МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.М. КРИКУНОВ

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
К 820

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Н. Н. В а с и н,
д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Д о р о ш и н

Крикунов, Михаил Михайлович

К 820 **Математика:** учебное пособие / *М.М. Крикунов*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 68 с.

ISBN 978-5-7883-1734-2

Содержит программу курса математики по темам: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Комплексные числа», «Введение в математический анализ». Указана рекомендуемая литература, варианты контрольных заданий, а также даны образцы решения задач.

Предназначено для обучающихся очно-заочной и заочной форм обучения технических направлений.

Подготовлено на кафедре высшей математики Самарского университета.

УДК 51(075)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-7883-1734-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для обучающихся очно-заочной и заочной форм обучения и содержит краткие теоретические сведения и руководства к решению задач по математике в первом и втором семестре первого года обучения. Пособие содержит необходимые теоретические сведения, а также подробные решения типичных примеров по каждому из разделов.

ПРОГРАММА КУРСА

Линейная алгебра

Матрицы, виды матриц и действия с матрицами. Определители второго и третьего порядков: определения, свойства и способы вычисления. Элементарные преобразования матриц. Системы линейных алгебраических уравнений, их виды. Теорема Кронекера-Капелли. Решение определенных систем третьего порядка методом Крамера. Общее решение однородных и неоднородных неопределенных систем.

Аналитическая геометрия на плоскости

Прямая на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнений прямой (канонический, общий, «в отрезках», нормальный). Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кривые второго порядка на плоскости, приведение к каноническому виду уравнений кривых второго порядка. Окружность. Эллипс. Парабола. Гипербола.

Комплексные числа

Понятие комплексного числа. Основные действия с комплексными числами. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Математический анализ

Функция одной переменной. Предел последовательности и функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Правила вычисления пределов. Сравнение бесконечно малых. Понятие производной. Определение производной, ее геометрический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций. Дифференцирование сложной функции. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

ЧАСТЬ 1

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} – элементы матрицы. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в котором расположен этот элемент. Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ считаются равными, если равно число их строк и число столбцов и если равны элементы, стоящие на соответствующих местах этих матриц равны, то есть $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$.

Действия с матрицами

1. *Транспонирование*. Матрица, столбцами которой являются строки матрицы A называется транспонированной к A и обозначается через A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. *Умножение матрицы на число.* По определению, чтобы умножить матрицу на число k, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

3. *Сложение (вычитание) матриц*. Складывать (вычитать) можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов.

Суммой (разностью) матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

4. *Произведение матриц.* Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получим матрицу C, у которой столько же строк, как у матрицы A, и столько же столбцов, как у матрицы B.

По определению элемент $c_{i\,j}$ матрицы C равен сумме парных произведений элементов $i-ой$ строки матрицы A, на соответствующие элементы $j-го$ столбца матрицы B.

$$c_{i\,k} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i\,2} \cdot b_{2\,k} + \ldots + a_{i\,m} \cdot b_{m\,k} = \sum_{s=1}^{m} a_{i\,s} \cdot b_{s\,k}\ .$$

Определитель матрицы

Определителем матрицы второго порядка называется число, обозначаемое символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

имеет решение

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \text{где}\ \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \end{cases}$$

имеет решение $x=t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\ y=-t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},\ z=t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

где t – произвольное число.

Система трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases}$$

имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$.

Система трех линейных уравнений с двумя неизвестными

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y=b_3 \end{cases}$$

совместна, когда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$ и система не содержит попарно противоречивых уравнений.

Система трех уравнений с тремя неизвестными

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

при условии, что $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$,

имеет единственное решение $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$,

где $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Несовместные и неопределенные системы

Пусть определитель системы $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ $\Delta = 0$.

Тогда возможны два случая: элементы двух строк пропорциональны или не пропорциональны.

Если элементы двух строк определителя пропорциональны, например: $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}} = m$, тогда

а) если $b_1 \neq mb_2$, то система *несовместна*;

б) если $b_1 = mb_2$, то система *неопределена* (если первое и третье уравнения непротиворечивы).

Если в определителе Δ нет строк с пропорциональными элементами, тогда существуют числа *m* и *n* (отличные от нуля), при которых $mL_1 + nL_2 = L_3$, где $L_i \left(i = 1, 2, 3\right)$ – левые части уравнений системы.

а) если $mb_1 + nb_2 \neq b_3$, то система *несовместна,*

б) если $mb_1 + nb_2 = b_3$, то система *неопределена*.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Длина отрезка

Расстояние d между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ на плоскости

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=|M_1M_2|.$$

Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Говорят, что третья точка $M(x;y)$, лежащая на данной прямой, делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, если $\lambda=\pm\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$ (λ – положительно, если точка M лежит между точками M_1 и M_2, и отрицательно, если точка M лежит вне отрезка M_1M_2. Координаты точки $M(x;y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ, определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ (\lambda\neq -1).$$

Площадь треугольника

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|.$$

Общее уравнение прямой

Уравнение вида $Ax+By+C=0$, где A,B,C – постоянные коэффициенты, $A^2+B^2\neq 0$; x и y – координаты любой точки, определяет на плоскости некоторую прямую и называется *общим уравнением прямой.*

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение вида $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом,* где k – угловой коэффициент, равный $k = tg\alpha$ (α – угол между прямой и положительным направлением оси Ox).

Угол между прямыми

Острый угол φ между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ определяется по формуле: $tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, $k_1 k_2 \neq -1$.

Условие параллельности прямых (угол между прямыми 0, 180 градусов)

$$k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых (угол между прямыми 90 градусов)

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ или } k_1 k_2 = -1.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k \neq 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; $x_2 \neq x_1; y_2 \neq y_1$. Угловой коэффициент этой прямой определяется по формуле $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Уравнение прямой в отрезках

Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1;\ a\neq 0;\ b\neq 0$ называется *уравнением прямой в отрезках*. Здесь a и b – абсцисса и ордината точки пересечения прямой с осью Ox и осью Oy соответственно.

Нормальное уравнение прямой

Уравнение вида $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α – угол между этим перпендикуляром и положительным направлением оси Ox. Чтобы общее уравнение прямой привести к нормальному виду, надо все члены общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M=\pm 1\big/\sqrt{A^2+B^2}$. Для M надо взять «+», если $C<0$; знак «–», если $C>0$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние d от данной точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+Bx+C=0$ определяется по формуле

$$d=\left|Ax_0+By_0+C\right|\big/\sqrt{A^2+B^2}.$$

Окружность

Окружность – это множество точек плоскости $M(x;y)$, равноудаленных от данной точки $C(a;b)$. Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $C(a;b)$ – центр окружности, R – радиус окружности.

Эллипс

Эллипс – множество точек плоскости $M(x;y)$, сумма расстояний которых до двух точек $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ есть величина постоянная, равная $2a$ ($2a>2c$). Каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a, b – полуоси эллипса; F_1 и F_2 – фокусы эллипса, $a^2=c^2+b^2$.

Число $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$, так как $a>c$, называется эксцентриситетом эллипса. Фокальные расстояния $r_1=F_1M$ и $r_2=F_2M$ определяются по формулам: $r_1=a+\varepsilon x$; $r_2=a-\varepsilon x$.

Гипербола

Гипербола – это множество точек плоскости $M(x;y)$, абсолютная величина разности расстояний которых до двух точек $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ есть величина постоянная, равная $2a$ $(2a<2c)$.

$$|F_1M-F_2M|=2a.$$

F_1 и F_2 – фокусы гиперболы; $r_1=F_1M$ и $r_2=F_2M$ – фокальные радиусы.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a, b – полуоси гиперболы (действительная и мнимая соответственно). Так же $c^2=a^2+b^2$. Число $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$, так как $a<c$, – эксцентриситет гиперболы. Фокальные радиусы определяются по формулам

$$r_1=|\varepsilon x+a|;\ r_2=|\varepsilon x-a|.$$

Гипербола состоит из двух ветвей, расположенных относительно осей координат. Точка O – центр гиперболы. Точки пересечения с осью Ox: $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$ – вершины гиперболы. Гипербола имеет две асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$. Если $a=b$, то гипербола называется равносторонней. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ называют сопряженными.

