

Министерство высшего и среднего
специального образования РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С.П.КОРОЛЕВА

В.П.Дерябкин, М.А.Кораблин

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА ЭВМ

Учебное пособие

Утверждено на редакционном
совете института 4/ХП-75 г.

Куйбышев 1977

УДК 519:95

Р е ц е н з е н т ы:

доц. кафедры " Автоматика и телемеханика " КПИ
О.Н.Авдеев, зав. кафедрой "ТПС" КЭИС, д.т.н.,
профессор Д.Д.Кловский, асс. кафедры "ТПС" КЭИС,
к.т.н. В.В.Баранчеев

Валентин Павлович Дерябкин,
Михаил Александрович Кораблин

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА ЭВМ

Учебное пособие

Редактор И.М.Ч у л к о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор О.В.У д а ч и н а

ЕО 01117. Подписано к печати 22/II-77 г.
Бумага 60x84 I/I6, обертка белая. Физ.п.л. 5,25
Усл.п.л. 4,75. Уч.-изд.л. 4,30. Тираж 500 экз.
Цена 22 коп. Темплан 1977, поз. 2327.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени С.П.Королева, Куйбышев,
ул. Молодогвардейская, 151.

Областная типография имени Мяги, г. Куйбышев,
ул. Венцека, 60. Заказ № 825

© Куйбышевский авиационный институт, 1977

В В Е Д Е Н И Е

Моделирование является одним из основных методов познания окружающего мира, формой отражения реальной действительности.

Основной целью моделирования является упрощение процесса исследования, когда вместо моделируемого объекта исследуется его модель, а результаты исследования переносятся на моделируемый объект. В качестве модели может выступать любой объект (явление, процесс, система, установка, знаковое образование), подобный моделируемому объекту. При этом под подобием понимается взаимнооднозначное соответствие между двумя объектами с известными функциями переходов от параметров одного объекта к параметрам другого объекта и с возможностью преобразования математических описаний объекта в тождественные [1].

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. В противном случае модель необходимо корректировать, а процесс моделирования повторять.

Основные виды моделирования однозначно связаны с видами подобия, а, следовательно, и с видами моделей.

В естественных науках под моделью системы понимают обычно описание системы на языке некоторой научной теории (формула, часть теории или даже теория в целом). В свою очередь, теория может моделироваться некоторой конкретной физической системой. На практике используются модели, реализующие не точное подобие (изоморфизм), а неполное, неточное, приближенное подобие (гоморфизм).

При гоморфизме условие взаимной однозначности соответствия снимается: в модели образы некоторых элементов моделируемой системы объединяются (сливаются вместе). Использование приближенного подобия в первую очередь связано с тем, что

в большинстве случаев построение или исследование изоморфной модели несколько не проще исследования непосредственно самого оригинала (моделируемой системы).

Приближенное подобие порождает иерархию моделей по степени их сложности (упрощения), начиная от моделируемой системы и кончая самой простой моделью. При точном подобии иерархии не возникает, так как модель и моделируемая система всегда имеют одинаковую степень сложности. Однако, следует иметь в виду, что иногда модель по своей структуре может быть сложнее моделируемого объекта (избыточное).

Различают физическое и абстрактное моделирование. В основе физического моделирования лежит теория подобия и анализ размерностей. При этом модель имеет ту же физическую природу, что и моделируемый объект, с соблюдением геометрического подобия (подобия формы). Примером является моделирование строительных конструкций и сооружений; моделирование летательных аппаратов и двигателей летательных аппаратов; построение моделей судов, макетов приборов и т.п.

В основе абстрактного моделирования лежит математическое или языковое подобие, когда модель является объектом другой физической природы, чем моделируемый объект, однако процессы в модели и объекте описываются одним и тем же языком или математическими соотношениями. Например, механические и электрические колебательные процессы описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями, но часто электрические цепи легче реализуются и исследуются, что лежит в основе аналогового моделирования. Моделями могут служить также знаковые образования: чертежи, схемы, наборы символов, формулы, слова и предложения искусственного или естественного языка, программы, рассматриваемые вместе с преобразованиями, которые совершает над ними человек или вычислительная машина (математическое моделирование).

При использовании цифровых вычислительных машин (ЦВМ) говорят о математическом моделировании на ЭВМ. Развитие средств цифровой вычислительной техники, удобство исследования и интерпретации полученных результатов с одной стороны и усложнение технических систем с другой - привело к широкому распространению методов математического моделирования на ЦВМ.

В общем случае абстрактное моделирование складывается из следующих этапов:

1) идентификация объекта - построение математической модели объекта;

2) реализация математической модели на средствах вычислительной техники или на объекте любой другой физической природы, чем моделируемый объект;

3) экспериментальное исследование модели;

4) интерпретация полученных результатов.

Процесс моделирования может неоднократно повторяться с изменением математической модели.

Одним из важнейших видов математического моделирования на ЦВМ является вероятностное (статистическое) моделирование, когда используется вероятностное подобие. При этом в основу кладутся математические вероятностные модели, которыми описываются объект и модель. Такие модели определяют средний, суммарный результат, получающийся от действия многих других факторов.

Идентификация объекта, как процесс установления тождественного соответствия между оригиналом и моделью, является первым этапом моделирования. В результате строится математическая модель или изучаемый объект относится к одному из известных классов математических моделей (эталонных).

Этап идентификации и моделирование в целом тесно связаны с экспериментальным анализом. Основная цель эксперимента - получение дополнительной информации для проверки правильности выдвинутых гипотез о виде математической модели и подтверждения результатов исследований. Именно эксперимент является единственным критерием верности (истинности) результатов исследования вообще и моделирования в частности. При обработке результатов эксперимента используются методы математической статистики.

В последующих главах рассматриваются главным образом методы вероятностного (статистического) моделирования на ЦВМ, как важнейшего инструмента исследования сложных АСУ. При этом последовательно излагаются конкретные методы, используемые на отдельных этапах абстрактного моделирования.

Глава I

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

§ I. Модели систем массового обслуживания (СМО)

Физические процессы, наблюдаемые в реальных системах управления (радиотехнических, АСУ производства, АСУ эксперимента и т.д.) могут быть условно разделены на две большие группы: процессы дискретные и непрерывные [2]. Различия между этими группами принципиальны. Для дискретных процессов в системах характерны:

1) операции над отдельными деталями, элементами, узлами и т.п. - составными частями получаемого изделия;

2) возможность расчленения производственного процесса в целом на отдельные этапы - операции, каждая из которых связана с использованием подобного узла или детали.

Примером подобного дискретного процесса может служить сборка изделий на конвейере (например, в машиностроительной промышленности), функционирование взлетно-посадочной полосы аэродрома (при этом " деталями" являются самолеты, " операциями" - посадка или взлет) и т.д.

Вместе с тем, вторая группа процессов - непрерывные процессы - характерны для химического и металлургического производства, АСУ технологическими процессами непрерывного характера и т.д. Особенность этого класса процессов - невозможность расчленения процесса на отдельные операции дискретного типа. Так, выход продукта химической реакции или характер процесса управления нефтепереработкой - суть непрерывные процессы, моделями которых могут служить только непрерывные функции времени.

Математические модели для этих двух типов процессов в системах совершенно различны - первый класс (дискретные процессы) анализируется с использованием моделей теории массового обслуживания, второй (непрерывные процессы) - с использованием теории случайных процессов и временных рядов.

Дискретные производственные процессы и соответственно описываю-

щие их модели теории массового обслуживания широко используются для анализа систем контроля работоспособности изделий, поточного (конвейерного) производства, функционирования вычислительных систем, анализа работы управляющих вычислительных машин (УВМ) и т.д.

Случайные процессы и временные ряды - модели непрерывных физических процессов - применяются при исследовании радиотехнических систем [3], непрерывных производств химической, металлургической, нефтеперерабатывающей промышленности; при исследовании гидравлических, энергетических и тепловых процессов.

Кратко остановимся на моделях дискретных производственных процессов - системах массового обслуживания.

Системы массового обслуживания могут исследоваться различными методами. Обычно это методы аналитического исследования, связанные с решением уравнений состояния (уравнений Колмогорова), которые сравнительно просто составляются с использованием графов состояний. Подобные методы подробно рассматриваются в соответствующих специальных курсах ("Исследование операций", "Теория массового обслуживания"), - поэтому в дальнейшем мы остановимся на них лишь вкратце, предполагая, что читателю методы аналитического исследования систем массового обслуживания известны достаточно хорошо.

Вторая группа методов исследования СМО - методы статистического моделирования, связанные с реализацией математических моделей систем массового обслуживания на электронных вычислительных машинах.

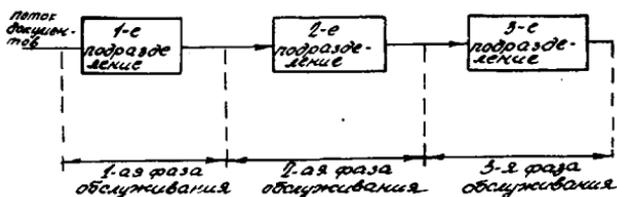
Эти две группы методов в значительной степени независимы друг от друга. Методы аналитического исследования жестко связаны с определенными априорными предположениями о характере системы - вполне определенными типами потоков, переводящих систему из одного состояния в другое, законами распределения времени обслуживания заявок в системе и т.п. Методы статистического моделирования - они позволяют исследовать системы и в том случае, когда использование аналитического подхода не приводит к удовлетворительным результатам. Однако разработка программ моделей, необходимых для исследования систем методами статистического моделирования - процесс трудоемкий и дорогостоящий, кроме того, процессы статистического моделирования обычно весьма длительны, поэтому использование ЭВМ также значительно удорожает второй путь исследования систем массового обслуживания.

Отмеченные обстоятельства делают целесообразным аналитический подход к исследованию СМО, более же дорогостоящий путь статистичес-

кого моделирования должен использоваться лишь в случаях явной необходимости, когда математический анализ системы невозможен. При этом статистическому моделированию всегда должно предпосылаться исследование возможностей аналитического подхода к моделированию системы. Прежде чем обсуждать различные методы моделирования систем массового обслуживания, рассмотрим основные принципы классификации подобных систем, используемые в дальнейшем при построении соответствующих моделей.

I. Основные характеристики СМО

Одним из основных параметров, определяющих сложность СМО, является ее фазность. Если в исследуемой системе производится последовательная, поэтапная обработка изделий (например, сборка на конвейере или утверждение документа несколькими инстанциями учреждения), причем каждая операция по обработке характеризуется своим временем обработки или местом, или каким-то иным отличительным признаком, то мы должны выбрать в качестве модели подобной системы многофазную модель СМО. Например, для автоматизированных систем управления предприятием или учреждением (это может быть и вуз) объектом исследования нередко является схема документооборота. Допустим, что определенный документ, поданный служащим в некоторое подразделение (например, деканат) находится в нем определенное время, затем передается в учебную часть (второе подразделение), откуда поступает в ректорат (третье подразделение) и т.д. (рис. I.1). В каждом из подразделений документ задерживается на некоторое время. Если для



Р и с. I.1

анализа подобного информационного пути документа использовать модель СМО, то она оказывается многофазной (см. рис. I.1). В каждой из фаз может присутствовать как один, так и несколько каналов передачи информации. Например, во второй фазе может быть два подраз-

деления - учебная часть и методический кабинет, документ может попасть в любое из этих подразделений (одно из них) или в оба одновременно (документ и его копия). Каждое из этих подразделений - каналов обрабатывает документ обычно независимо одно от другого.

Канальность СМО определяет, таким образом, количество параллельно выполняемых операций обслуживания внутри одной фазы. Фазность модели СМО - количество последовательных этапов обслуживания в системе. Канальность и фазность модели СМО характеризуют структуру системы и могут расцениваться поэтому как структурные характеристики системы. Еще одним признаком, определяющим структуру системы массового обслуживания, является ее замкнутость. Для замкнутой СМО характерна ограниченность входного потока заявок, поэтому иногда подобные системы называют системами с ограниченным источником заявок [4]. Примером может служить система устранения неисправностей сложного радиотехнического устройства, состоящего из N одновременно работающих блоков (РЛ станция, например). При отказе (поломке) подобного устройства обслуживающим персоналом производится диагностика неисправности и устранение (ремонт отказавшего блока) (рис. 1.2). После устранения отказа блок может вновь



Р и с. 1.2

использоваться в системе. Моделью надежности подобного устройства будет служить замкнутая СМО. Источник заявок на ремонт (отказы) в такой модели ограничен, число отказов не может превосходить числа одновременно функционирующих блоков. Модели замкнутых СМО особенно широко используются при исследовании надежности сложных систем [2].

Вторая важная группа характеристик, определяющих характер модели СМО, связана с такими элементами модели, как очереди.

