МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

И.В. КУЛАГИНА, А. Н. ПАНОВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КУРСУ "ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

Учебное пособие

Издательство "Самарский университет"
2006

Печатается по разрешению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 512
ББК 22.143
П 165

Рецензент:
канд. физ.-мат. наук, доц. Т.В.Азовская

И.В.Кулагина, Панов А.Н. Методы решения задач по курсу "Линейная алгебра и геометрия": Учебное пособие, Самара: Издательство "Самарский университет", 2006, с.54.

Данное пособие предназначено для студентов 2 курса специальности "Математика". В пособии разобраны наиболее важные задачи курса "Линейная алгебра и геометрия". Распределение материала соответствует плану лабораторные занятий по этому курсу и пособию А.Н.Панова "Задачи по линейной алгебре и геометрии". Наибольшее внимание уделено следующим темам: нахождение жордановой формы матрицы и жорданова базиса, классификация кривых и поверхностей второго порядка, классификация движений на плоскости и в пространстве. Пособие может быть использовано для студентов специальностей "Прикладная математика", "Компьютерная безопасность "и "Механика".

§1 Симметрические многочлены

Многочлен от нескольких переменных называется симметрическим многочленом, если он не меняется при всех перестановках своих переменных.

Многочлены

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\\
&\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

называются элементарными симметрические многочленами. Основная теорема о симметрических многочленах утверждает, что всякий симметрический многочлен над произвольным полем K выражается через элементарные симметрические многочлены, причем это можно сделать единственным образом. Приведём точную формулировку основной теоремы о симметрических многочленах.

Теорема 1.1.

1) Для любого симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$,
2) многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ находится по исходному симметрическому многочлену $f(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно.

Рассмотрим несколько стандартных задач на эту теорему.

Задача 1.2. Выразить симметрический многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_2 + x_2^4x_1 + x_1^4x_3 + x_3^4x_1 + x_2^4x_3 + x_3^4x_2$ через элементарные симметрические многочлены.

Решение. Многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ является однородным симметрическим многочленом суммарной степени 5. Наша цель – выразить $f(x_1, x_2, x_3)$ через элементарные симметрические многочлены от 3-х переменных:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.\\
&\sigma_3 = x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Его старший (в смысле лексикографического упорядочения) член совпадает с $x_1^4x_2$. Лексикографическая степень многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$ равна $(4, 1, 0)$. Выпишем всевозможные наборы (k_1, k_2, k_3) с натуральными k_1, k_2, k_3, удовлетворяющие условиям:

1) $k_1 + k_2 + k_3 = 5$,
2) $k_1 \geq k_2 \geq k_3$,
3) набор (k_1, k_2, k_3) меньше или равен $(4, 1, 0)$ в смысле лексикографического порядка.

Для каждого набора (k_1, k_2, k_3) укажем симметрический многочлен вида $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\sigma_3^{\alpha_3}$, степень которого равна (k_1, k_2, k_3). Показатели $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно угадать или воспользоваться формулами $\alpha_1 = k_1 - k_2,\ \alpha_2 = k_2 - k_3,\ \alpha_3 = k_3$. Получаем

$$\begin{array}{ll} (4,1,0), & \sigma_1^3\sigma_2 \\ (3,2,0), & \sigma_1\sigma_2^2, \\ (3,1,1), & \sigma_1^2\sigma_3, \\ (2,2,1), & \sigma_2\sigma_3. \end{array} \tag{1.1}$$

Существуют числа a, b, c такие, что

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3\sigma_2 + a\sigma_1\sigma_2^2 + b\sigma_1^2\sigma_3 + c\sigma_2\sigma_3 \tag{1.2}$$

Подставляя в левую и правую части (1.1) наборы значений аргументов, получаем систему уравнений на a, b, c. Заполним таблицу:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	$2 = 8 + 2a$
1	1	1	3	3	1	$6 = 81 + 27a + 9b + 3c$
1	-1	1	1	-1	-1	$2 = -1 + a - b + c$

Решая систему уравнений, получаем $a = -2$, $b = -1$, $c = 5$.
Ответ: $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3\sigma_2 - 3a\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3$.

Напомним формулы Виета. Пусть дан многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0 \neq 0$. Тогда корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ многочлена $f(x)$ удовлетворяют формулам Виета:

$$\begin{array}{l} \sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -\frac{a_1}{a_0} \\ \sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{a_2}{a_0} \\ \ldots \\ \sigma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^n\frac{a_n}{a_0} \end{array}$$

В частности, формулы Виета для многочлена третьей степени $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $a_0 \neq 0$, имеют вид

$$\begin{array}{l} \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0}, \\ \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_2}{a_0}, \\ \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}. \end{array}$$

Задача 1.3. Найти значение симметрического многочлена

$$(3x_1 + 2x_2 + 2x_3)(3x_2 + 2x_1 + 2x_3)(3x_3 + 2x_1 + 2x_2)$$

от корней многочлена $2x^3 + 3x^2 + x + 5$.
Решение. Используя метод задачи 1.1, выразим данный симметрический многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ через элементарные симметрические многочлены. Формулы, аналогичные (1.1) и (1.2), для нашей задачи имеют вид:

$$\begin{array}{ll} (3,0,0), & \sigma_1^3, \\ (2,1,0), & \sigma_1\sigma_2, \\ (1,1,1), & \sigma_3, \end{array}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 12\sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$$

Заполним таблицу

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	$100 = 96 + 2a$
1	1	1	3	3	1	$343 = 324 + 9a + b$

Решая систему уравнений, получаем $a = 2$, $b = 1$. Получаем

$$f(x_1, x_2, x_3) = 12\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3. \tag{1.3}$$

Выпишем формулы Виета для корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ многочлена $2x^3 - 3x^2 + x - 5$:

$$\begin{array}{l} \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3}{2}, \\ \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{1}{2}, \\ \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{5}{2} \end{array}.$$

Подставляя $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в (1.3), получаем $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{89}{2}$
Ответ: $\frac{89}{2}$.

Степенными суммами называют симметрические многочлены $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Имеют место следующие формулы Ньютона, связывающие элементарные симметрические многочлены и степенные суммы:

$$\begin{cases} s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \ldots + (-1)^k k\sigma_k = 0, & \text{для } k \leq n \\ s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0, & \text{для } k > n \end{cases}$$

Задача 1.3. Найти значения суммы s_7 от корней уравнения $x^3 + 3x - 2 = 0$.
Решение. Из формул Виета $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 2$. Используя формулы Ньютона, последовательно находим $s_1 = 0$, $s_2 = -6$, $s_3 = 6$, $s_4 = 18$, $s_5 = -30$, $s_6 = -42$, $s_7 = 126$.
Ответ: $s_7 = 126$.

§2 Результант и дискриминант

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, и $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$, $b_0 \neq 0$, – два многочлена над полем K. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ полные

наборы корней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.
Определение 2.1. Результантом многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называют число

$$R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j=1}^{n,m} (\alpha_i - \beta_j). \tag{2.1}$$

Основное свойство результанта состоит в следующем: результант $R(f,g) = 0$ тогда и только тогда, когда у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ есть общий корень.

Результант вычисляется по формуле:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & \dots & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

Задача 2.2. При каком a многочлены $f(x) = x^3 - 4x^2 + (a-5)x - 5a$ и $g(x) = x^2 - (7+a)x + 7a$ имеют общий корень?
Решение. Вычислим результант $R(f,g) = 2a^4 + 106a^3 - 356a^2 - 1120a$. Найдем корни $R(f,g)$ как многочлена от a.
Ответ: при $a = 0, -2, 5, 56$.
Задача 2.3. Найти решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0 \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Решение. Будем рассматривать левые части уравнений как многочлены от y и найдём их результант:

$$R(f,g) = 32x^4 - 96x^3 + 32x^2 + 96x - 64 = 32(x+1)(x-2)(x-1)^2.$$

Каждый из корней $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = 1$ подставляем в (2.3), получаем систему 2-х уравнений относительно y и находим её решение:

$$\begin{array}{lll} x_1 = -1, & \begin{cases} 5y^2 + 6y - 11 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}, & y_1 = 1 \\ x_2 = 2, & \begin{cases} 5y^2 - 12y + 4 = 0 \\ y^2 - 3y + 4 = 0 \end{cases}, & y_2 = 2 \\ x_{3,4} = 1, & \begin{cases} 5y^2 - 6y - 11 = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases}, & y_{3,4} = -1. \end{array}$$

Ответ: (-1,1), (2,2), (1,-1).

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, – многочлен над полем K и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – его корни.

Определение 2.4. Дискриминантом многочлена $f(x)$ называют число

$$D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \tag{2.4}$$

Напомним, что число c называется корнем кратности k для многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-c)^k$ и не делится на $(x-c)^{k+1}$. Основное свойство дискриминанта состоит в следующем: дискриминант $D(f)$ равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ имеет кратный корень (то есть корень кратности > 1).

Имеют место следующие две формулы для вычисления дискриминанта:

$$D(f) = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f, f') \tag{2.6}$$

Задача 2.5. При каком a многочлен $x^3 + x^2 - 5x + a$ имеет кратный корень?

Решение. Вычислим $D(f) = -27a^2 - 94a + 525$. Найдём корни $D(f)$ как многочлена от a.

Ответ: при $a = -\frac{175}{27}$ и $a = 3$.

§3 Алгебраические числа и конечные поля

Комплексное число α называется алгебраическим, если α является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Комплексные числа, которые не являются алгебраическими, называются трансцендентными. Примерами алгебраических чисел являются $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, примерами трансцендентных чисел – π, e.

Алгебраические числа образуют подполе в поле комплексных чисел. В частности, для любых алгебраических чисел α и β их сумма $\alpha + \beta$, разность $\alpha - \beta$, произведение $\alpha\beta$ и частное $\frac{\alpha}{\beta}$ – также алгебраические числа.

Задача 3.1. Пусть α – корень уравнения $x^3 + 3x - 5 = 0$. Дано число

$\beta = \alpha^2 + \alpha - 1$. Требуется найти уравнение с рациональными коэффициентами, корнем которого будет число β.

Решение. Многочлены

$$f(x) = x^3 + 3x - 5,$$
$$g(x) = x^2 + x - 1 - \beta$$

имеют общий корень $x = \alpha$. Поэтому $R(f, g) = 0$. Вычисляя результант, получаем $R(f, g) = -\beta^3 - 9\beta^2 - 12\beta + 41 = 0$.

Ответ: $-y^3 - 9y^2 - 12y + 41 = 0$.

