21}}{ns_2}f_1e^{f_1\theta_b} & \frac{h_{21}}{ns_2}f_1e^{-f_1\theta_b} & -\frac{h_{22}}{ns_2}f_2e^{f_2\theta_b} & \frac{h_{22}}{ns_2}f_2e^{-f_2\theta_b} \end{bmatrix}, \quad (\text{IX. 1.15})$$

где $s - 2 = s_2$, $h_1 + f_1^2 = h_{11}$, $h_1 + f_2^2 = h_{12}$, $h_2 + f_1^2 = h_{21}$, $h_2 + f_2^2 = h_{22}$, h_1 , h_2 и h_3 определяются выражениями

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{s}{2}(3 - s), \\ h_2 &= h_1 + 3(s - 1)[n(s - 2) + 1], \\ h_3 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{IX. 1.16})$$

для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} h_1 &= s(2 - s), \\ h_2 &= h_1 + 4(s - 1)[n(s - 2) + 1], \\ h_3 &= \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (\text{IX. 1.17})$$

для плоского деформированного состояния.

В матрицах (IX. 1.14) и (IX. 1.15) $\pm f_1$, $\pm f_2$ – корни характеристического уравнения

$$f^4 + a_2f^2 + a_4 = 0. \quad (\text{IX. 1.18})$$

Матрица жесткости \mathbf{d} , связывающая напряжения и перемещения на границах секторов

$$\begin{Bmatrix} -\tau_{r\theta a} \\ -\sigma_{\theta a} \\ \tau_{r\theta b} \\ \sigma_{\theta b} \end{Bmatrix} = \mathbf{d} \begin{Bmatrix} u_{ra} \\ u_{\theta a} \\ u_{rb} \\ u_{\theta b} \end{Bmatrix}, \quad (\text{IX. 1.19})$$

может быть получена из (IX. 1.12) – (IX. 1.18) и определена как

$$\mathbf{d} = \frac{(\bar{\sigma}_e K)^{1-n} E}{\alpha h_3} [n(s - 2) + 1] r^{(s-2)(1-n)-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}. \quad (\text{IX. 1.20})$$

Вычисляя матрицы \mathbf{d}^i для всех N секторов и учитывая условия непрерывности компонент тензора напряжений $\tau_{r\theta}$ и σ_θ на границах секторов, можно построить матрицу \mathbf{D} , связывающую перемещения на всех границах клиновидных элементов с напряжениями на берегах углового выреза или трещины:

$$\mathbf{D} \begin{Bmatrix} u_{r,1} \\ u_{\theta,1} \\ u_{r,2} \\ u_{\theta,2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{r,1} \\ u_{\theta,N} \\ u_{r,N+1} \\ u_{\theta,N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tau_{r\theta}|_{\theta=-(\pi-\gamma/2)} \\ -\sigma_\theta|_{\theta=-(\pi-\gamma/2)} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{r\theta}|_{\theta=(\pi-\gamma/2)} \\ \sigma_\theta|_{\theta=(\pi-\gamma/2)} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IX. 1.21})$$

Учитывая граничные условия на берегах трещины:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}|_{\theta=-(\pi-\gamma/2)} &= 0, \\ \sigma_\theta|_{\theta=-(\pi-\gamma/2)} &= 0, \\ \tau_{r\theta}|_{\theta=(\pi-\gamma/2)} &= 0, \\ \sigma_\theta|_{\theta=(\pi-\gamma/2)} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IX. 1.22})$$

равенство (IX. 1.21) можно представить в форме

$$\mathbf{D} \begin{Bmatrix} u_{r,1} \\ u_{\theta,1} \\ u_{r,2} \\ u_{\theta,2} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{r,1} \\ u_{\theta,N} \\ u_{r,N+1} \\ u_{\theta,N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{IX. 1.23})$$

где матрица \mathbf{D} имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} d_{11}^1 & d_{12}^1 & d_{13}^1 & d_{14}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 & d_{23}^1 & d_{24}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31}^1 & d_{32}^1 & d_{33}^1 + d_{11}^2 & d_{34}^1 + d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41}^1 & d_{42}^1 & d_{43}^1 + d_{21}^2 & d_{44}^1 + d_{22}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 + d_{11}^3 & d_{34}^2 + d_{12}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 + d_{21}^3 & d_{44}^2 + d_{22}^3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{33}^{N-1} + d_{11}^N & d_{34}^{N-1} + d_{12}^N & d_{13}^N & d_{14}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{43}^{N-1} + d_{21}^N & d_{44}^{N-1} + d_{22}^N & d_{23}^N & d_{24}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{31}^N & d_{32}^N & d_{33}^N & d_{34}^N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{41}^N & d_{42}^N & d_{43}^N & d_{44}^N \end{array} \right)$$

Система уравнений (IX. 1.23) есть система $2(N+1)$ однородных уравнений относительно $2(N+1)$ неизвестных. Для существования нетривиального решения этой системы необходимо, чтобы определитель матрицы обращался в нуль. Решив уравнение $\det \mathbf{D} = 0$, можно найти искомого собственное значение s . Определив s , можно найти перемещения $u_{r,1}$, $u_{\theta,1}$, ..., $u_{r,N+1}$, $u_{\theta,N+1}$. Далее, используя (IX. 1.20), можно вычислить компоненты тензора напряжений на границах секторов.

Из анализа поля напряжений можно ожидать выделения двух типов решений, соответствующих симметричной и антисимметричной деформации относительно линии продолжения трещины (относительно луча $\theta = 0$). Поэтому при применении данной схемы расчета необходимо добавить дополнительные условия, задающие тип нагружения.

Как видно из (IX. 1.20), для вычисления матриц \mathbf{d}^i , $i = 1, 2, \dots, N$ необходимо знать интенсивность напряжений $\bar{\sigma}_{ei}$. Однако это значение невозможно определить заранее в начале вычислений. Поэтому для вычисления значения $\bar{\sigma}_{ei}$ в каждом из секторов можно воспользоваться итерационным процессом, суть которого заключается в следующем.

Сначала предлагаемый метод определения собственного числа s применяется для линейной задачи $n = 1$. В этом случае, как это видно из (IX. 1.20), величина интенсивности напряжений не оказывает влияния на элементы матрицы \mathbf{d}^i . В результате вычислений определяются поля перемещений и напряжений. Затем полагают $n = n_1 > 1$ и при вычислении матрицы \mathbf{d}^i используются значения $\bar{\sigma}_{ei}$, полученные для $n = 1$. Далее вновь вычисляются значения $\bar{\sigma}_{ei}$ до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Погрешность вычисления $\bar{\sigma}_{ei}$ на j -том шаге

итерации $\varepsilon(j)$ определяется как

$$\varepsilon(j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\bar{\sigma}_{ei}(j) - \bar{\sigma}_{ei}(j-1)}{\bar{\sigma}_{ei}(j-1)} \right)^2. \quad (\text{IX. 1.24})$$

2. Задача Хатчинсона – Райса – Розенгрена

Естественно применить описанную технику расчета для получения собственных чисел задачи Хатчинсона – Райса – Розенгрена,¹² поскольку собственные числа, отвечающие данной задаче, и распределения компонент тензора напряжений для различных значений показателя нелинейности материала известны.

Проведенные вычисления показывают, что удовлетворительная точность достигается при $N > 30$. Например, собственное значение s , найденное для $N = 30, 60$ и 120 , равно 1.7497, 1.7498 и 1.7500 соответственно. Таким образом, данная техника дает результат с относительной ошибкой менее чем 0.02% по сравнению с точным решением $s = (2n + 1)/(n + 1)$. В ходе итерационного процесса значения интенсивности напряжений внутри каждого из секторов определяются уже на седьмом цикле $N_{cycle} = 7$. Ошибка вычислений, например для $N_{cycle} > 13$, меньше, чем 10^{-4} .

На рис. 41 – 45 представлены угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные в результате вычислений по предлагаемой схеме. Из представленных рисунков видно, что угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные описанным методом дискретизации изучаемой области (обозначенные на графиках точками), совпадают с решением, найденным методом Рунге – Кутта – Фельберга (кривые, показанные сплошной линией). Таким образом, приведенный метод исследования собственных значений может быть использован для отыскания всего спектра собственных значений данной задачи.

Преимущество данного подхода заключается в возможности нахождения собственного числа отдельно от определения другого подбираемого значения (значения производной второго порядка функции $\bar{\phi}$ при $\theta = 0$). Следует отметить, что обычно при решении такого класса задач используется метод Рунге – Кутта – Фельберга вместе с методом при-

¹²Следует отметить, что задача Хатчинсона-Райса-Розенгрена, ставшая уже классической задачей нелинейной механики разрушения, продолжает вызывать интерес исследователей. Только в самое последнее время появились работы, предлагающие приближенные аналитические решения для трещин антиплоского сдвига [107] и нормального отрыва в материалах со степенным определяющим законом [104].

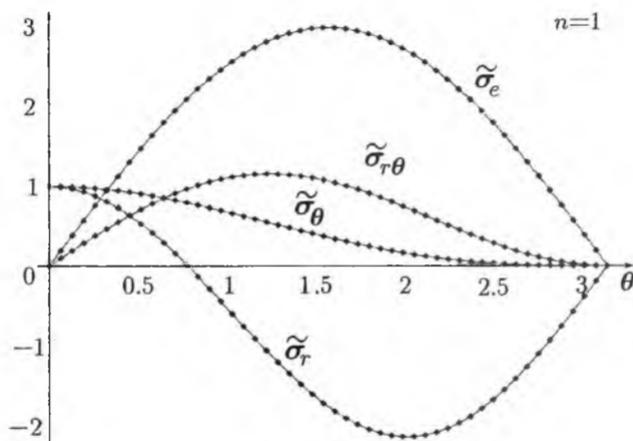


Рис. 41. Угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные в результате расчетов, для $n = 1$

стрелки, который в рассматриваемом случае становится двухпараметрическим, и результаты требуют дополнительного обоснования и проверки. Описанный метод позволяет подбирать лишь один параметр на каждом шаге вычисления.

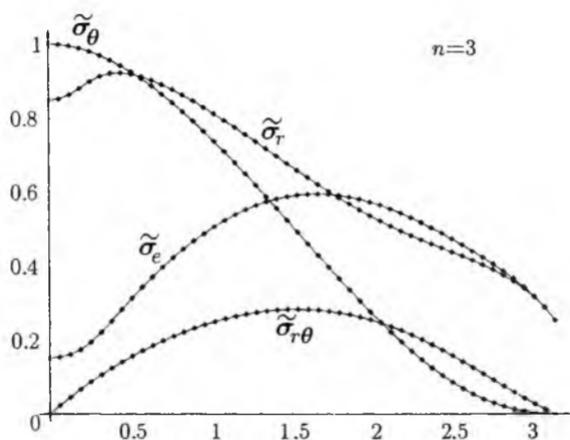


Рис. 42. Угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные в результате расчетов, для $n = 3$.

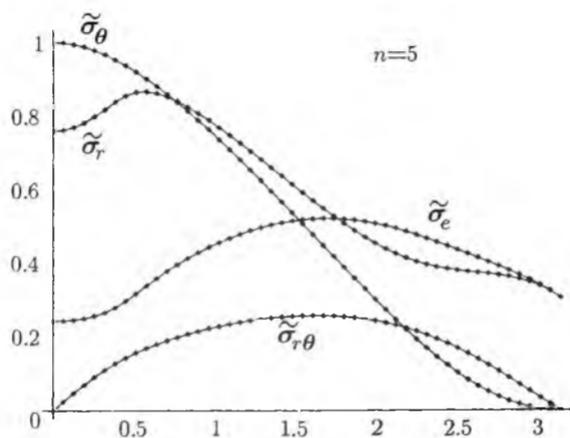


Рис. 43. Угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные в результате расчетов, для $n = 5$.

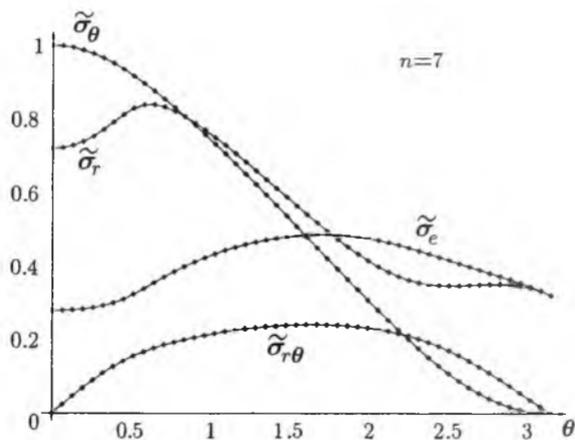


Рис. 44. Угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные в результате расчетов, для $n = 7$.

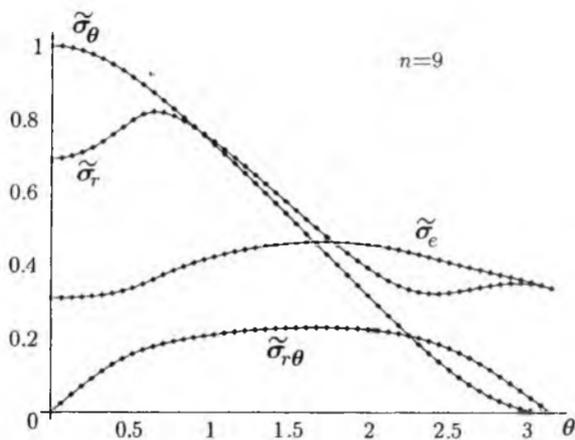


Рис. 45. Угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные в результате расчетов, для $n = 9$.

Х. Законы сохранения

В механике разрушения широко используются инвариантные интегралы, введение и практическое использование которых связывают с именами Максвелла, Эшелби, Сандерса, Черепанова, Райса, Будянского, Нолса, Стернберга, Л.М. Зубова [52], [62], [82], [99], [42], [10], [11]. В данном разделе дан систематический вывод инвариантных интегралов, основанный на теореме Нетер.

1. Теорема Нетер

Рассмотрим трехмерное пространство и введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть Π – потенциальная энергия однородного упругого тела, находящегося под действием поверхностных сил T_i^d , приложенных на части границы тела S_T и под действием заданных перемещений u_i^d на оставшейся части поверхности тела S_u :

$$\Pi = \int_{\Omega} W [u_{i,j}(\mathbf{x})] dv - \int_{S_T} T_i^d u_i ds, \quad (\text{X. 1.1})$$

где W – плотность упругой энергии тела (функция симметричной части градиента перемещений $\nabla \mathbf{u}$), в соответствии с которой можно представить определяющие соотношения материала в форме:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}}. \quad (\text{X. 1.2})$$

Напомним, что из теоремы о минимуме потенциальной энергии следуют уравнения равновесия

$$\sigma_{ik,k} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{X. 1.3})$$

и граничные условия на части поверхности S_T :

$$\sigma_{ik} n_k = T_i^d \quad \mathbf{x} \in S_T. \quad (\text{X. 1.4})$$

Рассмотрим лагранжиан \mathcal{L} для некоторого выделенного объема D :

$$\mathcal{L} = \int_D W [u_{i,j}(\mathbf{x})] dv. \quad (\text{X. 1.5})$$

Рассмотрим бесконечно малое преобразование координат $x_i \rightarrow x'_i$ и компонент вектора перемещений $u_i \rightarrow u'_i$, зависящее от малого параметра δw :

$$x_i \rightarrow x'_i \equiv x_i + \delta x_i, \quad \delta x_i = \phi_{ij} \delta w_j, \quad (\text{X. 1.6})$$

$$u_i(x_j) \rightarrow u'_i(x'_j) \equiv u_i(x_j) + \delta u_i(x_j), \quad \delta u_i = \psi_{ij} \delta w_j. \quad (\text{X. 1.7})$$

Вариация $\delta u_i(x_j)$ возникает вследствие одновременного изменения функции $\delta u_i = u'_i(x_j) - u_i(x_j)$ и изменения аргумента $u'_i(x'_j) - u'_i(x_j) \approx u_{i,k} \delta x_k$.

Выразим изменение функции δu_i как функцию от δw_i :

$$\delta u_i(x_j) = (\psi_{ij} - u_{i,k} \phi_{kj}) \delta w_j. \quad (\text{X. 1.8})$$

Теперь можно вычислить вариацию лагранжиана, различая в вариации, как обычно, то, что обусловлено изменением функции $u_{i,k}$, и то, что обусловлено изменением области интегрирования

$$\delta \mathcal{L} = \int_D \frac{\partial W}{\partial u_{i,k}} \delta u_{i,k} dv + \int_D \text{div}(W \mathbf{x}) dv. \quad (\text{X. 1.9})$$

Преобразуем объемные интегралы, фигурирующие в последнем соотношении, в интегралы по поверхности ∂D , ограничивающей данный объем D . Второй интеграл в равенстве (X. 1.9) преобразуется в поверхностный интеграл

$$\int_{\partial D} W \phi_{kj} \delta w_j n_k ds. \quad (\text{X. 1.10})$$

Что касается первого слагаемого в (X. 1.9), то, используя перестановку операций ∂ и $\partial/\partial x_k$ в $\delta u_{i,k}$ и уравнения равновесия (X. 1.3), его можно преобразовать к виду

$$\int_{\partial D} \sigma_{ik} (\psi_{ij} - u_{i,h} \phi_{hj}) \delta w_j n_k ds. \quad (\text{X. 1.11})$$

Таким образом, из необходимого условия экстремума функционала $\delta \mathcal{L} = 0$ можно найти, что

$$\int_{\partial D} P_{ki} n_k ds = 0, \quad (\text{X. 1.12})$$

где P_{ki} есть компоненты тензора, который в соответствии с терминологией, введенной Эшелби, называется тензором энергии-импульса. Они определяются выражениями

$$P_{ki} = W\phi_{ki} - \sigma_{jk}(u_{j,h}\phi_{hi} - \psi_{ji}). \quad (X. 1.13)$$

Сама же теорема Нетер формулируется следующим образом [23], [24]. Пусть задана совокупность преобразований (X. 1.6) и (X. 1.7). Тогда из инвариантности функционала (X. 1.5) относительно бесконечно малых преобразований координат (X. 1.6) и (X. 1.7) следует (X. 1.12).