Очереди образуются перед пунктами обслуживания (каналами СМО) ввиду того, что характер поступающего на обслуживание потока заявок и (или) времени обслуживания заявки в канале - случаен. При этом неизбежна асинхронность (рассогласование) между моментами окончания обслуживания предыдущей заявки и начала обслужива-

ния последующей. Следствием подобного рассогласования и являются очереди. Собственно, очереди - основной фактор, свидетельствующий о случайности моделей СМО, подчеркивая это обстоятельство, теорию массового обслуживания в целом нередко называют теорией очередей.

Очереди подразделяются на ограниченные и неограниченные. Ограниченные очереди возникают при ограниченном числе "мест ожидания" - такой очередью является, например, очередь заявок на расчеты, размещаемая в БП (буферной памяти) управляющей системы, так как объем любого буферного устройства в конечном счете ограничен. Неограниченная очередь характеризуется тем, что в ней может присутствовать неограниченное количество заявок. Для моделирования сложных технических систем используют как правило модели ограниченных очередей. В зависимости от того, существует ли в модели одна очередь заявок, обслуживаемых любым из каналов, или перед каждым каналом образуется своя очередь, очереди в модели СМО подразделяются на общие, отдельные (индивидуальные, зонные). Если размер очереди ограничен объемом, равным нулю, то о соответствующей СМО говорят как о системе с отказами.

Важнейшей характеристикой очереди является дисциплина очереди, определяющая порядок постановки заявок в очередь и выхода из очереди. Наиболее распространены три дисциплины обслуживания:

" первым поступил - первым обслужен " (кратко

FIFO - "First In - First Out")

" последним поступил - первым обслужен " (кратко

LIFO - "Last In - First Out")

очередь с произвольной выборкой заявок.

Возможны, разумеется, и другие дисциплины очереди - это в конечном счете объясняется спецификой конкретной исследуемой системы. Например, в вычислительных системах буферная память - очередь нередко заполняется " по кольцу", при этом в случае полной занятости буфера заявки, поступающие в систему, начинают записываться вновь с первого адреса буфера, стирая находящиеся там старые заявки.

Приоритеты - характеристика моделей СМО, определяющая последовательность обслуживания заявок. Приоритет присваивается каждой заявке, поступающей в СМО. Заявки более высокого приоритета обслуживаются в первую очередь, заявки с меньшим приоритетом - во вторую. Основные разновидности приоритетов - абсолютные и относительные. Приход в систему заявки с абсолютным приоритетом вызывает мгновенное прекращение обслуживания любой заявки меньшего приоритета, при этом система начинает обслуживать вновь поступившую заявку с

абсолютным приоритетом. При приходе в систему заявки с относительным приоритетом, обслуживание предыдущей заявки низшего приоритета доводится до конца, после чего начинается обслуживание заявки более высокого приоритета. Разновидностей приоритетов сравнительно много: динамические, смешанные и т.д. Причем сочетание приоритетов с дисциплинами очередей, структурными характеристиками СМО делают класс моделей СМО очень широким, описывающим практически любой дискретный производственный процесс или систему.

При исследовании моделей СМО важнейшими характеристиками являются статистическое описание информационных потоков в системе (потоков заявок) и дисциплина обслуживания заявок. Под дисциплиной обслуживания обычно подразумевают характеристики времени обслуживания заявок в том или ином канале. Поскольку время обслуживания заявки - величина, чаще всего, случайная (хотя, разумеется, не исключены случаи, когда это постоянная, строго определенная величина) для ее описания используют обычные характеристики непрерывной или дискретной случайной величины: плотность вероятности, интегральную функцию распределения вероятностей, моментные функции и т.п. Разновидностей дисциплин обслуживания очень много, собственно множество их несчетно, как и множество возможных вероятностных законов, однако наибольшее распространение в моделях СМО получила дисциплина обслуживания, характеризуемая экспоненциальным (показательным) распределением времени обслуживания заявок:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \mu e^{-\mu\tau}; & \tau > 0; \mu > 0; \\ F(\tau) &= 1 - e^{-\mu\tau} \end{aligned} \quad (I.1)$$

(f - плотность, F - интегральная функция).

Это обстоятельство объясняется в первую очередь тем, что для такой дисциплины обслуживания возможно построение аналитической модели СМО. Параметр μ в (I.1) носит название интенсивности обслуживания заявок в канале, имеет размерность $[t]^{-1}$ (t - время) и, как легко убедиться, обратно пропорционален среднему времени обслуживания заявки в канале:

$$\mu = \frac{1}{M(\tau)} = \frac{1}{T_{осл}}$$

Однако далеко не всегда при анализе сложных систем оказывается возможным использовать допущение об экспоненциальном времени обслуживания, приходится применять и другие модели. Наиболее распространенные из них:

дисциплина обслуживания с равномерным распределением времени обслуживания заявки;

дисциплина обслуживания с постоянным (регулярным) временем обслуживания (квант обслуживания);

дисциплина обслуживания с дискретным случайным временем обслуживания и т.д.

Нет необходимости перечислять возможные дисциплины обслуживания - в каждом конкретном случае вопрос о выборе той или иной дисциплины обслуживания в модели СМО должен решаться путем предварительного статистического анализа исследуемой системы или на основании некоторых объективных предпосылок такому анализу.

Статистическое описание информационных потоков в системах, адекватных реальным процессам, наблюдающимся в них, также можно получить только путем предварительного анализа системы.

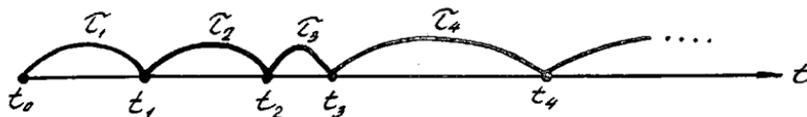
Традиционное предположение, в соответствии с которым подобные потоки считаются простейшими потоками Пуассона, обусловлено чаще всего тем же стремлением построить аналитическую модель системы. Нередко это стремление приводит к построению моделей, далеких от реально проектируемой системы. Методы статистического моделирования СМО позволяют анализировать функционирование систем для потоков более широкого класса.

Сложные системы самого различного назначения, описываемые моделями обслуживания, характеризуются изменением их состояний (E_k) в произвольные, заранее непредсказуемые, случайные моменты времени. Например, для систем противовоздушной обороны, если состояние системы определять по признаку количества сбитых к моменту времени t самолетов противника, изменение состояния произойдет в некоторый момент ($t + \tau$), причем τ - интервал времени между двумя поражениями - величина случайная. Переход системы из состояния в состояние обычно связывают с некоторым событием (в данном примере, с поражением самолета противника). В том случае, когда последовательность подобных переходов (событий) определяется лишь временным течением процесса функционирования системы, т.е. события никак не отличаются одно от другого, мы говорим о математической модели потока однородных событий. Так, в предыдущем примере поток поражений самолетов - поток однородных событий. Поток же, например, выстрелов, произведенных к моменту времени t , можно рассматривать как поток неоднородных событий, поскольку каждое событие - выстрел может быть двух типов - "поражение" или "промах".

Поток однородных событий определяется, как уже было отмечено, лишь последовательностью моментов времени наступления событий $\{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ (рис. I.3).

t_0 - момент начала функционирования системы.

Величины $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, отделяющие моменты времени наступления двух "соседних" событий, следует рассматривать как случай-



Р и с. I.3

ные. Для весьма широкого класса потоков однородных событий - потоков Пальма [2], $\tau_2, \tau_3, \tau_4, \dots$ можно расценивать как независимые реализации одномерной случайной величины τ с плотностью вероятностей $f(\tau)$. Величина же τ_1 при этом расценивается как независимая от остальных реализаций случайной величины с законом распределения

$$f_1(\tau) = \lambda \left[1 - \int_0^{\tau} f(u) du \right] \quad (I.2)$$

(формула Пальма);

$$\lambda = \left[\int_0^{\infty} \tau f(\tau) d\tau \right]^{-1}. \quad (I.3)$$

Для $f(\tau)$ могут использоваться самые различные законы распределения:

- экспоненциальный;
- распределение Эрланга;
- равномерное распределение;
- усеченно-нормальное распределение и т.п.

Для экспоненциального закона $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$, $\lambda > 0$, $\tau \geq 0$ оказывается характерным, что

$$f_1(\tau) = f(\tau) \quad (I.4)$$

в чем нетрудно убедиться, используя соотношения (I.3), (I.2).

Этот случай соответствует простейшему потоку событий (или потоку Пуассона). Для такого потока число событий (k), наступивших на интервале времени $[0, t]$ - дискретная случайная величина, определяемая законом распределения Пуассона

$$P\{k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (I.5)$$

с параметром

$$a = \lambda t,$$

где λ - интенсивность (или параметр) потока ($\lambda > 0$).

Формула (I.5) может быть распространена и на случай интервала времени $[t_1, t_2]$

$$P\{k\} = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}; \quad \lambda > 0,$$

где k - число событий, наступивших на интервале времени $[t_1, t_2]$.

Распределения Эрланга, равномерное, нормальное подробно описаны, например, в [5], [6].

Формально моделирование подобных потоков однородных событий мало чем отличается от моделирования случайных величин. Это обусловлено независимостью реализаций $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, что свидетельствует об ограниченном последствии потока [2]. Простейший же поток является, как известно, потоком без последствия: в нем количество событий, наступивших на интервале $[t_1, t_2]$ никак не зависит от того, сколько событий в потоке наблюдалось до момента времени t_1 .

Потоки Эрланга, являющиеся одним из частных случаев потоков Пальма, используются при построении моделей СМО особенно широко - это обусловлено и хорошими аппроксимационными свойствами распределения Эрланга и возможностью (в отдельных случаях) аналитического исследования подобных моделей (с помощью, например, вложенных цепей Маркова [7]). Для потоков Эрланга величина τ , определяющая интервал времени между моментами наступления событий, в системе (см. рис.1.3), может быть определена как сумма k случайных величин

$$\tau = \sum_{i=1}^k x_i, \quad (I.6)$$

независимых друг от друга и распределенных по экспоненциальному закону с параметром λ . В этом случае τ распределена по закону Эрланга k -ого порядка с плотностью вероятности

$$f(\tau) = \lambda \frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda\tau}. \quad (I.7)$$

Если величины x_i в (I.6) распределены экспоненциально, каждая со своим параметром λ_i , то их сумма подчиняется обобщенному закону распределения Эрланга с плотностью вероятности

$$f(\tau_s) = \left[\prod_{i=1}^k \lambda_i \right] \sum_{j=1}^k \frac{e^{-\lambda_j \tau_s}}{\prod_{i=1, i \neq j}^k (\lambda_i - \lambda_j)};$$

При $k = 1$ поток Эрланга вырождается в простейший Пуассоновский (в этом нетрудно убедиться, сравнив (I.7) и (I.4)); в случае, когда $k \rightarrow \infty$ поток Эрланга приближается к регулярному (при условии постоянства интенсивности потока).

Нередко потоки событий в системах отличаются нестационарностью - случай, когда параметр λ оказывается зависящим от времени:

$\lambda(t)$. В качестве примера нестационарного потока рассмотрим поток Пуассона с переменным параметром, для которого интегральная функция распределения величины τ , отделяющей моменты наступления двух "соседних" событий (см. рис.1.3), определяется выражением:

$$P(\tau < u) = F(u, t) = 1 - e^{-\lambda(t, u)};$$

$$\Lambda(t, u) = \int_t^{t+u} \lambda(t) dt. \quad (I.8)$$

Плотность вероятности величины τ найдется как производная от $F(u, t)$:

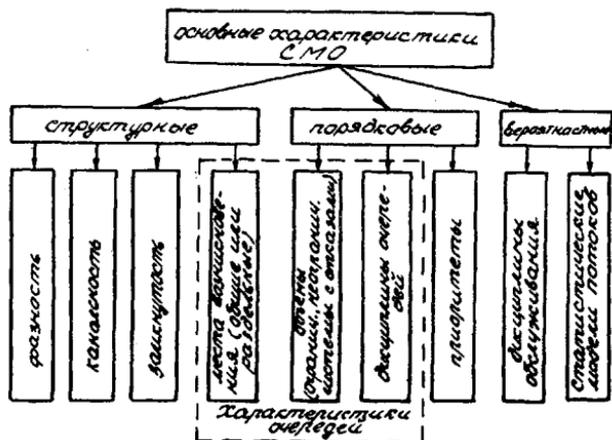
$$f(u, t) = \frac{dF(u, t)}{du} = \frac{d\Lambda(t, u)}{du} e^{-\lambda(t, u)}. \quad (I.9)$$

Функция плотности вероятности первого интервала τ , определится из (I.9), если положить $t = t_0 = 0$,

$$f_1(u, 0) = \frac{d\Lambda(0, u)}{du} e^{-\lambda(0, u)}.$$

Характер изменения интенсивности потока λ по времени может быть самым различным: периодическим (потоки, имеющие "сезонный" характер), возрастающим, убывающим и т.д. Постоянство $\lambda(t)$ на некотором интервале времени $[t_1, t_2]$ позволяет рассматривать нестационарный в общем поток как локально-стационарный. В этом случае $[t_1, t_2]$ - интервал локальной стационарности потока.