Уравнение $-y^3-9y^2-12y+41 = 0$ называют преобразованием Чирнгаузена уравнения $x^3 + 3x - 5 = 0$.

Пусть α – алгебраическое число и $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, – многочлен наименьшей степени с рациональными коэффициентами, корнем которого является α. Заметим, что многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Наименьшее подполе $\mathbb{Q}(\alpha)$, содержащее $\mathbb{Q}$ и α, состоит из чисел вида

$$\{c_0\alpha^{n-1} + c_1\alpha^{n-2} + \ldots + c_{n-1} : \quad c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}\}.$$

В частности, для любого ненулевого набора коэффициентов $c_0, \ldots, c_{n-1}$ число

$$\gamma = \frac{1}{c_0\alpha^{n-1} + c_1\alpha^{n-2} + \ldots + c_{n-1}}$$

может быть переписано в виде $b_0\alpha^{n-1} + b_1\alpha^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$ с рациональными коэффициентами b_i, $0 \leq i \leq n - 1$. Другими словами, каждая дробь γ допускает исключение иррациональности в знаменателе.

Задача 3.2. Исключить иррациональность в знаменателе числа $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-3}$.

Решение. Число $\alpha = \sqrt[3]{2}$ является корнем неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $f(x) = x^3 - 2$. Обозначим $g(x) = x^2 + x - 3$. Наша цель – исключить иррациональность в знаменателе числа $\gamma = \frac{1}{g(\alpha)}$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые, поскольку $f(x)$ неприводим и $\deg f(x) > \deg g(x)$. Существуют многочлены $M(x)$ и $N(x)$ с рациональными коэффициентами, такие, что $M(x)f(x) + N(x)g(x) = \mathrm{const} \neq 0$. Для нахождения $M(x)$ и $N(x)$ применим алгоритм Евклида:

$$f(x) = g(x)(x + 1) + r(x), \quad \text{где} \quad r(x) = -2x - 5,$$
$$g(x) = r(x)(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{7}{4}) + \tfrac{47}{4}$$

Подставляя выражение $r(x)$ из первой строки во вторую, получаем

$$M(x)f(x) + N(x)g(x) = \frac{47}{4}, \tag{3.1}$$

где $M(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ и $N(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{11}{4}$. Подставим α в (3.1):

$$M(\alpha)f(\alpha) + N(\alpha)g(\alpha) = \frac{47}{4}.$$

Поскольку $f(\alpha) = 0$, то $g(\alpha)N(\alpha) = \frac{47}{4}$ и

$$\gamma = \frac{1}{g(\alpha)} = \frac{4}{47}N(\alpha) = -\frac{2}{47}\alpha^2 + \frac{5}{47}\alpha + \frac{11}{47}.$$

Ответ. $\gamma = -\frac{2}{47}\sqrt[3]{4} + \frac{5}{47}\sqrt[3]{2} + \frac{11}{47}$.

Пусть A – коммутативное кольцо с 1. Подмножество $I \subset A$ называют идеалом в A, если выполнены два условия:
1) для любых элементов $a, b \in I$ их сумма $a + b$ принадлежит I,
2) для любых $a \in A$ и $b \in I$ их произведение ab принадлежит I.

Говорят, что элементы a и b из кольца A сравнимы по модулю идеала I (записывается $a \equiv b \bmod I$), если их разность $a - b$ принадлежит идеалу I. Отношение $a \equiv b \bmod I$ является отношением эквивалентности в кольце A. Имеет место следующие свойство: если $a \equiv a' \bmod I$ и $b \equiv b' \bmod I$, то $a + b \equiv a' + b' \bmod I$ и $ab \equiv a'b' \bmod I$.

Для любого $a \in A$ класс эквивалентности $[a] = \{b \in A : \ a \equiv b \bmod I\}$ совпадает с множеством $a+I = \{a+i : \ i \in I\}$. Кольцо A распадается на классы эквивалентности. Рассмотрим множество классов эквивалентности A/I (фактормножество) кольца A относительно $a \equiv b \bmod I$. Фактормножество A/I является кольцом относительно операций $[a] + [b] = [a + b]$ и $[a] \cdot [b] = [ab]$. Поэтому A/I называют факторкольцом кольца A по идеалу I.

Конструкция факторкольца позволяет строить новые примеры колец по данному кольцу A. Рассмотрим два важных примера этой конструкции.

Пример 3.3. Пусть $A = \mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел и n – некоторое целое число. Рассмотрим идеал $I = n\mathbb{Z}$. Факторкольцо $A/I = \mathbb{Z}_n$ называют кольцо классов вычетов по модулю n.

Кольцо $\mathbb{Z}_n$ состоит из n элементов. Известно, что кольцо $\mathbb{Z}_n$ является полем тогда и только тогда, когда n – простое число. Поле $\mathbb{Z}_p$, где p – простое число, обозначают также через $\mathbb{F}_p$.

Пример 3.4. Пусть $A = K[x]$ – кольцо многочленов над полем K и $f(x)$ – некоторый многочлен из $K[x]$. Рассмотрим идеал $I = K[x]f(x)$ и факторкольцо $F = K[x]/I$.

Теорема 3.5. Кольцо F является полем тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ неприводим над полем K.

Пусть $f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, $a_0 \neq 0$ – неприводимый многочлен над полем K. Построенное выше поле F можно рассматривать как расширение поля K. Обозначим через $j \in F$ класс элемента x по модулю идеала I. Тогда $a_0j^n + a_1j^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ в поле F и

$$F = \{c_0j^{n-1} + c_1j^{n-2} + \ldots + c_{n-1} : \quad c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in K\}.$$

Новое поле F является линейным пространством над полем K размерности, равной $n = \deg f(x)$. В качестве базиса F над K можно взять набор $1, j, j^2, \ldots, j^{n-1}$.

В частности, если $K = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел и $f(x) = x^2 + 1$, то новое поле $F = \{a+bj : \ a, b \in \mathbb{R},\ j^2+1 = 0\}$ совпадает с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Известно, что во всяком конечном поле характеристики p ровно p^k элементов, и для любого простого p и натурального k существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) поле $\mathbb{F}_{p^k}$ из p^k элементов. Приведённую выше конструкцию можно использовать для построения поля $\mathbb{F}_{p^k}$. Если K совпадает с полем вычетов по простому модулю p и $\deg f(x) = n$, то F – поле из p^k элементов. Например,

$$\mathbb{F}_4 = \{a + bj : \quad a, b \in \mathbb{F}_2,\ j^2 + 1 = 0\},$$

$$\mathbb{F}_8 = \{a + bj + cj^2 : \quad a, b, c \in \mathbb{F}_2,\ j^3 + j + 1 = 0\}.$$

Задача 3.6. Найти обратный элемент к элементу $1 + j$ в поле

$$\mathbb{F}_{49} = \{a + bj : \quad a, b \in \mathbb{F}_7,\ j^2 + 2 = 0\}.$$

Решение. Пусть $c + dj$ обратный элемент к $1 + j$ в поле $\mathbb{F}_{49}$. То есть $(1 + j)(c + dj) = 1$. Отсюда $(3c - 4d) + (2c + 3d)j = 1$ и

$$\begin{cases} 3c - 4d = 1 \bmod 7 \\ 2c + 3d = 0 \bmod 7 \end{cases}$$

Ответ: $1 + 4j$.

Задача 3.7. Найти обратный элемент к элементу $1 + j + j^2$ в поле

$$\mathbb{F}_8 = \{a + bj + cj^2 : \quad a, b, c \in \mathbb{F}_2,\ j^3 + j^2 + 1 = 0\}.$$

Решение. Рассмотрим многочлены $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$, определённые над полем $\mathbb{F}_2$ вычетов по модулю 2. Существуют многочлены $M(x)$ и $N(x)$ над $\mathbb{F}_2$ такие, что $M(x)f(x)+N(x)g(x) = 1$. Аналогично задаче 3.2 находим $M(x) = x$, $N(x) = x^2 + 1$. Так как $f(j) = 0$, то

$$\frac{1}{g(j)} = N(j) = j^2 + 1.$$

Ответ. $\frac{1}{1+j+j^2} = 1 + j^2$.

§4 Теория λ-матриц

λ- матрица – это $n \times n$–матрица, элементами которой являются комплексные многочлены от λ.

Определение 4.1.

1) Элементарным преобразованием λ-матрицы 1 рода называют прибавление к строке(столбцу) матрицы элементов другой строки(столбца), домноженных на некоторый многочлен $f(\lambda)$;

2) Элементарным преобразованием λ-матрицы 2 рода называют умножение строки(столбца) матрицы на число $c \neq 0$.

Заметим, что элементарными преобразованиями можно переставить местами две строки(столбца) матрицы.

Определение 4.2. Говорят, что две λ-матрицы одного размера эквивалентны, если из одной можно получить другую цепочкой элементарных преобразований.

Определение 4.3. Канонической формой λ-матрицы называют λ-матрицу

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

в которой 1) старший коэффициент в многочленах $\{e_i(\lambda)\}$ равен 1; 2) каждый $e_i(\lambda)$ делит $e_{i+1}(\lambda)$ нацело.

Многочлены $e_i(\lambda)$ называются инвариантными множителями.

Каждый инвариантный множитель разложим в произведение линейных многочленов

$$e_i(\lambda) = (\lambda - a_{i1})^{k_{i1}} \dots (\lambda - a_{i,m(i)})^{k_{i,m(i)}},$$

где все корни $a_{i,1}, \dots, a_{i,m(i)}$ различны. Множители $(\lambda - a_{ij})^{k_{ij}}$ называются элементарными делителями. Система элементарных делителей –это набор всех элементарных делителей, в котором каждый элементарный делитель встречается столько раз сколько он встречается в разложении $e_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq n$. Например, система элементарных делителей матрицы

$$(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2)^3 \end{pmatrix}$$

равна $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1, \lambda + 2, (\lambda + 2)^3$.

Каждая каноническая форма однозначно восстанавливается по размеру n, рангу r и системе элементарных делителей. Следующая теорема является основной в тории λ-матриц.

Теорема 4.5.

1) Всякая λ-матрица $A(\lambda)$ эквивалентна некоторой канонической форме $C(\lambda)$;

2) каноническая форма $C(\lambda)$ находится по $A(\lambda)$ однозначно.

Обозначим через $d_i(\lambda)$ наибольший общий делитель системы миноров i-го порядка в $A(\lambda)$.

Имеют место формулы

$$\begin{array}{l} e_1(\lambda) = d_1\lambda \\ e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1\lambda} \\ \dots \\ e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}\lambda}, \end{array} \tag{4.1}$$

восстанавливающие каноническую форму $C(\lambda)$ по начальной λ-матрице $A(\lambda)$.