Парабола

Парабола – множество точек плоскости $M(x,y)$, равноудаленных и от данной точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ (называемой фокусом), и от данной прямой $x=-\frac{p}{2}$ (называемой директрисой). Каноническое уравнение параболы имеет в этом случае вид

$$y^2=2px,$$

$FM=r$ – фокальный радиус определяется по формуле $r=x+\frac{p}{2}$, $(p>0)$.

3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение

Комплексным числом называют число вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а $i^2 = -1$ – мнимая единица.

Основные действия с комплексными числами

Сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел выполняют по правилам этих действий над многочленами с заменой степеней числа i по формулам: $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$ и т.д.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $z = a + bi$ определяется парой вещественных чисел $(a;b)$ и поэтому изображается точкой $M(a;b)$ плоскости или её радиус-вектором $\bar{r} = \overline{OM}$. Длина этого вектора называется модулем комплексного числа $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а угол φ с осью Ox называется аргументом комплексного числа. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме

Произведение

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Частное

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right].$$

Возведение в степень

$$z^n=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right).$$

Извлечение корня

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,1,2...,(n-1)$.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Предел функции

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Правила вычисления пределов

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, и $C = const$, то

1) $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$,

2) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$).

Эквивалентные бесконечно малые

Если $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечно малая функция $\left(\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0 \right)$, то

1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$,

2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$,

3) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 1$,

4) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{b^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln b$,

5) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}=m$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые называются эквивалентными. Пишут $\alpha\sim\beta$.

Теорема. Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, то есть если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=m$, $\alpha\sim\alpha_1,\ \beta\sim\beta_1$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=m.$$

Полезно использовать эквивалентность следующих бесконечно малых. Если $\alpha\to 0$, то

$$\sin\alpha\sim tg\alpha\sim\arcsin\alpha\sim\alpha,$$

$$\ln(1+\alpha)\sim\alpha,$$

$$a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a,$$

$$(1+\alpha)^m-1\sim\alpha m.$$

Понятие производной функции

Определение. Производной от функции $y=f(x)$ в точке x называется конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)$.

Процесс поиска производной функции называется дифференцированием.

Основные правила дифференцирования

Пусть $C = const$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, тогда

1) $C' = 0$;

2) $(Cu)' = Cu'$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(uv)' = u'v + v'u$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Если функция задана как $y = f(u), u = u(x)$, то

$$y' = y'(u) \cdot u'(x).$$

Производная сложной показательной функции

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЕМ

Задача №1

Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1-5\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot1+4\cdot3-5\cdot0 \\ 1\cdot3+2\cdot4-3\cdot1+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1-3\cdot3+4\cdot0 \\ -1\cdot3-2\cdot4+3\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot2-2\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 16 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача №2

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(7;3)$

а) параллельно прямой $y=3-4x$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+7}{8}$;

в) под углом 45° к прямой $y=3x-2$;

г) и точку $B(0;2)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{n}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

Решение

а) Составим уравнение прямой, проходящей через точку $A(7;3)$ параллельно прямой $y=3-4x$.

Уравнение прямой $y=3-4x$, где $k_1=-4$ – угловой коэффициент наклона прямой относительно оси Ox.

Если две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты совпадают, т.е. $k_1=k_2$. Тогда искомая прямая $y_2=-4x+b_2$, или, в общем виде, уравнение прямой с известным угловым коэффициентом проходящей через точку можно найти

$$y - y_A = k\left(x - x_A\right),$$

тогда $y - 3 = -4\left(x - 7\right)$,

$y = -4x + 31$ – уравнение искомой прямой.

Для уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ вектор нормали имеет координаты $\vec{n} = \left(A; B\right)$.

Преобразуем $y = -4x + 31$:

$y + 4x - 31 = 0$, тогда вектор нормали $\vec{n} = \left(4;1\right)$.

Для прямой $\dfrac{x - x_0}{x_s} = \dfrac{y - y_0}{y_s}$ направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = \left(x_s; y_s\right)$

$$y = -4x + 31,$$

$$y - 3 = -4\left(x + 7\right),$$

$\dfrac{y - 3}{-4} = \dfrac{x + 7}{1}$, тогда направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = \left(1; -4\right)$.

Угловой коэффициент: $k_2 = -4$. Построим прямые (рис. 1).

б) Составим уравнение прямой, проходящей через точку $A(7;3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x - 2}{-3} = \dfrac{y + 7}{8}$.

Каноническое уравнение прямой $\dfrac{x - x_0}{x_s} = \dfrac{y - y_0}{y_s}$, где $\vec{s} = \left(x_s; y_s\right)$ – направляющий вектор прямой, т.е. $\vec{s} = \left(-3;8\right)$, направляющий вектор прямой, перпендикулярной заданной будет иметь перпендикулярный направляющий вектор.

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+7}{8},$$

$$8(x-2)=-3(y+7),$$

$$3y+8x+5=0,$$

$$y=-\frac{8}{3}x-\frac{5}{3}.$$

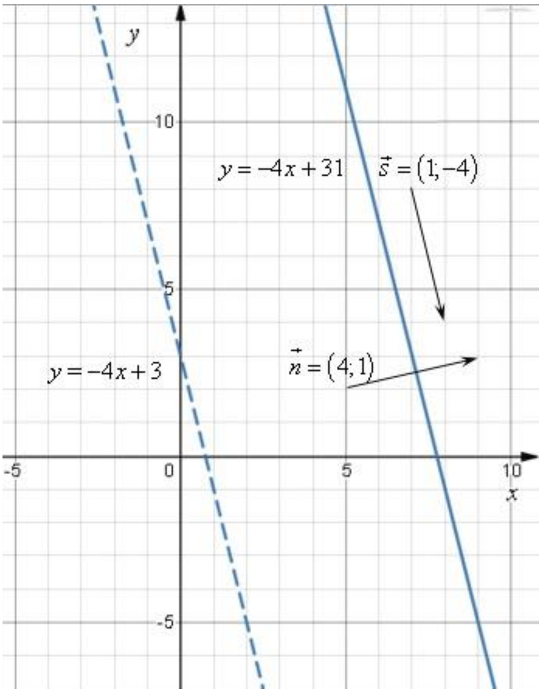

Рис. 1

Угловой коэффициент прямой $k_1 = -\frac{8}{3}$. Угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых соотносятся как $k_1 \cdot k_2 = -1$. Тогда угловой коэффициент искомой прямой $k_2 = \frac{3}{8}$. В общем виде, уравнение прямой с известным угловым коэффициентом проходящей через точку можно найти

$$y - y_A = k\left(x - x_A\right),$$

тогда

$$y - 3 = \frac{3}{8}\left(x - 7\right),$$

$y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}$ – уравнение искомой прямой.

Для уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ Вектор нормали имеет координаты $\vec{n} = \left(A; B\right)$.

$$y = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8},$$

$8y - 3x - 3 = 0$, тогда вектор нормали $\vec{n} = \left(-3; 8\right)$.

Для прямой $\frac{x - x_0}{x_s} = \frac{y - y_0}{y_s}$ направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = \left(x_s; y_s\right)$.

$$8y - 3x - 3 = 0,$$

$\frac{y - 3}{3} = \frac{x - 7}{8}$, тогда направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = \left(8; 3\right)$.

Угловой коэффициент: $k_2 = \frac{3}{8}$. Построим прямые (рис. 2).

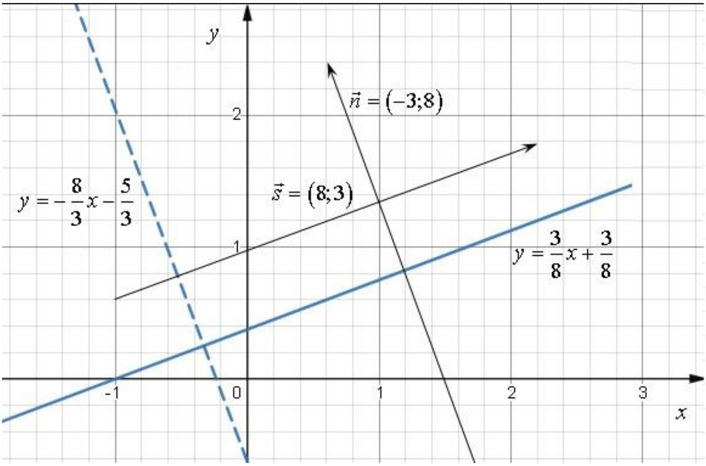

Рис. 2

в) Составим уравнение прямой проходящей через точку A под углом $45°$ к прямой $y = 3x - 2$.