Рассмотренные характеристики моделей СМО можно условно разделить на три основные группы (рис. I.4): структурные, определяющие конфигурацию модели, порядковые и вероятностные. Первая группа



Р и с. I.4

характеристик определяет общую структуру (конфигурацию) самой модели; вторая - характеризует порядок обслуживания заявок, постановки их в очередь, выхода заявок из очереди и т.д.; наконец, третья группа определяет характер используемых в системе массового обслу-

живания вероятностных моделей для времени обслуживания заявок и информационных потоков. Деление это, как и любая классификация, во многом не лишено условностей, однако, на наш взгляд, оказывается полезным при описании моделей реальных систем в терминах СМО.

Рассмотрим пример построения модели СМО для исследования системы контроля изделий, иллюстрирующий два возможных пути моделирования - построение аналитической модели систем и подход, основанный на статистическом моделировании.

II. П р и м е р. Аналитическая модель системы контроля

На выходе поточной линии готовые изделия проходят функциональный контроль на специальных стендах. Если все стенды к моменту поступления изделия на контроль оказываются занятыми, то изделие остается непроверенным. При наличии хотя бы одного свободного стенда изделие подвергается контролю. Каждый из стендов может контролировать только одно изделие одновременно.

1. Описать работу поточной линии и системы контроля в терминах моделей СМО.

2. Указать, какие характеристики исследуемой системы необходимо задать для моделирования СМО (аналитического или статистического).

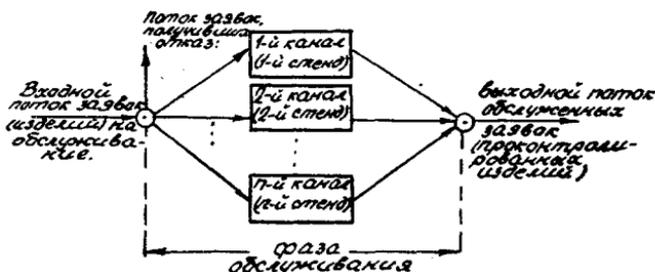
Анализ подобной системы контроля целесообразно начинать с классификации данной системы в классе моделей систем массового обслуживания. Изделия, поступающие с поточной линии на контроль, образуют входной поток изделий (заявок в СМО), контрольные стенды являются приборами или каналами обслуживания данных заявок. После обслуживания на стенде изделие не поступает на какую-либо последующую обработку, а образует непосредственно выходной поток проконтролированных изделий (одна фаза обслуживания в СМО). Тот факт, что в случае занятости всех контрольных стендов изделие остается непроверенным - получает отказ в контроле, позволяет расценивать рассматриваемую систему как СМО с отказами (без очередей). Итак, в терминах теории массового обслуживания исследуемая система контроля представляет собой однофазную, многоканальную систему массового обслуживания с отказами (рис. 1.5). Источник заявок на обслуживание (поточная линия) может считаться неограниченным, проконтролированные же изделия не возвращаются в исследуемую систему, что позволяет использовать модель разомкнутой СМО.

Таким образом, структуру модели мы можем определить уже по

предварительным исходным данным, описывающим только самые общие принципы организации системы контроля изделий.

Для исследования подобной модели (СМО) необходимо указать:—

1. Каков характер входного потока и его статистическое описание.
2. Дисциплину обслуживания в канале. Статистические характеристики времени обслуживания.
3. Цель моделирования — какая характеристика исследуемой системы должна быть определена и с какой точностью.



Р и с. 1.5

Ответы на эти вопросы можно получить либо путем детального статистического исследования рассматриваемой системы контроля, либо путем построения некоторых эвристических предположений, представляющих адекватными действительности.

Если указания 1 — 3 таковы, что может быть построена аналитическая модель СМО, исследование ее может быть проведено известными методами теории массового обслуживания. В случае, когда математический анализ системы практически невозможен, остается единственный путь исследования системы — статистическое моделирование. Впрочем, иногда этот путь выбирают и в тех случаях, когда указания типа 1—2 предварительно дать просто невозможно, а целью моделирования является собственно разработка подобных указаний, удовлетворяющих определенным критериям оптимальности. Подобная ситуация складывается, например, при проектировании новых систем, характеризующихся ограниченным объемом априорной информации, имеющейся в распоряжении исследователя.

Проиллюстрируем метод построения аналитической модели СМО для исследования рассматриваемой системы контроля. Для этого предположим, что цель моделирования заключается в определении, сколь-

ко контрольных стенов необходимо установить на выходе поточной линии, чтобы не менее 90% готовых изделий было проконтролировано.

Построение аналитической модели СМО базируется на предположениях о том, что

входной поток заявок имеет характер простейшего потока (интенсивности λ);

время обслуживания в каждом канале (контроля изделия на стенде) – случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону (интенсивность обслуживания одинакова для всех каналов).

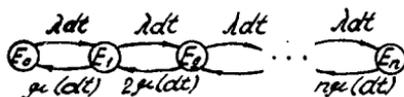
Допустим, что эти предположения в нашем случае оправданы. Хотя в реальных практических ситуациях подобные предположения могут быть далеки от истины, мы примем их главным образом с целью иллюстрации возможностей построения аналитической модели рассматриваемой системы.

Состояние системы E_k определим по признаку количества требований, находящихся в системе. Учитывая, что в системе массового обслуживания (см. рис. I.5) одновременно могут находиться не более k заявок (каждый стенд обслуживает лишь одно изделие), выделим следующие состояния системы:

$$E_0, E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_n,$$

где E_0 – состояние, в котором все стенды бездействуют (нет изделий на контроле); E_n – состояние, в котором все стенды заняты контролем.

Размеченный граф состояний рассматриваемой системы представлен на рис. I.6.



Р и с. I.6

Пояснения к разметке графа мы здесь не приводим, поскольку, как уже отмечалось, предполагаем, что читатель знаком с элементами теории массового обслуживания.

Целью построения аналитической модели системы является определение количества контрольных стенов, при котором контроль прошло бы не менее 90% изделий с поточной линии. Иначе говоря, вероятность контроля готового изделия $P_{\text{конт}}$ должна быть не меньше 0,9:

$\rho_{\text{конт}} > 0,9$. Вероятность же отказа в контроле $\rho_{\text{отк}} = 1 - \rho_{\text{конт}}$ при этом должна удовлетворять неравенству $1 - \rho_{\text{отк}} \geq 0,9$; $\rho_{\text{отк}} \leq 0,1$.

Изделие получает отказ в контроле в соответствии с условиями работы системы в том случае, если все стенды к моменту поступления изделия на контроль заняты, т.е. другими словами, если система находится в состоянии E_n .

Используя аналитическую модель системы, мы можем определить вероятность того, что система находится в состоянии E_n и из условия

$$\rho_{\text{отк}} = \rho_n \leq 0,1$$

определить n - количество контрольных стендов, при котором изделие с вероятностью, не меньшей 0,9, окажется проконтролированным.

Подобный анализ приводит к определению вероятности ρ_n с помощью хорошо известной в теории массового обслуживания формулы Эрланга:

$$\rho_n = \frac{1}{n!} \rho^n \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rho^k}; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{I.10})$$

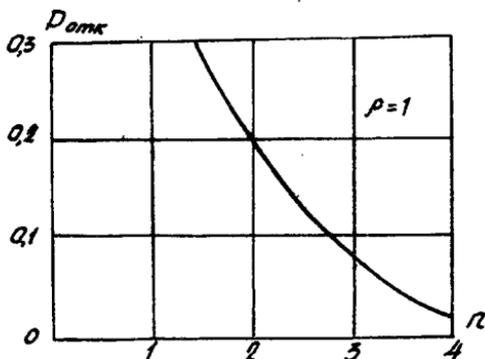
и мы, таким образом, аналитически определили вероятность отказа в контроле. На рис. I.7 приведен график зависимости $\rho_{\text{отк}}(n)$ - вероятности того, что изделие останется непроконтролированным, от n - количества контрольных стендов, построенный по (I.10).

Как следует из этого графика, при установке 3-х контрольных стендов на выходе поточной линии (для $\rho = 1$) будет проконтролировано не менее 90% готовых изделий.

Такова аналитическая модель рассматриваемой системы контроля.

Использование подобной модели полностью основано на математическом аппарате теории массового обслуживания.

Основной недостаток такого моделирования, как уже отмечалось, связан с жесткими априорными ограничениями, накладываемыми на характер потоков заявок в системе, время обслуживания и т.д. Попытки



Р и с. I.7

обобщить аналитическую модель, не привязывая ее к жестким априорным предпосылкам, предпринимались неоднократно. Было получено немало результатов, позволяющих вести аналитический расчет системы при произвольном, например, законе распределения длительности обслуживания заявок, при некоторых иных видах входного потока [4], [7]. Однако в общем случае аналитическую модель системы удается использовать только при исследовании сравнительно простых систем. Исследование сложных систем связано с привлечением второй группы методов - методов статистического моделирования, требующих составления специальных программ моделей, реализуемых впоследствии на ЭМ.

Изложению приемов и методов статистического моделирования посвящена следующая глава настоящего пособия. Построение статистической модели СМО, описывающей рассмотренную систему контроля, требует некоторых дополнительных сведений и будет рассмотрено в следующей главе (§ 5).

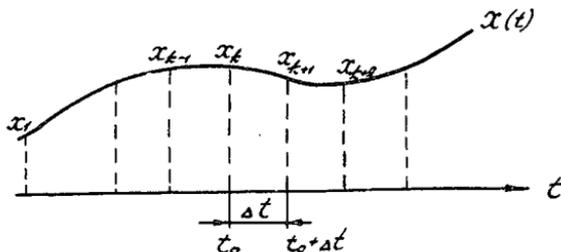
§ 2. Модели скользящего среднего - авторегрессий

Рассмотрим класс математических моделей, используемых для анализа второй группы производственных процессов - процессов непрерывного типа. Как уже отмечалось, подобные процессы характерны для ряда непрерывных производств химической, металлургической, нефтеперерабатывающей промышленности, радиотехнических систем, систем автоматической ориентации летательного аппарата и т.д.

Математические модели случайных процессов, применяемые при анализе этой группы систем, в ряде случаев исследуются с помощью специальных технических устройств аналогового типа (АВМ - аналоговых вычислительных машин). Вместе с тем стремление полностью использовать достоинства ЦМ (например, такие, как быстрдействие) при анализе непрерывных случайных процессов потребовало разработки особого класса моделей, реализуемых на ЦМ - моделей авторегрессий.

Модели скользящего среднего - авторегрессий - это удобная форма, позволяющая реализовать модели непрерывных случайных процессов на универсальных ЦМ. В известной степени эти модели являются как бы согласующим звеном между исследуемым случайным процессом непрерывного типа и средством исследования - ЦМ, оперирующим, как известно, с информацией, имеющей дискретный характер.

Случайный процесс, наблюдаемый в системе и имеющий непрерывный характер (рис. I.8) для анализа с использованием ЦВМ обычно заменяется случайной последовательностью - дискретным временным рядом [2], [3], который получен путем дискретизации исходного процесса с шагом Δt . Исходя из этого и принцип моделирования случайного процесса непрерывного типа на ЭВМ называют обычно "принципом Δt ".



Р и с. I.8

Выборить модель подобного временного ряда, позволяющую определить его k -ый отсчет алгоритмически, - это значит установить зависимость вида:

$$x_k = \psi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{z}), \quad (I.II)$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$; $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_e)$ - детерминированные параметры модели;

$\vec{x} = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-e})$ - отсчеты временного ряда, предшествующие x_{k+1} ;

$\vec{z} = (z_k, z_{k-1}, \dots, z_{k-e})$ - аналогичные отсчеты чисто случайного ряда, получающегося путем дискретизации (по времени) белого шума. Величины z_k, z_{k-1}, \dots не коррелированы одна с другой, имеют нулевое среднее и дисперсию, равную σ^2 .

Соотношение (I.II) определяет модель случайного непрерывного процесса $x(t)$ в классе параметрических моделей, причем параметры последних - $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ определяются, исходя из заданных вероятностных (или корреляционных) характеристик моделируемого процесса $x(t)$.

Мощной параметрической моделью, которая широко используется на практике, является модель скользящего среднего- авторегрессии, для которой соотношение (I.II) может быть конкретизировано в линейной форме:

$$x_k - \mu = \alpha_1(x_{k-1} - \mu) + \alpha_2(x_{k-2} - \mu) + \dots + \alpha_m(x_{k-m} - \mu) + \beta_0 z_k + \beta_1 z_{k-1} + \dots + \beta_e z_{k-e}; \quad (I.I2)$$

где μ - среднее значение процесса $x(t)$. Модель (I.12) используется как правило для описания стационарных случайных процессов.

