ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра высшей математики и информатики

В.М. Долгополов, И.Н. Родионова. В.В. Бондаренко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Издательство «Уииверс групп»
2004

Печатается по решению Редащионно-издателъского совета
Самарского государственного университета

ББК 22.141
УДК 517.55
Д641

Долгополов В.М., Родионова И.Н., Бондаренко В.В. Математический анализ: Учеб. пособие. Самара: Издательство «Упиверс-групп», 2004. 111 с.

ISBN 5-467-00036-5

Настоящее пособие является первой частью курса лекций по математическому анализу, читаемых студентам СамГУ. Она включает в себя разделы:

- действительные числа. Элементарные функции,
- предан последовательности,
- предел функции,
- непрерывные функции;

и представляют подробное изложение изучаемого материала. В ходе лекций студентам даются рекомендации и упражнения для самостоятельной работы. В конце предлагаются вопросы для самопроверки, включаемые преподавателями в материалы коллоквиумов и экзаменационные билеты.

ББК 22.141
УДК 517.55

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко

Отв. редактор: д-р физ.-мат. наук, проф. Л.А. Сараеь

ISBN 5-467-00036-5

Основное понятие, с которым мы сталкиваемся на каждом шагу в любой естественнонаучной или технической области знания, - это понятие "величии" Под величиной понимается все то, что может быть измерено и выражено числом. Математический анализ — раздел высшей математики — занимается переменными величинами в их взаимозависимости.

Часть I

Действительные числа. Элементарные функции

§1.1. Множества и операции над ними

Понятие множества принадлежит к числу тех основных понятий математики, которые не поддаются логическому определению, сведению к более простым понятиям. Можно только разъяснить смысл этого понятия на ряде примеров. Под множеством мы понимаем совокупность объектов любой природы. "Многое, мыслимое нами как единое"(Кантор). Объекты, составляющие данное множество, называются его элементами. Множества будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *A,B,C,... ,X,Y,* а их элементы - малыми буквами: *a, Ь.,* г.,..., *x, y.* Принадлежность элемента *a* множеству *A* обозначается символом: *a,* £ *A.* Наоборот, *Ь* <£ *B* - элемент *Ь* не принадлежит множеству *B.*

Задаются множества двумя способами:

1) перечислением элементов, составляющих данное множество, например Л = {1,2,3,8};

2) указанием свойств, которыми обладают элементы данного множества и только они: $A = \{x \mid$ свойства },

Множества, подразделяются на конечные и бесконечные. Число рыб в море, число песчинок в куче песка — это конечные множества. Множество прямых, проходящих через данную точку, множество окружностей, проходящих через две данные точки — бесконечные множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым, обозначается символом 0. Например, множество вещественных корней уравнения $x^1 + 1 = 0$ - пустое.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми множествами.

Z — множество целых чисел;

Z^+ — множество натуральных чисел;

Z~ — множество целых отрицательных чисел;

Q — множество рациональных чисел:

Ш — множество вещественных, или действительных чисел.

Для облегчения записи определений, формулировок теорем и т.д. введем логические символы (кванторы).

V — квантор общности, заменяется в словесных формулировках словами "всякий", "любой", "все"

3 — квантор существования, заменяется словами "существует", "найдется"

V   дизъюнкция, читается: "или"

Л — конъюнкция, читается: "и"

=> •- следует.

= — символ, обозначающий равенство по определению.

Например, *n*\ = 1 • 2 • 3 • ... • *n*. (Символом "п факториал" определим произведение всех натуральных чисел от 1 до гг включительно). Но примем по определению 0! — 1.

С помощью кванторов запишем определения некоторых множеств действительных чисел: сегмента, интервала, бесконечного полуинтервала:

[U , 6] = ; { I £ R | *a<x<b},*

{a,Ь) = *{xeШ* | *a<x<Ь},*

[o, +oo) =' *{x e Ж* | *x>a}.*

Операции над множествами:

1. Объединение: *A* U *B* =^f^ *{x* | *{x* G *A)* V *{x* e *B)}.*

2. Пересечение: *AПВ^* *{x* | *(x* G *A)* Л *{x* G *B)}.*

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

1. *AUA* = *A;* *AПA* = *A.*

2. AUB = *BUA;* *АГ)В* = *BnA.*

3. *AU0* = *A;* Л П 0 = 0.

4. Л U (B U C) = (Л и й) и *C;* Л П (75 П *C)* = *(AnB)П C.*

5. *А* П *{В* U *С)* = *{А* П Я) U *{А* П С).

Каждое из свойств доказывается на основании равенства двух множеств:

(А = В) = (УхеА^хеВ)А{\/х£В=>хе А).

Множество *А* называется подмножеством множества *В (А С В),* если каждый элемент множества *А* является элементом множества *В,* т.е.

(А С *В)* t/ (Va: *еА=>хеВ).*

<u>Задачи для самостоятельного решения.</u>

1. Есть ли разница между *а* и {а}?

2. Верна ли запись {1,2} С {{1,2,3}, {1,3}, 1,2}?

3. На факультете 100 студентов. Из них изучают иностранный язык: 25 - немецкий, 30 - английский, 20 - французский, 10 - немецкий и французский, 7 - немецкий и английский, 5 - французский и английский, 3 - немецкий, английский и французский. 1) Сколько студентов изучают только английский? только французский? только немецкий? 2) Сколько студентов не изучают ни одного языка? 3) Сколько студентов изучают немецкий язык <u>тогда и только тогда</u>, если они изучают французский?

В дальнейшем мы будем работать со множеством вещественных чисел К. Прежде, чем подойти к понятию вещественного числа, рассмотрим множество рациональных чисел, которое опишем с помощью ряда аксиом (I-V).

Рациональным числом назовем символ вида $\frac{mn}{}$. где *п* £ Z^+, *т* G Z.

(«*{=})•

I. Для элементов множества рациональных чисел введены операции сложения и умножения, обладающие свойствами:

1° *а* + *b* = *Ь* + а; *ab* = *Ьа* (переместительное свойство).

2° (а + *Ь)* + с = а + *(Ь* + с); *[ab)c* = *a(bc)* (сочетательное свойство).

3° *а(Ь* + с) = *ah* + *be* (распределительное свойство).

4° Во множестве рациональных чисел существуют нулевой и единичный элементы:

(30 G Q)(Vo 6 Q) => (а + 0 = а);

(31 €Q)(VaeQ)=> (о-1 = о).

5° Для каждого рационального числа *a* сутцествует противоположенный *a'* и обратный о$^{-1}$ элементы (о ^ 0):

(Vo e Q)(3a' G Q) => (a + a' = 0);

(Va e Q) Л (a ^ 0)(3a"^{1} € Q) => (a • a"^{1} = 1).

Из существования обратного элемента следует разрешимость уравнения вида *ax* = *Ь* во множестве рациональных чисел. (Предлагается читателю доказать этот факт самостоятельно). Множество, обладающее свойствами 1° — 5° называется <u>полем</u>. Множество рациональных чисел — поле.

П. Множество рациональных чисел - упорядоченное множество. Для его элементов введены понятия "равно", "больше", "меньше".

1° Для каждой пары рациональных чисел a и ft имеет место одно и только одно из соотношений: a = ft, *a* > ft, *a* < ft;

2° (a > ft) Л (ft > c) => *a,* > *c* (транзитивность неравенств);

3°a>b=>a + c>b + c

a > *b* => *ac> be,* если c > 0.

Множество Q — упорядоченное поле.

III. Множество рациональных чисел - плотное множество, т.е. между двумя неравными рациональными числами можно вставить рациональное число:

(Va e Q) Л (Vft e *Q)* Л *(a* < *b)(3c* e Q) => *(a* < *c* < ft).

IV. Аксиома Архимеда. Для любого положительного рационального числа *a* и любого рационального числа *b* найдется такое натуральное число *n,* что *n- a* > ft:

(Va e Q) Л (a > 0) Л (Vft e Q)(3n e *Z*$^+$*)* => *(na* > ft).

V. Рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби без 9 в периоде.

<u>Замечание</u>. Последняя оговорка нужна для однозначности представления, так как число -. например, можно было бы представить двумя способами:

_ = 0,5(0) и - = 0,49(9).

§1.2. Счетные множества

Рассмотрим бесконечные множества. Множество натуральных чисел Z^+ таково, что его элементы могут быть выписаны в последовательность в порядке возрастания: 1.2,3,..., *n,....*

<u>Определение 1.1.</u> Множества называются эквивалентными (А ~ *В),* если между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие.

Примеры.

1. Множество четных положительных чисел эквивалентно множеству Z^+. Действительно, поставим в соответствие каждому четному числу 2п натуральное число *n. (2n —>* п).

2. Множество нечетных положительных чисел эквивалентно множеству Z^+. (2// — 1 —> *n).*

3. Множество целых чисел Z эквивалентно множеству Z+ Выпишем множество целых чисел в последовательность так, чтобы за каждым положительным числом следовало равное ему по абсолютной величине отрицательное число:

   0,1.-1,2.-2,3,-3....,п,-гс,...

   и установим соответствие

   О -• 1Л -> 2, -1 -> 3, 2 -» 4, -2 -+ 5 ... *n* -»• 2г?„ -п -* 2п + 1,...

Определение 1.2. Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел (или: если его элементы могут быть выписаны в последовательность). Из примеров 1-3 следует, что множества Z^+, {2п}, *{2n—* 1}, Z - счетные.

Рассмотрим ряд теорем о счетных множествах.

Теорема 1.1. *Любое подмножество счетного множества либо конечное, либо счетное.*

(Без доказательства)

Следствие. Любое бесконечное подмножество счетного множества есть счетное множество.

Теорема 1.2. *Сумма конечного множества и счетного есть счетное множество.*

Для доказательства выпитием в последовательность элементы сначала конечного множества, а затем счетного. Получим последовательность.

Теорема 1.3. *Сумма конечного числа n счетных множеств есть множество счетное.*

Для доказательства выпишем в строки элементы каждого множества, получим бесконечную таблицу, состоящую из *n* строк

йц *й\2* • • • *Cllk* . . .
«21 «22 • •• *ª2k* • • •
«31 «32 • • • «3/с . . .

«n1 «n.2 • • • «nfc . . .

Затем последовательно будем выписывать элементы, стоящие на диагоналях: «и ,«2b«i2>«3b«22!«i3, • • • Таким образом, элементы всех *n* множеств будут выписаны в одну последовательность, то есть мы получили счетное множество. Вычеркнем из него повторяющиеся элементы, которых будет конечное множество. (Каждый элемент может входить в таблицу не более *n* раз). Если убрать из счетного множества, конечное множество, то получим счетное множество, что следует из теоремы 1.2.

Докажем, счетностъ множества рациональных чисел.

Рассмотрим сначала все положительные рациональные числа и составим бесконечную таблицу: в первую строку выпишем все числа со знаменателем 1, во вторую - со знаменателем 2, в третью - со знаменателем 3 и т.д.

1 2 3 1 5
1 1 Т 1 1 • • "
1 2 3 4 5
9 9 9 2 2 ' ' '
1 2 3 4 5
\ *III* Г'
t i l l Г"
5 5 5 5 6 " " '

Такая система удобна тем, что у элементов, стоящих на одной диагонали, сумма цифр числителя и знаменателя постоянна и равна $n + 1$, где n - номер диагонали и, при желании, можно вычислить порядковый номер любого элемента последовательности (например, число — стоит на 34-ой диагонали).

Выпишем элементы, стоящие на диагоналях в последовательность

1 1 2 1 2 3

1'2'T* 3' 2* T"""

Получим счетное множество *A,* из которого уберем повторяющиеся элементы 1,-.-.... В результате получим бесконечное подмножество множсства *A,* которое в силу теоремы 1.1 будет счетным.

Аналогично получаем, что множество отрицательных рациональных чисел — счетное. Чтобы получить множество рациональных чисел, надо сложить множества положительных, отрицательных рациональных чисел и множество, состоящее из одного элемента - нуля. Получаем сумму двух счетных множеств и одного конечного, что в силу теорем 1.2 и 1.3, есть счетное множество. Счетность множества Q доказана.

Геометрически рациональные числа изображаются точками числовой оси. Каждому рациональному числу соответствует точка оси, но не каждой точке числовой прямой отвечает рациональное число. Если от начальной точки числовой оси отложить отрезок, равный диагонали квадрата с единичной стороной, то концу отрезка не будет соответствовать никакое рациональное число.

Если в каждой рациональной точке зажечь "лампочку", то светящихся точек будет значительно меньше но сравнению с темными промежутками. Говорят, что множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности. Некоторые задачи, в частности задача, об измерении отрезков, во множестве рациональных чисел не разрешимы, что приводит к расширению этого множества.

§1.3. Постановка задачи об измерении отрезков

Требуется поставить в соответствие каждому отрезку Д число *f.i.A.* его меру. Причем это соответствие должно удовлетворять пяти условиям (аксиомам меры):

1° *цA* > 0;

2° Д1 с $Д_2$ => м^{д}1 < М^Л^;

3° (А = $Д_x$ и $Д_2$) л (Ai П A_2 = 0) ⇒• *цА* = *(j,Ai* + /1Д2, (отрезок А есть объединение двух отрезков, ие имеющих общих точек);

4° существует отрезок, длина которого равна 1. (ЭДо)(/./До = 1);

5° (Aj = $Д_2$) ⇒• /iAj = /,/$Д_2$.

Меру можно ввести не единственным способом, но так, чтобы условия 1° — 5° выполнялись.

Рассмотрим числовую ось и выберем на ней масштабный отрезок До- Пусть Д - произвольный отрезок. Если А соизмерим с До, то ему соответствует рациональное число — > 0 (ело мера), которое означает, что

л о   л   (л   *m* \
— укладывается в А *m* раз   *uA* = —   .
n   \   *n J*

Если Д несоизмерим с До, то он не имеет длины во множестве рациональных чисел и для решения задачи нужно рассматривать числа иной природы.

Пусть До укладывается в Д целое число ао раз с некоторым остатком. В силу аксиомы 2° можно записать а<> < *цА* < *ао* + 1. Разделим До на 10 частей, и пусть $\frac{Ао}{}$ укладывается в остатке О] число раз с некоторым остатком, т.е.

$$оо,ai < AtA < a,o,ai + 1$$

и так далее. В результате этого процесса получим бесконечную десятичную, вообще говоря, непериодическую дробь, которую и назовем длинной отрезка. А:

$$/лД = ао, aia_2a_3 \bullet \bullet \bullet а_„ ... \qquad (1)$$

(Если Д соизмерим с До, то дробь будет периодической). Рассмотрим символ, стоящий в правой части формулы (1).

Определение 1.3. Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь без девятки в периоде, т.е. символ вида:

$$a = ao,a,]\ 02 \ldots «„ \ldots,$$

где ао е Z, а; = 0.9.

Целая часть ао называется характеристикой действительного (или вещественного) числа *а,* дробная часть - мантиссой. В состав действительных чисел Е входят все рациональные числа (Q С Е), так как они представимы (в силу аксиомы V) в виде бесконечных десятичных дробей без девятки в периоде. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Они записываются в виде бесконечной непериодической дроби. Если множество рациональных чисел счетное, то множество иррациональных чисел не является счетным. Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой установлено взаимно однозначное соответствие.

§ 1.4. Сравнение действительных чисел

Рассмотрим два действительных числа

$$a = ao,a\text{-}\backslash a\%..\ .a_n...$$

и

$$(3 = b_0,b\text{-}_lb_2...b_T,....$$

1) *а* и /3 называются равными, если совпадают их целые части и все десятичные знаки:

$$(a = 0) \overset{f}{=} (y_n)(a_n = Ъ_n y,$$

2) $(a < p) \overset{f}{=}$ (3fc)(Vn < $к)(a_n = Ь_„)$ Л (о* < b_k).

Пример.

а = 2,582619... и /3 = 2,582825

Здесь *а* < *(3.* так как целые части и первые три десятичных знака совпадают, но четвертый десятичный знак у *ft* больше, чем у *а (к* = 4).

Для удобства сравнения отрицательных действительных чисел их записывают с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой, например -1.7 = 2,3(0) = -2 + 0,3(0).

Все аксиомы I - V множества Q справедливы и для множества *Ш*. *Ж* - упорядоченное, плотное поле. Множество вещественных чисел обладает еще и свойством непрерывности, которое отсутствует у множества рациональных чисел. Чтобы подойти к этому понятию, рассмотрим ограниченные множества.

§1.5. Ограниченные множества, точные грани (границы)

Определение 1.4. Множество *A* называется ограниченным сверху, если

(3MeM)(Vae *A) => (a < M)*

и ограниченным снизу, если

{Эт Ⱡ K)(Va e *A) => {a > m).*

Числа *Mam* называются соответственно верхней и нижней гранями (границами) множества *A*.

Определение 1.5. Множество *A* называется ограниченным, если оно ограниченно как сверху, так и снизу, т.е.

(ЭМ e R) Л (Эт G R)(Vo *& A)* ^ (т < *a* < *M).*

Или:

(ЭМ e R)(Va £ Л) ^ (|a| < M).

(Вес элементы множества по абсолютной величине не превосходят числа *M).*

Для ограниченного сверху (снизу) множества *A* существует бесконечное множество верхних (нижних) граней. Возникает вопрос, существует ли для ограниченного сверху множества наименьшая из верхних граней. Если такая существует, то она называется точной верхней гранью множества *A* и обозначается *sup A.* Дадим строгое определение точной верхней грани множества *A.*

Определение 1.6. *M** = *sap A,* если выполняются два условия:

1. (Vae/i)=>(a< M*);
2. (Ve > 0)(36 € *A)* ⇛ *{Ъ > M* - e).*

Второе условие может быть сформулировано иначе:

(V6<M*)(3ce *A)=>{c>Ь).*

Аналогично дается определение точной нижней грани множества *А,* как наибольшей из всех нижних границ. Обозначается inf *А*.

Определение 1.7. *m** = inf A если выполняется два условия:

1. (Vo 6 А) => *(а, > m*),*

2. (Ve > 0)(ЗЬ £ 4) ^ (6 < т Ч *с).*

Покажем на примере, что не всякое ограниченное множество имеет точные грани. Возьмем числовую прямую, выбросим из нее одну точку $x = a$ и рассмотрим множество *А* точек, лежащих слева от точки *а* (рис.1):

$$A = \{x \; e \; \mathrm{R} \;\; | \;\; x < a\}$$

Н——г

а *у* *х*

Рис. 1.

Очевидно, это множество ограничено сверху, его верхней границей является любое число *Ь* > *а.* Однако, множество *А* не имеет точной верхней границы. Действительно, Vy > *а* не является наименьшей верхней граиицей, так как число $\dfrac{a + y'}{}$ < *у* тоже является верхней границей множества. *А.* Никакое число $x < a$ не является верхней границей, так как элемент множества *А* $\dfrac{x \text{ Ҍ } d}{}$ > *х.* (Точней верхней границей множества *А* было бы число а, если бы оно существовало).

Таким образом, если множество "дырявое" (например, множество рациональных чисел), то из его ограниченности не следует существование точных граней этого множества. Говорят, что такое множество не обладает свойством непрерывности. Однако, для множества, действительных чисел имеет место

Теорема 1.4. **Свойство непрерывности.** *Всякое непустое, ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань принадлежащую множеству Ш.*

Доказательство проведем для ограниченного сверху множества

Е СШ.

Пусть *M* его верхняя граница. Возьмем любой элемент *a* е 1 a < *M* *a* = оо.ахаг . -. а„ .... Рассмотрим множество, состоящее из целых частей элементов множества *E.* Очевидно, что ао < *M.* Но ограниченное сверху множество целых чисел имеет наибольший элемент. Обозначим его *Щ.* Рассмотрим подмножество множества. *E,* элементы которого имеют вид: *ао.ща^* ...a_n — Среди первых десятичных знаков *a*\ выберем наибольший, обозначим его *Щ* и рассмотрим множество элементов вида: a_0,tt]«2 ... a_n.... Продолжая этот процесс, в результате получим число *a* = ао, О] 02. -. a_n .... Покажем, что *a* = sup *E.*

1) Возьмем Va € *E.* *a* = ао, ai02... *a„* .... Ясно, что ао < ab (по построению а). Если ао < ао, то а < *a,* если ао = ао, то а = *Щ,а,102...*a_n*...,* и мы сравним первые десятичные знаки: *a*\ <*a*\. Если *a*\ < *Щ,* то а < а, если aj = *a*\, то а = ао,аiа2...a_n....

Продолжая далее этот процесс сравнения соответсвующих десятичных знаков, получим одно из двух: либо найдется такой номер *к.* что *a к* < *Щ* и тогда а < *a,* либо (Vn)(а„. = a_n*)* ^> *(a = a).* Таким образом, доказано первое свойство точной верхней грани: (Va е *E) => (a < a).*

Докажем, что *a* наименьшая из всех верхних граней. Возьмем

{Ур£E)Л(р<a).

Пусть *(3 = ао,аi...аk--\hbk-\-i:* гАе *bk* < *Щ-* Рассмотрим элемент ао е *E* вида «о = *ао,а)...Щ-]аФк^1----* Очевидно ао > */3.*

Таким образом (V/3 < а)(3ао G *E)* =Ф (a$_0$ > *(3).* Теорема доказана.

Как производятся арифметические действия над вещественными числами известно из средней школы. Остановимся еще на одном понятии.

§1.6. Абсолютная величина числа

, „&// *d,d>0,*
Н = \-$_d$,*d<0.*

Из неравенства *a*\ < *(3 {(3* > 0) следует, что -/? < а < *(3.*

Докажем некоторые свойства абсолютной величины: *a+(3*\ < *a*\ + *(3*\. Действительно, складывая очевидные неравенства

— la! < а < lal,

-\P\<P<\P\..

получим

i\a\ + \P\) <a + P< \a\ +

откуда следует

\a + P\ < \a\ + \P\ (2)

Если в неравенстве (2) заменить ,в на —j3, то получим

\a - P\ < \a\ + \P\ (3)

Так как a = (a + P) — p, то |a| < |a + /3\ + \/3\, или

\a + p\ >\a\ - \p\ (4)

Аналогично

|a| -|,/3| <\a-p\

Так как одновременно и \P\ — \a\ <\a — P\, то

\a\ -\P\ < \a-P\ (6)

Все неравенства (2)-(6) будут использованы в теории пределов.

Определение 1.8. с-окрестностью точки a назовем интервал длиной 2e с центром в точке a. Или: множество вещественных чисел ж, удовлетворяющих неравенству \x — a\ < e.

§ 1.7. Необходимое и достаточное условия

Пусть A л B некоторые высказывания. Если из высказывания A следует высказывание B (A =>• B), то высказывание Б называется необходимым для A, A достаточным для B.

Если не выполняется необходимое условие B, то условие A тоже не выполняется:

(A=> B)^(B=>A).

Если не выполняется условие A., то это не означает, что условие Я не выполняется.

Если $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то каждое из условий является для другого необходимым и достаточным. Не выполнение одного из них влечет за собой но выполнение другого.

Пример. "Для того, чтобы число нацело делилось на 5 необходимо и достаточно, чтобы оно заканчивалось иа цифры 5 и 0." Если число не делится на 5, то оно не заканчивается ни на 5, ни на 0. И обратно, если число не заканчивается на 5 или 0, оно не делится на 5.

Одним из основных понятий математического анализа, является понятие функции.

