ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА»

Г.Н. Горелов, Е.А. Ефимов,
Л.В. Коломиец

МАТЕМАТИКА – АБИТУРИЕНТУ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

САМАРА
Издательство СГАУ
2008

УДК 510.2(075)
ББК 22.1.я7

Рецензенты: доктор техн. наук, проф. Б.А. Горлач;
канд. физ.-мат.наук, доц. С.Н. Богданов

Горелов Г.Н.

МАТЕМАТИКА – АБИТУРИЕНТУ: *учеб. пособие / Г.Н. Горелов, Е.А. Ефимов, Л.В. Коломиец.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2008. – 67с.

ISBN 978-5-7883-0695-7

Учебное пособие предназначено для занятий со слушателями подготовительных курсов факультета довузовской подготовки СГАУ и самостоятельной работы абитуриентов. Слушатели подготовительных курсов и других форм обучения на факультете довузовской подготовки СГАУ получают за время обучения дополнительные знания и навыки решения задач по математике различной сложности, знакомятся со спецификой задач Единого государственного экзамена.

Пособие содержит задачи по всем разделам школьной программы по математике, а также большое количество задач, предлагавшихся на ЕГЭ в различные годы и включает необходимый справочный материал и решение некоторых трудных задач части С3 ЕГЭ.

УДК 510.2(075)
ББК 22.1.я7

ISBN 978-5-7883-0695-7

Содержание

1. Алгебраические преобразования

Основные формулы

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Если степени четные, то

$\sqrt[2n]{a^{2m}} = |a|^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[2n]{a \cdot b} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}$ $\qquad \sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Задачи

Упростить выражения:

1. $\left(\dfrac{b}{a^2+ab} - \dfrac{2}{a+b} + \dfrac{a}{b^2+ab}\right) : \left(\dfrac{b}{a} - 2 + \dfrac{a}{b}\right).$

2. $\left(\dfrac{1}{a-3b} - \dfrac{1}{a+3b} + \dfrac{6b}{a^2-9b^2}\right) : \dfrac{2ab+b^2}{a^2-9b^2}.$

3. $\left(m+n - \dfrac{4mn}{m+n}\right) : \left(\dfrac{m}{m+n} - \dfrac{n}{n-m} - \dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right).$

4. $\left(\dfrac{1}{2+2\sqrt{a}} + \dfrac{1}{2-2\sqrt{a}} - \dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\right).$

5. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}.$

6. $\dfrac{2}{a} - \left(\dfrac{a+1}{a^3-1} - \dfrac{1}{a^2+a+1} - \dfrac{2}{1-a}\right) : \dfrac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}.$

7. $\left(\sqrt{x} + \dfrac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y} + \dfrac{y}{\sqrt{xy}-x} - \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right).$

8. $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1} - \dfrac{x+1}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x^2-1}$, если $x = \sqrt[4]{(a-1)^2}.$

2. Алгебраические уравнения и неравенства

Решите уравнения:

1. $\frac{2}{x-1}+x=\frac{x+1}{x-1}$. 2. $\frac{x^2+3}{x+3}=2$.

3. $\frac{2x-3}{x-1}+1=\frac{6x-x^2-6}{x-1}$. 4. $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.

5. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$. 6. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

7. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

8. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$. 9. $|2x-5|=x-1$.

10. $|2x-4|+|1-x|=1$. 11. $|2x+1|=|x-1|+2$.

Решите неравенства:

12. $(2x+3)^2(3x-5)^3(x+1)(x+3)<0$. 13. $\frac{(x-1)(2x+4)}{3x+2}\geqslant 0$.

14. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$. 15. $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$. 16. $\frac{1}{x}<\frac{2}{x-2}$.

17. $\frac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5}>0$. 18. $\frac{1}{x^2-5x+6}\geqslant\frac{1}{2}$. 19. $1+\frac{2}{x+1}>\frac{2}{x}$.

20. $|x-5|\leqslant 3$. 21. $|2x+1|>2$. 22. $|x-1|\geqslant 2x-1$.

23. $|x-3|<|x|+2$. 24. $|x-2|\geqslant x^2$.

Найдите область определения функций:

25. $y=\sqrt{x^2-x}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. 26. $y=\sqrt{7x-14}-\sqrt{x^2-15x+56}$.

27. $y=\sqrt{x^2+9x+14}+\frac{1}{\sqrt{6-5x-x^2}}$. 28. $y=\sqrt{x^2-|x|}+\sqrt{25-x^2}$.

3. Иррациональные уравнения и неравенства

Основные сведения

При возведении иррационального уравнения в квадрат, как правило, получается неравносильное уравнение, содержащее посторонние корни. В этом случае проверка является обязательным этапом решения.

При решении неравенства возводить обе части в квадрат можно только в том случае, когда обе части неотрицательны.

Возможны случаи:

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

неравенство равносильно только одной системе

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Задачи

Решите уравнения:

1. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

2. $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$.

3. $x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2-2} = 0$.

4. $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$.

5. $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$.

6. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-7} = 2\sqrt{x}$.

7. $\sqrt[4]{x-4} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x-4}} = 12$.

8. $5\cdot\sqrt[15]{x^{22}} + \sqrt[15]{x^{14}\cdot\sqrt{x}} - 22\cdot\sqrt[15]{x^7} = 0$.

9. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$.

10. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$.

Решите неравенства:

11. $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}$.

12. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$.

13. $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$.

14. $\sqrt{x^2-x-12} < x$.

15. $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$.

16. $\sqrt{x^2+5x-6} > x+1$.

Найдите область определения функции:

17. $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{x-\sqrt{3x+10}}}$.

18. $y = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2-4x}-x+3}}{x+2}$.

4. Тригонометрия

Основные сведения и формулы

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	не сущ.
$\pi/6{=}30^\circ$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4{=}45^\circ$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3{=}60^\circ$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2{=}90^\circ$	1	0	не сущ.	0

$\sin x$ $\begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$ $\quad$ $\cos x$ $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$ $\quad$ $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$

Знаки по четвертям

Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x \qquad x \in [-1;1],\ y \in [-\pi/2;\pi/2]; \qquad \arcsin(-x) = -\arcsin x$

$y = \arccos x \qquad x \in [-1;1],\ y \in [0;\pi]; \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$y = \operatorname{arctg} x \qquad x \in R,\ y \in (-\pi/2;\pi/2); \qquad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

$y = \operatorname{arcctg} x \qquad x \in R,\ y \in (0;\pi); \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a \quad |a| \leqslant 1 \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$

$\cos x = a \quad |a| \leqslant 1 \quad x = \pm \arccos a + 2\pi \ell,\ \ell \in Z$

$\operatorname{tg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi m,\ m \in Z$

$\operatorname{ctg} x = a \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Формулы двойного и половинного угла, понижения степени

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

Преобразование произведения в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

Преобразование суммы в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Формулы суммы аргументов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Формулы универсальной подстановки

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Введение вспомогательного угла

$a\sin x+b\cos x=c \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0)$ сводится к уравнению

$$\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

где $\quad 0<\varphi<2\pi, \qquad \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Задачи

Найдите область определения функций и упростите выражения:

1. $\dfrac{1+\sin 2x}{(\sin x+\cos x)^2}$. **2.** $4\cos^4 x-2\cos 2x-0{,}5\cos 4x$.

3. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}-\left(\dfrac{1-0{,}5\sin^2 2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}\right)^{-1}$.

4. $\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin\alpha}+\dfrac{2}{1-\sin\alpha}}$.

5. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)$.

Вычислите:

6. $\cos\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg} x=\frac{2}{3}$. **7.** $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

8. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$; $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

9. $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$; $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

10. $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$.

11. $\sin(2\alpha + \frac{5\pi}{4})$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$.

12. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 4$.

Решите уравнения:

13. $2\cos^2 x + 5\sin x = 4$. 14. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \frac{3}{2} = 0$.

15. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$. 16. $3\cos x + 5\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.

17. $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$. 18. $\cos 2x - 5\sin x = 3$.

19. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5$. 20. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

21. $1 - \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi + x}{2}) = 0$.

22. $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

23. $8\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$.

24. $4\cos^2\frac{x}{2} + 0{,}5\sin x + 3\sin^2\frac{x}{2} = 3$.

25. $10\sin^2 x + 3\sin 2x = 2(1 + \cos 2x)$.

26. $\cos(2x + \frac{3\pi}{2}) - 2\cos^2(3\pi - x) = \cos(4\pi - 2x)$.

27. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{1}{\sin x}$. 28. $1 + \cos x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

29. $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$. 30. $4\operatorname{tg}^2 3x - \frac{1}{\cos^2 3x} = 2$.

31. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

32. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

33. $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$. 34. $\frac{1 + \cos 2x}{2\cos x} = \frac{2\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

35. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1$.

36. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

37. $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$. 38. $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$.

39. $\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 2\operatorname{tg}^2 x - 1$.

40. $7+4\sin x\cos x+1{,}5(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=0$.

41. $\dfrac{3}{\cos^2 x}-\dfrac{3}{\sin^2 x}=8$.

42. $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}+x)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2}x$.

43. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$. **44.** $4\sin x+\cos x=4$.

45. $\sin x-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos x$. **46.** $3\sin 5x-2\cos 5x=3$.

47. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=\sin(\frac{\pi}{4}+2x)\sin(\frac{\pi}{4}-3x)$.

48. $8\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)+1=0$.

49. $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$. **50.** $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$.

51. $2\cos^2 x+\cos 5x=1$. **52.** $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$.

53. $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$. **54.** $8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1=\dfrac{1}{\cos x}$.

55. $\sin^3 x+\cos^3 x=1-0{,}5\sin 2x$. **56.** $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}x=8\cos^2 x$.

57. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x=3$. **58.** $\sqrt{3}\sin x-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x\sin x=\sqrt{3}$.

59. $2\cos x\sin 3x=\sin 4x+1$. **60.** $2\cos 4x-2\cos 2x=4\cos^2 x-1$.

61. $\left(1+\sin(\frac{\pi}{2}-4x)\right)\sin 4x=\cos^2(2x-\pi)$.

62. $0{,}5\sin 2x=\cos 2x-\sin^2 x+1$.

63. $\cos x+\sin x=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$. **64.** $\sin 9x=2\sin 3x$.

65. $1-\cos 2x-2\operatorname{tg}1\cdot\sin x+\sin(\pi+x)+\operatorname{tg}1=0$.

66. $(x-2)^2|\cos x|=\cos x$.

Найдите решения уравнений, удовлетворяющие неравенству:

67. $1-5\sin x+2\cos^2 x=0$, $\cos x\geqslant 0$.

68. $2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x$, $\cos(2x-\frac{\pi}{4})>0$.

Решите неравенство:

69. $\sqrt{5-2\sin x}\leqslant 6\operatorname{tg}x\cdot\cos x-1$.

5. Графики функций

Постройте графики функций:

1. а) $y=|x^2+x|$; б) $y=|x^2-8x+7|$.

2. а) $y=x^2-4|x|+3$; б) $y=x^2-|x|+6$.

3. а) $y=|x^2-3|x|+2|$; б) $y=(3-x)\cdot|x+1|$.

4. а) $y=x+|x-3|$; б) $y=x-|x+4|$.

5. а) $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$; б) $y=\dfrac{|x|+2}{3-|x|}$.

6. а) $y=2^{|x|}$; б) $y=3^{-|x|}$.

7. а) $y=|\lg x|$; б) $y=|\log_{1/2} x|$.

8. а) $y=\lg|x|$; б) $y=\lg x^2$.

9. а) $y=\log_2(1-x)$; б) $y=\log_2(2-x)^2$.

10. а) $y=|\sin x|$; б) $y=|\operatorname{tg} x|$.

11. а) $y=\cos|x|$; б) $y=\operatorname{ctg}|x|$.

12. а) $y=3\sin 2(x-\frac{\pi}{6})$; б) $y=\frac{3}{2}\cos(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{3})$.

6. Производная и ее применение

<u>Основные сведения и формулы</u>

Таблица производных

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Простейшие

$c'=0$

$x'=1$

$(x^2)'=2x$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

Правила дифференцирования

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$

Сложная функция

$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$

$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$

$(e^u)'=e^u\cdot u'$

$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$

$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$

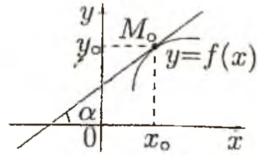
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$

$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$

$(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

$(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

Уравнение касательной: $y=y_\circ+f'(x_\circ)(x-x_\circ)$,
где $k = f'(x_\circ) = \operatorname{tg}\alpha$, α – угол наклона касательной к оси Ox, k — угловой коэффициент.



Условие возрастания и убывания функции:
$f'(x) > 0$ — функция возрастает в точке x,
$f'(x) < 0$ — функция убывает в точке x.