Тангенс угла между двумя прямыми на плоскости можно вычислить по формуле: $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Тангенс 45 градусов равен единице, тогда найдем угловой коэффициент второй прямой

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 1,$$

$$\frac{k_2 - 3}{1 + 3k_2} = 1,$$

$$-4 = 2k_2,$$

$$k_2 = -2.$$

Прямая с известным угловым коэффициентом, проходящая через точку $A(7;3)$ имеет уравнение

$y-y_0=k\left(x-x_0\right),$

$y-3=-2\left(x-7\right),$

$y=-2x+17.$

Для уравнения прямой $Ax+By+C=0$ вектор нормали имеет координаты $\vec{n}=\left(A;B\right)$.

$y=-2x+17$,

$y+2x-17=0$, тогда вектор нормали $\vec{n}=\left(2;1\right)$.

Для прямой $\dfrac{x-x_0}{x_s}=\dfrac{y-y_0}{y_s}$ направляющий вектор имеет координаты $\vec{s}=\left(x_s;y_s\right)$.

$y-3=-2\left(x-7\right),$

$\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{x-7}{1}$, тогда направляющий вектор имеет координаты $\vec{s}=\left(1;-2\right)$.

Угловой коэффициент: $k_2=-2$. Построим прямые (рис. 3).

г) Составим уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(7;3)$ и $B(0;2)$.

Уравнение прямой проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

тогда

$$\frac{x-7}{0-7}=\frac{y-3}{2-3},$$

$$\frac{x-7}{-7}=\frac{y-3}{-1},$$

$-x+7=-7y+21$ или $7y-x-14=0$.

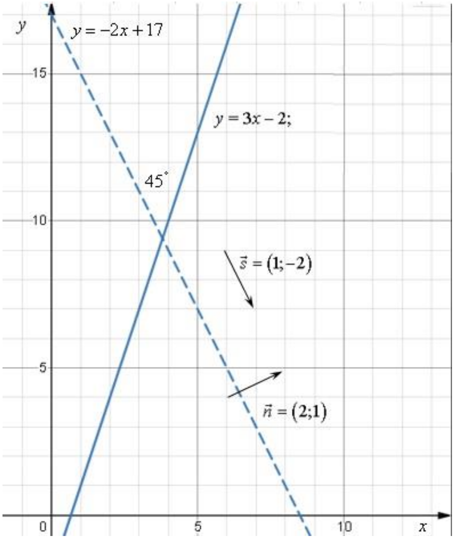

Рис. 3

Для уравнения прямой $Ax+By+C=0$ вектор нормали имеет координаты $\vec{n}=(A;B)$.

$$\frac{x-7}{-7}=\frac{y-3}{-1},$$

$7y-x-14=0$, $y=\dfrac{1}{7}x+2$, тогда вектор нормали $\vec{n}=(-1;7)$.

Для прямой $\dfrac{x-x_0}{x_s}=\dfrac{y-y_0}{y_s}$ направляющий вектор имеет координаты $\vec{s}=(x_s;y_s)$.

$\dfrac{x-7}{-7}=\dfrac{y-3}{-1}$, тогда направляющий вектор имеет координаты $\vec{s}=(-7;-1)$.

Угловой коэффициент: $k = \frac{1}{7}$. Построим прямую (рис. 4).

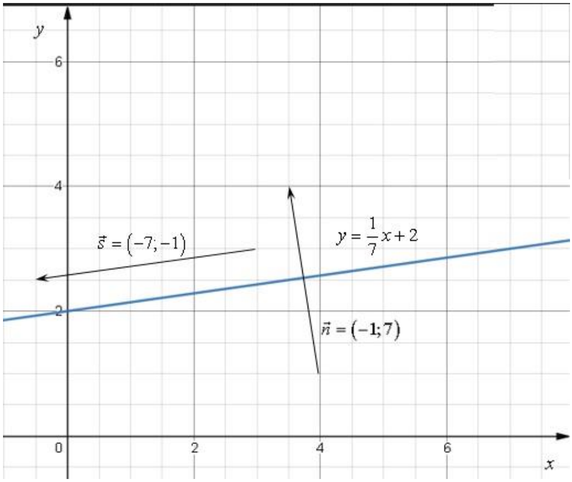

Рис. 4

Задача №3

Привести уравнения линий к каноническому виду, назвать и построить кривые.

Решение

а) $3x^2 - 4y^2 + 9x - 8y - 20 = 0$.

Приведем к каноническому виду с помощью выделения полных квадратов для x и y:

$$\left(3x^2 + 2 \cdot 4{,}5x + 3 \cdot \frac{9}{4}\right) - \left(4y^2 + 8y + 4\right) - 3 \cdot \frac{9}{4} + 4 - 20 = 0,$$

$$3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(y + 1\right)^2 = \frac{91}{4},$$

$$\frac{12}{91}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{16}{91}\left(y + 1\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{91}{12}}-\frac{(y+1)^2}{\frac{91}{16}}=1.$$

Данное уравнение определяет гиперболу, каноническое уравнение гиперболы $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, здесь $(x_0;y_0)$ – центр гиперболы, a – действительная полуось, b – мнимая полуось.

Асимптоты гиперболы: $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$.

Центр гиперболы $O=(x_0;y_0)=\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

Действительная полуось $a=\frac{\sqrt{91}}{2\sqrt{3}}$, мнимая полуось $b=\frac{\sqrt{91}}{4}$.

Асимптоты гиперболы:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-4}{4}, \qquad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3\sqrt{3}+4}{4}.$$

Расстояние между вершинами гиперболы $2a=\frac{\sqrt{91}}{\sqrt{3}}$.

Координаты вершин гиперболы

$$x_1=-1{,}5+\frac{\sqrt{91}}{2\sqrt{3}}\approx 1{,}254, \quad x_2=-1{,}5-\frac{\sqrt{91}}{2\sqrt{3}}\approx -4{,}254,$$

$$y_1=y_2=-1.$$

Построим график (рис. 5).

б) $x^2+y^2+2x-4y=8$.

Для приведения к каноническому виду выделим полные квадраты относительно x и y.

$$x^2+y^2+2x-4y=8,$$

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)-4-1=8,$$

$$\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=13.$$

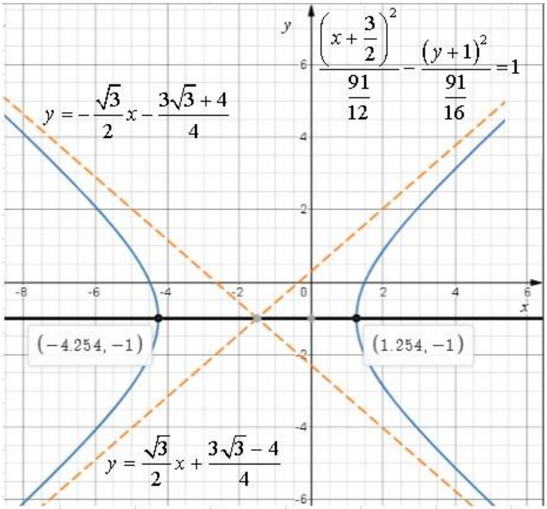

Рис. 5

Данное уравнение задает окружность $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$ с центром в точке $O=\left(x_0;y_0\right)$ и радиусом R. Центр окружности $O=\left(x_0;y_0\right)=\left(-1;2\right)$, а радиус $R=\sqrt{13}$.

Построим график (рис. 6).

в) $2y^2+8x^2-16x+6y=15$.