Законы сохранения

В настоящем разделе рассмотрим приложения (X. 1.12), ограничиваясь преобразованиями, сохраняющими энергию Wdv . Наиболее простым преобразованием является трансляция (параллельный перенос), когда вектор u_i смещается параллельно самому себе. В этом случае

$$\phi_{ij} = \delta_{ij}, \quad \psi_{ij} = 0. \quad (X. 1.14)$$

Применяя соотношения (X. 1.12) и (X. 1.13) к рассматриваемому случаю, получаем закон сохранения Эшелби (для некоторой замкнутой поверхности S):

$$\int_S (W\delta_{ik} - \sigma_{ij}u_{j,i}) n_k dS = 0. \quad (X. 1.15)$$

Рассмотрим теперь преобразование бесконечно малого поворота пространства:

$$x'_i \equiv \alpha_{ij}x_j = x_i + \varepsilon_{ijk}\delta w_j x_k, \quad (X. 1.16)$$

где (α_{ij}) – ортогональная матрица, δw_j – малые параметры; закон преобразования компонент вектора перемещений определяется равенствами

$$u'_i \equiv \alpha_{ij}u_j = u_i + \varepsilon_{ijk}\delta w_j u_k, \quad (X. 1.17)$$

что вытекает из равенств

$$\phi_{ij} = \varepsilon_{ijk}x_k, \quad \psi_{ij} = \varepsilon_{ijk}u_k. \quad (X. 1.18)$$

Для этих преобразований получаем закон сохранения Ноулса и Стернберга [82]:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} (W x_k n_j + \sigma_{jh} n_h u_k - \sigma_{pl} n_l u_{p,j} x_k) dS = 0. \quad (\text{X. 1.19})$$

Рассмотрим наконец преобразование со скалярным параметром $\delta\eta$, соответствующее изменению масштаба в пространстве и изменению длины вектора упругого смещения

$$\begin{aligned} x'_i &= (1 + \delta\eta)x_i, & \delta x_i &= \phi_i \delta\eta, & \phi_i &= x_i, \\ u'_i &= (1 + c\delta\eta)u_i, & \delta u_i &= cu_i \delta\eta, & \psi_i &= cu_i, \end{aligned} \quad (\text{X. 1.20})$$

где c – некоторая константа, определяемая позже. Вместо тензора второго ранга – тензора энергии-импульса теорема Нетер позволяет рассмотреть вектор энергии-импульса с нулевой дивергенцией:

$$P_k = W\phi_k - \sigma_{jk}(u_{j,h}\phi_h - \psi_j). \quad (\text{X. 1.21})$$

Для того, чтобы определить константу c , исследуем инвариантность Wdv . Элементарный объем трансформируется согласно

$$dv \rightarrow dv' = (1 + \delta\eta)^N dv, \quad (\text{X. 1.22})$$

$N = 3$ в трехмерном случае, $N = 2$ – в двумерном. В рамках традиционных гипотез классической линейной теории упругости плотность упругой энергии $W(\nabla\mathbf{u})$ есть однородная квадратичная функция $\nabla\mathbf{u}$. При изменении масштаба в пространстве и изменении длины вектора упругого смещения градиент $\nabla\mathbf{u}$ и плотность $W(\nabla\mathbf{u})$ преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &\rightarrow \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \frac{1 + c\delta\eta}{1 + \delta\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ W(u_{i,j}) &\rightarrow W\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j}\right) = \left(\frac{1 + c\delta\eta}{1 + \delta\eta}\right)^2 W\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \end{aligned} \quad (\text{X. 1.23})$$

Из последних равенств видно, что условие искомой инвариантности имеет вид

$$(1 + c\delta\eta)^2 (1 + \delta\eta)^{N-2} = 1. \quad (\text{X. 1.24})$$

Это равенство может быть удовлетворено с точностью до малых более высокого порядка, чем первый, если константа c удовлетворяет условию $2c + N - 2 = 0$. Откуда

$$c = -1/2 \quad \text{для} \quad N = 3, \quad c = 0 \quad \text{для} \quad N = 2. \quad (\text{X. 1.25})$$

После определения константы c мы получаем второй закон сохранения Ноулса и Стернберга для трехмерного случая:

$$\int_S \left(W x_k n_k - \sigma_{jk} n_k u_{j,h} x_h - \frac{1}{2} \sigma_{jk} n_k u_j \right) dS = 0 \quad (\text{X. 1.26})$$

и для двумерного случая:

$$\int_S (W x_k n_k - \sigma_{jk} n_k u_{j,h} x_h) dS = 0. \quad (\text{X. 1.27})$$

Следует отметить, что для третьего преобразования законы сохранения имеют различные выражения для трехмерного и двумерного случаев в отличие от формул (X. 1.15) и (X. 1.19), справедливых в обоих случаях (разумеется с соответствующим снижением числа уравнений для двумерного случая).

Интегралы J_i , L_i , M

Пусть однородное линейно упругое изотропное тело занимает некоторый объем, содержащий дефект D (например, включение, полость, дислокацию, трещину и т.д.). Пусть S – замкнутая поверхность, полностью охватывающая дефект, как показано на рис. 46.

Пусть S' – некоторая другая замкнутая поверхность, полностью окружающая дефект D и расположенная целиком внутри поверхности S с внутренней нормалью \mathbf{n}' , тогда как \mathbf{n} – внешняя нормаль поверхности S . Таким образом две поверхности S и S' ограничивают область, занятую однородным изотропным линейно упругим материалом, не содержащим дефектов. Следовательно, справедливы рассмотренные ранее законы сохранения (X. 1.15), (X. 1.19), (X. 1.26) и (X. 1.27). Введенные интегралы в механике разрушения получили название интегральных инвариантов или J_i , L_i и M – интегралов:

$$J_i = \int_S (W n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}) dS \quad (\text{X. 1.28})$$

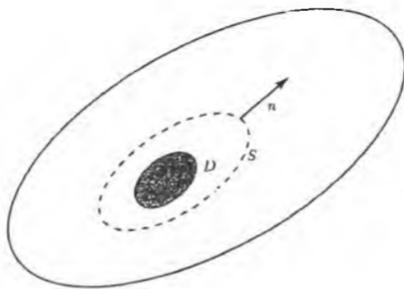


Рис. 46. Дефект D , окруженный замкнутой поверхностью S

– интеграл, впервые введенный Эшелби в теории дислокаций;

$$L_i = \int_S \varepsilon_{ijk} (W x_k n_i + \sigma_{jh} n_h u_k - \sigma_p l n_l u_{p,j} x_k) dS, \quad (\text{X. 1.29})$$

$$M = \int_S (W x_k n_k - \sigma_{jk} n_k u_{j,h} x_h + c \sigma_{jk} n_k u_j) dS. \quad (\text{X. 1.30})$$

Принципиальное свойство этих интегралов заключается в их независимости от выбора замкнутой поверхности S . В частности, когда в качестве поверхности S берется поверхность самого дефекта, можно представить эти интегралы с помощью функций, характеризующих сам дефект. Этим и определяется широкое использование указанных интегралов в современной механике разрушения как параметров, характеризующих трещину.

2. J -интеграл

Определение

Ограничимся рассмотрением двумерного случая и изучим трещину, расположенную вдоль оси Ox_1 , как показано на рис. 47 (F^+ , F^- – верхний и нижний берега трещины соответственно, \mathbf{n} – нормаль к контуру интегрирования).

J -интеграл, впервые введенный Райсом, определяется следующим образом:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds. \quad (\text{X. 2.1})$$

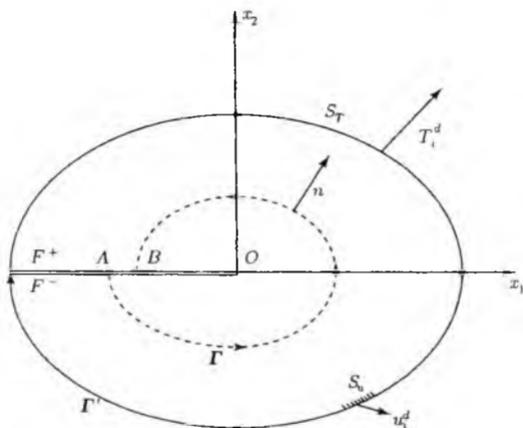


Рис. 47. Контуры интегрирования Γ и Γ'

Подынтегральное выражение, фигурирующее в последнем интеграле, обращается в нуль на берегах трещины, поскольку на них $n_1 = 0$ и $T_2 = 0$. Без изменения значения интеграла в контур интегрирования Γ можно добавить отрезки берегов трещины. Получим замкнутый контур, состоящий из контура Γ , отрезков берегов трещины и аналогичного контура Γ' , охватывающего вершину трещины (см. рис. 47). Для построенного замкнутого контура справедлив закон сохранения (X. 1.15). Обозначая величину контурного интеграла по контуру Γ' через J' и меняя направления обхода по этому контуру на противоположное и пользуясь законом сохранения, получим $J = J'$. Следовательно, J -интеграл является инвариантной величиной, не зависящей от пути интегрирования интегралом.¹³

J -интеграл есть не что иное, как первая компонента $J_1 J_2$ -интеграла в (X. 1.28) с одним только различием, что контур интегрирования в интеграле (X. 1.28) является замкнутым, а в (X. 2.1) открытым.

Свойство независимости J -интеграла от контура интегрирования позволяет выбрать в качестве контура интегрирования окружность радиуса r и затем воспользоваться асимптотическими формулами линейной теории упругости для полей напряжений и перемещений в окрест-

¹³Заметим, что принятое предположение, согласно которому берега трещины есть прямые, является существенным, поскольку только в этом случае можно считать, что $n_1 = 0$ на берегах трещины.

ности вершины трещины, что приводит к равенствам:

$$J = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2), \quad (\text{X. 2.2})$$

в случае плоского деформированного состояния

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2), \quad (\text{X. 2.3})$$

в случае плоского напряженного состояния

$$J = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2). \quad (\text{X. 2.4})$$

3. Задачи

1. Докажите равенства (X. 2.2), (X. 2.3) и (X. 2.4).

XI. Метод годографа в задаче о трещине типа III в среде с поврежденностью

1. Основные уравнения

Детальное исследование полей напряжений и деформаций в окрестности макроскопического дефекта (трещины, включения, острого надреза) имело и имеет крайне важное значение для формулировки критерия разрушения элемента конструкции при его использовании на практике. Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи дефекта в нелинейных материалах (материалах, повинующихся нелинейным законам, связывающим деформации и напряжения или напряжения и скорости деформаций) как ранее и так и в настоящее время посвящается большое количество работ, носящих как чисто теоретический, так и прикладной характер. Классической в этом направлении механики разрушения работой является исследование Райса, основанное на процедуре метода годографа, позволившей построить аналитическое решение задачи о неподвижной трещине антиплоского сдвига для любого закона упрочнения. Вслед за этой работой Райса метод годографа нашел свое широкое применение в нелинейной механике разрушения. Так, Амазиго [46] получил решение задачи о трещине продольного сдвига в условиях развитого пластического течения. Бассани [50] исследовал тело с V-образным вырезом в материале, находящемся в условиях ползучести с помощью метода годографа. Гросс и Йю [66] нашли решения для смешанных граничных условий на границе V-образного выреза и для случая жесткого плоского включения в упругопластическом материале, упрочняющемся по степенному закону. Аравас и Блазо [48], Йю и Зоу [114] рассмотрели высшие приближения в асимптотическом решении задачи определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины продольного сдвига в упрочняющемся упругопластическом материале. Таким образом, можно заключить, что метод годографа является мощным инструментом исследования нелинейных проблем механики разрушения. Естественным продолжением работ в этом направлении является желание учесть влияние процесса накопления рассеянных микроповреждений в окрестности вершины дефекта на напряженно-деформированное состояние тела с макроскопическим дефектом.

Настоящий анализ представляет собой попытку использования трансформации годографа для материала, определяющие соотношения которого построены на основе степенного закона в рамках связанной поста-

новки задачи (когда скалярный параметр поврежденности входит в определяющие соотношения)¹⁴.

Рассмотрим острый V-образный вырез с раствором 2α , находящийся в условиях антиплоской деформации, в поврежденном материале, определяющий закон для которого построен на основе степенной зависимости между деформациями и напряжениями.

Выберем систему координат таким образом, чтобы единственной, отличной от нуля компонентой вектора перемещений была третья компонента $w(x, y)$. Таким образом, отличные от нуля компоненты тензора деформаций $\gamma_x = \gamma_{xz}$ и $\gamma_y = \gamma_{yz}$ в декартовой прямоугольной системе координат с началом в вершине трещины вычисляются по формулам

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{XI. 1.1})$$

Компоненты тензора деформаций в полярной системе координат r, θ с полюсом в вершине трещины $\gamma_r = \gamma_{rz}$ и $\gamma_\theta = \gamma_{\theta z}$ связаны с компонентами тензора деформации в декартовой системе координат следующим образом

$$\gamma_r = -\gamma_x \sin \theta + \gamma_y \cos \theta, \quad \gamma_\theta = \gamma_x \cos \theta + \gamma_y \sin \theta. \quad (\text{XI. 1.2})$$

Для рассматриваемого изотропного материала в рамках предположения о малых деформациях отличные от нуля компоненты тензора напряжений есть напряжения сдвига $\tau_x = \tau_{xz}$ и $\tau_y = \tau_{yz}$, связанные с компонентами тензора напряжений в полярной системе координат $\tau_r = \tau_{rz}$ и $\tau_\theta = \tau_{\theta z}$, равенствами

$$\tau_r = -\tau_x \sin \theta + \tau_y \cos \theta, \quad \tau_\theta = \tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta. \quad (\text{XI. 1.3})$$

Интенсивности напряжений и деформаций определяются следующими равенствами

$$\tau = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{1/2} = (\tau_r^2 + \tau_\theta^2)^{1/2}, \quad (\text{XI. 1.4})$$

$$\gamma = (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2} = (\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2)^{1/2} \quad (\text{XI. 1.5})$$

соответственно.

¹⁴Безусловно, приводимое решение основано на ряде гипотез, ограничивающих рамки его применения. Так, будет принято предположение о возможности интегрирования кинетического уравнения и возможности оперирования с результатом интегрирования, что не всегда является возможным (например, в случае подвижной трещины).

Определяющие уравнения задачи построены на основе соотношений Рамерга – Осгуда:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n, \quad (\text{XI. 1.6})$$

где γ_0 и τ_0 есть константы материала, $1 \leq n < \infty$ – показатель упрочнения.

Учитывая процесс накопления рассеянных микроповреждений, определяющие соотношения представим в форме

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left[\frac{\tau}{(1-D)\tau_0} \right]^n, \quad (\text{XI. 1.7})$$

где D – скалярный параметр поврежденности.

Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию накопления повреждений, в рамках континуальной механики поврежденности имеет вид

$$\dot{D} = \dot{D}(\sigma_d, D), \quad (\text{XI. 1.8})$$

где

$$\sigma_d = \sigma_e \left[\frac{2}{3}(1-\mu) + 2(1+2\mu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_e} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{XI. 1.9})$$

– эквивалентное напряжение, σ_e и σ_m – интенсивность напряжений и гидростатическое напряжение соответственно:

$$\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij}. \quad (\text{XI. 1.10})$$

В (XI. 1.9) константа $-1/2 \leq \mu \leq 1$ – материальная константа, отражающая механизм накопления повреждений. Для $\mu = -1/2$ интенсивность напряжений определяет процесс накопления микродефектов. В случае, когда $\mu = 1$ дилатация микропор является главным механизмом и, следовательно, контролирующим параметром является гидростатическое напряжение.

Предположим, что уравнение (XI. 1.8) допускает интегрирование, результат которого представим в форме (для случая $\sigma_m = 0$)

$$D = f(\sigma_d), \quad (\text{XI. 1.11})$$

либо для рассматриваемой задачи антиплоского сдвига

$$D = f(\tau). \quad (\text{XI. 1.12})$$

Следовательно, определяющие соотношения задачи после введения функции $f(\tau)$ преобразуются к виду

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left[\frac{\tau}{(1 - f(\tau))\tau_0} \right]^n \quad (\text{XI. 1.13})$$

Уравнение равновесия и условие совместности задач антиплоского сдвига имеют вид

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{XI. 1.14})$$

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{XI. 1.15})$$

соответственно.

Граничные условия есть условие отсутствия поверхностных усилий на берегах выреза:

$$\tau_\theta = -\tau_x \sin \theta + \tau_y \cos \theta = 0, \quad \theta = \pm(\pi - \alpha); \quad (\text{XI. 1.16})$$

и условие симметрии:

$$\tau_x = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0. \quad (\text{XI. 1.17})$$

Сформулированную систему нелинейных уравнений можно привести к линейной с помощью метода годографа, рассматривая физические координаты как функции от напряжений $x = x(\tau_x, \tau_y)$, $y = y(\tau_x, \tau_y)$, или, что эквивалентно, от деформаций $x = x(\gamma_x, \gamma_y)$, $y = y(\gamma_x, \gamma_y)$. Уравнение равновесия при этом преобразуется к виду

$$\frac{\partial x}{\partial \tau_x} + \frac{\partial y}{\partial \tau_y} = 0, \quad (\text{XI. 1.18})$$

при условии, что якобиан данного преобразования отличен от нуля

$$\partial(x, y) / \partial(\tau_x, \tau_y) \neq 0.$$

Условие совместности на плоскости деформаций может быть представлено следующим образом

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma_y} - \frac{\partial y}{\partial \gamma_x} = 0, \quad (\text{XI. 1.19})$$

когда $\partial(x, y)/\partial(\gamma_x, \gamma_y) \neq 0$.

Уравнение (XI. 1.18) будет тождественно выполнено, если существует такая скалярная функция $\Phi(\tau, \Theta)$ – функция полярных координат на плоскости напряжений τ, Θ :

$$\tau_x = -\tau \sin \Theta, \quad \tau_y = \tau \cos \Theta, \quad (\text{XI. 1.20})$$

что

$$x = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_y}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_x}. \quad (\text{XI. 1.21})$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau_y} = \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sin \Theta}{\tau} \frac{\partial}{\partial \Theta}, \quad -\frac{\partial}{\partial \tau_x} = \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\cos \Theta}{\tau} \frac{\partial}{\partial \Theta},$$

можно получить

$$x = -\cos \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\sin \Theta}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}, \quad y = -\sin \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{\cos \Theta}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}. \quad (\text{XI. 1.22})$$

Используя равенства

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_y} = \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\sin \Theta}{\tau} \frac{\partial}{\partial \Theta}, \quad -\frac{\partial}{\partial \gamma_x} = \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\cos \Theta}{\tau} \frac{\partial}{\partial \Theta},$$

можно найти линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(\tau, \Theta)$:

$$\frac{1 - f(\tau)}{n[1 - f(\tau) + \tau f'(\tau)]} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} = 0. \quad (\text{XI. 1.23})$$

Граничные условия на берегах острого выреза преобразуются к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при} \quad \Theta = \pm(\pi/2 - \alpha) \quad (\text{XI. 1.24})$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{при} \quad \Theta = 0. \quad (\text{XI. 1.25})$$

Будем искать решение уравнения (XI. 1.23) методом разделения переменных, полагая

$$\Phi(\tau, \Theta) = P(\tau)\phi(\Theta). \quad (\text{XI. 1.26})$$

Подставляя (XI. 1.26) в дифференциальное уравнение (XI. 1.23) и граничные условия (XI. 1.24), (XI. 1.25), приходим к следующей задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} \phi''(\Theta) + \lambda^2 \phi(\Theta) &= 0, \\ \phi[\pm(\pi/2 - \alpha)] &= 0, \quad \phi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{XI. 1.27})$$

Собственные функции, соответствующие рассматриваемой задаче, имеют вид

$$\phi_k(\Theta) = A_k \cos \lambda_k \Theta, \quad (\text{XI. 1.28})$$

где

$$\lambda_k = (2k - 1) \frac{\pi}{\pi - 2\alpha}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{XI. 1.29})$$

Следовательно, решение уравнения (XI. 1.23) может быть представлено в форме

$$\Phi(\tau, \Theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(\tau) \cos \lambda_k \Theta, \quad 0 > s_1 > s_2 > s_3 \dots, \quad (\text{XI. 1.30})$$

где неизвестные константы A_k должны быть определены из граничных условий в бесконечно удаленной точке, а функции $P_k(\tau)$ есть решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1 - f(\tau)}{n[1 - f(\tau) + \tau f'(\tau)]} P_k''(\tau) + \frac{1}{\tau} P_k'(\tau) - \frac{\lambda_k^2}{\tau^2} P_k(\tau) = 0, \quad (\text{XI. 1.31})$$

удовлетворяющие граничному условию $P_k'(\infty) = 0$ (поскольку напряжения и деформации бесконечны в окрестности вершины выреза).

В соответствии с экспериментальными данными для металлов [57], [58] кривые $D - \sigma$ могут быть описаны зависимостью

$$D = f(\tau) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^m, & \tau > \tau_0, \\ 0, & \tau \leq \tau_0, \end{cases} \quad (\text{XI. 1.32})$$

где $m \geq 0$ – материальная константа. Учитывая последнюю зависимость для диапазона значений $\tau > \tau_0$ решение уравнения (XI. 1.31) имеет форму

$$P_k(\tau) = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{s_k}, \quad (\text{XI. 1.33})$$

где

$$s_k = \frac{1 - n(m + 1)}{2} - \sqrt{\left[\frac{1 - n(m + 1)}{2}\right]^2 + n(m + 1)\lambda_k^2}, \quad (\text{XI. 1.34})$$

где λ_k определяются уравнениями (XI. 1.29).