Внутренние точки области определения функции $y=f(x)$, в которых производная $f'(x)$ равна 0 или не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Точкой экстремума называется критическая точка, в которой производная меняет знак.

Схема исследования функции на экстремум:

1) Найти область определения функции $D(y)$.
2) Вычислить производную $f'(x)$.
3) Найти критические точки.
4) Исследовать функцию на экстремум.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке:

1) Проверить, что $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке.
2) Вычислить производную $f'(x)$.
3) Найти критические точки.
4) Вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих заданному отрезку. Выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.

Задачи

1. Найдите производную функции $y = \cos^2(x+1)$ в точке $x = 0$.

2. Найдите производную функции $y = e^{\sin x} + e^{\cos x}$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

3. Запишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

4. Найдите уравнение касательной к гиперболе $y = 1 - \frac{3}{x}$ в точке пересечения ее с осью Ox.

5. Запишите уравнения касательных к кривой $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения этой кривой с прямой $y = 1$.

6. На параболе $y = x^2 - 7x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $5x + y = 3$. Запишите уравнение касательной в этой точке.

7. В каких точках касательная к графику функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол в $135°$?

8. Найдите площадь треугольника, образованного координатными осями и касательной к кривой $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $M(3; 2)$.

9. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении тела задается формулой $S = \sqrt{t}$. Найдите ускорение в конце 4-й секунды.

Исследуйте на экстремум функции:

10. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **11.** $y = x + \frac{1}{x}$. **12.** $y = x \ln x$.

13. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$.

Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

14. $y = \dfrac{2x-1}{2-2x}$. **15.** $y = x(1 + \sqrt{x})$.

16. $y = 2x(x^2 - 3x - 6) + 7$. **17.** $y = x - \ln x$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке:

18. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$; $x \in [-1; 3]$.

19. $y = \dfrac{1}{\cos x}$; $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$. **20.** $y = x^4 - 8x^2 + 1$; $x \in [0; 3]$.

21. $y = x^2 + \dfrac{128}{x}$; $x \in [1; 6]$. **22.** $y = \sin x + \cos x$; $x \in [0; 2\pi]$.

7. Прогрессии

Основные сведения и формулы

Арифметическая прогрессия

$a_n = a_1 + d(n-1)$. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

Свойство членов прогрессии: $a_n = \dfrac{a_{n+m} + a_{n-m}}{2}$ $(n > m)$

Геометрическая прогрессия

$b_n = b_1 q^{n-1}$, $\quad b_1 \neq 0,\ q \neq 0.$ $\qquad S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{b_1 - qb_n}{1-q}$

Свойство членов прогрессии: $\quad b_n^2 = b_{n+m} \cdot b_{n-m} \qquad (n > m)$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$|q| < 1: \quad S = \dfrac{b_1}{1-q}$

Задачи

1. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.

2. Сколько надо взять членов арифметической прогрессии 5, 9, 13, …, чтобы получить сумму, равную 119?

3. В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а на нечетных 220. Найдите прогрессию.

4. Найдите четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна -49, а сумма средних равна 14.

5. Три числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Их произведение равно 64, а среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$. Найдите эти числа.

6. Найдите три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

7. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма трех первых членов равна 10,5. Найдите прогрессию.

8. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 2, разность первого и второго членов равна $\frac{2}{9}$. Найдите прогрессию.

9. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 4, сумма всех членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов всех членов. Найдите прогрессию.

10. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, второй член равен 12, а четвертый 108. На какое натуральное число нужно разделить сумму первых четырех членов этой прогрессии, чтобы в частном получилось число, меньшее делителя на 5 единиц, а остаток от деления был бы равен частному?

Решите уравнения:

11. $\lg x + \lg^3 x + \lg^5 x + \ldots = \frac{2}{3}$.

12. $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{2}$.

13. $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots = 2$.

14. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

15. $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots = \frac{2}{3}$.

8. Показательные уравнения и неравенства

Основные сведения и формулы

Показательная функция $y=a^x$, $a>0$; $x \in R$, $y \in (0;+\infty)$.

Свойства показательной функции:

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то из $a^{x_1} = a^{x_2}$ следует, что $x_1=x_2$;

если $a > 0, b > 0, a \neq b$, то из $a^x = b^x$ следует, что $x=0$;

если $a > 0, a \neq 1$, то из $a^{f(x)}=1$ следует, что $f(x)=0$;

если $a > 0, a \neq 1$, то из $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ следует, что $f(x)=g(x)$;

если $a > 0, b > 0, a \neq b$, то из $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ следует, что $f(x)=0$.

$y=a^x$ — монотонная функция: возрастает при $a > 1$,
убывает при $0 < a < 1$.

Задачи

Решите уравнения:

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

2. $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

3. $7^{|2x-4|} = 49^{1-3x}$. **4.** $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$. **5.** $7^{1-|x|} = 49$.

6. $2^{\sqrt{x+1}} = 16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}}$. **7.** $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

8. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{x-4} = 1$. **9.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$.

10. $(0{,}6)^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$. **11.** $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$.

12. $2^{x-1} \cdot 5^{x-1} = 0{,}001 \cdot 10^{2x+5}$. **13.** $2^{\sqrt{18x+1}-1} = 2^{3x}$.

14. $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$. **15.** $\sqrt{9^{x(x-1)-0{,}5}} = \sqrt[4]{3}$.

16. $4^{\sqrt{5x+1}-2} = 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$. **17.** $25^x = 6 \cdot 5^x - 5$.

18. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$. **19.** $5^x - 5^{3-x} = 20$.

20. $2^x - 2 = 15 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$. **21.** $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$.

22. $(\sqrt[5]{3})^{x+5} + (\sqrt[10]{3})^{x-5} = 84$. **23.** $4^{x-1} + 4^x + 4^{x+1} = 84$.

24. $4^x + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} - 2^{2(x-1)} = 52$. **25.** $|3^x - 3| + 3^{2x} - 3 = 0$.

26. $3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62$. **27.** $4^{2x-3} - 3 \cdot 4^{x-2} - 1 = 0$.

28. $6^{2x} - 8 \cdot 6^x + 12 = 0$. **29.** $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$.

30. $x^2 \cdot 4^x - 2^{2x+4} = 0$. **31.** $\frac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5$. **32.** $4^x + 6^x = \frac{15}{4} \cdot 9^x$.

33. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$. **34.** $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$.

35. $4^x + 2^{2x-1} = 3^{x-0{,}5} + 3^{x+0{,}5}$. **36.** $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

37. $9^x - 2^{x+0{,}5} = 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$. **38.** $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$.

39. $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$. **40.** $8^x - 4^x = 2^x$.

41. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$. **42.** $4^x - 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x$.

43. $\left(\sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}\right)^x = 8$.

44. $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

Решите неравенства:

1. $2^{x^2-x} > 2^{x+3}$. **2.** $(1/3)^{x^2-5x+8} < 1/9$. **3.** $9^x - 8\cdot 3^x \leqslant 9$.

4. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$. **5.** $2^{2x+1} - 21\cdot(0{,}5)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$.

6. $4^{0{,}5-x} - 7\cdot 2^{-x} - 4 < 0$. **7.** $5^x > 3125$.

8. $(0{,}04)^{x-1} \leqslant 625^{6x-5}$. **9.** $\left(\frac{1}{64}\right)^x > \sqrt{\frac{1}{8}}$.

10. $3^{72}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$. **11.** $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$.

12. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$. **13.** $(0{,}2)^{\frac{2x+1}{1-x}} > (0{,}2)^{-3}$.

14. $x^2\cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0$. **15.** $2\cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} \leqslant 15$.

16. $5^x - 3^{x+1} \geqslant 2\left(5^{x-1} - 3^{x-2}\right)$. **17.** $7^{x-1} - 2^x \leqslant 5\cdot 7^{x-2} - 2^{x-1}$.

18. $3^x + 2^{x-1} \geqslant 2^{x+2} + 3^{x-1} - 2^{x-3}$. **19.** $16^{x+\frac{1}{2}} \leqslant 15\cdot 4^x + 4$.

20. $25^{-x} + 5^{-x+1} \geqslant 50$. **21.** $4^x - 2^{x+1} \geqslant 3$.

22. $5^{2x-3} - 2\cdot 5^{x-2} > 3$. **23.** $2\cdot 3^{x+1} - 5\cdot 9^{x-2} \geqslant 81$.

24. $2^{\sqrt{x}} - 5\cdot 2^{0{,}5\sqrt{x}} < 24$. **25.** $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

26. $25\cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$. **27.** $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$.

28. $2x\cdot 7^{x-1} \geqslant |x|$. **29.** $x\cdot 3^{|x-1|} \geqslant 5x$.

30. $2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$. **31.** $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leqslant 0$.

32. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$. **33.** $0{,}64 < \sqrt{(0{,}8)^{x(x-3)}} < 1$.

34. $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$. **35.** $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$.

36. $(0{,}2)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$. **37.** $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leqslant 0$.

38. $\frac{9}{2^{x-2}} < \frac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$.

9. Логарифмы

Основные сведения и формулы

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$.

Свойства логарифмической функции:

1) $y = \log_a x$ — монотонная функция: возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$.

2) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ 2)* $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$

3) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ 3)* $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$

4) $m \log_a x = \log_a x^m$ 4)* $\log_a x^m = m \log_a |x|$ (m – четное)

5) $\frac{1}{m} \log_a x = \log_{a^m} x$ 5)* $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_{|a|} x$ (m – четное)

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

7) Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$.

9.1. Логарифмические уравнения

Задачи

Решите уравнения:

1. $\log_7(2x^2 - 5x + 31) = 2$. **2.** $\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$.

3. $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$. **4.** $\log_2 \log_3 x = 1$.

5. $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} x = -1$. **6.** $4^{\log_x \frac{1}{3} - 1} = 0{,}5$.

7. $\log_x(3 - 2\sqrt{2}) = 2$. **8.** $\log_{x^3-19} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

9. $\log_{x+2} 5 = 4$. **10.** $\log_x(36\sqrt[3]{36}) = \frac{8}{3}$. **11.** $2^{\frac{3}{\log_2 x}} = \frac{1}{8}$.

12. $\log_3 \dfrac{x+1}{x} = \log_3 \dfrac{x}{2-x}$. **13.** $\log_4(x^2 + 3x - 4) = \log_4 \dfrac{x-1}{x+4}$.

14. $\log_{\frac{x+5}{3}} 3 = \log_{\frac{-1}{x+1}} 3$. **15.** $\log_{x^2-6x+8} \log_{2x^2-2x-8}(x^2+5x) = 0$.

16. $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2}$. **17.** $\log_3 \log_8 \log_2(x - 5) = \log_3 2 - 1$.

18. $2^{\log_6(-2x)} = \log_3 81$. **19.** $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5{,}5$.

20. $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{8}} x = \frac{16}{3}$. **21.** $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$.

22. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$. **23.** $3\log_x 16 - 4\log_{16} x - 2\log_2 x$.

24. $\lg x - \lg 3 = \lg(x+2) - \lg(x^2-4)$.

25. $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 81\log_{9x^2} x^2 = 2$.

26. $\lg(x+5) - \lg(3x+25) = \lg(x-15) - \lg 17$.

27. $\dfrac{1}{5-4\lg x} + \dfrac{4}{1+\lg x} = 3$. **28.** $\lg(7x-9)^2 + \lg(3x-4)^2 = 2$.

29. $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$.

30. $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$.

31. $\dfrac{1}{\lg^2 x} + \dfrac{\lg^2 x - 29}{100} = 0$. **32.** $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$.

33. $\log_5^2 x + \log_{5x} \frac{5}{x} = 1$. **34.** $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 + 1 = 0$.

35. $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$. **36.** $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

37. $4^{\log_5 x^2} - 4^{\log_5 x+1} + 4^{\log_5 x-1} = 1$.

38. $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}$. **39.** $x^{1+\lg x} = 100$.

40. $x^{1-\lg x} = 0{,}01$. **41.** $x^{\log_2 x+2} = 256$. **42.** $x^{\log_3 3x} = 9$.

43. $x^{\log_3 x-4} = \frac{1}{27}$. **44.** $\log_3(5x-2) - 2\log_3\sqrt{3x-1} = 1 - \log_3 4$.

45. $(x+1)\lg\sqrt[3]{3^{5x-2}} = \lg 9$.

46. $\log_5\sqrt{y-7} - \log_5 10 + \log_5\sqrt{2y+3} = 0$.

47. $2x - \lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 4^x$.

48. $\lg(2^{x+1} + 3) = (x-1)(\lg 5 - 1)$.

49. $\log_2 182 - 2\log_2\sqrt{4-x} = \log_2(10-x) + 1$.

50. $\dfrac{\lg(\sqrt{2x+5}+1)}{\lg\sqrt[5]{x-4}} = 5$.