Чтобы привести к каноническому виду выделим полные квадраты:

$$\left(8x^2-16x+8\right)+\left(2y^2+6y+2\cdot\frac{9}{4}\right)-8-\frac{9}{2}=15,$$

$$8\left(x-1\right)^2+2\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{55}{2},$$

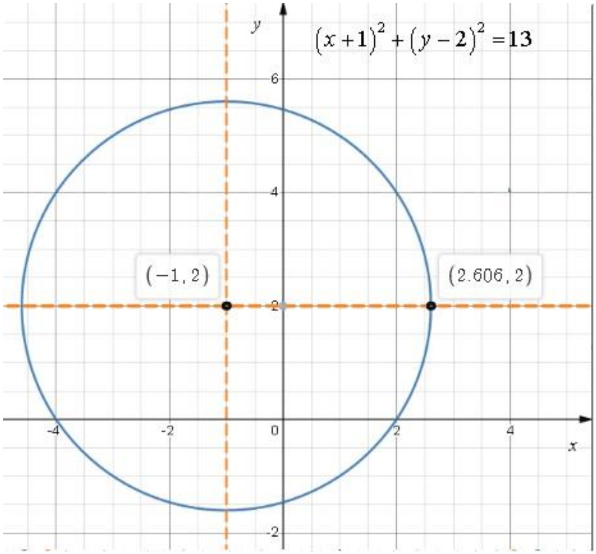

Рис. 6

$$\frac{16}{55}(x-1)^2+\frac{4}{55}\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1,$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{55}{16}}+\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{55}{4}}=1.$$

Каноническое уравнение эллипса $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, здесь $(x_0;y_0)$ – центр эллипса. Полуоси эллипса соответственно a и b, Тогда центр эллипса $O\left(1;-\frac{3}{2}\right)$. Крайние точки эллипса:

для $y_0=-1{,}5$ $x_{1,2}=x_0\pm b=1\pm\frac{\sqrt{55}}{4}$; $x_1=2{,}854$; $x_2=-0{,}854.$

для $x_0 = 1$ $y_{1,2} = y_0 \pm a = -1{,}5 \pm \frac{\sqrt{55}}{2}$; $y_1 = 2{,}208$; $y_2 = -5{,}208$.

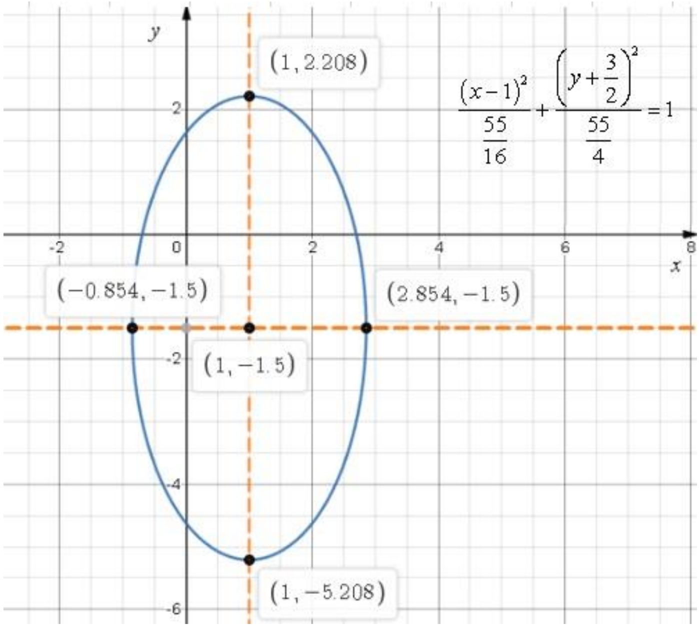

Рис. 7

Задача №4

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ 3x + 5y + 2z = 0. \end{cases}$$

Решение

Получим решение по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2$ – определитель матрицы системы,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 .$$

Таким образом, получаем

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \ x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \ x_3 = \frac{2}{2} = 1.$$

Задача №5

Дано комплексное число $z = \dfrac{-4}{1 - i\sqrt{3}}$. Требуется:

а) записать число в алгебраической и тригонометрической форме;

б) изобразить на комплексной плоскости;

в) вычислить z^{12}.

Решение

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю число:

$$z = \frac{-4\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)} = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{1 + 3} = -1 - i\sqrt{3},$$

тогда алгебраическая форма записи комплексного числа

$$z = x + yi = -1 - i\sqrt{3}.$$

Действительная часть числа $x = -1$.

Мнимая часть числа $y = -\sqrt{3}$.

Модуль числа $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Найдем аргумент комплексного числа:

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = -\frac{1}{2} < 0, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

т.е. аргумент φ лежит в третьей четверти,

$$\varphi = \arccos\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Тригонометрическая форма записи $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

б) Геометрическое изображение комплексного числа

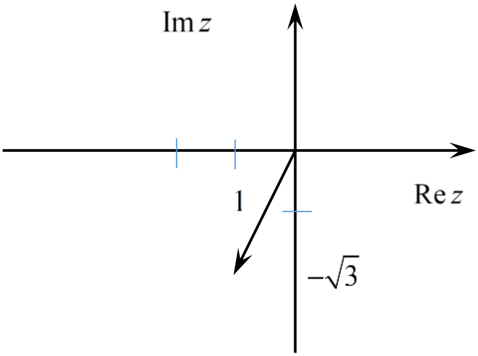

Рис. 8

в) Вычислим z^{12}.

Возведение комплексного числа в степень произведем по формуле Муавра $z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$,

тогда $z^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right)$,

$$z^{12} = 2^{12}\left(\cos(16\pi) + i\sin(16\pi)\right),$$

$$z^{12} = 2^{12}(1 + i\cdot 0) = 2^{12} = 4096.$$

Задача №6

Найти пределы функций

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{7n\left(3+8n^3\right)}{\left(1+5n\right)^3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{7n\left(3+8n^3\right)}{n^4}}{\dfrac{\left(1+5n\right)^3}{n^4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{21}{n^3}+\dfrac{8}{n}}{\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{5n}{n^4}+\dfrac{75n^2}{n^4}+\dfrac{n^3}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{21}{n^3}+8}{\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{5}{n^3}+\dfrac{75}{n^2}+\dfrac{1}{n}}=\frac{8}{0}=\infty.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+8n+4}-\sqrt{n^2-13n+1}\right)=\left\{\infty-\infty\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+8n+4}-\sqrt{n^2-13n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+8n+4}+\sqrt{n^2-13n+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n+4}+\sqrt{n^2-13n+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+8n+4-n^2+13n-1\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n+4}+\sqrt{n^2-13n+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(21n+3\right)}{\left(\sqrt{n^2+8n+4}+\sqrt{n^2-13n+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(21+\dfrac{3}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\dfrac{8}{n}+\dfrac{4}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{13}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)}=\frac{21}{2}=10{,}5.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+11}{7n-6}\right)^{5-3n}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n-6+17}{7n-6}\right)^{5-3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{17}{7n-6}\right)^{5-3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{7n-6}{17}}\right)^{\frac{7n-6}{17}\cdot\frac{17}{7n-6}\cdot 5-3n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{17(5-3n)}{7n-6}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{85}{n}-51}{7-\frac{6}{n}}}=e^{-\frac{51}{7}}.$$

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2-4x-12}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{(x-6)(x+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x-1}{x-6}=\dfrac{-6-1}{-2-6}=\dfrac{7}{8}.$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x-\sin5x}{3x+\mathrm{tg}6x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9-\dfrac{\sin5x}{x}}{3+\dfrac{\mathrm{tg}6x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9-\dfrac{5\sin5x}{5x}}{3+\dfrac{6\mathrm{tg}6x}{6x}}=\dfrac{9-5}{3+6}=\dfrac{4}{9}.$

Задача №7

Найти производные $y'(x)$ данных функций:

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{4x+2}}-3\cdot\sqrt[4]{(x^2+x-6)^3},$

2) $y=\ln^4(e^{-5x}+1)+\cos^2 7x,$

3) $y=\mathrm{tg}\sqrt{(1+2x^4)}.$

Решение

Для нахождения производных воспользуемся формулами дифференцирования, а также используем формулы производной от произведения, частного и сложной функции.