Таким образом, решение задачи об антиплоской деформации бесконечного тела с острым вырезом в поврежденном материале в плоскости годографа имеет вид

$$\Phi(\tau, \Theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{s_k} \cos \lambda_k \Theta, \quad 0 > s_1 > s_2 > s_3 > \dots \quad (\text{XI. 1.35})$$

Подстановка (XI. 1.35) в (XI. 1.22) приводит к соотношениям

$$x = \frac{1}{\tau_0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\Theta) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{s_k-1}, \quad (\text{XI. 1.36})$$

$$y = \frac{1}{\tau_0} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\Theta) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{s_k-1},$$

где

$$a_k(\Theta) = -A_k (\lambda_k \sin \Theta \sin \lambda_k \Theta + s_k \cos \Theta \cos \lambda_k \Theta), \quad (\text{XI. 1.37})$$

$$b_k(\Theta) = A_k (\lambda_k \cos \Theta \sin \lambda_k \Theta - s_k \sin \Theta \cos \lambda_k \Theta). \quad (\text{XI. 1.38})$$

Выражения (XI. 1.35) - (XI. 1.38) представляют собой решение рассматриваемой задачи на плоскости годографа. Компоненты тензоров напряжений и деформаций находятся по формулам

$$\tau_r(r, \theta) = \tau \sin(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 1.39})$$

$$\tau_\theta(r, \theta) = \tau \cos(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 1.40})$$

$$\gamma_r(r, \theta) = \gamma \sin(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 1.41})$$

$$\gamma_\theta(r, \theta) = \gamma \cos(\theta - \Theta). \quad (\text{XI. 1.42})$$

Для завершения построения осталось перейти от плоскости годографа на физическую плоскость переменных r, θ . Однако, в силу нелинейности задачи эта процедура не является простой. В дальнейшем изложена схема возврата на физическую плоскость, позволяющая найти двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений и деформаций в терминах физических координат.

2. Высшие приближения

Главный член асимптотического разложения

При $\tau \rightarrow \infty$ главный член асимптотического разложения интенсивности напряжений следует из (XI. 1.36) и (XI. 1.37). Полагая $k = 1$ в равенствах (XI. 1.36) и (XI. 1.37) и используя

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (\text{XI. 2.1})$$

и

$$\text{tg } \theta = y/x, \quad (\text{XI. 2.2})$$

легко получить

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-q_1} (\lambda_1^2 \sin^2 \lambda_1 \Theta + s_1^2 \cos^2 \lambda_1 \Theta)^{-q_1/2}, \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (\text{XI. 2.3})$$

и

$$\text{tg}(\Theta - \theta) = \frac{\lambda_1}{s_1} \text{tg}(\lambda_1 \Theta), \quad (\text{XI. 2.4})$$

где

$$q_1 = \frac{1}{s_1 - 1}, \quad (\text{XI. 2.5})$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha}, \quad (\text{XI. 2.6})$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \left[1 - n(m+1) - \sqrt{[1 - n(m+1)]^2 + 4n(m+1)\lambda_1^2} \right]. \quad (\text{XI. 2.7})$$

Зависимость показателя сингулярности интенсивности напряжений $-q_1$ от материальных констант показана на рис. 48.

Используя условие нормировки

$$\bar{\tau}^{(1)}(\theta, n, m) = 1 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (\text{XI. 2.8})$$

можно показать, что характер зависимости интенсивности напряжений от r выражается равенством

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-q_1} \bar{\tau}^{(1)}(\theta, n, m) \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (\text{XI. 2.9})$$

где

$$\bar{\tau}^{(1)}(\theta, n, m) = \left(\cos^2 \lambda_1 \Theta + \frac{\lambda_1^2}{s_1^2} \sin^2 \lambda_1 \Theta \right)^{-q_1/2}. \quad (\text{XI. 2.10})$$

Подставляя (XI. 1.32) и (XI. 2.9) в (XI. 1.7), можно получить главный член асимптотического разложения интенсивности деформаций в окрестности вершины острого выреза

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-p_1} \bar{\gamma}^{(1)}(\theta, n, m) \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (\text{XI. 2.11})$$

где

$$p_1 = n(m+1)q_1, \quad (\text{XI. 2.12})$$

$$\bar{\gamma}^{(1)}(\theta, n, m) = \left(\cos^2 \lambda_1 \Theta + \frac{\lambda_1^2}{s_1^2} \sin^2 \lambda_1 \Theta \right)^{-p_1/2} \quad (\text{XI. 2.13})$$

— функция полярного угла и материальных постоянных, удовлетворяющая условию нормировки

$$\bar{\gamma}^{(1)}(\theta, n, m) = 1 \quad \text{при} \quad \theta = 0. \quad (\text{XI. 2.14})$$

Зависимость показателя сингулярности интенсивности деформаций $-p_1$ от материальных констант показана на рис. 49.

Компоненты тензора напряжений и деформаций вычисляются в соответствии с формулами

$$\tau_r(r, \theta) = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-q_1} \bar{\tau}_r^{(1)}(\theta, n, m), \quad (\text{XI. 2.15})$$

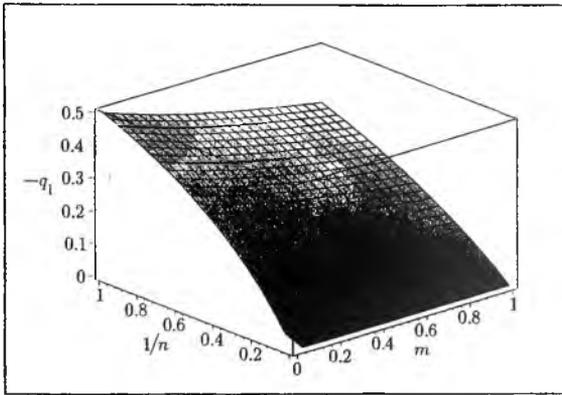


Рис. 48. Влияние процесса накопления рассеянных микрповреждений на показатель сингулярности интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига

$$\tau_{\theta}(r, \theta) = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-q_1} \bar{\tau}_{\theta}^{(1)}(\theta, n, m), \quad (\text{XI. 2.16})$$

$$\gamma_r(r, \theta) = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-p_1} \bar{\gamma}_r^{(1)}(\theta, n, m), \quad (\text{XI. 2.17})$$

$$\gamma_{\theta}(r, \theta) = \left(\frac{A_1}{\tau_0 r} \right)^{-p_1} \bar{\gamma}_{\theta}^{(1)}(\theta, n, m), \quad (\text{XI. 2.18})$$

где

$$\bar{\tau}_r^{(1)}(\theta, n, m) = \bar{\tau}^{(1)}(\theta, n, m) \sin(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 2.19})$$

$$\bar{\tau}_{\theta}^{(1)}(\theta, n, m) = \bar{\tau}^{(1)}(\theta, n, m) \cos(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 2.20})$$

$$\bar{\gamma}_r^{(1)}(\theta, n, m) = \bar{\gamma}^{(1)}(\theta, n, m) \sin(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 2.21})$$

$$\bar{\gamma}_{\theta}^{(1)}(\theta, n, m) = \bar{\gamma}^{(1)}(\theta, n, m) \cos(\theta - \Theta), \quad (\text{XI. 2.22})$$

где полярный угол на плоскости годографа Θ выражается через полярный угол на физической плоскости θ посредством равенства (XI. 2.4).

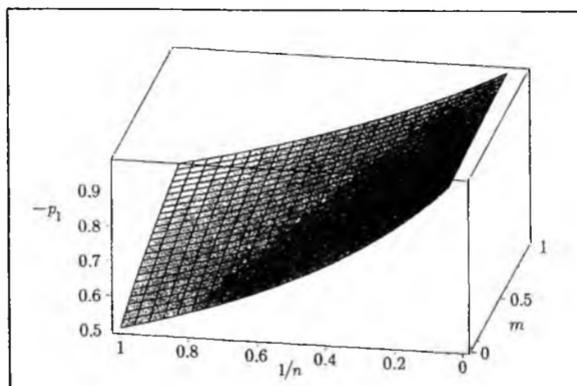


Рис. 49. Влияние процесса накопления рассеянных микрповреждений на показатель сингулярности интенсивности деформаций в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига

Второй член асимптотического разложения

Удерживая два слагаемых в выражениях (XI. 1.36) и (XI. 1.37) и используя соотношения (XI. 2.1) и (XI. 2.2), получим

$$r = \frac{A_1}{\tau_0} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{s_1-1} \tilde{H}_1(\Theta) + \frac{A_2}{\tau_0} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{s_2-1} \tilde{H}_2(\Theta) + \dots \text{ при } r \rightarrow 0 \quad (\text{XI. 2.23})$$

и

$$\text{tg } \theta = \tilde{F}_0(\Theta) + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{s_2-s_1} \tilde{F}_1(\Theta) + \dots \text{ при } r \rightarrow 0, \quad (\text{XI. 2.24})$$

где

$$\tilde{H}_1(\Theta) = (s_1^2 \cos^2 \lambda_1 \Theta + \lambda_1^2 \sin^2 \Theta)^{1/2}, \quad (\text{XI. 2.25})$$

$$\tilde{H}_2(\Theta) = \frac{s_1 s_2 \cos \lambda_1 \Theta \cos \lambda_2 \Theta + \lambda_1 \lambda_2 \sin \lambda_1 \Theta \sin \lambda_2 \Theta}{(s_1^2 \cos^2 \lambda_1 \Theta + \lambda_1^2 \sin^2 \lambda_1 \Theta)^{1/2}}, \quad (\text{XI. 2.26})$$

$$\tilde{F}_0(\Theta) = \frac{s_1 \sin \Theta \cos \lambda_1 \Theta - \lambda_1 \cos \Theta \sin \lambda_1 \Theta}{s_1 \cos \Theta \cos \lambda_1 \Theta + \lambda_1 \sin \Theta \sin \lambda_1 \Theta}, \quad (\text{XI. 2.27})$$

$$\tilde{F}_1(\Theta) = \frac{s_1 \sin \Theta \cos \lambda_2 \Theta - \lambda_2 \cos \Theta \sin \lambda_2 \Theta}{s_1 \cos \Theta \cos \lambda_1 \Theta + \lambda_1 \sin \Theta \sin \lambda_1 \Theta}, \quad (\text{XI. 2.28})$$

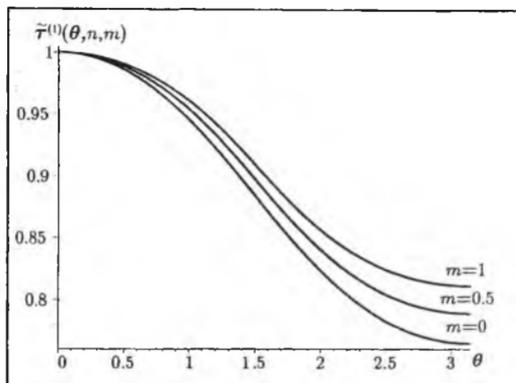


Рис. 50. Зависимость интенсивности касательных напряжений от полярного угла для $n = 5, \alpha = 0$

где λ_1 и s_1 определяются выражениями (XI. 2.6) и (XI. 2.7),

$$s_2 = \frac{1}{2} \left[1 - n(m + 1) - \sqrt{[1 - n(m + 1)]^2 + 4n(m + 1)\lambda_2^2} \right], \quad (\text{XI. 2.29})$$

$$\lambda_2 = \frac{3\pi}{\pi - 2\alpha}. \quad (\text{XI. 2.30})$$

Представим двучленные асимптотические разложения интенсивности касательных напряжений и полярного угла на плоскости годографа в форме

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \tau^{(1)}r^{q_1} + \tau^{(2)}r^{q_2} + \dots \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{XI. 2.31})$$

$$\Theta(\theta) = \Theta_0(\theta) + \Theta_1(\theta)r^b + \dots \quad r \rightarrow 0. \quad (\text{XI. 2.32})$$

Подставляя (XI. 2.31) и (XI. 2.32) в (XI. 2.23) и (XI. 2.24), получаем

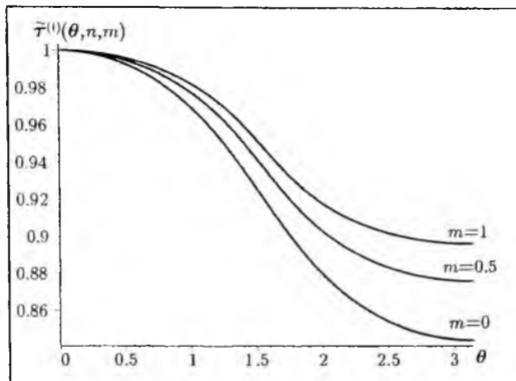


Рис. 51. Зависимость интенсивности касательных напряжений от полярного угла для $n = 15$, $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
 r = & \frac{A_1}{\tau_0} \tilde{H}_1(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_1-1} r^{q_1(s_1-1)} + \\
 & + (s_1 - 1) \frac{A_1}{\tau_0} \tilde{H}_1(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_1-2} \tau^{(2)}(\theta) r^{q_1(s_1-2)+q_2} + \\
 & + \frac{A_1}{\tau_0} \tilde{H}'_1(\Theta_0) \Theta_1(\theta) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_1-1} r^{q_1(s_1-1)+b} + \\
 & + \frac{A_2}{\tau_0} \tilde{H}_2(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_2-1} r^{q_1(s_2-1)} + \dots, \tag{XI. 2.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{tg } \theta = & \tilde{F}_0(\Theta_0) + \tilde{F}'_0(\Theta_0) \Theta_1(\theta) r^b + \\
 & + \frac{A_2}{A_1} \tilde{F}_1(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_2-s_1} r^{(s_2-s_1)q_1} + \dots \tag{XI. 2.34}
 \end{aligned}$$

Выделяя главные члены асимптотических разложений, фигурирующих в правой и левой частях последних двух равенств, находим

$$q_1 = \frac{1}{s_1 - 1}, \tag{XI. 2.35}$$

$$\tau^{(1)}(\theta) = \left(\frac{A_1}{\tau_0} \tilde{H}_1(\Theta_0) \right)^{-q_1}, \tag{XI. 2.36}$$

и

$$F_0(\Theta_0) = \text{tg } \theta. \tag{XI. 2.37}$$

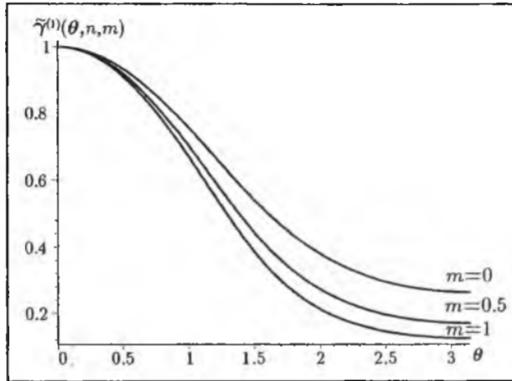


Рис. 52. Зависимость интенсивности сдвиговых деформаций от полярного угла для $n = 5$, $\alpha = 0$

Используя условие нормировки (XI. 2.8) и подставляя введенные обозначения (XI. 2.25) в (XI. 2.36), получим

$$\tau^{(1)}(\theta) = \left(\frac{A_1}{\tau_0} \right)^{-q_1} \bar{\tau}^{(1)}(\theta), \quad (\text{XI. 2.38})$$

где $\bar{\tau}^{(1)}(\theta)$ совпадает с выражением (XI. 2.10). Подстановка (XI. 2.27) в (XI. 2.37) ведет к выражению для Θ_0 , совпадающему с (XI. 2.4).

Уравнивая слагаемые следующего порядка малости при $r \rightarrow 0$, можно найти

$$q_1(s_1 - 2) + q_2 = q_1(s_1 - 1) + b = q_1(s_2 - 1), \quad (\text{XI. 2.39})$$

$$\begin{aligned} & (s_1 - 1)A_1\tilde{H}_1(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_1-2} \tau^{(2)}(\theta) + \\ & + A_1\tilde{H}'_1(\Theta_0)\Theta_1(\theta) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_1-1} + A_2\tilde{H}_2(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_2-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{XI. 2.40})$$

и

$$b = (s_2 - 2_1)q_1, \quad (\text{XI. 2.41})$$

$$A_1\tilde{F}'_0(\Theta_0)\Theta_1(\theta) + A_2\tilde{F}_1(\Theta_0) \left[\tau^{(1)}(\theta) \right]^{s_2-s_1} = 0. \quad (\text{XI. 2.42})$$

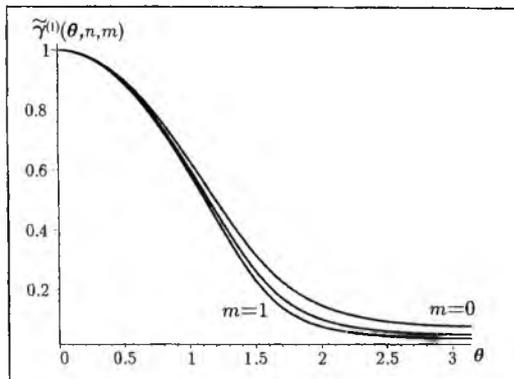


Рис. 53. Зависимость интенсивности сдвиговых деформаций от полярного угла для $n = 15$, $\alpha = 0$

Из (XI. 2.42) имеем

$$\Theta_1(\theta) = -\frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_1}{\tau_0} \right)^{(s_1-s_2)q_1} \frac{\tilde{F}_1(\Theta_0)}{\tilde{F}'_0(\Theta_0)} \left[\tilde{H}_1(\Theta_0) \right]^{(s_2-s_1)q_1}, \quad (\text{XI. 2.43})$$

где

$$\tilde{F}'_0(\Theta) = \frac{(s_1^2 - \lambda_1^2 s_1) \cos^2 \lambda_1 \Theta + (\lambda_1^2 - \lambda_1^2 s_1) \sin^2 \lambda_1 \Theta}{(s_1 \cos \Theta \cos \lambda_1 \Theta + \lambda_1 \sin \Theta \sin \lambda_1 \Theta)^2}. \quad (\text{XI. 2.44})$$

Из (XI. 2.39), (XI. 2.40) и (XI. 2.41) следует, что

$$q_2 = (s_2 - s_1 + 1)q_1, \quad (\text{XI. 2.45})$$

$$\tau^{(2)}(\theta) = \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_1}{\tau_0} \right)^{-q_2} \tilde{\tau}^{(2)}(\theta), \quad (\text{XI. 2.46})$$

где

$$\tilde{\tau}^{(2)}(\theta) = \frac{1}{1 - s_1} \left(\tilde{H}_2(\Theta_0) - \frac{\tilde{H}'_1(\Theta_0) \tilde{F}_1(\Theta_0)}{\tilde{F}'_0(\Theta_0)} \right) \left[\tilde{H}_1 \right]^{-s_2 q_1}, \quad (\text{XI. 2.47})$$

$$\tilde{H}'_1(\Theta) = \frac{(\lambda_1^3 - \lambda_1 s_1^2) \sin 2\lambda_1 \Theta}{2 (s_1^2 \cos^2 \lambda_1 \Theta + \lambda_1^2 \sin^2 \lambda_1 \Theta)^{1/2}}. \quad (\text{XI. 2.48})$$

Следовательно, двучленное асимптотическое разложение интенсивности касательных напряжений при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(\frac{A_1}{\tau_0}\right)^{-q_1} \bar{\tau}^{(1)}(\theta)r^{q_1} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_1}{\tau_0}\right)^{-q_2} \bar{\tau}^{(2)}(\theta)r^{q_2} + \dots, \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{XI. 2.49})$$

где q_1 и q_2 определяются формулами (XI. 2.35) и (XI. 2.45), а $\bar{\tau}^{(1)}(\theta)$ и $\bar{\tau}^{(2)}(\theta)$ – (XI. 2.10) и (XI. 2.47) соответственно.