51. $2\lg 2 + (1 + \frac{1}{2x})\lg 3 - \lg(3^{\frac{1}{x}} + 27) = 0$.

52. $\log_2(2-x)-\log_2(2-\sqrt{x})=\log_2\sqrt{2-x}-\frac{1}{2}$.

53. $0{,}5\log_3(-x-16)-\log_3(\sqrt{-x}-4)=1$.

54. $9^{\log_{25}x^2}+\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\frac{1}{2}(9^{\log_{25}x+1}-9^{\log_{25}x})$.

55. $\dfrac{1}{5+\lg x}+\dfrac{2}{1-\lg x}=1$. 56. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$.

57. $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$. 58. $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$.

59. $\log_3 x\log_9 x\log_{27}x\log_{81}x=\frac{2}{3}$.

60. $1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4$. 61. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10$.

62. $\log_{3x}(\frac{3}{x})+\log_3^2 x=1$. 63. $x^{\lg x+7}=10^{4(\lg x+1)}$.

64. $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$. 65. $27\cdot x^{\log_{27}x}=x^{\frac{10}{3}}$.

66. $x^{\log_3 x}=9$. 67. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

68. $2-6^{\frac{1}{2}+\log_6\sin x}=2^{\frac{1}{2}+\log_2\cos x}$.

9.2. Логарифмические неравенства

Решите неравенства:

1. $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$. 2. $\log_5(x^2-2x-3)>1$.

3. $\log_x\dfrac{1-2x}{x}\leqslant 0$. 4. $\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_2(x-3)}<0$.

5. $\log_2(2x-1)>-2$. 6. $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)\geqslant 0$.

7. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>-1$. 8. $\lg(x^2-5x+7)<0$.

9. $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0$. 10. $\log_{0,5}\dfrac{x-4}{x+3}\leqslant -2$.

11. $\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1}>0$. 12. $\dfrac{\log_2(x-1)}{x-3}\leqslant 0$.

13. $\log_5(5x^2+6x+1)\leqslant 0$. 14. $\log_5(x^2-11x+43)>2$.

15. $\dfrac{x-5}{\log_3(x-2)}\geqslant 0$. 16. $\dfrac{\sqrt{x-0{,}5}}{\log_3 x^2}\geqslant 0$.

17. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x+1}{x+1}>-1$. 18. $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2+4x}{2x-3}<1$.

19. $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$.

20. $\log_{\frac{1}{6}}(x^2-3x+2)<-1$.

21. $(x-3)\log_{\frac{1}{7}}(x+8)\geqslant 0$.

22. $(x+1)\log_4(x+4)<0$.

23. $\sqrt{x^2-4}\cdot\left(\log_2(1-x)-3\right)<0$.

24. $(x-6)\log_5(x-3)>0$.

25. $(x-1)\log_{\frac{1}{5}}(x+7)\leqslant 0$.

26. $\log^2_{0,5}(2x-1)\geqslant 9$.

27. $\log^2_{0,2}(x-1)>4$.

28. $\sqrt{4-x^2}\cdot\left(\log_3\frac{x+1}{x}+2\right)\leqslant 0$.

29. $\log_2(x^2-4x-5)\leqslant 4$.

30. $\log_3(1-2x)\geqslant\log_3(5x-2)$.

31. $\log_5(1-x)<\log_5(x+3)$.

32. $\log_5(x^2-x-2)<\log_5(3-x^2+2x)$.

33. $\log_{0,5}(x^2+1)\leqslant\log_{0,5}(2x-5)$.

34. $\log_{\frac{1}{3}}(8-x)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+4}{2x-3}$.

35. $\log_{\frac{1}{2}}(x+5)^2>\log_{0,5}(3x-1)^2$.

36. $\log_{0,7}(x-2)>\log_{0,7}(3x-4)$.

37. $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}}x+\log_{\frac{1}{3}}x<6$.

38. $\log_{0,5}(x+0{,}5)+\log_{0,5}x\geqslant 1$.

39. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_3 5<\log_3(x+2)$.

40. $\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+1}{x-1}\geqslant 0$.

41. $\log_{0,1}\log_2\frac{x^2+1}{x-1}<0$.

42. $\log_{0,5}\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}\leqslant 0$.

43. $5^{\log_3\frac{2}{x+2}}\leqslant 1$.

44. $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}$.

45. $\lg^2 x-\lg x-2\geqslant 0$.

46. $\log^2_2(x-1)-\log_{0,5}(x-1)>2$.

47. $\log^2_{0,5}x+\log_{0,5}x-2\leqslant 0$.

48. $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 x-2}<\dfrac{2}{\log_2 x+6}$.

49. $\dfrac{1}{1+\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}>2$.

50. $5\log_{0,5}x\leqslant 6+\log^2_{0,5}x$.

51. $\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)+6$.

52. $\log_2 x\leqslant\dfrac{2}{\log_2 x-1}$.

Найдите область определения функции:

53. $y=\sqrt{\log_{0,3}\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)}$.

54. $y=\sqrt{\lg(x^2-7x+13)}$.

55. $y=\sqrt{\lg(0{,}25(5x-x^2))}+\sqrt{\lg(|x|-1)}$.

56. При каких a уравнение

$$\left((\log_{\sqrt{11}}(2\lg a-x))\log_x\sqrt{11}+1\right)\log_{\sqrt{11}}x=2$$

имеет решение? Найдите решение при $a=10^6$.

57. Для всех допустимых значений параметра a найдите решение неравенства $\log_a(x-2)+\log_a x<1$.

10. Векторная алгебра

Основные сведения и формулы

Способы задания вектора:

1) Координатная форма $\overline{a}=(1;2;5)$ или $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$

2) Длина + направление $|\overline{a}|$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

3) Начало + конец $A(2;6;4)$, $B(3;8;9)$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=(1;2;5)$

Длина вектора $|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

Направляющие косинусы $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\overline{a}|}$, $\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\overline{a}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\overline{a}|}$

Скалярное произведение, две формы записи:

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Угол между векторами $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$

Условие ортогональности: $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Коллинеарность векторов: $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$ или $\overline{a}=k\overline{b}$,

при $k>0$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены,

при $k<0$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены.

Задачи

1. Даны точки $M_1(3,8,1)$ и $M_2(-1,2,-3)$. Найдите длину вектора $\overline{M_1M_2}$ и косинусы углов, которые образуют этот вектор с осями координат.

2. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 8\bar{k}$ и $\bar{b} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$. Найдите длины векторов $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$.

3. Даны точки $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$ и $C(0, 0, 5)$. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

4. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = -2\bar{j} + \bar{k}$.

5. Даны точки $A(2, 4, 0)$, $B(1, -2, 3)$ и $C(m, 5, -2)$, где m — неизвестная абсцисса точки C. Найдите m, если известно, что вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен вектору $\overline{AC}$.

6. Найдите вектор $\bar{a}$, сонаправленный с вектором $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 100$, $\bar{b} = (12, -16, -15)$.

7. Найдите вектор $\bar{a}$, параллельный вектору $\bar{b} = (3, 6, 6)$ и удовлетворяющий условию $\bar{a} \cdot \bar{b} = 27$.

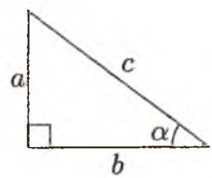
8. При каком значении параметра m векторы $(\bar{a} + \bar{b})$ и $\bar{c}$ параллельны, если $\bar{a} = (-1, 2, 1)$, $\bar{b} = (5, 4, m)$, $\bar{c} = (2, 3, -1)$?

9. Найдите вектор $\bar{b}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a} = (-2, -1, 1)$ и $\bar{d} = (3, 5, -2)$, а скалярное произведение $\bar{b} \cdot \bar{c} = 3$, где $\bar{c} = (1, -1, 2)$.

11. Планиметрия

Основные сведения и формулы планиметрии

1) *Прямоугольный треугольник*



Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ab$

Радиус вписанной окружности $r = \dfrac{a + b - c}{2}$

Радиус описанной окружности $R = \frac{c}{2}$

2) В *правильном треугольнике* со стороной a высота, радиусы описанной и вписанной окружностей и площадь соответственно равны:

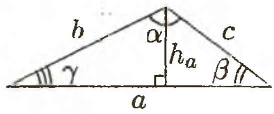
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

3) *Произвольный треугольник*

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=pr=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

где p — полупериметр.

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$



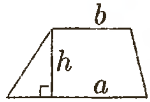
Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

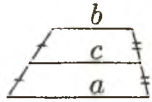
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

4) *Трапеция:*

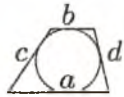
$S=\dfrac{a+b}{2}h$ средняя линия $c=\dfrac{a+b}{2}$





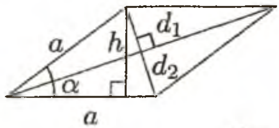
В окружность можно вписать только равнобокую трапецию.

Вписать окружность в трапецию можно, только если выполняется условие $a+b=c+d$



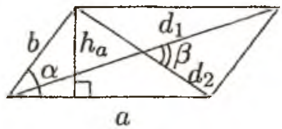
5) *Ромб*

$S=ah=a^2\sin\alpha=\dfrac{d_1d_2}{2}$



6) *Параллелограмм*

$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$



7) *Окружность* радиуса R:

площадь круга $S=\pi R^2$

длина окружности $C=2\pi R$

Задачи

1. В равнобедренную трапецию, площадь которой равна 20, а синус одного из углов равен 0,8, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса BM. Найдите площадь треугольника ABC, если синус угла A равен 0,8, а площадь треугольника CBM равна 8.

3. В круг с площадью 169π вписана равнобедренная трапеция, меньшее основание которой равно 10. Найдите площадь трапеции, если центр описанного круга лежит на ее большем основании.

4. В равнобедренную трапецию, площадь которой равна 80, вписана окружность радиуса 4. Найдите периметр трапеции.

5. Площадь ромба $ABCD$ с острым углом B равна 540, а синус угла B равен 0,6. Из вершины C проведена высота CE, которая пересекает диагональ BD в точке M. Найдите длину отрезка CM.

6. В треугольнике один из углов равен 40°. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

7. Прямоугольный треугольник вписан в окружность с радиусом $\sqrt{3}$. Найдите длину высоты, опущенной на гипотенузу, если известно, что один из катетов равен радиусу описанной окружности.

8. В равнобедренном треугольнике основание равно 60 см, а боковая сторона — 50 см. Найдите радиус описанной окружности.

9. Две стороны треугольника равны соответственно 30 см и 40 см, а длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 25 см. Найдите площадь треугольника.

10. Найдите площадь треугольника MPK если $MP = 15$ см, $MK = 7$ см, а длина медианы ME равна 10 см.

11. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 16 и составляет с большим основанием угол, равный 60°. Средняя линия трапеции равна 28. Найдите большее основание трапеции.

12. Найдите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, если известно, что площадь трапеции равна 180, а радиус вписанной в трапецию окружности равен 6.

13. Найдите длину отрезка, параллельного основанию и делящего

трапецию на две части одинаковой площади, если известно, что основания трапеции равны 1 м и 7 м.

14. Сумма длин оснований трапеции равна 20 см, а длины диагоналей равны 13 см и 21 см. Найдите площадь трапеции.

15. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если известно, что $BK = 2{,}7$ см, а $KC = 2{,}3$ см.

16. Площадь правильного шестиугольника равна $18\sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной окружности.

17. Площадь правильного двенадцатиугольника равна 75. Найдите радиус описанной окружности.

18. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки, равные 6 см и 10 см. Найдите длину гипотенузы.

19. Квадрат $ABCD$ и правильный треугольник ABK имеют общую сторону, причем точка K лежит вне квадрата. Найдите угол CKD.

20. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R, а другие — на касательной к этой окружности. Найдите сторону квадрата.

21. В прямоугольнике диагонали пересекаются под углом $60°$, а сумма диагонали и меньшей стороны равна 36. Найдите площадь прямоугольника.

22. В ромб с острым углом $45°$ вписана окружность радиуса 2. Найдите произведение диагоналей.

23. Если сходственные стороны подобных треугольников равны 2 и 5, и площадь первого треугольника равна 8, то чему равна площадь второго треугольника?

24. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 18$, а боковая сторона равна 15. На стороне AB выбрана точка K, а на стороне BC — точка M, причем $AK : AM : MC = 5 : 3 : 5$. Найдите площадь четырехугольника $AKMC$.

25. Сумма двух углов, смежных с углом α, равна $80°$. Найдите величину угла α.

26. Величина одного из углов треугольника равна $20°$. Найдите острый угол между биссектрисами двух других углов этого треугольника.

27. Если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ дано, что $\angle A = 90°$ и $\angle B = 130°$, то чему равен острый угол между биссектрисами двух других углов?

28. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 6. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

29. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 2, а острый угол равен $60°$. Найдите гипотенузу.