§1.8. Понятие функции

Даны два множества X и Y Если каждому значению $x \in X$ по некоторому правилу или закону ставится в соответствие единственное определенное значение $y \in Y$, то говорят, что на множестве X определедена функция $y = f(x)$. Независимая переменная x называется также аргументом функции. Способы задания функции: аналитический, словесный (описательный), графический, табличный. Если функция задана в виде одной или нескольких формул, то говорят, что она задана аналитически.

Под областью определения аналитически заданной функции будем понимать то множество значений x, при которых формула не теряет смысла.

Пример 1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Очевидно, $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$. Областью определения данной функции является интервал $(-1; 1)$.

Пример 2. Зададим словесно функцию $y = [x]$ (целая часть от x). "Каждому $x \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее x". График функции $y = [x]$ имеет вид (рис. 2):

у

3

2

1

Рис. 2.

Пример 3. Функцию Дирихле также можно задать словесно: "Каждому рациональному числу поставим в соответствие единицу, каждому иррационапьному - нуль

$$D(x) = \begin{cases} 0, x — \text{иррац.}. \\ 1. x — \text{рацион.}. \end{cases}$$

Графика функция Дирихле не имеет.

Пример 4. "Каждому положительному вещественному числу поставим в соответствие единицу, отрицательному минус единицу, нулю нуль". Эту функцию (сигнум икс) можно задать несколькими формулами:

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, x < 0, \\ 0, x = 0, \\ 1, x > 0. \end{cases}$$

Ее график имеет вид (рис. 3):

П

1

О

Рис. 3.

§1.9. Простейшие элементарные функции

1) Степенная функция $y = x^{\circ}, x > 0, a$ е R. Предлагаем построить графики этой функции для $a = 1$, $a = 2$, а = 3, а = — 1. a = —2.

2) у = а* - показательная функция, а > О.а -*ф* 1,ж G R (рис. 4).

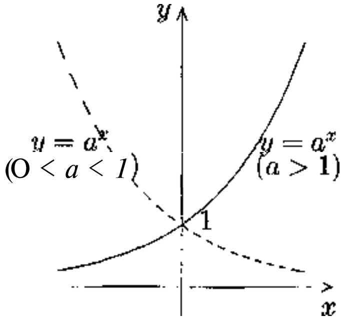


Рис. 4.

3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$, x > 0. а > 0, а ^ 1 (рис. 5).

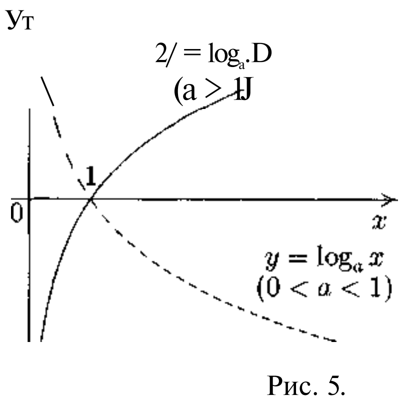


Рис. 5.

4) Тригонометрические функции:

;</ = sinir. y = cos ж, ж € R:

«/ = *tgx*, *х ф* — + 7ГП, п € Z

у = ^ ж . *хфжп,* п е Z;

(Графики этих функций не приводим, предлагаем их сделать самостоятельно).

5) Обратные тригонометрические функции:

-</= ахсмпж, |ж| < 1. |;</| < f; (рис. 6)

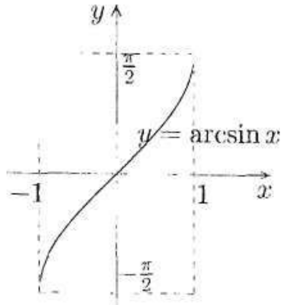


Рис. 6.

$y = \arccos x$, $|x| \le 1$, $0 \le y \le \pi$; (рис.7)

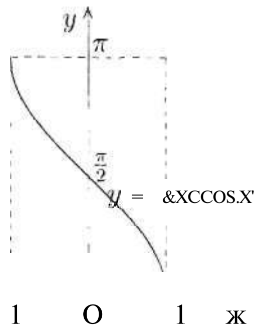


Рис. 7.

$y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$; (рис.

y

y = arctg x

Рис. 8.

$y = \operatorname{arcctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \pi$; (рис. 9)

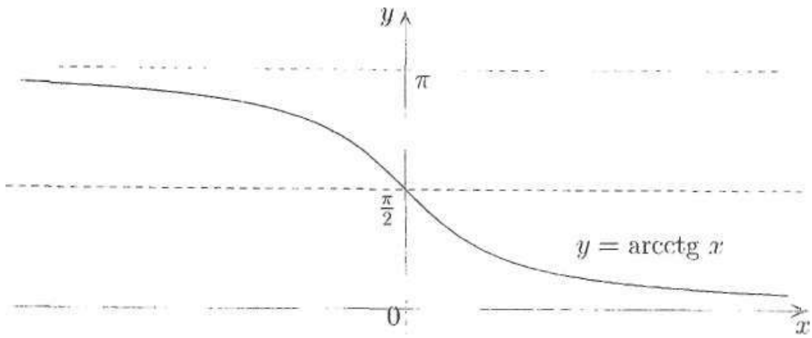


Рис. 9.

§ 1.10. Сложная функция

Пусть на множестве X задана функция $y = f\{x)$, а на множестве T - функция $x = <p(t)$. Причем W € T соответствующее значение x € X. Тогда говорят, что да множестве T задана сложная функция

$$y = ЫЩ = Ш)-$$

x промежуточное переменное, t независимое. Сложную функцию $У^=$ /[^(01 называют также суперпозицией (наложением) функций.

<u>Примеры</u>.

1)Функция y = $\cos^2 1$ есть суперпозиция функций y = *зг* и x = cos/.

2) y = sin/;^{2} суперпозиция функций y = sin.r и x = /^{2}.

3) y — In^2 sin \/*x*- является суперпозицией функций y — u^2, u = lni, / = sin г, z = y/x. u, t, z промежуточные переменные.

4) Формула y = arcsin(2 + t^2) не определяет никакой функции, т.к. x = 2 + t ми при каком t не попадает в область определения функции y = axcsinx, т.е. в [—1,1].

Задание. Разложить на простейшие элементарные функции

1) y — sin In $\frac{}{x}$,

2) y = arcsirr^e^),
введя промежуточные переменные.

Элементарной функцией называется функция, полученная из простейших элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз.

§ 1.11. Классы элементарных функций

I. Многочлен, или целая рациональная функция

$$y = P(x) — ao + a\backslash x + a\%x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

ao.ai,... ,a_n - постоянные, коэффициенты многочлена, n E Z+

II. Отношение двух многочленов

$$y \sim \frac{o_{,}o + ayx + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b]X + \ldots + Ь_m x^m}$$

называется дробно-рациональной функцией. Она определена для всех значений x, кроме тех, которые обращают знаменатель в нуль.

III. Иррациональные функции (добавляется действие извлечения корня). Например,

$$y \_ \frac{\text{^/Ш + уЩх)}}{\text{<Щх)}}$$

где $Q(x),R\{x),P\{x)$ - многочлены.

Определение 1.9. Функция $y = f(x)$ называется алгебраической, если она удовлетворяет соотношению

$$P_„(x) + P_{\jmath}\{x)y + \ldots + P_n(x)y^n = (1$$

где $Po(x),P\backslash(x),\ldots ;Pm,\{x)$ - многочлены.

Примеры.

1) *у = P(x)* - алгебраическая функция, действительно, она удовлетворяет соотношению *у — P{x)* = 0, где *P\{x)* = 1, *Po{x)* = *—P{x)*-

P{x)
2) *У* = ттг^г ~ алгебраическая функция, так как *у* • *Q(x) — P(x)* = О,
Ц{x)
где P,(ar) = Q(a;),Po(x) = -P(a;).

3) Иррациональная функция также является алгебраической. Докажем это для функции

$$y = y/PJx) + sjQ(x) =» y^2 = P(x) + (?(.т) + 2VP(x)Q(x)_;$$

$$(y^2 - P - Q)^2 = iP(x)Q(x) => y^4 - 2(P + Q)i/^2 + (P - Q)^2 = 0.$$

Функции, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными. Это: $y = a^x, y — x^a$, если a - иррациональное число, y — $\log_n$a;, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Иной раз, особенно в технических приложениях представляют интерес так называемые гиперболические функции.

1.12. Гиперболические функции

1° Гиперболический синус:

sha; =

определена, на (t-oo;+oo). функция нечетная, ее график имеет вид (рис. 10):

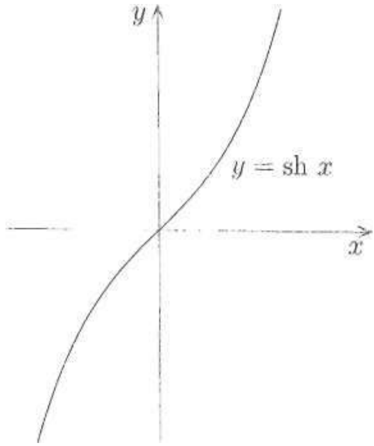


Рис. 10.

2° Гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2},$$

огтредеи на (—оо;+оо), функция четная, ее график имеет вид (рис. 11):

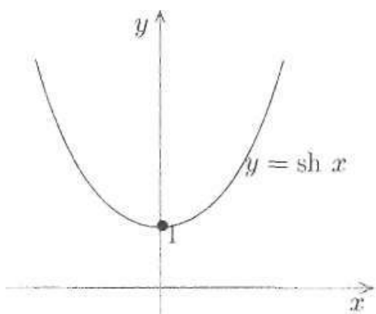


Рис. 11.

3° Гиперболический тангенс:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

определен на (—ос; +оо), функция нечетная, график (рис. 12)

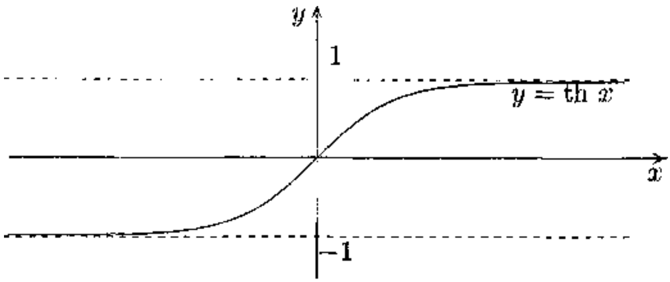


Рис. 12.

4° Гиперболический котангенс:

$$\mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

График имеет вид (рис. 13):

$y = \mathrm{cth}\ x$

-1

Рис. 13.

Гиперболические функции проявляют аналогию с тригонометрическими функциями. Так, имеет место формулы

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y$$

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{ch}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y,$$

из которых при $y = x$ следует

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,$$

$$\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x,$$

$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x.$$

Читателю предлагается самостоятельно доказать данные соотношения.

Часть II

Числовые последовательности

§2.1. Предел последовательности

Определение 2.1. Числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел *y = f(n),n* G Z^+.

Выпишем все значения этой функции в порядке возрастания аргумента

Д1),/(2),/(3),...,/(п),... (7)

Их будет бесконечное множество (7), которое и составляет числовую последовательность. *f(n)* *n* ый член последовательности. Однако в дальнейшем будем обозначать n-ый член последовательности *x»* (или а,,,), *n* порядковый номер члена последовательности. Так как последовательность - функция, то и способы задания ее такие же, как функции. Добавляется только метод реккурентиых соотношений. Например:

y/a, *\Ja* + *y/a,* у а + *у а* + *y/a,,* *у а* + *у а* + ... + *y/a.*

Данная последовательность может быть задана соотношением

Уп* i] = V*'o.* + *Уп,

которое связывает n-ый и (п + 1)-ый члены последовательности и называется реккурентным. При этом надо указать, что *у* = *y/a.* Чаще всего последовательность задается формулой ее *п* -ого члена. Например, ?•„ = -; придавая *п* значения 1,2,3,... получим последовательность

1 I I I Д... (8)

'2'3 4' 'n' w

В дальнейшем последовательность будем обозначать символом *{x_n}*. На,- пример,

1 2 3 4 99 *n*

In + lJ 2'3'4:5'"'! Ю 0:'"'п + 1'' (д)

Или

{(_!)»} :-1,1,-1,1,...,-1,1,... (Ю)

Определение 2.2. Последовательыготь $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если каждый ее последующий член больше (меньше) предыдущего:

$$(\forall n) \quad \{x_n < x_{n+1}\}.$$

Замечание. Если неравенство нестрогое, то последовательность будет не строго возрастающей (убывающей).

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M $[m)$, что для всех членов данной последовательности выполняется неравенство $x_n < M$ $(x_n > m)$. Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то она называется ограниченной. Определение ограниченной последовательности дадим в кванторной записи:

$$(\exists M) \ (\forall n) \ (|x_n| < M) \Rightarrow \{x_n\} \text{ —ограниченная.}$$

Пример.

$$x_n = \frac{2n}{n+1} \cdot \sin 3n.$$

Так как

$$(\forall n) \ (|\sin 3n| < 1)$$

v ' \n + 1 n + 1 / '

то

$$(\forall n) \ \left(\frac{2n}{n+1} \sin 3n < 2\right.$$

откуда следует ограниченность данной последовательности.

Перейдем к одному из важнейших понятий математического анализа -понятию предела. Рассмотрим последовательности (8), (9), (10). Мы видим, что с возрастанием номера n члены последовательности (8) неограниченно приближаются к нулю, члены последовательности (9) - к единице, а члены последовательности (10) не приближаются ни к какому числу. В этом случае говорят, что предел последовательности {^} равен нулю

$$\lim \frac{1}{n} = 0, \quad \lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

а последовательность (10) предела не имеет

?Лгт(-1)"

Дадим строгое определение предела последовательности. Для этого уточним, что значит "неограниченно приближается". Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, члены которой с. возрастанием номера n неограниченно приближаются к числу 6, т.е. $\lim x_„ = Ь$. Это означает, что каким бы малым мы ни взяли произвольное положительное число e при достаточно больших n $\backslash x_„ — Ь\backslash$ станет меньше e. Рассмотрим это па примере последовательности (9). Возьмем $s = 0.1$ и выясним при каких n будет выполняться неравенство

$$\text{п} + 1 \quad < 0Д. \qquad (И)$$

Для этого неравенство (11) решим относительно n. Приводя к общему знаменателю и раскрывая знак модуля, получим

$$\frac{1}{\text{п} + 1} < 0.1 \quad n \quad 1 > 10 \Rightarrow n > 9.$$

То есть для всех n, начиная с десяти, будет выполняться неравенство (11). Возьмем с = 0,01. Аналогичными вычислениями показываем, что неравенство

$$\text{п} + 1 \;\; - 1 \;\; < \;\; 0{,}01$$

будет выполняться для всех n больших 99, а при е = 0,001 - для всех n больших 999 (Рекомендуется самостоятельно проделать вычисления). Тот номер члена последовательности, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\text{п} + 1 \;\; - 1 \;\; < e \qquad (12)$$

при конкретном e, будем обозначать N. В нашем примере для

£ = 0,1 - N = 10

c = 0,01 - N = 100

г = 0,001 -N = 1000

Мы видим, что чем меньше a, тем больше номер члена последовательности, начиная с которого будет выполняться неравенство (12). Найдем зависимость N *от* c *в* общем виде, разрешив неравенство (12) относительно n. Получаем

$$\frac{1}{\text{п} + 1} < e \qquad 1 < - \Rightarrow n > {}^{1} \quad 1.$$

Так как Л[- натуральное число (номер члена последовательности), а *e* произвольное положительное вещественное число, то \ не обязательно целое. Поэтому

$$N= \underset{e}{\backslash\text{--}l]} \quad + 1$$

целая часть от ^ — 1, увеличенная на 1.

Сформулируем теперь строгое определение предела, последовательности.

Определение 2.4. Число *Ъ* называется пределом последовательности *{x_n},* если для произвольного *e* > 0 можно указать номер *N* члена последовательности, начиная с которого для всех членов последовательности {ж,,,} будет выполняться неравенство *\x_n — Ь* < *e.* Говорят еще, что *{x_n}* стремится к *b* *{x„. —> Ь).* Запишем теперь это определение с помощью кванторов:

$$(\mathrm{limx}_„ = b) \overset{dtf}{=} (\mathrm{Ve} > 0)\ (3N)\ (\mathrm{Vn} > Л^{г}) \qquad b\backslash < \tag{13}$$

Примеры. Докажем на основании определения, что

1) $\mathrm{lim}\dfrac{1}{n}$ 0;

2) Ит $\dfrac{J}{n-1}$ ^ L

3) ' a m т~^—~ $\dfrac{№^2 — иП + 2}{3п^2 + 2п - 4}$ 7 = *m:* $\dfrac{1}{3}$ •

$$(\mathrm{lira}\ - = о) =^{;} (\mathrm{Ve} > 0)\ (ЗЛО\ (\mathrm{Vn} > N) => (- < e).$$

Разрешая последнее неравенство относительно *n* получим

$$n > \frac{1}{-} \quad N \quad ^{rii} + 1.$$

2)

$$(\lim — ^ - = 2)\ t/\ (\mathrm{Ve} > 0)\ (ЭЛГ)\ (\mathrm{Vn} > Л0 =^* (\frac{2n}{n-1} <$$

$$\frac{2?/.}{Щ— 1} —2 < e => \frac{}{n-1} < e => \frac{n-1}{2} > \frac{1}{e} \Rightarrow n > \quad 1 \quad ЛГ = \frac{2}{-}+1 + 1$$

Будем брать конкретные значения е, найдем для них номер *N,* данные внесем в таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	
N	22	202	2002	

Отметим, что за N необязательно брать наименьший номер, начиная с которого будет выполняться неравенство (13). Главное, что такой номер существует.

3)

$$\lim \left(\frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$\left| \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

Приведем к общему знаменателю левую часть неравенства и для $n > 2$ получим

$$\left| \ldots - \frac{1}{3} \right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 - 4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n}.$$

А неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется для

$$n > N \qquad + 1.$$

В последнем примере мы использовали свойство транзитивности неравенств.

Задание. Доказать на основании определения предела, что

1) $\lim \frac{1}{n} = 0$;

2) $\lim \frac{3n + 2}{5n + 6} = \frac{3}{5}$;

3) $\lim \frac{n}{n^2 + 1} = 0$;

4) $\lim \frac{2n^2 - 7n + 8}{5n^2 + 2n - 1} = \frac{2}{5}$.

§2.2. Геометрическая интерпретация предела последовательности

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$. Ее члены изображаются точками на числовой прямой. Пусть $lim x_n = Ь$. Рассмотрим определение (13) и раскроем знак модуля в последнем неравенстве

$$—е < x_n — b < e \Rightarrow Ь — e < x_n < b + e.$$

Последнее неравенство означает, что члены последовательности $\{x„\}$ принадлежат е окрестности точки b (рис. 14).

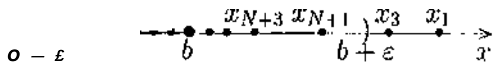


Рис. 14.

Можно дать следущее геометрическое толкование предела последовательности: какой бы малой ни была произвольная е-окрестность точки 6, начиная с некоторого номера $N + 1$ все члены последовательности $\{x„\}$ попадают в эту окрестность. Вне s-окрестности точки b будет лишь конечное А^г число членов данной последовательности.

§2.3. Теоремы о пределах

Теорема 2.1. *Последовательность имеет не более одного предела.*

Доказател ьство.

Предположим противное. Пусть lira $x_n = a$ и lim $x„ — Ь$, причем $a ф Ъ$. Воспользуемся определением предела последовательности. Возьмем

$$1^а \sim {}^б1$$

По определению предела:

$$\text{Ira } x_{,г} = a\text{^ (3iVi)(Vn > } Nx) (\backslash x„ - a\backslash < \frac{\backslash a-Ь\backslash}{\text{^ - "}}\text{V} \qquad (14)$$

$$\text{lim}x_n = Ь => (Ж_2)(Уп > N_2) (\backslash x_n - 6| < °\text{~-}) \qquad (15)$$

Выберем Л' таким, чтобы для (V??, > /V) выполнялись оба неравенства (14) и (15). Очевидно, N = тах(7У$_{ь}$ N_2) [N равно наибольшему из чисел JV, и N_2).

Рассмотри \\a — $Ь$\\. Под знаком модуля прибавим и отнимем x_n, затем применим свойство абсолютной величины числа, а также используем неравенства (14) и (15). Получим

\\$a$ - $Ь$\\ = |а - ж„ + x_n - $Ь$\\ < \\$x_n$ - $Ь$\\ + |ж„ - a\\ < + ' = |а - /;|,

т.е. \\$a$ — $Ь$\\ < \\$a$ — $Ь$\\. Абсурдное неравенство получилось в результате предположения, что последовательность может иметь два предела. Следовательно, предположение неверно и теорема доказана.

Теорема 2.2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство.

Пусть lima;,,. = $Ь$. Возьмем e = 1. Из определения предела следует, что

(3А0(Vn> ,V)=> \\x_n-$Ь$\\ < 1.

В силу свойства абсолютной величины имеем

$К$\\-\\$Ь$\\<\\$x_n$-$Ь$\\<*1,*

откуда получаем, что |ж$_{п}$| < \\$Ь$\\ + 1 для всех n > N. Если за число Л/ примем наибольшее из чисел \\$xi$\\. |жз|, • • • •, \\$XN$\\-. \\°\\ + 1

M = max{|xi|, ... |х'лг|, |&| + 1},

то получим, что

(Vn)(|x„| < M),

а это, по определению, означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Последовательность может быть ограниченной и не иметь предела. Покажем, что /31im(—1)", хотя последовательность x_n = $(-1)^n$ ограничена:

(Vn)(|.x$_{n}$| < 1).

Предположим противное, что 3Итж„ = $Ь$, а это значит, что

(Vs)(3/V)(Vn > N) => (|(-1)" - $Ь$\\ < c).

А поскольку n может быть как четным, так и нечетным, то последнее неравенство предполагает выполнение неравенств

(|1-6| <е)Л(|1 + &| <£).

Возьмем 0 < Ve < 1. Рассмотрим

2 = \l + l\ = \l+b-b + l\<\l + b\ + \l-b\<e + e<2e<2.

Получили 2 < 2, следовательно, предположение о том, что существует предел последовательности (—1)"", было неверным.

§ 2.4. Бесконечно малые последовательности

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью (или бесконечно малой величиной - б.м.в.). если Шп x_n. = 0.

Примеры.

1

Ш. <••>

- бесконечно малые величины, если \a\ < 1.

Для доказательства этого факта воспользуемся неравенством Бернулли:

$$(1 + h)^n > 1 + nh, \quad (h > 0)$$

Имеем:

(|о| < 1) => (~ > 1) => (~ = 1 + h, h>
\\a\ / \|a|

=>• f T-r > ! + ⁿ^) => (1ᵃΓ < Τ~—Γ < ᵉ)
\|a|"' / v 1 +rī/i /

(в силу неравенства Бернулли).

Легко видеть, что последнее неравенство выполняется для

$$п > \frac{1}{e \cdot h} \quad \frac{1}{h}$$

Следовательно,

$$N-- \frac{-1}{.e\,h} \quad \frac{1}{h} \quad 1. \tag{16}$$

Из сказанного выше следует, что для произвольного $c > 0$ мы узнаем номер N (см. (16)), что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\backslash a\backslash^{n} < e$, что означает lima" = 0.