Подстановка (XI. 1.32) и (XI. 2.49) в (XI. 1.7) приводит к двучленному асимптотическому разложению интенсивности сдвиговых деформаций

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(\frac{A_1}{\tau_0}\right)^{-p_1} \bar{\gamma}^{(1)}(\theta)r^{p_1} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_1}{\tau_0}\right)^{-p_2} \bar{\gamma}^{(2)}(\theta)r^{p_2} + \dots, \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{XI. 2.50})$$

где

$$\bar{\gamma}^{(1)}(\theta) = \left[\bar{\tau}^{(1)}\right]^{n(m+1)}, \quad (\text{XI. 2.51})$$

$$\bar{\gamma}^{(2)}(\theta) = n(m+1) \left[\bar{\tau}^{(1)}\right]^{n(m+1)-1} \bar{\tau}^{(2)}(\theta), \quad (\text{XI. 2.52})$$

$$p_1 = n(m+1)q_1, \quad (\text{XI. 2.53})$$

$$p_2 = [s_2 - s_1 + n(m+1)]q_1. \quad (\text{XI. 2.54})$$

Компоненты тензора напряжений могут быть вычислены посредством подстановки (XI. 2.49) и (XI. 2.50) в (XI. 1.39) – (XI. 1.42). Главный член асимптотического разложения плотности энергии деформаций определяется асимптотическим равенством

$$\tau\gamma \sim r^{\beta_1} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{XI. 2.55})$$

где

$$\beta_1 = q_1 + p_1 = \frac{n(m+1) + 1}{s_1 - 1}. \quad (\text{XI. 2.56})$$

Полученное решение показывает, что постоянная m уравнения, описывающего эволюцию процесса накопления повреждений, показатель упругости n , угол раствора острого выреза 2α влияют на характер сингулярности полей напряжений и деформаций вблизи выреза. На рис. 54

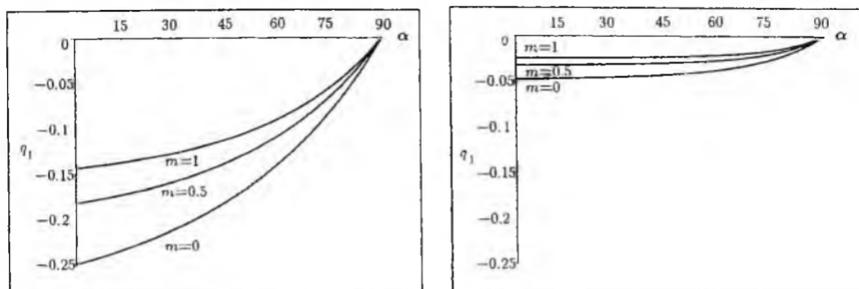


Рис. 54. Зависимость показателя сингулярности напряжений q_1 от угла раствора острого выреза α для $n = 3$ и для $n = 20$

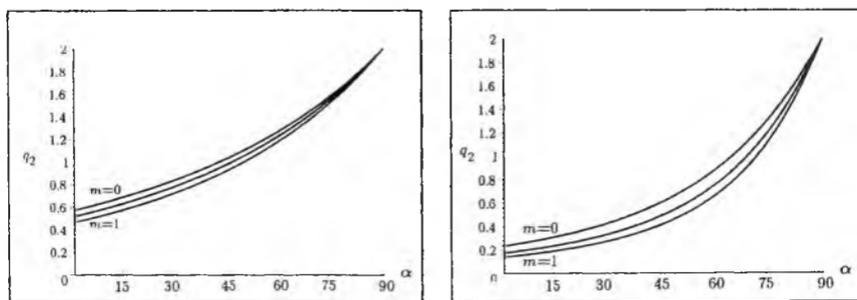


Рис. 55. Зависимость показателя сингулярности напряжений q_2 от угла раствора острого выреза α для $n = 3$ и для $n = 20$

– 55 показано изменение показателей q_1 и q_2 в зависимости от половины угла раствора α острого выреза для различных значений константы m ($m = 0, 0.5, 1$) и показателя упрочнения n ($n = 3, 20$).

Изменение показателей p_1 и p_2 в зависимости от половины угла раствора острого выреза для различных значений констант m и n показано на рис. 56 – 57. Из рисунков видно, что $q_1 < 0$, $p_1 < 0$ и $q_2 > 0$, откуда следует, что доминирующие слагаемые в асимптотических разложениях напряжений и деформаций сингулярны, и второй член асимптотического разложения напряжений регулярен. Далее, можно видеть, что учет процесса накопления микрповреждений ведет к более слабой особенности поля напряжений, но к немного более сильной особенности поля деформаций и к сингулярности второго слагаемого асимптотического разложения компонент тензора деформаций (для ряда значений α , m , n).

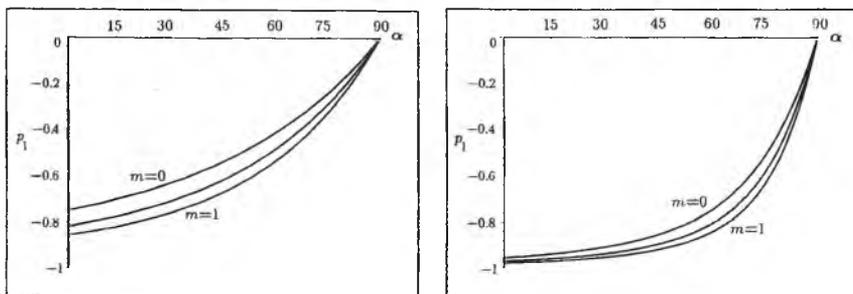


Рис. 56. Зависимость показателя сингулярности деформаций p_1 от угла раствора острого выреза α для $n = 3$ и для $n = 20$

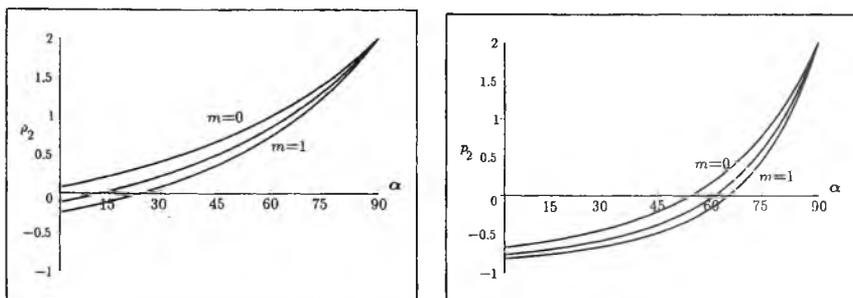


Рис. 57. Зависимость показателя сингулярности деформаций p_2 от угла раствора острого выреза α для $n = 3$ и для $n = 20$

Следует отметить, что показатель p_2 может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от значений α , m , n . При $n \rightarrow \infty$ q_1 стремится к нулю, тогда как p_1 стремится к -1 , что соответствует идеально пластическому материалу.

Угловые распределения интенсивностей касательных напряжений и сдвиговых деформаций для различных значений постоянных m и n иллюстрируют рис. 50 – 53.

Можно также видеть, что полученное решение редуцируется к решению для неповрежденного материала при $m = 0$ и $D \equiv 0$ и, в частности, к классическому решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена для $\alpha = 0$.

Остановимся на случае $\alpha = 0$ более подробно. В случае трещины

$$\lambda_k = 2k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{XI. 2.57}$$

Можно легко найти, что

$$q_1 = -\frac{1}{n(m+1)+1}, \quad (\text{XI. 2.58})$$

$$q_2 = -\frac{\sqrt{n^2(m+1)^2+34n(m+1)+1}-n(m+1)-3}{2[n(m+1)+1]}, \quad (\text{XI. 2.59})$$

$$p_1 = -\frac{n(m+1)}{n(m+1)+1}, \quad (\text{XI. 2.60})$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{n^2(m+1)^2+34n(m+1)+1}-3n(m+1)-1}{2[n(m+1)+1]}. \quad (\text{XI. 2.61})$$

Подстановка $\lambda_1 = 1$ и $s_1 = -n(m+1)$ в (XI. 2.10) и (XI. 2.13) ведет к выражениям

$$\tilde{\tau}^{(1)}(\theta, n, m) = \left[\frac{n^2(m+1)^2+1}{2n^2(m+1)^2} + \frac{n^2(m+1)^2-1}{2n^2(m+1)^2} \cos 2\Theta_0 \right]^{\frac{1}{2\kappa}}, \quad (\text{XI. 2.62})$$

$$\tilde{\gamma}^{(1)}(\theta, n, m) = \left[\frac{n^2(m+1)^2+1}{2n^2(m+1)^2} + \frac{n^2(m+1)^2-1}{2n^2(m+1)^2} \cos 2\Theta_0 \right]^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}, \quad (\text{XI. 2.63})$$

$$\Theta_0(\theta) = \text{arctg} \left\{ \frac{\kappa}{2} \left[\sqrt{\text{ctg}^2 \theta + \frac{4n(m+1)}{\kappa^2}} - \text{ctg} \theta \right] \right\}, \quad (\text{XI. 2.64})$$

где $\kappa = n(m+1)+1$.

Функции $\tilde{\tau}^{(2)}$ и $\tilde{\gamma}^{(2)}$ определяются по формулам (XI. 2.47) и (XI. 2.52) соответственно. Подставляя $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ в эти соотношения, получаем следующие выражения, используемые в $\tilde{\tau}^{(2)}$ и $\tilde{\gamma}^{(2)}$ для случая трещины

$$\tilde{H}_1(\Theta_0) = [n^2(m+1)^2 \cos^2 \Theta_0 + \sin^2 \Theta_0]^{1/2}, \quad (\text{XI. 2.65})$$

$$\tilde{H}'_1(\Theta_0) = \frac{1 - n^2(m+1)^2 \sin 2\Theta_0}{2 \tilde{H}_1(\Theta_0)}, \quad (\text{XI. 2.66})$$

$$\tilde{H}_2(\Theta_0) = \frac{2 \sin \Theta_0 \sin 3\Theta_0 - n(m+1)s_2 \cos \Theta_0 \cos 3\Theta_0}{\tilde{H}_1(\Theta_0)}, \quad (\text{XI. 2.67})$$

$$\tilde{F}'_0(\Theta_0) = \frac{[n(m+1)+1]^2 + [n^2(m+1)^2 + 1] \cos 2\Theta_0}{2 [\sin^2 \Theta_0 - n(m+1) \cos^2 \Theta_0]^2}, \quad (\text{XI. 2.68})$$

$$\tilde{F}_1(\Theta_0) = \frac{s_2 \sin \Theta_0 \cos 3\Theta_0 - 3 \cos \Theta_0 \sin 3\Theta_0}{\sin^2 \Theta_0 - n(m+1) \cos^2 \Theta_0}, \quad (\text{XI. 2.69})$$

где Θ_0 вычисляется в соответствии с (XI. 2.64) и

$$s_2 = \frac{1}{2} \left[1 - n(m+1) - \sqrt{n^2(m+1)^2 + 34n(m+1) + 1} \right]. \quad (\text{XI. 2.70})$$

Главные члены асимптотических разложений интенсивностей тензоров напряжений и деформаций, а также их компонент могут быть представлены с помощью инвариантного J -интеграла:

$$\left[\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{\tau_i}{\tau_0} \right] = \left(\frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_{nm} r} \right)^{1/\kappa} [\bar{\tau}(\theta, n, m), \tilde{\tau}_i(\theta, n, m)], \quad i = r, \theta, \quad (\text{XI. 2.71})$$

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma_0}, \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \right] = \left(\frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_{nm} r} \right)^{1/\kappa} [\bar{\gamma}(\theta, n, m), \tilde{\gamma}_i(\theta, n, m)], \quad i = r, \theta, \quad (\text{XI. 2.72})$$

где функции $\bar{\tau}(\theta, n, m)$ и $\bar{\gamma}(\theta, n, m)$ находятся посредством выражений (XI. 2.62), (XI. 2.63) и

$$\tilde{\tau}_r(\theta, n, m) = \bar{\tau}(\theta, n, m) \sin(\theta - \Theta_0), \quad (\text{XI. 2.73})$$

$$\tilde{\tau}_\theta(\theta, n, m) = \bar{\tau}(\theta, n, m) \cos(\theta - \Theta_0), \quad (\text{XI. 2.74})$$

$$\tilde{\gamma}_r(\theta, n, m) = \bar{\gamma}(\theta, n, m) \sin(\theta - \Theta_0), \quad (\text{XI. 2.75})$$

$$\tilde{\gamma}_\theta(\theta, n, m) = \bar{\gamma}(\theta, n, m) \cos(\theta - \Theta_0), \quad (\text{XI. 2.76})$$

$$I_{nm} = \frac{n(m+1)+1}{2n(m+1)} \pi. \quad (\text{XI. 2.77})$$

Таким образом, можно заключить, что влияние процесса накопления рассеянных микроповреждений у вершины трещины антиплоского сдвига проявляется в более слабой особенности поля напряжений вблизи вершины трещины, но в более сильной особенности первого и второго члена асимптотического разложения компонент тензора деформаций по сравнению с решением для неповрежденного материала.

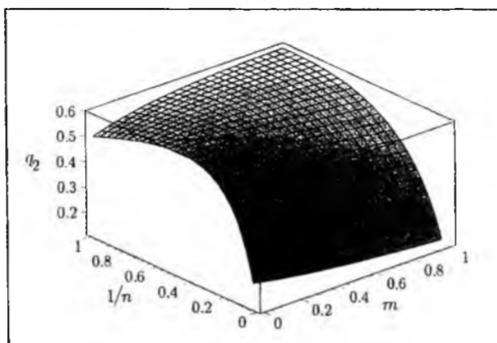


Рис. 58. Зависимость показателя q_2 второго слагаемого асимптотического разложения компонент тензора напряжений от материальных констант n и m

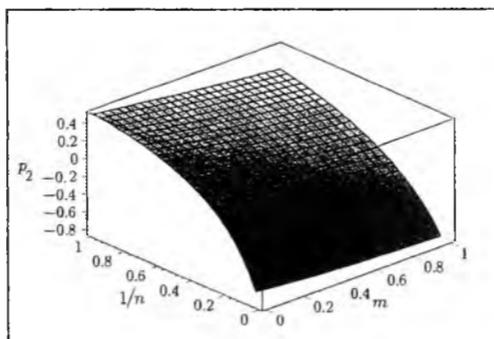


Рис. 59. Зависимость показателя p_2 второго слагаемого асимптотического разложения компонент тензора деформаций от материальных констант n и m

3. Задачи

1. Проверьте справедливость уравнения (XI. 1.23).
2. Докажите, что полученное решение сводится к решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена при $m = 0$ и $D = 0$.

ХII. Усталостный рост трещины в среде с поврежденностью

1. Асимптотический анализ усталостного роста трещины в среде с поврежденностью

Континуальная механика поврежденности принимает во внимание изменение свойств материала вследствие накопления различного рода повреждений, что приводит к необходимости использования определяющих соотношений, включающих параметр поврежденности.

В настоящее время появляются многочисленные исследования, посвященные изучению как стационарной, так и растущей трещины в связанной постановке задачи (в связках упругость–поврежденность, пластичность–поврежденность, ползучесть–поврежденность). Несмотря на то, что единой, математически развитой и завершенной теории роста трещин в сплошной среде с учетом процесса накопления повреждений к настоящему моменту не существует, можно выделить характерные особенности, присущие этому классу задач.

С этой целью проведем асимптотический анализа усталостного роста трещины в среде с поврежденностью [116].

Для линейно упругого материала с рассеянным полем микродефектов уравнения, связывающие напряжения и деформации, имеют вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\psi\epsilon_{kl}, \quad (\text{ХII. 1.1})$$

σ_{ij} , ϵ_{ij} и C_{ijkl} есть компоненты тензора напряжений, деформаций и начальной жесткости, ψ – сплошность.

Пусть для рассматриваемого материала параметр сплошности ψ эволюционирует согласно закону

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m \frac{1}{\psi^{n-m}} & (\sigma_e \geq \sigma_{th}\psi^\gamma), \\ 0 & (\sigma_e < \sigma_{th}\psi^\gamma), \end{cases} \quad (\text{ХII. 1.2})$$

где N – число циклов; c , m , n ($n > m$), γ и σ_{th} – положительные постоянные материала;

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}, \quad (\text{ХII. 1.3})$$

где

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$$

есть компоненты девиатора напряжений.

Если ψ интерпретируется как отношение площади поперечного сечения образца, не занятой повреждениями, к его начальной площади, то можно положить $\gamma = 1$.

Рассмотрим медленный рост усталостной трещины нормального отрыва (a – текущая длина трещины) в среде с поврежденностью в условиях плоского напряженного состояния.

После введения функции напряжений Эри $F(r, \theta)$:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (\text{XII. 1.4})$$

и предположения, что

$$F(r, \theta) = \alpha r^{\lambda+2} f(\theta), \quad \psi(r, \theta) = \beta r^\mu g(\theta), \quad (\text{XII. 1.5})$$

так что

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{rr}(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \alpha r^\lambda \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta), \end{aligned} \quad (\text{XII. 1.6})$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(\theta) &= (\lambda + 2)f + f'', \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)f, \\ \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -(\lambda + 1)f'; \end{aligned} \quad (\text{XII. 1.7})$$

задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, вытекающего из условия совместности деформаций:

$$f'''' - 2\bar{E}f''' + (b_1 + \bar{G})f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (\text{XII. 1.8})$$

где

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{g'}{g}, \quad \bar{G} = 2E^2 - \frac{g''}{g}; \\ b_1 &= e_1 + c_2 - c_3\nu + c_1e_3, \quad b_2 = 2e_1 + c_1e_3, \quad b_3 = c_2e_1 + c_3e_2, \\ c_1 &= -2(\lambda - \nu + 1), \quad c_2 = \mu - \lambda, \quad c_3 = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu + 1); \quad (\text{XII. 1.9}) \\ e_1 &= (\lambda + 2)(1 - \nu\lambda - \nu), \quad e_2 = (\lambda + 2)(1 - \nu + 1), \\ e_3 &= -(1 + \nu)(1 + \lambda); \end{aligned}$$

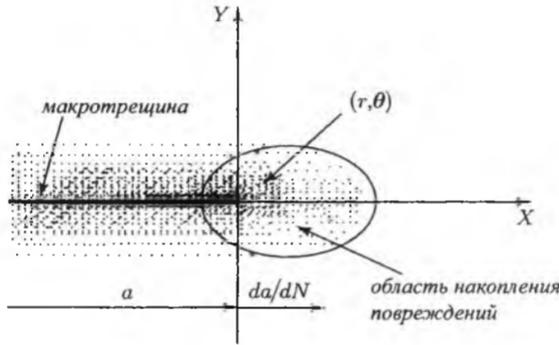


Рис. 60. Схематичное представление области активного накопления микроповреждений

и уравнения, следующего из кинетического уравнения накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dN} = -c\alpha^m \beta^{-n} r^{m\lambda - \mu n} \bar{\sigma}_e^m g^{-n}, \tag{XII. 1.10}$$

где

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{\bar{\sigma}_{rr}^2 - \bar{\sigma}_{rr}\bar{\sigma}_{\theta\theta} + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^2 + \bar{\sigma}_{r\theta}^2}.$$

Следует отметить, что последнее соотношение справедливо только при условии

$$\alpha r^\lambda \bar{\sigma}_e \geq \sigma_{th} \beta r^\mu g, \tag{XII. 1.11}$$

или

$$q(r, \theta) \geq 1, \tag{XII. 1.12}$$

где

$$q(r, \theta) = \frac{\alpha}{\beta \sigma_{th}} r^{\lambda - \mu} \frac{\bar{\sigma}_e}{g}. \tag{XII. 1.13}$$

Очевидно также, что необходимо выполнение условия $\lambda - \mu < 0$, поскольку при $r \rightarrow 0$ последнее требование гарантирует существование области, где происходит накопление повреждений (см. рис. 60).

