МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Р. В. СКИДАНОВ, Д. В. НЕСТЕРЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 519.6(075)+519.8(075)
ББК В19я7+В18я7
С429

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Д. Л. Г о л о в а ш к и н,
д-р физ.-мат. наук, проф. С. В. К а р п е е в

Скиданов, Роман Васильевич

С429 **Математическое моделирование :** практикум / *Р.В. Скиданов, Д.В. Нестеренко*. – Самара : Издательство Самарского университета, 2024. – 92 с. : ил.

ISBN 978-5-7883-2036-6

Излагаются основные принципы построения численных методов для решения ряда математических задач. Практическое применение численных методов охватывается руководством к выполнению лабораторных работ, включающих в себя задачи моделирования динамических систем и задачи моделирования систем массового обслуживания.

Темы заданий лабораторных работ соответствуют рабочей программе курса «Математическое моделирование». Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.04.01 Математика.

Разработано на кафедре технической кибернетики.

УДК 519.6(075)+519.8(075)
ББК В19я7+В18я7

ISBN 978-5-7883-2036-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования и разработки в различных областях науки и техники часто требуют глубокого понимания сложных систем и процессов, которые трудно или невозможно изучить экспериментально. Математическое моделирование позволяет создавать и анализировать модели таких систем, прогнозировать их поведение и оптимизировать их параметры.

Методы математического моделирования, описываемые в данном практикуме, являются неотъемлемой частью подготовки специалистов в областях прикладной математики, физики и других смежных дисциплин. Умение строить и исследовать математические модели, а также реализовывать их с помощью компьютерных программ, является ключевым навыком для решения широкого круга практических задач.

Рассматриваемые в практикуме методы математического моделирования охватывают такие области, как механика, биология, теория массового обслуживания и физика фазовых переходов. В механике математические модели используются для описания движения объектов, начиная от простых систем, таких как маятники и планетарные системы, и заканчивая сложными объектами, описываемыми релятивистской или квантовой механикой. В биологии математическое моделирование применяется для изучения динамики популяций, эпидемий, экологических систем и многих других процессов. Теория массового обслуживания использует математические модели для оптимизации работы систем, таких как колл-центры, производственные линии, компьютерные сети и др. Моделирование фазовых переходов позволяет изучать свойства материалов и поведение сложных систем вблизи критических точек.

Выполнение лабораторных работ, предусмотренных практикумом, позволит студентам освоить основные методы математического моделирования и получить практические навыки их применения. Приобретенные знания и умения будут способствовать формированию у студентов компетенций, необходимых для успешной профессиональной деятельности в условиях быстро развивающихся технологий и возрастающей сложности решаемых задач.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ

1.1. Виды моделей

Все явления природы представляют собой движение различных форм материи. Всякое изменение материи называют движением. Одним из простейших является механическое движение – перемещение материальных объектов в пространстве без рассмотрения физических свойств, движущихся материальных объектов. Механическое движение обычно входит составной частью в более сложные виды движения.

Пространство, время и материя являются сложными понятиями. В механике используются упрощенные модели. Причем можно выделить четыре области, в которых используются разные математические модели. Для разделения областей применения разных математических моделей воспользуемся значением двух фундаментальных физических констант.

В чем же различия этих моделей? Так, например, теория относительности описывает пространственно-временной континуум, тогда как квантовая теория описывает дискретный мир. В физике была показана эквивалентность корпускулярно-волнового дуализма и квантовой неопределенности. Более того, принцип неопределенности Гейзенберга и формула суммирования Пуассона представляют собой категории, обратные друг другу. И вместе они образуют дихотомию «гладкость-дискретность», которая, по-видимому, является одной из основных принципов природы. Поэтому мы можем рассматривать корпускулярно-волновой дуализм как один из примеров дуализма «гладкость-дискретность», когда волны гладкие, а частицы дискретны.

Этот принцип не только соединяет микроскопический мир (квантовая теория) с макроскопическим миром (теория относительности), как показано в табл. 1.1, но также возникает внутри этих миров, поскольку гладкость является обратной величиной (посредством преобразования Фурье) дискретности, и, наоборот, дискретность является обратной (посредством преобразования Фурье) величиной гладкости. Здесь $\hbar$ – постоянная Планка, c – максимальная скорость изменений (скорость света).

Таблица 1.1. Различные приближения в механике

$\hbar = const.; c \to \infty$ квантовая механика	$\hbar = const.; c = const.$ квантовая теория поля
$\hbar \to 0; c \to \infty$ классическая механика	$\hbar \to 0; c = const.$ релятивистская механика

Основные характерные особенности этих приближений приводятся ниже.

1.1.1. Классическая механика

Относится к теории, описывающей движение макроскопических объектов.

Пространство считается независимым от времени и движущейся в нем материи. Принимают, что оно обладает всеми геометрическими свойствами евклидовой геометрии. Время считают универсальным не связанным с пространством и движущейся материей.

Основными концептами классической механики являются материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размеры которого достаточно малы и, которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом называют механическую систему, расстояния, между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях.

Для описания движения в классической механике используется радиус-вектор $\vec{r} = (x, y, z)$ положения тела в инерциальной декартовой системе отсчёта.

В одномерном случае для преобразования между системами отсчета можно записать преобразования Галилея:

$$\begin{cases} x = x' + V, \\ t = t'. \end{cases} \tag{1.1}$$

Преобразования Галилея отражают на языке математики все сказанное ранее о моделях пространства и времени в классической механике.

Математические модели в классической механике представляют собой системы уравнений движения и являются наиболее простыми из всех.

1.1.2. Релятивистская механика

Пространство и время в релятивистской механике зависят от скорости движения и друг от друга и связаны преобразованием Лоренца

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z';$$
$$t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.2}$$

Таким образом, математическая модель пространства в релятивистской механике постулирует наличие предельной скорости.

Наличие релятивистской постоянной c означает, что между пространством и временем появляется прямая связь:

$$(c\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 . \qquad (1.3)$$

Из моделей, используемых в классической механике, в релятивистской механике используется только модель материальной точки.

Математические модели для этого раздела механики незначительно усложняются.

1.1.3. Квантовая механика

Описание положения объекта и его перемещение описываются в квантовой механике с помощью волновой функции. Волновая функция – комплексная амплитуда вероятности $\Psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющая уравнению Шредингера:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi + U(\vec{r})\Psi , \qquad (1.4)$$

где $U(\vec{r})$ – потенциальное поле, в котором находится объект массой m.

Математические модели в квантовой механике представляют собой совокупность уравнений Шредингера, т.е. уравнений в частных производных. По вычислительной сложности такие математические модели намного превосходят модели классической механики.

1.1.4. Квантовая теория поля

Данный раздел является наиболее тяжелым для моделирования, поскольку в нем сочетаются трудности, присущие релятивистской и квантовой механикам.

В рамках настоящего курса детально рассматриваются математические модели классической механики, поскольку по сравнению с другими приближениями их реализация не сложна, а также отличается невысокой вычислительной сложностью, что обеспечивает быстроту получения результатов моделирования в ходе лабораторных работ. В курсе не будут рассматриваться математические модели релятивистской механики, квантовой механики и квантовой теории поля.

1.2. Используемые разностные схемы

В настоящее время в инженерных приложениях и научных исследованиях метод компьютерного численного моделирования постепенно стал важным подходом к решению сложных задач. Допустим, что состояние и динамика системы может быть представлена разложением в ряд Тейлора:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x(t)}{dt^2}\Delta t^2 + \\ + \frac{1}{3!}\frac{d^3x(t)}{dt^3}\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4x(t)}{dt^4}\Delta t^4 + O(\Delta t^5). \tag{1.5}$$

или, применяя формализм кинетики, в следующем виде:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2!}a(t)\Delta t^2 + \\ + \frac{1}{3!}b(t)\Delta t^3 + \frac{1}{4!}c(t)\Delta t^4 + O(\Delta t^5), \tag{1.6}$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t + \frac{1}{2!}b(t)\Delta t^2 + \frac{1}{3!}c(t)\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \tag{1.7}$$

$$a(t+\Delta t) = a(t) + b(t)\Delta t + \frac{1}{2!}c(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3), \tag{1.8}$$

где x – состояние системы, v – скорость изменения состояния, a – его ускорение, t – время фиксации характеристик, Δt – шаг времени фиксации.

Большинство моделей движения тел в классической механике строятся на уравнении движения Ньютона:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\ , \tag{1.9}$$

где m – коэффициент, характеризующий инерцию динамики тела и определяемый как масса тела, $\vec{F}$ – сила, действующая на тело.

Предполагается, что любое движение тел в системе соответствует классическому уравнению механики Ньютона. Если заданы начальные координаты и скорости, то численное решение уравнений движений позволяет получить траекторию движения каждого тела. Суть метода компьютерного моделирования заключается в использовании преимуществ высокой скорости и точности современного компьютера для численного расчета уравнений движения сотен и даже тысяч объектов. Приведем несколько наиболее известных конечно-разностных методов решения уравнений движения Ньютона. В настоящее время известно множество различных методов численного моделирования. Они различаются по эффективности и точности, так для вычисления решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка применяются метод конечных разностей, метод Верле, метод Бимана, и так далее.

Рассмотрим модель одномерного движения материальной точки и запишем уравнения движения в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a, \\ \dfrac{dx}{dt} = v. \end{cases} \tag{1.10}$$

Все конечно-разностные методы осуществляют вычисление значений x_{n+1}, а также соответствующих производных в следующий момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Величина шага Δt непосредственно влияет на погрешность вычислений и на устойчивость решения. Разностные методы называются условно устойчивыми, если они устойчивы при некоторых ограничениях на шаг Δt. Выбор количества учитываемых членов в рядах Тейлора определяет погрешность метода вычисления. Далее рассмотрим получение различных конечно-разностных методов.

1.2.1. Метод Эйлера

Для формулировки метода Эйлера в представлениях (1.6) и (1.7) рассматриваются только первые два члена, отбрасывая величины второго порядка малости:

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t, \\ x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t. \end{cases} \tag{1.11}$$

В этом случае погрешность вычислений составляет $O(\Delta t^2)$, и метод Эйлера характеризуется первым порядком точности и аппроксимации исходных дифференциальных уравнений. Недостатком метода является условная устойчивость, вынуждающая брать небольшой шаг Δt.