Задача 4.6. Найти каноническую форму для

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 4\lambda^2 - 13\lambda + 5 \\ \lambda & 2\lambda^2 - 7\lambda + 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуется формулами (4.1): $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \det A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$.

Ответ. $C(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$

Задача 4.7. Найти каноническую форму для

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda^2+6\lambda-6 & 2\lambda^2+9\lambda-18 \\ \lambda & -\lambda^2+6\lambda-8 & \lambda^2+9\lambda-18 \\ \lambda & \lambda+2 & \lambda^3-\lambda^2+4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Легко видеть, что $d_1(\lambda) = 1$. Создадим число 1 в левом верхнем углу матрицы $A(\lambda)$. Для этого умножим вторую строку на -1 и прибавим к первой строке. Получаем

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda^2 \\ \lambda & -\lambda^2+6\lambda-8 & \lambda^2+9\lambda-18 \\ \lambda & \lambda+2 & \lambda^3-\lambda^2+4 \end{pmatrix}.$$

Сохраняя 1 в левом верхнем углу, создадим два нуля в первой строке. Для этого умножим первый столбец на -2 и прибавим ко второму столбцу и затем умножим первый столбец на $-\lambda^2$ и прибавим к третьему столбцу. Получаем

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda-2)(4-\lambda) & 9(\lambda-2) \\ \lambda & -(\lambda-2) & -\lambda^2+4 \end{pmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями создадим два нуля в первом столбце:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)(4-\lambda) & 9(\lambda-2) \\ 0 & -(\lambda-2) & -\lambda^2+4 \end{pmatrix}.$$

Применим формулы (4.1) к 2×2-блоку: $d_1(\lambda) = \lambda - 2$, $d_2(\lambda) = \det A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1)^2$.

Ответ: $C(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$

§5 Жорданова форма матрицы

Жордановой клеткой называют матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

По определению, жорданова нормальная матрица – это блочно-диагональная матрица, по главной диагонали которой стоят жордановы клетки. Приведём несколько примеров жордановых нормальных матриц:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть A, B две матрицы с элементами из поля K. Напомним, что матрицы A и B называтся подобными над полем K, если существует невырожденная матрица T с элементами из поля K такая, что $B = T^{-1}AT$.

Одной из основных теорем в линейной алгебре является следующая теорема о приведении матрицы к жордановой форме.

Теорема 5.1.
1) Всякая комплексная матрица A подобна над полем комплексных чисел некоторой жордановой нормальной матрице J;
2) жорданова нормальная матрица J определяется по исходной матрице A однозначно, с точностью до порядка жордановых клеток по главной диагонали.

Матрицу J из теоремы называют жордановой нормальной формой матрицы A(коротко ЖНФ матрицы A) Напомним определение матрицы линейного оператора в базисе. Пусть V – линейное пространство, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ – базис V и $\varphi : V \to V$ – линейный оператор. Действуем оператором на первый базисный вектор и разлагаем этом вектор по базису; затем – на второй вектор и снова разлагаем по базису и так далее. Получаем следующую систему равенств:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{f}_1) = b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + b_{n1}\mathbf{f}_n \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = b_{12}\mathbf{f}_1 + b_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + b_{n2}\mathbf{f}_n \\ \ldots \\ \varphi(\mathbf{f}_1) = b_{1n}\mathbf{f}_1 + b_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + b_{nn}\mathbf{f}_n \end{cases} \tag{5.1}$$

Следующая матрица B называется матрицей оператора φ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Заметим, что столбцы в матрице B – это векторы $\varphi(\mathbf{f}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{f}_n)$, выписанные в координатах базиса $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Теорема 5.1 допускает следующее важное следствие.
Следствие 5.2. Для всякого линейного оператора φ в комплексном линейном пространстве V существует базис (называется жордановым базисом) в котором матрица оператора φ является жордановой нормальной матрицей.

Если A матрица оператора φ в начальном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и T матрица перехода в жорданов базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, то $J = T^{-1}AT$. Столбцы матрицы T состоят из векторов жорданова базиса, выписанных в координатах начального базиса.

Дана матрица A. Для нахождения ЖНФ составим характеристическую матрицу $A - \lambda E$. Рассматривая матрицу $A - \lambda E$ как λ-матрицу, найдём каноническую форму $C(\lambda)$ и выпишем систему её элементарных делителей. По каждому элементарному делителю $(\lambda - \alpha)^k$ построим жорданову клетку $J_{\alpha,k}$

размера $k \times k$ с числом α по главной диагонали. Искомая ж.н.ф. J – блочно-диагональная матрица с клетками $\{J_{\alpha,k}\}$ по главной диагонали.

После того как найдена ЖНФ J можно приступить к построению жорданова базиса $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$. Метод нахождения жорданова базиса зависит от найденной ж.н.ф. J. Мы изложим этот метод на примерах. Ответим, что жорданов базис находится не однозначно.

Задача 5.1. Найти жорданову форму J , жорданов базис и матрицу T для следующих матриц:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -20 & -7 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e)\ A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ 16 & -6 & -4 \\ -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad f)\ A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение a). Составим характеристическую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -10 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Найдём каноническую λ-матрицу:

$$A - \lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}.$$

Система элементарных делителей: $\{\lambda - 2, \lambda - 3\}$. Находим ж.н.ф. :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Перейдём к нахождению жорданова базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, матрица оператора φ в котором совпадает с J.

Из формул (5.2) легко восстановить формулы (5.1):

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = 3\mathbf{f}_2 \end{cases} \tag{5.3}$$

Напомним, что ненулевой вектор $\mathbf{f}$ называют собственным для оператора φ с собственным значением λ, если $\varphi(\mathbf{f}) = \lambda\mathbf{f}$. Из (5.3) заключаем, что векторы

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ – собственные векторы с собственными значениями 2 и 3 соответственно. В нашем случае векторы собственные векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ определяются однозначно, с точностью до константы.

Ответ: $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение b). Составим характеристическую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 13-\lambda & 5 \\ -20 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

Каноническая λ-матрица:

$$A - \lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}.$$

имеет единственный элементарный делитель $(\lambda-3)^2$. Жорданова форма

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Векторы жорданова базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ удовлетворяют равенствам:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{f}_1) = 3\mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 \end{cases} \tag{5.4}$$

Пусть ε – тождественный оператор. Равенства (5.4) перешем в форме

$$\begin{cases} (\varphi - 3\varepsilon)\mathbf{f}_1 = 0 \\ (\varphi - 3\varepsilon)\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \end{cases} \tag{5.5}$$

Построение жорданово базиса можно завершить двумя способами.

Способ 1. Вектор $\mathbf{f}_1$ – собственный вектор с собственными значением $\lambda_{1,2} = 3$. Стандартным образом получаем $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Подставия $\mathbf{f}_1$ во второе из уравнений (5.5), получаем систему уравнений для нахождения $\mathbf{f}_2$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -20 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

В качестве $\mathbf{f}_2$ выбирем любое частное решение, например $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Найденные векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ удовлетворяют равенствам (5.4). Составим матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Поскольку $\det T \neq 0$, то $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ – базис.

Ответ: $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Способ 2. Из равенств (5.4) вытекает, что $(\varphi-3)^2$ – нулевой оператор. Поэтому $(\varphi-3)^2\mathbf{x}=0$ для любого вектора $\mathbf{x}$. В качестве вектора $\mathbf{f}_2$ можно взять произвольный вектор, не пропорциональный вектору $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Положим $\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Из второго из равенств (5.4) находим $\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix}$. Составим $T=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$ и убедимся, что $\det T\neq 0$.

Ответ: $J=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение c). Приведем характеристическую матрицу к каноническому виду

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$$

Система элементарных делителей: $\{\lambda-1,\lambda-2,\lambda-3\}$. Жорданова форма

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Жорданов базис состоит из собственных векторов $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3$ с собственными значениями $1,2,3$ соответственно.

Ответ. $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение d). Приведем характеристическую матрицу к каноническому виду

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -5 & -\lambda & -2 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2(\lambda-3) \end{pmatrix}$$

Система элементарных делителей: $\{(\lambda-2)^2,\lambda-3\}$. Жорданова форма

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Векторы жорданова базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ удовлетворяют равенствам:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 \\ \varphi(\mathbf{f}_3) = 3\mathbf{f}_2 \end{cases} \tag{5.6}$$

Равенства (5.6) перепишем в форме

$$\begin{cases} (\varphi - 2\varepsilon)\mathbf{f}_1 = 0 \\ (\varphi - 2\varepsilon)\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \\ (\varphi - 3\varepsilon)\mathbf{f}_3 = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3$ – собственные векторы с собственными значениями 2 и 3 соответственно, определяются однозначно, с точностью до константы. Находим

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя $\mathbf{f}_1$ во вторую строку формул (5.7), получаем уравнение для нахождения $\mathbf{f}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

В качестве $\mathbf{f}_2$ можно взять любое частное решение (5.8). Например,

$$\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу T и проверяем, что $\det T \neq 0$.

Ответ. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$,
$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение е). Приведем характеристическую матрицу к каноническому виду

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ 16 & -6 & -4 \\ -8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 4)^2 \end{pmatrix}.$$

Система элементарных делителей: $\{(\lambda-4),(\lambda-4)^2\}$. Жорданова форма

$$J=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Векторы жорданова базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ удовлетворяют равенствам:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{f}_1)=4\mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2)=4\mathbf{f}_2 \\ \varphi(\mathbf{f}_3)=\mathbf{f}_2+4\mathbf{f}_3 \end{cases} \tag{5.9}$$

Равенства (5.9) перепишем в форме

$$\begin{cases} (\varphi-4\varepsilon)\mathbf{f}_1=0 \\ (\varphi-4\varepsilon)\mathbf{f}_2=0 \\ (\varphi-4\varepsilon)\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_2 \end{cases} \tag{5.10}$$

Векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ – собственные векторы с собственными значением 2. Система $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ является базисом в пространстве решений уравнения

$$(\varphi-4\varepsilon)\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 12 & -5 & -2 \\ 16 & -6 & -4 \\ -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Три уравнения системы (5.11) пропорциональны уравнению

$$12x_1-5x_2-2x_3=0. \tag{5.12}$$

Ошибочно полагать, что в качестве $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ можно взять произвольный базис в пространстве решений (5.11). Ведь у нас есть еще третье уравнение в (5.10), которое при произвольном выборе $\mathbf{f}_2$ может не иметь решения.