<u>Теорема 2.3.</u> *Сумма конечного чист бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

<u>Доказательство</u> проведем для суммы двух бесконечно малых величин, которые в дальнейшем будем обозначать буквами греческого алфавита: a_n. /3

Пусть a_n, p_n бесконечно малые последовательности. Воспользуемся определением предела последовательности.

(а„ - б.м.в.) => (lima„ = 0) $\overset{f}{=}$ (Ve > 0)(3Wi)(Vre > N_x) =» |а„,| < | (17)

(/?„-б.м.в.) =• (lim Д, = 0) $\overset{f}{=}$ (Vs > ())(3W$_2$.)(Vn > ЛГ$_2$) => |/3$_n$| < | (18)

Возьмем JV = max(iV], Л'$_2$). Тогда для $n > N$ будут выполняться неравенства (17) и (18) одновременно. Рассмотрим

$$\backslash n_n + Pn\backslash < \backslash a_n\backslash + Щ < \frac{c}{-} + \frac{s}{-} = e.$$

Таким образом, $\backslash a_n + Pn\backslash < в$ для всех $n > N$. Это означает, что

$$\lim(а_{„}, + p_n) = 0$$

и $a_„ + p_n$ - бесконечно малая величина.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

<u>Доказательство</u>.

Пусть $a_„$. - бесконечно малая величина, а {ж„} - ограниченная последовательность. Это означает, что

$$(ЗМ)(Уn)(\backslash x_n\backslash < М).$$

Возьмем произвольное $в > 0$ и рассмотрим e/M. Так как lima„ = 0, то найдется такой номер N члена последовательности, что Vn > N будет выполняться неравенство

$$ЫI < jj-$$

Рассмотрим

$$\backslash a_n \cdot x_n \backslash = \backslash a_n \backslash \backslash x_n \backslash < — \cdot \mathrm{M} = \mathrm{e}.$$

Получили, что $Уn > N$ выполняется неравенство $\backslash a_n \cdot x_n \backslash < \mathrm{e}$, следовательно, $a_n \cdot x_n$ - бесконечно малая величина. Теорема доказана.

Следствия теорем 2.3, 2.4.

1° Произведение бесконечно малой последовательности на постоянную величину есть последовательность бесконечно малая.

2° Разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3° Произведение бесконечно малой последовательности на последовательность, имеющую конечный предел есть бесконечно малая последовательность.

4° Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей - бесконечно малая последовательность.

5° Положительная степень бесконечно малой последовательности бесконечно малая последовательность.

Студентам рекомендуется доказать следствия 1°—5° с использованием определения предела последовательности.

<u>Теорема 2.5.</u> *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел необходимо и достаточно, чтобы, она была представима в виде суммы этого предела и бесконечно малой последовательности.*

Доказательство. Необходимость.

Дано: lima;$_{\mathrm{n}}$ = b. Это значит, по определению, что

$$\{Ms > 0)(3\mathrm{W})(\mathrm{Vn} > N) => (|\mathrm{x}„ - b\backslash < e).$$

Из последнего неравенства следует, что $\{x_n — Ъ\}$ - бесконечно малая последовательность, которую обозначим a_n, т.е.

$$x_n — b — a_T, => x_n — Ь + a_n.$$

Необходимость доказана.

<u>Достаточность.</u> Пусть $x_n = Ь + a„. =\$ \cdot x_n — b = a_n$. Из последнего равенства, по определению бесконечно малой последовательности, имеем

$$(\mathrm{Vs} > 0)(3\mathrm{JV})(\mathrm{Vn} > N) => (|\mathrm{a},.,| < \mathrm{c}),$$

$$\backslash x_n — Ь\backslash < \mathrm{e} => \lim x„ = b$$

no определению предела последовательности. Теорема доказана.

§ 2.5. Действия над последовательностями

Рассмотрим последовательности *{x„}* и *{y$_n$}* и составим следующие последовательности:

$$X_Л +y_U \ X2 + У2, \ \bullet -., \ x_n + y_n, \ \dots, \tag{19}$$

$$\bullet ґ1 \ -У\backslash, \ X_2 - У2, \ \dots, \ x_n - y_n, \ \dots, \tag{20}$$

$$\hat{} \ \hat{} \ . \ . \ . \ , \ \hat{} \ . \ . \ . \ . \tag{21}$$

2/1 2/2 2/п

$$\hat{} . \ \hat{} . \ . \ . \ . \ * . \ . \ . \ . \tag{22}$$

X\ x% ' x_n

которые называются, соответственно, суммой (19), произведением (20), частным (21), (22) последовательностей *{x$_n$}* и {?;„}.

<u>Теорема 2.6.</u> *Если* Нтж$_п$ = *a и Иту$_n$ — Ъ. то последовательности (19) (21) имеют пределы, причем*

$$Ит\{x_n + y_n) = a + Ь, \tag{23}$$

$$lini\, x„ \bullet y_n = a \bullet Ь, \tag{24}$$

$$И\,т \frac{x}{Уn} = \frac{\&}{Ь} \text{ при условии, что } b \ Ф \ 0. \tag{25}$$

Докажем формулу (24). Так как (Итя;$_п$ — *a)* Л *(1\my$_n$ = Ь)* => (в силу теоремы 2.5) *(x$_n$ — a + a„)* Л *{y„ = Ь + /?„)*. Рассмотрим $x_n \bullet y„:$

$$x_n \bullet Уn = \{a + a_n)\{Ь + p_n) = ab + a\text{-} \ p_n + Ь \bullet a„ + a,ф_n = ab + 7«\text{-}$$

Сумма последних трех слагаемых есть бесконечно малая последовательность в силу следствий 1°, 4° и теоремы 2.3. Таким образом, последовательность *{x„ • y,,}* представима в виде суммы *ab* и бесконечно малой последовательности *j„*. В силу теоремы 2.5, *limx$_n$y$_n$ = ab.* Аналогично доказывается формула (23), это предлагается проделать читателю.

Для доказательства формулы (25) нам потребуется

<u>Лемма 1</u>. *Если limy$_n$ = Ь -ф* 0; *то, начиная с некоторого номера, определена последовательность 1/y$_n$, которая будет ограниченной.*

Доказательство. Положим для определенности, что *Ь* > 0. Возьмем *c — 1))2.* На основании определения предела последовательности получим, что для *c* = 6/2 найдется помер *N,* что для всех *n* > *N* будет выполняться неравенство

$$(\backslash y«-^{b}\backslash<l)=>\{-^{b}2<yn-b<\pm)=>\hat{}<y_{n}<f)\hat{}$$

$$\hat{}\quad \frac{2}{do}<\frac{1}{y_n}<\frac{2}{o}.$$

Следовательно, последовательность $\backslash/y_n$ ограничена по определению. Лемма доказана.

Докажем теперь формулу (25).

$$\lim x_n = a \Rightarrow x_n = a + a_n.$$

$$\lim y_n = Ъ=\$>y_n = Ъ + p_n \quad \{Ъф\ 0)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{x_n}{y_n} \quad \frac{a}{6} \quad \frac{a+a_n}{\&+/?_n} \quad \frac{a}{6\sim} \quad \frac{aЬ + a_n Ь - aЬ - ap_n}{\&(Ь+А,)} \quad \frac{a_n Ь - о/3_n}{Ь\text{-}2/_п} \quad \text{"} \quad \frac{1}{?/_n} \quad \frac{1}{Ь'}$$

За 7л обозначен числитель, который является бесконечно малой последовательностью, в силу следствий 1° и 2°. Последовательность $1/y_n$ - ограничена в силу леммы 1. Имеем произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность и на постоянную, что дает нам бесконечно малую последовательность 6_n. Получили, что

$$\frac{}{Уn}7 = \frac{6_n}{o} =» \frac{}{y_n} = \frac{7}{Ь} + Ьn.=> \lim \frac{}{y_n} = \frac{_7}{Ь}.$$

в силу теоремы 2.5.

<u>Следствия</u>:

$$\text{а)}\ \lim C\ x_n - C\backslash m\backslash x_n. \tag{26}$$

(Постоянную величину можно выносить за знак предела.)

$$\text{б)}\ \lim(x\backslash_7, - y_n) = a\text{-}Ь. \tag{27}$$

$$\text{в)}\ \lim x_n = a =» \lim л\ \hat{}= \backslash/a. \tag{28}$$

§2.6. Бесконечно большие последовательности

Бесконечно малым последовательностям, в некотором смысле, противопоставляются бесконечно большие последовательности (или бесконечно большие величины).

Пусть члены последовательности {ж„.} с возрастанием номера *п* неограниченно возрастают по абсолютной величине. Такая последовательность *{-£„}* называется бесконечно большой. Дадим строгое определение бесконечно большой последовательности.

<u>Определение 2.6.</u> Последовательность {з;„} называется бесконечно большой, если каким бы большим мы ни взяли произвольное положительное число *E,* можно указать номер *N* члена последовательности, начиная с которого для всех членов последовательности {ж„} будет выполняться неравенство $\backslash x_n\backslash > E$.
Или:

(V£ > 0) (37V) (Vn > *N)* => *(*$\backslash x_n\backslash > E$*).*

В этом случае говорят, что lima:,, = со, или *х„* ~> со *(*$x_г$*,* стремиться к бесконечности). Если последовательность *{х,,}* является бесконечно большой и сохраняет определенный знак (+ или —), то говорят, что lima;,, = +оо, или *тх„* = —со.

Можно дать строгое определение бесконечно большой последовательности положительного (отрицательного) знака.

(lim.x„ = +сс) =^{f} *{ME* > 0) (ЗЛО (Vn > *N)* =Ф *(*x_n *> E).*

(lim.r_n = -со) =' *(УЕ* > 0) *(3N)* (V» > *N)* =• *(*x_n *< -E).*

Примерами бесконечно больших являются последовательности {и}, {-п}, {(-1)" • *п},* причем limn = +оо, lim(-n) = -со, lim(-l)"n = со (знак последней бесконечно большой величины не определен).

Рассмотрим ряд теорем о бесконечно больших последовательностях.

Теорема 2.7. *Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.*

Доказательство основано на определении бесконечно большой.

Пусть $x_„, y_n$ - бесконечно большие величины. Возьмем *УЕ* > 0 и рассмотрим *\/Ё*

(Нтж„ = оо) t/ (V£ > 0) (1/Vj) (Vn > Л^) =4> (|$x_п$| > л/Я) (29)

(Ит;у„ = оо) =' (УЯ > 0) (ЗЛУ (Vn > N_2) => *(\y„\ > VE).* (30)

Возьмем TV = max(A?$_1$,/V$_2$), тогда для *п* > *N* будут выполняться оба неравенства (29), (30). Рассмотрим *\x„ • у„* = *\$x_n$* • *\$y_n$* > *\/Ё y[Ё = Е* (в силу неравенств (29) и (30)). Итак получили, что

(УЕ > 0) (ЗЛО (Vn > *N)* => *(\x_n • y_n\ > Е).*

Следовательно, *{х„ • y_n}* - бесконечно большая последовательность.

Следствие. *Положительная степень бесконечно большой величины, есть бесконечно большая величина.*

Теорема 2.8. **Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми выеличинами.** *Если {x_n} - бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера, определена последовательность {1/Хг,}, которая является бесконечно малой. И обратно, если члены бесконечно малой последовательности {а„} не равны нулю, то {1/a_n} бесконечно большая последовательность.*

Доказательство первой части теоремы.

Пусть *х„* - бесконечно большая величина. Возьмем произвольное, сколь угодно малое *е* > 0 и рассмотрим *Е = 1/е.*

{x_n - б.б.в.) => *(УЕ* = -) (ЗЛ) (Vn > *N) {\x_n\ > Е)*

или

\$^x$***n***\ > $\frac{-}{e}$ =>• т—г < £•
\x_n\

В результате получили, что

{Ус > 0)(3JV) (Vn > *N)* => *(^- < е).*
1 над *\X_r,*

Следовательно, *l/х„* - бесконечно малая величина, по определению. Первая часть теоремы доказана. Вторую часть теоремы предлагаем студентам доказать самостоятельно.

Теорема 2.9. *Сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.*

Доказательство.

Пусть lima;,,. = +00 и limy,, = +00. Докажем, что \\$m(x_n + y$„) = +оо.

$$(\text{lima;}_{\text{n}} = +00) \ =^{f} (УЕ > 0)\ (3JV,.)\ (Уn > \text{M}) \ => (ж,, > |) \qquad (31)$$

$$(\text{liin } y_n = +\text{oo}) \ =^{\text{г}} (УЕ > 0)\ (3N_2)\ (\text{Vn} > Щ \ => (y_n > |) \qquad (32)$$

Возьмем $N = max(Ni,N_2)$. Тогда. Vn > N, будут выполняться неравенства (31) и (32) одновременно. Складывая их, получим, что

$$x„ + ?/„ > E$$

для всех n > N, что означает

$$\text{lim}(.x\backslash, + y_n) = +\text{oo}.$$

Рекомендуем рассмотреть самостоятельно случай суммы отрицательных бесконечно больших величин.

Определение 2.7. Последовательность $\{x„\}$ называется отделимой от нуля, если существует окрестность точки $x = 0$, вне которой находится бесконечное множество членов последовательности.

Примеры. Если $\text{limx}_{\text{га}}$ — *Ь ф* 0, то $\{x_n\}$ - отделимая от нуля последовательность. Последовательность {(—1)"} не имеет предела, но является также отделимой от нуля.

Теорема 2.10. *Произведение бесконечно большой последовательности на последовательность, отделимую от нуля, есть бесконечно больимя последовательность.*

(Без доказательства.)

§2.7. Неопределенности

Ранее мы рассматривали lim(x„ + y_n), $limx_n \cdot y_m$ Нт^- в предположении, что последовательности {ж„,}, {?/„} стремятся к конечным пределам (в случае частного $Иту_n$ *ф* 0). Оставлены без рассмотрения случаи, когда пределы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечны или оба равны нулю (в случае частного).

1° Рассмотрим сначала частное $\{x_n/y_„\}$ в предположении, что lira $x_„ = 0$ и $\lim y_n = 0$. Пусть

а) $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1}{n} = 0$;

б) $x_„ = \frac{1}{«}z$, $y_n = \frac{1}{n^{л}}$г, тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim n = +oo$;

в) $x_„ = \frac{}{n}$, $y_n = \frac{}{n}$$\{a\ Ф\ 0)$, тогда $\lim \frac{}{y_n} = a\ Ф\ 0$;

г) ж$_п = \frac{(-1)"}{n}$, $Уп = \frac{1}{n'}$• тогда $\lim \frac{ж_{,,}}{y_n} = \lim(-1)^{ге}$ - не существует.

Из примеров а) - г) мы видим, что отношение двух бесконечно малых последовательностей может быть и бесконечно малой, и бесконечно большой величиной, может вовсе не иметь предела. Отношение двух бесконечно малых последовательностей надо исследовать в каждом конкретном случае. Для того, чтобы характеризовать эту особенность, говорят, что когда $\lim x_„. = 0$ и $\lim y_n = 0$ выражение x_n/y_n представляет неопределенность вида -. Существуют методы раскрытия этой неопределенности.

2° В случае, когда Нтж„ = оо и limy,,. = оо, имеет место подобное же обстоятельство. Общего утверждения о поведении их отношения делать нельзя. Этот факт иллюстрируется примерами, аналогичными приведенным в 1°

а) $x_n = n$, $y._n = n^2$. $\lim \frac{}{UP} = \lim \frac{}{n} = 0$;

б) $x_n = n^2$, $y_n = n$. $\lim \frac{}{Уп} = \lim n = +oo$;

в) $x_n = a\text{-}n(aф\ 0)$, $y_n = n$, $\lim \frac{X}{Уп} = a\ ф\ 0$;

у) $Xn - [2 + (-1)""] \cdot n$, $Уп. = n$, $\lim \frac{X}{Уп} = \lim[2 + (-1)"']$ - предела нет.

В этом случае говорят, что выражение x_v/y_n представляет иеопределенность вида $\frac{со}{оо}$

3° Обратимся к рассмотрению произведения $\{x_n\text{-}y_n\}$. Пусть $\lim x_n = 0$ и lim;</„. = ос. Исследуя произведение $\{.г„\ \ y_n\}$, мы сталкиваемся с такой же особенностью, как в пунктах 1° и 2° Об этом свидетельствует примеры:

а) $x_n = n\sim^2$, $Уп, = n$, $\lim x_n \cdot y_n = \lim n\sim^1 = 0$;

б) $x_„. - nг^1$, $y_n - n^2$. $\lim я;_{„.} \cdot y_n = \lim n = +oo$;

в) $x_n = an\sim^J$, (о $ф$ 0). $y_n = n$, $\lim x_n \cdot y_n - a\ Ф\ 0$;

Г) $X_„ = (\sim1)"'п\sim^!$, $y_n = n$, $\underline{\backslash imxn} \cdot y_n = \lim(-1)"$ - не существует.

Если $\lim a;_n = 0$, а limy„ = оо, говорят, что выражение $x_n \cdot y_„$ представляет неопределенность вида 0 • со.

4° Рассмотрим сумму *{x„.+y_n}*. Здесь оказывается, особым случай, когда *{x„}* и *{y_n}* стремятся к бесконечности разных знаков: именно в этом случае о сумме *x„* + y_n ничего сказать нельзя. Различные возможности, представляющиеся здесь, иллюстрируются примерами

а) x_n = *2n, y„* — *—n,* lini(.i:„ + *y.„)* = limn = +00

б) *x„.* = *n,* y_n = *—2n,* Ит(ж„ + y_n) = lim(-n) = -ос

в) x_n = *n* + *a,* y_n = *-n,* lim(x„, + y_n) = *a*

г) x_n = *n* + (-1)", y_n = —п, Нт(х„ + y_n) = lim(-l)"' - предела нет.

В виду этого, при Итж„ = +00 и *Иту*$_n$ = —ос, говорят, что выражение x_n + y_n представляет неопределенность вида ос — ос.

Таким образом, при исследовании Ит(ж„ 4- y_n), lima;,, • y_n, Ит — мы
Уп

можем сталкнуться с неопределенностями четырех видов: §, —, 0 • ос, ос—ос. Позже мы рассмотрим некоторые методы раскрытия этих неопределенностей.

§ 2.8. Примеры нахождения пределов

1° Пусть *P(n)* - многочлен относительно *n* с постоянными коэффицентами:

P(n) = Qo + *a,* • *n* + *(i2* • *n*^{1} + ... + *at,* • *n*^{k}

Найдем его предел. Если бы все коэффиценты многочлена были положительны (отрицательны), то пределом его была бы +ос (—оо). В случае коэффицентов разных знаков одни члены стремятся к + ос, другие к —ос, и налицо неопределенность вида ос — ос. Для раскрытия этой неопределенности вынесем за скобки n^k, получим

lim *P{n)* = limn^1 -*f* + -j-Ц- + ~*ГЪ* + - +———+ °* •
n^к *n*^{к}*~*^{1} *n'"~*^{2} *n* /

Так как в скобках все слагаемые, кроме последнего, стремятся к пулю, то выражение в скобках стремится к а&. Множитель $n^к$ стремится к +оо. В этом случае имеем произведение бесконечно большой последовательности на последовательность отделимую от нуля. Поэтому

ос, если а*- > О
lim *P(n)* - _, „
-оо, если *о-к* < О

2° Рассмотрим теперь предел отношения двух многочленов

P(n) _ a_0 + *a\n* + ... + *a/*$_e$*n*^{к}
ПП <М ~ 1Ш *Ьa* + *Ь,n* + ... + b_m*n*^{m}'

Здесь налицо неопределенность вида —. Преобразуем каждый многочлен так, как было сделано в предыдущем примере, получим

Второй множитель имеет предел -—. Если степени обоих многочленов b_m равны $/c = т$. то $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{(1к}{b_m}$ Если $к > m$, то $\lim n^{*' m} = +эс$ и

$\lim$ -гг—г = ±оо (знак зависит от знака т—)• Если $к < m$, то $\lim n^{fc\_m} = O$ $Q\{n)$ $b_m/$

и все выражение стремится к нулю (как произведение бесконечно малой последовательности на последовательность, имеющую конечный предел).

3° Найти lim *y/n(y/n* + 1 — *y/n)*. Здесь выражение в скобках представляет неопределенность оо — ос. Умножая и деля на *(y/n* + 1 + *y/n)*, преобразуем данное выражение к неопределенности вида Ц:

$$\lim \cdot \frac{y/n\{y/n + 1 - y/n)\{\sqrt{n} +1 + y/n)}{iVn + l + y/n)} = \lim \cdot \frac{y/n}{y/n+ 1 +y/n'}$$

Разделим числитель и зпаминатель на *y/n*, получим

h m " — =2-
V ^ + i

§ 2.9. Теоремы о предельном переходе в неравенствах

Теорема 2.11. *Если предел последовательности* {з;„} *существует и больше (меньше) некоторого числа A. то. начиная с некоторого номера, все члены последовательности будут больше (меньше) A.*

Или: (Игах,-, $= B) /\{B > A) => (37V)(\forall n > N)\{x_n > A)$.

Доказательство.

Возьмем $e = B — A > 0$, для него найдется N такое, что $\forall n > N$ будет выполнятся неравенство |ж„. - b| $<B-A=\$-A-b<x„-b<b-A=> A < x_n$ (из левой части неравенства). Теорема доказана.

Следствие **1. (Теорема о сохранении знака)** *Если* lim ж„ > 0(< 0), *то, начиная с некоторого номера все члены последовательности будут больше (меньше) пуля.*

Или: (Итж„ > 0) ^> (3iV)(Vn > *N)(x_n* > 0).

<u>Следствие 2.</u> *Если предел посаедовательности $\{x_n\}$ ст,рого больше предела последовательности $\{y_n\}$, то, начиная с некоторго номера члены, последовательности $\{x_n\}$ будут строго больше членов последовательности {у„ }.*

Действительно, (Итх„ > Ит;</п) => Нт(ж,, - *y_n*) > 0 => (в силу следствия 1)(ж„ - ;</„) *>0=> {x_n > у„)(Уп > N).*

<u>Теорема 2.12.</u> *Если последовательности $\{x_n\}$ и {у,,} имеют конечные пределы \m\x_n = а, \\mу„ = Ь и, начиная с некоторого номера, их члены связаны неравенством х„ > y_n, то а >Ь.*

Или: (lim.r„ - о) */\{Ъшу$_n$ = Ь) /\[(ЗЩ(Уп > М){x_n > y_n)] => (а > Ь).*

Доказательство.

Предположим противное, что *а <Ь,* тогда, по следствию 2. начиная с некоторого номера, члены последовательностей будут связаны неравенством x_n < *у„,* что противоречит условию. Теорема доказана.

<u>Замечание.</u> Если (л;„ > *y_n) => (а > Ь).* Строгое неравенство, связывающее члены последовательностей, влечет нестрогое неравенство, связывающее их пределы.

Действительно, члены последовательностей (1 + ^) и (1 — £) связаны строгим неравенством, а их пределы равны единице.