1.2.2. Метод Эйлера-Кромера

В методе Эйлера координата в конечной точке интервала x_{n+1} определяется через производную координаты в начальной точке интервала v_n. Изменение метода Эйлера, рассмотренное Кромером, заключается в определении x_{n+1} через производную в конечной точке интервала v_{n+1}. Тогда модифицированный метод Эйлера, называемый методом Эйлера-Кромера, представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t, \\ x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \Delta t. \end{cases} \tag{1.12}$$

Эта модификация приводит к устойчивым решениям для колебательных процессов.

1.2.3. Метод Верле

На основе подхода метода конечных разностей можно записать:

$$x(t+\Delta t)=x(t)+v(t)\Delta t+\frac{a(t)\Delta t^2}{2!}+ \\ +\frac{b(t)\Delta t^3}{3!}+\frac{c(t)\Delta t^4}{4!}+O(\Delta t^5), \tag{1.13}$$

$$x(t-\Delta t)=x(t)-v(t)\Delta t+\frac{a(t)\Delta t^2}{2!}- \\ -\frac{b(t)\Delta t^3}{3!}+\frac{c(t)\Delta t^4}{4!}+O(\Delta t^5). \tag{1.14}$$

В результате сложения (1.13) и (1.14) получим:

$$x(t+\Delta t)=2x(t)-x(t-\Delta t)+a(t)(\Delta t)^2+O(\Delta t^4), \tag{1.15}$$

что приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}+a_n\Delta t^2, \\ v_n=\dfrac{x_{n+1}-x_{n-1}}{2\Delta t}. \end{cases} \tag{1.16}$$

Систему (1.16) также можно записать в следующем виде, называемом **методом полушага**:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+v_{n+1/2}\Delta t, \\ v_{n+1/2}=v_{n-1/2}+a_n\Delta t, \\ v_{n-1/2}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\Delta t}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Преимущества метода следующие. Большая вычислительная точность. Из (1.15) следует, что ошибка вычислений составляет $O(\Delta t^4)$. Ускорение вычисляется только один раз на каждом шаге. Время относительно обратимо.

Недостатки алгоритма следующие. Компоненты $2x(t)$ и $x(t-\Delta t)$ – велики по сравнению с $a(t)\Delta t^2$. Увеличение шага может привести к потере точности. Ошибка вычисления $v(t)$, оцениваемая как $O(\Delta t^2)$, велика относительно ошибки $x(t)$. Алгоритм не является самостартующим, то есть схема (1.17) не позволяет вычислить $v_{1/2}$, и требуется дополнительный расчет, например, с помощью выражения $v_{1/2} = v_0 + a_0 \Delta t / 2$.

1.2.4. Метод Бимана

Для дальнейшего улучшения точности можно записать с использованием (1.8):

$$a(t - \Delta t) = a(t) - b(t)\Delta t + \frac{1}{2!}c(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3). \qquad (1.18)$$

Тогда, из (1.18) можно определить $b(t)$ и подставить в (1.6) и (1.7):

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{4a(t) - a(t - \Delta t)}{6}\Delta t^2 + O(\Delta t^4), \qquad (1.19)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{2a(t + \Delta t) + 5a(t) - a(t - \Delta t)}{6}\Delta t + O(\Delta t^3). \qquad (1.20)$$

В результате, разностная схема имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \dfrac{4a_n - a_{n-1}}{6}\Delta t^2, \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{2a_{n+1} + 5a_n - a_{n-1}}{6}\Delta t. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Этот метод еще более улучшает точность и обеспечивает лучшее соответствие результатов закону сохранения энергии.

Выбор конкретной расчетной схемы осуществляется исходя из требований к точности определения характеристик кинетики системы и к скорости вычислений.

1.3. Порядок выполнения лабораторной работы «Планетарная система»

1. Запустите программу, моделирующую движение планетных систем, Sun.exe.

2. В разделе меню “Файл” выберете пункт “Новая система” (рис. 1.1).
3. Задайте количество тел, указанное в вашем задании (рис. 1.2). При этом центральное тело (звезда) считается одной из планет.
4. Запустите модель.

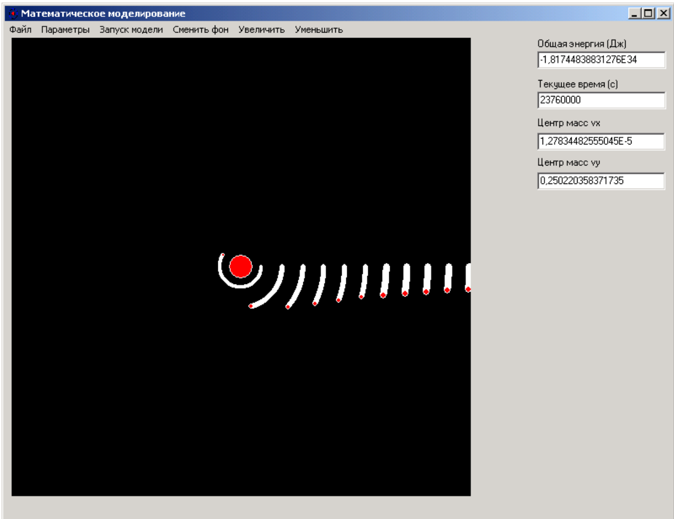

Рис. 1.1. Создание новой системы небесных тел

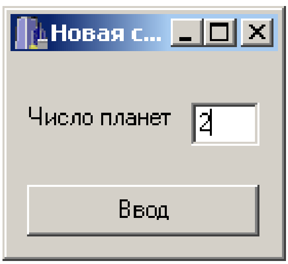

Рис. 1.2. Окно задания числа тел в планетной системе

5. Для прорисовки траекторий используйте кнопки: “Сменить фон”, “Увеличить”, “Уменьшить” (рис. 1.3).
6. Сформированную с заданными параметрами систему можно сохранить, а затем загрузить при необходимости (раздел меню “Файл”).

В ходе выполнения задания необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

1. Неадекватность решения в математических моделях таких систем выражается либо в виде нестабильности траектории (изменение формы траектории с течением времени), вы должны определять такую неустойчивость через изменение суммарного импульса, либо через изменение полной энергии системы. Полная энергия системы в ходе моделирования может изменяться по-разному, в зависимости от разностной схемы (возрастать, понижаться, колебаться).

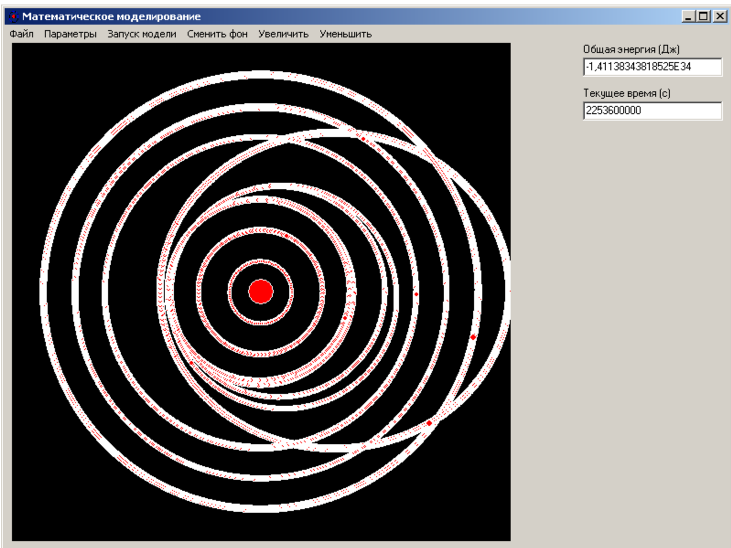

Рис. 1.3. Моделирование движения небесных тел

2. Под определением зависимости понимается построение графика этой зависимости в качестве результата (на графике должно быть не менее 10 точек в характерной области).
3. При исследовании зависимости адекватности решения от начальной скорости, определить минимальную скорость, при которой начинает визуально наблюдаться неустойчивость.
4. Аналитический расчет параметров позволит сильно сократить время выполнения задания при моделировании нестандартной системы, которую вам нужно будет получить (двойная звезда спутник и т.п.).
5. Отчет по лабораторной работе выполняется в соответствии со стандартами. В отчете обязательно нужно указывать все промежуточные результаты (например, при исследовании сходимости по энергетическому критерию нужно представить таблицу и график для изменения энергии в разные моменты времени).
6. Кроме отчета по результатам работы для сдачи лабораторной нужно ответить на теоретический вопрос по теме “Математические модели в механике” (информация, представленная в этом методическом пособии для этого недостаточна), разработать собственную математическую модель и её программную реализацию на любом языке высокого уровня. Разработанная модель должна содержать одно существенное усовершенствование. Её программная реализация – одно интерфейсное усовершенствование по сравнению с исходной программой.

1.4. Варианты заданий к лабораторной работе «Планетарная система»

Вариант №1

1. Постройте планетную систему из двух тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $3{,}0\times10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из двух тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу второго тела (планеты), увеличив её в 16 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из двух тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $3{,}0\times10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Сконфигурируйте устойчивую систему двух звёзд (на время 20 лет), в которой масса второй звезды в 5 раз меньше массы центральной звезды. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.

6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №2

1. Постройте планетную систему из трёх тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0\times10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из трёх тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу второго тела (планеты), увеличив её в 31 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из двух тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0\times10^{24}$ кг. Меняя расстояние между телами, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Сконфигурируйте устойчивую систему трех тел (на время 20 лет), представив третье тело звездой массой в 3 раза меньше массы центральной звезды. Сформулируйте методику изменения параметров системы.

5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №3

1. Постройте планетную систему из четырёх тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0 \times 10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из четырёх тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу третьего тела (планеты), увеличив её в 5 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из пяти тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0 \times 10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Сконфигурируйте устойчивую систему четырёх тел (на время 30 лет), заменив самую дальнюю планету в стан-

дартной системе, на звезду массой в 2 раза меньше массы центральной звезды. Сформулируйте методику изменения параметров системы.

5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №4

1. Постройте планетную систему из пяти тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0\times10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из пяти тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу второго тела (планеты), увеличив её в 12 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из пяти тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0\times10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, вли-

яет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.

4. Сконфигурируйте устойчивую систему четырёх тел (на время 20 лет), представив четвертое тело звездой массой в 3 раза меньше массы центральной звезды. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №5

1. Постройте планетную систему из шести тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $8{,}0\times10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из шести тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу второго тела (планеты), увеличив её в 16 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из шести тел. За основу следует принять стандартную систему. Массa первого тела

(звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0\times10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.