30. Высота, проведенная из вершины прямого угла треугольника, делит угол в отношении $1:2$. Найдите отношение площадей полученных треугольников.

31. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 3, а радиус окружности, которая касается гипотенузы и продолжений катетов за вершины острых углов, равен 18. Найдите больший катет треугольника.

32. В треугольнике ABC заданы длины сторон $AB = 6$, $BC = 1$ и $AC = 8$. Найдите синус угла B.

33. Одна из диагоналей параллелограмма длиной $4\sqrt{6}$ составляет с основанием угол $60°$, а вторая диагональ составляет с тем же основанием угол $45°$. Найдите вторую диагональ.

34. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{13}$, а радиус описанной окружности равен 32,5. Найдите площадь треугольника.

35. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точной касания на отрезки длиной 6 и 8. Найдите радиус описанной окружности.

36. Основание треугольника равно 20, медианы боковых сторон равны 18 и 24. Найдите площадь треугольника.

37. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$ и $\angle ADC = 78^\circ$. Найдите угол CAD.

38. Из точки B, взятой на окружности, проведены диаметр BC и хорда BA, которая стягивает дугу в 46°. Найдите угол между диаметром и хордой.

39. Точка P удалена на расстояние 7 от центра окружности радиуса 11. Через эту точку проведена хорда длиной 18. Найдите длину большего из отрезков, на которые делится эта хорда точкой P.

40. В параллелограмме с периметром 84 высоты относятся как 3:4. Найдите меньшую сторону.

41. Стороны параллелограмма равны $\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$. Больший угол между диагоналями равен большему углу параллелограмма. Найдите модуль разности длин диагоналей.

42. В трапеции $ABCD$ дано: $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$ и $AC = CD$. Найдите площадь трапеции.

43. В равнобедренную трапецию площадью 255 вписана окружность радиуса 7,5. Найдите большее основание трапеции.

44. В трапеции $ABCD$ длины оснований равны 9 и 12, а длины диагоналей равны 10 и 12. Найдите площадь трапеции.

45. В трапеции $ABCD$ заданы основания $BC = 20$, $AD = 30$ и боковые стороны $AB = 6$, $CD = 8$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся стороны CD.

46. В выпуклом четырехугольнике диагонали равны 4 и 7. Длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны. Найдите площадь четырехугольника.

12. Стереометрия

<u>Основные сведения и формулы стереометрии</u>

Пирамида $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$ $S_{\text{п}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

Призма $V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H$ $S_{\text{п}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$

Площадь боковой поверхности находить как сумму площадей боковых граней.

Основные теоремы пирамиды:

1) Если все боковые ребра пирамиды равны или наклонены к плоскости основания под равными углами, то высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности.
2) Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под равными углами, то высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности.

	Цилиндр	Конус	Шар
V	$V=\pi R^2 H$	$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
$S_{\text{бок}}$	$S_{\text{бок}}=2\pi RH$	$S_{\text{бок}}=\pi Rl$	—
$S_{\text{п}}$	$S_{\text{п}}=2\pi R(R+H)$	$S_{\text{п}}=\pi R(R+l)$	$S_{\text{п}}=4\pi R^2$

<u>Задачи</u>

12.1. Призма

1. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Определите объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна d.

2. Основанием прямой призмы служит прямоугольник. Определите объем призмы, если диагональ призмы, равная d, составляет с боковыми гранями углы α и β.

3. В правильной треугольной призме проведена плоскость через сторону нижнего основания и через середину противоположного бокового ребра. Площадь полученного сечения равна Q, а угол при его вершине α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

4. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух боковых граней, проведенных из одной вершины, равен α. Определите сторону основания призмы.

5. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b и угол между ними равен α. Диагональ боковой грани, противолежащей углу α, составляет со смежной боковой гранью угол β. Найдите объем призмы.

6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с боковым ребром угол α. Найдите объем параллелепипеда, если периметр основания равен p.

7. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании равен α. Определите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей ее оснований.

8. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром угол α. Найдите объем призмы.

9. Высота правильной четырехугольной призмы равна H. Из одной вершины основания проведены в двух смежных боковых гранях

две диагонали, угол между которыми равен α. Определите площадь боковой поверхности призмы.

10. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Найдите объем призмы, если сумма длин диагоналей ромба равна m.

11. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и плоскостью другой боковой грани равен α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ребро основания равно a.

12. Через диагональ нижнего основания правильной четырехугольной призмы и противоположную вершину верхнего основания призмы проведена плоскость. Угол между равными сторонами сечения равен α. Найдите отношение высоты призмы к стороне основания.

13. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, пересекающая верхнее основание и делящая объем куба в отношении $m{:}n$, считая от нижнего основания. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания куба.

14. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый угол α. Найдите площадь сечения, образованного этой плоскостью.

15. Углы между диагональю прямоугольного параллелепипеда и сторонами его оснований равны α и β. Найдите объем параллелепипеда, если диагонали его оснований равны l.

12.2. Треугольная пирамида

16. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a

и составляет с боковым ребром угол α. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро пирамиды и ее высоту.

17. Объем правильной треугольной пирамиды равен V, а высота образует с боковой гранью угол α. Найдите сторону основания пирамиды.

18. Длина перпендикуляра, опущенного из вершины основания правильной треугольной пирамиды на противоположную грань, равна d. Апофема боковой грани образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

19. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру. Найдите площадь сечения, если высота исходной пирамиды равна H и образует с боковым ребром угол α.

20. В треугольной пирамиде все грани – правильные треугольники. Через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении 1:3, считая от основания. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

21. Боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно к ее основанию, два других боковых ребра имеют одинаковую длину l и наклонены к основанию под углом α. Боковая грань, содержащая равные боковые ребра, образует с основанием угол β. Найдите объем пирамиды.

22. В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания равны a. Вычислите объем пирамиды, если угол между равными сторонами основания равен α.

23. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине равны α, α и β. Боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

24. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к основанию под одинаковыми углами β. Найдите объем пирамиды.

25. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

26. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найдите этот угол, если гипотенуза основания равна c, а объем пирамиды равен V.

27. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, радиусы описанной и вписанной окружностей которого равны соответственно R и r. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

12.3. n-угольная пирамида

28. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

29. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания, равную a, проведена плоскость, перпендикулярная апофеме противоположной боковой грани. Найдите площадь сечения, если боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α.

30. Через вершину правильной четырехугольной пирамиды под углом β к плоскости основания проведена плоскость, параллельная стороне основания и пересекающая основание. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α.

31. Двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α. Высота пирамиды равна H. Найдите радиус описанного шара.

32. Пирамида имеет в основании квадрат. Из двух противоположных друг другу ребер одно перпендикулярно к плоскости основания, а другое наклонено к ней под углом α и имеет длину l. Определите длины остальных ребер и углы их наклона к плоскости основания.

33. Основанием пирамиды служит параллелограмм, диагонали которого пересекаются под углом α. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма и равна H. Неравные боковые ребра образуют с плоскостью основания углы β и γ. Найдите объем пирамиды.

34. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны a, а острый угол α. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ.

12.4. Круглые тела. Конус. Цилиндр

35. Тупоугольный треугольник, острые углы которого равны α и β и меньшая высота равна h, вращается около стороны, противолежащей углу β. Найдите площадь поверхности тела вращения.

36. Треугольник ABC, у которого угол при вершине A тупой и равен α, а угол при вершине B равен β, вращается вокруг стороны AB, равной c. Найдите объем тела вращения.

37. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и сторону квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Определите объем и полную поверхность конуса.

38. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

39. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его образующей и высоты равна m. Найдите объем конуса.

40. В конусе, радиус основания которого равен R, проведена плоскость через вершину конуса под углом β к его высоте. Найдите площадь полученного сечения, если образующая конуса наклонена к основанию под углом α.

41. В основании конуса хорда длиной a стягивает дугу 2α. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен φ. Найдите объем конуса и площадь его полной поверхности.

42. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к его основанию, пересекающая основание по хорде длиной a. Найдите площадь полученного сечения, если образующая конуса наклонена к основанию под углом α.

43. В конусе через его вершину и хорду основания проведено сечение. Длина хорды равна a, меньшая дуга, стягиваемая этой хордой, равна α. Определите полную поверхность конуса, если угол между образующими сечения равен β.

44. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус, вершина которого совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие конусов взаимно перпендикулярны. Найдите объем вписанного конуса.

45. В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

46. Найдите синус угла между образующей и высотой конуса, если боковая поверхность конуса есть среднее геометрическое площади основания и полной поверхности.

47. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найдите объем меньшего конуса, если касательные к окружности меньшего основания, проведенные из точки окружности большего основания, образуют угол α.

48. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите ребро равновеликой правильной треугольной призмы, если высота призмы равна стороне ее основания.

49. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом α, обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V. Найдите высоту цилиндра.

50. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, зная, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 3:2.

13. Текстовые задачи

Задача. Смешали два одинаковых количества двух различных растворов соли и добавили 10 мл воды, в результате получили 30% раствора соли. Если бы вместо воды взяли 10 мл 5%-го раствора соли, первого раствора столько же, а второго раствора взяли в 2 раза больше, чем в первый раз, то получился бы раствор 42% концентрации. Найдите в процентах концентрацию первого из двух первоначальных растворов, если известно, что она в два раза ниже, чем концентрация второго раствора.

Решение.

Обозначим через x — первоначальное количество первого раствора и $p\%$ — его концентрацию. Решение оформим в виде двух таблиц. В первой таблице представлен результат первого смешивания.

	Количество	Концентрация	Сухая соль
I раствор	x	$p\%$	$\frac{p}{100}\cdot x$
II раствор	x	$2p\%$	$\frac{2p}{100}\cdot x$
Вода	10	0%	0
Смесь	$2x+10$	30%	$0{,}3(2x+10)$

Масса сухой соли в таблице получается умножением массы раствора на концентрацию. Массы смешиваемых растворов складываются в последней строке таблицы. Последний столбец таблицы дает уравнение на искомые неизвестные:

$$\frac{p}{100}\cdot x+\frac{2p}{100}\cdot x+0=0{,}3(2x+10) \qquad \text{или} \qquad px=20x+100.$$

Во второй таблице представлен результат второго смешивания.

	Количество	Концентрация	Сухая соль
I раствор	x	$p\%$	$\frac{p}{100}\cdot x$
II раствор	$2x$	$2p\%$	$\frac{2p}{100}\cdot 2x$
Вода	10	5%	0,5
Смесь	$3x+10$	42%	$0{,}42(3x+10)$

Последний столбец таблицы даст второе уравнение:

$$\frac{p}{100}\cdot x+\frac{2p}{100}\cdot 2x+0{,}5=0{,}42(3x+10) \qquad \text{или} \qquad 5px=126x+370.$$

Получили систему из двух неизвестных:

$$\begin{cases} px=20x+100, \\ 5px=126x+370. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 5 и вычтем из второго, получим уравнение $0=26x-130$, откуда $x=5$. Тогда из первого уравнения найдем $p=40\%$.

Ответ: 40.

13.1. Задачи на движение

1. Моторная лодка, обладая скоростью движения 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно без остановки за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами 60 км. Найти скорость течения реки.

2. Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через один час. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 ч 20 мин. Определить скорость лодки и парусника.

3. Выйдя со станции с опозданием в 20 мин, поезд покрыл перегон в 160 км со скоростью, превышающей скорость по расписанию на 16 км/ч и пришел к концу перегона вовремя. Какова по расписанию скорость поезда на этом перегоне?

4. Катер прошел по течению реки расстояние от пункта A до пункта B за 3 ч, а от B до A за 5 ч. За сколько часов проплывет от A до B плот?

5. Из пункта A в пункт B, расположенный в 24 км от A, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт B на 4 ч раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал со скоростью, меньшей на 4 км/ч, то на путь из A в B он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

6. Два спортсмена бегут по замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна. На пробег всей дорожки один тратит на 25 с меньше другого. Начиная пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, они оказываются рядом через 2 мин 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут с общего старта одновременно в противоположных направлениях?

7. Два спортсмена начали пробег с общего старта по замкнутой

дорожке стадиона на дистанцию 3,2 км. Один из них проходит каждый круг на 10 с быстрее второго. Когда победитель пришел к финишу, другому осталось бежать еще целый круг. Найти длину дорожки, если победитель закончил дистанцию за 9 мин 20 с.

8. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом через каждые 56 мин. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 8 мин. За какое время проедет кольцевую трассу каждый автомобиль?

13.2. Задачи на работу

9. Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

10. Первый рабочий может выполнить некоторую работу на 4 ч раньше, чем второй. Вначале они 2 ч работали вместе, после чего оставшуюся работу выполнил один первый рабочий за час. За какое время может выполнить всю работу второй рабочий?