Производная сплошности по числу циклов $d\psi/dN$ вычисляется по формуле

$$\frac{d\psi}{dN} = \beta \frac{da}{dN} r^{\mu-1} (-\mu g \cos \theta + g' \sin \theta). \tag{XII. 1.14}$$

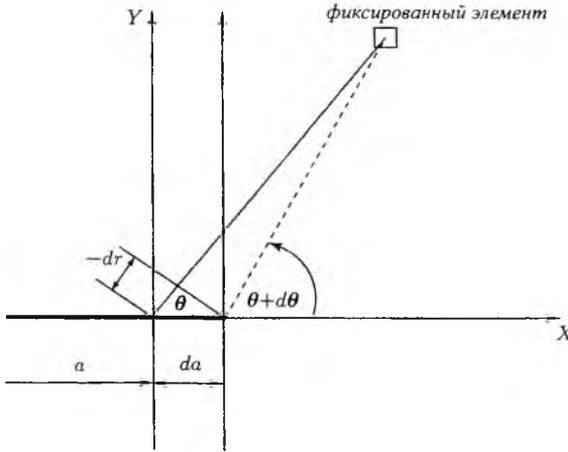


Рис. 61. Выбор системы координат в окрестности вершины продвигающейся трещины

Действительно, представив производную как

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{d\psi}{da} \frac{da}{dN}, \tag{XII. 1.15}$$

и воспользовавшись асимптотическим представлением $\psi(r, \theta) = \beta r^\mu g(\theta)$ и формулами

$$\frac{d\psi}{da} = \frac{\partial\psi}{\partial\beta} \frac{d\beta}{da} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{dr}{da} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{d\theta}{da}, \tag{XII. 1.16}$$

$$\frac{d\psi}{da} = \frac{d\beta}{da} r^\mu g + \mu\beta r^{\mu-1} g \frac{dr}{da} + \beta r^\mu g' \frac{d\theta}{da}, \tag{XII. 1.17}$$

а также (см. рис. 61)

$$\frac{dr}{da} = -\cos\theta, \quad \frac{d\theta}{da} = \frac{1}{r} \sin\theta, \tag{XII. 1.18}$$

можно получить

$$\frac{d\psi}{da} = \frac{d\beta}{da} r^\mu g + \beta r^{\mu-1} (-\mu g \cos\theta + g' \sin\theta) \tag{XII. 1.19}$$

или, отбрасывая первое слагаемое в правой части, имеющее при $r \rightarrow 0$ более высокий порядок малости по сравнению с оставшимся,

$$\frac{d\psi}{da} = \beta r^{\mu-1}(-\mu g \cos \theta + g' \sin \theta). \quad (\text{XII. 1.20})$$

Пользуясь асимптотическими формулами для напряжений и сплошности в окрестности вершины трещины, можно установить, что

$$\frac{d\psi}{dN} = -c\alpha^m \beta^{-n} r^{m\lambda - \mu n} \bar{\sigma}_e^m g^{-n}, \quad (\text{XII. 1.21})$$

откуда, сравнивая с выражения для $d\psi/dN$, полученным ранее, можно заключить

$$\frac{da}{dN} = c\alpha^m \beta^{-(n+1)}, \quad (\text{XII. 1.22})$$

$$\lambda = \frac{\mu(n+1) - 1}{m}, \quad (\text{XII. 1.23})$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\bar{\sigma}_e^m g^{-n}. \quad (\text{XII. 1.24})$$

Поскольку неизвестные постоянные λ и μ связаны друг с другом, то рассматриваемая проблема сводится к задаче на собственные значения для значения μ и системы двух дифференциальных уравнений

$$f'''' - 2\bar{E}f''' + (b_1 + \bar{G})f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (\text{XII. 1.25})$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\bar{\sigma}_e^m g^{-n} \quad (\text{XII. 1.26})$$

В силу симметрии при $\theta = 0$ выполняются следующие условия:

$$f'(0) = f'''(0) = 0, \quad g'(0) = 0. \quad (\text{XII. 1.27})$$

Заметим, что в силу однородности уравнений можно положить

$$f(0) = 1. \quad (\text{XII. 1.28})$$

На продолжении трещины справедливы условия вида

$$\begin{cases} g(0) = \left[\frac{\bar{\sigma}_e^m(0)}{\mu} \right]^{1/(n+1)}, \\ g''(0) = F(\mu, f''(0)), \end{cases} \quad (\text{XII. 1.29})$$

где $F(\mu, f''(0))$ – некоторая функция¹⁵.

Традиционные условия для напряжений на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi) = \sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0. \quad (\text{XII. 1.30})$$

Кроме того, может быть сформулировано естественное условие на берегах трещины

$$\psi(r, \pi) = 0.$$

Этим условиям, вообще говоря, невозможно удовлетворить, располагаясь только двумя параметрами μ и $f''(0)$, так как, если все сформулированные условия на берегах трещины выполняются, то имеем $\sigma_{rr}(r, \pi) = 0$ и, следовательно, имеются три условия и лишь два подбираемых параметра.

Поэтому необходимо перейти к модифицированной постановке задачи, вводя новый неизвестный угол θ_d , такой что

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_d) = \sigma_{r\theta}(r, \theta_d) = 0, \\ \psi(r, \theta_d) = 0 \quad (0 < \theta_d \leq \pi), \end{cases} \quad (\text{XII. 1.31})$$

или

$$\begin{cases} f(\theta_d) = f'(\theta_d) = 0, \\ g(\theta_d) = 0 \quad (0 < \theta_d \leq \pi). \end{cases} \quad (\text{XII. 1.32})$$

2. Численное решение

Численное решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $f(\theta)$, $g(\theta)$:

$$f'''' - 2\bar{E}f''' + (b_1 + \bar{G})f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (\text{XII. 2.1})$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\bar{\sigma}_e^m g^{-n}, \quad (\text{XII. 2.2})$$

¹⁵Можно показать, что

$$g''(0) = \frac{2\mu g(0) + mh_1 [g(0)]^{-n} [\bar{\sigma}_e(0)]^{m-2}}{[2\mu(n+1) - 4]g(0) - mh_2 [g(0)]^{-(n+1)} [\bar{\sigma}_e(0)]^{m-2}},$$

где

$$h_1 = 2s_1 f''(0) + (s_2 + 2s_3) [f''(0)]^2 - [s_2 + 2f''(0)] [b_1 f''(0) + b_3],$$

$$h_2 = [s_2 + 2f''(0)] [f''(0) + e_1],$$

$$s_1 = (\lambda + 2)^2 (\lambda^2 + \lambda + 1), \quad s_2 = (\lambda + 2)(1 - \lambda), \quad s_3 = 3(1 - \lambda).$$

получено с помощью метода Рунге – Кутта – Фельберга при задании значений μ и $f''(0)$ и проверки выполнения граничных условий при $\theta = \theta_d$.

Рассматривались следующие значения материальных констант: $\nu = 0.3$, $\gamma = 1$, $m = 2, 4, 7$ и $n = 2, 4, 7$.

Приведем полученную в [116] таблицу значений найденных показателей λ , μ и углов θ_d для различных значений материальных констант.

m	n	μ	λ	θ_d	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}(0)$	$g(0)$
2	2	0.331	-0.003	130.7°	1.991	2.127
2	4	0.251	0.128	95.7°	2.402	1.844
2	7	0.152	0.106	92.1°	2.331	1.560
4	4	0.257	0.071	113.5°	2.219	2.385
4	7	0.158	0.067	97.2°	2.205	1.855
7	7	0.168	0.049	107.8°	2.149	2.390

Угловые распределения компонент тензора напряжений для различных значений материальных констант показаны на рис. 62 – 64.

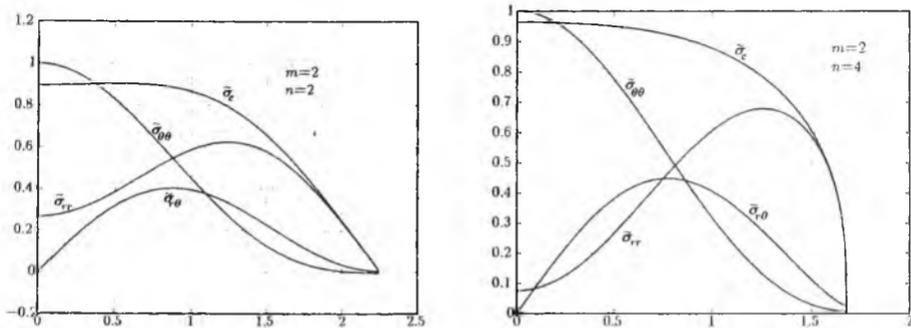


Рис. 62. Угловые распределения компонент тензора напряжений для $m = 2, n = 2$ и $m = 2, n = 4$

Для приведенных значений констант материала построены [116] области, в которых происходит накопление повреждений (рис. 68 – 70).

Контуры этих областей определяются уравнением $\omega^{-1}r = \bar{r}_d(\theta)$, где

$$\bar{r}_d(\theta) = \frac{r_d(\theta)}{\omega}, \quad \omega = r_d(0), \quad (\text{XII. 2.3})$$

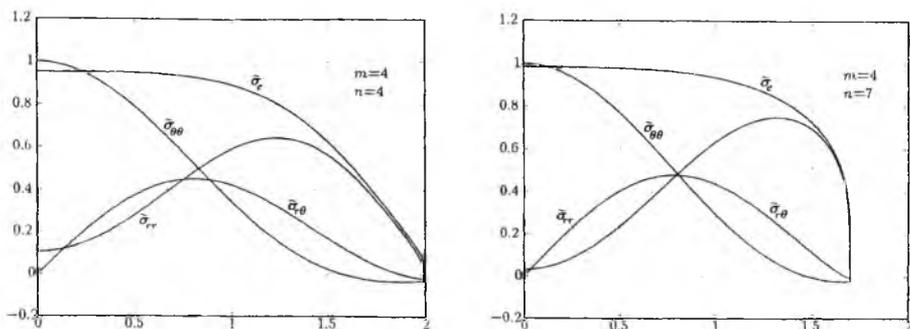


Рис. 63. Угловые распределения компонент тензора напряжений для $m = 4, n = 4$ и $m = 4, n = 7$

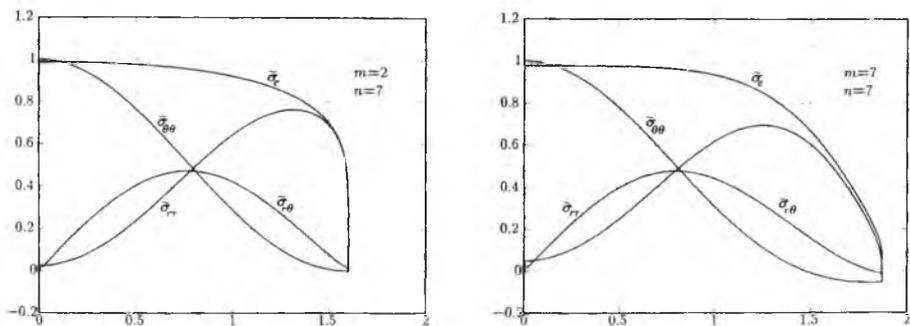


Рис. 64. Угловые распределения компонент тензора напряжений для $m = 2, n = 7$ и $m = 7, n = 7$

причем $r_d(\theta)$ находится из уравнения

$$q(r_d, \theta) = 1 \quad (q(\omega, 0) = 1). \quad (\text{XII. 2.4})$$

Скорость роста усталостной трещины будет теоретически найдена после определения констант α и β в (XII. 1.22). Для этих целей необходимо исследовать характеристики поля, окружающего область, в которой существенен процесс накопления повреждений. Самая простая схема – предположить, что поле напряжений вне области накопления повреждений определяется сингулярным слагаемым классического упругого решения. Таким образом, по аналогии с маломасштабным пластическим течением данное предположение можно назвать гипотезой о маломасштабной

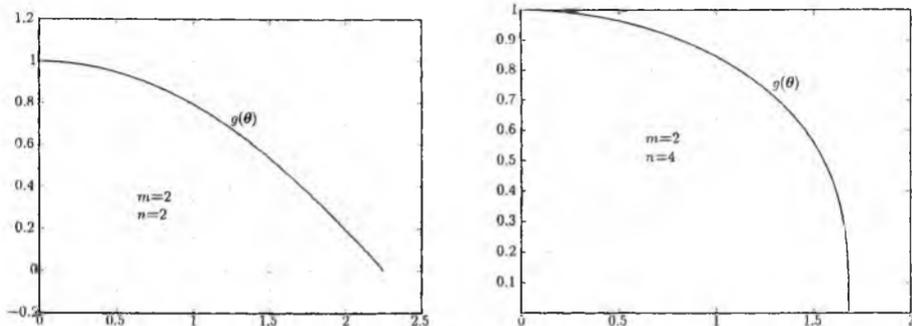


Рис. 65. Угловые распределения сплошности для $m = 2, n = 2$ и $m = 2, n = 4$

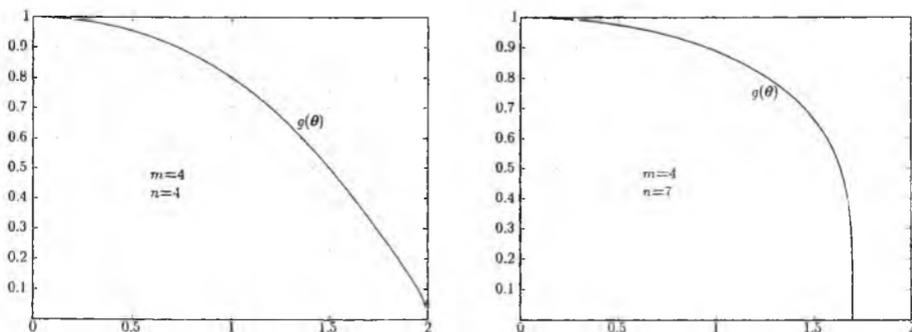


Рис. 66. Угловые распределения сплошности для $m = 4, n = 4$ и $m = 4, n = 7$

поврежденности, согласно которой считается, что зона, где процесс накопления повреждений существенен, мала по сравнению с длиной макроскопической трещины, с характерным линейным размером образца. Более сложная схема – предположение о существовании промежуточной области, разделяющей зону накопления повреждений и удаленную зону доминирования чисто упругого решения. Напряжения внутри промежуточной области определяются выражением:

$$\sigma_{ij}^*(r, \theta) = \bar{K}_I r^{-1/p} \bar{\sigma}_{ij}^*(\theta), \quad (\text{XII. 2.5})$$

где \bar{K}_I – аналог коэффициента интенсивности напряжений для промежуточной области. В силу влияния процесса накопления повреждений особенность напряжений должна быть более слабой по сравнению с особенностью упругого решения, поэтому $p > 2$.

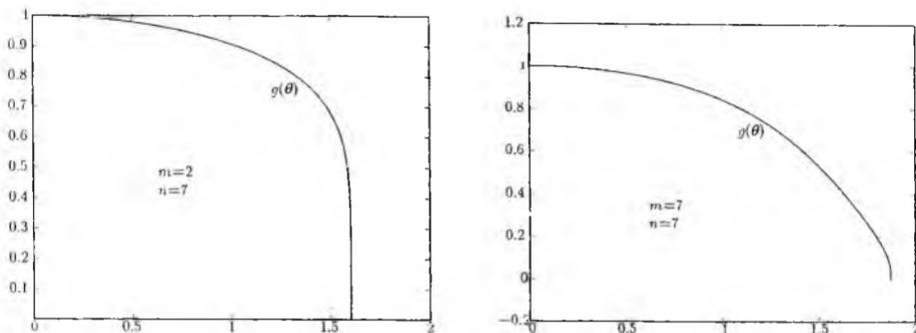


Рис. 67. Угловые распределения плотности для $m = 2, n = 7$ и $m = 7, n = 7$

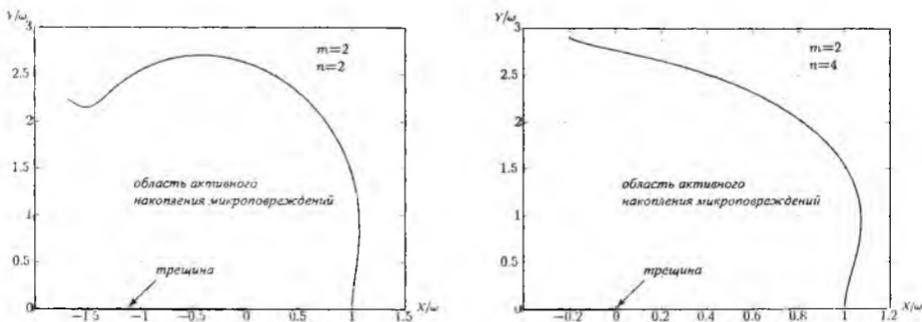


Рис. 68. Геометрия области активного накопления повреждений

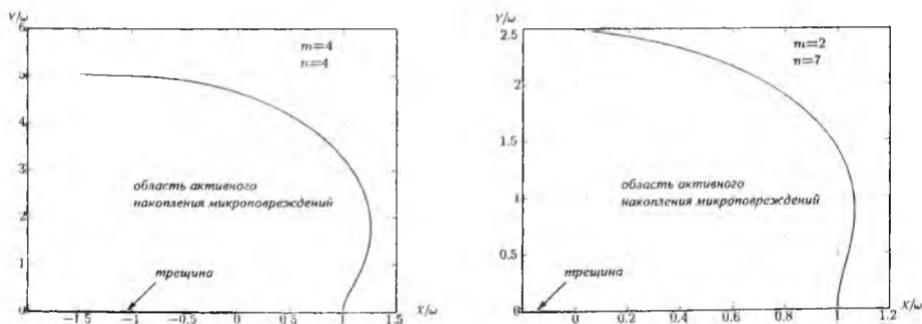


Рис. 69. Геометрия области активного накопления повреждений

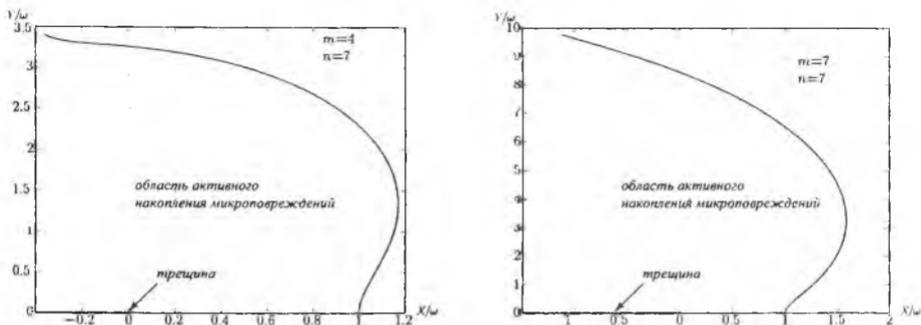


Рис. 70. Геометрия области активного накопления повреждений

В [116] дан качественный анализ введенной промежуточной области с целью определения α и β . Рассмотрим условия непрерывности на границе области накопления повреждений и переходной зоны в точке $\theta = 0$ и $r = \omega$ (см. (XII. 2.3) и (XII. 2.4)).

Необходимо сформулировать условие непрерывности напряжения σ_{rr} :

$$\sigma_{rr}(\omega, 0) = \sigma_{rr}^*(\omega, 0), \quad (\text{XII. 2.6})$$

непрерывность параметра сплошности:

$$\psi(\omega, 0) = 1, \quad (\text{XII. 2.7})$$

а также условие, определяющее область накопления повреждений:

$$q(\omega, 0) = 1. \quad (\text{XII. 2.8})$$

Разрешая систему последних трех уравнений (XII. 2.6)–(XII. 2.8) относительно ω , α и β , можно найти

$$\omega = \left[\frac{\bar{K}_I \bar{\sigma}_e(0) \bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p,$$

$$\alpha = \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}(0)}{\bar{K}_I \bar{\sigma}_e(0) \bar{\sigma}_{rr}^*(0)} \right]^{p\lambda} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\lambda+1},$$

$$\beta = \frac{1}{\bar{\varphi}(0)} \left[\frac{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)}{\bar{K}_I \bar{\sigma}_{rr}^*(0) \bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\mu}.$$

Учитывая полученные результаты, можно оценить скорость роста трещины

$$\frac{da}{dN} = c\bar{K}_I^p, \quad (\text{XII. 2.9})$$

где

$$c = \bar{c} [\bar{\varphi}(0)]^{n+1} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{m-p} \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p. \quad (\text{XII. 2.10})$$

Последняя формула представляет собой соотношение, по своей структуре аналогичное закону усталостного роста трещины Париса–Эрдогана. В частности, если $p = 2$ (что соответствует предположению о том, что зона накопления повреждений окружена K_I -доминантной областью), имеет место формула

$$\frac{da}{dN} = cK_I^2. \quad (\text{XII. 2.11})$$

3. Задачи

1. Получите из условия совместности деформаций обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (XII. 1.8).

2. Постройте угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности.

3. Постройте конфигурации областей активного накопления повреждений для различных значений материальных констант.