Заметим, что (5.10) вытекает, что $(\varphi-4\varepsilon)^2$ – нулевой оператор. Поэтому $(\varphi-4\varepsilon)^2\mathbf{x}=0$ для любого вектора $\mathbf{x}$.

В качестве $\mathbf{f}_3$ можно выбрать произвольный вектор, не удовлетворяющий (5.12). Возьмём в качестве $\mathbf{f}_3$ первый вектор стандартного базиса и найдём $\mathbf{f}_2$ из (5.10):

$$\mathbf{f}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2=(A-4E)\mathbf{f}_3=\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку: подставим набор $(8,16,-8)$ в (5.12) и убедимся, что получается тождество. Это подтверждает, что вектор $\mathbf{f}_2$ найден правильно.

Осталось подобрать вектор $\mathbf{f}_1$ так, чтобы он вместе с $\mathbf{f}_2$ образовывал базис в пространстве решений (5.12). В качестве $\mathbf{f}_1$ можно взять любое из фундаментальных решений. Например

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу T и убедимся, что $\det T \neq 0$.

Ответ. $J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение f). Приведем характеристическую матрицу к каноническому виду

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+3)^3 \end{pmatrix}.$$

Единственный элементарный делитель равен $(\lambda+3)^3$.

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Векторы жорданова базиса $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ удовлетворяют равенствам:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{f}_1) = -3\mathbf{f}_1 \\ \varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2 \\ \varphi(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3 \end{cases} \tag{5.13}$$

Равенства (5.13) перепишем в форме

$$\begin{cases} (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_1 = 0 \\ (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \\ (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 \end{cases} \tag{5.14}$$

Векторы жорданова базиса можно найти по цепочке. Сначала найти $\mathbf{f}_1$ как собственный вектор с собственным значением, равным -3. Подставить во второе уравнение из (5.14) и найти $\mathbf{f}_2$ как его частное решение. Затем $\mathbf{f}_3$ из третьего уравнения.

Однако, есть более короткий способ. Из равенств (5.13) вытекает, что $(\varphi + 3\varepsilon)^3$ – нулевой оператор. Поэтому $(\varphi + 3\varepsilon)^3\mathbf{x} = 0$ для любого $\mathbf{x}$. Если мы возьмём в качестве $\mathbf{f}_3$ произвольный вектор и далее найдем $\mathbf{f}_2 = (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_1 = (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_2$, то $(\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_1 = 0$. Таким образом, все три равенства в (5.14) будут выполнены. Есть только одно ограничение в выборе $\mathbf{f}_3$: векторы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ должны образовывать базис. В частности, $(\varphi + 3\varepsilon)^2\mathbf{f}_3 \neq 0$. В нашем случае это условие необходимо и достаточно для того, чтобы система $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ была базисом.

Возьмём в качестве $\mathbf{f}_3$ первый вектор $\mathbf{e}_1$ стандартного базиса. Если $(\varphi + 3\varepsilon)^2\mathbf{f}_3 = 0$, то заменим $\mathbf{e}_1$ на $\mathbf{e}_2$. Если снова получается нуль, то положим $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$. И здесь $(\varphi + 3\varepsilon)^2\mathbf{f}_3 \neq 0$, поскольку $\varphi + 3\varepsilon)^2$ - ненулевой оператор.

Вернёмся к нашей задаче:

$$\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = (\varphi + 3\varepsilon)\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу T и убедимся, что $\det T \neq 0$.

Ответ. $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

§6 Функции от матриц

Пусть $f(x)$ функция на комплексной плоскости, представимая в виде сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k. \tag{6.1}$$

В комплексном анализе такие функции называются целыми. Примерами целых функций являются:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Пусть $B^{(k)} = (b_{ij}^{(k)})$, $0 \leq k \leq \infty$ – последовательность комплексных $n \times n$-матриц.

Определение 6.1. Говорят,что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$ сходится к матрице $S = (s_{ij})$, если для всех $1 \le i, j \le n$ числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_{ij}^{(k)}$ сходится к s_{ij}.
Определение 6.2. Пусть A – комплексная $n \times n$-матрица и $f(x)$ – целая функция. По определению,

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k A^k = c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_n A^n + \ldots . \tag{6.2}$$

В частности,

$$e^A = E + A + \frac{A}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots .$$

Теорема 6.3. Для любой комплексной матрицы A и любой целой функции $f(x)$ ряд (6.2) сходится.

Для нахождения $f(A)$ можно использовать следующую теорему.
Теорема 6.4. Пусть характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ разлагается

$$|A - \lambda E| = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \alpha_s)^{k_s},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ различны. Утверждается, что существуют комплексные $n \times n$-матрицы Z_{ij}, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le k_i$ такие, что для любой целой функции $f(x)$ выполнено

$$\begin{aligned} f(A) = f(\alpha_1) Z_{11} + f'(\alpha_1) Z_{12} + \ldots + f^{(k_1 - 1)}(\alpha_1) Z_{1k_1} + \\ \ldots + f(\alpha_s) Z_{s1} + f'(\alpha_1) Z_{s2} + \ldots + f^{(k_s - 1)}(\alpha_s) Z_{sk_s}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ производные $f(x)$ порядков $1, \ldots, k$ соответственно.

Отметим, что в теореме 6.4 матрицы Z_{ij} зависят только от исходной матрицы A и не зависят от функции $f(x)$,
Задача 6.5. Найти A^n и e^{tA} для следующих матриц:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -39 & -9 \end{pmatrix} \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -12 & -8 \end{pmatrix}, \quad c)\ A = \begin{pmatrix} -10 & 9 & 1 \\ -23 & 19 & 2 \\ 24 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение а). $|A - \lambda E| = (\lambda - 4)(\lambda + 3)$. Согласно теореме 6.4, существуют 2×2 матрицы Z_1 и Z_2 такие, что для любой целой функции $f(x)$ выполнено

$$f(A) = f(4) Z_1 + f(-3) Z_2. \tag{6.4}$$

Полагая $f(x) \equiv 1$, получаем соотношение $E = Z_1 + Z_2$. Если положить $f(x) = x - 4$, то получаем $A - 4E = -7Z_1$. Отсюда

$$Z_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -39 & -6 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Ответ. $A^n = 4^n Z_1 + (-3)^n Z_2$, $e^{tA} = e^{4t} Z_1 + e^{-3t} Z_2$, где Z_1 и Z_2 находятся из (6.4).

Решение b).

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -12 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2.$$

Согласно теореме 6.4, существуют 2×2 матрицы Z_1 и Z_2 такие, что для любой целой функции $f(x)$ выполнено

$$f(A) = f(-2)Z_1 + f'(-2)Z_2. \tag{6.5}$$

1) Полагая $f(x) \equiv 1$, получаем $E = Z_1$.
2) Полагая $f(x) = x + 2$, получаем $A + 2E = Z_2$. Отсюда

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Ответ. $A^n = (-2)^n Z_1 + n(-2)^{n-1} Z_2$, $e^{tA} = e^{-2t} Z_1 + t e^{-2t} Z_2$, где Z_1 и Z_2 находятся из (6.6).

Решение c).

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -10-\lambda & 9 & 1 \\ -23 & 19-\lambda & 2 \\ 24 & -17 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^3.$$

Согласно теореме 6.4, существуют 3×3 матрицы Z_1, Z_2, Z_3 такие, что для любой целой функции $f(x)$ выполнено

$$f(A) = f(3)Z_1 + f'(3)Z_2 + f''(3)Z_3. \tag{6.7}$$

1) $f(x) \equiv 1$, $E = Z_1$.
2) $f(x) = x - 3$, $A - 3E = Z_2$.
3) $f(x) = (x-3)^2$, $(A - 3E)^2 = 2Z_2$.
Отсюда

$$Z_1 = E, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} -13 & 9 & 1 \\ -23 & 16 & 2 \\ 24 & -17 & -3 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -14 & 10 & 2 \\ -21 & 15 & 3 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Ответ. $A^n = 3^n Z_1 + n3^{n-1} Z_2 + n(n-1)3^{n-2} Z_3$, $e^{tA} = e^{3t} Z_1 + t e^{3t} Z_2 + t^2 e^{3t} Z_3$, где Z_1, Z_2, Z_3 находятся из (6.8).

§7. Билинейные и квадратичные формы

Определение 7.1. Квадратичная форма $f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ называется положительно определённой, если $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$ и $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$.

Имеет место следующий критерий положительной определённости.

Критерий Сильвестра. Квадратичная форма $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$ положительно определена тогда только тогда, когда все угловые миноры $\delta_1, \ldots, \delta_n$ её матрицы положительны. Напомним, что угловой минор δ_k лежит на пересечении первых k строк и столбцов матрицы.

Задача 7.1. При каком λ следующая квадратичная форма $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + \lambda x_3^2$ положительно определена?

Решение. Составим матрицу нашей квадратичной формы и найдём её угловые миноры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\delta_1 = 4 > 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad \delta_3 = \det A = 11x - 15.$$

Квадратичная форма $f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ положительно определена тогда и только тогда, когда $11x - 15 > 0$.

Ответ. При $x > \frac{15}{11}$.

§8. Евклидовы и унитарные пространства

Задача 8.1. Представить вектор $\mathbf{x} = (-7, 2, 1, 6)$ в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y}$ принадлежит подпространству W, натянутому на векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 2, -1)$, а вектор $\mathbf{z}$ ортогонален W.

Решение. Выясним образуют ли векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ базис W. Для этого составим из них матрицу и вычислим её ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2. Первые два вектора образуют базу в системе строк этой матрицы. Система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ – базис W.

Будем искать вектор $\mathbf{y}$ в виде $\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2$. Отсюда $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - y_1\mathbf{a}_1 - y_2\mathbf{a}_2$

Так как вектор $\mathbf{z}$ ортогонален W, то

$$\begin{cases} (\mathbf{z}, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{x} - y_1\mathbf{a}_1 - y_2\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) - y_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) - y_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) = 0 \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{x} - y_1\mathbf{a}_1 - y_2\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) - y_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - y_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = 0 \end{cases}$$

Получаем систему уравнения для нахождения y_1 и y_2:

$$\begin{cases} 2 - 7y_1 - 4y_2 = 0 \\ -25 - 4y_1 - 11y_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет единственное решение $y_1 = 2$, $y_2 = -3$. Получаем $\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 = 2_1\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 = (-7, 1, -2, 5)$ и $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (0, 1, 3, 1)$.
Ответ. $\mathbf{y} = (-7, 1, -2, 5)$, $\mathbf{z} = (0, 1, 3, 1)$.

§9. Сопряженный оператор.