11. Первый тракторист вспахивает поле на 2 ч быстрее второго, а вместе они вспахивают то же поле за $1\frac{7}{8}$ ч. За сколько часов вспашет поле один второй тракторист?

12. Кинозал имеет два выхода. После просмотра фильма зрители могут выйти только через первый выход за 3 мин, а только через второй — за 1 мин. За сколько секунд зрители выйдут из кинозала, если будут открыты оба выхода?

13. Два грузовика, работая вместе, должны были перевезти груз за 6 ч. Так как второй опоздал к началу работы, то к его приезду первый перевез уже 3/5 всего груза. Остальную часть груза перевез только второй грузовик, и потому перевозка груза заняла 12 ч. За какое время этот груз мог перевезти каждый грузовик, работая отдельно?

14. Рукопись в 120 стр. отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет печатать через 1 час после второй, то каждая из них напечатает по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 4 час останутся ненапечатанными 32 стр. За какое время может перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

13.3. Задачи на десятичное представление числа

15. Шестизначное число начинается с цифры 2. Если ее перенести с первого места на последнее, сохраняя порядок остальных цифр, то новое число будет втрое больше исходного. Найти исходное число.

16. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном будет 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

17. Если из трехзначного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, получится 297. Цифра десятков этого числа есть среднее геометрическое цифр его сотен и единиц. Найти это трехзначное число.

18. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном будет 3, а в остатке 5. Найти это число.

19. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

13.4. Задачи на проценты

20. Цена товара увеличилась на 25%. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную цену?

21. Население поселка увеличилось за два года на 10,25%. Найти средний ежегодный прирост населения.

22. В результате повышения производительности труда на 35% цех стал выпускать в день 405 изделий. Сколько изделий в день цех вы пускал ранее?

23. Шестьдесят экземпляров первого тома и семьдесят пять второго стоят 4050 руб. В случае 15%-й скидки на первый том и 10%-й — на второй за то же количество книг пришлось бы уплатить 3555 руб. Сколько стоит один экземпляр каждого тома книги?

24. При продаже двух антикварных изделий, приобретенных магазином за 225 руб., получено 40% прибыли, причем при продаже первого изделия получено 25% прибыли, а второго — 50% прибыли. Определить цену изделий, по которой их приобрел магазин.

25. Вкладчик на свои сбережения в банке получил через год 15 руб. начисления процентных денег. Добавив 85 руб., он оставил деньги еще на год. По истечении года вклад с процентами составил 420 руб. Какая сумма была положена в банк первоначально, и какой процент дает банк в год?

26. Сумма квадратов двух чисел равна 325. Если первое число уменьшить на 70%, а второе — на 40%, то сумма полученных чисел будет равна 12. Найти значения чисел после уменьшения.

27. В двух кусках 24 м ситца. Сколько ситца в первом куске, если 15% первого равны 75% второго?

28. Если числитель дроби увеличить на 12%, а знаменатель уменьшить на 30%, то на сколько процентов увеличится дробь?

29. Частное 2-х чисел равно 2. Если делимое увеличить на 50%, а делитель уменьшить на 25%, то сумма полученных чисел равна 15. Найти делимое.

30. В трех ящиках 48 кг сахара. Во втором ящике 80%, в третьем ящике на 25% меньше, чем во втором ящике. Сколько сахара в первом ящике?

13.5. Задачи на смеси, сплавы и на разбавление

31. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

32. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

33. В сосуде было 10 л соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 64%-й раствор соляной кислоты?

34. Имеются два раствора поваренной соли различной концентрации. Если слить вместе 100 г первого и 200 г второго раствора, то получится 50%-й раствор. Если же слить 300 г первого и 200 г второго раствора, то получится 42%-й раствор. Определить концентрации этих растворов.

35. Из бака, наполненного чистым спиртом, вылили часть спирта и долили тем же количеством воды. Затем вылили столько же литров смеси. В баке осталось 49 л чистого спирта. Вместимость бака 64 л. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй?

36. Сколько килограммов воды нужно добавить к 30 кг 5%-го раствора соли в воде, чтобы получить 1,5%-й раствор?

37. В первом сплаве золота и серебра количество этих металлов находится в отношении 1:2, а во втором — в отношении 2:3. Сколько грамм первого сплава надо взять, чтобы получить 19 г сплава с отношением золота и серебра 7:12?

38. Смешали 20%-й раствор соли с 40%-м и добавили 5 кг воды, в результате чего получили 10%-й раствор. Если бы вместо воды добавили 5 кг 96%-го раствора соли, то получили бы 70%-й раствор. Сколько килограммов первого раствора было взято?

39. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

40. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля, 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта необходимо взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

14. Задачи с параметрами

1. При каких значениях параметра k квадратный трехчлен $y = (k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7$ можно представить в виде полного квадрата?

Решение.

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $a(x - x_0)^2$, если его корни равны $x_1 = x_2 = x_0$, т.е. $D = 0$. В данном случае $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = 0$. Решая последнее уравнение, получим $k = -\frac{22}{3}$ и $k = 2$.

Ответ: $k = -\frac{22}{3}$; $k = 2$.

2. Найдите значение параметра a, при которых неравенство $(2a+1)x^2+(a+2)x+\frac{3}{4} \geqslant 0$ выполняется при всех x.

Решение.

График квадратного трехчлена $y = ax^2+bx+c$ расположен не ниже оси Ox при выполнении условий:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leqslant 0. \end{cases}$$

В данной задаче эти условия имеют вид

$$\begin{cases} 2a+1 > 0 \\ (a+2)^2 - 3(2a+1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением последней системы является $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

3. При каких значениях параметра a все корни уравнения $ax^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$ отрицательны?

Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет один корень $x = -\frac{3}{2}$, который удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим случай $a \neq 0$. Для того, чтобы оба корня уравнения были отрицательны, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0. \end{cases}$$

Применяя теорему Виета, запишем эти условия в виде:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (a+1)^2 - a(a-3) \geqslant 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a-3}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{2(a+1)}{a} < 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a \in [-\frac{1}{5}; 0)$. Ответ задачи объединяет два случая.

Ответ: $a \in [-\frac{1}{5}; 0]$.

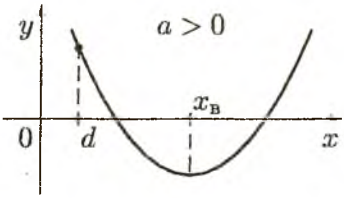
4. При каких значениях параметра a все корни уравнения
$ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$ больше 1?

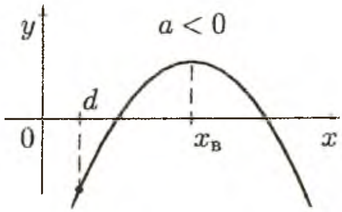
Решение.

При $a = 0$ уравнение имеет один корень $x = -1$, который требованиям задачи не удовлетворяет.

Рассмотрим случай $a \neq 0$. Заметим, что способ решения задачи 3 не может быть применим в данном случае, т.к. сравнение суммы и произведения корней с 1 являются необходимыми, но не достаточными условиями.

Опишем общий способ решения подобных задач. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ были больше числа d, необходимо и достаточно выполнения условий (см. рисунок):





$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ x_в = -\frac{b}{2a} > d \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

Аналогично, требование того, чтобы корни были меньше числа d, означает выполнение условий

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ x_в = -\frac{b}{2a} < d \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}$$

В данной задаче условия записываются в виде

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geqslant 0 \\ \frac{2a+1}{2a} > 1 \\ a(a - 2a - 1 + 3a - 1) > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

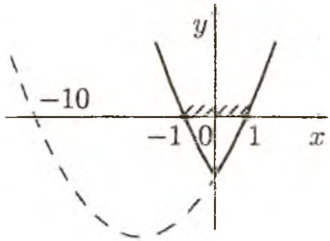
Очевидно, что тот же результат мы получили бы и решая неравенство $x_1 > 1$, где x_1 — меньший корень уравнения, однако такой способ является более сложным.

Ответ: $a \in \left(1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2(a-2)x + a - 2 \leqslant 0$ имеет решения и все они являются решениями неравенства $x^2 + 9|x| - 10 \leqslant 0$.

Решение.

Второе неравенство лучше решать графически, построив график квадратного трехчлена $y = x^2 + 9|x| - 10$ с учетом четности функции (график симметричен относительно оси Oy). Решением второго неравенства является отрезок $[-1; 1]$.

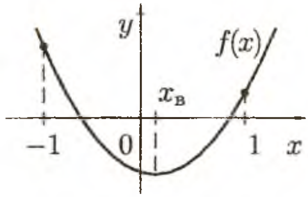


Первое неравенство будет иметь решения, если $D \geqslant 0$, причем, так как ветви параболы $f(x) = x^2 - 2(a-2)x + a - 2$ направлены вверх, решением будет являться отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — меньший и больший корни.

По условию задачи нужно записать необходимые и достаточные условия того, что $[x_1; x_2] \in [-1; 1]$ или $\begin{cases} x_1 \geqslant -1 \\ x_2 \leqslant 1. \end{cases}$

Такие условия имеют вид

$$\begin{cases} D \geqslant 0 \\ -1 \leqslant x_в \leqslant 1 \\ f(-1) \geqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \end{cases}$$



или в данном случае

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (a-2)^2 - (a-2) \geqslant 0 \\ -1 \leqslant a - 2 \leqslant 1 \\ f(-1) = 1 + 2(a-2) + a - 2 \geqslant 0 \\ f(1) = 1 - 2(a-2) + a - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

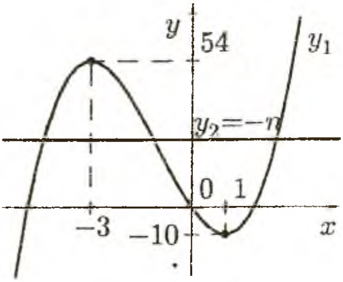
Решением системы является отрезок $\left[\frac{5}{3}; 2\right]$ и одна точка $a = 3$.

Ответ: $a \in \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup \{3\}$.

6. Найдите число корней уравнения $6x^2 + 2x^3 - 18x + n = 0$ в зависимости от параметра n.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $2x^3 + 6x^2 - 18x = -n$.
Построим на одном чертеже графики функций $y_2 = -n$ и схематичный график $y_1 = 2x^3 + 6x^2 - 18x$. Для этого найдем производную: $y_1' = 6x^2 + 12x - 18$ и критические точки $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Исследуя знаки производной, нетрудно убедиться, что $x_1 = -3$ — точка максимума, а $x_2 = 1$ — точка минимума, причем $y_{\max}(-3) = 54$; $y_{\min}(1) = -10$.



Функция y_1 возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$ и убывает на интервале $(-3; 1)$. Из рисунка видно, что исходное уравнение имеет три корня при $-10 < -n < 54$ или $-54 < n < 10$; два корня при $n = -54$ и $n = 10$; один корень при $n < -54$ и $n > 10$.

Ответ:	При	$n \in (-\infty; -54) \cup (10; +\infty)$	один корень,
	при	$n = -54$ и $n = 10$	два корня,
	при	$n \in (-54; 10)$	три корня.

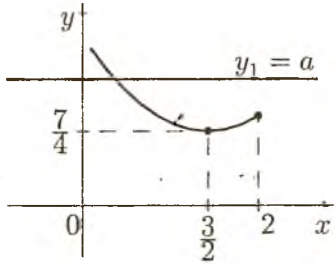
7. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{a - x} = 2 - x$ имеет единственное решение?

Решение.

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{cases} a = x^2 - 3x + 4 \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

Построим на одном чертеже графики функций $y_1 = a$ (прямая, параллельная оси Ox) и $y_2 = x^2 - 3x + 4$ (парабола) при условии $x \leqslant 2$. Передвигая на рисунке прямую $y_1 = a$, приходим к выводам, что уравнение имеет единственное решение при $a = \frac{7}{4}$ и $a > 2$.



Ответ: $a = \frac{7}{4}$; $a > 2$.

8. При каких значениях параметра a неравенство

$a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$ **не** выполняется ни при каких x?

Решение.

После замены $3^x = t$ $(t > 0)$ получаем квадратное неравенство $9t^2 + 8at - a^2 < 0$, корнями которого являются числа $t_1 = -a$; $t_2 = \frac{a}{9}$. Рассмотрим случаи:

1) если $a > 0$, то $t_1 < 0 < t_2$ и решением квадратного неравенства является интервал $-a < t < \frac{a}{9}$. С учетом $t > 0$ получаем неравенство: $3^x < \frac{a}{9}$, откуда $x < \log_3 a - 2$;
2) если $a = 0$, то после подстановки в исходное неравенство получаем $9^{x+1} < 0$, что невозможно;
3) если $a < 0$, то $t_2 < 0 < t_1$ и решением квадратного неравенства является интервал $\frac{a}{9} < t < -a$. С учетом $t = 3^x > 0$ получаем неравенство: $3^x < -a$, откуда $x < \log_3(-a)$.