ХIII. Влияние скоростей упругих деформаций на докритический рост трещины в упругом нелинейно-вязком материале

Изучение напряженно-деформированного состояния вблизи вершины как стационарной, так и растущей трещины с учетом процесса накопления рассеянных повреждений является предметом многочисленных исследований. Особый интерес вызывает рассмотрение взаимного влияния распределения напряжений, деформаций, их скоростей и поля поврежденности, что приводит к необходимости формулировки связанных постановок задач (в различных комбинациях – "упругость – поврежденность", "пластичность – поврежденность", "ползучесть – поврежденность", "упругость – ползучесть – поврежденность" и других более сложных) и их решения.¹⁶

Предметом настоящего исследования является попытка оценить вклад скоростей упругих деформаций в общее поле скоростей деформаций в окрестностях вершин продвигающихся трещин антиплоского сдвига и нормального отрыва в предположении реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояний в упругом нелинейно-вязком материале в поврежденной среде.

Необходимо отметить, что проблема влияния скоростей упругих деформаций на скорость докритического подрастания дефекта в упругом нелинейно-вязком материале (в условиях отсутствия накопления повреждений) и ранее привлекала внимание многих ученых, например, [69, 70].

В [69] приведен асимптотический анализ полей напряжений и скоростей деформаций у вершины медленно распространяющейся трещины в упругом нелинейно-вязком материале, деформирующемся по закону

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + B\sigma^n.$$

Проведенное асимптотическое исследование распределений напряжений и скоростей деформаций для трещин типа I и III показало, что для $n < 3$ асимптотика поля напряжений определяется исключительно скоростями упругих деформаций. Для $n > 3$ установлена новая асимптотика компонент тензора напряжений и деформаций вблизи вершины трещины ($r \rightarrow 0$) $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij} \sim r^{-1/(n-1)}$. Такое асимптотическое поведение напряжений и деформаций справедливо как для установившегося, так и для

¹⁶Изложение следует [37].

неустановившегося роста трещины и определяется совместным вкладом скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести (показатель степени находится не в ходе численного анализа на собственные значения, как это часто происходит при решении данного класса задач механики разрушения, а путем приравнивания асимптотик скоростей упругих деформаций r^{s-1} и деформаций ползучести r^{sn} с неизвестным пока показателем s).

Таким образом, скорости упругих деформаций играют существенную роль и ими пренебрегать нельзя по сравнению со скоростями деформаций ползучести в ходе определения напряженно-деформированного состояния и, следовательно, при формулировке критерия разрушения. Найденные поля напряжений и скоростей деформаций получили название HR-распределения.

В следующей своей работе [70] Хьюи изучил процесс продвижения трещины типа I в условиях переходного режима (от времен, соответствующих маломасштабной ползучести, до времен, отвечающих развитым деформациям ползучести). Первый предельный случай называют K -контролируемым ростом трещины, где K – коэффициент интенсивности напряжений, второй – C^* -контролируемым ростом трещины, где C^* – инвариантный интеграл теории установившейся ползучести. Хьюи [70] показал, что при медленном росте трещины области доминирования HR-решения, HRR-распределения [95] и зона превалирования исключительно упругого решения (одна область внутри другой) вместе дают представление структуры кончика растущей трещины. Данное исследование построено на учете скоростей упругих деформаций и их вклада в общее поле скоростей деформаций и, в конечном итоге, в оценку скорости роста трещины.

В последнее время снова наблюдается большой интерес к проблемам докритического роста трещин в металлах при высокотемпературной ползучести. Однако сейчас моделирование основывается на необходимости описания процесса накопления повреждений (микротрещин, микропор, дислокаций). Безусловно, изучение характерных особенностей напряженно-деформированного состояния у вершины трещины началось с наиболее простых типов определяющих соотношений и для случая стационарной трещины.

Так, в [65], где исследовано поле повреждений у вершины неподвижной трещины для материала с определяющими соотношениями

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon_0, \\ E\varepsilon \left[\left(\frac{n\varepsilon}{\varepsilon_0} + \mu \right) / (n + \mu) \right]^{-1-1/n}, & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \end{cases}$$

где $E, n, \varepsilon_0, \mu > 1$ – постоянные материала, можно видеть необходимость введения дополнительных гипотез и предположений, обусловленных желанием учесть процесс накопления повреждений.

Антиплоский сдвиг пространства с неподвижной полубесконечной трещиной в изотропном упругом материале в связанной постановке

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E(1 - \omega)} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E(1 - \omega)} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

где $\omega = 1 - \psi$ – параметр поврежденности, введенный в [30], ψ – параметр сплошности, введенный в [12], был исследован в [79]. Определяющие соотношения такого типа, построенные на основе концепции эффективного напряжения, обсуждались ранее, например, в [80, 86]. Аналитическое решение в [79] найдено с помощью метода годографа, дающего возможность определить структуру области, примыкающей к вершине трещины. Установлено, что устье трещины охватывается областью насыщения, внутри которой скалярный параметр поврежденности достиг своего критического значения и поврежденность более не накапливается. Зона насыщения целиком находится внутри области активного накопления повреждений (или области процесса), которая, в свою очередь, охвачена неповрежденным материалом.

Следует отметить, что к подобным выводам независимо пришли авторы [116], где приведен асимптотический анализ усталостного роста трещины в упругом материале в среде с поврежденностью в связанной постановке. В [116] показано, что в непосредственной окрестности вершины трещины существует область процесса – регион, где происходит активное накопление микродефектов, а к берегам трещины примыкает область полностью поврежденного материала, таким образом, процесс распространения трещины можно представить как продвижение целой области, окружающей магистральную, главную трещину. Установлено, что влияние накопления повреждений приводит к качественно новому распределению напряжений – существенному снижению показателя сингулярности или к полному исчезновению сингулярности поля напряжений.

К весьма сходным результатам приводят исследования полей напряжений, скоростей деформаций и сплошности в нелинейно-вязком материале в связанной постановке (связка "ползучесть – поврежденность").

В [81] получены распределения компонент тензоров напряжений, скоростей деформаций ползучести и скалярного параметра поврежденности у кончика трещины типа I в предположении реализации плоского напряженного состояния в связанной постановке с определяющими соотношениями вида

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{B}{(1-\omega)^n} s_{ij} \sigma^{n-1}.$$

Авторы установили, что влияние процесса накопления повреждений проявляется в релаксации напряжений, иными словами, компоненты тензора напряжений ведут себя как $\sigma_{ij} \sim r^{s-2}$, где $s > 2$. Для всех наборов исследованных параметров материала и констант кинетического уравнения напряжения и скорости деформаций не являются сингулярными.

Вычислительные аспекты механики разрушения и механики поврежденности применительно к проблеме роста трещины в нелинейно-вязком материале (вновь со степенной зависимостью между скоростями деформаций ползучести и эффективными напряжениями) в среде с поврежденностью обсуждаются в [90, 91]. Мураками с соавторами, апеллируя к экспериментальным наблюдениям установившегося роста трещины нормального отрыва в меди при 250°C , вводит в рассмотрение зону активного накопления повреждений и априори задает ее форму с помощью дуги эллипса и двух прямых, параллельных берегам трещины. Проведенный авторами асимптотический анализ полей повреждений, напряжений и скоростей деформаций, а также численный анализ собственных значений, основанный на использовании метода Рунге – Кутты для решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, показали, что свойственная полям напряжений и скоростей деформаций ползучести сингулярность либо отсутствует, либо значительно уменьшается.

Естественным развитием полученных результатов является желание рассмотреть более сложные определяющие соотношения – соотношения упругого нелинейно-вязкого материала

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\bar{s}}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\bar{\sigma}}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \bar{\sigma}^{n-1} \bar{s}_{ij},$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-\omega}, \quad \bar{s}_{ij} = \frac{s_{ij}}{1-\omega}.$$

Однако в большинстве случаев, например в [84, 85], авторы, выписывая определяющие уравнения упругого нелинейно-вязкого материала, в силу сложности задачи ограничиваются рассмотрением лишь скоростей деформаций ползучести.

Данное исследование представляет собой попытку включения скоростей упругих деформаций в анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины растущей трещины в поврежденной среде в связанной постановке (в комбинации "упругость – ползучесть – поврежденность").

1. Постановка задачи.

Трещина антиплоского сдвига

Рассматривается задача о докритическом подрастании трещины антиплоского сдвига в среде с поврежденностью. Для этого вводится параметр сплошности материала ψ [12], для которого известно, что $\psi(t = 0) = 1$, то есть начальное состояние является неповрежденным (в [30] введен параметр поврежденности ω , связанный с ψ соотношением $\omega = 1 - \psi$). Определяющие соотношения для среды с поврежденностью с введением гипотезы эффективного напряжения в случае антиплоского сдвига представляются в следующем виде:

$$\dot{\gamma}_i = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\dot{\tau}_i}{\psi} \right) + \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\psi}, \quad (\text{XIII. 1.1})$$

где $\dot{\gamma}_i$ – скорость деформаций сдвига, здесь точка означает дифференцирование по времени, а сами деформации сдвига складываются из упругих деформаций γ_i^e и деформаций ползучести γ_i^c , то есть $\gamma_i = \gamma_i^e + \gamma_i^c$, τ_i/ψ – компоненты тензора эффективных напряжений, $\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ – интенсивность касательных напряжений, μ – модуль сдвига, B, n – постоянные степенного закона установившейся ползучести, $i = 1, 2$ в декартовой системе координат и $i = r, \theta$ в полярной системе координат.

Материальная производная по времени в подвижной системе координат $x_1 O x_2$, начало которой совпадает с вершиной трещины, имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x_1},$$

где v – скорость роста трещины, или в полярной системе координат

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (\text{XIII. 1.2})$$

В случае установившегося роста трещины материальная производная по времени будет принимать вид:

$$\frac{d}{dt} = -v \frac{\partial}{\partial x_1} = -v \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (\text{XIII. 1.3})$$

Тогда определяющие соотношения (XIII. 1.1) могут быть представлены в виде:

$$\dot{\gamma}_i = -\frac{v}{2\mu} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau_i}{\psi} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tau_i}{\psi} \right) \right] + \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\psi}. \quad (\text{XIII. 1.4})$$

Полная система уравнений, описывающая рост трещины в среде с поврежденностью, представляется в следующем виде:

уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_r) + \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \theta} = 0; \quad (\text{XIII. 1.5})$$

условие совместности, сформулированное для скоростей деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \dot{\gamma}_\theta) = \frac{\partial \dot{\gamma}_r}{\partial \theta}; \quad (\text{XIII. 1.6})$$

кинетическое уравнение, постулирующее степенной закон накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m \quad (\text{XIII. 1.7})$$

или с учетом (XIII. 1.3)

$$-v \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m, \quad (\text{XIII. 1.8})$$

где A, m – постоянные материала, определяемые экспериментально.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид:

условие отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\tau_\theta(\theta = \pm\pi) = 0; \quad (\text{XIII. 1.9})$$

условие симметрии на ее продолжении (если исследуется в силу симметрии задачи одна из полуплоскостей)

$$\tau_r(\theta = 0) = 0. \quad (\text{XIII. 1.10})$$

2. Метод разложения по собственным функциям. Асимптотический анализ поля скоростей деформаций

Целью настоящего исследования является асимптотический анализ полей напряжений, скоростей деформаций и параметра сплошности в окрестности вершины растущей трещины ($r \rightarrow 0$) в среде с поврежденностью. Будем искать напряжения и параметр сплошности в виде разложения по собственным функциям:

$$\frac{\tau_i}{\psi}(r, \theta, t) = r^s f_i(\theta, t), \quad \psi(r, \theta, t) = r^\nu g(\theta, t), \quad (\nu > 0). \quad (\text{XIII. 2.1})$$

Вид уравнений будет определяться тремя существующими возможностями, а именно:

1) если скорости деформаций ползучести в окрестности вершины трещины являются доминирующими, то определяющие соотношения задачи (XIII. 1.4) примут вид

$$\dot{\gamma}_i = \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\psi}; \quad (\text{XIII. 2.2})$$

2) если скорости упругих деформаций и деформаций ползучести являются величинами одного порядка при $r \rightarrow 0$, то определяющие соотношения (XIII. 1.4) остаются прежними, и следует учитывать оба слагаемых;

3) если скорости упругих деформаций превалируют при $r \rightarrow 0$, то

$$\dot{\gamma}_i = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\dot{\tau}_i}{\psi} \right). \quad (\text{XIII. 2.3})$$

Рассмотрим каждый из описанных случаев.

1. Если скорости деформаций ползучести доминируют по сравнению со скоростями упругих деформаций в окрестности вершины трещины, то изучается докритический рост трещины в нелинейно-вязком материале, и распределение напряжений и параметра сплошности при $r \rightarrow 0$ имеет вид [2]:

$$\psi = \kappa^m \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{m/(n+1-m)} \left(\frac{A}{v} \right)^{(n+1)/(n+1-m)} r g(\theta) \quad (0 < \theta < \pi/2),$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\psi} = \kappa \left(\frac{AC^*}{vBI_n} \right)^{1/(n+1-m)} f_\alpha(\theta) \quad (0 < \theta < \pi/2).$$

Как видно, у вершины трещины отсутствует характерное для теории трещин сингулярное поле напряжений (эффективные напряжения τ_α/ψ ограничены, а сами напряжения τ_α и сплошность линейно падают до нуля в окрестности вершины трещины). Однако, как вытекает из равенства (XIII. 1.1), это противоречит принятой гипотезе о доминировании скоростей деформаций ползучести. Действительно, в этом случае $\tau_i \sim r$, $\tau_i/\psi \sim O(1)$, тогда $\dot{\gamma}_i^e \sim 1/r$, $\dot{\gamma}_i^c \sim O(1)$, т.е. скорости упругих деформаций имеют особенность вида $1/r$, и это слагаемое является главным членом асимптотического разложения скоростей деформаций и его отбрасывать нельзя.

2. Принимая предположение о равном вкладе как скоростей упругих деформаций, так и скоростей деформаций ползучести, можно ввести безразмерные величины

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\tau_B},$$

где L, T, τ_B – некоторые характерные длина, время и напряжение соответственно. Тогда $s = -1/(n - 1)$ и поле напряжений может быть представлено в форме

$$\frac{\tau_i}{\psi}(\hat{r}, \theta, \hat{t}) = \left(\frac{v}{BL\mu} \right)^{1/(n-1)} \hat{r}^{-1/(n-1)} \frac{\hat{\tau}_i}{\psi}(\theta, \hat{t}).$$

Асимптотическое решение этой задачи может быть получено путем разложения искомых функций $\tau_i(r, \theta), \psi(r, \theta)$ по собственным функциям

$$\begin{aligned} \frac{\tau_r}{\psi}(r, \theta) &= \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{1/(n-1)} r^{-1/(n-1)} f_r(\theta), \\ \frac{\tau_\theta}{\psi}(r, \theta) &= \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{1/(n-1)} r^{-1/(n-1)} f_\theta(\theta), \\ \psi(r, \theta) &= \frac{A}{v} \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{m/(n-1)} r^\nu g(\theta), \end{aligned} \tag{XIII. 2.4}$$

причем анализ кинетического уравнения позволяет сделать вывод, что $\nu = 1 - m/(n - 1)$. Тогда для представленного случая

$$\tau_i(r, \theta) = \frac{A}{v} \left(\frac{v}{B\mu} \right)^{(m+1)/(n-1)} r^{(n-m-2)/(n-1)} f_i(\theta) g(\theta), \quad (i = r, \theta). \tag{XIII. 2.5}$$

Подстановка соотношений (XIII. 2.4), (XIII. 2.5) в систему уравнений (XIII. 1.5) – (XIII. 1.8) приводит к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций $f_r(\theta), f_\theta(\theta), g(\theta)$:

уравнение равновесия:

$$f'_{\theta}g + f_{\theta}g' + \left(2 - \frac{m+1}{n-1}\right) f_r g = 0, \quad (\text{XIII. 2.6})$$

кинетическое уравнение:

$$\sin \theta g'(\theta) - \left(1 - \frac{m}{n-1}\right) \cos \theta g(\theta) = -f^m(\theta), \quad f = \sqrt{f_r^2 + f_{\theta}^2}, \quad (\text{XIII. 2.7})$$

условие совместности:

$$\begin{aligned} (1-n) \sin \theta f_r'' + (n-2) \sin \theta f_{\theta}' - n \cos \theta f_r' + n(n-2)/(n-1) \cos \theta f_{\theta} = \\ = -f^{n-1} f_{\theta} + (n-1)^2 f^{n-3} f_r (f_r f_r' + f_{\theta} f_{\theta}') + (n-1) f^{n-1} f_r'. \end{aligned} \quad (\text{XIII. 2.8})$$

Система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (XIII. 2.6) – (XIII. 2.8) должна быть исследована с учетом граничных условий: условия симметрии:

$$f_r(\theta = 0) = 0; \quad (\text{XIII. 2.9})$$

условия отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины:

$$f_{\theta}(\theta = \pi) = 0; \quad (\text{XIII. 2.10})$$

условия регулярности решения уравнения (XIII. 2.7) (дифференциальное уравнение (XIII. 2.7) является сингулярно возмущенным, так как коэффициент при старшей производной обращается в нуль при значении аргумента $\theta = 0$):

$$g(\theta = 0) = \frac{(f_{\theta}(0))^m}{\mu}; \quad (\text{XIII. 2.11})$$

условия регулярности для уравнения совместности:

$$f_r'(\theta = 0) = \frac{-(f_{\theta}(0))^n + n(n-2)/(n-1) f_{\theta}(0)}{1 + (n-1)(1 + (f_{\theta}(0))^{n-1})}. \quad (\text{XIII. 2.12})$$

Таким образом, осталось подобрать значение $f_{\theta}(\theta = 0) = a$ методом пристрелки так, чтобы удовлетворить условию $f_{\theta}(\theta = \pi) = 0$.

Численное исследование системы уравнений (XIII. 2.6) – (XIII. 2.8) с граничными условиями (XIII. 2.9) – (XIII. 2.12) осуществлялось методом Рунге – Кутты – Фельберга 5-го порядка точности [38] в сочетании

с методом пристрелки. Оно показывает, что не удастся подобрать значение a , приводящее к выполнению граничного условия на верхнем берегу трещины. Можно попытаться сформулировать граничные условия не на берегах трещины непосредственно, а при некотором значении угла $\theta = \theta_d$ (такое предположение часто принимается при исследовании данного класса задач), то есть предположить, что при $\theta > \theta_d$ функция $g(\theta)$ принимает лишь нулевые значения, что означает, в свою очередь, то, что материал полностью поврежден при $\theta > \theta_d$. Тогда вместо условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины $f_\theta(\theta = \pi) = 0$ будут использованы следующие граничные условия $f_\theta(\theta = \theta_d) = 0$, $g(\theta = \theta_d) = 0$.

Численное решение этой задачи показывает, что не существует такого значения угла $0 < \theta_d < \pi$, для которого выполняются указанные выше условия. Этот обстоятельство свидетельствует о том, что ранее принятое предположение, согласно которому оба слагаемых в определяющем соотношении (XIII. 1.4) вносят одинаковый вклад, не является справедливым.