4. Сконфигурируйте устойчивую систему трёх тел (на время 20 лет) из звезды, планеты и её спутника. Масса спутника в 10 раз меньше массы планеты. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №6

1. Постройте планетную систему из семи тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $15{,}0\times10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из семи тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу четвёртого тела (планеты), увеличив её в 50 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.

3. Постройте планетную систему из семи тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $15{,}0 \times 10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Постройте модель захвата первой планеты второй планетой на устойчивую спутниковую траекторию. Разрешено менять все параметры первой планеты, кроме массы. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №7

1. Постройте планетную систему из восьми тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0 \times 10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из восьми тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу третьего тела (планеты), увеличив её в 9 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая вы-

полнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.

3. Постройте планетную систему из восьми тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $6{,}5 \times 10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Постройте модель захвата первой планеты третьей планетой на устойчивую спутниковую траекторию. Разрешено менять все параметры первой планеты, кроме массы. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №8

1. Постройте планетную систему из девяти тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $5{,}0 \times 10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
2. Постройте планетную систему из девяти тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу третьего тела (планеты), увеличив её в 1000 раз по сравне-

нию со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.

3. Постройте планетную систему из девяти тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $12{,}0 \times 10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Постройте модель захвата последней планеты проходящей мимо звездой на устойчивую траекторию. Масса проходящей звезды равна массе центрального тела. Разрешено менять все параметры звезды, кроме массы. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №9

1. Постройте планетную систему из десяти тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $25{,}0 \times 10^{24}$ кг. Определите сходимость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.

2. Постройте планетную систему из девяти тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу третьего тела (планеты), увеличив её в 600 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из восьми тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $25{,}0 \times 10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Постройте модель захвата последней планеты проходящей мимо звездой на устойчивую траекторию. Масса проходящей звезды в 1,2 раза больше массы центрального тела. Разрешено менять все параметры звезды, кроме массы. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №10

1. Постройте планетную систему из одиннадцати тел. За основу следует принять стандартную систему (по умолчанию). Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $9{,}0 \times 10^{24}$ кг. Определите схо-

димость всех разностных схем от шага по времени, рассматривая выполнение закона сохранения импульса в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.

2. Постройте планетную систему из одиннадцати тел. За основу следует принять стандартную систему. Измените массу третьего тела (планеты), увеличив её в 500 раз по сравнению со стандартной. Определите, какая из разностных схем приводит к меньшим ошибкам расчёта, рассматривая выполнение закона сохранения энергии в замкнутых системах. Время моделирования принять равным 200 лет.
3. Постройте планетную систему из одиннадцати тел. За основу следует принять стандартную систему. Масса первого тела (звезды) остается неизменной, масса второго тела (планеты) $9{,}0\times10^{24}$ кг. Меняя скорость планеты, определите, влияет ли изменение силы гравитационного поля, действующего на планету, на адекватность решения.
4. Постройте модель захвата последней планеты проходящей мимо звездой на устойчивую траекторию. Масса проходящей звезды в 1,1 раза больше массы центрального тела. Разрешено менять все параметры звезды, кроме массы. Сформулируйте методику изменения параметров системы.
5. Сформулируйте систему уравнений с начальными условиями для моделирования данной системы. Определите основные упрощения, используемые в данной модели.
6. На основе системы уравнений разработайте собственную моделирующую программу, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ

2.1. Общая модель

Пусть есть k взаимодействующих популяций, каждая популяция характеризуется численностью N_i, динамика развития популяций характеризуется коэффициентами естественного прироста α_i. Для полного описания изменения численности популяций необходимо ввести матрицу взаимодействия популяций B_{ij}. В общем случае α_i и B_{ij} представляют собой некоторые функции времени. При этом нас интересует только изменение численности популяций, но не распределение в пространстве (т.е. рассматривается точечная модель).

Математическая модель взаимодействующих популяций будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{dN_i}{dt} = \alpha_i N_i + \sum_{j=1}^{k} B_{ij} N_i N_j \ , \tag{2.1}$$

где $i = 1,..,k$, диагональные элементы матрицы B_{ii} описывают взаимодействие внутри популяции.

2.2. Модели одиночных популяций

В простейшем виде, когда популяция только одна и коэффициенты постоянные система уравнений (2.1) превращается в одно уравнение, которое является основой для модели Мальтуса развития одиночной популяции:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \ . \tag{2.2}$$

Обычно в этой модели коэффициент α разделяется на две части соответствующие естественному приросту α_0 и убыли β_0:

$$\alpha = \alpha_0 - \beta_0 \,. \tag{2.3}$$

Модель одиночной не взаимодействующей с другими популяции характерна для популяции разумных видов. Модель Мальтуса, однако, не учитывает многих факторов, в частности ограниченность ресурсов, что приводит к неограниченному росту популяции.

Для учета ограниченности ресурсов можно ввести равновесную численность популяции N_p. Это численность популяции, при которой она стабильна по численности. Математическая модель такой популяции приобретает вид:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N . \tag{2.4}$$

Эта математическая модель может быть также распространена на модели взаимодействующих популяций за счет изменения коэффициентов внутреннего взаимодействия.

2.3. Простейшая модель взаимодействующих популяций

Рассмотрим ситуацию, когда взаимодействуют две популяции. Первая популяция – травоядные, с положительным коэффициентом естественного прироста α_1, и отрицательным коэффициентом взаимодействия со второй популяцией B_{12}. Вторая популяция – хищники, с отрицательным коэффициентом естественного прироста α_2, и положительным коэффициентом взаимодействия со второй популяцией B_{21}. При этом коэффициенты внутреннего взаимодействия $B_{11} = B_{22} = 0$, т.е. ограниченность ресурсов не принимается во внимание. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \alpha_1 N_1 + B_{12} N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \alpha_2 N_2 + B_{21} N_1 N_2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При взаимодействии видов, согласно модели (2.5), возникают периодические колебания численности популяций, смещенные примерно на четверть периода, как показано на рис. 2.1.

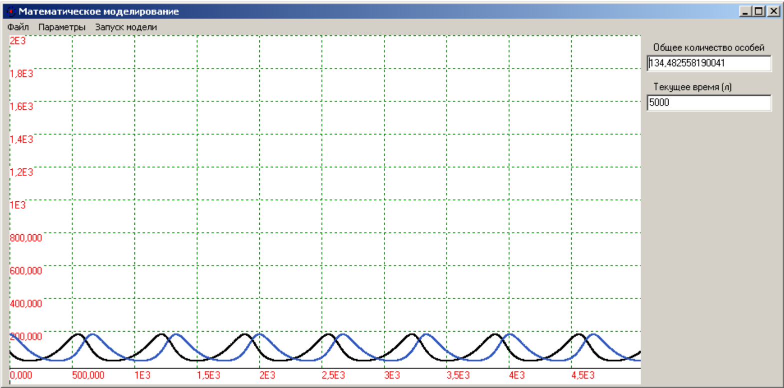

Рис. 2.1. Периодические колебания в системе двух взаимодействующих видов

2.4. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Запустите программу Mod.exe. Эта программа моделирует динамику развития популяций с постоянными коэффициентами.
2. В разделе меню “Файл” выберете пункт “Новая система” (рис. 2.2).
3. Задайте количество видов, указанное в вашем задании (рис. 2.3). После этого на экран выходит форма, показанная на рис. 2.4, позволяющая задать коэффициенты для модели.
4. Запустите модель (рис. 2.5).
5. Сформированную с заданными параметрами систему можно сохранить, а затем при необходимости загрузить (раздел меню “Файл”).

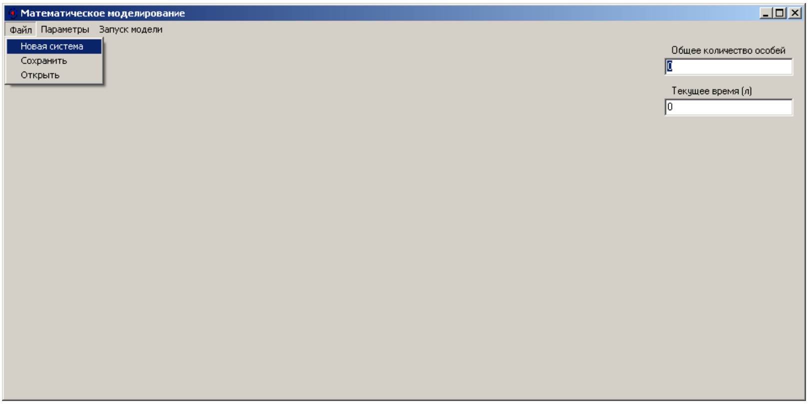

Рис. 2.2. Создание новой системы взаимодействующих видов

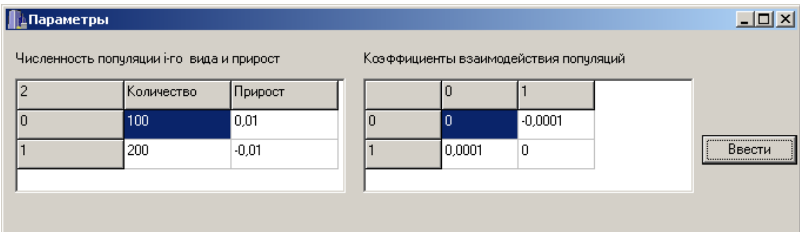

Рис. 2.3. Окно задания параметров

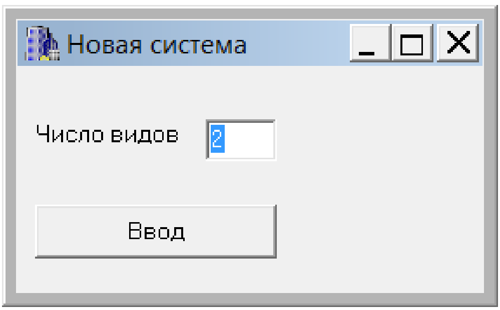

Рис. 2.4. Окно задания числа видов

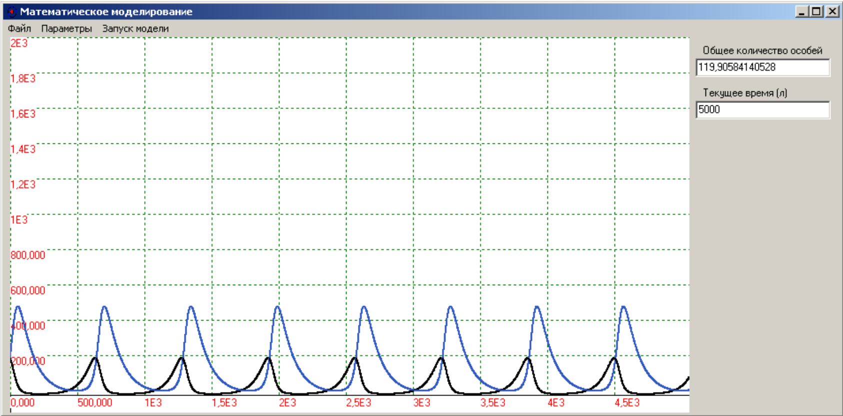

Рис. 2.5. Моделирование взаимодействующих популяций

В ходе выполнения задания необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

1. Стабильной считается популяция, численность которой не изменяется более, чем на порядок. Не следует подбирать коэффициенты, небольшой расчет поможет сильно сократить время выполнения лабораторной работы.
2. При исследовании периода колебаний необходимо сделать не менее 10 экспериментов. Для более точного определения периода можно менять время моделирования. Под определением зависимости понимается построение графика этой зависимости в качестве результата (на графике должно быть не менее 10 точек в характерной области).
3. Полное уничтожение популяции необходимо получить за счет коэффициентов взаимодействия. Полным уничтожением популяции считается уменьшение численности популяции до величины меньше единицы (визуально график численности идет точно по оси времени).