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{4x+2}}-3\cdot\sqrt[4]{(x^2+x-6)^3}.$

$$y'=\left(\frac{x}{\sqrt{4x+2}}-3\cdot\sqrt[4]{(x^2+x-6)^3}\right)'=\left(\frac{x}{\sqrt{4x+2}}\right)'-3\cdot\left(\sqrt[4]{(x^2+x-6)^3}\right)'=$$

$$=\frac{x'\sqrt{4x+2}-\left(\sqrt{4x+2}\right)'\cdot x}{\left(\sqrt{4x+2}\right)^2}-3\cdot\frac{3\left(x^2+x-6\right)'}{4\sqrt[4]{x^2+x-6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{4x+2}-\dfrac{4}{2\sqrt{4x+2}}\cdot x}{\left(\sqrt{4x+2}\right)^2}-3\cdot\frac{3(2x+1)}{4\sqrt[4]{x^2+x-6}}=$$

$$=\frac{2x+2}{\sqrt{(4x+2)^3}}-\frac{9}{4}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2+x-6}}.$$

2) $y=\ln^4(e^{-5x}+1)+\cos^2 7x$.

$$y'=\left(\ln^4(e^{-5x}+1)+\cos^2 7x\right)'=\left(\ln^4(e^{-5x}+1)\right)'+\left(\cos^2 7x\right)'=$$

$$=4\ln^3\left(e^{-5x}+1\right)\cdot\left(\ln\left(e^{-5x}+1\right)\right)'+2\cos 7x\cdot\left(\cos 7x\right)'=$$

$$=4\ln^3\left(e^{-5x}+1\right)\cdot\frac{1}{\left(e^{-5x}+1\right)}\cdot\left(e^{-5x}+1\right)'-2\cos 7x\cdot\sin 7x\cdot\left(7x\right)'=$$

$$=\frac{4\ln^3\left(e^{-5x}+1\right)}{\left(e^{-5x}+1\right)}\cdot e^{-5x}\cdot\left(-5x\right)'-2\cos 7x\cdot\sin 7x\cdot 7=$$

$$=\frac{-20e^{-5x}\cdot\ln^3\left(e^{-5x}+1\right)}{\left(e^{-5x}+1\right)}-7\sin 14x.$$

3) $y=\operatorname{tg}\sqrt{(1+2x^4)}$.

$$y'=\left(\operatorname{tg}\sqrt{\left(1+2x^4\right)}\right)'=\frac{1}{\cos^2\sqrt{\left(1+2x^4\right)}}\cdot\left(\sqrt{\left(1+2x^4\right)}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt{\left(1+2x^4\right)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\left(1+2x^4\right)}}\cdot\left(1+2x^4\right)'=\frac{4x}{\sqrt{\left(1+2x^4\right)}\cos^2\sqrt{\left(1+2x^4\right)}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача №1

Даны матрицы A и B. Найти:

а) определитель матрицы A.

б) произведение матриц $A\times B$:

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & -5\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ -13\\ 16\end{pmatrix}$; 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ -3\\ -2\end{pmatrix}$; 4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ -3\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ 5\\ 8\end{pmatrix}$; 6. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$; 8. $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$; 10. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 5\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 7\\ 9\end{pmatrix}$.

Задача №2

1. Составить уравнение прямой, перпендикулярной $5x-5y-6=0$.

2. Найти угол между прямыми $2x-5y-7=0$ и $3x+7y+4=0$.

3. Записать уравнение прямой проходящей через точки $A(-3;2)$ и $B(-2;-5)$, и найти расстояние от точки $C(4;3)$ до этой прямой.

4. Записать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок $a=2$ и составляющей с осью Ox угол $120°$. Найти тупой угол, который эта прямая образует с прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}+1$.

5. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;1)$ под углом $45°$ к прямой $2x+3y-6=0$.

6. Составить уравнение прямой, перпендикулярной $-4x+2y-5=0$.

7. Найти угол между прямыми $3x-8y+6=0$ и $-3x+7y+4=0.$

8. Записать уравнение прямой проходящей через точки $A(-2;3)$ и $B(2;4)$, и найти расстояние от точки $C(0;2)$ до этой прямой.

9. Записать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок $a=4$ и составляющей с осью Ox угол $150°$. Найти тупой угол, который эта прямая образует с прямой $y=\frac{x}{2}$.

10. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(-2;2)$ под углом $45°$ к прямой $4x+5y-10=0$.

Задача №3

1. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M\left(2;\sqrt{3}\right)$ и $B(0;2)$. Написать его уравнение и найти расстояние точки M от фокуса.

2. Записать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(1;2)$.

3. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, построить указав все характерные линии и точки $2x^2+4x-y-3=0$.

4. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от начала координат и точки $A(-5;3)$.

5. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x,y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

6. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, построить указав все характерные линии и точки $2x^2+5y^2-12x+10y-13=0.$

7. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2,2)$ и от оси Ox.

8. Найти уравнение траектории точки $M(x;y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(3;0)$, чем к оси абсцисс.

9. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, построить указав все характерные линии и точки $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$.

10. Написать уравнение траектории точки $M(x;y)$, которая при своем движении находится вдвое ближе к точке $A(-1;1)$, чем к точке $B(-4;4)$.

Задача №4

Решить систему линейных алгебраических уравнений

1) $\begin{cases} -4x-5y-16z=15, \\ -2x-y=11, \\ -x-3y+4z=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -5x+2y+4z=13, \\ -x-y+z=8, \\ -5x-8z=33; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -4x+2y+z=-11, \\ 4x+y-z=8, \\ -x-2y-z=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x-2y+3z=-7, \\ -4x+6z=-4, \\ 10x-6y-4z=-3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} -3x-12y-15z=-22, \\ -6x-8y+3z=-6, \\ 6x-8y+3z=-6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x+2z=-2, \\ 8x+y-z=4, \\ -20x+4y-z=-11; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+4y=-7, \\ 3x-5z=10, \\ -3x+4y-3z=28; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} -5x+y-4z=-1, \\ x-4y+z=-1, \\ -15x-12y+9z=-1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 6x+5y=-1, \\ 3x+8y=-6, \\ -9x+2y-9z=-8; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} -5x-4y+8z=32, \\ 2x+2y-2z=-15, \\ -2x+2z=7. \end{cases}$

Задача №5

Дано комплексное число z. Требуется:

а) записать число в алгебраической и тригонометрической форме;

б) изобразить на комплексной плоскости;

в) вычислить z^{12}.

1) $z=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$; 2) $z=\dfrac{i}{\sqrt{3}-i}$; 3) $z=\dfrac{1+i}{1-i}$; 4) $z=\dfrac{1+i}{i}$;

5) $z=\dfrac{-2i\sqrt{2}}{1+i}$; 6) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 7) $z=\dfrac{-4}{1-i\sqrt{3}}$; 8) $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$;

9) $z=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$; 10) $z=\dfrac{-4i}{\sqrt{3}-i}$.

Задача №6

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$, б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

2 . а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{3x^2-5}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{12x^2}$;

6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^2-1}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{2x}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x\sin x}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x+1\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$.