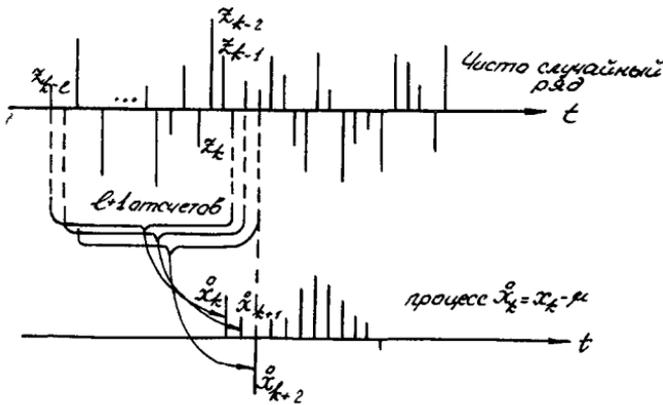
Кратко рассмотрим основные свойства двух разновидностей подобных моделей: моделей скользящего среднего и моделей авторегрессии и приведем основные рекомендации по их использованию при моделировании систем.

I. Модели скользящего среднего. Подобная модель является частным случаем (I.12):

$$x_k - \mu = \beta_0 z_k + \beta_1 z_{k-1} + \dots + \beta_\ell z_{k-\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i z_{k-i}, \quad (I.13)$$

где ℓ - порядок модели скользящего среднего.

При использовании этой модели в образовании величины x_k участвуют, таким образом, $(\ell+1)$ отсчетов чисто случайного ряда (рис. I.9), которые являются некоррелированными случайными величинами с нулевым средним и дисперсией σ^2 .



Р и с. I.9

Поскольку $k-i \geq 1$, алгоритм (I.13) определяет метод моделирования процесса $x(t)$ лишь при $k \geq \ell+1$ (стационарный режим), для $k < \ell$ (I.13) содержит лишь k членов суммы (переходный режим). Объединяя эти два случая, получим:

$$x_k - \mu = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i z_{k-i}; & k = \ell+1, \ell+2, \dots; \\ \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i z_{k-i}; & k = 1, 2, \dots, \ell. \end{cases} \quad (I.14)$$

Переходный режим связан с накоплением первых $(\ell+1)$ члена суммы, он не учитывается обычно при рассмотрении свойств алгоритма (I.13), поскольку метод предназначен для получения больших массивов x_k , таких, что $k \gg \ell$.

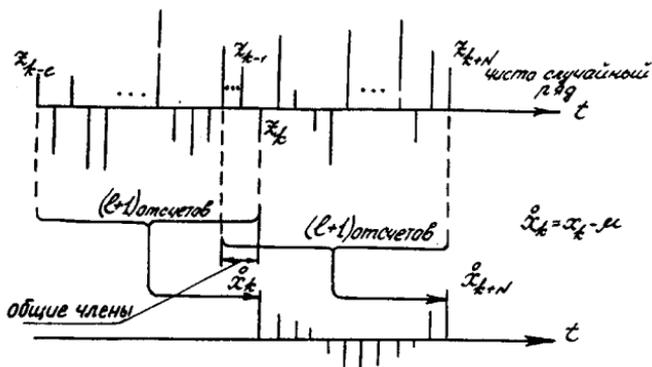
Параметры β_i модели скользящего среднего определяются, исходя из заданной ковариационной функции процесса $x(t)$.

Во-первых, заметим, что корреляция между отсчетами процесса x_k и x_{k+N} обусловлена тем, что соответствующие скользящие суммы

$$x_{k-\mu} = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i z_{k-i}; \quad (I.15)$$

$$x_{k+N-\mu} = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i z_{k+N-i} \quad (I.16)$$

имеют $(\ell+1-N)$ общих членов (рис. I.10, диаграмма). Следовательно, при $\ell+1-N=0$, $N=\ell+1$ отсчеты x_k и $x_{k+\ell+1}$ некоррелированы. Тем более отсутствует корреляция при $N > \ell+1$. Отсюда следует важный вывод: метод скользящего среднего конечного порядка ℓ позволяет моделировать процессы с ограниченной (финитной) ковариационной (и корреляционной) функцией.



Р и с. I.10

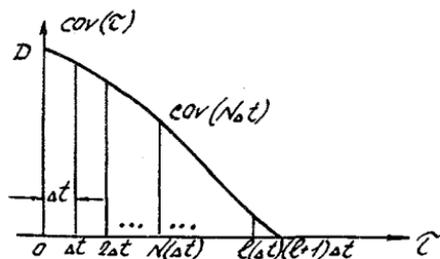
Во-вторых, для определения параметров β_i необходимо составить систему уравнений, использующих отсчеты ковариационной функции моделируемого стационарного процесса $x(t)$. Допустим, что $x(t)$ обладает ковариационной функцией (рис. I.11);

$$M\{(x(t)-\mu)(x(t+\tau)-\mu)\} = \text{COV}(\tau)$$

$cov(0) = D$ - дисперсия процесса $x(t)$, M - символ усреднения.

Потребуем, чтобы параметры β_i модели скользящего среднего обеспечивали равенство ковариационных функций модели и процесса $x(t)$ в точках $N(\Delta t)$, т.е.:

$$M\{(x_k - \mu)(x_{k+N} - \mu)\} = cov(N\Delta t). \quad (I.17)$$



Р и с. I.II

Используя (I.15), (I.16) и принимая во внимание условия некоррелированности отсчетов "чисто случайного" ряда z_k :

$$M\{z_k z_m\} = \begin{cases} \sigma^2 & k=m; \\ 0 & k \neq m; \end{cases}$$

из последнего соотношения (I.17) получим

$$M\left\{\sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \beta_i z_{k-i} \beta_j z_{k+N-j}\right\} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i \beta_{N+i}; \quad (I.18)$$

$$cov(N\Delta t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i \beta_{N+i}.$$

Поскольку количество коэффициентов β_i определяется только порядком модели $i = 0, 1, 2, \dots, \ell$, на величину $(N+i)$ накладывается дополнительное тривиальное ограничение: $N+i \leq \ell$.

Поэтому окончательно система уравнений (I.18) определится в виде

$$cov(N\Delta t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell-N} \beta_i \beta_{N+i}. \quad (I.19)$$

Решая систему (I.19) относительно β_i $i = \overline{0, \ell}$ с использованием значений $cov(N\Delta t)$, полученных в результате дискретизации с шагом Δt заданной ковариационной функции процесса $x(t)$, определим параметры модели скользящего среднего. Сам же процесс реализации на ЭМ алгоритма (I.13) (или точнее (I.14) оказывается значительно проще, чем подготовительные расчеты, связанные с решением системы уравнений (I.19).

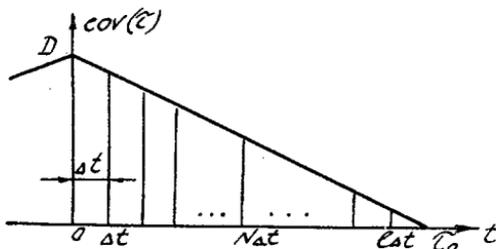
Приведем пример моделирования стационарного случайного процесса методом скользящего суммирования.

Пусть требуется получить на ЭЦМ цифровую реализацию стационарного случайного процесса с финитной ковариационной функцией треугольного вида:

$$\text{cov}(\tau) = \left[1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right] D; \quad |\tau| < \tau_0$$

(рис. I.12) [3] дисперсией D_u и средним μ ,

Выбирая Δt таким образом, чтобы $\frac{\tau_0}{\Delta t} = \ell + 1$ оказалось целым (подробнее вопросы выбора шага Δ и связанной с ним погрешности см. в [3]), составим в соответствии с (I.19) систему уравнений:



Р и с. I.12

$$\text{cov}(N\Delta t) = D \left[1 - \frac{N\Delta t}{\tau_0}\right] = D \left[1 - \frac{N}{\ell+1}\right] = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\ell-N} \beta_i \beta_{N+i}; \quad (I.20)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots, \ell+1,$$

которую необходимо разрешить относительно β_i .

Пусть $\beta_i = \beta$, тогда

$$\sum_{i=0}^{\ell-N} \beta_i \beta_{i+N} = (\ell - N + 1) \beta^2$$

и из (I.20) следует, что

$$\beta = \left(\frac{D}{\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma}.$$

Алгоритм формирования реализации подобного случайного процесса, определяемый моделью (I.13), сводится при этом к скользящему равноновесному суммированию последовательности некоррелированных случайных чисел z_k с нулевыми средними и дисперсиями σ^2 :

$$x_k - \mu = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{D}{\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\ell-k} z_{k-i}. \quad (I.21)$$

Заметим, что в общем случае определение коэффициентов β_i из системы уравнений (I.19) - дело не простое, требующее использования специальных приемов [3]. Приведенный же здесь пример иллюстрирует лишь отдельные исключительные случаи, когда модель скользящего среднего может быть определена сравнительно просто.

Процессы, характеризуемые финитными ковариационными функциями, моделируемые с помощью метода скользящего суммирования, распростра-

нены довольно широко для самых различных систем. Модели скользящего среднего линейные. Линейность этих моделей обусловлена тем, что они строятся с учетом линейных корреляционных свойств моделируемого процесса, а не вероятностных законов распределения. Это обусловлено не только трудностями оперирования с многомерными законами распределения и естественным стремлением упростить модель, но также и тем, что для очень широкого класса задач оказывается достаточным использование лишь корреляционной теории случайных процессов. Таковы задачи анализа динамических систем автоматического управления, описываемых дифференциальными уравнениями, исследования радиотехнических систем, задачи фильтрации и т.п.

В качестве еще одного аргумента, позволяющего объяснить широкое распространение моделей скользящего среднего - авторегрессий, можно привести еще и то обстоятельство, что на практике исследуемые непрерывные процессы нередко предполагаются нормальными (и вполне оправданно). Нормальный же процесс, как известно, полностью описывается в рамках корреляционной теории, что обеспечивает полную адекватность рассматриваемых здесь моделей практическим ситуациям.

2. Метод авторегрессий

Для моделирования стационарных случайных процессов широко используется и несколько иной метод, основанный на рекуррентных разностных алгоритмах - моделях авторегрессии.

Модель авторегрессии N -ого порядка называется соотношением

$$x_k - \mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i (x_{k-i} - \mu) + z_k, \quad (I.22)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots,$$

которое устанавливает связи между k -ым отсчетом моделируемого процесса - x_k и m предыдущими отсчетами: x_{k-i} , $i = \overline{1, m}$,

μ - по-прежнему, среднее значение процесса

$$M(x(t)) = \mu;$$

z_k - отсчет чисто случайного ряда:

$$M(z_k) = 0, \quad M(z_k z_m) = \begin{cases} \sigma^2 & k = m; \\ 0 & k \neq m; \end{cases}$$

α_i - параметры модели, определяемые из условия равенства ковариационных функций процесса $x(t)$ и его модели (I.22).

Методы авторегрессий и скользящего суммирования тесно связаны и имеют много общего. В переходном режиме, например, при $k \leq m$ алгоритм (I.22) должен быть переписан в виде, аналогичном (I.14).

Так же, как и при использовании метода скользящей суммы, переходный процесс обычно не учитывается при рассмотрении свойств алгоритма, поскольку он предназначен для получения больших массивов

$$x_k, k \gg m.$$

Параметры авторегрессионной модели $\alpha_i, i = \overline{1, N}$ определяются также во многом аналогично методу определения β_i - параметров скользящей суммы. Однако здесь есть своя специфика, которая приводит к некоторым принципиальным отличиям этих двух моделей. И основное из них заключается в том, что модели авторегрессий используются для описания стационарных процессов с нефинитной ковариационной функцией, существующей на всей оси задержек $[-\infty, \infty]$.

Параметры $\alpha_i; i = \overline{1, N}$ моделей авторегрессии определяются по заданным отсчетам ковариационной функции моделируемого процесса.

Особое распространение на практике получила модель авторегрессии первого порядка (марковский случайный процесс):

$$x_k - \mu = \alpha_1 (x_{k-1} - \mu) + z_k$$

у которого каждый последующий отсчет x_k зависит лишь от одного предыдущего x_{k-1} и не зависит от остальных.

Если нам требуется построить модель непрерывного марковского случайного процесса с заданной дисперсией D и корреляционной функцией вида $\rho(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$, то параметры модели авторегрессии α_1 и σ^2 легко определяются из следующих соотношений:

$$\alpha_1 = e^{-\alpha_1 \Delta t}; \quad \sigma^2 = D(1 - \alpha_1^2)$$

и алгоритм

$$x_k - \mu = e^{-\alpha_1 \Delta t} (x_{k-1} - \mu) + z_k, \quad (I.23)$$

где Δt - шаг дискретизации процесса, z_k - отсчеты "чисто случайного" ряда с дисперсией σ^2) определит дискретную модель непрерывного марковского процесса, легко реализуемую на ЭМ.