Пусть V – унитарное(евклидово) пространство. Для любого линейного оператора φ в V существует единственный линейный оператор φ^* такой, что равенство

$$(\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y}))$$

верно для всех векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из V. Линейный оператор φ^* называют сопряженным к φ.

Если $A = (a_{ij})$ матрица оператора φ в ортонормированном базисе, то матрица оператора φ^* в том же базисе будет совпадать с сопряженной матрицей $A^* = (a^*_{ij})$, $a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Заметим, что сопряженная матрица A^* получается из матрицы A композицией двух преобразований: комплексного сопряжения матричных элементов и транспонирования. Коротко $A^* = \overline{A}^t$. Если A – вещественная матрица, то $A^* = A^t$.
Метод нахождения матрицы сопряженного оператора в неортонормированном базисе мы покажем на следующем примере.
Задача 9.1 Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ортонормированный базис евклидового пространства, и пусть оператор φ имеет в базисе $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора φ^* в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
Решение. Заметим, что базис $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ не является ортонормированным. Поэтому матрица матрица A_{φ^*} оператора φ в базисе не является сопряженной к матрице A.

Решение задачи состоит из нескольких этапов:
1) найдём матрицу E_φ оператора φ в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$;
2) найдём матрицу E_{φ^*} оператора φ^* в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (матрица E_{φ^*} совпадает с сопряженной матрицей к E_φ);
3) найдём матрицу E_{φ^*} оператора φ^* в базисе $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

Выпишем матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ и найдём матрицу E_φ:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_\varphi = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрица E_{φ^*} совпадает с сопряженной матрицей к E_φ:

$$E_{\varphi^*} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$A_{\varphi^*} = T^{-1} E_{\varphi^*} T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

§10. Самосопряженные операторы

Снова рассмотрим унитарное (евклидово) пространство V и линейный оператор $\varphi : V \to V$.

Определение 10.1 Оператор φ называется самосопряженным, если $\varphi = \varphi^*$. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе является удовлетворяет условию $A = A^*$. Такие матрицы называют самосопряженными. Для вещественных самосопряженных матриц используют также термин – симметрическая матрица.

Из свойств самосопряженного оператора выделим следующее: собственные значения самосопряженного оператора – вещественные числа. Основной теоремой для самосопряженных операторов является следующая теорема.

Теорема 10.2. Для любого самосопряженного оператора в унитарном (евклидовом) пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Напомним, что вектор $\mathbf{x} \neq 0$ называется собственным вектором линейного оператора φ, если существует число λ для которого выполняется равенство

$\varphi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Число λ называется собственным значением для вектора $\mathbf{x}$. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов является диагональной матрицей.

Следствие 10.3. Для любой самосопряженной комплексной матрицы A существует унитарная матрица U, такая что $D = U^{-1}AU$ – диагональная матрица. Для любой симметрическая вещественная матрицы A существует ортогональная матрица T, такая что $D = T^{-1}AT$ – диагональная матрица.

Следствие 10.4. Для любой вещественной квадратичной формы $f(x, x)$ существует ортонормированный базис, в котором

$$f(x, x) = b_1y_1^2 + ...b_ny_n^2.$$

Задача 10.5. Найти диагональную форму и ортонормированный базис из собственных векторов для самосопряженного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Из теоремы 10.2 вытекает существование такого базиса. Найдём собственные значения и собственные векторы. Вычислим характеристический многочлен

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 9)^2(\lambda + 9).$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9$. Наша матрица подобна диагональной матрице

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы с собственным значением $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ являются решениями системы уравнений

$$(A - 9E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система уравнений пропорциональна одному уравнению

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \tag{10.1}$$

Найдём ортонормированный базис в пространстве решений этого уравнения. Для этого выберем произвольной решение, например одно из фундаментальных решений $(1, 0, -1)$. Второй вектор будем находить из условий, что он удовлетворяет уравнению (10.1) и ортогонален вектору $(1, 0, -1)$. Все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

пропорциональны вектору $(1, -4, 1)$. После нормировки получаем ортонормированный базис в подпространстве собственных векторов с собственным значением $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Недостающий собственный вектор с собственным значений $\lambda_3 = -9$ находится из решения системы уравнений

$$(A + 9E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 \\ -4 & 16 & -4 \\ -8 & -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \tfrac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

§11. Унитарные и ортогональные операторы

Определение 11.1. Оператор $\varphi : V \to V$, действующий в унитарном (евклидовом) пространстве V, называется унитарным (ортогональным) оператором, если $(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Другими словами, оператор унитарный (ортогональный), если он сохраняет скалярное произведение. По этой причине его иногда называют изометрией. Отметим, что, по определению, унитарный оператор действует в унитарном пространстве, а ортогональный – в евклидовом.

Матрица унитарного (ортогонального) оператора в ортонормированном базисе является унитарной (ортогональной) матрицей. Напомним, что матрица унитарная (ортогональная), если столбцы этой матрицы образуют ортонормированный базис. Следующие две теоремы решают вопрос о канонических матрицах унитарного и ортогонального операторов.

Теорема 11.2. Для всякого унитарного оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов.
Следствие. Для всякого унитарного оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора является диагональной матрицей.

Отметим, что собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1. Поэтому в его диагональной матрице по главной диагонали будут стоять комплексные числа, по модулю равные 1.

Теорема 11.2 не верна для ортогональных операторов. Например. линейной оператор поворота $\mathbb{R}^2$ на угол $0 < \alpha < \pi$ не имеет собственных векторов.
Теорема 11.3. Для любого ортогонального оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & B_s \end{pmatrix},$$

где каждый блок B_i равен ± 1 или является матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

Собственные значения ортогонального оператора равны ± 1. Определитель ортогонального оператора также равен ± 1. Поэтому, выделяют два класса ортогональных операторов: собственные ($\det\varphi = 1$) и несобственные ($\det\varphi = -1$).

Из теоремы 11.3 можно получить информацию о геометрических свойствах ортогональных операторов в случаях, когда $\dim V = 2, 3$.
1) $\dim V = 2$.
Каждый собственный ортогональный оператор является оператором поворота на некоторый угол α. Его матрица в произвольном ортонормированном базисе имеет вид (11.1).
Каждый несобственный ортогональный оператор является является отражением(симметрией) относительно некоторого одномерного подпространства W. Его матрица в ортонормированным базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, где $W = \mathbb{R}\mathbf{f}_1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

2) $\dim V = 3$.
Каждый собственный ортогональный оператор является оператором вращения вокруг некоторой оси $\mathbb{R}\mathbf{f}$, $||\mathbf{f}|| = 1$, на некоторый угол α (с позиции

вектора $\mathbf{f}$). Дополним $\mathbf{f}$ до ортонормированного базиса $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Оператор вращения в этом базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Каждый несобственный ортогональный оператор является оператором поворотной симметрии – произведением оператора вращения вокруг некоторой оси $\mathbb{R}\mathbf{f}$ и симметрии(отражения) относительно $\mathbf{f}^{\perp}$. Дополним $\mathbf{f}$ до ортонормированного базиса $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Оператор поворотной симметрии в этом базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

В частности, если $\alpha = 0$, то оператор поворотной симметрий является оператором отражения относительно двумерного подпространства.

Задача 11.4. Найти каноническую матрицу и канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычислим определитель:

$$\det A = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Наш оператор является оператором вращения. Каноническая нашего оператора имеет вид (11.3).

Поскольку $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$, то $1 + 2\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Отсюда $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$ и

$$\alpha = \pm\arccos(-\frac{5}{6}). \tag{11.5}$$

Направляющий вектор $\mathbf{f}_1$ оси вращения – собственный вектор с собственным значением 1. Находим $\mathbf{f}_1$ и дополним до ортонормированного базиса:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

где вектор $\mathbf{f}_2$ находится как частное решение уравнения $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$ и $\mathbf{f}_3 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$.

Осталось определить знак в формуле (11.5). Для этого выберем произвольный вектор, например первый вектор стандартного базиса $\mathbf{e}_1$, найдем его образ $\varphi(\mathbf{e}_1)$. Если тройка $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_1)\}$ правая, то вращение осуществляется против часовой стрелки (с позиции вектора $\mathbf{f}_1$). Если тройка левая, то вращение по часовой стрелке. Вычислим смешанное произведение

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_1)) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 3\frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} < 0.$$

Вращение осуществляется по часовой стрелке. Угол α равен $-\arccos(-\frac{5}{6})$ и $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Ответ. Каноническая форма матрицы и канонический базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & \frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{11}}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.5. Найти каноническую матрицу и канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение Вычислим определитель:

$$\det A = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Наш оператор является оператором поворотной симметрии. Каноническая нашего оператора имеет вид (11.4).

Поскольку $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B$, то $1 + 2\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Отсюда $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ и

$$\alpha = \pm\arccos(\frac{5}{6}). \tag{11.5}$$

Направляющий вектор $\mathbf{f}_1$ оси вращения – собственный вектор с собственным значением -1. Находим $\mathbf{f}_1$ и дополним до ортонормированного базиса:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix},$$

где вектор $\mathbf{f}_2$ находится как частное решение уравнения $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$ и $\mathbf{f}_3 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$.

Знак в формуле (11.6) определяется аналогично предыдущей задаче:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \varphi(\mathbf{e}_1)) = \begin{vmatrix} -3\frac{1}{\sqrt{11}} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} > 0.$$

Вращение осуществляется против часовой стрелке. Угол α равен $\arccos(\frac{5}{6})$ и $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Ответ. Каноническая форма матрицы и канонический базис:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}.$$

§12. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.

Определение 12.1. Алгебраической кривой второго порядка на плоскости называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (12.1)$$

Выражение $f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$ называется кадратичной частью, $2a_{13}x + 2a_{23}y$ — линейной частью, a_{33} – свободным членом уравнения.

Будем предполагать, что уравнение (12.1) задано в начальной декартовой системе координат $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. При переходе в новую декартову систему координат уравнение (12.1) преобразуется подстановкой

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}, \qquad (12.2)$$

где T – ортогональная 2×2-матрица.

Если откинуть те случаи, когда множество вещественных точек кривой пусто (например, $x^2 + y^2 = -1$), или состоит из одной точки (например,

$x^2+y^2=0$), или образует прямую (например, $x^2=0$), то существует ровно 4 типа кривых второго порядка – эллипс, гипербола, парабола и пара прямых (уравнение $(a_1x+a_2y+a_3)(a_1'x+a_2'y+a_3')=0$). Канонические формы этих кривых

A1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс),
A2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гипербола),
B1) $y^2=2px$ (парабола),
A3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (пара пересекающихся прямых),
B2) $x^2-a^2=0$ (пара параллельных прямых).