Задача №7

Найти производную для заданных функций

1. а) $y=2x^2-x$, б) $y=2\sqrt{x}+x^5\sin x-\dfrac{\lg(2x+1)}{\arcsin x}$, в) $y=e^{\cos^2 x}$;

2. а) $y=3-x^2$, б) $y=1+\dfrac{2}{x}-\sqrt{x}\,\mathrm{tg}x+\dfrac{5^x}{\sin x}$, в) $y=\lg^2(3x-4)$;

3. а) $y=x+\dfrac{1}{x}+1$, б) $y=1+x^2e^{-x}+\dfrac{\arccos x}{3\sqrt{x}}$, в) $y=\mathrm{arctg}^2\left(6\sqrt[3]{x}+1\right)$;

4. а) $y=e^{2x}+1$, б) $y=2+10x\ln x-\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$, в) $y=\left(3^{x^2}+\mathrm{arctg}\,2x+\dfrac{1}{2}\right)^5$;

5. а) $y=x^3+2$, б) $y=\dfrac{3}{x^4}+x2^x-\dfrac{\lg x}{\sqrt[4]{x}}$, в) $y=\cos^3\left(\dfrac{1}{x}-e^{2x}\right)$;

6. а) $y=6x-5x^2$, б) $y=\dfrac{\sqrt[10]{x}}{2}-3x\ln x+\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$, в) $y=2^{\sin\left(x^2+1\right)}$;

7. а) $y=2x-x^2$, б) $y=1+4\sqrt[4]{x}-x^5e^{-3x}+\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{x}}$, в) $y=\arcsin^2\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)$;

8. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-1$, б) $y=3x+x^2 2^{2x}-\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sqrt{x}}$, в) $y=\left(\arccos^5 x+\sqrt{1-x^2}\right)^4$;

9. а) $y=\sin x$, б) $y=12-3x^4+\sqrt{x}\,\mathrm{arcctg}x+\dfrac{\ln x}{x}$, в) $y=\cos\left(2^{\sqrt{x}+1}\right)$;

10. а) $y=\cos x$, б) $y=5+3^x\sin x-\dfrac{3x^2+6x}{\sqrt{x+1}}$, в) $y=\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}$.

ЧАСТЬ 2

Типовой расчёт содержит 10 вариантов заданий по двум разделам интегрального исчисления: «Неопределённые интегралы» и «Определённые интегралы и их приложения». В каждом варианте 12 задач.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Для выполнения первых трёх заданий помимо знания таблицы интегралов нам понадобится:

1) свойство линейности неопределённого интеграла $a, b \in R$

$$\int \left(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\right) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx;$$

2) знание тригонометрических формул и основных свойств элементарных функций;

3) метод интегрирования внесением под знак дифференциала.

По определению дифференциала функции $\phi'(x) dx = d\left(\phi(x)\right)$. Переход в этом равенстве слева направо называют «подведением множителя $\phi'(x)$ под знак дифференциала».

Пусть требуется найти интеграл вида $\int f\left(\phi(x)\right) \cdot \phi'(x) dx$. В этом интеграле подведём функцию $\phi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\phi(x) = u$ (замену переменной интегрирования), тогда мы получим ***формулу подстановки*** в неопределённом интеграле

$$\int f\left(\phi(x)\right) \cdot \phi'(x) dx = \int f\left(\phi(x)\right) d\left(\phi(x)\right) = \int f(u) du.$$

Для линейной функции $\phi(x) = ax + b$ можно получить частный случай формулы (1), тогда $d(ax + b) = adx$. Следовательно

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

Для нахождения интегралов вида

$$\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx\,,\ \int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx\,,\ \int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx\,,$$

следует преобразовать подынтегральную функцию, воспользовавшись формулами тригонометрии

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)x + \sin\left(\alpha-\beta\right)x\right),$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)x + \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right),$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)x - \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right).$$

Для нахождения интегралов вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ используют метод замены переменной (или метод внесения под знак дифференциала) и формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,,\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

Рассмотрим случай, когда хотя бы один показатель степени является нечётным числом. Пусть $n = 2k + 1$. Тогда

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^m x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^k \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx\,.$$

Так как $\sin x dx = -d\cos x$, а $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, то обозначим $\cos x = t$, получим интеграл от рациональной функции:

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = -\int \left(1-t^2\right)^k t^m dt\,.$$

Отметим, что этот метод интегрирования применим и в случае, когда один из показателей степеней m или n нечётное число, а второй – рациональное число. Если оба показателя степени чётные, то степени необходимо понизить, используя формулы понижения степени, известные из курса тригонометрии.

Пусть $n = 2k$,$m = 2l$.Тогда

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^k \left(\cos^2 x\right)^l dx =$$

$$= \frac{1}{4^{k+l}} \int (1 - \cos 2x)^k (1 + \cos 2x)^l dx$$

В полученном интеграле следует раскрыть скобки, воспользоваться свойством линейности (т. е. представить как сумму интегралов) и применять описанные методы до тех пор, пока интеграл не сведётся к сумме табличных первообразных.

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx, \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Интегралы рассмотрим при условии, что квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет корней, то есть его дискриминант $D < 0$.

Метод интегрирования подобных функций заключается в следующем. Пользуясь свойством линейности, представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов от дробей с теми же знаменателями, в числителе первой дроби будет производная $\left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b$, а в числителе второй – единица. Такое преобразование позволяет свести исходные интегралы к табличным.

Так как $Mx + N = \frac{M}{2a}(2ax + b) + N - \frac{Mb}{2a}$, для первого и второго интегралов получим следующие разложения

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

В первых интегралах полученных сумм достаточно воспользоваться методом внесения под знак дифференциала или методом подстановки. Поскольку $(2ax + b)dx = d\left(ax^2 + bx + c\right)$, обозначим $s = ax^2 + bx + c$,тогда легко получим табличные интегралы

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{ds}{s} = \ln|s| + C = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C\ ,$$

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{s} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C\ .$$

Выделение полного квадрата в квадратном трёхчлене ax^2+bx+c в интегралах $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, также позволяет их свести к табличным интегралам, посредством замены

$$x + \frac{b}{2a} = t,\ \ dx = dt\ .$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Как известно, дробно-рациональной функцией (рациональной дробью) называют функцию вида:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \left(m, n, a_i, b_j \in R,\ a_0, b_0 \neq 0\right).$$

При интегрировании рациональной дроби прежде всего нужно выяснить, является ли она правильной или нет. Если рациональная дробь неправильная, т.е. n>m, то необходимо выделить её целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = G_{n-m}(x) + \frac{F_k(x)}{Q_m(x)}\ .$$

В результате мы получим многочлен $G_{n-m}(x)$ степени *n–m*, называемый неполным частным, и остаток от деления – правильную дробь $\frac{F_k(x)}{Q_m(x)}$, в которой степень числителя $0 \le k < m$. Найти интеграл от многочлена $G_{n-m}(x)$ труда не составляет. Если остаток от деления $\dfrac{F_k(x)}{Q_m(x)}$ не удаётся проинтегрировать непосредственно с помощью элементарных методов интегрирования, то эту рациональную дробь следует разложить на простейшие дроби, то есть дроби четырёх типов: $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^s}$, $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^r}$, где $A, M, N, a, p, q \in R$, $s, r \in N$, $s, r \geq 2$, а квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Воспользуемся теоремой о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей. Пусть знаменатель исходной дроби представим в виде произведения

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\ldots(x-a_k)^{s_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\eta}+\ldots+$$
$$+\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{\eta}$$

Здесь a_1, a_2, …, a_k – действительные корни этого многочлена кратности s_1, s_2, …, s_k соответственно, а каждый квадратный трёхчлен $x^2+p_ix+q_i$ имеет пару сопряженных комплексных корней кратности r_i. Тогда рациональная дробь представима в виде суммы простейших дробей, причём их количество и вид этих дробей зависит от разложения $Q_m(x)$, а именно:

1) каждый множитель вида $\left(x-a_j\right)^{s_j}$, определяющий действительный корень a_j кратности s_j, порождает сумму s_j простейших дробей вида

$$\frac{A_{j1}}{x-a_j}+\frac{A_{j2}}{\left(x-a_j\right)^2}+\ldots+\frac{A_{js}}{\left(x-a_j\right)^s};$$

2) каждый множитель вида $\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{ri}$, определяющий пару сопряженных комплексных корней кратности r_i, порождает сумму r_i простейших дробей вида

$$\frac{M_{i1}x+N_{i1}}{x^2+p_ix+q_i}+\frac{M_{i2}x+N_{i2}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^2}+\ldots+\frac{M_{ir}x+N_{ir}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^r}.$$

Складываем все промежуточные суммы и получаем следующее разложение:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{\left(x-a_1\right)^2}+\ldots+\frac{A_{1s}}{\left(x-a_1\right)^s}+\ldots+\frac{A_{k1}}{x-a_k}+\ldots+\frac{A_{ks}}{\left(x-a_k\right)^s}+$$

$$+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{1r}x+N_{1r}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^r}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{l1}x+N_{l1}}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{M_{l2}x+N_{l2}}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+\ldots+\frac{M_{lr}x+N_{lr}}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^r}$$

Простейшие дроби легко интегрируются. Для разложения рациональной дроби на простейшие остаётся отыскать значения постоянных A_i, M_i, N_i, стоящих в числителях простейших дробей.