Теорема **2.13. О пределе промежуточной последовательности.** *Если, начиная с некоторого номера, члены трех последовательностей {х,,}, {у,,}, $\{z_n\}$ связаны неравенствами x_n < z_n < у„, и существуют пределы, последовательностей {х„} и $\{y_n\}$, равны.е числу А, то существует предел, последовательности $\{z_n\}$, также равной А.*

Или: (Vn > *N_0)(x_n < z„. < у,,)* Д (Итж « = lim2/« = *А)=> \\m$z_n$ = А.*

Доказательство теоремы основано на определении предела последовательности.

(limx„ = *А)* = (Vs > 0)(3A'!)(Vn > *N_x) => (\x_n - А\ < с)* (33)

(limy_n = А) t/ (Vs > *0)(3N_2)(Vn > N_2) => (\у„ - А\ < е)* (34)

Возьмем Л^г = max(iVo, *Ni,N_2).* Тогда для всех *п> N* будут выполняться одновременно неравенства

$$x_n < z_n < y_n, \qquad (35)$$

(33) и (34), в которых раскроем знак модуля

$$A-e < x_n < A+e, \quad (36)$$

$$A-г < y_n < A + e. \quad (37)$$

К неравенствам (35) присоединим слева левую часть неравенств (36), справа правую часть неравенств (37). Получим

$$A - e < x_n < z_n < y_n < A + e => A - e < z_n < A + e => \backslash z_n - A\backslash < e.$$

Получили, что для произвольного $c > 0$ нашлось N такое, что для всех членов последовательности {г„}, номера которых $n > N$ выполняется неравенство |г„ — $A\backslash < e$. Отсюда следует, по определению, что $\lim z_n = A$. Теорема доказана.

Пример. Вычислить предел последовательности

1 1 1

+ , „ +••• + •

Очевидно, что

n n

Найдем $\lim x_n$:

lim ж„ = lim V^Ti ОС оо 1 i m — = = = 1.

Ан&логичо получаем, что limy„, = 1.

Из теоремы 2.13 следует, что limz„ = 1.

Рассмотрим теперь один из примеров существования предела последовательности. Он относится к возрастающим или убывающим (пусть нестрого) последовательностям. Это теорема Вейерштрасса.

Теорема 2.14. Теорема Вейерштрасса. *Всякая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последоват-елъность имеет конечный предел.*

Докозательство проведем для случая возрастающей и ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$.

Пусть {г-„} - ограничена сверху, т.е. $(\exists M)(\forall n)(x_n < M)$. Так как последовательность $\{x_n\}$ есть множество действительных чисел, то, по теореме о непрерывности множества действительных чисел, она имеет точную верхнюю грань, sup(a:„) = *А*. Докажем, что число *А* и есть предел последовательности {ж„}. По определению точной верхней грани имеем:

$$(Уп)(.г-„<Л), \tag{38}$$

$$(ye>0)(3N)(x_N>A-e). \tag{39}$$

В силу монотонности $\{x_n\}$ при $n > N$ будет $x_n > x_N$. а в силу неравенства (39)

$$x_n > A - г. \tag{40}$$

Из неравенства (38) имеем

$$x_n < A < A + e. \tag{41}$$

Объединяя неравенства (40) и (41) получим

$$A - c < x_n < A + e => \backslash x_n - A\backslash < е.$$

Получили, что

$$(Vc > ())(3JV)(Vn > N) => \backslash x_n - A\backslash < e => \text{lira}\, x_n = Л.$$

Что и требовалось доказать.

<u>Замечание 1.</u> Если последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то ее предел равен +оо (—оо).

Действительно, пусть $\{x_n\}$ не ограничена сверху, тогда, сколь велико ни было бы число $E > 0$, найдется хоть одно значение $x,\backslash i > E$. Ввиду монотонности последовательности для $n > N$ и подавно ,г„ $> E$, а это и означает, что lira $x_„ = +оо$.

Аналогичные расхождения для не ограниченной снизу, убывающей последовательности.

<u>Замечание 2.</u> Если последовательность $\{x,,\}$ стремится к своему пределу *А* возрастая (убывая), то все ее члены меньше (больше) или равны этому пределу.

Это следует из неравенства (38).

<u>Пример 1.</u> Найти $\lim \frac{a^n}{—}$ (а > 1).

Рассмотрим отношение

$$\frac{!11\pm}{x_n} = \frac{}{(n + 1)\backslash a^n} = \frac{}{п + 1} < 1, \qquad n>a-1.$$

Так как

$$——< 1 => X_{n+i} > X_n$$

для всех n, начиная с некоторого номера, т.е. последовательность будет монотонно убывающей. Очевидно, что $\frac{a^n}{n!} > 0$. значит последовательность ограничена снизу и, в силу теоремы Вейерштрасса, имеет конечный предел, который обозначим C.

$$\lim x_n = \lim \frac{a}{n!} = C.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \quad n+1 \qquad x_{n+1} = \frac{}{n+1} x_n. \tag{42}$$

Мы получили реккурептное соотношение (42), в котором можно перейти к пределу, так как доказано, что

$$\lim x_n = C => \lim x_{n+1} = C,$$

$$\lim \frac{a}{n+1} = 0.$$

В результате получаем

$$C = 0 \cdot C => C = 0$$

$$\lim \frac{a}{n!} = 0.$$

Пример 2. **Первый замечательный предел (число** е).

Используя теорему Вейерштрасса, докажем существование предела последователпости:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Здесь с возрастанием номера n основание стремится к единице, показатель - к 4-ос. Мы сталкиваемся с новым видом неопределенности выражения - 1^∞, (о котором подробнее будем говорить позже). Для доказательства рассмотрим вспомогательную последовательность:

$$* = (! + -) \cdot$$

Покажем, что она монотонно убывает и ограничена снизу. В ходе доказательства будем применять неравенство Бернулли:

$$(1+h)^n > 1 + h\cdot n \qquad (h>0).$$

Имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n}(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{n} > 2.$$

ограниченность снизу доказана. Рассмотрим отношение

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Из того, что

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1 \Rightarrow y_n > y_{n+1}$$

и последовательность y_n убывает.

Следовательно, по теореме Вейерштрасса, она имеет предел, который является иррациональным числом, заключенным между числами 2 и 3. Его обозначают буквой e. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Число e имеет исключительную важность как для самого математического анализа, так и для его применений. Отметим, что это число выбрано в качестве основания для системы логарифмов. Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются знаком ln. В теоретических иследованиях пользуются исключительно натуральными логарифмами. Итак,

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Рассмотрим исходную последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1} = y_n\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Имеем:

$$\lim x_n = \lim y_n\,\frac{n}{n+1} = \lim y_n\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = e\cdot 1 = e.$$

l[m {1 + n) =e -

- носит название "первого замечательного предела". В дальнейшем нами будут рассмотрены его обобщения и приложения в вычеслениях пределов.

§ 2.10. Принцип стягивающихся сегментов

Рассмотрим последовательность, членами которой являются сегменты:

$$[a_b\&i],\ [a_2Л],\ \bullet..,\ [a_{„}.,b_n]_t\ \dots \qquad (43)$$

Определение 2.8. Последовательность сегментов (43) называется последовательностью вложенных сегментов, если каждый последующий сегмент принадлежит предыдущему, т.е.

$$(Vn)([a,H\text{-}iA,_Hi]\ C\ [a_n,Ъ_„])\text{-}$$

Определение 2.9. Последовательность вложенных сегментов (43) называется последовательно стягивающихся сегментов, если длинна, п-го сегмента стремится к нулю при *n* —> со.

Примеры. Последовательность сегментов

является последовательностью вложеных сегментов, но не является стягивающейся.

Последовательность

IL *n* ш >

является последовательностью стягивающихся сегментов. Имеет место

Теорема 2.15. Теорема Кантора. *Всякая последовательность стягивающихся сегментов имеет единственную общую точку, принадлежащую всем, сегментам последовательности.*

Доказательство.

Рассмотрим последовательность стягивающихся сегментов (43). Так как это последовательность вложенных сегментов, то

$$(\forall n)(a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n) \tag{44}$$

и

$$(\forall n)(a_1 < a_n < b_n < b_1). \tag{45}$$

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ левых концов сегментов. Из неравенства (45) следует, что она ограничена сверху $(a_n < b_1)$, из неравенства (44) следует что $\{a_n\}$ монотонно возрастает:

$$(\forall n)(a_n < a_{n+1}).$$

По теореме Вейерштрасса, она имеет предел:

$$\lim a_n = C.$$

Рассмотрим последовательность $\{b_n\}$ правых концов сегментов. Из неравенств (44), (45) следует, что она будет монотонно убывающей и ограниченной снизу, следовательно, существует ее предел:

$$\lim b_n = C_1.$$

Покажем, что $C = C_1$. Действительно, рассмотрим разность

$$C_1 - C = \lim b_n - \lim a_n = \lim (b_n - a_n) = 0,$$

так как длинна n-го сегмента стремится к нулю при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что точка C принадлежит всем сегментам последовательности (43). Так как последовательность $\{a_n\}$ стремится к пределу возрастая, то

$$(\forall n)(a_n < C).$$

Так как последовательность $\{b_n\}$ стремится к пределу убывая, то

$$(\forall n)(b_n > C).$$

(см. замечание 2 к теореме Вейерштрасса.) В результате получаем

$$(\forall n)(a_n < C < b_n),$$

то есть C пренадлежит всем сегментам последовательности (43).

И, наконец, докажем, что точка C единственная. Предположим противное, что существует точка C', отличная от C, также принадлежащая всем сегментам последовательности, т.е.

$$(\forall n)(a_n < C' < b_n).$$

Перейдем к пределу в последнем неравенстве. Так как

(lima„ = *C)* Л (limb„ = *C),*

то, по теореме о промежуточной последовательности,

C = c.

Теорема доказана.

§ 2.11. Подпоследовательности

Рассмотрим последовательность *{x$_n$}*. Вычеркнем из нее конечное или бесконечное число членов, сохраняя оставшиеся в прежнем порядке. Мы получим новую последовательность

Хщ , *X$_{n z i}$* ' * * ' *^'*fc? • • • : V ^/

которая называется подпоследовательностью последовательности *{х„}*. *{n>k}* ~ возрастающая последовательность натуральных чисел (номеров членов)

71] < *По* < • • • < *т* < *Пк+}* < ...

Другими словами, последовательность *{х$_{П1}$.}* называется подпоследовательностью последовательности *{%„},* если выполняются два условия:

1)Ух,$_ч$£{хг,},

2)(Vfc)(n$_{fc+1}$ > *щ)*

Примеры. *{x'2n}, {хъ,.+\}* есть подпоследовательность последовательности {х„.}.

Теорема **2.16. О единственности предела последовательности и любой ее подпоследовательности.** *Если последовательность {х„} имеет конечный предел, то т,от же предел имеет любая ее подпоследовательность (46).*

Доказательство.

Пусть lim x_n = *Ь.* Это значит, что

(Ve > 0)(3/V)(Vn > ЛО => |а:„ - 6| < *с.*

Выберем такое натуральное число K, что при $к > K$ будет $n_к > N$. Тогда при тех же значениях $к$ будет выполняться неравенство

$$\backslash x_{щ} - Ь\backslash < е.$$

Получили, что

$$(Ve)(3A')(VA: > K) = \bullet \ |*_{V} - - 6| < e => \backslash mгх_{Пк} = Ь.$$

Теорема доказана.

<u>Замечание.</u> Если последовательность $\{x_„\}$ не имеет предела, то это не значит, что из нее нельзя выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел.

Так, последовательность {(—!"')} предела не имеет, как было доказано ранее, однако из нее можно выделить, по крайней мере, две подпоследовательности:

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots$$

и

$$-1,\ -1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \ldots,$$

каждая из которых имеет предел единицу и минус единицу соответственно. Более того, имеет место

Теорема 2.17. **Теорема Больцано—Вейерштрасса.** *Из любой ограниченной последовательности* {.г'$_{17}$.} *всегда можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел.*

Доказательство.

Пусть все члены последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $a < x_n < Ь$, то есть принадлежат сегменту $[a,Ь]$. Разделим сегмент $[a,Ь]$ пополам, тогда хоть в одной его половине будет содержаться бесконечное множество элементов данной последовательности, ибо, в противном случае, и во всем промежутке $[a, Ь]$ их было бы конечное множество, что невозможно. Пусть $[auk]$ будет та из половин, которая которая содержит бесконечное множество чисел x_a. Длина сегмента [cii.bi] составляет половину длины сегмента $[a,Ь]$, т.е.

$$Ь — a$$

Возьмем произвольный член последовательности $x_{щ}$ G [ffi,6i]. Разделим сегмент [oj,bi] вновь пополам и возьмем сегмент [аг, &г], в котором содержится бесконечное число членов последовательности *{x„}*. Длина сегмента [02,62] равна:

$$62-02 = \frac{Ь\backslash - a\backslash}{\hat{}} = \frac{b-a}{\hat{}}.$$

Возьмем член последовательности $x_{n \cdot 2}$ £ [ао.бг]. такой чтобы *щ* > *щ*. Продолжая этот процесс до бесконечности, на /с-ой стадии его выделим промежуток [ofe,6fe], также содержащий бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$, причем его длина равна

$$Ьк - a_к = \frac{Ь - a}{j_r}.$$

Выберем член последовательности $x_{Пк}$ € [a/$_c$.6/$_c$], причем *щ,* > *Щ*.-\- И так далее. В результате этого бесконечного процесса мы получили (по построению) последовательность сегментов, где каждый последующий сегмент принадлежит предыдущему и длина А;-ого сегмента стремится к нулю при *к* —> со:

$$\text{Ïnn} \ \frac{Ъ-a}{{}_2к} = 0.$$

Последовательность построенных сегментов будет стягивающейся и, по теореме Кантора, существует единственная точка *С,* принадлежащая всем сегментам последовательности. С другой стороны, мы построили последовательность $\{x_{Пк}\}$, которая, по определению, является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что \\$mx_{ПГ}$. — С, Возьмем Ve > 0 и рассмотрим е-окрестность точки С, т.е. интервал

$$(C - e, C + e).$$

Так как lim *(bk — ак)* = 0, то найдется такое число *т,* что

$$[a_m, Ь_m]c \quad (C-e, C + e).$$

А так как мы построили последовательность вложенных сегментов, то все сегменты, номера которых *к* > *т* будут пренадлежать этой окрестности, и, следовательно, все члены подпоследовательности (по построению) с номерами *к* > *т* также будут принадлежать е-окрестности точки *С* т.е.

$$x_{Пк} \ G \ (C - e, C + e) \Rightarrow |x_{,_ч} - C| < e.$$

Итак, для произвольного е > 0 нашлось число т, такое, что для всех членов $\{x_{Пк}\}$, номера котрых *к* > га, выполняется неравенство:

$$|x_{Пк} - C| < e \Rightarrow \text{lim.7:„,.} = C.$$

Теорема доказана.

§ 2.12. Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 2.10. Точка C называется предельной точкой последовательности {з;„}, если существует подпоследовательность $\{x_{Пк}\}$ данной последовательности, такая, что $\lim x_{ПГ}. = C$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса, любая ограниченная последовательность имеет, по крайней мере, одну предельную точку. Рассмотрим множество всех предельных точек ограниченной последовательности {.?;„}. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то есть все се члены принадлежат сегменту *[а, Ь],* то, нетрудно убедиться, что и все ее предельные точки принадлежат сегменту *[а, Ь].* (Предлагается читателю убедиться в этом самостоятельно). Следовательно, множество A предельных точек последовательности $\{x_n\}$ ограничено. По теореме о непрерывности множества действительных чисел, множество A имеет точную верхнюю и нижнюю грани:

$$(\text{sup-A.inf } A).$$

Определение 2.11. Верхним (нижним) пределом ограниченной последовательности называется точная верхняя (нижняя) грань множества ее предельных точек.

Обозначения: $\lim x_n$ — sup A, $\lim x_n = mi\, A$.

Из наших рассуждений следует, что любая ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Равенство нижнего и верхнего пределов есть необходимое и достаточное условие существования предела последовательности в обычном понимании:

$$(\lim x_n = Ь)\ о\text{-}\ (\lim x_„ = \lim x_„ = Ь).$$

Докажем теперь, что если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то существует ее подпоследовательность $\{x_{Пк}\}$, такая что

$$Mmx_{Пк} = +\text{ос}.$$

Неограниченность сверху означает, что какое бы число $к > 0$ мы ни взяли, найдется член $x_{Пк}$ последовательности {ж„} такой, что $x_{„.к} > к$. В качестве $к$ будем брать натуральные числа, т.е. $к = 1$, $к = 2$. $к = 3$

Для каждого из них существуют члены последовательности *{x$_n$},* такие что

$$x_{П1} > 1, \ Xг,., > Z, \ x_{Пз} > о, \ \ldots . x_{Пк} > /с, \ \ldots .$$

А так как таких членов бесконечное множество, то выбираем их так, чтобы *n\ < n% < щ < ... < щ <* .... В результате получаем (по определению) подпоследовательность *{x$_{Пк}$}* последовательности *{x$_n$},* причем

$$(V/c > 0)(3n_{/;})(Vn_m > щ) \Rightarrow\bullet \ \{x_{Пт} > к)$$

(по построению *{x$_{Пк}$})* Это означает, что

$$Итx_{Пк} = +оо.$$

Аналогично можно доказать, что если последовательность *{x$_n$* } неограничена снизу, то из нее можно выделить подпоследовательность *{x„$_ь$},* такую что

$$\backslash imx_{n\cdot k} = — оо.$$

Числа +оо и —оо будем считать, по определению, несобственными предельными точками последовательности *{x$_n$}.*

Из наших рассуждений можно сделать вывод, что любая последовательность имеет как нижний, так и верхний предел. Например, для последовательности, общий член которой задан формулами:

Г 0. и — нечетное;

Xy, — \ n „

(_ 2> *n* — четное,

т.е. 0, 1. 0, 2, 0, 3, 0, 4, ..., 0, п, ...

$$\lim x_„ = +оо, \quad \lim x_n = 0.$$

Предела в обычном понимании не существует.

§ 2.13. Критерий Коти

Рассмотрим вопрос об общем признаке существования конечного предела последовательности *{x$_n$}.* Само определение предела для этой цели служить не может, ибо в нем фигурирует уже тот предел, о существовании которого идет речь. Поставленную задачу решает теорема, принадлежащая чешскому математику Больцапо и французскому математику Коши; ее называют принципом сходимости. Предварительно сформулируем

Определение 2.12. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для произвольного положительного числа e найдется такой номер N члена последовательности, что для всех членов последовательности $x_{П1}$ номера которых $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $\backslash x_n — x_m\backslash <$ е.
Или:

$$(Ve > 0)(3/V)(Vn > N) Л (Vm > N) => (\backslash x_n - x_m\backslash < е).$$

Теорема 2.18. Критерий Коши. *Для того, чтобы, последовательность $\{x_n\}$ им.ела предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость.

Дано: Шпаги = a,- Докажем, что последовательность {ж„} - фундаментальная. По определению предела,

$$(Ve > 0)\{BN)\{Vn > TV) => \backslash x_n - o| < er.$$

Рассмотрим число с/2, для него найдем номер N и возьмем два номера $n > N$ *iarn*> TV; для них одновременно будет

(|*"-*1<§)л(|*«-a|<§).

Рассмотрим

$$\backslash x_n - x_m\backslash = \backslash\{x_n - a) + (а - x_m)\backslash < \backslash x„ - a\backslash + \backslash x_m - a\backslash < - + - = е.$$

Получили, что

$$(Ve > ())(3/V)(Vn > N) Л (Vm > TV) =» (|ж„ - ж_п.| < е),$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ ~ фундаментальная.

Необходимость доказана.

Достаточность.

Дано: $\{x_n\}$ фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет конечный предел. Покажем в начале, что {а;$_п$} ограничена. Возьмем е = 1. Для него укажем помер /V такой, что для всех и > /V будет выполняться неравенство

\X„ - X'Af+il < !•

Это следует из определения фундаментальности, в котором положили $m = N + 1 > N$. Из последнего неравенства, получаем:

\x„\ - |ЖЛ'+]| < \%n - Ждг+il < 1 => $\backslash x_n \backslash$ < 1 + |x^+i|

в силу транзитивности неравенств. Обозначим

M = max{|a;i|, |ж$_2$|, ..., | ждг [, |a;,v+i|+1}.

Тогда

(Vn)(|s„| < M)

и, следовательно, {ж„} - ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_n,.\}$, такую, что

$$\lim x_{Пк} = C.$$

Докажем, что этот же предел C будет иметь и фундаментальная последовательность $\{x_n\}$. Возьмем $Ye > 0$ и рассмотрим e/2. Для него найдем число Nj, такое, что

$(Vn_k > Ni) => (\backslash x_{Пк} - C\backslash$ < |)

(по определению предела), а также найдем число No. такое, что V??, > No и $rik > N2$ будет выполняться неравенство

\x„ — x„$_к$\ < —

(это следует из фундаментальности {ж,,}). Возьмем Л' = max(/V], Л^). Тогда для (Vn > TV) Л (п/$_с$ > N) будут выполняться оба неравенства:

(К -С|<|)л(|х„-.г$_ч$|<|).

Рассмотрим |.т„ — С|:

|.т„ - С| = |ж„ - х„$_{fc}$ + $x_{Пк}$ - $C\backslash$ < $\backslash x$„. - x„,,\ + $\backslash x_{Пк}$ - $C\backslash$ < $\frac{£}{-}$ + $\frac{c}{-}$ = e.

Получили, что для произвольного $г$ > О нашлось число N, такое, что для всех членов последовательности, номера которых $n > /N$, выполняется неравенство $\backslash x$„ - $C\backslash < e => ИmX_n = C$. Теорема доказана.

Часть III

Предел функции

§3.1. Предельные точки множества

Определение 3.1. Точка a называется предельной точкой множества A, если любая окрестность точки a содержит, по крайней мере, одну точку множества A, отличную от a.

Замечание. Легко доказать, что если точка a предельная точка множества A, то любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек, принадлежащих A.

Рекомендуем студентам этот факт доказать самостоятельно.

Пусть A' - множество предельных точек множества A.

Примеры.

1) Л = (!) = > Л ' = {0};

2)A= [a,Ъ] => A'= [a,Ъ];

Ъ)A = (o , Ь) = > Л ' = *[a.Ь].*

Не стоит путать предел последовательности и предельную точку множества, хотя они иногда совпадают (пример 1). Предел у последовательности один (или ни одного), а предельных точек может быть бесконечное множество (примеры 2,3).

Однако, имеет место связь между пределом последовательности и предельной точкой множества.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы точка a была предельной точкой множества A. необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность {x„} попарно различных точек множества A, такая, что* $\lim x_n = a$.

Доказательство. Необходимость.

Дано: a — предельная точка множества A *(a* G *A')*. Рассмотрим окрестность $(a - 1, a + 1)$ точки a. По определению, существует элемент множества *A x* G (а - *1,a* + 1). Рассмотрим окрестность (а - *\,a* + ±). Найдется элемент *(x_2 £ A) Л (x_2 ф x{),* так как любая окрестность точки *a* содержит бесконечное число элементов множества *A.* Продолжим далее процесс построения окрестностей и выбора точек. На n-ом шаге получим окрестность

(о - - , 1 + -) ,

в которой найдется элемент

x_n G *A* Л *{x_n -ф x_n-i ф ... ф x_2 ф X]).*

Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность *{x„}* попарно различных точек множества *A,* таких, что

(Vra) *(a*——< x_n < *a* + -) .
\ *n* *n/*

или

\x_n — *a*\ < — => lim x_n = *a.*
n

Необходимость доказана.