4. Отчет по лабораторной работе выполняется в соответствии со стандартами. В отчете обязательно нужно указывать все промежуточные результаты.
5. Кроме отчета по результатам работы для сдачи лабораторной нужно ответить на теоретический вопрос по теме “Математические модели популяций” (информация, представленная в этом методическом пособии для этого недостаточна), разработать собственную математическую модель и её программную реализацию на любом языке высокого уровня. Разработанная модель должна содержать одно существенное усовершенствование. Её программная реализация – одно интерфейсное усовершенствование по сравнению с исходной программой.

2.5. Реализация математических моделей одиночных популяций

Программа Mod.exe предназначена для моделирования взаимодействующих популяций, но позволяет реализовать простейшие модели одиночных популяций, такие как модель Мальтуса и модель с ограничением ресурсов (логистическая модель). Для математической модели с ограничением ресурсов, необходимо задать систему из одного вида. Коэффициент α_1 должен быть положительным, а коэффициент B_{11} должен быть отрицательным. В этом случае реализуется модель популяции с равновесной численностью:

$$N_{\text{р}} = -\frac{\alpha_1}{B_{11}}. \tag{2.6}$$

2.6. Варианты заданий к лабораторной работе «Система популяций»

Вариант №1

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает полное взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна, при начальных численностях 300, 200, 100, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и периода колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №2

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Увеличьте начальную численность жертв в 1,5 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с нормальной пищевой цепью. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна при начальных численностях 350, 250, 100, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и амплитудой колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №3

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Увеличьте начальную

численность жертв в 2 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).

2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с полным взаимодействием. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна, при начальных численностях 400, 300, 100, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и периода колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №4

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Увеличьте начальную численность жертв в 2,5 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых

популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).

2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с нормальной пищевой цепью. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна при начальных численностях 450, 300, 100, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и амплитудой колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №5

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Уменьшите начальную численность хищников в 1,5 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).

2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с полным взаимодействием. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна, при начальных численностях 500, 300, 100, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и периода колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №6

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Уменьшите начальную численность хищников в 2 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с нормальной пищевой цепью. Опре-

делите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна при начальных численностях 550, 350, 100, соответственно.

3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и амплитудой колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №7

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Уменьшите начальную численность хищников в 3 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с полным взаимодействием. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна, при начальных численностях 600, 350, 100 соответственно.

3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и периода колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №8

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Увеличьте начальную численность жертв в 3,5 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с нормальной пищевой цепью. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна при начальных численностях 700, 250, 100, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе

двух видов и амплитудой колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).

4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №9

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Увеличьте начальную численность жертв в 4 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с нормальной пищевой цепью. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна при начальных численностях 800, 300, 50, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и амплитудой колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).

4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).
5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №10

1. Загрузите стандартную систему коэффициентов для системы уравнений Лотки-Вольтерра. Увеличьте начальную численность хищников в 1,5 раза. Меняя коэффициенты, определите условия (сочетание коэффициентов) при которых популяция стабильна (общее число особей не уменьшается более, чем на порядок).
2. Загрузите систему коэффициентов для системы уравнений, которая описывает взаимодействие трех видов: жертва, субхищник, хищник, с нормальной пищевой цепью. Определите экспериментальным путем диапазон значений коэффициентов, при котором популяция стабильна при начальных численностях 800, 300, 50, соответственно.
3. На основе системы из задания 2 определите, существует ли связь между разностью численности популяций в системе двух видов и амплитудой колебаний. Если связь есть, конкретизируйте ее (определите эмпирическую зависимость).
4. Постройте логистическую модель развития популяции (популяции не взаимодействуют).

5. Промоделируйте ситуацию фактической гибели одной из популяций за счет взаимодействия с другой (т.е. рассмотреть ситуацию, когда хищники полностью уничтожают жертв).
6. Разработайте собственную математическую модель взаимодействующих популяций, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. Общие сведения

Имитационное моделирование – один из наиболее известных и широко распространенных способов математического моделирования, основанный на использовании компьютерной техники. Инструментальные средства имитационного моделирования появились практически одновременно с первыми универсальными алгоритмическими языками программирования, такими как Алгол и Фортран. К настоящему времени, по мнению специалистов, насчитывается около 300 языков моделирования дискретных процессов. Такое широкое распространение средств имитационного моделирования, характерное для 60-70-х годов прошлого века, определяется сравнительной простотой процедуры построения имитационной модели при условии достижения высокого уровня точности воспроизведения закономерностей функционирования (поведения) реально существующих систем.

Первоначально имитационные модели разрабатывались в интересах проектирования технических систем типа систем массового обслуживания, например, телефонных станций, железнодорожных узлов, аэропортов, морских портов и т.д. В 80-х годах это направление, в известной степени, поддерживалось проблематикой, связанной с проектированием вычислительных сетей. В настоящее время повышенный интерес к средствам имитационного моделирования стимулируется значительными успехами, полученными в области применения методов имитационного моделирования в экономике, а также идеей перевода известных схем моделирования на модные рельсы объектно-ориентированного программирования.

Формальные обозначения различных систем массового обслуживания были предложены Д. Кендаллом в виде A/B/C/D, где A и B обозначают законы распределений временных интервалов поступления заявок в систему и длительности обслуживания этих заявок, соответственно; C – число обслуживающих каналов или линий, открытых в системе (C = 1, 2, ...); D – ёмкость накопителя (D = 1, 2, ...).

Возможные обозначения законов распределений интервалов времени появления заявок (A) и длительности обслуживания (B):

- M (Markovian) – распределение Пуассона или экспоненциальное распределение;
- D (Degenerate) – распределение с равномерной плотностью, определённое или фиксированное время обслуживания;
- G (General) – произвольное распределение с независимым интервалами времени появления заявок и обслуживания;
- E_k (Erlang) – распределение Эрланга *k*-го порядка (т.е. сумма *k* последовательных экспоненциальных случайных переменных).

3.2. Математические модели систем массового обслуживания

Систему массового обслуживания можно представить как марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Далее сформируем математическую модель такой системы на примере полнодоступной системы с двумя линиями обслуживания.

Такая система может находиться в одном из четырех состояний: S_{00} – оба канала свободны, S_{10} – занят первый канал, второй свободен, S_{01} – занят второй канал, первый свободен, S_{11} – заняты оба канала. Переходы из состояния в состояние в системе осуществляется по следующему набору событий: e_0 – появление очередной заявки, e_1 – завершение обслуживания заявки на первом канале, e_2 – завершение обслуживания заявки на втором канале. Блок-схема такой системы представлена на рис. 3.1.

Система может находиться в каждом из состояний с вероятностями: p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{11}, соответственно, а события осуществляются с интенсивностями λ_0, λ_1, λ_2, соответственно. Динамика системы описывается изменением значения вероятностей нахождения системы в каждом из состояний, для определения зависимостей вероятностей от времени можно составить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{00}}{dt} &= -\lambda_0 p_{00} + \lambda_1 \mathrm{p}_{10} + \lambda_2 \mathrm{p}_{01}, \\ \frac{dp_{10}}{dt} &= \lambda_0 p_{00} - \lambda_1 p_{10} - \lambda_0 \mathrm{p}_{10} + \lambda_2 \mathrm{p}_{11}, \\ \frac{dp_{01}}{dt} &= -\lambda_2 p_{01} - \lambda_0 \mathrm{p}_{01} + \lambda_1 \mathrm{p}_{11}, \\ \frac{dp_{11}}{dt} &= \lambda_0 p_{01} - \lambda_1 p_{11} - \lambda_2 p_{11} - \lambda_0 p_{10}. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

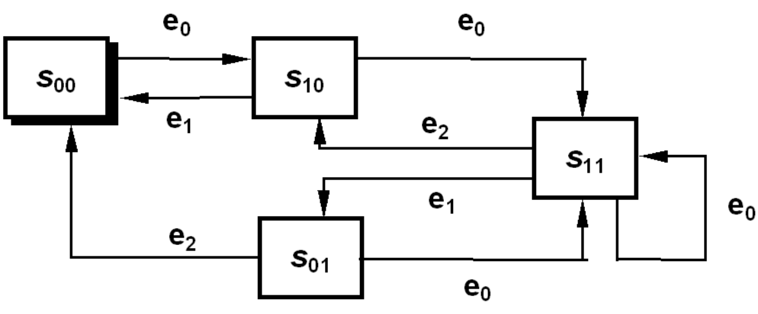

Рис. 3.1. Блок-схема состояний и событий для системы массового обслуживания из двух полнодоступных линий

Система дифференциальных уравнений (3.1) является основой для полноценной математической модели системы массового обслуживания, которая позволяет получить точные решения для любой ситуации. Однако, математические модели систем массового обслуживания практически не используются. Причина этого – высокая вычислительная сложность таких моделей для реальных систем массового обслуживания с большим числом линий. Количество состояний системы массового обслуживания с числом линий N, а следовательно, количество уравнений в системе (3.1) равно 2^N. Таким образом, уже для $N = 20$ система вида (3.1) становится слишком вычислительно сложной для современных компьютеров.

Таким образом, для моделирования систем массового обслуживания приходится использовать имитационные модели.

3.3. Основные понятия технологии имитационного моделирования

Центральными понятиями технологии имитационного моделирования являются такие понятия, как система, модель, имитационная модель, имитационное моделирование.