Интегрирование иррациональных функций вида

$$R\left(x,\sqrt[k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\ldots,\sqrt[k_s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s}}\right).$$

Интегралы такого вида, где m_1, m_2,…, m_s – целые, k_1, k_2, …, k_s – натуральные, преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$, где p – наименьшее общее кратное чисел k_1, k_2, …, k_s. Тогда $x=\frac{dt^p-b}{a-ct^p}$ и $dx=\frac{\left(ad-bc\right)pt^{\,p-1}}{\left(a-ct^p\right)^2}$.

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[k_2]{(ax+b)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[k_s]{(ax+b)^{m_s}}\right)dx$$

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{x^{m_1}}, \sqrt[k_2]{x^{m_2}}, \ldots, \sqrt[k_s]{x^{m_s}}\right)dx$$

являются частными случаями интеграла (3) и приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью аналогичных подстановок: $ax+b=t^p$ и $x=t^p$ соответственно.

Интегрирование иррациональных функций вида

а) $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$

б) $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$

в) $R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)$.

Если интегралы от таких функций не удаётся найти более простыми методами, то во всех трёх случаях с помощью тригонометрических подстановок можно легко перейти от интеграла, который зависит от квадратичной иррациональности, к интегралу, рационально зависящему от тригонометрических функций. Рассмотрим эти подстановки.

1. Если подынтегральная функция имеет вид (а), то следует воспользоваться подстановкой $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$).

2. Если подынтегральная функция имеет вид (б), то используем подстановку $x=\dfrac{a}{\cos x}$ (или $x=\dfrac{a}{\sin x}$).

3. Если подынтегральная функция имеет вид (в) то применим подстановку $x=atgx$ (или $x=actgx$).

Интегрирование тригонометрических функций $R(\sin x, \cos x)$ методом подстановки

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводится к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\dfrac{x}{2}$. В результате этой подстановки $x = 2arctgt$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. А так же $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = tg\dfrac{x}{2}$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при её применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ может быть упрощено.

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечётная функция относительно $\sin x$, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подынтегральная функция становится рациональной при осуществлении подстановки $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечётная функция относительно $\cos x$ $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то, применяя подстановку $\sin x = t$ перейдём к интегралу от рациональной функции.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ – чётная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то к цели приводит подстановка $tgx = t$.

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методы интегрирования

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Напомним формулу интегрирования по частям для определённого интеграла: $\int_a^b u dv = vu\Big|_a^b - \int_a^b v du$, где $u = u(x), v = v(x)$, $vu\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Метод замены переменной в определённом интеграле.

Напомним правило замены переменной в определённом интеграле. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], а функция $x = \phi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке [t_1, t_2], причём $a = \phi(t_1)$, $b = \phi(t_2)$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(x))\phi'(t)dt$.

Приложения определённого интеграла

Нахождение площади области, ограниченной кривыми, и отыскание длины кривой.

Напомним основные формулы, используемые при нахождении площади области, ограниченной кривыми, и отыскании длины кривой, необходимые для решения типовых заданий этого раздела.

Площадь в прямоугольных координатах

Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной кривой, уравнений которой в прямоугольных координатах имеет вид $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, $(a < b)$ находится по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Отрезок [a, b] следует разделить на части, в каждой из которых функция $f(x)$ сохраняет один и тот же знак. При этом необходимо соблюдать такое правило знаков: площади, находящиеся над осью Ox, берутся со знаком плюс, а площади, расположенные под осью Ox, со знаком минус.

Если площадь ограничена двумя непрерывными кривыми, уравнения которых в прямоугольных координатах $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем всюду на отрезке [a, b] $f_2(x) \geq f_1(x)$, и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, $(a < b)$, то площадь определяется по формуле

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

И в этом случае требуется соблюдать указанное выше правило знаков.

Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной полярным управлением и двумя радиусами-векторами

Если кривая, ограничивающая площадь, определяется уравнением $r = f(\phi)$, то площадь, ограниченная ею определяется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 d\phi$$

где $\phi_1 < \phi_2$ – пределы изменения полярного угла.

Вычисление длины дуги плоской кривой

1. Длина дуги плоской кривой, заданной в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, находится по формуле

$$L=\int_a^b \sqrt{1-y'^2}dx,$$

где a и b– соответственно абсциссы начала и конца дуги.

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=\phi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}.$$

Причем $t_1<t<t_2$, а функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные то длина дуги:

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}dt .$$

3. Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r=f(\phi)$$

и полярный угол изменяется от ϕ_1 до ϕ_2, то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$L=\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2+r'^2}d\phi .$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Вычислить неопределенный интеграл методом внесения под знак дифференциала

1. $\int \frac{\sin x dx}{2-\cos x}$;
2. $\int x^2\sqrt{3+x^3}dx$;
3. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
4. $\int \frac{xdx}{\cos^2\left(2x^2+1\right)}$;
5. $\int \frac{xdx}{2+x^4}$;
6. $\int \frac{\left(\arccos x-1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+1}$;
8. $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}dx$;
9. $\int \frac{\left(1+ctg^3 x\right)}{\sin^2 x}dx$;
10. $\int \frac{10+\ln^2 x}{x}dx$.

Задача 2. Найти интеграл от тригонометрической функции:

1. $\int \sin^4 \frac{3x}{2}dx$;
2. $\int \sin^2\left(\frac{x}{4}+3\right)dx$;

3. $\int \sin 3x \cos x dx$;

4. $\int \cos 4x \cos 5x dx$;

5. $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$;

6. $\int \frac{\sin^3(x-1)}{\cos^2(x-1)} dx$;

7. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \sin 2x dx$;

8. $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx$;

9. $\int \sin \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3} dx$;

10. $\int \sin x \sin 6x dx$.

Задача 3. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{(3x+2)dx}{2x^2+4x+16}$;

2. $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{9x^2-3x+2}}$;

3. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$;

4. $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{4-2x-2x^2}}$;

5. $\int \frac{(7x-5)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

6. $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+2x-3}}$;

7. $\int \frac{(5x-1)dx}{4x^2-x+3}$;

8. $\int \frac{(5-x)dx}{2x^2+2x+1}$;

9. $\int \frac{(2-3x)dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$;

10. $\int \frac{(1-3x)dx}{\sqrt{1+x-2x^2}}$.

Задача 4. Найти интеграл от дробно-рациональной функции:

1. $\int \frac{(2x^3+3x^2+3)dx}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}$;

2. $\int \frac{(x^4-x+1)dx}{(x+1)^3(x^2+2)}$;

3. $\int \frac{x(x+1)dx}{(x-2)^2(x^2-3x+5)}$;

4. $\int \frac{(x^3+7x^2+5x+10)dx}{x^3(x^2+5)}$;

5. $\int \frac{(x^4-3x^3+x^2-5x-2)dx}{(x-1)(x^4-1)}$;

6. $\int \frac{(4x^4+5x^2-21x+10)dx}{x^2(x-2)(x^2+2x+5)}$;

7. $\int \frac{(x^2-8x+22)dx}{(x-2)^2(x^2-x+3)}$;

8. $\int \frac{(x^2+10x+1)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$;

9. $\int \frac{2\left(x^2-2x+4\right)dx}{x^3\left(x^2+4\right)}$;

10. $\int \frac{\left(x^3+4x^2+6x+2\right)dx}{x^2\left(x+1\right)\left(x^2+2x+2\right)}$.

Задача 5. Найти неопределенный интеграл от иррациональной функции:

1. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}-1}{\sqrt{x+3}\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}dx$;

2. $\int \frac{x}{2+\sqrt{2x+1}}dx$;

3. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}dx$;

4. $\int \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx$;

5. $\int \frac{5\sqrt{x+1}}{\left(x+1\right)^2\sqrt{x}}dx$;

6. $\int \frac{6\sqrt{x+2}}{\left(x+2\right)^2\sqrt{x+1}}dx$;

7. $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$;

8. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$;

9. $\int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}dx$;

10. $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$.