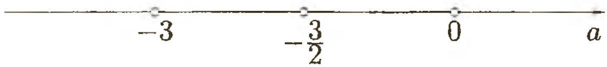
Ответ: $a = 0$.

9. При каких значениях параметра a неравенство

$4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} \geqslant a^2 + 3a$ выполняется при любых значениях x?

Решение.

Выполняя замену $t = 2^{x+1}$, получаем квадратное неравенство $t^2 - 3t - (a^2 + 3a) \geqslant 0$, корнями которого являются числа $t_1 = -a$; $t_2 = a + 3$. В отличие от задачи 8, в данном неравенстве придется рассмотреть большее число случаев. Изобразим их графически на рисунке, отметив точки, соответствующие уравнениям $t_1 = -a = 0$; $t_2 = a + 3 = 0$ и $D = (2a+3)^2 = 0$.



1) При $a \geqslant 0$ $t_1 \leqslant 0 < t_2$, решением квадратного неравенства является совокупность $\left[\begin{array}{l} 2^{x+1} < -a \\ 2^{x+1} > a+3. \end{array}\right.$

   Очевидно, что первое неравенство совокупности не имеет решений, а решением второго являются все $x > \log_2(a+3) - 1$.

2) При $-\frac{3}{2} < a < 0$ корни квадратного неравенства удовлетворяют условию $0 < t_1 < t_2$ и решением исходного неравенства является совокупность $\left[\begin{array}{l} x < \log_2(-a) - 1, \\ x > \log_2(a+3) - 1. \end{array}\right.$

3) При $a = -\frac{3}{2}$ получаем, что $t_1 = t_2 = \frac{3}{2}$, решением исходного неравенства является все $x \in R$.

4) При $-3 < a < -\frac{3}{2}$ корни квадратного неравенства удовлетворяют условию $0 < t_2 < t_1$ и решением исходного неравенства является совокупность $\left[\begin{array}{l} x < \log_2(a+3) - 1, \\ x > \log_2(-a) - 1. \end{array}\right.$

5) При $a \leqslant -3$ получаем, что $t_2 \leqslant 0 < t_1$ и аналогично случаю 1 получаем решение $x > \log_2(-a) - 1$.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

10. При каких допустимых значениях параметра a неравенство $x\,(x + \sqrt{4 - \log_a 6}\,) \geqslant \log_{\frac{1}{6}} 36a$ выполняется при любых действительных значениях x?

Решение.

Допустимые значения параметра a определяются системой

$\left\{\begin{array}{l} 4 - \log_a 6 \geqslant 0 \\ a > 0;\ a \neq 1, \end{array}\right.$ решением которой являются все $a \in (0;1) \cup [\sqrt[4]{6}; +\infty)$.

Исходное неравенство является квадратным относительно переменной x:
$$x^2 + \sqrt{4 - \log_a 6} \cdot x + (\log_6 a + 2) \geqslant 0.$$

График квадратного трехчлена, ветви которого направлены вверх, неотрицателен при выполнении условия $D \leqslant 0$, что приводит к неравенству $D = \left(4 - \frac{1}{\log_6 a}\right) - 4(\log_6 a + 2) \leqslant 0.$

Заменяя $\log_6 a = t$, после преобразований получим рациональное неравенство $\frac{(2t+1)^2}{t} \geqslant 0$, решением которого является интервал $t > 0$ и одна точка $t = -\frac{1}{2}$. Выполняя обратную замену, получаем $a > 1$ и $a = 1/\sqrt{6}$, что с учетом ОДЗ дает

Ответ: $a \in [\sqrt[4]{6}; +\infty)$ и $a = 1/\sqrt{6}$.

11. При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ больше единицы при всех x?

Решение.

Рассмотрим сумму логарифмов:

$$S = \log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\right) + \log_a\left(\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right) = \log_a\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right) + \log_a\left(4+\frac{1}{1+x^2}\right),$$

эта сумма имеет смысл при любых x. Заменим $t = \frac{1}{1+x^2}$, тогда очевидно, что $0 < t \leqslant 1$.

Составим неравенство $\log_a(2+t) + \log_a(4+t) > 1$ и найдем значения параметра a, при которых неравенство выполняется при всех $t \in (0; 1]$.

1) Если $a > 1$, то логарифмическая функция возрастает. Запишем равносильное неравенство

$$(2+t)(4+t) > a \quad \text{или} \quad t^2 + 6t + 8 - a > 0.$$

Абсцисса вершины параболы $f(t) = t^2+6t+8-a$ равна $t_{\text{в}} = -3$, ветви направлены вверх, следовательно, на интервале $(0; 1]$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Неравенство $f(t) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(0) \geqslant 0$, откуда $1 < a \leqslant 8$.

2) При $0 < a < 1$ исходное неравенство равносильно следующему:

$$f(t) = t^2 + 6t + 8 - a < 0.$$

Аналогично первому случаю, функция $f(t)$ монотонно возрастает на $(0; 1]$, поэтому необходимо и достаточно выполнения условия $f(1) < 0$, т.е. $1+6+8-a < 0$, $a > 15$. Полученный ответ не имеет пересечений с условием $0 < a < 1$.

Ответ: $a \in (1; 8]$.

12. При каких значениях параметра a сумма $\log_a(2^x - 1)$ и $\log_a(2^x - 7)$ равна единице ровно при одном x?

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются все $a > 0$, $a \neq 1$.
Составим уравнение $\log_a(2^x - 1) + \log_a(2^x - 7) = 1$.
Обозначая $t = 2^x > 0$, запишем систему, равносильную данному уравнению: $\begin{cases} (t-1)(t-7) = a \\ t > 7 \end{cases}$ или $t^2 - 8t + 7 - a = 0$.

Парабола $f(t) = t^2-8t+7-a$ имеет вершину в точке $t_в = 4$, ветви направлены вверх, корни расположены симметрично относительно вершины, поэтому условию $t > 7$ может удовлетворять только больший корень, которому и будет соответствовать единственное решение уравнения. Необходимым и достаточным условием того, чтобы больший корень был больше 7 является неравенство $f(7) < 0$ или $49 - 56 + 7 - a < 0$, откуда $a > 0$.

Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

13. При каких значениях параметра a значение выражения $1 + \cos x \cdot (5\cos x + a \sin x)$ будет равно нулю хотя бы при одном значении x?

Решение.

Уравнение $1 + \cos x \cdot (5\cos x + a \sin x) = 0$ после преобразований приводится к однородному $\sin^2 x + a \sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$, которое после деления на $\cos^2 x$ и замены $t = \operatorname{tg} x$ превращается в квадратное: $t^2 + at + 6 = 0$. Так как $t = \operatorname{tg} x$ может принимать любые значения, это уравнение будет иметь решения при условии $D \geqslant 0$ или $D = a^2 - 24 \geqslant 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6}; +\infty)$.

14. При каких значениях параметра a сумма $\log_{a+3}(\sin^2 x + 2)$

и $\log_{a+3}(\sin^2 x + 4)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются все $a > -3$, $a \neq -2$. Из уравнения $\log_{a+3}(\sin^2 x + 2) + \log_{a+3}(\sin^2 x + 4) = 1$ получим, что $(\sin^2 x + 2)(\sin^2 x + 4) = a + 3$.

Обозначим $\sin^2 x = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, тогда уравнение примет вид

$$f(t) = t^2 + 6t + (5 - a) = 0.$$

Условия задачи будут выполнены, если последнее уравнение будет иметь хотя бы один корень из отрезка $[0; 1]$ (в отличие от задачи 13, где корень мог быть любым числом). В данном случае исследование только дискриминанта недостаточно. Ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $t_{\text{в}} = -3$, следовательно, на отрезке $[0; 1]$ функция $f(t)$ монотонно возрастает. Для того, чтобы на $[0; 1]$ существовал корень, в силу непрерывности необходимо и достаточно, чтобы на концах отрезка $f(t)$ имела разные знаки $f(0) \cdot f(1) \leqslant 0$ или $(5 - a)(1 + 6 + 5 - a) \leqslant 0$. Решая последнее неравенство, получаем

Ответ: $a \in [5; 12]$.

15. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{1-a}\left(2 - \cos x + \sin\frac{x}{2}\right) = 2$ имеет решение.

Решение.

Область допустимых значений параметра определяется системой

$$\begin{cases} 1 - a > 0 \\ 1 - a \neq 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1).$$

По свойствам логарифмической функции перепишем уравнение в виде

$$2 - \cos x + \sin\frac{x}{2} = (1 - a)^2.$$

Заменяя $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ и полагая $t = \sin\frac{x}{2}$, получаем квадратное уравнение: $2t^2 + t + 2a - a^2 = 0$.

Это уравнение имеет решения, если $D = 8a^2 - 16a + 1 \geqslant 0$, откуда с учетом ОДЗ получаем $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; 1 - \frac{\sqrt{14}}{4}\right]$.

Найдем теперь, при каких значениях параметра a хотя бы один из корней этого уравнения будет принадлежать отрезку $[-1;1]$. Так как ветви параболы $f(t)=2t^2+t+2a-a^2$ направлены вверх, вершина находится в точке $t_в=-\frac{1}{4}$, то корни располагаются симметрично относительно точки $t=-\frac{1}{4}$. Поэтому, если меньший корень лежит в промежутке $[-1;1]$, то больший — тем более. Таким образом, достаточно выяснить, при каких значениях параметра a больший корень параболы окажется в промежутке $\left[-\frac{1}{4};1\right]$. Это будет в том и только в том случае, если $f(1)\geqslant 0$. Вычисляя $f(1)$, получаем неравенство $3+2a-a^2\geqslant 0$, которое справедливо при $a\in[-1;3]$. Пересекая этот промежуток с предыдущим, получаем

Ответ: $a\in[-1;0)\cup\left(0;1-\frac{\sqrt{14}}{4}\right]$.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{a-(5\operatorname{tg}x+\sqrt{3}\operatorname{ctg}x-1)}{(2\log_5(x(\pi-4x))+3)-a}\leqslant 0$ не имеет решений.

Решение.

1) Преобразуем неравенство к виду $\dfrac{a-f(\operatorname{tg}x)}{a-g(x)}\geqslant 0$, где

$g(x)=2\log_5(x(\pi-4x))+3$, $f(t)=5t+\dfrac{\sqrt{3}}{t}-1$, $t=\operatorname{tg}x\in(0;1)$,

так как $\begin{cases} x(\pi-4x)>0 \\ x\neq\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z, \end{cases} \iff 0<x<\frac{\pi}{4}$.

2) Исследуем функцию $f(t)$: ее производная

$f'(t)=5-\dfrac{\sqrt{3}}{t^2}=\dfrac{5(t-t_0)(t+t_0)}{t^2}$ равна нулю в точке

$t_0=\sqrt{\sqrt{3}/5}<1$, отрицательна при $0<t<t_0$ и

положительна при $t_0<t<1$, поэтому

$f_{наим}=f(t_0)=5\cdot\sqrt{\sqrt{3}/5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5/\sqrt{3}}-1=2\sqrt[4]{75}-1$.

3) Наибольшее значение функции g достигается в точке $x_0=\frac{\pi}{8}$ и равно $g_{наиб}=2\log_5\left(\frac{\pi}{8}(\pi-4\cdot\frac{\pi}{8})\right)+3=4\log_5\frac{\pi}{4}+3$.

4) При любом значении $0 < x < \frac{\pi}{4}$ справедлива оценка $g(x) < f(\operatorname{tg} x)$, так как $g(x) \leqslant 4\log_5 \frac{\pi}{4} + 3 < 3 = 2 \cdot 2 - 1 < 2\sqrt[4]{75} - 1 \leqslant f(\operatorname{tg} x)$, поэтому исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a < g(x) \\ a \geqslant f(\operatorname{tg} x) \end{array}\right. \quad \text{(при остальных } x \text{ оно не выполняется).}$$

5) Исходное неравенство не выполняется ни при одном значении x тогда и только тогда, когда выполняется

$g_{\text{наиб}} \leqslant a < f_{\text{наим}} \iff 4\log_5 \frac{\pi}{4} + 3 \leqslant a < 2\sqrt[4]{75} - 1.$

Ответ: $a \in \left[4\log_5 \frac{\pi}{4} + 3; 2\sqrt[4]{75} - 1\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

17. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y = ax^2 - (a+4)x + a + 2$ отрицателен при любых значениях x?

18. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $y = (a^2 - 1)x^2 + 2(a-1)x + 2$ не принимает отрицательных значений?

19. При каких значениях параметра a графики функций $y_1 = 2ax + 1$ и $y_2 = (a-6)x^2 - 2$ имеют только одну общую точку?

20. При каких значениях параметра a корни квадратного трехчлена $y = ax^2 - 3x + 5 - a$ положительны?