Наибольшие трудности при моделировании непрерывных технологических процессов встречаются в том случае, когда априорные сведения о характере процессов ограничены или вовсе отсутствуют: неизвестна корреляционная или ковариационная функция процесса $x(t)$, неизвестно, какой порядок модели авторегрессии следует использовать и т.п. В подобных ситуациях моделирование может проводиться двумя путями:

I. Пополнения недостающих априорных сведений путем накопления и обработки недостающего статистического материала. В этом случае этапу построения модели собственно процесса $x(t)$ предшествует

этап формирования оценки его корреляционной (ковариационной функции). Воспользоваться таким путем можно лишь в тех случаях, когда исследователю доступна информация о процессе, или когда с большой степенью определенности исследователь может указать тип корреляционной функции, руководствуясь некоторыми объективными соображениями. Например, исследователь предполагает, что процессы, протекающие в системах, имеют характер марковских. Это обстоятельство совершенно однозначно определяет и тип ковариационной функции моделируемого процесса и структуру модели авторегрессии.

2. В том случае, когда априорные сведения о характере моделируемых процессов принципиально невозможно получить, например, на начальной стадии проектирования новых систем, о которых у исследователя имеются только самые общие, укрупненные сведения — модель системы разрабатывается по иному принципу. В таких ситуациях целесообразно строить модель, охватывающую как можно более широкий класс процессов, с тем, чтобы в дальнейшем при исследовании модели на ЭВМ путем перебора параметров моделирующих алгоритмов подобрать наиболее правдоподобные с точки зрения исследователя модели и (или) в наибольшей степени отвечающие общим интегральным требованиям к системе. Так, например, в подобных случаях при моделировании случайных процессов целесообразно не уточнять порядок модели, а строить ее, ориентируясь на возможно больший порядок m с тем, чтобы впоследствии при "прогоне" модели на ЭВМ подобрать m исходя из общих требований к системе.

Г л а в а П

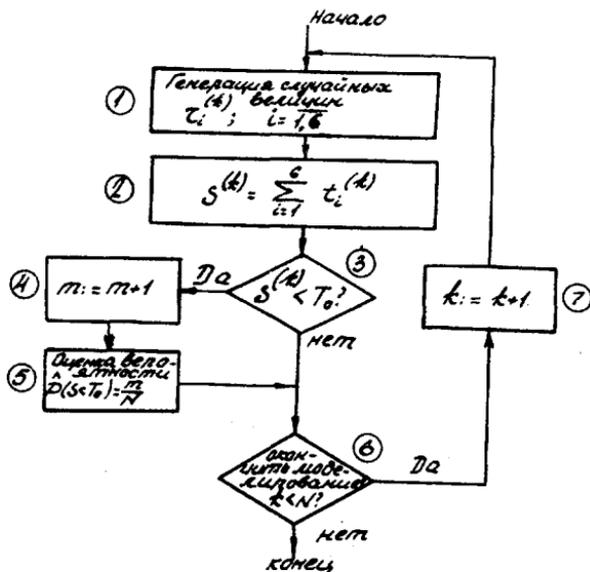
СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математические модели реальных сложных систем, состоящих из большого количества элементов, имеют как правило стохастический (случайный) характер, что объясняется многими факторами: внешними непредсказуемыми влияниями среды, ограниченной надежностью элементов, составляющих систему, влиянием разного рода погрешностей и помех внутри системы и т.д. Реализовать стохастическую математическую модель системы на ЭВМ можно путем имитации в вычислительной машине подобных случайных факторов — именно эта имитация и составляет основу методов статистического моделирования — методов Монте — Карло.

Рассмотрим следующий пример. Испытания двигателя состоят из по-

этапной, последовательной проверки его характеристик на шести испытательных стендах [6]. На каждом из этих стендов испытания продолжаются ограниченное время τ_i $i = \overline{1,6}$, так что общее время эксперимента определяется суммой: $\sum_{i=1}^6 \tau_i$; времена τ_i зависят от ряда авторостепенных факторов и имеют в общем случае характер случайных величин. Допустим, что законы распределения вероятностей этих величин известны экспериментатору. Спрашивается, с какой вероятностью общая длительность испытаний (время эксперимента) не превысит заданной величины T_0 .

Ответить на этот вопрос путем аналитического определения вероятности $P\{\sum_{i=1}^6 \tau_i < T_0\}$ в общем случае невозможно, так как законы распределения вероятностей случайных величин τ_i могут быть самые различные. Величины τ_i могут быть зависимы одна от другой, полагаться же (по традиции) на центральную предельную теорему теории вероятностей и считать закон распределения суммы величин нормальным в этом случае просто нельзя. В подобной ситуации выход из положения определяет статистическое моделирование системы испытательных стендов, блок-схема которого приведена на рис. 2.1. В первом



Р и с. 2.1

блоке специальными способами генерируются реализации $\tau_i^{(k)}$ случайных величин τ_i . 3 - 4 - 5 -й блоки строят оценку интересующей нас вероятности $P\{S < T_0\}$. В качестве такой оценки обычно используется частьность $\hat{P} = \frac{m}{N}$, где N - общее количество "прогонов" модели (количество статистических испытаний), m - количество испытаний, в которых наблюдалось $S^{(k)} < T_0$. Методы формирования оценок параметров (и в частности в нашем случае параметра P) изучаются математической статистикой - специфическим математическим аппаратом, используемым при обработке результатов эксперимента. Поэтому подобное моделирование и называют чаще всего статистическим, рассматривая его как искусственный эксперимент, проводимый с использованием ЭМ.

Специфику подобного моделирования определяет прежде всего блок № I (см. рис.2.1) - блок генерации случайных факторов, в остальном структура модели определяется только особенностями той или иной конкретной системы. Поэтому в этом разделе мы и обратим особое внимание на принципы построения и алгоритмы работы генераторов случайных факторов.

Точность же статистического моделирования, определяемая точностью оценки (в этом примере \hat{P}), зависит главным образом от N - количества "прогонов" модели. С ростом N увеличивается объем обрабатываемого статистического материала, что ведет к улучшению качества оценки (увеличению точности). Вопросы точности рассматриваются в заключительной части этой главы.

Таковы в общих чертах основные принципы статистического моделирования на ЭМ.

Фактически они основаны на искусственном эксперименте, проводимом на ЭМ с использованием функционального описания моделируемой системы. При этом методы обработки результатов подобного эксперимента ничем фактически не отличаются от традиционных методов математической статистики.

§ I. Получение случайных чисел с равномерным законом распределения вероятностей

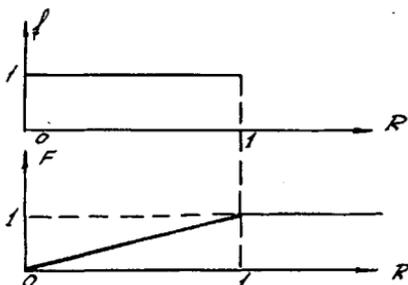
Как правило исходным "сырьем" для получения на ЭМ реализаций случайных факторов самого разного вида (случайных величин, векторов, процессов и т.д.) служат реализации равномерно распределенной случайной величины в интервале [0,1]. Эти реализации независимы одна от другой.

На рис.2.2 приведены дифференциальная (f) и интегральная функции распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины $R \in [0,1]$. Среднее значение и дисперсия подобной случайной величины соответственно равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{12}$.

Особенностью подобного распределения вероятностей является тот факт (неоднократно используемый нами в дальнейшем), что вероятность попадания случайной величины R в интервал

$$\Delta = R^{(2)} - R^{(1)}$$

равна длине этого интервала:



Р и с. 2.2

$$P\{R \in \Delta\} = P\{R^{(1)} \leq R \leq R^{(2)}\} = R^{(2)} - R^{(1)} = \Delta.$$

Сразу заметим, что получить на ЭМ случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0,1]$, строго говоря, в принципе невозможно из-за конечной разрядности любой ЭМ.

Однако отличие получаемых реализаций случайной величины от равномерно распределенной оказывается незначительным (для ЭМ с высокой разрядностью).

Методы получения в ЭМ значений случайной величины R можно разделить на три большие группы:

1. Использование физических датчиков (генераторов) случайных чисел.
2. Использование таблиц случайных чисел.
3. Получение псевдослучайных чисел.

Первая группа методов основана на использовании специальных устройств, сопрягаемых с ЭМ и являющихся источником собственно случайности. В качестве таких устройств могут использоваться генераторы шума, источники радиоактивного излучения и т.д. Подобные устройства служат для заполнения разрядной сетки машин набором независимых значений случайных двоичных чисел.

Общий недостаток, свойственный физическим датчикам случайных чисел - малое быстродействие, что существенно ограничивает области их применения.

Вторая группа методов получения случайных чисел на ЭМ связана

с использованием таблиц случайных чисел. Подобные таблицы составляются с использованием специальных, достаточно сложных технических устройств ("электронных рулеток") и могут иметь очень большой объем. Эти таблицы могут быть составлены как для чисел с равномерным законом распределения, так и для чисел с другими законами (например, нормальным). Основной недостаток использования таблиц случайных чисел при статистическом моделировании на ЭВМ - большая загрузка памяти вычислительной машины. В оперативной памяти такие таблицы обычно не располагаются ввиду их слишком большого объема, а размещение их на внешних накопителях (магнитных лентах, дисках и т.д.) существенно снижает быстродействие ЭВМ, поскольку время обмена информации между ЭВМ и внешними устройствами достаточно велико. Это обстоятельство приводит к тому, что таблицы случайных чисел сравнительно редко используются при статистическом моделировании на ЭВМ.

Наконец, третья группа методов получения случайных чисел основана на использовании алгоритмов генерации псевдослучайных последовательностей чисел. Подобные алгоритмы имеют рекуррентную структуру и жестко детерминированы. Задав начальные значения последовательности, мы однозначно определим все ее элементы, не наблюдая при этом никаких проявлений или признаков случайности. Но тем не менее, полученный в таком эксперименте массив элементов последовательности можно в принципе рассматривать как совокупность реализаций случайной величины R , "забывая" при этом, каким образом он был получен. Именно поэтому последовательности, получаемые с помощью таких алгоритмов, называют псевдослучайными и обращаются с ними как с массивами реализаций случайной величины, используя для их анализа все методы математической статистики.

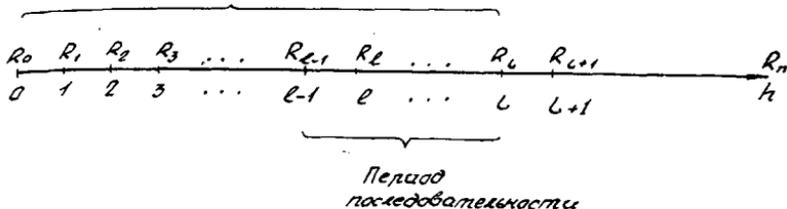
Нужно отметить, что объем массива элементов псевдослучайной последовательности (количество элементов последовательности) всегда ограничен. На самом деле в любой ЭВМ с конечной разрядностью N число возможных значений величины, лежащей в интервале $[0,1]$, составляет 2^{N-1} [8] (один разряд знаковый). Следовательно, получая последовательность чисел R_n , мы рано или поздно получим такое число R_L ($L \leq 2^{N-1}$), которое уже было в нашей последовательности. Тогда, начиная с этого числа, все предыдущие числа последовательности начнут повторяться (рис. 2.3).

Таким образом, массив получаемых элементов псевдослучайной последовательности ограничен величиной L - отрезком аperiodичности.

Для алгоритма Лемера, например, [9], отрезок аperiodичности составляет $L = 2^{40}$.

Методы получения псевдослучайных последовательностей получили самое широкое распространение при генерации случайных факторов для статистических моделей, реализуемых на ЭВМ. Это объясняется в первую очередь их простотой. Программы получения таких чисел насчитывают

Отрезок аперидичности



Р и с. 2.3

3 - 6 (иногда до 10) машинных команд. Следствием этого является высокое быстродействие ЭВМ при моделировании, чего практически лишены две предыдущие группы методов получения случайных чисел, основанные на использовании физических датчиков или таблиц.