Под системой имитационного моделирования понимают реально существующую или подразумеваемую часть окружающего нас мира, выделяемого исследователям с целью ее последующего изучения в течении некоторого периода времени. Предполагается, что система может иметь входы и выходы, через которые осуществляется ее взаимодействие с внешним миром, для которого сама система является “черным ящиком”.

Модель – это некоторая аналогия, такая, что для одной системы, называемой моделируемой, должна существовать другая система – моделирующая, элементы которой с определенной точки зрения подобны элементам первой, т. е. существует некоторое отображение, которое элементам моделируемой системы ставит в соответствие элементы моделирующей системы. Элементы модели называют объектами. Объекты обладают атрибутами, т.е. определенными свойствами им соответствующими.

Имитационное моделирование применяется для исследования динамических систем, состояния которых изменяется во времени. Имитационная модель – это динамическая модель, которая в процессе исследования системы проходит через ряд последовательных состояний, упорядоченных в соответствии с увеличениями значения особого атрибута – времени моделирования. Этот атрибут присутствует во всех имитационных моделях и называется системным или модельным временем.

Для моделирования систем и сетей связи используются дискретно-событийные имитационные модели. Это такие модели, кроме системного времени, изменяются в процессе работы модели дискретно в моменты наступления некоторых событий.

Имитационное моделирование – это метод исследования, основанный на том, что изучаемая динамическая система заменяется ее имитационной моделью, и с этой моделью проводятся машинные эксперименты с целью получения информации об изучаемой системе. Таким образом, для имитационного моделирования – метода исследования систем и сетей связи – характерно наличие модели и проведения эксперимента с этой целью. Причем несколько связанных между собой экспериментов обычно называют имитационным исследованием, а действие, связанное с однократным проведением имитационного эксперимента с целью получения оценок показателей качества функционирования системы при выбранном наборе параметров, называют прогоном модели.

Поток заявок (или событий, в общем случае) – последовательность заявок, поступающих через какие-либо интервалы или в какие-либо моменты времени. Случайные потоки заявок задаются функциями распределения. Функцией распределения вероятности некоторой случайной величины z называют функцию

$$F(t) = P(z < t), \qquad (3.2)$$

где P – вероятность, что $z < t$, t – определённая величина.

Для организации процедуры “розыгрыша” необходимо иметь случайный механизм розыгрыша. Реализация его может быть различной, но наиболее общим случаем является стандартное устройство, позволяющее решить одну задачу: получить случайную величину, распределенную с постоянной плотностью на отрезке от 0 до 1.

3.4. Методы получения случайных величин на компьютере

3.4.1. Таблицы случайных чисел

Таблицы случайных чисел представляют собой самый старый способ работы со случайными числами на компьютере. Формировались эти таблицы разными способами, самые старые из них формировались вручную.

Для удобства выбора начальной точки таблицы часто формируют в виде двумерного массива, как показано в таблице 3.1.

Наибольшая по размеру таблица содержит около миллиона случайных чисел. В качестве начальной точки часто используется текущее системное время. Недостатков у этого метода два: значительные ресурсы для хранения таблицы случайных чисел в оперативной памяти и их периодичность.

3.4.2. Генераторы случайных чисел

Генераторы случайных чисел – внешние устройства, в которых считывается некий шумовой сигнал. Например, в качестве такого устройства может выступать фотодиод с закрытой от света площадкой или отдельная ячейка КМОП структуры, также закрытой от света. В этих приборах постоянно присутствует некоторое количество так называемых темновых электронов. Количество этих электронов можно рассматривать как уровень сигнала, который меняется во времени. Пример такого сигнала приведён на рис. 3.2.

Таблица 3.1. Пример заполнения таблицы случайных чисел

Номер строки *i*	Номер колонки *j*							
	5	10	15	20	25	30	35	60
5	95183	14683	96585	84761	65044	65183	55567	02879
	08509	97009	47525	88791	93751	70490	17749	89466
	45448	66819	86936	95349	08657	75106	97487	29083
	02230	00022	46390	76658	91934	64676	42429	66736
	13275	96798	51425	67147	15216	71831	16229	03550
10	44439	33385	95151	92374	14683	00323	57667	87552
	17629	80967	42144	58190	24550	62189	94525	87043
	14328	77127	40397	78105	75031	99553	84296	68873
	96896	02466	86706	09507	66840	68509	38033	48343
	09725	80938	27971	01243	29232	28799	88456	69087

Для получения последовательности случайных чисел выбирается некоторый уровень сигнала f_0 и некоторый малый промежуток времени τ. Подсчитывается количество точек пересечения уровнем сигнала значения f_0. Если количество таких пересечений четное, то генерируется значение X_0 = «0». Если нечетное, то генерируется значение X_1 = «1». Уровень сигнала f_0 выбирается таким образом, чтобы формируемая последовательность соответствовала распределению:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

где X_i – реализация случайной величины, p_i – вероятность этой реализации.

Таким образом формируется последовательность двоичных чисел. При необходимости формирования чисел с разрядностью N одновременно используется N таких внешних приборов. Время τ относительно невелико составляет несколько миллисекунд. Однако частота работы такого генератора все же существенно ниже частоты необходимой для работы с современным компьютером, поэтому обычно генератором случайных чисел предварительно генерируется таблица случайных чисел достаточная по размеру для решаемой задачи.

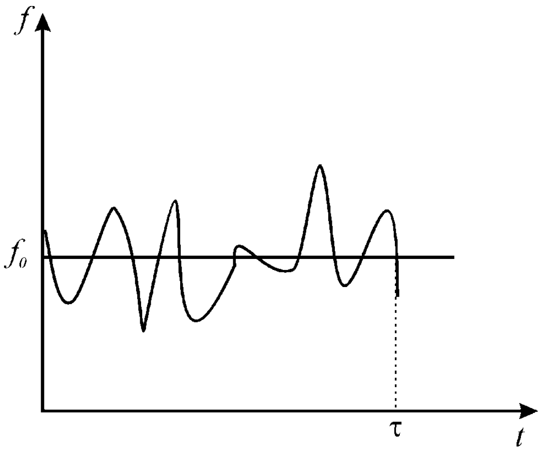

Рис. 3.2. Пример изменения стохастического сигнала

3.4.3. Генераторы псевдослучайных чисел

Для получения последовательности псевдослучайных чисел γ_i используется процедура получения следующего значения на основании предыдущего:

$$\gamma_{i+1} = F(\gamma_i)\,. \qquad (3.4)$$

Функция F подбирается так, чтобы значения γ_i равномерно заполняли отрезок от 0 до 1.

Самая первая формула для формирования последовательности псевдослучайных чисел была предложена Нейманом. Для генерации предлагалось возведение числа во вторую степень с извлечением его центральной части, например, $0{,}4569^2=0{,}20\underline{8757}61 \rightarrow$ 0,8757. Формула оказалась неудачной, поскольку последовательность довольно быстро уходит в диапазон малых значений.

В современных генераторах псевдослучайных чисел используются другие методы, например, псевдослучайные числа высокого качества можно получить методом Фиббоначи с запаздываниями [5], такой метод используется в системе Matlab:

$$k_i = \begin{cases} k_{i-a} - k_{i-b},\, k_{i-a} \ge k_{i-b}, \\ k_{i-a} - k_{i-b} + 1,\, k_{i-a} < k_{i-b}, \end{cases} \qquad (3.5)$$

где k_i – вещественные числа от 0 до 1, a и b – целые положительные числа, параметры генератора. Для работы генератору необходимо хранить в памяти максимальную величину предыдущих сгенерированных случайных чисел max(a, b).

Для генераторов, построенных по методу Фибоначчи с запаздыванием, существуют рекомендуемые параметры a и b, которые были подобраны в многочисленных исследованиях. Например, исследователи предлагают следующие значения: (a, b) = (55, 24), (17, 5) или (97,33). Качество получаемых случайных чисел зависит от значения константы a: чем оно больше, тем выше размерность пространства, в котором сохраняется равномерность случайных векторов, образованных из полученных случайных чисел. В то же время, с увеличением величины константы a увеличивается объём используемой алгоритмом памяти.

Значения $(a, b) = (17, 5)$ рекомендуются для простых приложений. Значения $(a, b) = (55, 24)$ позволяют получать числа, удовлетворительные для большинства криптографических алгоритмов, требовательных к качеству случайных чисел. Значения $(a, b) = (97, 33)$ позволяют получать очень качественные случайные числа и используются в алгоритмах, работающих со случайными векторами высокой размерности.

Генераторы псевдослучайных чисел, основанные на методе Фибоначчи с запаздыванием, используются для целей криптографии. Кроме того, они применяются в математических и статистических расчетах, а также при моделировании случайных процессов.

В данном случае, конечно, получается последовательность полностью детерминированных чисел, но если эти числа соответствуют параметрам распределения стандартной случайной величины, то они ничем не отличаются от случайных чисел, и их можно использовать в имитационном моделировании.

3.4.4. Получение случайных чисел с любым дискретным распределением

Пусть дискретная случайная величина ε задана следующим рядом распределения:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

В этом случае, преобразование из стандартной случайной величины проходит по простому алгоритму. Отрезок от 0 до 1 разбивается на n отрезков (рис. 3.3).

Считается, что реализация случайной величины X_i состоялась, если стандартная случайная величина принадлежит i-му отрезку.

Рис. 3.3. Разбиение отрезка от 0 до 1 на *n* отрезков для получения дискретной случайной величины с распределением в виде ряда

3.4.5. Получение случайных чисел с любым непрерывным распределением

Если непрерывная случайная величина имеет известную функцию распределения $F(x)$ и функцию плотности распределения $f(x)$. Тогда для получения текущей реализации этой случайной величины нужно решить следующее интегральное уравнение

$$F(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} f(x)dx = \gamma , \qquad (3.7)$$

где γ – текущая реализация стандартной случайной величины. Смысл этого уравнения графически показан на рис. 3.4.

3.5. Простейшая модель

Рассмотрим процесс обслуживания заявок простейшего потока U-линейным пучком при экспоненциальном времени обслуживания заявок. В обозначениях Кендалла: M/M/U. Качество обслуживания заявок характеризуется вероятностью потерь, вероятностью того, что заявка не будет обслужена $P_{\text{отказ}}$, средним временем ожидания. Заявка получит отказ в случае в случае занятости всех U линий. Система массового обслуживания может характеризоваться средним числом занятых линий $\bar{k}$; абсолютной пропускной способностью *A*, определяемой средним числом заявок, обслуживаемых в единицу времени; относительной пропускной способностью Q, определяемой средней долей пришедших заявок, обслуживаемых системой.