21. При каких значениях параметра a корни квадратного уравнения $(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$ отрицательны?

22. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $4a^2x^2 - 8ax + 4 - 9a^2 = 0$ больше 3?

23. При каком значении параметра a любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ по модулю не превосходит двух?

24. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ принадлежат интервалу $(2; 5)$?

25. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a-5)x^2-2ax+a-4=0$ меньше 1, а другой больше 2?

26. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2-2(a+4)x+18a \leqslant 0$ имеет решения и все они являются решениями неравенства $x^2-7|x|-8 \leqslant 0$.

27. Найдите число корней уравнения $-3x^2+x^3+9x=a$ в зависимости от значений параметра a.

28. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a}=x+1$ имеет единственное решение?

29. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{4x+a}=2x-1$ имеет два решения?

30. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{x}-\sqrt{a-x}=2$.

В зависимости от значений параметра a решите неравенства.

31. $a^2 \cdot 4^{2x+1}-5a \cdot 4^x+1>0$.

32. $a^2-2 \cdot 4^{x+1}-a \cdot 2^{x+1}>0$.

33. При каких допустимых значениях параметра a неравенство $x \cdot (9x+\sqrt{24-\log_a 2}\,) \geqslant \log_{0,5} 2a$ выполняется при любых x?

34. При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ и $\log_a\left(\frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ не равна единице ни при каких значениях x?

35. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{a-2}\left(\frac{17}{8}+\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)=3$ имеет решение?

36. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{a+1}\left(\frac{25}{8}+\cos x-2\sin\frac{x}{2}\right)=3$ имеет решение?

37. При каких значениях параметра a значение выражения $3+\sin x \cdot (2\sin x+a\cos x)$ будет равно -1 хотя бы при одном значении x?

38. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $[2;4)$ значение выражения $\log_2^2 x - 5$ не равно значению выражения $(a-2)\log_2 x$.

39. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $(0;\frac{1}{2}]$ значение выражения $4^{2x} + 4 \cdot 4^x$ не равно значению выражения $a \cdot 4^x + 6$.

40. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}]$ значение выражения $a^2 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x$ не равно значению выражения $2(2 - a \cdot \operatorname{tg} x)$.

41. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}]$ значение выражения $a^2 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x$ не равно значению выражения $2 - a \cdot \operatorname{tg} x$.

42. Найдите все положительные значения параметра a, при которых множество решений неравенства $a^{ax^2+3x} \cdot 16^{1,5x-6,75} \leqslant 8^{(3a+2)x}$ содержит числа, меньшие чем $-0{,}1$, но **не содержит** числа, большие чем 3.

43. Найдите все положительные значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $a^{ax^2+x} \cdot 81^{5,25x-1,5} \geqslant 27^{(2a+7)x}$ принадлежит отрезку $[-6;-3]$.

44. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{(4\sin\sqrt{x-8}-3)-a}{a-(\log_2 x + 7\sqrt{2}\log_x 2 - 5)} \leqslant 0$ не имеет решений.

45. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{(2^x + 3\sqrt{2}\cdot 2^{-x} - 5)-a}{a-(2\cos\sqrt{x-1}-3)} \leqslant 0$ не имеет решений.

15. Ответы

Алгебраические преобразования

1. $\frac{1}{a+b}$. **2.** $\frac{12}{2a+b}$. **3.** $m-n$.

4. 1. **5.** $\frac{2}{a-1}$. **6.** 0. **7.** $\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

8. $\frac{6-7a}{(a-2)^2}$ при $a \geqslant 1$; $\frac{7a-8}{a^2}$ при $a < 1$;

Алгебраические уравнения и неравенства

1. $\emptyset$. **2.** $-1; 3$. **3.** 2. **4.** $-1; \frac{1}{2}$. **5.** $1; -3$.

6. $3; 3 \pm 2\sqrt{5}$. **7.** $0; -3; \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. **8.** $2; 0{,}5$.

9. $2; 4$. **10.** 2. **11.** $-4; \frac{2}{3}$. **12.** $(-\infty; -3) \cup (-1; \frac{5}{3})$.

13. $[-2; -\frac{2}{3}) \cup [1; +\infty)$. **14.** $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$.

15. $(1; 3) \cup (3; 5)$. **16.** $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$.

17. $(-\infty; -1) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$. **18.** $[1; 2) \cup (3; 4]$.

19. $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$. **20.** $[2; 8]$.

21. $(-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$. **22.** $(-\infty; \frac{2}{3}]$. **23.** $(0{,}5; +\infty)$.

24. $[-2; 1]$. **25.** $(-3; 0] \cup [1; 3)$. **26.** $[2; 7] \cup [8; +\infty)$.

27. $[-2; 1]$. **28.** $[-5; -1] \cup \{0\} \cup [1; 5]$.

Иррациональные уравнения и неравенства

1. 20. **2.** 1. **3.** $\pm\sqrt{6};\ \pm\sqrt{11}$. **4.** 2. **5.** ± 4.

6. 4. **7.** 85. **8.** $0;\ 4$. **9.** 2. **10.** 5.

11. $(1; 3]$. **12.** $(0{,}5; 2]$. **13.** $[0; 2]$. **14.** $[4; +\infty)$.

15. $(-\infty; -\frac{7}{9})$. **16.** $(-\infty; -6] \cup (\frac{7}{3}; +\infty)$. **17.** $(5; +\infty)$.

18. $(-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup [4{,}5; +\infty)$.

Тригонометрия

1. $1;\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$. **2.** $\frac{3}{2};\ x \in R$. **3.** $0;\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

4. $\frac{2}{|\cos x|};\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. **5.** $1;\ x \in R$. **6.** $\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

7. $\frac{24}{25}$. **8.** $\frac{31}{49}$. **9.** $\frac{-2}{\sqrt{13}}$. **10.** $-\frac{24}{25};\ -\frac{24}{7}$.

11. $\frac{-23\sqrt{2}}{34}$. **12.** $\frac{15}{17};\ \frac{\pm 63}{17\sqrt{17}}$. **13.** $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

14. $\operatorname{arctg}(-2) + \pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$. **15.** $\pi + 2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

16. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **17.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. **18.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$.

19. $\frac{\pi}{4} + \pi k$. **20.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$.

21. $\pi + 2\pi k;\ \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. **22.** $\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \operatorname{arctg}(-0{,}4) + \pi n$.

23. $\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi k;\ \operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi n$. **24.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi n$.

25. $-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi n$. **26.** $\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$.

27. $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \pi n$. **28.** $\pi + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

29. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **30.** $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$. **31.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

32. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **33.** $\pi k;\ -\frac{\pi}{4} + \pi n$. **34.** $\emptyset$.

35. $\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + \pi n$. **36.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$,.

37. $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. **38.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \pi + 2\pi n$.

39. $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$. **40.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **41.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$.

42. $\pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi n$. **43.** $2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

44. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi n$. **45.** $2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

46. $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{15};\ 0{,}4(\operatorname{arctg} 5 + \pi n)$. **47.** $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.

48. $\pm 40^\circ + 120^\circ k$. **49.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. **50.** $\frac{\pi k}{5};\ \frac{\pi n}{7}$.

51. $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$. **52.** $\frac{\pi k}{3}$. **53.** $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

54. $\pi+2\pi k$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$. **55.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $2\pi n$.

56. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$. **57.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$.

58. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $-\frac{\pi}{3}+\pi n$. **59.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **60.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$.

61. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$. **62.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\operatorname{arctg}2+\pi n$.

63. $2\pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi m$. **64.** $\frac{\pi k}{3}$; $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$.

65. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **66.** 1; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **67.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

68. $\frac{5\pi}{48}+\pi k$; $\frac{17\pi}{48}+\pi n$; $\frac{7\pi}{24}+\pi m$.

69. $[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k)\cup(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n)$.

Производная и ее применение

1. $-\sin 2$. **2.** 0. **3.** $y=2-x$; $y=x-3$.

4. $3y=x-3$. **5.** $y=2x+3$; $y=3-2x$.

6. $M(1;-3)$; $y=2-5x$. **7.** $M_1(0;-1)$; $M_2(4;3)$.

8. $\frac{25}{12}$. **9.** $-\frac{1}{32}$ м/c^2. **10.** $y_{\max}(0)=2$; $y_{\min}(2)=-2$.

11. $y_{\max}(-1)=-2$; $y_{\min}(1)=2$. **12.** $y_{\min}(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

13. $y_{\max}(-2)=35$; $y_{\min}(-4)=-73$.

14. Возрастает при $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

15. Возрастает при $x\in[0;+\infty)$.

16. Возрастает при $x\in(-\infty;1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};+\infty)$; убывает при $x\in(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$.

17. Возрастает при $x\in(1;+\infty)$; убывает при $x\in(0;1)$.

18. $\max\limits_{[-1;3]} y=y(-1)=17$; $\min\limits_{[-1;3]} y=y(2)=-10$.

19. $\max\limits_{[0;\pi/3]} y=y(\frac{\pi}{3})=2$; $\min\limits_{[0;\pi/3]} y=y(0)=1$.

20. $\max\limits_{[0;3]} y = y(3) = 10;\ \min\limits_{[0;3]} y = y(2) = -15$.

21. $\max\limits_{[1;6]} y = y(1) = 129;\ \min\limits_{[1;6]} y = y(4) = 48$.

22. $\max\limits_{[0;2\pi]} y = y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2};\ \min\limits_{[0;2\pi]} y = y(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$.

Прогрессии

1. $\{1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\};\ \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\}$. **2.** 7. **3.** $a_1 = -5;\ d = 3$.

4. $\{b_1 = 7;\ q = -2\};\ \{b_1 = -56;\ q = -\frac{1}{2}\}$. **5.** $\{2; 4; 8\}$.

6. $\{2; 10; 50\},\ \{50; 10; 2\}$. **7.** $b_1 = 6;\ q = \frac{1}{2}$.

8. $b_1 = \frac{2}{3};\ q = \frac{2}{3}$. **9.** $q = -\frac{1}{2}$. **10.** 15. **11.** $\sqrt{10}$.

12. $\frac{1}{2}$. **13.** $-1; 1$. **14.** 7. **15.** $\frac{1}{4}$.

Показательные уравнения

1. 1. **2.** $4;\ -2$. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{7}{12}$. **5.** $\emptyset$. **6.** 24.

7. 3. **8.** -2. **9.** $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **10.** $-\frac{5}{2}; 3$. **11.** $\frac{3}{2}$.

12. -3. **13.** $0;\ \frac{4}{3}$. **14.** $\frac{17}{13}$. **15.** $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$. **16.** 7.

17. $0;\ 1$. **18.** 0. **19.** 2. **20.** 5. **21.** 3. **22.** 15.

23. 2. **24.** 3. **25.** 0. **26.** $\frac{1}{2}$. **27.** 2.

28. $1;\ \log_6 2$. **29.** 3. **30.** ± 4. **31.** $1;\ \log_2(3+\sqrt{29})-1$.

32. -1. **33.** -2. **34.** $\pm 1;\ 0$. **35.** $\frac{3}{2}$. **36.** $-\frac{1}{2}$.

37. $\frac{3}{2}$. **38.** 1. **39.** $\pm\sqrt{3}$. **40.** $\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **41.** $0; 1$.

42. $\log_{\frac{7}{2}} \frac{1}{3}$. **43.** ± 3. **44.** ± 2.

Показательные неравенства

1. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **2.** $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **3.** $(-\infty; 2]$.

4. $(0;1)$. **5.** $x \geqslant 0{,}5\log_2 0{,}75$. **6.** $(-2;+\infty)$. **7.** $(5;+\infty)$.

8. $\left[\frac{11}{13};+\infty\right]$. **9.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **10.** $[0;64)$. **11.** $\left(\frac{5}{3};2\right)$.

12. $(2;+\infty)$. **13.** $(1;4)$. **14.** $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$. **15.** $(-\infty;1]$.

16. $[3;+\infty)$. **17.** $(-\infty;2]$. **18.** $[4;+\infty;)$. **19.** $(-\infty;1]$.

20. $(-\infty;-1]$. **21.** $[\log_2 3;+\infty)$. **22.** $(2;+\infty)$.

23. $[4-\log_3 5;4]$. **24.** $[0;36)$. **25.** $(-1;2)\cup(3;+\infty)$.

26. $(0;2)$. **27.** $(-4;0)$. **28.** $\{0\}\cup[1-\log_7 2;+\infty)$.

29. $[1-\log_3 5;0]\cup[1+\log_3 5;+\infty)$.

30. $(-\infty;\log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[0{,}5;+\infty)$. **31.** $(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

32. $(2;+\infty)$. **33.** $(-1;0)\cup(3;4)$. **34.** $[0;4)$. **35.** $(-1;1)$.

36. $(-1;0)\cup(0;1)$. **37.** $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$. **38.** $(3;+\infty)$.