В матобеспечение современных ЭВМ вводятся стандартные программы - датчики случайных чисел (термин " псевдослучайность" редко используется при практическом моделировании, поскольку он характеризует лишь строгую теоретическую сторону метода получения последовательности чисел). Например, при составлении программ моделирования на АЛГОЛе обращение к стандартной программе получения случайных чисел с равномерным законом распределения в интервале $[0,1]$ имеет вид: $PII47 (A, R)$, A и R - переменные типа *real*. Переменная A является рабочей и нигде в программе не должна использоваться для других целей. Значение случайной величины присваивается переменной R . Перед обращением к этой программе необходимо один раз обратиться к ней через обращение $PII47 (A)$. В результате этого случайное число выработано не будет, но A будет присвоено начальное значение, необходимое для получения R при последующих обращениях. (Эта особенность опять-таки связана с " псевдослучайностью" получаемых чисел).

В пакет прикладных программ на ФОРТРАНе также входит стандартная программа получения чисел с равномерным законом распределения вероятностей.

Обращение $CALL RAND (IX, IY, R)$ позволяет получить равномерное псевдослучайное число, распределенное в интервале $[0,1]$ и

представленное в форме с плавающей точкой. Значение его присваивается переменной R . IX - при первом обращении к программе $RAND$ должно содержать нечетное целое число с числом цифр девять или меньше. IY - целое псевдослучайное число, получаемое при обращениях к программе $RAND$ (число находится между 0 и $2^{**} 31$).

§ 2. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения вероятностей

Как уже отмечалось, исходным материалом для формирования на ЭЦМ реализаций случайных величин с различными законами распределения вероятностей служат обычно числа с равномерным законом распределения в интервале $[0,1]$, которые вырабатываются на ЭМ программным путем (псевдослучайные числа) или с помощью специального физического генератора - датчика случайных чисел.

Обсуждая возможности цифровой реализации дискретных случайных величин с заданным законом распределения вероятностей, рассмотрим случайную величину

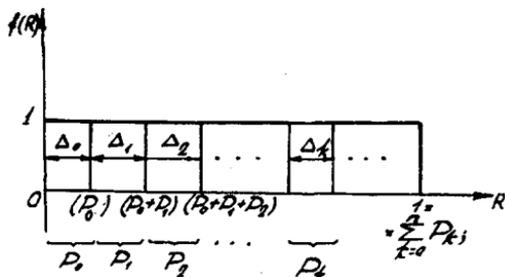
$$x = \left\{ \begin{matrix} x^{(0)} & x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(n)} \\ \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_n \end{matrix} \right\} \quad (2.1)$$

такую, что

$$P\{x = x^{(k)}\} = \rho_k; \quad \sum_{k=0}^n \rho_k = 1.$$

Верхняя строка в (2.1) определяет спектр возможных значений величин x , нижняя - соответствующие им вероятности.

Реализация такой случайной величины на ЭМ осуществляется весьма просто. Интервал определения равномерно распределенной случайной величины $R \in [0,1]$ делится на подинтервалы Δ_k такие, что длина Δ_k равна ρ_k (рис.2.4).



Р и с.2.4

Тогда вероятность попадания случайной величины R в интервал Δ_k оказывается равной ρ_k :

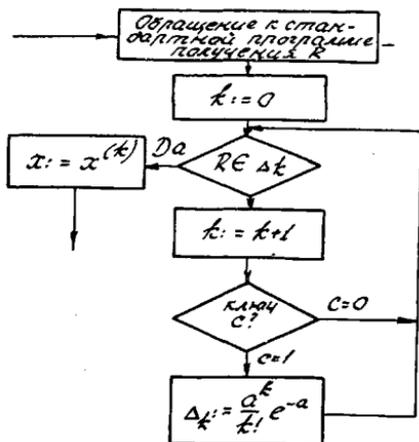
$$P\{R \in \Delta_k\} = \rho_k,$$

и алгоритм моделирования случайной величины x определяется простым присваиванием

$$x = x^{(k)} \text{ при } R \in \Delta_k$$

Блок-схема цифровой модели для этого случая может иметь вид, приведенный, например, на рис. 2.5 (ключ: $C = 0$).

При этом построении модели интервалы Δ_k определяются самим заданием случайной величины (2.1) и вводятся в ЭВМ в качестве исходных данных. Для дискретных случайных величин с неограниченным спектром значений принципы моделирования остаются в основном прежними, однако Δ_k приходится рассчитывать непосредственно в процессе моделирования. Например, для случайной величины, распределенной по закону Пуассона:



Р и с. 2.5

$$x = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right\};$$

$$p_k = P\{x = k\} = (a^k / k!) \exp(-a); \quad a > 0;$$

$\Delta_k = p_k$ придется рассчитывать для каждого значения k , при этом в программу моделирования (рис. 2.5) следует ввести дополнительный блок (ключ: $C = 1$).

Заранее же рассчитать все Δ_k невозможно ввиду их бесконечного количества. Однако нередко все же Δ_k рассчитывают для $k \leq K$ (причем K выбирают из условия $\sum_{k=0}^K p_k \approx 1$). Тогда при $k \leq K$ случайную величину x моделируют как величину с ограниченным спектром значений, а при $k > K$ — как с бесконечным (неограниченным), рассчитывая Δ_k в процессе моделирования.

Для получения реализаций непрерывной случайной величины x с заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)$ существует немало искусственных приемов [9]. Весьма распространен метод нелинейного преобразования, обратного функции распределения. Этот метод основан на использовании соотношения

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = R_i; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

в котором $R_i = i$ — i -ая реализация случайной величины R , равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$; x_i — i -ая реализация

случайной величины x , описываемой плотностью вероятности $f(x)$.

Или с использованием интегральной функции распределения вероятностей $P\{x < x_i\} = F(x_i)$;

$$F(x_i) = R_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

Рассматривая (2.3) как уравнение относительно x_i и решая его

$$x_i = \varphi(R_i), \quad (2.4)$$

получим явную функциональную связь между x_i и R_i . В последнем соотношении $\varphi(\cdot)$ - функция, обратная функции распределения вероятностей $F(\cdot)$. Доказательство того, что случайная величина $x = \varphi(R)$ действительно описывается законом распределения $F(x)$, занимает всего лишь несколько строк, для этого нужно вычислить функцию распределения случайной величины x , определенной формулой (2.

$$P\{x < X\} = P\{\varphi(R) < X\} = P\{F[\varphi(R)] < F(X)\} = P\{R < F(X)\} = F(X)$$

(строгое определение функции φ с учетом разрывов функции мы здесь не рассматриваем [9]).

Соотношение (2.4) в некоторых случаях легко алгоритмизируется. Например, для экспоненциального распределения вероятностей

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0$$

из (2.3) получим!

$$\lambda \int_0^{x_i} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x_i} = R_i. \quad (2.5)$$

Отсюда

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R_i). \quad (2.6)$$

А поскольку величина $(1 - R)$ распределена так же, как и R т.е. равномерно в интервале $[0, 1]$, мы можем переписать (2.6) в окончательном виде:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln R_i; \quad i = 1, 2, \dots$$

Использование последнего соотношения позволяет получить реализации случайной величины x , которые будут зависеть лишь от R_i . Таким образом, если программный датчик (стандартная программа генерации R) выдает независимые реализации R_i , реализации x_i также будут независимы друг от друга. Для получения N реализаций экспоненциально распределенной случайной величины x можно использовать, например, следующий блок программы, оформленной на языке АЛГОЛ:

```
begin integer i, N; real R, a, A; array x[1:N]; P 1147(A);
for i=1 step 1 until N <= 0 begin P 1147(A, R); x[i] := -ln(R)/a
end end,
```

где $PII47(A, R)$ - обращение к стандартной программе получения случайных чисел с равномерным законом распределения вероятностей в интервале $[0,1]$ (см. § I).

Метод обратных функций позволяет формально записать формулы для моделирования любой случайной величины x . Но нередко при практическом использовании соотношения (2.4) исследователь сталкивается с большими трудностями, вызванными, например, тем обстоятельством, что интегральная функция $F(\cdot)$ является специальной, табулированной, что делает невозможным аналитическое определение обратной функции $\varphi(\cdot)$ (с этим мы сталкиваемся, например, при попытке использования метода обратных функций для моделирования нормальной случайной величины). Поэтому возможности реализации случайных величин с заданной статистической моделью нередко связывают с использованием специальных методов моделирования. Одни методы этой группы основаны на приближенном решении уравнения (2.3), другие - на использовании специальных теорем теории вероятности и т.п. Так, например, для получения на ЭЦМ реализаций нормальной случайной величины нередко используют центральную предельную теорему теории вероятностей, из которой в частности следует, что сумма случайных величин R_i , равномерно распределенных в интервале $[0,1]$:

$$noz m(n) \Rightarrow \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.7)$$

при достаточно большом n может рассматриваться как случайная величина, описываемая нормальным законом распределения вероятностей. Это обстоятельство позволяет легко алгоритмизировать процесс формирования реализаций случайной величины (2.7). Обычно при $n=12$ распределение величины $noz m$ уже весьма близко к нормальному [2].

Нетрудно убедиться, что величина, формируемая с помощью приведенного алгоритма (2.7), в предположении независимости отдельных величин R_i имеет дисперсию $(\frac{n}{12})$ и среднее, равное $(\frac{n}{2})$. Формировать из этой величины любую другую, распределенную нормально, но с другими значениями параметров (среднее - m , дисперсия - σ^2) можно с помощью простого алгоритма:

$$Nozm = \sigma(nozm(12) - \delta) + m \quad (2.8)$$

Специальные методы моделирования случайных величин на ЭМ обычно связаны с особенностями моделируемого закона распределения вероятностей. Так для усеченных распределений, для которых $f(x)$ яв-

ляется финитной функцией, определенной в интервале $(a < x < b)$, используются методы отбора [9], для моделирования случайных величин, описываемых законами распределения вида

$$F(x) = \sum_{k=1}^n C_k F_k(x)$$

- методы суперпозиций и т.д. В каждом конкретном случае выбор метода связан с особенностями моделируемого закона распределения вероятностей. Здесь мы лишены возможности осветить все множество специальных приемов моделирования случайных величин на ЭМ скольнибудь подробно. Большинство из этих приемов описано в [9], где приведен и обширный список литературы по вопросам моделирования случайных величин. Заметим, что для наиболее распространенных законов распределения вероятностей (например, нормального) программы получения реализаций случайной величины оформлены нередко как стандартные.

В пакет прикладных программ на ФОРТРАНе входит, например, программа получения случайных чисел с нормальным законом распределения вероятностей. При обращении к этой программе

CALL GAUSS (IX, S, AM, V)

значение вычисленной нормальной случайной величины присваивается переменной V . S и AM соответственно желаемые среднеквадратичное отклонение и среднее значение нормального распределения (IX при первом обращении к *GAUSS* должно содержать нечетное целое число с девятью или менее цифрами).

§ 3. Цифровые модели случайных процессов

В общем случае статистическое моделирование случайных процессов, основанное на использовании многомерных законов распределения, весьма затруднено [3]. Лишь в отдельных частных случаях, которые сравнительно редки, удается построить модель, основанную на многомерном законе распределения вероятностей моделируемого процесса (марковские процессы, процессы с независимыми отсчетами и т.п.). Здесь мы вкратце рассмотрим лишь некоторые из основных методов, используемых при моделировании случайных процессов на ЭЦМ. Одним из таких методов является метод условных распределений.

Пусть случайный процесс $x(t)$ задан своей K -мерной функцией плотности вероятности

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k).$$

Подобная функция плотности может быть факторизована

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = f(x_k/x_{k-1}, \dots, x_1)^k$$

$$\times f(x_{k-1}/x_{k-2}, \dots, x_1) \dots f(x_2/x_1) \cdot f(x_1);$$

где $f(x_1)$ - одномерная безусловная плотность вероятности 1-го отсчета процесса - x_1 . (см. рис. 1.8).

$f(x_k/x_{k-1}, \dots, x_1)$ - условная плотность вероятности отсчета x_k , построенная при условии, что все предыдущие отсчеты уже получены.

Подобная факторизация подсказывает и метод моделирования последовательных отсчетов процесса $x(t)$:

первый отсчет x_1 может быть получен на ЭВМ как случайная величина с законом распределения $f(x_1)$ (см. § 2) путем решения уравнения (2.2):

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(u) du = R_1$$

(R_1 - реализация равномерно распределенной случайной величины).

Второй отсчет x_2 (при полученном первом) находится аналогично:

$$\int_{-\infty}^{x_2} f(u/x_1) du = R_2$$

и, наконец, любой k -й отсчет

$$\int_{-\infty}^{x_k} f(u/x_{k-1}, \dots, x_1) du = R_k \quad (2.9)$$

Использование многомерных условных плотностей вероятности делает метод чрезвычайно громоздким и трудно применимым. Поэтому используется он лишь в отдельных, достаточно редких случаях. Одним из таких случаев является моделирование марковских процессов, для которых каждый последующий отсчет зависит лишь от одного предыдущего, т.е.

$$f(x_k/x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1) = f(x_k/x_{k-1}). \quad (2.10)$$

Условная плотность вероятности $f(x_k/x_{k-1})$, называемая плотностью вероятности перехода, для нормального стационарного марковского случайного процесса с интервалом между отсчетами, равным Δt , определяется выражением:

$$f(x_k/x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)D}} \exp\left\{-\frac{[\rho(x_{k-1}-\mu)-(x_k-\mu)]^2}{2D(1-\rho^2)}\right\}, \quad (2.11)$$

где D - дисперсия процесса $x(t)$;

μ - среднее процесса $x(t)$;

ρ - коэффициент корреляции соседних отсчетов процесса

x_k и x_{k-1} .