Достаточность.

Дано: существует последовательность *{x_n}* попарно различных точек множества *A,* такая, что Нтж,$_г$ = *a.* По определению предела, какой бы малой ни была произвольная е-окрестность точки а, начиная с некоторого номера, все члены последовательности *{x,,}* будут находиться внутри этой окрестности. Таким образом, по определению, точка *a* есть предельная точка множества *A.*

§3.2. Предел функции

Пусть функция *y* = /(ж) определена на множестве *X,* а *xo* предельная точка множества *X* (ж$_0$ G *X').* То есть в самой точке x_0 функция *y* = *f[x)* может быть определена, а может быть не определена, но к точке *Xo* можно подойти, как угодно близко, по точкам множества *X.*

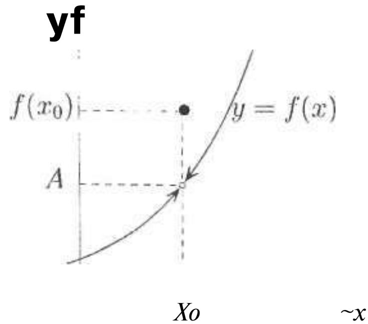


Рис. 15.

Представляет интерес поведение функции *у — f{x)* при приближении *x* к точке *хо*- Пусть при *x,* достаточно близких к точке *XQ,* значения функции *f(x)* неограниченно приблежаются к числу *А* (см. рис. 15), то есть *\f(x) — А* становится меньше сколь угодно малого положительного числа е. При этом предполагается, что *x* приближается (или стремится) к точке ґо как слева, так и справа, т.е. попадает в некоторую "проколотую" й-окрестность точки *Хо*-

$$0 < \backslash x - ж_0| < 6.$$

Сама точка жо из этой окрестности выброшена. Радиус окрестности *6* зависит от выбора числа *Е.* С помощью числа *е* > О мы задаем близость между /(ж) и числом *А,* число *6* указывает для каких *x* эта близость будет осуществляться *(5* играет такую же роль в определении предела функции, как и номер *N* в определении предела последовательности).

Определение 3.2. Если для произвольного положительного числа *е* можно указать такое положительное число *5,* что для всех значений ж, удовлетворяющих неравенству $0 < \backslash x — жо| < б,$ будет выполняться неравенство $|/(ж) — A\backslash < г,$ то говорят, что функция /(ж) при ж стремящемся к Жо (или в точке Жо) имеет пределом число *А.* Символически это записывается так: $\lim\limits_{X—*Xo} /(ж) = A.$ Запишем это определение в кваиторной форме:

$$(\lim /(ж) = A) = (Ve > 0)(3<5 > 0)(Уж)(0 < |ж - »о| < 6) =»$$

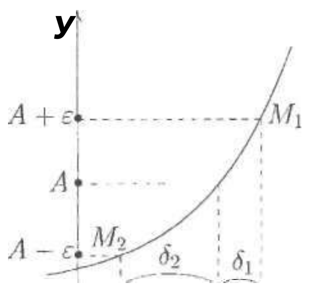
$$=>\backslash f\{x)-A\backslash \quad <c.$$

Данное определение предела функции на языке *"е — 6"* (эпсилон-дельта) принадлежит математику Коши и называется "определением предела по Коши". Следует отметить, что предел функции в точке и значение функции в точке могут не совпадать (этот факт имеет место на рис. 15). Определение предела можно сформулировать иначе (на языке окрестностей), если раскрыть знаки модулей в определении 3.2. Получим, что для

$$(x_0 - 6 < x < x_0 + 8) \text{ Л } (x \wedge xo) \Rightarrow A - e < /(ж) < A + c.$$

<u>Определение 3.3.</u> Число *А* называется пределом функции $y = /(ж)$ при *х* стремящемся к жо (в точке Жо), если для любой е-окрестности точки *А* можно указать такую проколутую (^-окрестность точки .г'о, что как только значения *х* попадают в эту (^-окрестность, так соответствующие значения функции $y = /(ж)$ попадают в £-окрестность точки *А* (Суть определений в том, что по заданному е нужно найти *5).*

Проиллюстрируем это на графике (рис. 16).



%Ъ — 02 ~Т u'О^О + *0\X*

Рис. 16.

Выбираем е > 0. Отмечаем на оси *OY* точки *А* + е и *А* — е, через них проводим прямые, параллельные оси *ОХ* до пересечения с графиком функции (точки *М]* и Мг). Далее, точки *М* и M_2 проектируем на ось *ОХ,* получаем точки Жо-й'а и *XQ+SI* (определены числа *Si* и <Ь). Из о'і и (5г выбираем наименьшее и обозначаем его *S [5* = min(di.$2)). По произвольной окрестности точки *А* построим ^-окрестность точки *хо-* Легко видеть из графика, что для любого *х* е $(ж_0 - 8, x_0 + S)$ соответствующее значение функции попадет в £-окрестность точки *А.*

Примеры.

Доказать, на основании определения предела функции, что:

1)Ит(4ж +2) = 6;
x–Л

2)limcos(x") = 1.

ж–-0

1)

(Нт(4ж+2) = 6) =' (Ve)(3<5 > 0)(Vx)(0 < |ж-1| < *8)* =* |(4ж+2)-6| < *е.*

Чтобы по произвольному е найти *6,* разрешим последнее неравенство относительно |ж — 1|.

|(4ж + 2) - 6| <*е*=> |4ж - 4| < *с* => 4|.г - 1| < *с* =>• |ж - 1| < -.

Получили, что как только *x* — 1| < е/4, так будет выполняться неравенство |(4ж + 2) — 6| < *е.* т.е. за *6* можно взять $\frac{c}{4}$ *(5 =* $\frac{c}{4}$).

2)(Итсо8Ж = 1) = (Ve > 0)(Э* > 0)(Уж)(0 < *x*\\ < *6)* =• | cos.г- - 1| < е.
г*–*0

Для отыскания <$ восполт>зуемся неравенством:

• 1 1 1 I I я
SlllX'l < *x*\\ для 0 < |ж| < —,

а так же свойством транзитивности неравенств. Будем иметь:

•>
| cos *x* — 1| = 2 sin^{2}T^ <*x*~— < е.

Из последнего неравенства следует, что как только *x*\\ < 2-у/ё, так | cosx| < £, следовательно й = 2\/£.

Рассмотрим еще одно определение предела функции, которое принадлежит математику Гейне-определение на "языке последовательностей"

Пусть *x*\\, ,Т2,..., ж л,... - любая последовательность значений аргумента *x,* сходящаяся к точке Жо (Итж„ = жо). Рассмотрим, последовательность соответсвующих значений функции /(жО, /(ж$_2$),——/(ж„)$_;$. •..

Определение 3.4. Число Л называется пределом функции /(ж) при ж стремящемся к жо, если, какова бы ни была последовательность значений аргумента {ж„}, сходящаяся к точке Жо, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу *А* (Цт/(ж„) = *А).*

Определение предела функции по Котии (определение 3.2) эквивалентно определению предела функции по Гейне (определение 3.4). Докажем этот факт. Докажем, что из определения предела Коши следует определение Гейне.

Пусть $\lim\limits_{m\to a}$ /(ж) = *Ь* но Коши. Это означает, что

(Ve > ())(Э* > 0)(Уж)(0 < |ж - *а*\ < *6) =>* *f{x)* - *Ъ*\ < *Е.*

Возьмем произвольную последовательность {ж,,} из области определения функции /(ж), такую, что x_n —> *а,* или

(3/V)(Vn > TV) => |ж,, - а| <*6.*

Но для таких x_n, в силу определения Коши, будет выполняться неравенство

\f(x)-b\<e(yn>N).

В результате получили, что

(Ve > 0)(37V)(V?z > *N)(\f(x_n)* - *Ь*\ < *e) =>* (lim Дя») = *Ь)-*

в силу определения предела последовательности. Таким образом, какую бы последовательность *{x_n}* мы ни взяли, такую что Итж,, = *а,* соохветсвующая последовательность значений функции {/(ж,,)} будет стремиться к *Ь.* А это означает, что $\text{lira}\limits_{x\to o}$ /(ж) = *Ь,* по определению Гейне.

Докажем, что из определения предела функции по Гейне следует определение предела по Коши.

Пусть для любой последовательности *{x_n}* значений аргумента, такой что lim ж,, = *а,* соответсвующая последовательность {/($ж_{71}$)} значений функции стремится к числу *Ь. (\imf(x_n) = Ь.)* Предположим противное, что $\lim\limits_{x\to a}$ *f(x) ф Ь* в смысле определения Коши. Это означает, что найдется такое ео > 0, что какое бы число *6* > 0 мы ни взяли, найдется такое значение *xs,* для которого одновременно будут выполняться неравенства

(О < \x_6 -*а*\<*6)Л (\f(x_s) -Ь\> e_0).*

В кваиторной форме:

($3e_0$)(W > 0)(Эа:,) => (0 < \x_5 - *а*\ < *6)* Л *(\f{x_6)* - *Ь*\ > e_0).

Будем брать *5* в виде 6_n = —, где *n* принимает все натуральные значения. Для *6=1* найдется жь такое, что

(|$ж_1$ - а|< 1) Л (|/($ж_1$) - Ь|> e_0).

Для *6 = 2* найдется x_2j такое, что

$$(1*2 - «I < 2)^{Л} (1 / Ы - Ь| > e o).$$

И так далее, на *к*—ом шаге для *6 = к* найдется $x_к$, такое, что

$$(\backslash x_k - a\backslash <\sim) A(\backslash f(x_k) - b\backslash > s_0).$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим последовательность $\{x_n\}$, члены которой удовлетворяют неравенству

$$\overset{i}{\backslash} x_n - a' < \frac{1}{n}';$$

откуда, следует, что lim:r_n = *a*. Однако |/(.т,,.) - *Ь* > e_0, то есть соответствующая последовательность {/(ж,,)} значений функции не стремится к *b (\imf(*x_n*)* ^ 6)). А это противоречит определению Гейне предела функции. Значит, наше предположение о том, что $\lim\limits_{X—к/}$ *f(x) ф b* по Коши оказалось неверным, что доказывает утверждение об эквивалентности двух определений.

<u>Замечание</u>. Если существуют две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ значений аргумента, такие что (lim x_n = a) Л (lim y_n = a), а соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ имеют различные пределы (или не имеют их вовсе), то это означает, что не существует предела функции *f(x)* при *x —> a (Д* lim *f{x)),*

<u>Пример.</u>

Доказать, что *Д* $\lim\limits_{x \to 0}$ sin$\frac{-}{X}$.

Рассмотрим две последовательности

$$\{*_{,,}\} = \ ^\wedge \text{ и } \{y_{,,}\} = j \pm \ ^\wedge .$$

Очевидно, что

$$\lim . x_{,,}, = \lim \frac{}{7ГП} = O,$$

$$\lim y_{,,} = \lim fT^{\wedge} = 0 -$$

Рассмотрим соответствующие последовательности значений функции

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin 7гп \text{ и } \sin \frac{1}{Уп} = \sin \Big(\frac{\cdot}{К2} + 2mm \Big).$$

Члены последовательности {sin7rn} все равны нулю, следовательно, и предел ее равен нулю. Члены последовательности *I* sin(—+*2im* J [равны единице и предел равен единице. Это означает, что

/Slimsin—.
ж->0 ж

Аналогично можно доказать, что

/Э lim cos —.
х—>0 *X*

Следствия:

/3 lim sin (ж), /3 lim COS(.T).
я—*оо *х—юо*

§3.3. Теоремы о пределе функции

Теорема 3.2. О локальной ограниченности. *Если функция у* = /(ж) *имеет, конечный предел при х* —> Жо, »по ока *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки XQ.*

Доказательство.

Пусть lira /(ж) = 6. Это означает, что

(Ve > 0)(Э<5 > 0)(V.?;)(0 < |ж - $ж_0$| < *S)* =>

=4> (|/(ж) - Ь| < е) = ^ 6 - е < /(ж) < 6 + е.

Обозначим (при фиксированном *е) b* - е = *т,Ь* + *е* = *М.* Получим, что для всех ж, из проколотой ^-окрестности точки $ж_0$, выполняется неравенство *т* < /(ж) < *М.* Это по определению означает, что /(ж) ограничена в данной окрестности.

Теорема 3.3. *Если*

lim /(ж) = а,
X—>Xo

lim </?(ж) = &,
х—>хо

то

lira [/(ж) ± у?(ж)] = а ± 6,
х-»хо

$$\lim_{£->.T_0} /(ж) \cdot ip\{x) = ab,$$

$$\mathbf{i\text{-}} \quad f(^x) \quad \mathbf{a} \quad , \quad ,$$
$$\lim \;\sim\hat{}г = -, \text{ если } b \text{ ф } 0.$$

<u>Доказательство</u> проведем для случая произведения функций.

Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, такую, что Итж„ = Жо. Тогда

(Нт/(ж„.) = *а)* Л *{\\т<р{х_п) = Ь).*

Рассмотрим последовательность {/(ж„) • </?(ж_п)}. В силу теоремы о пределе произведения последовательностей, lim Дж„) • (/?(ж„) = *ab.* А это, в силу определения предела функции по Гейне означает, что

$$\lim_{x->xn} f(x)(p(x) = ab.$$

Случаи суммы и частного функций рекомендуется студентам доказать самоетоятельно.

<u>Теорема 3.4. **О сохранении знака.** *Если*</u> $\lim_{X—сто}$ /(ж) > 0 (< 0), *то найдется проколотая окрестность точки хо в которой* ,/'(ж) > 0 (< 0).

Доказательство.

Пусть $\lim_{ж->ж(|}$ = Ь > 0. Возьмем е = 6. По определению предела, имеем, что для

$$(г = 6)(3£)(Уж)(0 < |ж - ж_0| < 5) =\bullet \; \backslash f(x) \; -b\backslash<b\hat{}$$

$$=> -b < /(ж) - b < b => 0 < /(ж) < 2b => /(ж) > 0$$

для всех ж. принадлежащих проколотой ^-окрестности точки Жо- Теорема доказана.

<u>Следствие. Если</u> $Шп_{X—>X0}$ /(ж) > $\lim_{X—T\text{-}o}$ *g(x),* то существует проколотая окрестность точки Жо, в которой /(ж) > *д{х).*

<u>Доказательство.</u>

$$(\lim_{X\text{-}fXo} \;' /(ж) > \lim_{ж\text{-»}.т_0} ,д(ж)) => \lim_{x\text{-*}xo} [/(ж) - .9(1)] > 0 =\!*\bullet$$

$$=> (3д\sim)(Уж)(0 < |ж - ж_0| < д")(./'(ж) - д(x) > 0) => (/(ж) > £?(»))\bullet$$

Теорема 3.5. *Если в некоторой проколотой окрестности точки X,Q f(x) > д{x) и существуют пределы* (lim /(x) = о) Л (lim *g(x) = b), то* ***а. >Ь.***

Доказательство проводится методом от противного, со ссылкой на доказанное выше следствие, подобно тому, как это было проделано в случае последовательностей. Провести рассуждения самостоятельно.

Теорема 3.6. **О пределе промежуточной функции.** *Если в некоторой So-окрестности точки хо функции связаны неравенствами*

f(x) < ф) < д(x) (47)

и $\lim\limits_{X\text{—>Жо}}$ /(ж) = $\lim\limits_{X\text{—KCo}}$ *д(x) = А, то существует предел функции <р(x) в точке Хо, тоже равный А.*

Доказательство основано на определении предела функции.

(lim$_{X\text{—*XQ}}$ *f{x) = A)* =^{f} (Ve > 0)(3d'i)(Va?)(0 < \|*x* - *x*$_0$\| < ft)

=> \|*f(x)* -*A*\|<*e*=>*A*-*s*< *f(x)* < *A* + *e*. (48)

(**lim**$_{X\text{—*XQ}}$ *g{x) = A)* =' (Ve > 0)(3tf$_2$)(Va:)(0 < |ж - ж$_0$| < *6$_2$)*

=> \|*g{x)* - A | < e = > A - e < *g(x)* < *A* + *e*. (49)

Возьмем *S = 011x1(60,61,62),* тогда для всех *x,* принадлежащих проколотой ^-окрестности точки Жо, будут выполняться все три неравенства. (47)-(49).

Присоединяя к левой части неравенства (47) левую часть неравенства (48), а к правой части (47) - правую часть (49), получим

A - e < /(ж) < *<p(x)* < *g(x)* < *A* + *c* =>

A - e < *ip(x)* < *A* + £ => \|***ip(x)*** -*A*\|<*e*

для все *x,* принадлежащих проколотой d-окрестности точки *хо*- Из чего следует, что $\lim\limits_{X\text{—>xo}}$ *<p(x) = A,* по определению Коши.

Теорема доказана.

§3.4. Определения предела функции на бесконечности и бесконечных пределов

Сформулируем эти определения в кванторной форме. Студентам рекомендуем их записать в словесной формулировке.

Определение 3.5,

(Jim^x) = o) =' (Ve > 0)(ЗД > *0)(Щ{х* > Д) =• |Дж) - *а* < *е.*

Определение 3.6.

(Jim^/fr) = *b)* =^f (Vc > **0)(ЭД** > *0)(Ух)(х* < -Д) =» |/(ж) - 6| < е.

Определение 3.7.

(lim *f(x)* = *с)* =^7 (Vs > **0)(ЭД** > 0)(Уж)(|ж| > Д) => |/(х) - с| < е.
ж-^ос-

Определение 3.8.

(lim /(ж) = оо) =^J (VE > 0)(3<5 > 0)

(Vx)(0 < |х - а| < <5) =• (|/(ж)| > Е).

Самостоятельно записать случаи ±оо.

Определение 3.9.

(lim *f(x)* = оо) =' (V/5 > 0)(ЭД > 0)(Уж)(|ж| > Д) => (|/(ж)| > £).

Рекомендуем читателю сформулировать определения того, что

lim *f(x)* = +оо, **lim** *f(x)* = -оо,
х—•-Нос ' *х*—Ч-оо
lim /(ж) = +оо, lim /(ж) = -оо.

§3.5. Неопределенные выражения

На случай функции непрерывного аргумента, рассматриваемый нами сейчас, автоматически переносится все сказанное для функции натурального аргумента (последовательности) относительно "неопределенных выражений", условно характеризуемых символами:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty.$$

Для раскрытия неопределенных выражений существуют так называемые "замечательные пределы", с одним из которых мы ранее познакомились. Это $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Обобщим его на случай функции непрерывного аргумента. Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (50)$$

Доказательство состоит из двух пунктов.

1° Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть $\{n_k\}$ произвольная подпоследовательность натуральных чисел, $\lim n_k = +\infty$. Тогда, из того, что

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \qquad (51)$$

в силу теоремы о единственности предела последовательности и ее подпоследовательности. Рассмотрим теперь последовательность $\{x_k\}$, такую, что $\lim x_k = +\infty$. Обозначим $n_k = [x_k]$ (целая часть от x_k). Очевидно, что $\lim n_k = +\infty$ и $n_k \le x_k < n_k + 1$. Так как при этом

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} < \frac{1}{n_k},$$

то

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Два крайних выражения могут быть преобразованы так:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\cdot\frac{n_k+1}{n_k+2}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right) \qquad (53$$

Так как, в силу (51),

$$\lim\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)$$

$$\left(\lim\frac{n_k+1}{n_k+2}=1\right)\wedge\lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=1.$$

то пределы выражений (52) и (53) равны e, откуда следует, в силу теоремы о пределе промежуточной последовательности, что

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

На основании определения предела функции по Гейне, получаем что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (54)$$

2° Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (55)$$

Сделаем замену $x=-t-1$. Если $x\to-\infty$, то $t\to+\infty$. Рассмотрим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot1=e.$$

Формула (55) доказана. Из формул (54), (55) следует что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (56)$$

Как было сказано ранее, предел (56) называют "первым замечательным пределом". Он лежит в основе всех приложений числа e. Рассмотрим некоторые его следствия.

1) Заменим в выражении $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ переменную x на $\frac{1}{y}$, получим

$$\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e. \qquad (57)$$

2) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0}$————. Здесь мы имеем неопределенность вида д. Раскроем ее, сведя к первому замечательному пределу (57). Имеем:

$$\lim \frac{ш(1 + ж)}{} = \lim - \cdot \ln(1 + x) = \lim \ln(1 + x)^{*} = \ln e = 1.$$

Итак,

$$\text{Hm}\ \frac{1п(1 + ж)}{} = 1. \qquad (58)$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a? - 1}{x}$ Здесь также имеем неопределенность вида ^. Сделаем замену

$$a'' - 1 = y \Rightarrow a^{x} = 1 + y \Rightarrow x = \frac{1п(1+'y)}{\ln a}.$$

Если $x \to 0$, то $y \to 0$. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{7'} - 1}{Ж} = \lim_{y\to 0}\frac{y \ln a}{\ln(1 + J/)} = \text{Um}\ \frac{\ln a}{lщ1+y} = \ln a.$$

в силу формулы (58).

В частном случае, когда a = e, имеем

$$\lim \frac{e^{x} - 1}{} = 1. \qquad (59)$$

Установим теперь следующий важный результат:

$$\lim \frac{\sin x}{} = 1, \qquad (60)$$

который позволит раскрывать неопределенности вида | в тригонометрических выражениях. Предварительно докажем некоторые полезные неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < -). \qquad (61)$$

В круге радиуса Я рассмотрим острый угол $\angle AOB$, хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (рис. 17). Имеем:

площадь ΔAOB < площади сектора AOB < площади ΔAOC.

Если x - радианная мера угла $\angle AOB$, то длина дуги AB равна произведению Я $\cdot\, x$ и данные неравенства перепишутся в виде:

$$\frac{}{2}Я^{2} \cdot \sin x < \frac{}{2}Я^{2} \cdot x < \frac{}{2}Я^{2} \cdot \operatorname{tg} x,$$

в?
откуда, после сокращения на —, получаем неравенства (61).

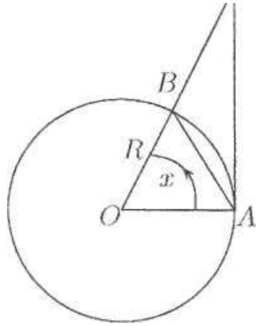


Рис. 17.

Докажем теперь равенство (60). В предположении, что $0 < x <$ $\frac{\pi}{}$, разделим на sin.7; каждый член неравенств (61), получим

К4-<-1 cos ж <$\frac{\text{smi}}{}$< 1.
sin Ж COS X

Последнее неравенство справедливо для $0 < |ж| <$ $\frac{\pi}{}$, в силу четности входящих в него функций. Пусть теперь x —> 0, по доказанному ранее, limcosa; = 1. По теореме о пределе промежуточной функции, получаем равенство (60), которое назовем "вторым замечательным пределом". Вот некоторые его следствия:

1) Иra — — — lim -r— = - = 1;
х-оэтж ! - о ^ 1
x

2) lim - 2 - = lim$\frac{\sin.x}{X}$ $\frac{1}{\text{COS Ж}}$= 1-1 = 1;
ж->0 Ж ж->0

3) lim———— = [arcsina; = y => (ж = sin y) => (y —> 0 при ж —> 0)]
x^O x

= lim
y->o sm y

4) lim$\frac{\text{arctgx}}{ж}$— = 1 получаем заменой arctga: = y.
i-»o

Пример 1. Вычислить lim$\frac{1 - \cos ж}{5}$

Очевидно, мы имеем дело с неопределенностью -. Преобразуем числитель: 1 — cos ж — 2 sin" —, тогда

1 — cos ж ,. 1/sinf\ ^2
lim——г — = Inn - —r^ = 1,
*->o x^2 2 V I /

так как lira sinf - - = 1, в силу (60).