Типичная задача теории кривых второго порядка состоит в следующем: дано уравнение (12.1), требуется найти каноническую форму и каноническую систему координат кривой.

Изложим метод её решения. Рассмотрим квадратичную часть $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$. Если $f(x,y)$ – полный квадрат, то наша кривая из серии B (парабола или пара параллельных прямых)(см. задачу 12.3).

Если $f(x,y)$ не является полным квадратом, то мы имеем дело с кривой серии A (эллипс, гипербола или пара пересекающихся прямых). В этом случае надо выписать матрицу квадратичной части:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

которая называется главной матрицей кривой. Найдем декартов(т.е. ортонормированный) базис из собственных векторов матрицы $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{pmatrix},\quad \mathbf{f}_2=\begin{pmatrix}t_{12}\\ t_{22}\end{pmatrix}.$$

Перейдём в новую декартову систему координат со старым центром O и новым базисом $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$. При этом координаты преобразуются по формуле

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad T=\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}.$$

После перехода в новую систему координат уравнение (12.1) упрощается

$$F(x',y')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}'=0, \tag{12.3}$$

где λ_1,λ_2 – собственные значения матрицы $\mathcal{A}$. Далее, для нахождения канонической формы и канонического базиса надо сделать перенос начала координат.

Вычисления для кривых серии А можно существенно упростить, если привлечь следующие два соображения.
1) Многочлены

$$I_1 = \mathrm{Tr}\mathcal{A} = a_{11} + a_{22}$$

$$I_2 = \det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения кривой. То есть они не меняются при заменах (12.2). Уравнение кривой серии А переходом в новую декартову систему координат можно привести к виду

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \tag{12.3}$$

Отсюда легко найти каноническую форму уравнения кривой.
2) Центр канонической системы координат кривой в серии А является её центром симметрии и находится из решения системы уравнений

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ F'_y(x,y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{12.4}$$

Задача 12.2. Найти канонический вид и каноническую систему координат кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Решение. Квадратичная часть $5x^2 + 4xy + 8y^2$ не является полным квадратом. Мы имеем дело с кривой серии А. Выпишем главную матрицу данной кривой и вычислим её характеристический многочлен

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad |\mathcal{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-9).$$

Собственные значения – $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, собственные векторы

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим инварианты:

$$I_1 = \mathrm{Tr}\mathcal{A} = 13, \quad I_2 = \det\mathcal{A} = 36, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -36^2.$$

Подставляя в (12.3), получаем $4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$. Отсюда находим каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Нам осталось найти координаты центра новой системы координат. Выпишем систему уравнений (12.4)

$$\begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0 \end{cases}$$

и найдём единственное решение $(2, 3)$

Ответ. Каноническое уравнение: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$; каноническая система координат:

$$O' = (2, 3), \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.3. Найти канонический вид и каноническую систему координат кривой

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0. \tag{12.5}$$

Решение. Квадратичная часть является полным квадратом $f(x, y) = (x - 2y)^2$. Сделаем замену декартовых систем координат

$$\begin{cases} x' = \frac{x-2y}{\sqrt{5}} \\ y' = \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Отсюда получаем формулу замены вида (12.2):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases} \tag{12.6}$$

Начало этой новой системы координат совпадает со старым началом $(0, 0)$, а векторы нового базиса равны

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя (12.6) в (12.5) получаем уравнение кривой в новой системе координат:

$$5x'^2 + 2\sqrt{5}x' + \sqrt{5}y' - 7 = 0. \tag{12.7}$$

Преобразуем уравнение (12.7) к виду

$$\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$$

Сделаем параллельный перенос системы координат

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{8}{\sqrt{5}} \end{cases} \tag{12.8}$$

Уравнение кривой принимает вид

$$(x'')^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}y''$$

и, наконец, после замены $x''' = -y''$, $y''' = x''$, получаем каноническую форму

$$(y''')^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'''.$$

Осталось найти старые координаты центра новой системы координат. Для этого подставим $x'' = 0, y'' = 0$ в (12.8), получим $x' = -\frac{1}{\sqrt{5}}, y' = \frac{8}{\sqrt{5}}$. Затем подставим найденные x', y' в (12.6). Окончательно получаем $x = 3, y = 2$.
Ответ. Каноническое уравнение кривой $(y''')^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'''$, каноническая система координат

$$O' = (3, 2), \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 12.4. Поверхность второго порядка – множество точек пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{12.9}$$

Выражение $f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ называется квадратичной частью, $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z$ — линейной частью, a_{44} – свободным членом уравнения.

Будем предполагать, что уравнение (12.9) задано в начальной декартовой системе координат $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. При переходе в новую декартову систему координат уравнение (12.9) преобразуется подстановкой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \tag{12.10}$$

где T – ортогональная 3×3-матрица.

Как и в случае кривых второго порядка мы не будем рассматривать случаи, когда вещественные решения уравнения (12.4) образуют пустое множество, точку или поверхность первого порядка (т.е. плоскость). Укажем список поверхностей второго порядка и их канонические формы:
A1) эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,
A2) однополостной гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,
A3) двуполостной гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$,
A4) конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$,
B1) эллиптический параболоид $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$,
B2) гиперболический параболоид (седло) $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$,
B3) цилиндр над кривой второго порядка серии A,
C) цилиндр над кривой второго порядка серии B.

Серия B3 состоит из эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гиперболический цилиндра $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и пары пересекающихся плоскостей $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

Серия C состоит из параболического цилиндра $y^2=2px$ и пары параллельных плоскостей $x^2-a^2=0$.

Типичная задача теории поверхностей второго порядка состоит в следующем: дано уравнение (12.9), требуется найти каноническую форму и каноническую систему координат поверхности.

Метод её решения во многом схож с задачей для кривых. Рассмотрим квадратичную часть $f(x,y)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$. Матрица квадратичной части

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется главной матрицей поверхности. Найдём её собственные значения матрицы $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Если все три собственных значения $\neq 0$, то наша поверхность серии A (см. Задача 12.5). Если два собственных значения $\neq 0$ и одно равно 0, то наша поверхность серии B (см. Задача 12.6). Наконец, если одно ненулевое и два нулевых собственных значения, то наша поверхность серии C (см. Задача 12.7).

Найдем декартов(т.е. ортонормированный) базис из собственных векторов матрицы $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{f}_1=\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2=\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3=\begin{pmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{pmatrix}$$

Перейдём в новую декартову систему координат со старым центром O и новым базисом $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. При этом координаты преобразуются по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}. \tag{12.11}$$

После перехода в новую систему координат уравнение (12.9) упрощается

$$F(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{24}z' + a'_{44} = 0, \tag{12.12}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения матрицы $\mathcal{A}$.

Далее, для нахождения канонической формы и канонического базиса во многом сводится к переносу начала координат.

Как и для кривых вычисления для серии А можно упростить, если привлечь следующие два соображения.

1) Многочлены

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения кривой. То есть они не меняются при заменах (12.10). Отметим, первые три инварианта являются коэффициентами характеристического многочлена главной матрицы $|\mathcal{A} - \lambda E| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$.

Уравнение кривой серии А переходом в новую декартову систему координат можно привести к виду

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0 \tag{12.13}$$

Отсюда легко найти каноническую форму уравнения кривой.

2) Центр канонической системы координат кривой в серии А является её центром симметрии и находится из решения системы уравнений

$$
\begin{cases}
F'_x(x,y,z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\
F'_y(x,y,z) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\
F'_z(x,y,z) = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0
\end{cases} \tag{12.14}
$$

Задача 12.5. Определить тип поверхности второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz + 18x - 24y - 6z + 30 = 0$$

Решение. Выпишем главную матрицы поверхности второго порядка и найдём её характеристический многочлен

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{A} - \lambda E| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = \\
&-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9).
\end{aligned}
$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Наша поверхность принадлежит серии А.

Собственные векторы равны соответственно

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения канонической формы вычислим инварианты I_3 и I_4 и подставим в (12.13):

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 162, \quad I_4 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 9 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 7 & -3 \\ 9 & -12 & -3 & 30 \end{vmatrix} = 972,$$

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 6 = 0$$

Каноническая форма поверхности:

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{1} + \frac{(z')^2}{2/3} = 1$$

Наша поверхность – эллипсоид. Осталось найти центр поверхности. Система уравнений (12.14)

$$\begin{cases} 10x - 4y + 18 = 0 \\ -4x + 12y - 4z - 24 = 0 \\ -4y + 14z - 6 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $O' = (-1, 2, 1)$.

Ответ. эллипсоид, $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{1} + \frac{(z')^2}{2/3} = 1$, каноническая система координат:

$$O' = (-1, 2, 1), \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.6. Определить тип поверхности второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат

$$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0 \qquad (12.15)$$

Решение. Выпишем главную матрицы поверхности второго порядка и найдём её характеристический многочлен

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix},$$

$$|\mathcal{A} - \lambda E| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 162\lambda - 15 = (\lambda - 9)(\lambda + 18)\lambda.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -18, \lambda_3 = 0$. Наша поверхность принадлежит серии B.

Находим ортонормированный базис из собственных векторов с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Перейдём в систему координат со старым центром $0 = (0, 0, 0)$ и новым базисом $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Формула (12.11) преобразования координат вектора принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \qquad (12.16)$$

Подставим (12.16) в (12.15). После подстановки наше уравнение примет вид (12.12):

$$F(x', y', z') = 9x'^2 - 18y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{24}z' - 90 = 0.$$

Для нахождения новой линейной части подставим (12.16) в линейную часть уравнения (12.15):

$60x - 12y + 12z = 20(-2x' + y' - 2z') - 4(x' - 2y' - 2z') + 4(2x' + 2y' - z') = -16x' + 36y' - 16z'$

Получаем уравнение поверхности после преобразования (12.16):

$$F(x', y', z') = 9x'^2 - 18y'^2 + -16x' + 36y' - 16z' - 90 = 0. \qquad (12.17)$$

Выделив полный квадрат, получим

$$9(x' - 2)^2 - 18(y' - 1)^2 - 36(z' + 3) = 0.$$

после параллельного переноса системы координат

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' - 1 \\ z'' = z' + 3 \end{cases}$$

поверхность будет задана уравнением

$$9(x'')^2 - 18(y'')^2 - 36z'' = 0$$

или в канонической форме

$$\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{2} = z''$$

Наша поверхность – гиперболический параболоид.