Подставляя (2.11) с учетом (2.10) в соотношение (2.9), получим

$$\Phi \left\{ \frac{x_k - \rho(x_{k-1} - \mu) - \mu}{\sqrt{(1-\rho^2)D}} \right\} = R_k, \quad (2.12)$$

где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - интеграл вероятностей.

Если ввести новое обозначение

$$\frac{x_k - \rho(x_{k-1} - \mu) - \mu}{\sqrt{(1-\rho^2)D}} = z_k, \quad (2.13)$$

то выражение (2.12), переписанное в виде

$$\int_{-\infty}^{z_k} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] dx = R_k$$

в соответствии с методом нелинейного преобразования, обратного функции распределения (см. § 2 (2.2), определяет алгоритм получения реализаций случайной величины Z , распределенной нормально с нулевым средним и единичной дисперсией. Следовательно, z_{k-k} -ая реализация нормальной случайной величины. Расписывая (2.13)

$$x_k - \mu = \rho(x_{k-1} - \mu) + [D(1-\rho^2)]^{1/2} z_k \quad (2.14)$$

$$k=1, 2, \dots$$

получим алгоритм моделирования нормального стационарного марковского процесса.

Как видно из (2.14), каждый новый отсчет процесса определяется лишь предыдущим отсчетом x_{k-1} и k -ой реализацией z_k , получаемой от датчика нормальных случайных чисел. Однако подобное моделирование, как уже отмечалось, в общем случае затруднено, ввиду громоздкости метода. Поэтому моделирование случайных процессов на ЭМ проводится обычно в рамках корреляционной теории, а не многомерных законов распределения вероятностей.

Цифровое моделирование случайных процессов в рамках корреляционной теории - это фактически реализация на ЭМ того класса моделей, которые построены по принципу " Δt " и описаны в § 2 предыдущей главы - моделей скользящего среднего- авторегрессии. Существуют, конечно, и другие модели случайных процессов, которые возможно реализовать на ЭМ: модели канонических разложений, рядов Фурье [3] и т.д. - однако как правило эти классы моделей реализуются на ЭМ сложнее и с большими затратами машинного времени, чем модели скользящего среднего - авторегрессий. Кроме того, в ряде случаев, как мы увидим в дальнейшем, даже использование разных методов моделирования случайных процессов приводит к одним и тем же алгоритмам моделирования.

В § 2 предыдущей главы в качестве примера приводилось построение модели скользящего среднего для случайного процесса $x(t)$ с треугольной (финитной) ковариационной функцией (см. рис. I.12). Модель скользящего среднего для этого случая определялась соотношением (I.21):

$$x_k - \mu = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{D}{\ell+1} \right)^{1/2} \sum_{i=0}^{\ell} z_{k-i}, \quad (2.15)$$

где D и μ - дисперсия и среднее моделируемого процесса;
 ℓ - порядок модели; z_k - последовательность независимых случайных чисел с нулевыми средними и дисперсиями σ^2 .

Алгоритм моделирования подобного случайного процесса на ЭВМ полностью определяется этим выражением, однако для реализации на ЭВМ его удобнее переписать в несколько ином виде.

Используя очевидное соотношение

$$\sum_{i=0}^{\ell} z_{k-i} = \sum_{i=0}^{\ell} z_{(k-1)-i} + z_k - z_{k-\ell-1},$$

перепишем (2.15) в виде

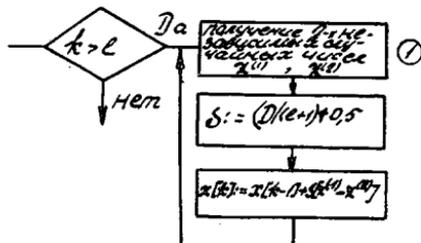
$$\begin{aligned} x_k - \mu &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{D}{\ell+1} \right)^{1/2} \left[\sum_{i=0}^{\ell} z_{(k-1)-i} + z_k - z_{k-\ell-1} \right] = \\ &= (x_{k-1} - \mu) + \left[\frac{D}{\ell+1} \right]^{1/2} \left(\frac{z_k}{\sigma} - \frac{z_{k-\ell-1}}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

Или окончательно

$$x_k = x_{k-1} + \left(\frac{D}{\ell+1} \right)^{1/2} (z_k^{(1)} - z_k^{(2)}),$$

где $z_k^{(1)}$, $z_k^{(2)}$ - два независимых значения случайной величины z с нулевыми средними и единичной дисперсией (рис.2.6). Заметим, что

приведенный алгоритм моделирования можно использовать только при $k > \ell$, т.е. в стационарном режиме. При $k < \ell$ алгоритм моделирования определяется соотношением (I.14). Блок I в схеме рис. 2.6 связан с двукратным обращением к стандартной программе датчику случайных чисел. Закон распределения этих чисел не ва-



Р и с. 2.6

жен, так как моделирование процесса $x(t)$ проводится в рамках корреляционной теории.

Совершенно аналогично реализуются на ЭВМ и модели авторегрессий. Рекуррентный характер этих параметрических моделей делает их чрезвычайно удобными для машинной реализации. Фактически структура программ моделей авторегрессий полностью определяется соотношениями типа (I.22), в которых величины z_k получаются путем обращений к стандартным программам датчиков случайных чисел. Для марковских случайных процес

сов моделью авторегрессии служит соотношение (I.23). Нетрудно убедиться в том, что при нормальном марковском процессе эта модель полностью совпадает со статистической моделью (2.I4), полученной по методу условных распределений, так что в предположении нормальности процесса модель авторегрессии (построенная в классе корреляционных моделей) полностью определяет и статистическую цифровую модель.

§ 4. Точность и достоверность статистической модели

В общем случае статистическое моделирование всегда проводится с целью определения некоторых оценок показателя (или показателей) эффективности системы. Как уже отмечалось, проводить статистическое моделирование целесообразно лишь в тех случаях, когда интересующий исследователя показатель эффективности системы невозможно определить аналитически (или очень сложно). Статистическое моделирование - процесс, требующий, как правило, больших затрат машинного времени и большой подготовительной работы квалифицированных специалистов - разработчиков алгоритмов и программ моделей - процесс весьма дорогостоящий. Поэтому проведению подобного моделирования должен предшествовать этап экономического обоснования целесообразности построения статистической модели системы. Кроме того, как уже отмечалось, статистическое моделирование - это своего рода искусственный эксперимент с цифровой моделью системы, обработка результатов подобного эксперимента принципиально не может дать точных значений показателя эффективности системы, в лучшем случае мы можем построить "хорошую" оценку такого показателя. При этом "чисто экономические" вопросы, обосновывающие целесообразность статистического моделирования вообще, оказываются тесно связанными с вопросами точности и достоверности оценки показателя эффективности системы или (проще) точности и достоверности статистической модели системы. На рис. 2.7 приведена структура программы статистического моделирования практически любой системы. Блок 2 в этой структуре определяется функциональной моделью системы, которая составляется с учетом специфики той или иной конкретной исследуемой системы. Этот блок может включать в себя набор самых разнообразных программ, учитывающих математическое описание системы, ее структуру, методы ее организации и т.д. Блок I - генерация случайных факторов - связан с получением на ЭМ значений случайных величин, векторов или процессов опять-таки в зависимости от требований, выдвигаемых конкретной системой. Математической моделью, определяющей содержание программ этого блока, могут служить соотношения, рассмотренные в § I, 2, 3 этой главы или подобные им.

Наконец, остальные блоки структуры рис.2.7 определяют количество "прогонов" модели N и строят оценку показателя эффективности системы $\Pi_{эфф}$. Количество "прогонов" модели на ЭВМ, с одной стороны, определяет длительность моделирования и, следовательно, затраты машинного времени (стоимость машинного времени), а с другой стороны N определяет точность и достоверность статистической модели. Поэтому N должно выбираться из двух соображений:

1. Стоимость машинного времени; затраченного на статистическое моделирование.

2. Точность и достоверность статистической модели.

Эти соображения противоречивы:

с ростом N повышается точность и достоверность оценки $\Pi_{эфф}$ показателя эффективности системы $\Pi_{эфф}$, но вместе с тем растут и затраты машинного времени:

$$S = S_0 \frac{t}{60} N, \quad (2.16)$$

где S_0 - стоимость одного часа машинного времени;

t - время одного "прогона" модели, мин.

Установить компромисс между стоимостью моделирования и точностью модели - вот одна из основных задач специалиста по моделированию систем.

Рассмотрим подробнее вопросы точности и достоверности статистического моделирования.

Различают точность абсолютную (ε):

$$|\Pi_{эфф} - \hat{\Pi}_{эфф}| \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

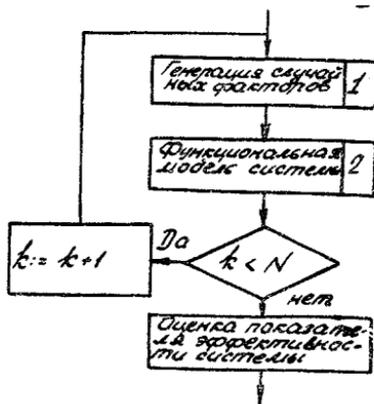
и относительную (γ):

$$\left| \frac{\Pi_{эфф} - \hat{\Pi}_{эфф}}{\Pi_{эфф}} \right| \leq \gamma. \quad (2.18)$$

Они связаны простым соотношением

$$\varepsilon = |\Pi_{эфф}| \gamma. \quad (2.19)$$

Левые части неравенств (2.17), (2.18) - величины, строго говоря, случайные. Их случайность обусловлена тем обстоятельством, что оценка $\hat{\Pi}_{эфф}$ строится по результатам моделирования системы, которое проводится с использованием случайных факторов (блок I в схеме рис. 2.7). Если мы, например, проведем две серии независимых "прогонов"



Р и с. 2.7

модели (независимых испытаний) по N испытаний в каждой серии, то оценки $\hat{P}_{эфф}^{(1)}$ и $\hat{P}_{эфф}^{(2)}$, построенные по первой и второй серии соответственно, никогда не будут точно совпадать друг с другом. (вероятность такого совпадения равна нулю).

Факт случайности левых частей неравенства (2.17), (2.18) и потребовал для однозначного определения качества статистического моделирования кроме точности ввести понятие достоверности. Достоверность модели σ есть вероятность того, что результаты моделирования удовлетворяют заданной точности:

$$P\left\{\left|P_{эфф} - \hat{P}_{эфф}\right| \leq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{P_{эфф} - \hat{P}_{эфф}}{P_{эфф}}\right| \leq \gamma\right\} \sigma. \quad (2.20)$$

Для того, чтобы по заданным σ и ε (или γ) определить количество испытаний N или наоборот при известном N определить σ и ε , необходимо подробно расписать соотношение (2.20). К сожалению, сделать это удастся далеко не всегда, поскольку закон распределения вероятностей величины $\left|P_{эфф} - \hat{P}_{эфф}\right|$ для многих практически интересных случаев строго определить не удастся либо в силу ограниченности наших априорных сведений о системе, либо из-за сложности чисто вероятностных расчетов. Путь преодоления подобных трудностей во многом связан с выдвижением различных упрощающих предположений о характере законов распределения случайной величины $\hat{P}_{эфф}$ - оценки показателя эффективности системы. В тех случаях, когда можно предположить известным не сам закон, а отдельные его моменты (например, дисперсию), целесообразно воспользоваться различными предельными неравенствами теории вероятностей.

Для установления связи между N , σ и $\varepsilon(\gamma)$ используем пример со статистическим моделированием системы испытательных стендов, рассмотренный в начале этой главы (см. рис. 2.1). В этом примере в качестве показателя эффективности исследуемой системы использовалась вероятность окончания эксперимента за время T_0 : $P = P\{S < T_0\}$, а в качестве оценки этой вероятности - частота: $\hat{P} = \frac{m}{N}$, где N - по-прежнему общее количество "прогонов" модели, m - количество испытаний, в котором наблюдалось выполнение условия $S^{(k)} < T_0$ (см. рис.2.1). Соотношение (2.20), связывающее точность и достоверность модели с количеством испытаний - N , для рассматриваемого случая может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|P - \frac{m}{N}\right| \leq \varepsilon\right\} &= \sigma; \\ P\left\{P - \varepsilon \leq \frac{m}{N} \leq P + \varepsilon\right\} &= \sigma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Каков же закон распределения величины $\hat{p} = \frac{m}{N}$? Для ответа на этот вопрос сначала представим частоту \hat{p} в виде:

$$\hat{p} = \frac{m}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i,$$

где ε_i — дискретная случайная величина, принимающая два значения: 1 и 0 с вероятностями $p = P\{S < T_0\}$ и $(1-p)$ соответственно:

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M(\varepsilon) = 0(1-p) + 1p = p;$$

$$D(\varepsilon) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2p = p(1-p)$$

(M и D — символы среднего и дисперсии).