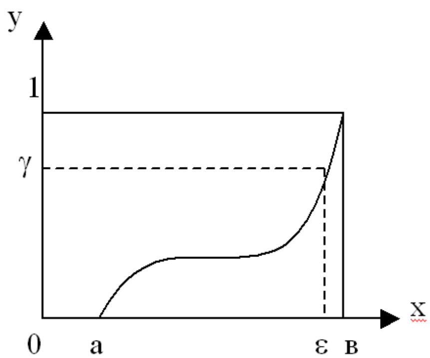

Рис. 3.4. Нахождение реализации ε непрерывной случайной величины

Для моделирования процесса обслуживания заявок полнодоступным набором из U линий необходимо разыграть два случайных процесса: процесс поступления заявок и процесс обслуживания заявок. В Марковском процессе число пришедших заявок распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием числа заявок $\lambda\bar{t}$ за средний интервал времени $\bar{t}$, где параметр потока $\lambda(t)$ – интенсивность потока в момент времени t – это предел отношения вероятности поступления хотя бы одной заявки за время $[t, t + \tau)$ к длине этого отрезка времени τ при $\tau \to 0$:

$$\pi_1'(t, t+\tau) = \lambda(t), \tag{3.8}$$

где $\pi_k(t, t + \tau)$ – это вероятность поступления k и более заявок за промежуток времени $[t, t + \tau)$.

В стационарном пуассоновском потоке промежутки между соседними событиями являются независимыми случайными величинами с одинаковым распределением:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0, \tag{3.9}$$

где $F(t)$ – это вероятность того, что промежуток времени T между заявками будет меньше определённого промежутка t, что эквивалентно вероятности того, что за промежуток t поступит одна и более заявок.

Для моделирования просеянных простейших потоков, в которых некоторое число заявок периодически теряется, применяют описание потоками Эрланга. Потоком Эрланга k-го порядка называют поток событий, получаемый из стационарного пуассоновского потока отбрасыванием из потока k отсчетов с сохранением k+1-го отсчета. Функция распределения временных интервалов между соседними заявками в потоке Эрланга с интенсивностью λ определяется по формуле

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!} . \qquad (3.10)$$

Таким образом, стационарный пуассоновский поток является потоком Эрланга нулевого порядка.

Для числа заявок K, поступающих за промежуток времени $(0, t)$, математическое ожидание $M[K]$, дисперсия $D[K]$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma[K]$ определяются, соответственно, как:

$$M[K] = D[K] = \lambda t , \qquad (3.11)$$

$$\sigma[K] = \sqrt{D[K]} = \sqrt{\lambda t} . \qquad (3.12)$$

В случае простейшего потока плотность распределения вероятностей промежутков времени между заявками находится в виде:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} . \qquad (3.13)$$

Для промежутков времени T между заявками можно найти математическое ожидание $M[T]$, дисперсию $D[T]$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma[T]$, соответственно:

$$M[T]=\int_0^\infty tf(t)dt=1/\lambda, \qquad (3.14)$$

$$D[T]=\int_0^\infty t^2 f(t)dt-M^2(t)=1/\lambda^2, \qquad (3.15)$$

$$\sigma[T]=\sqrt{D[T]}=1/\lambda. \qquad (3.16)$$

Промежутки времени между поступлениями заявок Z_{bi} в общем случае имеют показательное распределение и определяются следующим соотношением:

$$Z_{bi}=F_0^{-1}(\gamma_i), \qquad (3.17)$$

где $\gamma_i=F_0\left(t_i\right)$.

Для простейшего потока заявок $Z_{bi}=-\dfrac{\ln(1-\gamma_i)}{\lambda}$ или, поскольку инвертированная последовательность $1-\gamma_i$ также является стандартной случайной величиной, $Z_{bi}=-\dfrac{\ln\gamma_i}{\lambda}$.

Время обслуживания является случайной величиной: $\tau_{oi}=F_0^{-1}(\gamma_i)$. Время обслуживания линии k:

$$\tau_{oi}=-\frac{\ln\gamma_i}{\beta}, \qquad (3.18)$$

где $\beta=1/\bar{t}_{об}$ – интенсивность потока обслуживания, $\bar{t}_{об}$ – среднее время обслуживания.

Построим временную диаграмму процесса обслуживания на примере системы из U = 3 линий.

На оси О покажем моменты поступления заявок. На оси 1, 2, 3 толстой чертой отметим время занятости той или иной линии. Заявки, получившие отказ, покажем на 4-ой оси.

Итак, в момент 0 все линии свободны, и в систему поступает первая заявка. Она занимает 1-ю линию, если обслуживание линий упорядоченное. В случае случайного обслуживания необходимо разыграть, какая линия из свободных будет обслуживаться первой. Время обслуживания первой линии определяется по формуле:

$$\tau_{o1} = -\frac{\ln\gamma_1}{\beta}. \tag{3.19}$$

Вторая заявка поступит в систему через временной интервал z_1, который определяется соотношением:

$$z_1 = -\frac{\ln\gamma_1}{\lambda}, \tag{3.20}$$

где $\lambda / \beta = \lambda \bar{t}_{об}$ – загруженность линии.

При упорядоченном поиске 2-ая заявка занимает вторую линию. Время обслуживания этой заявки с помощью датчика случайных чисел определяется по формуле:

$$\tau_{o2} = -\frac{\ln\gamma_2}{\beta}. \tag{3.21}$$

Третья заявка поступит в систему в момент времени: $t = z_1 + z_2$, z_2 определяется с помощью датчика случайных чисел:

$$z_2 = -\frac{\ln\gamma_2}{\lambda}.$$

Далее процедуры повторяются для следующих заявок.

Вероятность отказов определяется как отношение числа заявок, получивших отказ, к общему числу поступивших заявок.

Такой процесс моделирования называется пособытийным моделированием.

3.6. Порядок выполнения лабораторной работы

В ходе выполнения задания необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

В программе AIS.EXE, вид главного окна которой показан на рис. 3.5, могут быть заданы следующие параметры:

- время моделирования (задается в минутах);

- показатель для времени – задает степенной параметр λ для потока Эрланга нулевого порядка;
- показатель для длительности – задает степенной параметр β для времени обслуживания;
- число линий;
- ёмкость накопителя.

В качестве выходных характеристик системы обслуживания генерируются следующие:

- число вызовов – общее число поступивших заявок за время моделирования;
- загруженные линии – максимальное количество загруженных линий;

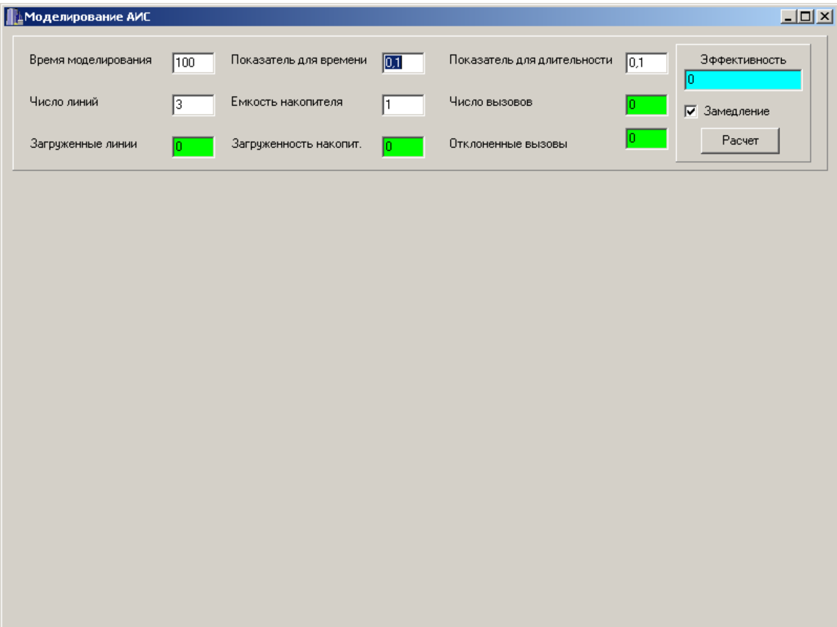

Рис. 3.5. Программа моделирования систем массового обслуживания

- загруженность накопителя – текущее количество заявок в накопителе;
- отклоненные вызовы – количество отказов в обслуживании;
- эффективность – отношение числа обслуженных заявок к общему количеству заявок.

Для визуального контроля состояния накопителя можно отметить пункт «замедление».

1. Запустите программу Ais.exe, моделирующую систему массового обслуживания с заданным количеством линий обслуживания и заданной емкостью накопителя.
2. Задайте нужную конфигурацию и запустите расчёт.
3. Под определением зависимости понимается построение графика этой зависимости в качестве результата (на графике должно быть не менее 10 точек в характерной области). В двух последних заданиях под оптимальной структурой системы массового обслуживания понимается та структура, эксплуатация которой несет меньше затрат.
4. Отчет по лабораторной работе выполняется в соответствии со стандартами. В отчете обязательно нужно указывать все промежуточные результаты в виде таблиц и графиков.
5. Кроме отчета по результатам работы для сдачи лабораторной нужно ответить на теоретический вопрос по теме "Имитационные модели" (информация, представленная в этом методическом пособии для этого недостаточна), разработать собственную математическую модель и её программную реализацию на любом языке высокого уровня. Разработанная модель должна содержать одно существенное усовершенствование. Её программная реализация – одно интерфейсное усовершенствование по сравнению с исходной программой.

3.7. Варианты заданий к лабораторной работе «Система обслуживания»

Вариант №1

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 3 линиями и емкостью накопителя 5, $\lambda = 0{,}1$, $\beta = 0{,}14$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,05 условной единицы за тот же период.
5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,15 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,06 условной единицы.

6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №2

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 4 линиями и емкостью накопителя 2, $\lambda = 0{,}12$, $\beta = 0{,}11$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.
5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единич-

ный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.

6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №3

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 2 линиями и емкостью накопителя 12, $\lambda = 0{,}14$, $\beta = 0{,}15$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.
5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя

стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.

6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №4

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 6 линиями и емкостью накопителя 1, $\lambda = 0{,}15$, $\beta = 0{,}14$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.
5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит

одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.

6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №5

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 5 линиями и емкостью накопителя 8, $\lambda = 0{,}17$, $\beta = 0{,}22$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.
5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость

обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.

6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №6

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 5 линиями и емкостью накопителя 0, $\lambda = 0{,}19$, $\beta = 0{,}23$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.