Пример 2.

.. tgz-sinz .. — — sin as- sinx(1 - cos ж)
lira —жт——= lira ^^ —ж5——= lira
0 ж→0 x→0

= 1/2 lira sin ж / x • /sin|\ ^2 ±) 1 / cos ж = 1/2.
^o V

§3.6. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 3.10. Функция y = /(ж) называется бесконечно большой величиной (б.б.в.) при x —• a (или в точке а), если Ига /(ж) = ос.

Определение 3.11. Функция y = а(ж) называется бесконечно малой величиной (б.м.в.) при ж —> a (или в точке a), если lira а(ж) = 0.
г—>а

Или:
а(ж) - бесконечно малая величина в точке x = a, если

(Ve > 0)(3(5)(Уж)(0 < |ж - а| < tf) => \a(x)\ < e.

Бесконечно малые величины будем обозначать *a(x),(3(x),j(x),....* обязательно с указанием точки, в которой эта величина, является бесконечно малой (б.м.в.).

Так как опеределения бесконечно малой величины и бесконечно большой величины для функции непрерывного аргумента такие же как и для последовательности (но обязательно с указанием точки), то теоремы о бесконечно малых величинах и бесконечно больших величинах анало гичны соответствующим теоремам для последовательностей.

Сформулируем их и приведем доказательства лишь некоторых из них.

3.7. Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших величинах

<u>Теорема 3.7.</u> *Сумма конечного числа бесконечно малых величин в точке $x = a$ есть величина бесконечно малая в этой точке.*

Доказательство основано на определении бесконечно малой величины.

Пусть $a(x)$ и $P(x)$ - бесконечно малые величины в точке $x = a$. Возьмем Ve > 0 и рассмотрим —. Для него

$$(35, > 0)(\mathrm{Va:})(0 < \backslash x - a\backslash < <5_{,}) => \backslash a(x)\backslash < |, \tag{62}$$

а также

$$(35_{2} > 0)(\mathrm{Vj;})(0 < \backslash x - a\backslash < 6_{2}) => \backslash 0\{x)\backslash < |. \tag{63}$$

Возьмем 6 — min((5i, $62)$- Тогда (Уж) (0 < $\backslash x — a\backslash < 6)$ будут выполняться оба неравенства (62) и (63). Имеем:

$$|\mathrm{a(ж)} + P(x)\backslash < \backslash a(x)\backslash + \backslash p(x)\backslash <\backslash + \backslash = *-$$

Итак.

$$(\mathrm{Ve} > 0)(3<\mathrm{J})(\mathrm{Va:})(0 < \backslash x - a\backslash < 6) => \backslash a(x) + ,в\{x)\backslash < e$$

Следовательно, $a(x) + /3(x)$ - бесконечно малая величина в точке $x = a$. Теорема доказана.

Для случая $к$ бесконечно малых рассуждения аналогичны.

Теорема 3.8. *Произведение бесконечно малой величины в точке $x = a$ на функцию, ограниченную в некоторой окрестности точки a, есть бесконечно малая величина в точке a.*

Доказательство.

Пусть *f(x)* ограничена в некоторой ^-окрестности точки *a*. Это значит

$$(Ш > ())(V.T)(|X - a\backslash< 6_г) => (|/(.г)| < M). \qquad (64)$$

Если *a(x)* - бесконечно малая величина в точке о, то

$$(Ve > 0)(3fe)(Vx)(0 < |гг - a| < <S_2) =» |a(ж)| < p- . \qquad (65)$$

Возьмем и" = min(rf$_1$,^2), тогда (\/ж)(() < \x - a\ < 5) будут выполняться оба неравенства (64) и (65). Рассмотрим

$$\backslash a(x).f(x)\backslash = \backslash a(x)\backslash\backslash f(x)\backslash<--M.$$

То есть

$$(Ve)(35)(Vx)(0 < |ж - a\backslash < 6) => \backslash a\{x)f\{x)\backslash < e,$$

и а(ж) • /(ж) - бесконечно малая величина в точке $x = a$. Теорема доказана.

Теорема 3.9. **О связи бесконечно малых и бесконечно больших величин.** *Если a(x) - бесконечно малая величина в точке а, отличная от нуля, то —^—г есть бесконечно большая величина в этой точке. И обратно, если fix) - бесконечно большая величина в точке x = a, то*

Доказательство проведем только для первой части теоремы. Вторую часть рекомендуем доказать по аналогии самостоятельно.

Итак, *a(x) ф* 0 - бесконечно малая величина в точке *a*. Возьмем произвольное, сколь угодно большое, число В > 0 и рассмотрим *e* = —. По Ђ определению бесконечно малой величины имеем

$$(Ve = !)(3*)(VaO(0 < |ж - a\backslash < 5) =Ф- |«(ж)| < £'$$

Из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{a\{x)} >E.$$

То есть

$$\{\backslash/E > 0)(3d)(Уж)(0 < |ж - о| < 6) \quad \frac{}{a(x)} > E,$$

а это, но определению, означает, что $\frac{—}{a(x)}$ - бесконечно большая величина в точке $x = a$.

Теорема 3.10. *Сумма бесконечно больших величин одного знака в •точке а есть бесконечно большая величина того же знака.*

Теорема 3.11. *Сумма бесконечно большой величины- точке $x = a$ и функции, ограниченной в окрестности точки $x = a$, есть бесконечно большая величина в точке а.*

Определение 3.12. Функция *u(x)* называется отделимой от нуля в окрестности точки $x = a$, если для всех x из этой окрестности выполняется неравенство |г/.(ж)| $> d > 0$.

Примером отделимой от нуля функции является функция, предел которой в точке a отличен от нуля.

Теорема 3.12. *Произведение бесконечно большой величины, в точке $x = a$ на отделимую от нуля в этой точке есть бесконечно большая величина в точке а.*

Теорема 3.13. *Произведение бесконечно больших величин в точке а есть бесконечно большая величина в этой точке.*

Пример. Вычислить lima; • sin x

Как раньше было доказано. Д $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{-}{x}$, однако $\sin\frac{1}{x} < 1$ для любых x, а первый множитель является бесконечно малой величиной в точке $x = 0$. Поэтому, в силу теоремы 3.8, ж-sin - - бесконечно малая величина в точке $x = 0$, т.е.

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{—}{x} = 0.$$

§ 3.8. Сравнение бесконечно малых величин

Пусть *a{x)* и *P(x)* две бесконечно малые величины при $x \to a$. Характер приближения к нулю *a{x)* и *P{x)* может быть различен, т.е. одна из них будет стремиться к нулю быстрее, чем другая. Так, например, $a(x) = ж^2$ при ж —> О стремится к нулю медленнее, чем $(3\{x) = ж^5$. Во многих случаях представляет интерес сравнение бесконечно малых между собой по характеру их приближения к нулю.

В основу сравнения двух бесконечно малых $a(x)$ и $/3(x)$ кладется пове лениеих_ отнотто н и я При этом предполагается, что бесконечно малая величина, стоящая в знаменателе, не обращается в ноль в некоторой окрестности точки a. Возможны четыре случая:

$$\lim_{x \to a} \frac{a(x)}{p[x)} = \begin{cases} A \ne 0 & (1^\circ) \\ 0 & (2^\circ) \\ \infty & (3^\circ) \\ Д & (4^\circ) \end{cases}$$

В случае 1° $a(x)$ и /3(ж) считаются бесконечно малыми одного порядка в точке a.

В случае 2° $a(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $P(x)$ и называется бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем $P(x)$. Символически это записывают так: $a(x) = o[(3\{x)\}$.

В случае 3°, наоборот, $P(x)$ стремится к нулю быстрее $(p(x) = o[a(x)])$. $a(x)$ в этом случае называют бесконечно малой величиной более низкого порядка, по сравнению с $P(x)$.

Если предел отношения бесконечно малых не существует (случай 4°), то они не сравнимы между собой.

Примеры.

1) $a(x) = x$, $P(x) = 1 - \cos ж$.

$$\lim_{*\to 0} \frac{m}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{г \to 0} \frac{§}{\sin §} \cdot \frac{1}{\sin §} = \infty,$$

(т.к. $\lim_{a \to 0} \frac{§}{\sin §} = 1$ и $\lim_{* \to 0} \frac{1}{\sin f} = \infty$), значит,

$$1 - \cos ж = o(x) \text{ в точке } ж = 0.$$

2) $a(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$, $P(x) = x^2$ бесконечно малые величины в точке $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2} = \lim_{ж \to 0} \frac{1 - \cos ж}{ж^2} \sin ж \frac{1}{\cos ж} = 0,$$

(как произведение бесконечно малой величины на ограниченную), то

$$tgx — \sin ж = o(x^2) \text{ в точке а; } = 0.$$

3) бесконечно малые $a(x)$ = .7;[2]sini, $j3\{x)$ = x^2 в точке x = 0 не сравнимы между собой.

Действительно,

$$\underset{a;\to 0}{\text{hm}}\frac{x\text{- sin -}}{x^{\prime}}\text{"- — }\underset{ж\text{-+}0}{\lim}\sin\frac{1}{x}\text{ -}.$$

Последний предел, как было доказано ранее, не существует.

§3.9. Порядок бесконечно малой

Иной раз встречается надобность в более точной сравнительной характеристике поведения бесконечно малых, в выражении их порядков числами. В качестве "эталона" выбирают одну из бесконечно малых и считают ее основной. Обычно это бесконечно малая величина простейшего вида. Так, в точках x = 0, ж = а, x = ос основные бесконечно малые, соответственно, будут $a(x)$ = ж, /?(ж) — $(x — a)$, 7(ж) = -.

Определение 3.13. Бесконечно малая величина $P(x)$ в точке о называется бесконечно малой величиной /с-го порядка, если

$$\lim_{x\hat{} a}\frac{в(x)}{(x-a)^{к}} = A \, ф \, 0 \quad (k > 0).$$

Например, а (ж) = 1 — cos ж - в точке ж = 0 есть бесконечно малая величина 2-го порядка, так как

$$\underset{z\text{-}o}{\text{lira}}\frac{1 - \cos ж}{ж^2} = \frac{1}{2}.$$

Бесконечно малая величина $(3(x)$ = tg.x - sin ж в точке ж = 0 имеет третий порядок, т.к.

$$\underset{ж\to o}{\text{hm}}\frac{\text{tg } ж — \sin x}{ж^3} = \frac{1}{2}.$$

Особенно важным частым случаем бесконечно малых одного порядка являются эквивалентные бесконечно малые.

§ 3.10. Эквивалентные бесконечно малые

Определение 3.14. Две бесконечно малые в точке *a a(x)* и *0(x)* называются эквивалентными в этой точке, если предел их отношения при *x —* a* существует и равен единице. Символически это обозначается:

a{x) ~ *P{x),* если lim = 1.
x->a *p(x)*

Примеры: в точке *x* = 0 sin ж ~ *x,* tgx ~ ж, arcsina; ~ *x,* arctga; ~ ж, e* — 1 ~ ж, 1п(1 + ж) ~ ж, что следует из второго замечательного предела.

Имеет место

Теорема 3.14. **Критерий эквивалентности.** *Для того, чтобы бесконечно малая величина в точке а a(x) и 0(x) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой величиной более высокого порядка, по сравнению с каждой из них. Или:*

а ж ~ *P* ж) <^=>- hm————————= hm————————= 0 .
з:-**a* *a\X)* *x-*a* *(1{X)*

Доказательство.

Дано: *a(x)* ~ *P{x)* в точке а, т.е.

\шШ = 1.
a{

Рассмотрим

a{x) - p{x) = /а(ж) - *A* = 1 - 1 = 0.
/3(Ж) *-**aЩx)*

Аналогично

hm————————= 0,
ж-»а *Cx(x)*

следовательно,

[а(ж) - */?*(ж) = *o(a(x))]* Л [а(ж) - */3(x) = o(/3(x))].*

Необходимость доказана.

Достаточность. Имеем

lim $\dfrac{a(x) - P(x)}{P\{x)}$ 0=>l'im ($\dfrac{/да(ж)}{xx^*a\|B(x)}$ - 1 ^ - 1) = о

=» hm -^ = 1 =>• а(ж) ~ /?(ж).

<u>Следствие</u>. Пусть при ж —> о бесконечно малая величина 7(ж) представляет собой сумму бесконечно малых величин разных порядков:

$$7(ж) = a(x') +]\Gamma_{t=i}^{n} A(ж),$$

где Д(ж). (г = 1,п) - бесконечно малые величины более высокого порядка, по сравнению с а(ж), т.е.

x-^a a{x)

Тогда вся сумма *j(x)* эквивалентна бесконечно малой величине наиболее низкого порядка *a(x).*

Это следствие применяется при вычислении пределов следующим образом: если в сумме бесконечно малых величин имеется одно слагаемое, которое является бесконечно малой величиной более низкого порядка, по сравнению с остальными, то остальные слагаемые можно отбросить.

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{ж\to о} \dfrac{3.т^4 + 1 - \cos x + 2\sin x}{tg''^* x + x - Ъx^A}$ •

Так как 1 — cos o; ~ —- есть бесконечно малая величина 2-го порядка, sin ж ~ *x* - бесконечно малая величина 1-го порядка, tg^{3}^' ~ $ж^3$ - бесконечно малая величина 3-го порядка, то предел данного отношения можно заменить:

$$\lim_{я\to 0}\frac{2\sin ж}{ж} = 2.$$

Теорема 3.15. *Пусть в точке x = a эквивалентны бесконечно малые величины: a(x) ~ a\(x), /3(ж) ~ 0\{x) и существует предел*

hm /(ж)—г^г = к,
x^a (3(X)

тогда

Ш$_{П}$хШ = к.

Другими словами, в пределе произведения бесконечно малую можно заменять на эквивалентную ей.

Доказательство.

Пусть выполняются условия теоремы, рассмотрим

.ац(ж) , . а(ж) ai(x) /J(ж)
hm /(ж) - ; , = lira *fix)* • Trf-f — -*Hr* • "$_{n}$, \ = *к,*

так как

(lim *f* $_{i}$ $_{x}$ *m* = *к)* Л (Шп «& = 1) Л (lim |M = 1

Теорема доказана.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, составим таблицу эквивалентных бесконечно малых в более общем виде. Пусть *a(x)* - бесконечно малая величина в точке а, тогда sina(z') ~ *a[x).* Это следует из рассуждений:

sina(.x) siny
hm • —т;— = (замена *a(x)* = *y)* = lim——— = 1.
x^a $_{a}$*(x)* *y-*o y*

Итак, имеем:

sina(x) ~ *a(x);*

arcsina(.T) ~ *a(x)*

tga(x) ~ *a(x)*

arctga;(.'r) ~ *a(x);*

e$^{Q(x)}$ - 1 ~ *a(x);*

1п(1 + а(ж)) ~ а(ж),

где *a(x)* - бесконечно малая величина. Эта таблица может быть расширена за счет получения новых эквивалентов.

Примеры.

„ I i m £ f z i _ (' « r ^{S} > ^{1} ~ ^) - I i m ^ - l .
' *x-*0* sin *y/X* V $^{s m}$ V^{x} ~ V$^{э;}$ / "^° *V*^{x}

2) $\lim\limits_{ж\to о} \frac{\ln \cos «ж}{\ln \cos px}$

$$\lim_{*\text{-"о}} \frac{\ln \cos ax}{\ln\cos/3ж} = \lim_{*\text{-о}} \frac{\ln(1 + (\cos aa;-1))}{\ln(1 + (\cos/3ж - 1))} = \sim$$

$$\ln(1+(\cos a.7;-1)) \sim (\cos ax-1) = -2\sin^2 \frac{}{2} \sim -2-f-f = \frac{\sim ^{a} V}{2}$$

$$= \lim_{*\text{-о}} \frac{(-aV) \cdot 2}{2\{-P^2x^2)} \quad \frac{a^2}{/3^2}'$$

§ 3.11. Показательно-степенная функция. Показательно-степенные неопределенности

Определение 3.15. Показательно-степенной функцией называется функция вида:

где п(ж) > 0.

Областью определения ее является общая часть областей определения функций $u(x)$ и $v(x)$.

С помощью чюждества

$$a^b = e^{Ша} \tag{66}$$

показательно-степенную функцию можно свести к показательной:

$$y = u(x)^{yM} = e^{«W™W\}}$$

а следовательно, и

$$\lim и(a.')^{*(x)} = Нт\ e^{"(x),п\,u\{x)} \tag{67}$$

То есть предел показательно-степенной функции сводится к пределу произведения

$$\lim_{x\to a} v(x)\ln u(x) \tag{68}$$

Это значит, что при отыскании предела показательно-степенной функции мы можем столкнуться в выражении (68) с неопределенностью вида

О • сю. Рассмотрим три возможных случая, когда такая неопределенность появляется:

Г lim *v(x)* = 0, lim *ЫU{x)* = +оо => lim *u(x)* = +ос;
£—•<>. *х—ю* *х.-*а*

2° *mv{x)* = 0, lim In it (ж) = —ос =>• Шпи(х) = 0;
а;—*-а :Е—*а

3° *X\mv{x)* = со, lim In «(ж) = 0 => limu(s) = 1.
х—*а. .т—>а .г—из.

Возвращаясь к формуле (67), можно сделать вывод, что при отыска.-нии предела показательно-степенной функции могут возникнуть неопределенности трех типов: ос^0 (1°), 0° (2°), I^{00} (3°).

Раскрываются они, как правило, сведением к неопределенности вида, 0 • ос по формуле (67). Однако, неопределенность 1°° можно раскрыть с помощью первого замечательного предела

lim (1 + *a(x))*^ = *e.* (69)

Примеры

х + 2/

Так как

lim ——г = lim ——^ = 1,
з:-юо X + 2 х->оо 1 + -

то имеем неопределенность вида 1°°. В основании показательно-степенной функции выделим единицу плюс бесконечно малую величину:

х + 3 (ж + 2) + 1 1
***х* + 2** ***х* + 2** **а, + 2**

Обозначим———= *a{x)*. Очевидно, что *a{x)* —» 0 при ж -* со. Получим:
.?: + 2

Н т (^ |) ^{X} = И т (1 + «($_3$;) Г -
.с—>сю V а; -)- / / х—юо

(Выделим замечательный предел (69) и восстановим затем выражение)

= lim [(1 + *a(x))&]*^{x}-$^{ф)}$ = lim е*-$^{a(at)}$ = lim е^ = $_e$,
х-->оо ж->оо ж-юо

так как lim———= 1.
а:~>00 *X* + 2

2) Вычислить lim (cos ж)*'

Так как limcosx = 1, а lima; " = со, то имеем неопределенность 1°°. Прибавлением и вычитанием единицы выделим в основании показательно-степенной функции единицу плюс бесконечно малая величина и создадим замечательный предел (69). Будем иметь:

limYcosx'f"2 = lim(1 + (cos ж - 1)f~2 = [cos ж - 1 = *a(x)*\ =

= n*ʹft*\ m[(1+ *»(x)Г^a{x)) ^a{x)x*~ʹ = Hmexp(^) =

x—tO *{a(x)~*0)* .r—»() \ *X* ʹ

= й exp /eosx-1\ Н9—) = bo exp /-2 sin2 ж/2 \ (—^-) = ex / 1\ ph) = 1 e

так как sin" *т*/2 ~ *т*/4

3.12. Односторонние пределы

Когда мы давали определение предела функции *у* = /(ж) при *х* —> а, мы предполагали, что /(ж) определена в некоторой окрестности точки *х* = а, за исключением, быть может, самой точки *а,* и *х* может неограниченно приближаться к а, как слева, так и справа (попадать в проколотую ^-окрестность точки *а).* Однако, если функция *у* = /(ж) определена на сегменте *[а, Ь]* (или интервале (а, 6)) и нам нужно исследовать ее поведение в точке *а,* мы не можем говорить о пределе /(ж) при ж —> а в обычном смысле, так как /(ж) не определена в окрестности точки ж = а, а определена только в правой полуокрестности этой точки. Поэтому мы можем говорить о неограниченном приближении ж к числу *а* справа, когда ж остается все время больше числа *а.* В данной ситуации мы можем говорить только о правом, или правостороннем пределе функции при *х* —> *а.* Символически правый предел обозначают

/(о + 0) = Hm /(ж).
л;—>о,+0

(Плюс ноль означает, что ж остаются больше *а).* Аналогично, при исследовании /(ж) в точке *Ь,* можно говорить о левом или левостороннем пределе функции в этой точке:

$$/ (о - 0) = \lim_{x—>b—Q} /(ж)$$

(x стремится к *b,* оставаясь меньше 6).

Правый и левый пределы называются односторонними пределами функции /(ж) в данной точке. К введению односторонних пределов вынуждает также задание функции несколькими формулами. Например.

.,   .   Г *2^x,   x>2*
f(^x) = *S*   2   < 2
[*X,,*   *X*

Слева, и справа от точки ж = 2 функция задана различными формулами, поэтому в этой точке следует искать отдельно левый и правый пределы. Легко видеть, что оба они равны четырем.

Сформулируем определения односторонних пределов функции *f(x)* в точке *а* в кванторной форме.

<u>Определение 3.16.</u>

(lim *f{x)* = *A)* =^f (Ve > 0)(35)(Vz)(a < *x* < *a* + *S)* => \/{x) -*A*\<*c*.
V-c—>a+0   /

Определение 3.17.

(lim /(ж) = В) =' (v_e > 0)(3<J)(Vs)(a - 5 < ж < а) => |/(ж) -*B*\<*e*.
x—>a—0   /

Ниже мы сформулируем теорему (критерий существования предела функции в точке), которую рекомендуем студентам доказать самостоятельно. Доказательство основано на определениях предела функции и односторонних пределов.

Теорема 3.16. *Для того, чтобы существовал предел функции* у = /(ж) *в точке x — a, необходимо и достаточно, чт,обы, в этой точке существовали оба односторонних предела и были равны между собой.*

Или:

(э Н т Д ж)) <=> (lim *f(x)* = Нт /(ж)).
\ *x-*a*   /   \x—>*a*—0   т—»a+U   /

Пример.

$$^{s} \quad 3x. \qquad x > 1$$

Найти Иш/(ж).

Так как слева и справа от точки $x = 1$ функция задана разными формулами, то будем искать односторонний пределы.

$$\underset{ж->1-0}{\text{Нщ}} \text{ Дх-)} = 2,$$

$$\lim \text{ /"(ж)} = 3.$$

Односторонние пределы не равны, в силу критерия существования предела, делаем вывод, что не существует предела данной функции в точке а- = 1.

Часть IV

Непрерывность функции

§4.1. Понятие непрерывности функции

С понятием предела, функции связано другое важное понятие математического анализа — понятие предела функции.