Логарифмические уравнения

1. $-2;\ \frac{9}{2}$. **2.** $2;\ 9$. **3.** 4. **4.** 9. **5.** $0{,}125$. **6.** $\frac{1}{9}$.

7. $\sqrt{2}-1$. **8.** 3. **9.** $\sqrt[4]{5}-2$. **10.** 6. **11.** $\frac{1}{2}$.

12. $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$. **13.** -5. **14.** -4. **15.** 8. **16.** 25.

17. 21. **18.** -18. **19.** 27. **20.** 4. **21.** 2.

22. $\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ 4$. **23.** $0{,}25;\ 4$. **24.** 3. **25.** $\sqrt{3};\ 3$. **26.** 20.

27. $\sqrt{10};\ 10$. **28.** $\frac{13}{21};\ 2$. **29.** $\sqrt[9]{10};\ 10$. **30.** $1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 4$.

31. $10^{-5};\ 10^{-2};\ 10^{2};\ 10^{-5}$. **32.** $10;\ 100$. **33.** $1;\ 5;\ \frac{1}{25}$.

34. $-\frac{1}{2}$. **35.** $\frac{1}{2};\ \sqrt{2}$. **36.** -1000. **37.** 5. **38.** $10;\ 10^{-\frac{9}{2}}$.

39. $0{,}01;\ 10$. **40.** $0{,}1;\ 100$. **41.** $\frac{1}{16};\ 4$. **42.** $\frac{1}{9};\ 3$.

43. $3;\ 27$. **44.** $\frac{5}{11}$. **45.** $1;\ -\frac{8}{5}$. **46.** 11. **47.** 4.

48. -1. **49.** -3. **50.** 10. **51.** $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}$. **52.** $0;\ \frac{16}{9}$.

53. -25. **54.** $1;\ 5$. **55.** $10^{-2};\ 10^{-3}$. **56.** $10;\ 10^4$.

57. -1000. **58.** $1{,}1;\ 11$. **59.** $9;\ \frac{1}{9}$. **60.** $3;\ \frac{5}{4}$. **61.** $\sqrt{3}$.

62. $\frac{1}{9};\ 1;\ 3$. **63.** $10;\ 10^{-4}$. **64.** $10^{\pm 1};\ 10^{\pm 2}$. **65.** $3;\ 27^3$.

66. $3^{\pm\sqrt{2}}$. **67.** $\frac{1}{9};\ 9$. **68.** $\frac{\pi}{12} \pm 2\pi k$.

Логарифмические неравенства

1. $(1;2)\cup(3;4)$. **2.** $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$. **3.** $(0;\frac{1}{3}]$. **4.** $(3;4)$.

5. $(\frac{5}{8};+\infty)$. **6.** $(\frac{1}{5};\frac{2}{5}]$. **7.** $(1;2)\cup(3;4)$. **8.** $(2;3)$.

9. $(4;6)$. **10.** $[-\frac{16}{3};-3)$. **11.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$. **12.** $[2;3)$.

13. $[-\frac{6}{5};-1)\cup(-\frac{1}{5};0]$. **14.** $(-\infty;2)\cup(9;+\infty)$.

15. $(2;3)\cup[5;+\infty)$. **16.** $\{\frac{1}{2}\}\cup(1;+\infty)$. **17.** $(-\frac{1}{3};1)$.

18. $(-3;-\frac{1}{3})\cup(\frac{3}{2};+\infty)$. **19.** $[-1;1)\cup(3;5]$.

20. $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$. **21.** $[-7;3]$. **22.** $(-3;-1)$.

23. $(-7;-2)$. **24.** $(3;4)\cup(6;+\infty)$. **25.** $(-7;-6]\cup[1;+\infty)$.

26. $(\frac{1}{2};\frac{9}{16}]\cup[\frac{9}{2};+\infty)$. **27.** $(1;1{,}04)\cup(26;+\infty)$.

28. $\{-2\}\cup[-\frac{9}{8};-1)\cup\{2\}$. **29.** $[-3;-1)\cup(5;7]$.

30. $(\frac{2}{5};\frac{3}{7}]$. **31.** $(-1;1)$. **32.** $(2;\frac{5}{2})$. **33.** $(\frac{5}{2};+\infty)$.

34. $(\frac{3}{2};2)\cup(7;8)$. **35.** $(-\infty;-5)\cup(-5;-1)\cup(3;+\infty)$.

36. $(2;+\infty)$. **37.** $(0;27)$. **38.** $(0;\frac{1}{2}]$. **39.** $(3;+\infty)$.

40. $[2;+\infty)$. **41.** $(1;+\infty)$. **42.** $(3;4]\cup[6;+\infty)$.

43. $[0;+\infty)$. **44.** $(-\infty;-2)$. **45.** $(0;0{,}1]\cup[100;+\infty)$.

46. $(1;\frac{5}{4})\cup(3;+\infty)$. **47.** $[\frac{1}{2};4]$. **48.** $(\frac{1}{64};\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{4};4)$.

49. $(0{,}1;1)\cup(1;10)$. **50.** $(0;\frac{1}{8}]\cup[\frac{1}{4};+\infty)$.

51. $\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{24}\right)\cup(1;+\infty)$. **52.** $(0;10)$. **53.** $(1;+\infty)$.

54. $(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$. **55.** $[2;4]$. **56.** $a\geqslant 10^{\sqrt{11}}$; 11.

57. $x>1+\sqrt{1+a}$ при $0<a<1$;
$2<x<1+\sqrt{1+a}$ при $a>1$.

Векторная алгебра

1. $\sqrt{68}$; $-2/\sqrt{17}$; $-3/\sqrt{17}$; $-2/\sqrt{17}$. **2.** 6; 14.

3. 135°. **4.** 90°. **5.** -10. **6.** $(48;-64;-60)$.

7. $(1;2;2)$. **8.** -3. **9.** $\left(\frac{9}{16};\frac{3}{16};\frac{21}{16}\right)$.

Планиметрия

1. 2. **2.** 18. **3.** 216. **4.** 40. **5.** 10. **6.** 70.

7. 1,5. **8.** 31,25. **9.** 600. **10.** 42. **11.** 36. **12.** 15.

13. 5. **14.** 126. **15.** 15,4. **16.** 3. **17.** 5. **18.** 20.

19. 30°. **20.** $1{,}6R$. **21.** $144\sqrt{3}$. **22.** $32\sqrt{2}$. **23.** 50.

24. 96. **25.** 140°. **26.** 80°. **27.** 70°. **28.** 5.

29. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **30.** $1:3$. **31.** 12. **32.** $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **33.** 12.

34. 420. **35.** 8,125. **36.** 288. **37.** 58°. **38.** 67°.

39. 12. **40.** 18. **41.** 8. **42.** 12. **43.** 25. **44.** 84.

45. 15. **46.** 14.

Стереометрия

1. $V=\dfrac{d^3\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **2.** $V=d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

3. $S=\dfrac{24Q\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **4.** $a=\sqrt[3]{\dfrac{8V\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{6\cos\alpha-3}}}$.

5. $V = \dfrac{b^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\beta}}{\sin\beta}$.

6. $V = \frac{1}{8}(p^2 - 4d^2\sin^2\alpha)d\cos\alpha$.

7. $V = \dfrac{a^3 \operatorname{tg}^2\alpha\cos\alpha}{8(1+\cos\alpha)}$.

8. $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

9. $S = \dfrac{4\sqrt{2}H^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$.

10. $V = \dfrac{m^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})^3}$.

11. $S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.

12. $\dfrac{H}{a} = \dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

13. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m+n}{2n}$.

14. $S = \dfrac{\sqrt{3}H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

15. $V = \dfrac{l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}{\sqrt{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)^3}}$.

16. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}}{8}$.

17. $a = \sqrt[3]{24V\operatorname{tg}\alpha}$.

18. $S = \dfrac{\sqrt{3}d^2}{3\sin^2\alpha}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+1\right)$.

19. $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}H^2\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

20. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

21. $V = \dfrac{l^3\sin^2\alpha\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{3\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

22. $V = \dfrac{a^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$.

23. $S = \dfrac{a^2(\sin 2\alpha + \sin\beta)}{2\cos^2\alpha}$.

24. $V = \frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

25. $V = \dfrac{c^3}{12}\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$.

26. $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{12V}{c^3}}$.

27. $V = \frac{1}{3}rH(r+2R)$.

28. $V = \frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

29. $S = a^2\sin^3\alpha$.

30. $S = \dfrac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}}$.

31. $R = \frac{1}{2}H\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

32. $l\sin\alpha$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

33. $V = \frac{2}{3}H^3\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

34. $V = \frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

35. $S = \pi h^2\sin\alpha(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \dfrac{1}{\sin\beta})$.

36. $V=\frac{\pi c^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$. 37. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$; $S=\frac{\pi a^2(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}+1)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

38. $S=\frac{\pi d^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$. 39. $V=\frac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3(1+\cos\alpha)^3}$.

40. $S=\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}}{\cos\beta}$. 41. $V=\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi}{24\sin^3\alpha}$; $S=\frac{\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$.

42. $S=\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{4\cos\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}}$. 43. $S=\frac{\pi a^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

44. $V=\frac{1}{3}\pi H^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. 45. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$; $\cos\alpha=\frac{7}{25}$.

46. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 47. $V_1=V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

48. $a=\sqrt[3]{\frac{4\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3\sqrt{3}}}$. 49. $H=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$.

50. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Текстовые задачи

1. 4 км/ч. **2.** 12 и 18 км/ч. **3.** 80 км/ч. **4.** 15 ч.

5. 4 км/ч. **6.** 30 с. **7.** 400 м. **8.** 14 мин. **9.** 10 и 15 ч.

10. 8 ч. **11.** 5 ч. **12.** 45 с. **13.** 10 и 15 ч. **14.** 10 и 12 ч.

15. 285714. **16.** 63. **17.** 421. **18.** 23. **19.** 202.

20. 20%. **21.** 5%. **22.** 300 изд. **23.** 30 руб. и 30 руб.

24. 90 руб. и 135 руб. **25.** 300 руб. и 5%. **26.** 1,8 и 10,2; 3 и 9.

27. 20 м. **28.** 60%. **29.** 8. **30.** 20 кг. **31.** 1 кг и 7 кг.

32. 9 частей первого и 35 частей второго. **33.** 2 л.

34. 30% и 60%. **35.** 8 л и 7 л. **36.** 70 кг. **37.** 9 г.

38. 2 кг. **39.** 1,5 кг. **40.** 40 т и 100 т.

Задачи с параметрами

17. $a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$. **18.** $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. **19.** $a = \pm 6;\ a = 3$.

20. $(0; \frac{1}{2}] \cup [\frac{9}{2}; 5)$. **21.** $a > 1$. **22.** $(0; \frac{2}{9})$. **23.** $a \in [-2; -\frac{1}{2}]$.

24. $a \in [-\frac{16}{7}; -2)$. **25.** $a \in (5; 24)$. **26.** $a \in [0; 2]$.

27. $a \in (-27; -13)$ — 3 корня. **28.** $a = \frac{3}{4};\ a > 1$.

29. $-3 < a \leqslant -2$ **30.** Если $a < 4$: решений нет,
если $a \geqslant 4$: $x = \frac{a}{2} + \sqrt{2a - 4}$.

31. Если $a \leqslant 0$: $x \in R$,
если $a > 0$: $x \in (-\infty; -\log_4 a - 1) \cup (-\log_4 a; +\infty)$.

32. Если $a < 0$: $x \in (-\infty; \log_2(-a) - 1)$,
если $a = 0$: решений нет,
если $a > 0$: $x \in (-\infty; \log_2 a - 2)$.

33. $a = \frac{1}{\sqrt[6]{2}};\quad a \geqslant \sqrt[24]{2}$. **34.** $a \in (0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$.

35. $a \in [\frac{5}{2}; 3) \cup (3; 2 + \frac{\sqrt[3]{26}}{2}]$. **36.** $a \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{\sqrt[3]{37}}{2} - 1]$.

37. $a \in (-\infty; -4\sqrt{6}) \cup (4\sqrt{6}; +\infty)$. **38.** $a \in (-\infty; -2) \cup [1{,}5; +\infty)$.

39. $a \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$. **40.** $a \in [0; 2]$. **41.** $a \in [-1; 0]$.

42. $a \in [8; 30)$. **43.** $a \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$. **44.** $a \in (1; 2\sqrt[4]{98} - 5]$.

45. $a \in [-1; 2\sqrt[4]{18} - 5]$.

Учебное издание

Горелов Георгий Николаевич
Ефимов Евгений Александрович
Коломиец Людмила Вадимовна

МАТЕМАТИКА – АБИТУРИЕНТУ

Учебное пособие

Редактор Н.С. Куприянова

Подписано в печать 15.10.2008. Формат 64х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4,25.
Тираж 200 экз. Заказ 96 .

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.