5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.
6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №7

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 6 линиями и емкостью накопителя 20, $\lambda = 0{,}21$, $\beta = 0{,}20$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну услов-

ную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.

5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.
6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №8

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 6 линиями и емкостью накопителя 20, $\lambda = 0,24$, $\beta = 0,25$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслужива-

ния одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.

5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.
6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №9

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 6 линиями и емкостью накопителя 20, $\lambda = 0,27$, $\beta = 0,29$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.
4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффек-

тивностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.

5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.
6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

Вариант №10

1. Определите эффективность работы системы массового обслуживания с 6 линиями и емкостью накопителя 20, $\lambda = 0{,}3$, $\beta = 0{,}25$ (время моделирования 43200 минут). Определите параметр потока, при котором эффективность работы находится на уровне 0,5.
2. Определить зависимость эффективности работы системы массового обслуживания из задания 1 (построить график зависимости) от параметра входного потока и параметра времени обслуживания (время моделирования 43200 минут).
3. Определить зависимость эффективности системы массового обслуживания (построить график зависимости) при параметрах, указанных в задании 1, от числа линий и от емкости накопителя.

4. На основе исследований задания 3 определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с эффективностью работы более 0,99, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, а обслуживание ячейки накопителя стоит 0,2 условной единицы за тот же период.
5. Определите оптимальную структуру системы массового обслуживания с параметрами из задания 1, если стоимость обслуживания одной линии в течении 43200 минут стоит одну условную единицу, обслуживание ячейки накопителя стоит 0,09 условной единицы за тот же период, а единичный отказ в обслуживании приносит убытки в размере 0,0026 условной единицы.
6. Разработайте собственную математическую модель системы массового обслуживания, которая должна иметь одно улучшение по сравнению с исследуемой программой в модельной части и одно улучшение в интерфейсе.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Моделирование геометрических фазовых переходов может имитировать физические фазовые переходы, но при этом не требуется обширных знаний физики.

4.1. Геометрические фазовые переходы

Представим себе большую шахматную доску. Будем представлять эту шахматную доску как квадратную решетку и предположим, что каждый квадрат или ячейка этой решетки может находиться в двух состояниях: «занято» или «пусто». Каждая клетка занимается с вероятностью p независимо от состояния соседних ячеек. Эта модель называется ячеечной перколяцией. Занятые ячейки либо изолированы друг от друга, либо образуют группы, состоящие из ближайших соседей.

Кластер – это группа занятых ячеек решетки, связанных с ближайшим соседом по стороне ячейки.

Две занятые ячейки принадлежат одному кластеру, если они соединены путем, состоящим из занятых ячеек. Обычно генератором случайных чисел генерируется случайное число, ячейка занимается, если оно меньше некоторого значения p. Если вероятность занятия ячейки мала, то можно ожидать, что будут присутствовать только небольшие изолированные кластеры. Если $p \sim 1$, то ожидается, что большинство занятых ячеек образует один большой кластер, который протянется от одной стороны решетки до другой. Этот кластер называют соединяющим кластером.

В пределе бесконечной решетки существует вполне определенная «пороговая» вероятность p_c, такая, что для $p \geq p_c$ существует один соединяющий кластер, для $p < p_c$ нет ни одного соединяющего кластера, и все кластеры конечны.

Характерной особенностью присущей перколяции, является связность. Поскольку связность обнаруживает качественное изменение при конкретном значении некоторого параметра, который можно менять непрерывно, то переход из состояния, не содержащего соединяющий кластер, в состояние с одним соединяющим кластером представляет собой фазовый переход. Примером приложения понятий перколяции является электропроводность сложных систем, состоящих из проводящих и непроводящих материалов. Простой пример изготовления такой системы в лабораторных условиях заключается в помещении в контейнер смеси маленьких металлических и пластмассовых шариков. Шарики должны быть случайно распределены по объёму. Если металлические шарики составляют малую долю объёма системы, то электрический ток не может пройти через комбинированную систему, и она будет изолятором. Однако, если металлические шарики составляют большую часть объёма контейнера, то электрический ток будет в состоянии протекать через области, занимаемые этими шариками, и система будет проводником. Описание протекания электрического тока через комбинированные материалы можно сделать более точным, вводя параметр ϕ – долю объёма контейнера, занимаемую металлическими шариками.

Также явления перколяции находят приложения в моделировании распространения эпидемий в популяции, поведения магнитов, содержащих примеси, и гелей.

Для конечной решетки со стороной L, которую можно промоделировать на компьютере, всегда существует ненулевая вероятность того, что будет появляться соединяющий кластер. Для малых значений p эта вероятность пропорциональна p^L. «Пороговая» вероятность $p_c(L)$ определяется как среднее значение, при котором впервые появляется соединяющий кластер.

При обсуждении перколяции мы подчеркнули, что существует порог перколяции p_c, и появляется соединяющий путь или кластер при $p \geq p_c$. Более полную информацию даёт распределение размеров кластеров $n_s(p)$, определяемое формулой

$$n_s(p) = \frac{\langle N_s \rangle}{L^2},$$

где $\langle N_s \rangle$ – среднее число кластеров размера *s*, L^2 – полное число ячеек. Традиционно под размером кластера подразумевается число ячеек в кластере, а не его пространственная протяженность.

Поскольку $\sum_s s n_s$ представляет концентрацию занятых ячеек, а $s n_s$ – концентрацию занятых ячеек кластерами размером *s*, величина

$$\omega_s = \frac{s n_s}{\sum_s s n_s}$$

является вероятностью того, что занятый узел, выбранный случайным образом, принадлежит кластеру размером *s*. Следовательно, средний размер кластера *S* определяется как

$$S = \sum_s s\omega_s = \frac{\sum_s s^2 n_s}{\sum_s s n_s}. \tag{4.1}$$

Другой величиной, характеризующей перколяцию, является $P_\infty(p)$ – вероятность того, что занятая ячейка принадлежит соединяющему кластеру:

$$P_\infty(p) = \frac{N_\infty}{N_p},$$

где N_∞ – число ячеек в соединяющем кластере, N_p – полное число занятых ячеек. В случае бесконечной решетки $P_\infty(p) = 0$ при $p < p_c$ и $P_\infty(1) = 1$.

Из повседневного опыта нам известны различные фазовые состояния вещества. Изменение фаз представляет собой пример термодинамического фазового перехода. Для большинства веществ существует критическая точка, то есть при давлении и температуре выше конкретных значений температуры и давления невозможно различить газовую и жидкую фазу.

Другим важным, но менее известным примером является существование критической точки в магнетиках при температуре Кюри. Известно, что при низких температурах некоторые тела ведут себя как ферромагнетики. Если повышать температуру, спонтанная намагниченность непрерывно убывает, обращаясь в нуль при критической температуре T_c. При $T > T_c$ система становится парамагнетиком.

Конечно, перколяция не является фазовым переходом в обычном смысле, поскольку для её описания не требуется температура. Но свойства геометрических фазовых переходов в задачах перколяции и термодинамических фазовых переходов качественно подобны. Для описания кластеров вводится величина $\xi(p)$ – средняя длина связности или характерный линейный размер. В качестве одного из определений длины связности рассматриваем присваивание ей значения радиуса циркуляции наибольшего кластера, состоящего из s ячеек, где радиус циркуляции рассчитывается как

$$R_s^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left(\vec{r}_i - \langle\vec{r}\rangle\right)^2,$$

где $\langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\vec{r}_i$ и $\vec{r}_i$ – координата i-ой ячейки в этом кластере. Величина $\langle\vec{r}\rangle$ является аналогом радиус-вектора центра масс кластера.

Для больших значений L $\xi(p)$ – убывающая функция в диапазоне $p > p_c$ и возрастающая для $p < p_c$. Кроме того,

$\xi(p = p_c) \cong L$ и, следовательно, является расходящейся при $L \to \infty$. Качественное поведение функции ξ не зависит от определения этой функции. По мере приближения p к p_c возрастает вероятность того, что два занятых узла находятся в одном кластере. Очевидно, что в пределе $L \to \infty$ $\xi(p)$ сингулярна в критической области $|p - p_c| << 1$. Количественно можно описать сингулярность, вводя критический показатель степени ν, определяемый соотношением $\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu}$.

Как ведут себя в критической области другие величины, которые были введены ранее? Можно предположить, что рост P_∞ в критической области пропорционален степенной функции $P_\infty \sim (p_c - p)^\beta$.

В терминологии критических явлений P_∞ называется параметром порядка системы. Критический показатель степени β описывает стремление к нулю связности бесконечного кластера при пороговом значении для перколяции.

Другой рассматриваемой величиной является средний размер кластера $S(p)$. Критическое поведение $S(p)$ можно описать следующим выражением:

$$S(p) \sim (p - p_c)^{-\gamma}.$$

Для сравнения приведем в таблице 4.1 схожие критические показатели для перколяции и магнетиков.

Поскольку мы можем моделировать только конечные решетки, прямая подгонка измеряемых величин ξ, P_∞ и $S(p)$ по ранее указанным формулам не будет давать хорошие оценки для соответствующих показателей степени. Главная проблема заключается в том, что нельзя взять p достаточно близким к p_c без получения эффектов конечного размера. Для значений $p \ll p_c$ и $p \gg p_c$ свойства системы неотличимы от соответствующих свойств истинно макроскопической системы ($L \to \infty$). Однако, если значение p близко к p_c, то $\xi(p)$ сравнима с L, и поведение системы отличается от поведения макроскопической системы.

Если ξ сравнима с L, то для ξ применяется выражение

$$\xi(p) \sim L \sim |p - p_c|^{-\nu}.$$

Обращая это выражение, получим $|p - p_c| \sim L^{-1/\nu}$, и тогда можно заменить выражение для P_∞ на $P_\infty(p = p_c) \sim L^{-\beta/\nu}$ $(L \to \infty)$.

С помощью этого соотношения можно определить критические показатели. Такой метод анализа известен как конечномерное масштабирование и является важным при изучении критических показателей. Если L достаточно велико, то можно воспользоваться этим соотношением для оценки отношения β/ν.