Полагая $x'' = 0, y'' = 0, z'' = 0$, получаем $x' = 2,\ y' = 1,\ z' = -3$. Подставляя в (12.16), получаем $O' = (1, 2, 3)$.

Ответ. Гиперболический параболоид $\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{2} = z''$, каноническая система координат

$$O' = (1, 2, 3), \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.7. Определить тип поверхности второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0. \qquad (12.18)$$

Решение.

Выпишем главную матрицы поверхности второго порядка и найдём её характеристический многочлен

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$|\mathcal{A} - \lambda E| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = -\lambda^3 + 9\lambda^2 = (\lambda - 9)\lambda^2.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Наша поверхность принадлежит серии C. То есть либо параболический цилиндр, либо пара параллельных плоскостей.

Находим ортонормированный базис из собственных векторов с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Перейдём в систему координат со старым центром $0 = (0, 0, 0)$ и новым базисом $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Формула (12.11) преобразования координат вектора принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \qquad (12.19)$$

Подставим (12.19) в (12.18). После подстановки наше уравнение примет вид (12.12):

$$F(x', y', z') = 9x'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{24}z' + 45 = 0.$$

Для нахождения новой линейной части подставим (12.19) в линейную часть уравнения (12.18):

$$-28x + 2y + 16z = -\tfrac{28}{3}(2x' + 2y' + z') + \tfrac{2}{3}(-x' + 2y' - 2z') +$$
$$\tfrac{16}{3}(-2x' + y' + 2z') = -30x' - 12y'.$$

Получаем уравнение поверхности после преобразования (12.19):

$$9(x')^2 - 30x' - 12y' + 45 = 0$$

Выделив полный квадрат, получим

$$9\left(x' - \frac{5}{3}\right)^2 - 12\left(y' - \frac{5}{3}\right) = 0$$

После параллельного переноса

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{5}{3} \\ y'' = y' - \frac{5}{3} \\ z'' = z' \end{cases}$$

получаем каноническое уравнение поверхности

$$(x'')^2 = \frac{4}{3}y''.$$

Наша поверхность – параболический цилиндр.

Осталось найти старые координаты центра новой системы координат. Полагая $x'' = 0, y'' = 0, z'' = 0$, получаем $x' = \frac{5}{3}$, $y' = \frac{5}{3}$, $z' = 0$. Подставляя в (12.19), получаем $O' = (\frac{20}{9}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{9})$.

Ответ. Параболический цилиндр $(x'')^2 = \frac{4}{3}y''$, каноническая система координат

$$O' = (\frac{20}{9}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{9}), \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

§13. Движения на плоскости и в пространстве.

Определение 13.1. Отображение F евклидовой плоскости E^2 на себя называют движением, если оно сохраняет расстояние. То есть $\rho(F(A), F(B)) = \rho(A, B)$ для всех точек $A, B \in E^2$.

Выберем декартову систему координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Пусть для произвольной точки A с координатами (x, y) точка $F(A)$ имеет координаты (x', y'). Тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

где T — некоторая ортогональная матрица и a, b –вещественные числа.

Приведём примеры движений плоскости:

1) параллельный перенос $T_{\mathbf{a}}$ на вектор $\mathbf{a}$;

2) поворот $R_{O,\alpha}$ на угол α против часовой стрелки вокруг некоторой точки O;
3) скользящая симметрия $S_{L,\mathbf{a}}$, представляющая собой композицию параллельного переноса $T_\mathbf{a}$ и симметрии(отражения) относительно прямой L, которая параллельна $\mathbf{a}$.

Оказывается, что других примеров движений плоскости не существует.
Теорема Шаля для плоскости. Всякое движение на плоскости есть либо параллельный перенос, либо поворот, либо скользящая симметрия.

Движение в пространстве определяется аналогично.
Определение 13.2. Отображение F евклидова пространства E^3 на себя называют движением, если оно сохраняет расстояние. То есть $\rho(F(A), F(B)) = \rho(A, B)$ для всех точек $A, B \in E^3$.

Выберем декартову систему координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Пусть для произвольной точки A с координатами (x, y, z) точка $F(A)$ имеет координаты (x', y', z'). Тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{13.2}$$

где T — некоторая ортогональная матрица и a, b, c –вещественные числа. Приведём примеры движений пространства:
1) винтовое движение $T_{L,\mathbf{a},\alpha}$, представляющее собой композицию параллельного переноса $T_\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{a}$ и вращения вокруг оси L с направляющим вектором $\mathbf{a}$ на угол α против часовой стрелки;
2) поворотная симметрия $R_{L,\Pi,\alpha}$, представляющая собой композицию отражения относительно плоскости Π и поворота вокруг оси L, перпендикулярной Π, на угол α;
3) скользящая симметрия $S_{\Pi,\mathbf{a}}$, представляющая собой композицию параллельного переноса $T_\mathbf{a}$ и симметрии(отражения) относительно плоскости Π, которая параллельна $\mathbf{a}$.
Теорема Шаля в пространстве. Всякое движение в пространстве есть либо винтовое движение, либо поворотная симметрия, либо скользящая симметрия.

Движение на плоскости и в пространстве называют собственным, если оно сохраняет ориентацию, и, соответственно, несобственным, если оно меняет ориентацию. Если записать движение в координатной форме (13.1) и (13.2), то движение собственное, если $\det T = 1$, и несобственное, если $\det T = -1$.

Собственные движения плоскости – параллельные переносы и повороты. Всякое несобственное движение плоскости – скользящая симметрия.

Всякое собственные движение пространства – винтовое движение. Несобственные движения пространства бывают двух видов: поворотные симметрии и скользящие симметрии.

Задача 13.3. Определить вид движения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы:

$$\det T = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1.$$

Наше движение собственное и,следовательно, либо поворот, либо параллельный перенос.

Линейный оператор $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{F(A)F(B)}$ является оператором поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки. Движение (13.3)является поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки вокруг некоторого центра. Центр поворота является единственной неподвижной точкой. Подставим x, y вместо x', y' в левую часть формул (13.3):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решив эту систему уравнений, мы получим координаты центра поворота $x = \frac{1-2\sqrt{3}}{2}, y = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

Ответ. Данное движение — поворот против часовой стрелки на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ вокруг точки $O\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$

Задача 13.4 Определить вид движения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{13.4}$$

Решение.

Поскольку

$$\det T = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1,$$

то движение (13.4) несобственное и, следовательно, является скользящей симметрией $S_{L,\mathbf{a}}$. Наша цель – найти уравнение прямой L и вектор переноса $\mathbf{a}$.

Направляющий вектор прямой L является собственным вектором для матрицы T с собственным значением 1. Из системы уравнений

$$(T-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{получаем} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём точку на прямой L. Воспользуемся следующим свойством скользящей симметрии: для любой точки A плоскости середина отрезка $AS_{L,\mathbf{a}}(A)$ принадлежит прямой L. Выберем произвольную точку, скажем $A=(0,0)$. Из(13.4) находим её образ $A'=(1,2)$. Середина $B=(1/2,1)\in L$. Каноническое уравнение прямой L имеет вид:

$$\frac{x-1/2}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{1}. \tag{13.5}$$

Осталось найти вектор переноса $\mathbf{a}$. Для этого найдём образ B' точки B на прямой L. Вектор $\mathbf{a}$ совпадает с вектором $\overrightarrow{BB'}$. Получаем

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Ответ. Скользящая симметрия $S_{L,\mathbf{a}}$, где L задаётся уравнением (13.5) и

$$\mathbf{a} = c\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad c = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 13.5. Определить вид движения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 10 \\ 2 & 14 & -5 \\ -10 & 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

Решение. Вычислим определитель

$$\det T = \frac{1}{15^3}\begin{vmatrix} 11 & 2 & 10 \\ 2 & 14 & -5 \\ -10 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1.$$

Движение (13.6) собственное и, следовательно, является винтовым движением $T_{L,\mathbf{a},\alpha}$. Найдём уравнение прямой L, вектор переноса $\mathbf{a}$ и угол поворота α.

Направляющий вектор прямой $\mathbf{f}$, вокруг которой происходит вращение, является собственным вектором матрицы T с собственным значением 1: Из системы уравнений

$$(T-E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-4&2&10\\2&-1&-5\\-10&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\quad\text{находим}\quad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Вектор переноса $\mathbf{a}$ пропорционален вектору $\mathbf{f}$, то есть $\mathbf{a}=\mu\mathbf{f}$ для некоторой константы μ. Следующая наша цель – найти μ и точку на прямой L. Оказывается, это можно сделать одновременно, если использовать соображение, что на точках прямой L винтовое движение $T_{L,\mathbf{a},\alpha}$ совпадает с параллельным переносом на вектор $\mathbf{a}$. Если $(x,y,z)\in L$, то

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\2\mu\\0\end{pmatrix}$$

$$(T-E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-7\\2\mu-4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-4&2&10\\2&-1&-5\\-10&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-7\\2\mu-4\\-6\end{pmatrix}$$

Рассмотрим эту систему равенств как систему уравнений с параметром μ. Преобразованием системы строк приведём её к виду

$$\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7,5\mu-34,5\\37,5\mu-112,5\\-18\end{pmatrix}$$

Система уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда $\mu=3$. Поэтому $\mathbf{a}=3\mathbf{f}=(3,6,0)$.

Система уравнений принимает вид

$$\begin{pmatrix}0&0&6\\-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-18\end{pmatrix}$$

Найдём частное решение $A=(10,0,-2)$ и каноническое уравнение прямой, вокруг которой происходит вращение

$$\frac{x-10}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{0}.$$

Нам осталось, найти угол поворота α. Обозначим через A', C' образы точек A, C. Оператор

$$\overrightarrow{AC} \to \overrightarrow{A'C'}$$

является оператором вращения на угол α. Его матрица в начальном базисе совпадает с матрицей T и каноническая форма матрицы – с матрицей B из (11.3).

Воспользуемся соображениями из §11:

1) $\mathrm{Tr}T = \mathrm{Tr}B$, отсюда $7/3 = 1 + 2cos(\alpha)$ и $\cos(\alpha) = 2/3$;

2) поскольку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 11/15 \\ 2 & 0 & 2/15 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} > 0$ поворот происходит против часовой стрелки (с позиции вектора $\mathbf{f}$).

Ответ. Винтовое движение $T_{L,\mathbf{a},\alpha}$, где ось L имеет уравнение $\frac{x-10}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{0}$, вектор переноса $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, вращение против часовой стрелки на угол acrcos(2/3).

Задача 13.6. Определить вид движения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ -11 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы

$$\det T = \frac{1}{15^3} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 5 \\ -11 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & -14 \end{vmatrix} = -1$$

Наше движение несобственное и, следовательно, является либо поворотной симметрией, либо параллельным переносом.