Рассмотрим функцию /(ж), определенную на множестве *X.* Пусть $ж_0$ предельная точка множества *X* принадлежит самому множеству *X,* т.е. *у* = Д.ж) определена в точке *хо* и в этой точке функция имеет определенное значение Д.хо). Когда мы говорим о пределе функции *f(x)* в точке Хо, подчеркивали, что переменная *х* неограниченно приближается к жо, но этого значения ие принимает; значение жо могло не принадлежать области определения функции, а если и принадлежало, то значение /(.Хо) при образовании предела не учитывалось. Однако, особую важность имеет тот случай, когда $\lim\limits_{X—УХО}$ *f(x)* = Джо).

Определение 4.1. Говорят, что функция *у* = /(ж) непрерывна в точке ж = жо, если предел ее в этой точке и значение в точке Жо совпадают, т.е.

$$\lim_{X—*Xo} f(x) = /(жо). \tag{70}$$

Или, пользуясь кванторным определением предела, получим, что *у* = /(ж) непрерывна в точке Жо, если

$$(Ve > 0)\ (35 > 0)\ (Уж)(|ж - ж_0| < 6) => |/(ж) - Дж_0)| < e.$$

Если в этом определении раскрыть знаки модулей:

$$\text{для } XO — 6<X<XQ + 6=> /(ЖО) - г < /(ж) < Дж_0) + c,$$

то можно сформулировать определение непрерывности функции "на языке окрестностей":

Определение 4.2. Функция *у* — /(ж) называется непрерывной в точке Жо, если, какой бы малой мы ни взяли произвольную t-окрестность точки Джо), можно указать такую ^-окрестность точки Жо, что для всех *х,* попадающих в эту (5-окрестность, соответствующие значения функции попадут в £-окрестность точки Жо.

Для того, чтобы точнее охарактеризовать те точки, в которых функция не является непрерывной (точка разрыва) сформулируем еще одно определение непрерывности, которое следует из определения 4.1, если "расшифровать" формулу (70). Тот факт, что $\underset{X\to Xn}{\text{lira}}$ /(ж) = /($ж_0$) означает, что:

I. Функция определена в точке $ж_0$ (3/($ж_0$)).

II. Существуют оба односторонних предела функции /(ж) в точке $ж_0$ и они конечны, т.е. liui /(ж) = /($ж_0$ + 0), lim /(ж) = /($ж_0$ - 0).

III. Односторонние пределы равны между собой:

/(жо + 0) = /(жо - 0) = *A*.

IV. Общее значение односторонних пределов равно значению функции в точке Жо, т.е. /(жо) = *A*.

Определение 4.3. Функция *у* = /(ж) называется непрерывной в точке Жо, если в этой точке выполняются условия I—IV.

Определение непрерывности функции можно сформулировать в других терминах. Переход от значения Жо к другому значению ж можно себе представить так, что значению жо придано приращение Дж = ж — Жо- Новое значение функции /(ж) = /(жо + Дж) отличается от старого /(жо) на приращение *Ау* = *f(x$_0$* + Дж) - /(.$ж_0$) = /(ж) - /($ж_0$).

Заменим в кванторной формулировке определения 4.1 ж — *XQ* = Дж, /(ж) — /(жо) = *Ау,* получим, что функция *у* — /(ж) называется непрерывной в точке жо, если

(Ve > 0) *(36)* (Уж)(|Дж| < *6)* => *Ау*\ < *е,*

т.е.

Определение 4.4. Функция *у* = /(ж) называется непрерывной в точке жо, если бесконечно малому приращению аргумента жо отвечает бесконечно малое приращение функции.

Это определение непрерывности функции в точке "на языке приращений" Наконец, "на языке последовательностей" непрерывность выразится так:

Определение 4.5. Функция *у* = /(ж) называется непрерывной в точке Жо, если какую бы последовательность значений ж из *X x*\, жг, • • •, *х„,*. -., сходящуюся к Жо, мы ни взяли, соответствующая последовательность значений функции /($ж_г$), Д$ж_2$), . . . , /(ж„), . . . сходится к /($ж_0$).

Это определение непрерывности функции по Гейне.

Определение 4.6. Функция y = /(.?;) называетс<u>я не</u>прерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого*[э]множ[5]е*ства.

Примеры.

1) Функция $y = x^n$ $(n$ £ Z[f]) непрерывна в (—оо, +оо). Действительно, возьмем произвольную точку XQ 6 (—00,+со) и вычислим

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \lim_{.T\to .Tn} \underline{ж \cdot x \cdot \ldots \cdot x.} = xo \cdot xo \cdot \cdot . \cdot \cdot жо \quad x,$$

В силу определения 4.1, функция у = ж" непрерывна в точке xo, а так как хо была выбрана произвольно из интервала (—оо, +оо), то можно утверждать, что $y = x''$ непрерывна в своей области определения, т.е. в (—оо,+оо).

2) Для функции $y = \sin x$ аналогично берем Ужо £ (—ос, +ос). Однако, здесь используем определение 4.4 непрерывности функции "на языке приращений". Дадим выбранному XQ произвольное приращение Да: и вычислим соответствующее приращение функции:

$$Ay = \sin(a;o + Ax) - \sin xo = 2\sin \frac{Ax}{\sim\hat{}-} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{Дж}{}\right)$$

Вычислим

$$\lim_{д.x\hat{}o} Ay_J = \lim_{д.т\text{-}0} 2 \cdot \sin \frac{Ax}{2} \cdot \cos\left(XQ + \frac{Ax}{2}\right)$$

$$= 2 \lim_{д^*\text{-}o} \frac{-}{2} \cdot \cos\left(xo + \frac{r}{2}\right) = 0,$$

т.к. имеем произведение бесконечно малой величины Ax на ограничеи- $\left(xo + \frac{Ax}{}\right)$. Итак, при Дж —> 0 Ду —> 0, или бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое приращение функции, значит, $y = \sin x$ непрерывна в точке Xo, а в силу произвольного выбора Жо, и на всем интервале (-оо, +оо), т.е. в своей области определения.

3) Функция $y = \cos$ ж непрерывна в (—со, +оо). Предлагаем доказать самостоятельно читателю.

Теорема 4.1. **Действия над непрерывными функциями.** *Если функции у = /(.т) и у = д(х) определены в одном, и том же промежутке X и обе непрерывны в точке x_o, то в эт,ой же точке будут непрерывны функции*

$$f(x) \pm g(x), \qquad f(x)\text{-}g(x), \qquad \text{\^{}Щ} \quad (\text{если } д(хо) \ ф \ 0).$$
$$\text{дух)}$$

Справедливость теоремы вытекает из теоремы о пределе суммы (разности), произведения, частного двух функций, имеющих конечный предел.

Из теоремы 4.1, примеров 1) - 3) следует непрерывность функций:

$$y = P(x) = \text{ао} + a\backslash X + \ldots + a_n x^n.$$

$$y \ \_ \ \frac{P(x)}{Q(x)} \ \_\_ \ \frac{ao + a\backslash X + \ldots + a_n x^n}{bo + bix + \ldots + Ь_m x^m}\text{'-}$$

$$y = tgx.y = ctgx$$

в их областях определения.

Сформулируем без доказательства две важные теоремы о непрерывной в точке функции. Они являются частным случаем доказанных ранее теорем о функции, имеющей в точке конечный предел.

Теорема 4.2. *Если функция у = f(x) непрерывна в точке* Жо, *то она ограничена в некоторой окрестности точки хо-*

Теорема 4.3. *Если функция у = /*(ж) *непрерывна в точке* жо *и* /(жо) *Ф* 0; *то у =* /(ж) *сохраняет свой знак в некоторой окрестности точки хо-*

Теорема 4.4. **Непрерывность сложной функции.** *Если функция у —* /(ж) *непрерывна па множестве X, а функция х — <p(t) непрерывна на множестве Т, причем, при изменении t на множестве Т, соответствующие значения х попадают во множество X. тогда сложная функция у = j\~p(l)\ непрерывна на множестве Т.*

Доказательство.

Возьмем произвольную точку $/;_0$ £ Т. Ей соответствует точка $ж_0$ G *X,* такая, что *хо = v(h)-* Дадим выбранному значению *la* произвольное приращение *At,* но такое, чтобы новая точка *(to + At)* G *T.* Приращение аргумента At вызовет приращение функции ж = *ip(t)* равное

т.е. точка я?о получает приращение Аз;. А это, в свою очередь, вызывает приращение функции *у* = /(ж):

$$Ay = /(жо + Аж)-./(ж_0).$$

Пусть теперь *At* —> 0. В силу непрерывности функции ж = *<p(1)* в точке *to, Ах* тоже устремится к нулю. А в силу непрерывности функции *у* = /(ж) в точке Жо, получим, что и *Ау* —> 0. Итак, бесконечно малому (At —> 0) приращению аргумента в точке to отвечает бесконечно малое приращение *(Ау* —> 0) функции у = /[у?(t)].

Это означает, в силу определения 4.4, что сложная функция непрерывна в точке to € *Т, а. в* силу произвольного выбора точки to, if а всем множестве *Т.* Что и требовалось доказать.

§ 4.2. Множество значений непрерывной функции

У произвольной функции *у* = /(ж) множество значений *Y* может быть быть любым. Например,

у функции *у* '= [ж] множество значений — У = Z;

у функции *у* =sgnz — *Y* = *{*—1,0,1};

у функции *у* =——*Y* = (—со, 0) U (0, +эо).

Как мы видим, множество значений представляет собой совокупность изолированных точек или объединение различных, не связанных промежутков. Ситуация меняется для непрерывной функции. Обозначим < *а,b* > промежуток действительных чисел, который может представлять собой либо сегмент, либо интервал, либо полуинтервал, как конечный, так и бесконечный. Имеет место

Теорема 4.5. *Если функция у = /(ж) непрерывна па промежутке < а,Ь >, то множество ее значений есть промежуток < А, В >, конечный, или бесконечный.*

(Без доказательства).

§4.3. Обратные функции. Непрерывность обратной функции

Рассмотрим функцию y = /(.?;), определенную на множестве X, а У множество ее значений. Обычно X и У промежутки действительных чисел.

Возьмем *Уyo* G У, тогда в области X необходимо найдется одно или несколько значений Жо, таких, что /(жо) = *yo*- Этим определяется в области Y однозначная или многозначная функция ж = *д{у),* которая называется обратной для функции y = /(ж).

Рассмотрим примеры:

1) Пусть $y - a^x$ (a > 1), где x изменяется в промежутке X = (—ос, ос). Значения y заполняют промежуток У = (0, +ос), причем каждому значению y € (0, +оо) соответствует единственное значение $x = log_a y$. В этом случае обратная функция однозначная.

2) Наоборот, для функции $y - x^2$, если x изменять в промежутке X = (—оо.+оо), обратная функция будет двузначной: каждому значению y G [0, +оо) отвечают два значения x = ±*y/y* из X. Вместо этой двузначной функции обычно рассматривают две ее однозначные ветви x — *y/y* и x = —*y/y*. Их можно порознь считать обратными для функции $y = x^2$, в предположении, что область изменения x ограничена, соответственно, промежутком [0, +оо) или промежутком (—оо.О).

3) Рассмотрим функцию y = *chx* ——————, областью определения которой является промежуток X = (—со, +ос). Чтобы выразить x через y, решим относительно X уравнение:

$$^e l \pm JLl \;=\; _y\hat{}\; _e 2г \;\_\; _{2y} e^\circ \;+\; 1 \;=\; 0 \;=» \; e^x = y \pm y/y^2 - \backslash \quad (y > 1).$$

В результате получаем двузначную функцию ж = 1п(у ± y/y^2 — 1), которая распадается на две однозначные ветви, отвечающие порознь изменению ж от 0 до +оо и от —оо до 0.

4) Если возьмем функцию y = sh;r =——————, то при любом y из

уравнения -——— = y или e^{2x} - $2y$ • e^1 - 1 = 0 найдем лишь одно

значение для e^x: e^x — y + $\backslash Jy^2$ + 1, так как второе значение - с минусом при корне, как отрицательное, невозможно и должно быть отброшено. Отсюда x — $\ln(y + sjy^2 + 1)$, т.е. обратная функция однозначна.

Заметим, что но графику функции $y = f(x)$ легко видеть, будет ли обратная для нее функция $x = \partial(y)$ однозначной или нет. Однозначность имеет место, если любая прямая, параллельная оси x пересекает график лишь в одной точке. Если некоторые из таких прямых пересекают график в нескольких точках, обратная функция будет многозначной. В этом случае по графику легко разбить промежуток изменения x на части так, чтобы каждой части отвечала однозначная ветвь этой функции. Например, по параболе, которая служит графиком функции y — x^2, ясно, что обратная ей функция двузначна и что для получения однозначных ветвей достаточно раздельно рассматривать правую и левую части этой параболы, т.е. положительные и отрицательные значения x. Если функция $x = \partial(y)$ является обратной для функции $y = f\{x)$, то, очевидно, графики обеих функций совпадают (т.к. выражают одну и ту же зависимость). Если же аргумент обратной функции обозначить за x, т.е. вместо функции $x = \partial(y)$ рассматривать y — $\partial(x)$, то график последней получается как зеркальное отражение графика $y = J\{x)$ относительно прямой $y = x$ (см. рис. 18).

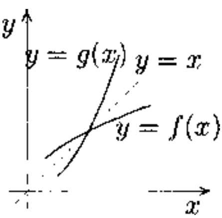


Рис. 18.

Имеет место

Теорема 4.6. **Существования и непрерывности обратной функции.** *Пусть функция* $y = /($ж$)$ *в окрестности точки* Xo:

1) определена;

2) строго монотонна;

3) непрерывна;

Тогда в некоторой окрестности точки $yo = /(\#o)$

1) определена однозначная обратная функция $x = \partial(y)$:

2) $x = \partial(y)$ *строго монотонна в этой окрестности;*

3) непрерывна.

Доказательство состоит из трех частей. Для определенности положим, что y = /(ж) строго возрастает.

Пусть точка Жо £ *(а,Ь), в* котором выполняются условия теоремы. Тогда, в силу теоремы 4.5, множеством значений функции y = *f(x)* будет интервал (/(a)./(b)). Докажем существование обратной функции. Для этого покажем, что Vy е (/(a),/(b)) существует единственное значение *x* G (а, *Ь).* Предположим противное, что *у* соответствуют два значения ж и *x,* причем *x ф x.* Это значит, что (ж < 5F) V (ж > *W).* Но, в силу монотонного возрастания функции *у* = *f(x),* получим (/(ж) < /(f)) V (/(ж) > /(ж)), а так как /(ж) =f и /(f) = *у,* то получили, что у > У- Пришли к абсурду, доказывающему существование единственного значения ж. Следовательно, функция *x* = *д(у)* определена на (/(а), /(&)).

Докажем монотонность обратной функции (строгое возрастание). Возьмем два значения *у*\ и y_2 из интервала (/(а), /(6)), таких, что j/i < 1/2 и покажем, что соответствующие значения функции *x* = (/(у) будут связаны тем же соотношением. Пусть *д{у\)* = Ж], <?(y_2) — $ж_2$. Предположим противное, что *Xi* > $ж_2$. Тогда, в силу строгого возрастания функции *у* = /(ж), получим *f(xi)* > /($ж_2$), но *f(xi)* = г/i, а /($ж_2$) = y_2, т.е. 2/1 > 2/2- Пришли к противоречию, доказывающему строгое возрастание функции ж = *ip(y).*

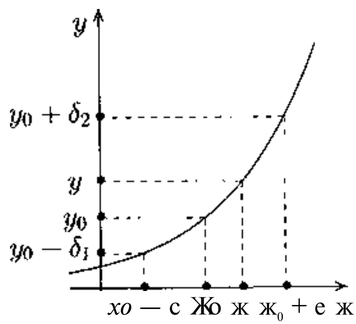


Рис. 19.

Докажем теперь непрерывность обратной функции (см. рис. 19). Для этого возьмем Ve > 0 и рассмотрим окрестность (жо — *£,* жо + *е).* Так как

/(жо - е) < /($ж_0$) = $y_{0;}$

в силу монотонного возрастания *у* = /(ж), то найдется такое число *8]* > 0, что

$$f(x_Q\text{-}e) = Vo\text{-}5_{\imath}. \qquad (71)$$

Аналогично, т.к. $f(x_0 + s) > f(x_0)$, то найдется $\delta_2 > 0$ такое, что

$$/(ж_0 + e) = 2/o + 5_2. \qquad (72)$$

Мы определили интервал $(y(\backslash-Si,y_Q + 5_2)$, который будет рассматривать как окрестность точки уо (При желании, можно взять ^-окрестность с центром в точке y_0, если положить $8 = \min(<5i,<5_2))$. Пусть y попадает в окрестность $(yo-Si,yo+S_2)$, т.е. $yo-Si < y < yo + 5_2$. В силу монотонного возрастания функции $x = \partial(y)$, получаем

$$9(2/0 - <Ji) < \partial\{y) < </(2/o + <У \cdot$$

Но из равенств (71) и (72) следует, что

$$9(2/0 - Si) = x_0-e \text{ и } (?(?/o + <Ь) = ж_0 + e.$$

Пришли к неравенству

$$Жо - e < x < ,xo + £.$$

Это означает, что для Vc > 0 нашлись $6\backslash$ и $<5_2$ (или $6 = \min(d''_1,<5_2)$) такие, что как только y попадает в найденную (^-окрестность точки yo, соответствующие значения x попадают в произвольно выбранную е-окрестность точки XQ. Непрерывность обратной функции доказана.

Из теоремы 4 б следует непрерывность обратных тригонометрических функций в их областях определения.

§4.4. Непрерывность показательной функции

Вначале обратимся к определению степени любого вещественного числа с любым вещественным показателем. Для этого вспомним некоторые положения, связанные со степенью вещественного числа.

1°. Пусть a € R, n G Z+ Тогда $a^{n\ d} = \underline{p,\ a- \quad -a,.}$
a

(Степень вещественного числа, a с натуральным показателем n есть а, взятое множителем n раз.)

2°. ({/a $=^f b) => (If$ = а) [Или: $tfa = aЦ$.

Корнем n-ой степени из числа a называют такое вещественное число б, которое, будучи возведенным в степень n, дает a.

$$a» = (a«)^m, m \ e Z^+.$$

4°.

$$a^{\_m \ 4ef}{}^{"\bullet} = \frac{1}{an}$$

Мы определили степень числа а с любым рациональным показателем: а'.

Основные свойства этой степени:

1) (а"' > 0)(Vr);
2) (а> 1)Л(п <r_2)=*$a^{Г1}$ < $a^{7"2}$;
(О < *a* < 1) Л (п < r_2) =Ф $a^п$ > $a^{7"-'}$;
3) $o^{Г!+"2}$ = а"" • $o^{Гз}$;
4) $(a^{Г1})^{Г2}$ = $a^{г"Г2}$;
5) Лемма 1. *Какова бы ни была последоват'ельность {г„} рациональных чисел, стремящаяся к нулю, соответствующая последовательность степеней {$a^{Гп}$} будет стремиться к единице, т.е.* $\lim\limits_{>Vi—*0} a^{r"} = 1$.

Доказательство. Возьмем вначале последовательность < — ^, $\lim \frac{}{n}$ = 0. Рассмотрим соответствующую последовательность степеней числа *a* - {an} Для определенности возьмем а > 1, тогда, в силу свойства 2), а» > 1 =» (а» = 1 + /г,,, где /г,, > 0) => а = (1 + $я_п$)" > (1 + п • h_n) (в силу неравенства Бернулли). Из последнего неравенства получаем о > 1 + п •'$Д_п$ => 0 < »п < $\frac{a-1}{n}$, откуда следует, по теореме о пределе промежуточной последовательности, что $\lim\limits_{n—юо} h_n = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n—*oo}$ а~ = $\lim\limits_{tt—+00}$ (1 + /i„) = 1.

Рассмотрим последовательность < — >. Имеем

$$\lim_{П—'OO} a \ " = \lim_{71—'00} \frac{}{(J,,}р = \frac{-}{1} = 1.$$

Теперь возьмем 1фоизвольную последовательность *{г$_n$}* рациональных чисел, стремящуюся к нулю. Так как limr„ = 0. то для *е* = - найдется номер *N*. такой, что для всех *n*> *N* будет выполняться неравенство |г„| < $\frac{1}{n}$, откуда — $\frac{1}{n}$ < *г„* < $\frac{1}{n_t}$ и, в силу свойства 2), a^{oN} $\frac{\_1}{i}$>* < $a^{r"}$ < a^n г А

Но, по доказанному выше, (lima^{-}» = 1) Л (lima» = 1), следовательно,

$\lim\limits_{г_{,,}\text{-»}0} a^{r''} = 1$, в силу теоремы о пределе промежуточной последовательности. Лемма доказана.

Лемма 2. *Какова бы ни была последовательность* {г,,.} *рациональных чисел, сходящаяся к вещественному числу а, соответствующая последовательность степеней {а'"} сходится к одному и тому же числу А.*

Доказательство. Возьмем вначале возрастающую последовательность *{г'$_n$},* такую, что limr^ = *о. (а £ Ш).* Так как мы рассматриваем случай *а* > 1, то соответствующая последовательность степеней *{а'"}* тоже возрастающая. Возьмем рациональное число *R* > *а.* Тогда все члены последовательности {г',} будут меньше *R.* А из неравенства r'_n < *R* => (о$^{г"}$ < о). Последнее неравенство означает, что возрастающая последовательность {а^{г}"} ограничена сверху, значит, по теореме Вейерштрасса, она имеет предел, т.е. lim *оI^n* = *А.*

Рассмотрим теперь произвольную последовательность *{г,,},* такую что limr,,. = *а.* Вычислим lim *а^{Гn}* = lim *а$^{г\,n}$* • о'''''-'''' = *А* (так как *Има^{Гn}~^{Гn}* = 1, по лемме 1, а lim *оJ^n* = *А.* по доказанному выше. Лемма. 2 доказана.

Определим теперь степень любого вещественного положительного числа а с любым вещественным показателем *а:*

$$a = \lim_{W_{,,}\text{-»}a} a''.$$

После этого мы можем определить на множестве *X* = (—оо,+эо) показательную функцию *у* = *а^x* *(а* > 0). Для функции *у* = *а^x* выполняются свойства 1) - о), свойство 4) означает монотонность показательной функции. Из свойства 5) (леммы 1) следует

Теорема 4.7. *Показательная функция непрерывна в своей области определения.*

Доказательство. Возьмем произвольное *хо* £ (—ос, +эо) и дадим ему произвольное приращение *Ах.* Вычислим соответствующее приращение функции *Ау* = *а$^{x{Ax}}$* — *а^x* = *а^x(а^{Ax}~^{1}).* Устремим *Ах* к нулю, получим $\lim\limits_{Д.Г\text{-}.0}$ А«$_у$ = $\lim\limits_{д.*\hat{}о}$ *а^x(а^{Ax}* — 1) = 0 (т.к. $\lim\limits_{Дж\text{->}о}$ *а^{Ax}* = 1 по лемме 1). В силу определения 4.4 непрерывности функции, получаем, что *а^x* непрерывна в точке *хо,* а значит и во всей области определения, в силу произвольною выбора точки *Хо-* Теорема доказана.

Из теорем 4.6 и 4.7 следует непрерывность логарифмической функции $y = \log_a x$ в своей области определения.

Рассмотрим теперь степенную функцию с вещественным показателем $y = x^a, a \in R, x > 0$. Ее непрерывность на множетсве $(0, +\infty)$ следует из представления $y = e^{a \ln x}$, непрерывности показательной, логарифмической функций в их областях определения, а также из теоремы 4.4 о непрерывности сложной функции.