Таблица 4.1. Соответствие геометрических и физических фазовых переходов

	Зависимость	Показатель	$d = 2$	$d = 3$
Перколяция				
Параметр порядка	$P_\infty \sim (p_c - p)^{\beta}$	β	5/36	0,4
Средняя длина конечного кластера	$S(p) \sim (p - p_c)^{-\gamma}$	γ	43/18	1,8
Длина корреляции	$\xi(p) \sim \|p - p_c\|^{-\nu}$	ν	4/3	0,9
Магнетизм				
Параметр порядка	$M(T) \sim (T - T_c)^{\beta}$	β	1/8	0,32
Восприимчивость	$\chi(T) \sim (T - T_c)^{-\gamma}$	γ	7/4	1,24
Длина корреляции	$\xi(T) \sim \|T - T_c\|^{-\nu}$	ν	1	0,63

4.2. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Запустите программу check.exe. Эта программа моделирует заполнения кластерами перколяционной решетки.
2. В меню нажмите “Параметры” (рис. 4.1).
3. Задайте параметры решетки и параметры заполнения перколяционной конфигурации. После этого на экран выходит форма, показанная на рис. 4.2, позволяющая задать коэффициенты для модели.
4. Запустите модель (рис. 4.3).

Возможно заполнение перколяционной конфигурации одним из четырех алгоритмов.

1. Случайное распределение кластеров – в этом алгоритме идет генерация псевдослучайных чисел и проверка для каждой ячейки условия превышения термодинамического параметра p. Если это условие выполняется ячейка решетки заполняется. Таким способом можно моделировать фазовый переход «диэлектрик-проводник».

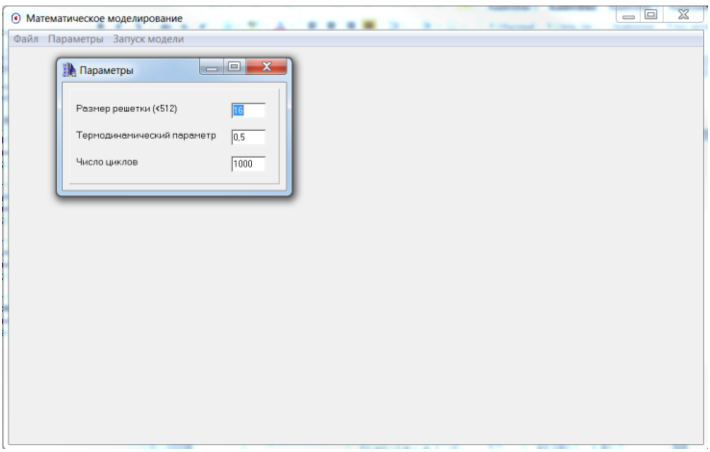

Рис. 4.1. Создание решетки для формирования перколяционной конфигурации

2. Проникающая перколяция – в этом алгоритме решетка изначально заполняется псевдослучайными числами и заполнение идет с левой границы по минимальному значению среди пограничных ячеек. Таким способом можно моделировать процесс диффузии в пористой среде.

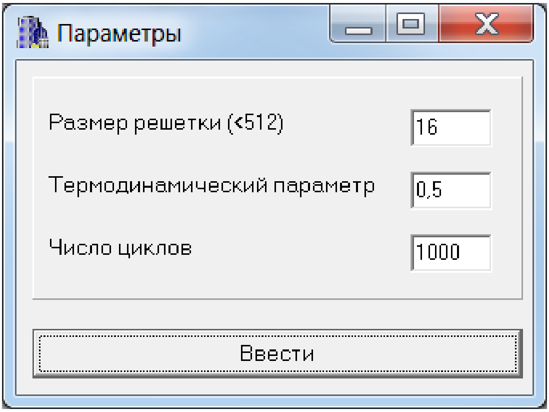

Рис. 4.2. Окно задания параметров

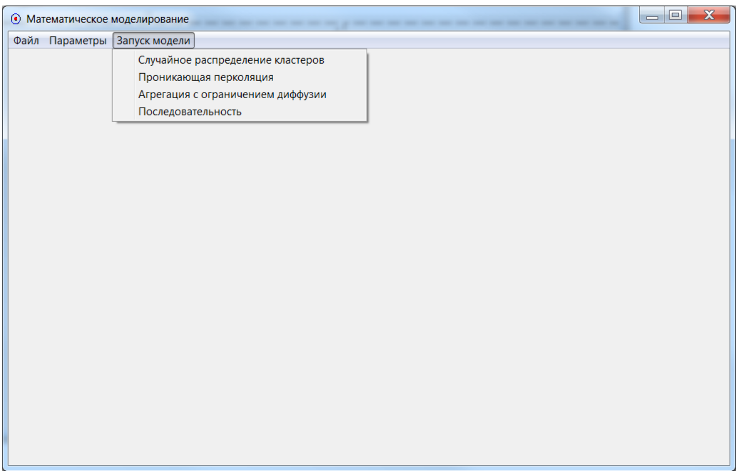

Рис. 4.3. Запуск заполнения решетки перколяционной конфигурацией

3. Агрегация с ограничением диффузии – в этом алгоритме реализован процесс случайного блуждания заполненной ячейки по решетке с прекращением при попадании заполненной ячейки в пограничную зону (ячейка как бы прилипает). Таким методом можно моделировать электрический пробой в сплошных средах.
4. Последовательность – алгоритм аналогичный алгоритму в третьем пункте с началом из одной граничной точки. Этот алгоритм также предназначен для моделирования электрического пробоя в сплошных средах.

После запуска одного из алгоритмов в основном окне программы формируется два изображения сформированной перколяционной конфигурации (рис. 4.4).

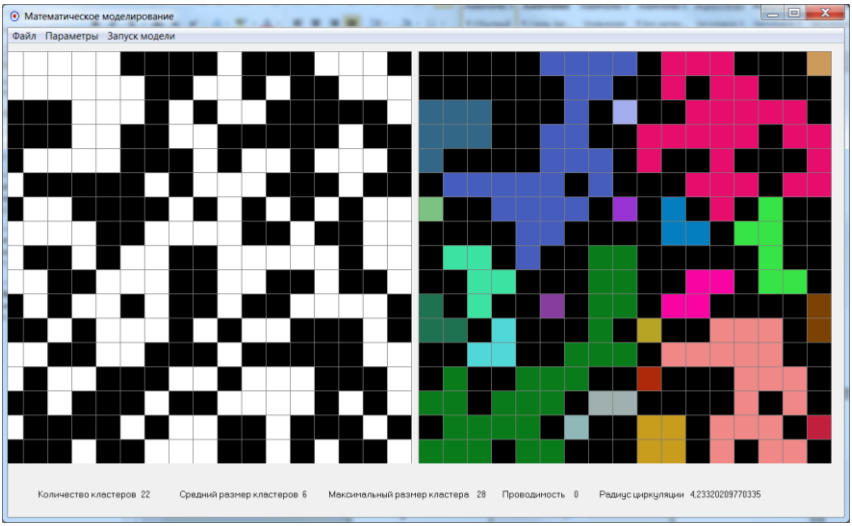

Рис. 4.4. Моделирование формирования

Одно изображение на рис. 4.4 – черно-белое, второе изображение показывает ту же самую перколяционную конфигурацию, но каждый кластер в ней имеет собственный цвет. Это сделано для удобства работы. Под изображениями перколяционной конфигурации выводятся ее основные параметры.

В ходе выполнения задания необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

1. Для получения значения моделируемых параметров делать не менее 5 вычислительных экспериментов для каждой точки графика. Всего нужно не менее 10 точек для демонстрации фазового перехода и аппроксимации степенной функцией.
2. Степенная зависимость при моделировании фазового перехода подбирается любым удобным методом: вручную, своей программой, с использованием соответствующих коммерческих программных средств.
3. Отчет по лабораторной работе выполняется в соответствии со стандартами. В отчете обязательно нужно указывать все промежуточные результаты.
4. Кроме отчета по результатам работы для сдачи лабораторной нужно ответить на теоретический вопрос по теме “Моделирование фазовых переходов” (информация, представленная в этом методическом пособии для этого недостаточна), разработать собственную математическую модель и её программную реализацию на любом языке высокого уровня (рекомендуемый язык С++). Разработанная модель должна содержать одно существенное усовершенствование. Её программная реализация – одно интерфейсное усовершенствование по сравнению с исходной программой.

4.3. Варианты заданий к лабораторной работе «Моделирование фазовых переходов»

Вариант №1

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 10, 20, 40, 80, 160.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p - p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p - p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №2

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 15, 30, 60, 120, 320.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от ($p - p_c$) для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от ($p - p_c$). Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №3

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 12, 24, 48, 92, 192.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p - p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p - p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу для основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу для основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу для основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №4

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 16, 32, 64, 128, 256.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p - p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p - p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №5

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 9, 18, 36, 72, 144.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p - p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p - p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №6

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 11, 22, 44, 88, 176.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p - p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p - p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №7

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 13, 26, 52, 104, 208.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p - p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p - p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

Вариант №8

Рабочие размеры решеток для перколяционных конфигураций: 17, 34, 68, 136, 272.

1. Определить параметр p_c для всех размеров решеток. Метод формирования – случайное распределение кластеров.
2. Построить графики зависимости величины среднего размера кластеров от $(p – p_c)$ для всех размеров решеток. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
3. Построить графики зависимости величины размера максимального кластера от $(p – p_c)$. Отметить точку фазового перехода. Для максимального размера решетки аппроксимировать график степенной зависимостью (см. табл. 4.1).
4. Методом «Проникающая перколяция» промоделируйте диффузию на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
5. Методом «Агрегация с ограничением диффузии» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
6. Методом «Последовательность» промоделируйте процесс электрического пробоя на каждой из решеток. Составьте таблицу основных параметров для всех размеров решетки. Пояснить, какой вывод можно сделать.
7. Разработайте собственную математическую модель для моделирования фазовых переходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А.А., Михайлов, А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд. испр. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
2. Гулд Я., Тобочник Х. Компьютерное моделирование в физике. В 2 ч. – М.: Мир, 1990.
3. Коварцев А.Н. Имитационное моделирование систем массового обслуживания: метод. указания к лабораторным занятиям. – Самара: СГАУ, 2000. – 47 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
5. Генерации псевдослучайных чисел методом Фибоначчи с запаздыванием [Электронный ресурс] // Электроника для всех : Интерактивная система обучения. – URL: https://emkelektron.webnode.page/news/generatsii-psevdosluchajnykh-chisel-metodom-fibonachchi-s-zapazdyvaniem/?ysclid=lq6ciyn281654063710 (дата публикации: 27.10.2017).

Учебное издание

Скиданов Роман Васильевич,

Нестеренко Дмитрий Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Практикум

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 18.04.2024. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 5,75.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ №   . Арт. – 2(Р1ПР)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета
443086, Самара, Московское шоссе, 34.