3. Рассмотрим доминирование линейной части определяющих соотношений (XIII. 1.4):

$$\gamma_i = \frac{1}{2\mu} \tau_i. \quad (\text{XIII. 2.13})$$

Можно ввести безразмерные величины

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\tau}_i = \frac{\tau_i}{\mu},$$

где L, T – некоторые характерные длина, время соответственно. Из проведенного анализа размерностей следует, что

$$L = \frac{v}{A\mu^m}, \quad T = \frac{L}{v}.$$

Поля эффективных напряжений и параметра поврежденности представим в виде:

$$\frac{\hat{\tau}_i}{\psi}(\hat{r}, \theta) = \hat{r}^s f_i(\theta), \quad \psi(\hat{r}, \theta) = \hat{r}^\nu g(\theta). \quad (\text{XIII. 2.14})$$

Тогда полная система уравнений может быть сформулирована следующим образом:

уравнение равновесия:

$$f'_\theta g + f_\theta g' + (s + \nu + 1) f_r g = 0; \quad (\text{XIII. 2.15})$$

кинетическое уравнение:

$$\sin \theta g' - \nu \cos \theta g = -f^m(\theta); \quad (\text{XIII. 2.16})$$

условие совместности:

$$(s + 1)f_\theta = f'_r. \quad (\text{XIII. 2.17})$$

Решение системы (XIII. 2.15) – (XIII. 2.17) – системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций f_r , f_θ , g – подчиняется следующим граничным условиям:

условию симметрии:

$$f_r(\theta = 0) = 0, \quad (\text{XIII. 2.18})$$

условию отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$f_\theta(\theta = \pi) = 0, \quad (\text{XIII. 2.19})$$

условию регулярности решения уравнения (XIII. 2.16):

$$g(0) = \frac{(f_\theta(0))^m}{\nu}. \quad (\text{XIII. 2.20})$$

Так как система обыкновенных дифференциальных уравнений (XIII. 2.6), (XIII. 2.7) и (XIII. 2.17) является однородная, то наряду с функциями $f_r(\theta)$, $f_\theta(\theta)$, $g(\theta)$ функции $\kappa f_r(\theta)$, $\kappa f_\theta(\theta)$, $\kappa g(\theta)$, где $\kappa = \kappa(t)$ – некоторый постоянный коэффициент, также являются решениями. Поэтому, сводя задачу к начальной, вместо условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины $f_\theta(\theta = \pi) = 0$ сформулируем условие нормировки

$$f_\theta(0) = 1. \quad (\text{XIII. 2.21})$$

Численное решение этой задачи методом Рунге-Кутта-Фельдберга показывает, что невозможно подобрать собственное значение s такое, чтобы выполнялось граничное условие (XIII. 2.19), причем, начиная с некоторого значения угла $\theta = \theta_d$ функция $g(\theta)$ принимает отрицательные значения, что, вообще говоря, противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Для преодоления этой трудности предлагается следующая модификация постановки задачи. Вводим некоторое значение угла $\theta = \theta_d$ и предполагаем, что при $\theta_d < \theta \leq \pi$ значения функций $f_r(\theta)$, $f_\theta(\theta)$ и $g(\theta)$ нулевые, причем требование непрерывности решения приводит к дополнительным условиям

$$f_\theta(\theta = \theta_d) = 0, \quad (\text{XIII. 2.22})$$

$$g(\theta = \theta_d) = 0. \quad (\text{XIII. 2.23})$$

Численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (XIII. 2.6), (XIII. 2.7), (XIII. 2.17) на отрезке $[0, \theta_d]$ с граничными условиями (XIII. 2.18), (XIII. 2.22), (XIII. 2.23) позволяет сделать заключение о том, что поставленным граничным условиям удастся удовлетворить при значении угла $\theta_d = \pi/2$ и $s = 0$.

Анализ численного исследования показывает, что существует аналитическое решение этой задачи:

$$f_\theta(\theta) = \cos \theta, \quad f_r(\theta) = \sin \theta, \quad g(\theta) = \cos \theta \quad (\text{XIII. 2.24})$$

при $0 \leq \theta \leq \theta_d$. Тогда компоненты тензора напряжений можно представить в виде:

$$\frac{\tau_r}{\psi} = \mu \varkappa(t) \sin \theta, \quad \frac{\tau_\theta}{\psi} = \mu \varkappa(t) \cos \theta,$$

$$\psi = \frac{A}{v} \mu^m \varkappa^m(t) r \cos \theta. \quad (\text{XIII. 2.25})$$

Впервые эти поля напряжений и сплошности найдены в [2].

3. Асимптотический анализ "дальнего" поля напряжений

Рассмотрим соотношения для скоростей деформаций при достаточно больших r ($r \rightarrow \infty$). С этой целью оценим вклад упругого и вязкого слагаемых.

Предположим, что скоростями упругих деформаций можно пренебречь. Тогда поле напряжений имеет известное распределение Хатчинсона – Райса – Розенгрена и $\sigma_{ij} \sim r^\alpha$, где $\alpha = -1/(n+1)$. Принимая во внимание следующее из кинетического уравнения соотношение $\mu = 1 + \alpha t$, получаем, что $\mu > 0$ при $r \rightarrow \infty$, что, вообще говоря, противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Следовательно, предположение о том, что доминируют скорости деформаций ползучести, не является верным, и скоростями упругих деформаций пренебрегать нельзя.

Предположим теперь, что при достаточно больших r скорости упругих деформаций преобладают. В этом случае асимптотики будут совпадать с асимптотиками для линейно упругого тела, т.е. $\alpha = -1/2$. Как следует из определяющего соотношения, это предположение справедливо для $n > 3$, что соответствует большинству материалов, поскольку $3 < n < 12$. Следовательно, при достаточном удалении от вершины растущей трещины скоростями деформаций ползучести можно пренебречь.

4. Оценка скорости роста трещины

Для определения скорости роста трещины проанализируем выражения для параметра сплошности ψ , используя найденное решение в окрестности вершины трещины и граничные условия в бесконечно удаленной точке. В соответствии с полученным ранее решением задачи сформулируем выражение для параметра сплошности ψ в окрестности вершины трещины. Итак, при $r \rightarrow 0$

$$\psi = \frac{A}{v} \left(\frac{v}{BG} \right)^{m/(n-1)} r \cos \theta. \quad (\text{XIII. 4.1})$$

При достаточно больших r ($r \rightarrow \infty$) справедливо

$$\tau_r = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tau_\theta = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (\text{XIII. 4.2})$$

так что можно сформулировать выражение для параметра сплошности ψ , полученное путем интегрирования кинетического уравнения:

$$\psi = 1 - A \left(\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \right)^m r^{-m/2} t. \quad (\text{XIII. 4.3})$$

На границе этих двух областей (область, примыкающая к вершине подвижной трещины, где справедливо решение (XIII. 4.1), и область, где имеет место распределение (XIII. 4.2)) при некотором значении $r = r_*$ значения параметра ψ должны быть равны. Математическая формулировка этого условия представима в виде:

$$\psi^i(r_*) = \psi^e(r_*), \quad (\psi^i)'(r_*) = (\psi^e)'(r_*),$$

где ψ^i - решение, определяемое формулой (XIII. 4.1); ψ^e - решение, определяемое формулой (XIII. 4.3), где штрих означает дифференцирование по r .

Проведя ряд преобразований, получаем следующую оценку скорости роста трещины:

$$v = \left[\frac{1}{(B\mu)^m} \frac{K_{III}^4}{m\pi} \left(\frac{A(m+2)}{2} \right)^{(mn+2n-2)/m} t^{\frac{2}{m(n+1)}} \right]^{1/q}, \quad (\text{XIII. 4.4})$$

где $q = n - m - 1$.

5. Трещина нормального отрыва

Рассмотрим задачу о докритическом подрастании трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния в среде с поврежденностью.

По аналогии с трещиной типа III в случае трещины нормального отрыва определяющие соотношения для упругого нелинейно-вязкого материала в среде с поврежденностью в рамках связанной постановки задачи представим в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\psi} \right) - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\dot{\sigma}_{kk}}{\psi} \right) \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (\text{XIII. 5.1})$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скорости деформаций, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, B, n – постоянные степенного закона ползучести, δ_{ij} – символ Кронекера, $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений, $\sigma = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность напряжений. Введенный таким образом в рассмотрение параметр сплошности материала ψ [30, 12], для которого известно, что $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi(t=0) = 1$ удовлетворяет кинетическому уравнению, постулирующему степенной закон накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m, \quad (\text{XIII. 5.2})$$

где A, m – постоянные материала, определяемые экспериментально.

Найдем асимптотическое решение этой задачи, положив

$$\frac{\sigma_{rr}}{\psi}(r, \theta) = \alpha r^s f_{rr}(\theta), \quad \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\psi}(r, \theta) = \alpha r^s f_{\theta\theta}(\theta), \quad (\text{XIII. 5.3})$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{\psi}(r, \theta) = \alpha r^s f_{r\theta}(\theta), \quad \psi(r, \theta) = \beta r^\mu g(\theta),$$

где $\beta = A\alpha^m/\dot{\nu}$. Выпишем для этого необходимые уравнения и сформулируем граничные условия.

Анализ, аналогичный проведенному для трещины типа III, позволяет сделать вывод о том, что в определяющем соотношении (XIII. 5.1) нельзя пренебрегать скоростями упругих деформаций. В связи с этим рассмотрим предположение, согласно которому линейное слагаемое является доминирующим, тогда определяющее соотношение представим в

виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{\psi} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{\psi} \delta_{ij}. \quad (\text{XIII. 5.4})$$

Исходя из этого, сформулируем условие совместности деформаций, которое при данном предположении будет выглядеть следующим образом:

$$f''_{\theta\theta} - f''_{rr} - 2(f'_{rr} - f'_{\theta\theta}) + (s^2 + 2s - 2)(f_{rr} - f_{\theta\theta}) + 4sf_{r\theta} = 0. \quad (\text{XIII. 5.5})$$

Уравнения равновесия $\nabla \cdot \sigma = 0$ в полярной системе координат примут вид:

$$((s + \mu + 1)f_{rr} - f_{\theta\theta})g + g'f_{rr} + gf'_{rr} = 0, \quad (\text{XIII. 5.6})$$

$$((s + \mu + 2)f_{r\theta} + f'_{\theta\theta})g + g'f_{\theta\theta} = 0. \quad (\text{XIII. 5.7})$$

Кинетическое уравнение сохраняет свою форму:

$$\sin\theta g'(\theta) - \mu \cos\theta g(\theta) = -f^m(\theta), \quad (\text{XIII. 5.8})$$

где $f = (\sqrt{3}/2)\sqrt{(f_{rr} - f_{\theta\theta})^2 + 4f_{r\theta}^2}$ и $\mu = 1 + sm$. Система (XIII. 5.5) – (XIII. 5.8) представляет собой систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулируем для нее граничные условия: условия отсутствия поверхностных усилий:

$$f_{\theta\theta}(\pi) = 0, \quad f_{r\theta}(\pi) = 0; \quad (\text{XIII. 5.9})$$

условия симметрии:

$$f_{r\theta}(0) = 0, \quad f'_{rr}(0) = 0; \quad (\text{XIII. 5.10})$$

условие регулярности, вытекающее из кинетического уравнения:

$$g(0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m \frac{(f_{rr}(0) - f_{\theta\theta}(0))^m}{\mu}. \quad (\text{XIII. 5.11})$$

Методом пристрелки можно свести задачу к начальной. С этой целью заменим условия (XIII. 5.9) на требования:

$$f_{\theta\theta}(0) = a_1, \quad f_{r\theta}(0) = a_2. \quad (\text{XIII. 5.12})$$

Поскольку полученная система уравнений (XIII. 5.5) – (XIII. 5.8) является однородной, условия (XIII. 5.12) можно, нормируя, заменить на условия

$$f_{r\theta}(0) = a_1, \quad f_{\theta\theta}(0) = 1. \quad (\text{XIII. 5.13})$$

По аналогии со случаем трещины антиплоского сдвига приходим к необходимости изменения постановки задачи [116, 2], которая заключается в следующем: область, характеризующаяся значениями угла $\theta_d \leq \theta \leq \pi$, является областью полностью разрушенного материала, и равенства (XIII. 5.9) должны быть заменены соотношениями:

$$f_{\theta\theta}(\theta_d) = 0, \quad f_{r\theta}(\theta_d) = 0. \quad (\text{XIII. 5.14})$$

Численный анализ полученной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (XIII. 5.5) – (XIII. 5.8) с граничными условиями (XIII. 5.10), (XIII. 5.11), (XIII. 5.14) показывает, что удовлетворить требуемым условиям можно лишь при значениях $\theta_d = \pi/2$ и $s = 0$.

Анализ численного решения позволяет сделать вывод о существовании аналитического решения задачи:

при $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\frac{\sigma_{rr}}{\psi}(r, \theta) = 2G\kappa(t) \sin^2 \theta, \quad \frac{\sigma_{r\theta}}{\psi}(r, \theta) = 2G\kappa(t) \sin 2\theta,$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\psi}(r, \theta) = 2G\kappa(t) \cos^2 \theta, \quad \psi(r, \theta) = \frac{A}{v} G^m \kappa^m(t) r \cos \theta. \quad (\text{XIII. 5.15})$$

6. Область процесса накопления повреждений

Полученное решение задачи о докритическом росте трещин типа I и III в связанной постановке позволяет построить области процесса накопления повреждений.

Учитывая, что на границе области процесса накопления повреждений напряжения в окрестности вершины трещины (τ^i) и в бесконечно удаленной точке (τ^e) равны, получим уравнение границы области накопления повреждений.

Так, для трещины антиплоского сдвига $\tau = \sqrt{\tau_r^2 + \tau_\theta^2}$ и

$$\tau^i = \mu\kappa(t).$$

С другой стороны, как следует из известного решения линейной механики разрушения, имеем:

$$\tau^e = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

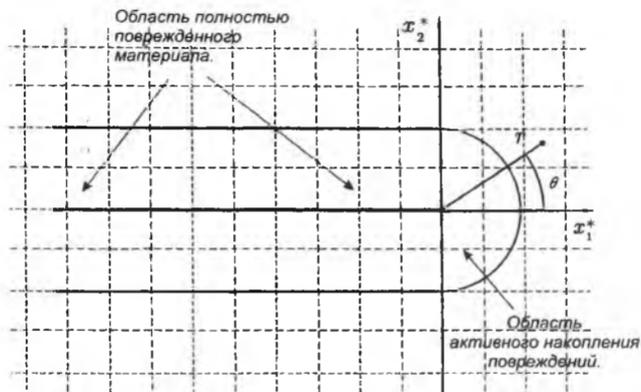


Рис. 71. Область процесса накопления повреждений, охватывающая вершину трещины и ее берега, для трещины типа III, где $x_1^* = 2\pi x_1 \left(\frac{\mu \chi(t)}{K_{III}} \right)^2$, $x_2^* = 2\pi x_2 \left(\frac{\mu \chi(t)}{K_{III}} \right)^2$

Тогда, приравнивая правые части этих уравнений, запишем следующее соотношение для границы области при $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

$$\hat{r} = 1,$$

где $\hat{r} = 2\pi r \left(\frac{\mu \chi(t)}{K_{III}} \right)^2$ – безразмерная переменная. Очевидно, что полученное уравнение для границы области накопления повреждений является дугой окружности.

Поскольку трещина распространяется, то граница области полностью поврежденного материала представляет собой дугу окружности и две прямые, параллельные линии трещины (рис. 71).

Для трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния интенсивность напряжений определяется формулой:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2}.$$

Тогда, в силу решения (XIII. 5.15), при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ справедливо

$$\sigma^i = 2\sqrt{3}G\chi(t),$$

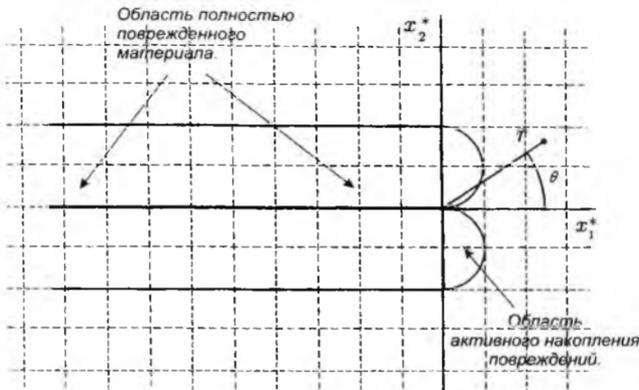


Рис. 72. Область процесса накопления повреждений, охватывающая вершину трещины и ее берега, для трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния, где $x_1^* = \left(\frac{4\sqrt{3}\pi G \varkappa(t)}{K_I}\right)^2 x_1$, $x_2^* = \left(\frac{4\sqrt{3}\pi G \varkappa(t)}{K_I}\right)^2 x_2$

а из линейной механики разрушения известно, что

$$\sigma^e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta.$$

Приравнивая эти выражения для интенсивностей напряжений, получаем уравнение границы области процесса:

$$\hat{r} = \sin^2 \theta,$$

где $\hat{r} = \left(\frac{4\sqrt{3}\pi G \varkappa(t)}{K_I}\right)^2 r$ – безразмерная переменная.

Известно, что для трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния интенсивность напряжений определяется формулой:

$$\sigma = \sqrt{3} \sqrt{\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 + 3\sigma_{r\theta}^2}.$$

Тогда, проводя аналогичный анализ, найдем уравнение границы области процесса:

$$\hat{r} = \left(1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

где $\hat{r} = \left(\frac{16\pi\sqrt{3}G \varkappa(t)}{K_I}\right)^2 r$.

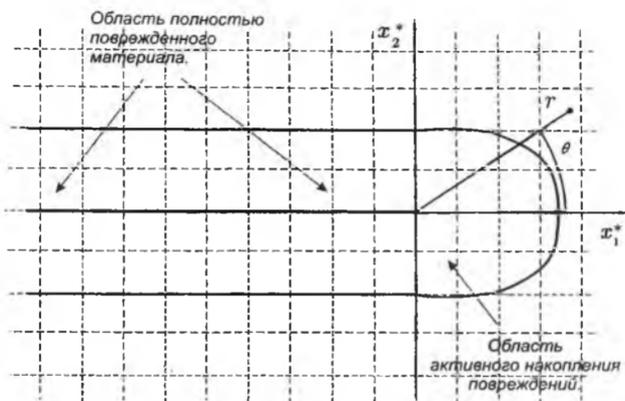


Рис. 73. Область процесса накопления повреждений, охватывающая вершину трещины и ее берега, для трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния, где $x_1^* = \left(\frac{16\pi\sqrt{3}G\chi(t)}{K_I} \right)^2 x_1$, $x_2^* = \left(\frac{16\pi\sqrt{3}G\chi(t)}{K_I} \right)^2 x_2$

Границы областей активного накопления повреждений представлены на (рис. 72, 73).

Таким образом, в настоящем разделе:

1) проанализированы поля напряжений, скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести, а также скалярный параметр сплошности в окрестности растущих трещин антиплоского сдвига и нормального отрыва в упругом нелинейно-вязком материале;

2) показано, что скоростями упругих деформаций в окрестности вершины растущей трещины пренебрегать нельзя по сравнению со скоростями деформаций ползучести;

3) проведено исследование "дальнего" поля напряжений (распределение напряжений при больших расстояниях от вершины трещины). Для чего дан сравнительный анализ скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести при $r \rightarrow \infty$. Установлено, что скорости упругих деформаций вносят основной вклад в асимптотическое поле скоростей деформаций;

4) дана оценка скорости роста трещины;

5) определена конфигурация области накопления повреждений в окрестности вершины трещины типа III и типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояния.

7. Задачи

1. Сравните полученное решение с решением Хью – Риделя для растущей трещины в упругом нелинейно-вязком материале.
2. Получите приведенные уравнения, определяющие границы областей накопления повреждений, для трещин нормального отрыва в условиях плоского напряженного и плоского деформированного состояний.