Из сказанного выше следует

Теорема 4.8. *Всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.*

Справедливость теоремы следует из непрерывности простейших элементарных функций в их областях определения, теорем о непрерывности суммы, произведения, частного непрерывных функций, теоремы о непрерывности сложной функции и, наконец, из определения элементарной функции.

§ 4.5. Точки разрыва функции

Вернемся к определению 4.3 непрерывности функции в точке, которое состоит из пунктов I—IV Пользуясь этим определением, легко сформулировать определение точки, в которой функция $y = f(x)$ не является непрерывной, т.е. имеет разрыв.

Определение 4.7. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если в этой точке нарушается хотя бы одно из условий I—IV определения 4,3.

Другими словами. x_0 - точка разрыва, если функция в ней неопределена. или хотя бы один из односторонних пределов в этой точке либо бесконечен, либо не существует, или, при выполнении первых двух условий, одиосторонние пределы в точке x_0 не равны между собой, или общее значение односторонних пределов не равно значению функции в точке x_0.

Примеры.

$$1)\ y = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

В этом примере нарушается условие I непрерывности функции - в точке $x = 2$ функция не определена. Легко видеть, что односторонние пределы в точке $x = 2$ оба конечны и равны между собой:

$$\lim_{x\to 2-0} y = \lim_{x\to 2+0} y = 4.$$

График данной функции в окрестности точки разрыва представлен на рис. 20.

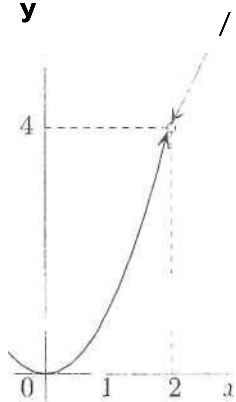


Рис. 20.

2) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 3, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$ (см. рис. 21).

0 3 x

Рис. 21.

В примере 2 функция определена в точке $x = 3$, $y(3) = 9$. Но

$$\lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0} x^2 = 9,$$

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{x-3} = \infty.$$

Один из односторонних пределов в точке $x = 3$ бесконечен, нарушается условие II, ж = 3 точка разрыва (рис. 21).

3)2/ г 1*1, x^O;
1, я = 0,

Функция в точке ж = 0 определена: у(0) = 1. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{Ж\text{-+}0+0} y = \text{hm}_{ж\hat{}0+0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\text{hm}_{г-0\text{-}0} \; y = \text{hm}_{ж\text{-}>0\text{-}0} \frac{\sin x'}{-x} = -1.$$

Как видим, односторонние пределы не равны между собой, хотя оба конечны, нарушается условие III, точка $x = 0$ -• точка разрыва (рис. 22).

Рис. 22.

4)y = x\ x^O;
1, $x = 0$.

В этом примере условия I-III в точке $x = 0$ выполняются. Действительно, т/(0) = 1, $\lim_{x\to 0+0} x$~ $\lim_{ж\text{—о-о}} x^2 = 0$. однако, нарушается условие IV, т.к. предел функции в точке нуль равен нулю, а значение функции в этой точке равно единице. Точка $x = 0$ - точка разрыва (рис. 23).

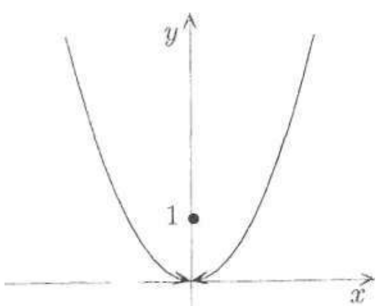


Рис. 23.

Поведение функций в примерах 2) - 4) в окрестности точек разрыва, изображено на рисунках 20 - 23 соответственно.

§ 4.6. Классификация точек разрыва

Точка *Хо* называется точкой разрыва первого рода, если оба односторонних предела существуют и конечны (примеры 1,3,4). Если хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен, то *Хо* называется точкой разрыва второго рода (пример 2).

Если в точке разрыва первого рода lim *f(x) ф* lim ***fix),*** то *XQ*

«__——————x—кжо+0 x—s-rco—0'

- точка разрыва с^^^щечньи^а^ачком (пример 3). Скачок равен модулю разности односторонних пределов, в примере 3 скачок равен 2.

Если в точке разрыва первого рода односторонние пределы равны между собой, но не равны значению функции в данной точке, то такая точка разрыва называется устранимой ^примеры 1, 4).

Так, в примере 1, точку разрыва *х* — 2 можно устранить, доопределив функцию в точке *х* — 2 значением, равным четырем.

Наконец, если один из односторонних пределов равен значению функции в точке хо, то говорят, что в точке хц имеет место односторонняя непрерывность. Так, в примере 2 в точке *х* = 3 - левосторонняя непрерывность.

Изучим теперь основные свойства функции, непрерывной на сегменте.

Теорема 4.9. **О прохождении через нуль непрерывной функции (принадлежит математикам Больцано и Коши.)** *Если функция у* = /(x) *определена и непрерывна, на сегменте [а.,Ь] и на концах сегмента, принимает, значения разных знаков* (/(a) • *f(b)* < 0), *то существует точка* с, *заключенная между а и b* (а < *с* < *Ь), в которой функция у = f(x) обращается в нуль.*

Доказательство. Пусть на сегменте *[а, Ь]* выполняются условия теоремы (рис. 24). Разделим сегмент *[а, Ъ]* пополам. Пусть *d*-\ - точка деления. Если ***f{d\)*** — 0, то теорема доказана, если *f{d\) ф* 0, то обозначим за *[ai,b\]* тот из сегментов, на концах которого функция *у = f(x)* принимает значения разных знаков (/(tti) • /(&i) < 0). Длина сегмента [ai,6i]

равна *Ь]* — Oi = — — . Разделим сегмент [ai, &i] пополам точкой *d%.* Если / №) = 0, то теорема доказана, если /(fife) *Ф* 0, то обозначим за [«2,Ы тот из двух сегментов, на концах которого функция принимает значения разных знаков (/(аз) • /(Ьз) < 0). Длина сегмента [a_2, &з] равна

$b-\ a$ Продолжая далее этот процесс, на каком-то А:-ом шаге получим сегмент [а*,&*•], такой что $f\{ak)f\{bk)$ < 0 и $Ьк$ - ад, $\frac{Ъ - a}{2^*}$ Разделим сегмент [о^.Ь^] пополам точкой <4$_+$ь

Получим либо /(dfe+i) = 0 и теорема доказана, либо этот процесс будет продолжаться бесконечно. В результате данного процесса получим последовательность сегментов {[а,,., 6,,,]}, обладающую свойствами:

л 1) каждый последующий, по построению, принадлежит предыдущему;

2) длина $o_n - a_n = \frac{Ь-a}{\ }$ n-го сегмента стремится к нулю при n —> оо;

3) на концах всех сегментов, по построению, функция $y = f(x)$ принимает значения разных знаков.

Из первых двух свойств следует, в силу теоремы Кантора, что существует единственная общая точка с, принадлежащая всем сегментам последовательности. Покажем, что /'(с) = 0. Для этого предположим противоположное, что /'(с) $ф$ 0. Для определенности, положим, что /(с) > 0. Тогда, по теореме 4.3, она будет больше нуля в некоторой окрестноститочки с, т.е. $f(x)$ > 0 для x £ $(c - 6, c + 6)$. Возьмем n такое, чтобы сегмент $[a_n, Ь_„]$ С (с — $5, c + 8)$ (это возможно, т.к. $Ь_n - a_n$ —• 0 при n —> еж). Так как $f(x)$ > 0 во всех точках ^-окрестности точки с, то она будет положительна и на обоих концах выбранного сегмента, т.е. $,1'\{a_n)$ > 0 и /'(&„.) > 0, а это противоречит свойству 3 последовательности сегментов. Таким образом, не может быть /(с) > 0. Аналогично показываем, что не может быть /(с) < 0. Следовательно, /(с) = 0. Теорема доказана.

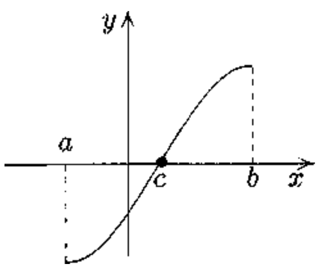


Рис. 24.

Замечание. При выполнении условий теоремы, точка с, в которой функция обращается в нуль, вообще говоря, не единственная. Однако, если к имеющимся условиям добавить монотонность функции, то точка. c будет единственной (рис. 24, 25).

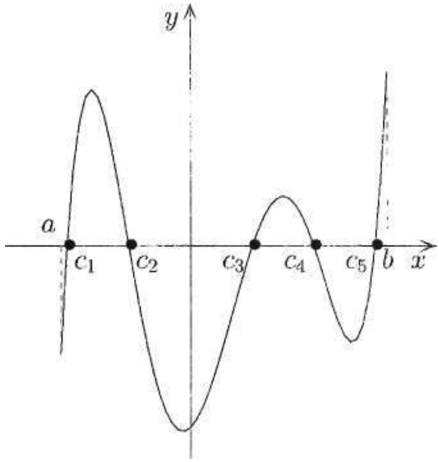


Рис. 25.

Данная теорема применяется при решении уравнений (см. рис. 25). С ее помощью устанавливается существование корней. Рассмотрим уравнение $2^x = Ax$. Один корень x — 4 очевиден. Однако, на сегменте существует еще корень уравнения, т.к. функция $f(x) = 2^x — Ax$ при x = 0 принимает значение /(0) = 1 > 0, а при x = — - значение

/ (i) = V 2 - 2 < 0 .

<u>Замечание.</u> Если требование непрерывности функции y = /(x) нарушается хотя бы в одной точке, то функция может перейти от отрицательного значения к положительному, не обращаясь в нуль. Так будет, например, с функцией *f(x) = [x] — — {[x]* - целая часть x) на сегменте

[0,1]. /(0) = —-, /(1) = -, однако в нуль она нигде не обращается. В точке x — 1 функция имеет скачок (рис. 26).

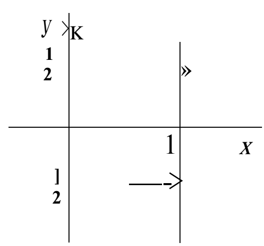


Рис. 26.

Вторая теорема также принадлежит Больцано и Коши. Это

Теорема 4.10. **О промежуточном значении функции.** *Если функция у = f(x) непрерывна на сегменте [a.Ь], то на этом сегменте она принимает все значения, заключенные между* /(а) *и f(b)* (./(а) ^ /(b))-

Доказательство. Пусть, для определенности, *f(a)* < *f(b)* и *С* - некоторое число, заключенное между /(а) и /(&), т.е. /(а) < *С* < *f(b).* Покажем, что найдется такая точка с **е** *[а, Ь],* что /(с) = С. Для этого рассмотрим новую функцию *(р(х)* = /(ж) — *С.* Она непрерывна на *[а,* 6] как разность двух непрерывных функций. Кроме того, <*р(а)* = /(о) — *С* < 0 и у>(6) = /(6) — *С* > 0. По теореме 4.9, существует точка с € [а, Ь], такая, что *ifi(c)* = 0, или /(с) — С = 0 => /(с) = С. Что и требовалось доказать.

Теорема 4.11. **Первая теорема Вейерштрасса, об ограниченности непрерывной функции.** *Если функция у = f(x) определена и непрерывна на сегменте [а.Ь], то она ограничена на этом сегменте, т.е. существуют числа т и М такие, что т.* < /(ж) < *М для всех х* £ *[а.Ь].*

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что Дж) неограничена на сегменте *[а, Ь]*, т.е. для каждого натурального числа *п* найдется такое значение ж„ £ *[а, Ъ]*, что

$$\backslash f(x_n)\backslash \; > n. \tag{73}$$

Мы получили последовательность {ж„}, все члены которой принадлежат *[а, Ь],* следовательно, эта последовательность ограничена и из нее, по теореме Больцано-Вейерштрасса, можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{nu}\}$, т.е. Нтж$_{\text{га/с}}$ = жо, где *х,о* **е** *[а.Ь].* Так как функция *у = f{x)* непрерывна в точке Жо, то последовательность соответствующих значений функции $f\{x_{„k})$ сходится к значению функции в точке Жо, т.е. \\mx_{nu} = /(жо). Но из неравенства (73) следует, что Нт|ж„$_{ь}$| = +оо. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Сегмент *[а, Ь]* есть замкнутое множество (включены концы). Для незамкнутого множества (например, интервала *{а.Ь))* теорема, вообще говоря, не верна. Например, функция *у* = — непрерывна в интервале (0; 1), но не ограничена в этом интервале, т.к. при приближении *х* к нулю может принимать сколь угодно большие значения.

Бесконечное числовое множество, даже ограниченное, может не иметь наибольшего и наименьшего элементов. Например, интервал (0:1). Это ограниченное числовое множество, оно не содержит в себе ни наибольшего, ни наименьшего элементов. Точной верхней границей его будет число 1 (sup(0,1) = 1), точной нижней границей - число нуль (irif(0,1) = 0). Другими словами, это множество не содержит в своем составе ни точной верхней, ни точной нижней границ.

Рассмотрим функцию *у* = /(ж), определенную на множестве *X* и ограниченную на нем. Т.е. множество ее значений *Y* = *{f(x)}* будет ограниченным, но в его составе может не быть наибольшего и наименьшего значений функции, т.е. функция не будет достигать своих точной верхней и нижней границ на множетсвс *X.* Однако имеет место

<u>Теорема 4.12.</u> **Вторая теорема Вейерштрасса.** *Если функция у — f(x) непрерывна на сегменте [а,Ь], то она достигает па этом сегменте своей точной верхней и нижней границы.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Нам нужно показать, что на сегменте *[а,* 6] найдутся точки *X* и *хо* такие, что

$$/(ж,) = \sup_{[a,Ь]}\{/(z)\},$$

$$f(x_2) = \underset{[a,Ь]}{шШ(x)\}}.$$

Так как *у* = /(ж) непрерывна на сегменте [о. *Ь],* то по теореме 4.11, множество ее значений на этом сегменте будет ограничено и, в силу теоремы о непрерывности множества действительных чисел, существуют *М* = sup{/(:r)} и *т* = inf{/(x)}. Предположим противное, что *у = f(x)* не достигает на сегменте [а, 6] своей точной верхней границы *М,* т.е. Уж б *[а, Ь]* /"(ж) < *М.* Рассмотрим на сегменте *[а, Ь]* вспомогательную функцию $<p(x) = \frac{1}{M - f(x)}$гт—г- Ее знаменатель не обращается в нуль ни в одной точке сегмента *[а,Ь],* следовательно, по теореме 4.11 она ограничена, т.е. существует число */J,* > 0, такое что выполняется неравентсво 0 < *ip(x)* < *ц,* откуда получаем, что ———-—г < /х или /(ж) <*M—j*$_r$ Последнее неравенство выполняется *\/x* € *[а,Ь].* Из него следует, что число $M \underset{1Л}{———}$является, по определению, верхней границей множества значений функции *j(x)* на сегменте *[а,Ь].* Но $M\frac{1}{———}< M$, а *М* = sup{/(x)}, т.е. наименьшая из всех верхних границ, поэтому не может быть другой верхней границы, меньшей чем *М.* Пришли к противоречию, говорящему о том, что *Зх-t* 6 *[a,b],* такое что *f(x\) = М.* Аналогично доказывается, что За;'2 G *[а,Ь],* такое что /(жз) = *т.*

Замечание. Если функция *у* = /(ж) непрерывна на сегменте *[а, Ь],* то разность *ui = М — т* называется ее колебанием в этом промежутке,

Запершим теорию непрерывных функций еще одним важным понятием.

§4.7. Равномерная непрерывность

Пусть функция *у* = /(ж) непрерывна на множестве *X.* Это значит, но определению, что она непрерывна в каждой точке этого множества. Возьмем Vzj 6 *X.* По определению непрерывности в точке,

(Vc > *0)(=6у* > 0)(Уж)(]х - $_{xl}$\ *<5)^* |/(ж) - /(ая)| < £•

Возьмем другую точку жэ € X. Для того же *е* > 0 найдется <5т > О, такое, что

(Уж)(|ж - x_2\ < ∂_2) => |/(ж) - /(ж$_2$)| < е.

Вообще говоря, Jj ^ <Ь; т.к. для другой точки прежнее *5у* может не подойти. Таким образом, *6* будет зависеть не только от выбора *е.* но и от точки множества *X,* т.е. *5 — 5(е,х).* Возникает вопрос, можно ли подобрать <5 таким, чтобы оно было пригодным для всех точек множества *X?* Если бы речь шла о конечном числе значений *х* (при неизменном *г),* то из конечного числа соответствующих им чисел *5* можно было бы выбрать наименьшее, и это последнее годилось бы для всех рассматриваемых точек ж. Но по отношению к бесконечному множеству значений *х* так уже рассуждать нельзя: им (при постоянном *е)* соответствует бесконечное множество чисел <5, среди которых могут быть сколь угодно малые. Однако, если удается подобрать число *6,* такое, которое годится для всех *х* из множества *X,* то говорят, что функгщя *у = f(x)* на множестве *X* равномерно непрерывна.

Определение 4.8. Функция *у* ~ /(ж) называется равномерно непрерывной па множестве *X,* если для произвольного *е* > 0 можно указать такое *5* > 0, что для любых значений *х* и *Хо* из множества *X,* таких,

что $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
Или:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1 \in X) \wedge (\forall x_2 \in X) \wedge (|x_1 - x_2| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Равномерная непрерывность означает, что во всех частях промежутка X достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы добиться заданной степени близости соответствующих значений функции.

Из непрерывности функции на множестве X не следует ее равномерная непрерывность на этом множестве. Приведем пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, непрерывную на полуинтервале $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. Покажем, что она не будет на нем равномерно непрерывной. Возьмем две последовательности точек $x'_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ и $x''_n = \frac{1}{n\pi}$, которые принадлежат полуинтервалу $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ $(n \in Z^+)$. Соответствующие значения функции: $f(x'_n) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$, $f(x''_n) = \sin n\pi = 0$. Поэтому $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$, несмотря на то, что $|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n(2n+1)\pi}$ и с возрастанием n может быть сделана сколь угодно малой. Здесь при $\varepsilon = 1$ нельзя найти δ, которое годилось бы одновременно для всех $x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, хотя для каждого отдельного значения x, ввиду непрерывности функции, такое δ существует.

Если промежуток замкнутый, например сегмент $[a, b]$, то аналогичной ситуации возникнуть не может, так как имеет место

Теорема 4.13. Теорема Кантора. *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом сегменте.*

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что непрерывная на $[a, b]$ функция не является на этом сегменте равномерно непрерывной. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$, что какое бы число δ мы ни взяли, найдутся на сегменте $[a, b]$ две точки x' и x'', такие что $|x' - x''| < \delta$, и тем не менее $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n \in Z^+)$. Для каждого значения n найдутся точки x'_n и x''_n такие, что $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим первую последовательность точек $\{x'_n\}$. Так как

(Vrc)«eMJ),

то последовательность $\{x'_n\}$ ограничена и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Чтобы не осложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность $\{x'_n\}$ является сходящейся к некоторой точке оʼо G [а, 6]. *(Итх'$_n$ = хо)*. Так как \x'$_n$ - x"\ < - и при *п* —> оо x'$_n$ - x„ —> 0, то и Итж'(= *хо*. Тогда, ввиду непрерывности функции *f(x)* в точке *хо,* соответствующие последовательности значений функции сходятся к значению функции в точке *XQ,* т.е. *lim.f(x'$_n$)* = Джо) и НтДх") = /(жо), так что, при достаточно больших *п,* должно выполняться неравенство *\f(x") — f{x'$_n$)* < *е* для любого *е* > 0. Но это противоречит тому, что, для всех значений *п* |/(ж") — *f{^{x}'$_n$)* > £• Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция определена и непрерывна на сегменте [а, *Ь]*. Тогда для произвольного е > 0 можно найти такое *6* > 0, что если промежуток произвольно разбить на частичные промежутки с длинами, меньшими *6,* то в каждом из них колебание функции *f(x)* будет меньше *с.*

Действительно, если по заданному *е,* в качестве *д* взять число, о котором говорится в определении равномерной непрерывности, то в частичном промежутке с длиной, меньшей *6,* разность между любыми двумя значениями функции будет по абсолютной величине меньше е.

Вопросы для самопроверки

1) Сформулировать "на языке *г — N"*, что значит:

а) lim x_n — *Ь*

б) Ит x_n *ф Ъ;*

в) *jB\imx*$_n$.

2) Доказать, что произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3) Доказать, что произведение бесконечно малой последовательности на последовательность, имеющую конечный предел, есть бесконечно малая последовательность.

4) Построить последовательность, множество предельпых точек которой есть {1,2,3,4,5}.

5) Построить последовательность, у которой верхний предел равен +оо, а нижний единице.

6) К какой из последовательностей сегментов применена теорема. Кантора: < 1——Л Н — >, \——,— \. \——,1-1— >? Ответ обосновать.
LL *n'* nJJ U n nJJ U п *n\)*

(над второй и третьей дробями: 1 1)

7) Сформулировать "на языке *с — 5"*, что значит:

а) lim /(ж) = *а;*
х—ухо

б) lim *f{x) ф а;*
х—ухо

в) *Д* lim /(.г).

8) Доказать, что /3lim[x], /Blim sgn ж, ^ lim $\frac{\backslash x \backslash}{X}$.
х—О **х-^0** **х—>0**

9) Доказать, что для того, чтобы lim *f(x) — А,* необходимо и достаточно, чтобы /(ж) в некоторой окрестности точки Жо была представима в виде суммы числа *А* и бесконечно малой величины *а(х)* в точке жо.
Х—УХ$_0$

10) Дано: ^Ит/(ж). Можно ли утверждать, что $_/$ЭНт/^{2}(ж)?

11) Доказать, па основании определения, что $y =$ — - — есть беско-
3x + 1
иечно большая величина в точке x = ——.
о

12) Дано: /(x) и *∂(x)* разрывны в точке x — a. Будут ли обязательно $/^2$(x), ,/'(x) • ,9(3-') разрывными функциями? Ответ обосновать.

13) Доказать, что если функция y = /(а;) непрерывна в точке хо и Д^ж<>) 7^ 0, то она сохраняет свой знак в некоторой окрестности точки x_0.

14) Доказать локальную ограниченность непрерывной в точке *XQ* функции.

15) Какие свойства функции описывают фразы:

а) (V<5 > 0)(3s > 0), что если |/(x) - /(x_0)| < £ => \\x - x_0| < *6;*

б) (V<5 > 0)(3г > 0)(Vx)(|.x - x_0\\ < *5)* => |Дx) - /(x_0)| < e;

в) (35 > 0) Л (Зе > 0)(Vx)(|x - x„| < tf) =* |/(x) - /(x_0)| < e?

16) Почему функция y = — элементарная, а y = sgn x нет?

17) Показать, что уравнение x^3 —x — - на сегменте [1,2] имеет корень.
8

18) Показать, что уравнение x^A - x — 14 = 0 на сегменте [0,3] имеет корень.

19) Показать, что уравнение $e^{ж-1} = x^2 - x^3 + 1$ на [0,2] имеет корень.

Содержание