Каноническая форма матрицы T имеет вид B из (11.4). Поскольку $\mathrm{Tr}T = \mathrm{Tr}B$, то $cos(\alpha) = \frac{7}{10}$. Заключаем, что движение (13.7) – поворотная симметрия $R_{L,\Pi,\alpha}$.

Направляющий вектор $\mathbf{f}$ прямой L, вокруг которой происходит вращение, является собственным вектором матрицы T с собственным значением -1. Из системы уравнений

$$(T+E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 25 & 10 & 5 \\ -11 & 25 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad \text{находим} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в левую часть (13.7) x, y, z вместо x', y', z', получаем систему уравнений для нахождения неподвижной точки

$$(E-T)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix}25&10&5\\-11&25&2\\2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Неподвижная точка $O=(10/3,-2/3,5/3)$. Уравнение плоскости, относительно которой происходит отражение

$$(x-\frac{10}{3})+(y+\frac{2}{3})-7(z-\frac{5}{3})=0 \tag{13.8}$$

Уравнение прямой, вокруг которой происходит поворот

$$\frac{x-10/3}{1}=\frac{y+2/3}{1}=\frac{z-5/3}{-7} \tag{13.9}$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix}1&1&2/3\\1&0&-11/15\\-7&0&2/15\end{vmatrix}=5>0,$$

то вращение происходит против часовой стрелки.

Ответ. Поворотная симметрия $R_{L,\Pi,\alpha}$, где прямая L имеет уравнение (13.8), плоскость Π уравнение (13.9), вращение осуществляется на угол $\arccos(7/10)$, против часовой стрелки.

Задача 13.7. Определить вид движения

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \tag{13.10}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы

$$\det T=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{vmatrix}=-1$$

Наше движение несобственное и, следовательно, является либо поворотной симметрией, либо параллельным переносом.

Каноническая форма матрицы T имеет вид B из (11.4). Поскольку $\mathrm{Tr}T = \mathrm{Tr}B$, то $cos(\alpha) = 1$ и $\alpha = 0$. Заключаем, что движение (13.10) – скользящая симметрия $S_{\Pi,\mathbf{a}}$.

Нормальный вектор $\mathbf{n}$ плоскости Π является собственным вектором матрицы T с собственным значением -1. Из уравнения

$$(T+E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{находим} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для любой точки A пространства середина отрезка AA' (между точкой и её образом) принадлежит плоскости Π. Это соображение помогает найти точку на плоскости. Положим $A = (0,0,0)$, тогда, подставляя в (13.10), получаем $A' = (1,2,-3)$. Середина отрезка $B = (1/2, 1, -3/2)$.

Уравнение плоскости Π имеет вид $2(x-1/2)+2(y-1)+(z+3/2) = 0$ или

$$4x + 4y + 2z - 3 = 0. \tag{13.11}$$

Нам осталось найти вектор переноса:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ -10/3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Скользящая симметрия $S_{\Pi,\mathbf{a}}$, где уравнение плоскости Π имеет вид (13.11) и вектор переноса $\mathbf{a} = (1/3, 4/3, -10/3)$.

§14 Аффинные пространства

Пусть V – линейное пространство над полем K.
Определение 14.1. Аффинным пространством, ассоциированным с V, называют множество $\mathbb{A}$ вместе с отображением, которое паре точек $A, B \in \mathbb{A}$ ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} \in V$, удовлетворяющее условиям:
1) для любой точки $A \in \mathbb{A}$ отображение $B \mapsto \overrightarrow{AB}$ является биекцией(т.е.взаимнооднозначным отображением) $\mathbb{A}$ на V;
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overline{0}$ для любых $A, B, C, \in \mathbb{A}$.

Основным примером аффинного пространства является координатное аффинное пространство $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$, ассоциированное с n-мерным координатным пространством $V = \mathbb{R}^n$. Отображение $A, B \mapsto \overrightarrow{AB}$ ставит в соответствие паре точек $A = (x_1, \ldots, x_n)$ и $B = (y_1, \ldots, y_n)$ вектор $\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n\}$.

По определению,

$$\rho(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}.$$

Система координат в аффинном пространстве – это набор $(O,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$, где O точка из $\mathbb{A}$ и $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ – базис V.

Определение 14.2. Пусть W подпространство V размерности m и A_0 точка из $\mathbb{A}$. Множество Π точек B, таких, что вектор $\overrightarrow{A_0B}$ лежит в W называют m-плоскостью, параллельной W.

В дальнейшем считаем, что $\mathbb{A}$ – координатное аффинное пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $A_0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ – точка $\mathbb{R}^n$ и

$$\mathbf{f}_1=\{\alpha_1^1,\alpha_2^1,...\alpha_n^1\},$$

$$...$$

$$\mathbf{f}_m=\{\alpha_1^m,\alpha_2^m,...\alpha_n^m\},$$

– базис W. Точка B принадлежит m-плоскости Π тогда и только тогда, когда существуют действительные числа $t_1,\ldots,t_m$ такие, что

$$\overrightarrow{A_0B}=t_1\mathbf{f}_1+\ldots+t_n\mathbf{f}_m. \tag{14.1}$$

Соотношение (14.1) называют параметрическим уравнением m-плоскости Π. В координатах (14.1) переписывается в виде

$$\begin{cases} x_1=x_1^0+\alpha_1^1t_1+\alpha_1^2t_2+...+\alpha_1^rt_r\\ ...\\ x_n=x_n^0+\alpha_n^1t_1+\alpha_n^2t_2+...+\alpha_n^rt_r \end{cases} \tag{14.2}$$

Гиперплоскость (т.е. $n-1$-плоскость) может быть задана алгебраическим уравнением

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=0 \tag{14.3}$$

для некоторых действительных чисел $a_1,\ldots,a_n,b$.

В частности, прямая (т.е. 1-плоскость) в $\mathbb{R}^n$ задаётся точкой $A_0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ и направляющим вектором $\mathbf{f}=\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\}$. Точка B принадлежит прямой, если $\overrightarrow{A_0B}=t\mathbf{f}$ для некоторого действительно числа t. Уравнение прямой в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1=x_1^0+t\alpha_1,\\ x_2=x_2^0+t\alpha_2,\\ ...\\ x_n=x_n^0+t\alpha_n \end{cases} \tag{14.4}$$

Прямая может быть задана в алгебраической форме

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\alpha_1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{\alpha_n}. \tag{14.5}$$

Систему уравнений (14.5) называют каноническим уравнением прямой.

Определителем Грама $G(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ набора векторов $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ называют определитель

$$G(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) = \begin{vmatrix} (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) & \ldots & (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_1) & \ldots & (\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n) \end{vmatrix}.$$

Расстояние $\rho(A, \Pi)$ от точки A до m-плоскости Π определяется как

$$\min\{\rho(A, B)|\ B \in \Pi\}$$

и вычисляется по формуле

$$\rho^2(A, \Pi) = \frac{G(\overrightarrow{A_0A}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)}{G(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)}. \tag{14.6}$$

Расстояние от точки $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до гиперплоскости Π, заданной уравнением (14.3), может быть вычислено по формуле

$$\rho(A, \Pi) = \frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{14.7}$$

Расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между двумя прямыми l_1 и l_2 определяется как

$$\min\{\rho(B_1, B_2)|\ B_1 \in l_1, B_2 \in l_2\}.$$

Если прямые l_1, l_2 имеют начальные точки A_1, A_2 и направляющие векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, то расстояние между прямыми вычисляется по формуле

$$\rho^2(l_1, l_2) = \frac{G(\overrightarrow{A_1A_2}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)}{G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)}. \tag{14.8}$$

Задача 14.3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 3, 2)$, $B(2, 3, 4, 1)$.

Решение.

Воспользуемся формулой 14.4. Найдём направляющий вектор $\overrightarrow{AB} = \{3, 3, 1, -1\}$. Уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 2 - t \end{cases}$$

Задача 14.4. Написать уравнение двумерной плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, -1, 3)$, $B(-2, 3, 5, 7)$, $C(0, 1, 2, 4)$.
Решение. Образуем пару векторов $\overrightarrow{AB} = \{-3, 1, 6, 4\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{-1, -1, 3, 1\}$. Параметрическое уравнение двумерной плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = 2 + t_1 - t_2 \\ x_3 = -1 + 6t_1 + 3t_2 \\ x_4 = 3 + 4t_1 + t_2 \end{cases}$$

Задача 14.5. Найти проекцию точки $A = (5, 0, -3, 4)$ на плоскость $\Pi : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ параллельно прямой

$$l : \frac{x_1 - 1}{-1} = \frac{x_2 - 3}{4} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4 - 2}{1}.$$

Решение.
1) Проведем прямую m, параллельную l и проходящую через точку A:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - t \\ x_2 = 4t \\ x_3 = -3 + 3t \\ x_4 = 4 + t \end{cases}$$

2) Найдем точку пересечения прямой m и плоскости Π. Из уравнения $(5 - t) + (4t) - (-3 + 3t) + (4 + t) = 0$ находим $t = -12$.
Ответ: $B(-7, 48, 33, 16)$.
Задача 14.6. Найти расстояние от точки $A = (4, 5, 1, -3)$, до двумерной плоскости, содержащей точку $A_0 = (2, 3, 1, -2)$ и параллельной подпространству, порожденному векторами $\mathbf{f}_1 = \{1, 2, -1, -2\}$, $\mathbf{f}_2 = \{2, -1, 1, 2\}$.
Решение. Найдём $\overrightarrow{A_0A} = \{2, 2, 0, -1\}$. Вычислим

$$G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 75, \quad G(\overrightarrow{A_0A}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 0 \\ 8 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} = 35.$$

Подставляя в (14.6), получаем
Ответ: $\sqrt{\frac{7}{15}}$.
Задача 14.7. Найти расстояние между прямыми

$$l_1 : \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4 - 4}{0},$$

$$l_2: \ \frac{x_1-2}{2} = \frac{x_2-3}{1} = \frac{x_3-1}{0} = \frac{x_4-5}{2}.$$

Решение. Найдём $\overrightarrow{A_1A_2} = \{1,1,2,1\}$, $\mathbf{f}_1 = \{1,2,-1,0\}$, $\mathbf{f}_2 = \{2,1,0,2\}$. Вычислим

$$G(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 38, \quad G(\overrightarrow{A_0A},\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2) = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 147.$$

Подставляя в (14.8), получаем
Ответ: $7\sqrt{\frac{3}{38}}$.

Оглавление