Именной указатель

- Амазиго Дж., 163
Аравас Н., 100, 163
Ахеузер М., 7
Баренблатт Г.И., 8
Бассани Дж., 163
Блазо Д.А., 100, 163
Будянский Б., 155
Вестергард Х., 8
Герберич В., 6, 8
Гросс Д., 7, 163
Зоу З., 163
Зубов Л.М., 155
Ирвин Дж. Р., 8, 69
Йю С., 163
Качанов Л.М., 6
Кондратьев В.А., 41
Коскинен М.Ф., 71
Леонов М.Я., 8
Ли Ж., 32
Макклинток Ф.А., 69
Максвелл, 155
Морозов Е.М., 6, 8
Морозов Н.Ф., 6
Мураками С., 198
Мухелишвили Н.И., 8
Нейбер Г., 71
Нетер Э., 155, 157, 158
Нотт Дж. Ф., 6
Ноулс Дж., 155, 158, 159
Парис П., 194
Партон В.З., 6
Работнов Ю.Н., 8
Райс Дж., 7, 67, 71, 143, 155, 161, 163
Решо Н., 32
Ридель Х., 213
Розенгрэн Дж. Ф., 143
Саврук М.П., 8
Сандерс Дж.Л., 155
Слепян Л.И., 6
Снеддон И., 8
Стернберг И., 155, 158, 159
Уильямс М., 8, 28, 41, 51, 136
Хальт Дж., 71
Хатчинсон Дж.В., 143
Хеллан К., 6
Хилл Р., 61
Хьюи С., 196
Чен Д., 144
Черепанов Г.П., 6, 8, 155
Эйфантис И., 6, 8
Эллиот Х., 8
Эрдоган Ф., 194
Эшелби Дж., 155, 157
Юшиджима К., 144

Литература

- [1] Албаут, Г.Н. Нелинейная фотоупругость в приложении к задачам механики разрушения/Г.Н. Албаут. – Новосибирск: НГАСУ, 2002. – 112 с.
- [2] Астафьев, В.И. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести/В.И. Астафьев, Т.В. Григорова, В.А. Пастухов// ФХММ. – 1992. – Т. 28. – №1. – С. 5-11.
- [3] Астафьев, В.И. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины/В.И. Астафьев, Т.В. Григорова// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 1995. – №3. – С. 160-166.
- [4] Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения/ В. И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара.: Изд-во "Самарский университет", 2001. – 632 с.
- [5] Баренблатт, Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины/Г.И. Баренблатт// Прикладная механика и математика. – 1959. – Т. XXIII. – №3. – С. 434-444.
- [6] Баренблатт, Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках/Г.И. Баренблатт// Прикладная механика и математика. – 1959. – Т. XXIII. – №4. – С. 706-721.
- [7] Баренблатт, Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями/Г.И. Баренблатт// Прикладная механика и математика. – 1959. – Т. XXIII. – №4. – С. 706-721.
- [8] Брок, Д. Основы механики разрушения/Д. Брок. – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.

- [9] Вильдеман, В.Э. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов/В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
- [10] Зубов, Л.М. О дислокациях Вольтерра в нелинейно-упругих телах/Л.М. Зубов//Докл. АН СССР. МТТ. – 1986. – Т. 287. – №3. – С. 579-582.
- [11] Зубов, Л.М. Теория дислокаций Вольтерра в нелинейно-упругих телах/Л.М. Зубов//Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – №5. – С. 140-147.
- [12] Качанов, Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести/Л.М. Качанов// Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – С. 26-31.
- [13] Качанов, Л. М. Основы механики разрушения/Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
- [14] Коскинен, М.Ф. Уругопластическая деформация плоской пластины с одиночным надрезом при продольном сдвиге/М.Ф. Коскинен//Техническая механика. – 1963. – №4. – С. 127.
- [15] Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного/М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
- [16] Левин, В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения/В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2004. – 408 с.
- [17] Леонов, М.Я. Механика деформаций и разрушения. Физико-математические основы теории/М.Я. Леонов. – Фрунзе. Изд-во "Илим", 1981. – 236 с.
- [18] Матвиенко, Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения/Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
- [19] Морозов, Н.Ф. Математические вопросы теории трещин/Н.Ф. Морозов. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
- [20] Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости/Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
- [21] Найфе, А. Х. Введение в методы возмущений/А.Х. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

- [22] Нейбер, Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации/Г. Нейбер// Сб. перев. и обз. ин. период. лит. – 1961. – №4. – С. 71.
- [23] Нетер, Э. Инвариантные вариационные задачи/Э. Нетер// Вариационные принципы механики: Сборник классиков науки/ под ред. Л.С. Полак. – М.: Физматлит, 1959. – 932 с.
- [24] Нетер, Э. Инварианты любых дифференциальных выражений/Э. Нетер// Вариационные принципы механики: Сборник классиков науки/ под ред. Л.С. Полак. – М.: Физматлит, 1959. – 932 с.
- [25] Нотт, Дж. Ф. Основы механики разрушения/Дж. Ф. Нотт. – М.: Металлургия, 1978. – 256 с.
- [26] Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения/В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
- [27] Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения/В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
- [28] Пестриков, В.М. Механика разрушения твердых тел/В.П. Пестриков, Е.М. Морозов. – СПб.: Профессия, 2002. – 320 с.
- [29] Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела/Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
- [30] Работнов, Ю. Н. О механизме длительного разрушения/ Ю.Н. Работнов// Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5-7.
- [31] Райс, Дж. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упруго-пластическом материале при продольном сдвиге/ Дж. Райс//Труды Американского общества инженеров-механиков. – Серия Е. – Прикладная механика. – 1967. – №2. – С. 32-46.
- [32] Райс, Дж. Математические методы в механике разрушения/Дж. Райс//Разрушение: Т. 2: Математические основы теории разрушения/ под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975. – С. 204-335.
- [33] Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами/М.П. Саврук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.

- [34] Седов, Л.И. Механика сплошной среды: Т. II. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
- [35] Слепян, Л.И. Механика трещин/Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1990. – 296 с.
- [36] Степанова, Л.В. Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом материале/Л.В. Степанова//Вестник СамГУ. – 2002. – №2(24). – С. 78-84.
- [37] Степанова, Л.В. Влияние скоростей упругих деформаций на докритический рост трещины в упругом нелинейно-вязком материале/Л.В.Степанова, Ю.Н. Устина// Вестник СамГУ. – 2002. – №4(26). – С. 84-100.
- [38] Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений/Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. М.: Мир, 1980. – 280 с.
- [39] Хальт, Я. Упруго-пластическое распределение напряжений и деформаций вокруг острой выточки при продольном сдвиге/Я. Хальт, Ф. Мак-Клинтон// Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит. – 1959. – №6.
- [40] Хеллан, К. Введение в механику разрушения/К. Хеллан. – М.: Мир, 1988. – 364 с.
- [41] Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения/Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
- [42] Черепанов, Г.П. Инвариантные Г-интегралы и их приложения/Г.П. Черепанов// ПММ. – 1977. – Т. 41. – Вып. 3. – С. 399-412.
- [43] Черных, К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин/ К.Ф. Черных. – М.: Наука, 1996. – 288 с.
- [44] Шифрин, Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения/Е.И. Шифрин. – М.: Физматлит, 2002. – 368 с.
- [45] Aifantis, E.C. A new form of exact solutions for Mode I, II, III crack problems and implications/E. C. Aifantis, W.W. Gerberich// Engn. Fracture Mechanics. – 1978. – V. 10. – P. 95-108.

- [46] Amazigo, J.C. Fully plastic crack in an infinite body under anti-plane shear/ J.C. Amazigo//Intern. J. Solids Struct. – 1974. – V.10. – P. 1003-1015.
- [47] Anheuser, M. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear/ M. Anheuser, D. Gross//Archive of Applied Mechanics. – 1994. – V. 64. – P. 509-518.
- [48] Aravas, N. Higher order terms in asymptotic elastoplastic mode III crack tip solutions/N. Aravas, D.A. Blazo//Acta Mechanica. – 1991. – V. 90. – P. 139-153.
- [49] Atkinson, C. Some boundary-value problems for the equation $\nabla \cdot (|\nabla\phi|^N \nabla\phi) = 0$ /C. Atkinson, C.R. Champion//Q. J. Mech. Appl. Math. – 1984. – V. 37. – P. 401-419.
- [50] Bassani, J.L. Notch tip stress due to in a creep solid/J.L. Bassani//ASME Journal of Applied Mechanics. – 1984. – V. 51. – P. 475-480.
- [51] Betegon, C. Two parametric characterization of elastic-plastic crack-tip fields/C. Betegon, J.W. Hancock// ASME J. Appl. Mech. – 1991. – V. 58. – P. 104-110.
- [52] Budiansky, B. Conservation laws and energy-release rates/B. Budiansky, J.R. Rice// Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1973. – V. 40. – №1. – P. 201-203.
- [53] Chao, Y.J. Higher-order asymptotic crack-tip fields in a power-law creeping material/Y.J. Chao, X.K. Zhu, L. Zhang// Int. J. Solids Structures. – 2001. – V. 38. – №21. – P. 3853-3875.
- [54] Chao, Y. Higher order crack tip field and its application for fracture of solids under mode II conditions/Y. Chao, S. Yang//Engn. Fracture Mechanics. – 1996. – V. 54. – №3. – P. 405-422.
- [55] Chen, D.H. Plastic stress singularity near the tip of a V-notch/D.H. Chen, K. Ushijima//Int. J. Fracture. – 2000. – V. 106. – P. 117-134.
- [56] Chen, Y.Z. Closed form solutions of T-stress in plane elasticity crack problems/Y.Z. Chen// Int. J. Solids Structures. – 2000. – V. 37. – P. 1629-1637.
- [57] Chow, C.L. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics/C.L. Chow, J. Wang//Int. J. of Fracture. – 1987. – V. 33. – P. 3-16.

- [58] Chow, C.L. Ductile fracture characterization with an anisotropic continuum damage theory/C.L. Chow C.L., J. Wang// *Engn. Fracture Mechanics*. – 1988. – V. 30. – P.547-563.
- [59] Edmunds, T.M. Matched asymptotic expansions in nonlinear fracture mechanics -I. Longitudinal shear of an elastic perfectly-plastic specimen/T. M. Edmunds, J.R. Willis//*J. Mech. Phys. Solids*. – 1976. – V 24. – P. 205-223.
- [60] Edmunds, T.M. Matched asymptotic expansions in nonlinear fracture mechanics – II. Longitudinal shear of an elastic work-hardening plastic specimen/T.M. Edmunds, J.R. Willis//*J. Mech. Phys. Solids*. – 1976. – V 24. – P. 225-237.
- [61] Edmunds, T.M. Matched asymptotic expansions in nonlinear fracture mechanics – III. Longitudinal shear of an elastic perfectly plastic symmetric specimen/T.M. Edmunds, J.R. Willis//*J. Mech. Phys. Solids*. – 1977. – V. 25. – P. 423-455.
- [62] Eshelby, J.D. The continuum theory of lattice defects/J.D. Eshelby// *Solids State Physics*. N.Y.: Acad. Press. – 1956. – V 3. – P. 79-144.
- [63] Fett, T. A compendium of T-stress solutions/T. Fett//*Forschungszentrum Karlsruhe*. – Report FZKA 6057. – 1998. – 72 p.
- [64] Freund, L.B. Dynamic fracture mechanics/L.B. Freund. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 563 p.
- [65] Gao, Y.C. Damage field near a stationary crack tip/Y.C. Gao, H.D. Bui//*Int. J. Solids Structures*. – 1995. – V. 32. – №14. – P. 1979-1987.
- [66] Gross, D. The singular fields near a sharp notch with mixed boundary conditions for hardening materials under longitudinal shear/D. Gross, S.W. Yu// *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 1987. – V. 8. – P. 199-203.
- [67] Hamam, R. Mode I fatigue crack growth under biaxial loading/R. Hamam, S. Pommier, F. Bumbieler// *Int. J. Fatigue*. – 2005. – V. 27. – P. 1342-1346.
- [68] Hill, R. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets/R. Hill// *J. Mech. phys. Solids*. – 1952. – V 1. – P. 19-30.

- [69] Hui, C.Y. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions/C.Y. Hui, H. Riedel// Int. J. of Fracture. – 1981. – V. 17. – P. 409-425.
- [70] Hui, C.Y. The mechanics of self-similar crack growth in an elastic power-law creeping material/C.Y. Hui//Int. J. Solids Structures. – 1986. – V. 22. – №4. – P. 357-372.
- [71] Hui, C.Y. Why K? High order singularities and small scale yielding/C.Y. Hui, A. Ruina// Int. J. of Fracture. – 1995. – V. 72. – P. 97-120.
- [72] Hutchinson, J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material/J.W. Hutchinson// J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V. 16. – P.13-31.
- [73] Hutchinson, J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip/J.W. Hutchinson// J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V. 16. – P. 337-349.
- [74] Irwin, G.R. Discuss and author's closure of [14]/G.R. Irwin, M.F. Koskinen//Journal of Basic Engineering. Trans. ASME, Series D. – 1963. – V. 85. – P. 593-594.
- [75] Irwin, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate/G. R. Irwin// J. Appl. Mech. – 1957. – V. 24. – P. 361-364.
- [76] Irwin, G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force/G. R. Irwin// Proc. IX Internat. Congr. Appl. Mech. Brussels. – 1957. – P. 245-251.
- [77] Irwin, G.R. Fracture/G. R. Irwin// "Handbuch der Physik". Bd. VI. – Berlin. – Springer. – 1958. – P. 551-590.
- [78] Jeon, I. The role of higher order eigenfields in elastic-plastic cracks/I. Jeon, S. Im// J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – V. 49. – P. 2789-2818.
- [79] Jin, Z.H. Crack shielding and material deterioration in damaged materials: an antiplane shear fracture problem/Z.H. Jin, R.C. Batra// Arch. Appl. Mech. – 1998. – №68. – P. 247-258.
- [80] Kachanov, L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics/L.M. Kachanov. – Dordrecht, Boston: Martinus Nijhoff, 1986. – 135 p.

- [81] Kim, J. Y. A tensile crack in creeping solids with large damage near the crack tip/J.Y. Kim, S.B. Lee// Int. J. of Fracture. – 2001. – V. 112. – P. 43-55.
- [82] Knowles, J.K. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics/J.K. Knowles, E. Sternberg// Arch. Rat. Mech. Anal. – 1972. – V. 44. – №3. – P. 187-211.
- [83] Leblond, J.B. Mecanique de la rupture fragile et ductile/J.B. Leblond. – Paris, Hermes Science Publications, 2003. – 196 p.
- [84] Lee, S.B. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Part I. Small damage region around the crack tip/S.B. Lee, M. Lu, J.Y. Kim//Int. J. Solids Structures. – 1997. – V. 34. – №24. – P. 3163-3178.
- [85] Lee, S.B. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Part II. Large damage region around the crack tip/S.B. Lee, M. Lu, J.Y. Kim, H.C. Mai//Int. J. Solids Structures. – 1997. – V. 34. – №10. – P. 1183-1197.
- [86] Lemaitre, J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equation/J. Lemaitre// Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 1985. – V. 51. – P. 31-49.
- [87] Li, J. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture/J. Li, N. Recho. – Paris, Hermes Science Publications, 2002. – 262 p.
- [88] Longhin, A. A nonlinear finite element eigenanalysis of antiplane shear including higher order terms/A. Longhin, N. Zhang, P. Joseph// Engn. Fracture Mechanics. – 2000. – V. 66. – №5. – P. 441-454.
- [89] McClintock, F.A. Plasticity aspects of fracture mechanics/McClintock F.A., Irwin G.R.// "Fracture toughness testing and its application" STR 381. – Philadelphia, 1965. – P. 84-113. (Имеется русский перевод: в сб. "Прикладные вопросы вязкости разрушения". – М.: Мир, 1968)
- [90] Murakami, S. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics/S. Murakami, Y. Liu, M. Mizuno// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2000. – V. 183. – P. 15-33.
- [91] Murakami, S. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth/Murakami S., Hirano T., Liu Y.//Int. J. Solids Struct. – 2000. – V. 37. – P. 6203-6220.

- [92] Nguyen, B.N. On Higher-Order Crack-Tip Fields in Creeping Solids/B.N. Nguyen, P.R. Onck, E. Van Der Giessen// Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2000. – V 67. – №2. – P. 372-382.
- [93] Nikishkov, G.P. An algorithm and a computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack tip stress and displacement fields/G.P. Nikishkov// Engn. Fracture Mechanics. – 1995. – V. 50. – №1. – P. 65-83.
- [94] Rice, J.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material/J.R. Rice// J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V 16. – P.1-12.
- [95] Rice, J.R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material/J.R. Rice, G.F. Rosengren// J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V 16. – P. 32-48.
- [96] Rice, J.R. Contained Plastic Deformation Near Crack and Notches Under Longitudinal Shear/J.R. Rice//Int. J. of Fracture Mech. – 1966. – V 2. – No. 2. – P. 426-446.
- [97] Rice, J.R. Limitations to the small scale yielding approximation of elastic-plastic crack-tip fields/J.R. Rice// J. Mech. Phys. Solids. – 1974. – №22. – P. 17-26.
- [98] Riedel, H. Crack loaded in antiplane shear under creep condition/H. Riedel// Z. Metallkunde. – 1978. – V. 69. – P. 755-760.
- [99] Sanders, J.L. On the Griffiths-Irwin fracture theory/J.L. Sanders// Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1960. – V. 27. – №2. – P 352-353.
- [100] Sneddon, I.N. The distribution of stress in the neighborhood of a crack in elastic solid/I.N. Sneddon// Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – V 187. – P 229-260.
- [101] Sneddon, I.N. Fourier transforms/I.N. Sneddon. – N.Y., 1951. (Имеется русский перевод. Снеддон, И. Преобразования Фурье. – М.: Иностранная литература, 1966. – 667 с.
- [102] Sneddon, I.N. The opening of a Griffith crack under internal pressure/I.N. Sneddon, H.A. Elliot// Quart. Appl. Math. – 1946. – V 4. – №3. – P. 262-267.

- [103] Song, C. Evaluations of power-logarithmic singularities, T-stresses and higher order terms of in-plane singular stress fields at cracks and multi-material corners/C. Song// *Engr. Fracture Mech.* – 2005. – V. 72. – P. 1498-1530.
- [104] Sotiropoulou, A. Analytic parametric solutions for the HRRnonlinear elastic field with low hardening exponents/A. Sotiropoulou, N. Panayotounakou, D. Panayotounakos// *Acta Mechanica.* – 2006. – V. 183. – P. 209-230.
- [105] Su, R.K.L. Accurate determination of mode I and II leading coefficients of the Williams expansions by finite element analysis/R.K.L. Su, W.J. Feng// *Finite Element in Analysis and Design.* – 2005. – V. 41. – P. 1175-1186.
- [106] Tong, J. T-stress and its implications for crack growth/ J. Tong// *Engr. Fracture Mechanics.* – 2002. – V. 69. – P. 1325-1337.
- [107] Weertman, J. Mode III crack in power law hardening solid/ J. Weertman// *Int. J. of Fracture.* – 2005. – V. 42. – P. 2011-2032.
- [108] Westergaard, H.M. Bearing pressures and cracks/ H.M. Westergaard// *J. Appl. Mech.* – 1939. – V. 6. – №2. – P. A49-A53.
- [109] Westergaard, H.M. Stress at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete/ H.M. Westergaard// *J. Amer. Concr. Inst.* – 1933/1934. – V. 5. – №2. – P. 93-102.
- [110] Williams, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack/M. L. Williams// *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1957. – V. 24. – P. 109-114.
- [111] Willis, J.R. Asymptotic analysis in fracture: an update/J.R. Willis// *Int. J. of Fracture.* – 1999. – V. 100. – P. 85-103.
- [112] Yuan, F.G. Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear/F.G. Yuan, S. Yang// *Int. J. of Fracture.* – 1995. – V. 69. – P. 1-26.
- [113] Yang, S. Higher order asymptotic elastic-plastic crack-tip fields under antiplane shear/S. Yang, F.G. Yuan, X. Cai// *Engr. Fracture Mechanics.* – 1996. – V. 54. – №3. – P. 405-422.

- [114] Yu, S.W. Singular fields of a mode III interface crack in a power law hardening bimaterial/S.W. Yu, Z. G. Zhou// *Int. J. of Fracture*. – 1992. – V. 57. – P. 325-347.
- [115] Xia, L. Higher-order analysis of crack tip fields in elastic power-law hardening material/L. Xia, T.C. Wang, C.F. Shih// *J. Mech. and Phys. Solids*. – 1993. – V. 41. – №4. – P. 665-687.
- [116] Zhao, J. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics/J. Zhao, X. Zhang// *Engn. Fracture Mechanics*. – 1995. – V. 50. – №1. – P. 131-141.
- [117] Zhao, J. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage/J. Zhao, X. Zhang// *Int. J. of Fracture*. – 2001. – V. 108. – P. 383-395.

Учебное издание

Степанова Лариса Валентиновна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Ю.В. Яценко
Корректор Ю.В. Яценко
Компьютерная верстка, макет Л.В. Степанова

Подписано в печать 11.12.2006.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 13,46; уч.-изд. л. 14,5.
Гарнитура Times. Тираж 100 экз. Заказ № 1319
Издательство «Самарский университет»
443011, Самара, ул. Ак. Павлова, 1 Тел. (846)3345423
Отпечатано на УОП СамГУ