Задача 6. Найти интеграл от иррациональной функции, используя тригонометрические подстановки:

1. $\int x^4\sqrt{4-x^2}\,dx$;

2. $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$;

3. $\int x^3\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx$;

4. $\int \frac{\left(x+2\right)^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx$;

5. $\int \frac{\sqrt{\left(x^2-25\right)^3}}{x^6}dx$;

6. $\int \frac{x^2}{\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$;

7. $\int \frac{x^3}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^5}dx$;

8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}dx$;

9. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^3}dx$;

10. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Задача 7. Проинтегрировать тригонометрические функции используя метод подстановки

1. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)}dx$;

2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 5} dx$;

3. $\int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$;

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}$;

5. $\int \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2}$;

6. $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{(1 - \sin x)^2}$;

7. $\int \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}$;

8. $\int \frac{\cos^2 dx}{(1 - \sin x + \cos x)^2}$;

9. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$;

10. $\int \frac{(4 - 7tgx) dx}{2 + 3tgx}$.

Задача 8. Найти значение интеграла методом интегрирования по частям

1. $\int\limits_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$;

2. $\int\limits_0^{1/2} \ln \frac{1 - x}{1 + x} dx$;

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$;

4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} x\, arctgx\, dx$;

5. $\int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + x\right) e^x dx$;

6. $\int\limits_{0}^{1/2} \arccos 2x dx$;

7. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x ctg^2 x dx$;

8. $\int\limits_{0}^{2} \left(x^2 + 1\right) e^{2x} dx$;

9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

10. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos\frac{x}{3} dx$.

Задача 9. Найдите значение интеграла методом замены переменной в определенном интеграле:

1. $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

2. $\int\limits_{\sqrt{8}/3}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2 - 5\right)^5}}$;

3. $\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x} dx}$;

4. $\int\limits_{1}^{16} arctg\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$;

5. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{3x+1}}$;

6. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^3+1\right)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$;

7. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{4-x^2}dx$;

8. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{4-x^2}}$;

9. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$;

10 $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{\left(x^2-x+1\right)dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 10. Найдите площадь области ограниченной кривыми, заданными в декартовых координатах

1. $y=x^2e^{-x},\ \ y=0,\ \ x=2.$

2. $y=5\sin x,\ \ y=5\cos x.$

3. $y=x\ln^2 x,\ \ y=x\ln x$.

4. $y=\frac{4}{3}\cos x,\ \ y=2tgx,\ \ x=0$.

5. $y=x^4-4x^3+4x^2,\ \ y=0.$

6. $y=x,\ y=-x,\ \ x^2-y^2=1.$

7. $y^2=3(3-x),\ \ x^2+y^2=9$.

8. $y=(x-4)^2,\ y=16-x^2,\ \ y=0.$

9. $xy = 3,\ x + y = 4$.

10. $y = \dfrac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 9$.

Задача 11. Найдите длину кривой, заданной в декартовых координатах

1. $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y,\ 1 \le y \le e$;

2. $y = \ln x,\ \dfrac{3}{4} \le x \le \dfrac{12}{5}$;

3. $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$;

4. $y = 1 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$;

5. $y = \ln\left(1 - x^2\right), 0 \le x \le \dfrac{1}{2}$;

6. $y = \arccos e^{-x}, 0 \le x \le 1$;

7. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \le x \le \dfrac{7}{9}$;

8. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,\ 0 \le x \le \dfrac{8}{9}$;

9. $y = e^x, 0 \le x \le 1$;

10. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$.

Задача 12. Вычислите

1. а) Площадь фигуры астроиды $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$;

б) длину витка спирали Архимеда $r = 6\phi$.

2. а) Площадь фигуры, ограниченной кривыми

$r = 6\sin 3\phi,\ r = 3\ \left(r \ge 3\right)$;

б) Длину дуги кривой $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.

3. а) Площадь, ограниченную осью Ox и одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$;

б) Длину кардиоиды $r = 6(1 - \cos\phi)$.

4. а) Площадь, ограниченную кардиоидой $r = 8(1 - \cos\phi)$;

б) Длину дуги кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^2}{2} \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt{3}$.

5. а) Площадь, ограниченную кардиоидой $\begin{cases} x = 2(\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(\sin t - \sin 2t) \end{cases}$;

б) Длину замкнутой кривой $r = 4(\sin 2\phi + \cos 2\phi)$.

6. а) Площадь, ограниченную кривыми $r = \sin\phi$, $r = 2\sin\phi$;

б) Длину эволюты эллипса $\begin{cases} x = \frac{16}{5}\cos^3 t \\ y = \frac{16}{5}\sin^3 t \end{cases}$.

7. а) Площадь эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$;

б) Длину кардиоиды $r = 8(1 - \cos\phi)$, $-\frac{2\pi}{3} \le \phi \le 0$.

8. а) Длину дуги кривой

$$\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le \pi .$$

б) Площадь, ограниченную кривой
$r=\cos\phi-\sin\phi$.

9. а) Площадь, ограниченную кривой $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$;

б) Длину дуги кривой $r=\dfrac{10}{\left(1+\cos 2\phi\right)}, \quad 0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2}$.

10. а) Площадь, ограниченную кривыми
$r=6\sin 3\phi, \quad r=3 \quad \left(r\ge 3\right)$;

б) Длину астроиды $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение стоит сказать несколько слов о причинах появления настоящего пособия и литературе, которую можно указать в качестве рекомендуемой. Разумеется, автор не претендует на полноту изложения материала ни по одному из разделов. Довольно странно было бы требовать этого в силу наличия учебников, некоторые из которых уже стали классическими, например [1, 4, 5, 11], первые издания которых вышли ещё в 80-х гг. XX столетия и прошли испытание временем. Кроме того, они посвящены отдельным разделам математики и некоторые их них имеют несколько томов. Однако курс математики, читаемый студентам очно-заочной и заочной форм обучения имеет довольно скромный объём, в силу чего появилась необходимость в настоящем пособии, название которого лишь осуществляет преемственность с наименованием читаемого курса в учебном плане, и никак не претендует на освещение всей математики.

Вместе с тем, стоит отметить, что в университете для студентов вечерней и заочной форм обучения технических направлений подготовки уже существовали учебные пособия, некоторые из которых хорошо себя зарекомендовали и используются в учебном процессе на протяжении многих лет, например [6]. Однако с появлением новых образовательных стандартов, стала меняться программа курса и увеличиваться объём самостоятельной работы студентов. В силу указанных обстоятельств, приходится добавлять некоторые разделы курса математики при уменьшающемся объёме времени, отводимом на него. Тем не менее автор рассчитывает на понимание со стороны читателя и его стремление к изучению дополнительного материала. Ниже указан возможный, но далеко не полный перечень источников. Автор приводит наиболее поздние издания на момент выхода настоящего пособия, но студенты могу воспользоваться и более ранними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д.В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.

2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа: учебное пособие / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – 16-е изд. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 736 с.

3. Бугров, Я.С. Сборник задач по высшей математике: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 304 с.

4. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц: учебное пособие / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – Москвац: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с.

5. Зорич, В.А. Математический анализ: учебник: в 2 томах / В.А. Зорич. – 6-е изд., дополн. – Москва: МЦНМО, 2012.

6. Зубрина, Л.Г. Линейная алгебра с приложениями к аналитической геометрии: учебное пособие / Л.Г. Зубрина, Н.Ю. Поникарова, Ю.Н. Храмова. – Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2004. – 100 с.

7. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 224 с.

8. Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.

9. Кострикин, А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – Лань, 2008. – 304 с.

10. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л.А. Кузнецов. – Лань, 2008. – 240 с.

11. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3 томах / Г.М. Фихтенгольц. – 9-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009.

Учебное издание

Крикунов Михаил Михайлович

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 06.06.2022. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,25.
Тираж 25 экз. Заказ № . Арт. – 12(Р1У)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.