Поэтому среднее значение частоты \hat{p} :

$$M(\hat{p}) = \frac{1}{N} M\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(\varepsilon_i) = p. \quad (2.22)$$

Соотношение $M(\hat{p}) = p$ говорит о несмещенности оценки \hat{p} для вероятности p .

С учетом независимости величин ε_i , получим выражение для дисперсии оценки \hat{p} :

$$D(\hat{p}) = \frac{1}{N^2} D\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D(\varepsilon_i) = \frac{p(1-p)}{N}. \quad (2.23)$$

В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей частота \hat{p} при достаточно больших N может рассматриваться как случайная величина, описываемая нормальным законом распределения вероятностей со средним значением (2.22) и дисперсией (2.23) [5]. Поэтому соотношение (2.21) можно переписать в виде

$$P\left\{p - \varepsilon < \frac{m}{n} < p + \varepsilon\right\} = \Phi\left(\frac{p + \varepsilon - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{N}\right) - \Phi\left(\frac{p - \varepsilon - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{N}\right) = \sigma, \quad (2.24)$$

где Φ — интеграл вероятностей: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$;

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Продолжая выкладки, из (2.24) получим

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 1 + \sigma;$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = \frac{1 + \sigma}{2} = \alpha;$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} = t_\alpha; \quad N = t_\alpha^2 \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \quad (2.25)$$

В последнем соотношении t_α - квантиль нормального распределения вероятностей порядка $\alpha = \frac{1+\rho}{2}$ (t_α определяется из специальных таблиц [10]).

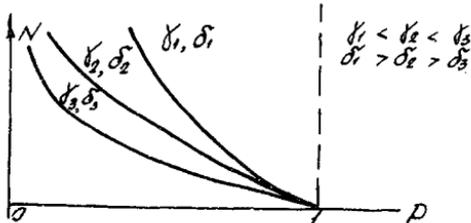
Таким образом, соотношение (2.25) связывает между собой достоверность модели ρ , абсолютную точность ε , истинные значения эффективности системы (вероятность P) и количество "прогонов" модели на ЭВМ - N .

Поскольку величина P заранее нам известна, использовать соотношение (2.25) затруднительно. Поэтому на практике при моделировании поступают обычно следующим образом: осуществляют моделирование для некоторого произвольно выбранного значения $N = N_0$ и определяют таким образом $\hat{\rho}_0 = \frac{m}{N_0}$ (контрольное, прикладное моделирование). Затем по формуле (2.25), в которой вместо ρ используют найденное путем контрольного моделирования значение $\hat{\rho}_0$, уточняют N уже с учетом заданных точности и достоверности и повторяют весь процесс моделирования для нового уточненного значения N (рабочее моделирование).

Следует отметить, что в рассмотренном примере при отсутствии каких-либо априорных ориентировочных сведений о величине P использовать понятие абсолютной точности моделирования не имеет смысла. Ведь может случиться, что мы зададим точность модели $\varepsilon = 0,01$, например а величина P окажется на порядок (или даже несколько порядков) меньше: $P < 0,001$. Ясно, что такое задание точности приведет к совершенно абсурдным результатам. В таких случаях целесообразно задавать относительную точность модели γ . Для относительной точности соотношение (2.25) переписывается в виде

$$N = t_\alpha^2 \frac{P(1-P)}{\rho^2 \gamma^2} = t_\alpha^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{1-P}{\rho} \quad (2.26)$$

Последнее соотношение очень наглядно иллюстрирует специфику статистического моделирования, которая выражается в том, что для



Р и с . 2.8

оценивания малых вероятностей P с высокой точностью необходимо очень большое количество "прогонов" модели. На рис. 2.8 представлена зависимость N от P , построенная по (2.26).

Ориентировочно, для оценивания вероятностей порядка 10^{-m} целесообразно количество испытаний модели ("прогонов" программы) выбирать равным $10^{(m+1)}$. Понятно, что при этом даже для сравнительно простых систем метод статистического моделирования может приводить к очень большим затратам машинного времени, что существенно увеличивает стоимость эксперимента по моделированию.

§ 5. Статистическая имитационная модель системы контроля

В § I предыдущей главы мы рассмотрели пример построения аналитической модели системы контроля готовых изделий на выходе поточной линии. Здесь мы рассмотрим статистическую модель этой системы, имитирующую процесс контроля изделий.

Структура моделируемой системы в терминах систем массового обслуживания описана в § I. Это однофазная, разомкнутая, многоканальная система массового обслуживания с отказами. Блок-схема имитационной модели системы приведена на рис. 2.9.

Б л о к 1. Начальное значение количества контрольных стандов устанавливается обычно равным единице

$$NK = 1.$$

Б л о к 2. Начальные условия модели. Количество отказов в контроле устанавливается равным нулю $N_{OTK} = 0$, моменты освобождения контрольных стандов принимаются равными нулю:

$$T(K) = 0, K = 1, 2, \dots, NK$$

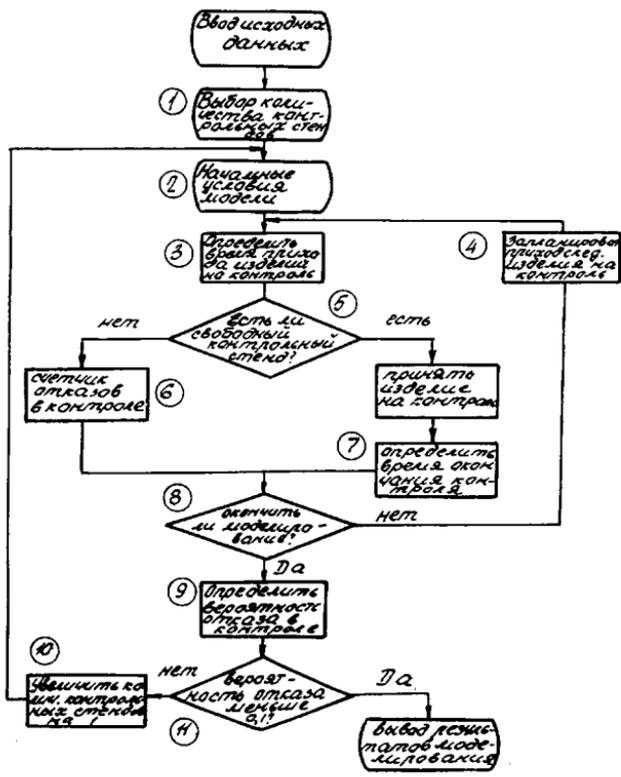
планируется приход на контроль первого изделия $I = 1$, устанавливается нулевое системное время $TIME = 0$.

Б л о к 3. Определяется время прихода очередного изделия на контроль. Поскольку это время в общем случае случайно, блок 3 должен содержать обращение к процедуре получения случайного числа (см. § 2 этой главы). Время прихода изделия на контроль получается путем пересчета системного времени: $TIME = TIME + \tau$, где τ - случайное число, полученное путем обращения к соответствующей процедуре.

Б л о к 4. Планируется приход следующего изделия на контроль: $I = I + 1$.

Б л о к 5. Ответ на вопрос: есть ли свободный контрольный стенд, получается путем сравнения времени поступления очередного изделия на контроль с моментами освобождения контрольных стендов:

$$TIME \leq T(K); K=1,2,\dots,NK;$$



Р и с. 2.9

Сравнение начинается с $K=1$. Если для какого-то стенда с номером K окажется, что $TIME > T(K)$ управление передается блоку с номером 7, если же для всех стендов окажется, что $TIME < T(K)$ управление передается блоку 6.

Б л о к 6. Количество отказов в контроле изделия увеличивается на единицу $NOTK = NOTK + 1$.

Б л о к 7. Определяется момент окончания контроля изделия
 $T(K) = TIME + TAU$; номер стенда K , производящего контроль,
определяется в блоке 5. Величина времени контроля TAU получается
путем обращения к специальной процедуре - датчику случайных чисел с
заданным законом распределения вероятностей (см. блок 3).

Б л о к 8. Проверяется условие окончания моделирования

$$I \leq NMOD,$$

здесь $NMOD$ определяется, исходя из заданной точности и достоверности модели (см. §4). При $I < NMOD$ управление передается блоку 4, при $I \geq NMOD$ - блоку 9.

Б л о к 9. Определяется оценка вероятности отказа в контроле

$$P = NOTK / NMOD.$$

Б л о к 10. Количество контрольных стендов увеличивается на единицу

$$NK = NK + 1.$$

Б л о к 11. Мы моделируем систему с целью определения такого количества контрольных стендов, при котором вероятность отказа в контроле не больше 0,1. Это условие проверяется в данном блоке. При $P < 0,1$ моделирование заканчивается. При $P \geq 0,1$ управление передается на блок 10.

Ниже приведена программа имитационной модели системы контроля, оформленная на языке ФОРТРАН-IV. Программа составлена для случая, когда поток заявок на контроль - простейший (TAU - распределена экспоненциально с интенсивностью - $LAMBDA$) и дисциплина обслуживания на каждом контрольном стенде одна и та же - экспоненциальная с интенсивностью MJU . Результаты моделирования для этого случая могут быть сравнены с результатами аналитического расчета системы (гл. I, § I). В общем же случае эта программа может быть легко переделана применительно к любому потоку заявок на контроль и любой дисциплине обслуживания. Такая переделка требует лишь замены соответствующих подпрограмм - датчиков случайных чисел. Это обстоятельство и определяет основное преимущество имитационной модели системы перед аналитической. Приведенная программа использует две подпрограммы - датчика случайных (псевдослучайных) чисел. В одной из них *SUBROUTINE EXPENT (E, X, IX)* используется обращение к стандартной процедуре вычисления натурального логарифма числа *R:ALOG (R)*. Другая подпрограмма *SUBROUTINE RAND (IX, IY, R)* заимствована из [II], начальное значение $IX=12207031$ может быть заменено любым другим нечетным числом. В остальном приве-

денная программа не требует дополнительных пояснений, так как в этом простейшем случае мы имели возможность достаточно подробно описать блок-схему имитационной модели (рис.2.9), структура же программы полностью определяется этой схемой. В более сложных случаях описание программы (или ее блок-схемы) может вызвать дополнительные и весьма существенные трудности.

Программа „модель“

```
DIMENSION T(9)
REAL MJU, LJAMBDA
1  FORMAT (I5, 2F7.3)
   READ (1.1) NMOD, LJAMBDA, MJU
   IX=122φ7φ31
2  NK=1
3  NOTK=φ
   I=1
   TIME=φ
   DO4 K=1, NK
4  T(K)=φ
5  CALL EXPENT(LJAMBDA, TAU, IX)
   TIME=TIME+TAU
   DO6 K=1, NK
   IF(TIME-T(K))6,7,7
6  CONTINUE
   NOTK=NOTK+1
   GOTO 2φ
7  CALL EXPENT(MJU, TAU, IX)
   T(K)=TIME+TAU
20 IF(I-NMOD)8,9,9
8  I=I+1
   GOTD5
9  A=NOTK
   P=A/NMOD
   IF(P-0.1)12,12,10
```

```
10. NK = NK + 1
   GOTO 3
11. FORMAT (35H  количество  контрольных  стандов
   *  NK =, I 1 /33H  вероятность  отказа   
   *  контроле  P =, F 5.3 )
12. WRITE (3,11) NK, P
   STOP
   END
   SUBROUTINE EXPENT (E, X, IX)
   CALL RAND (IX, IY, R)
   X = -(1/E) * ALOG (R)
   RETURN
   END
   SUBROUTINE RAND (IX, IY, R)
   IY = 1220703125 * IX
   IF (IY) 13, 14, 14
13. IY = IY + 2147483647 + 1
14. IX = IY
   R = IY
   R = R * 0.4656613 E-9
   RETURN
   END
```

Глава III

МОДЕЛИРОВАНИЕ АСУ

В настоящее время АСУ являются наиболее сложными системами управления. Особенно сложны АСУ, построенные на основе многомашинных вычислительных комплексов (МКК).

Все АСУ можно подразделить на следующие виды:

АСУ производством - АСУП;

АСУ технологическими процессами - АСУТП;

АСУ научными исследованиями и научным экспериментом - АСУЭН;

АСУ экспериментом производственным - АСУЭП;

интегрированные АСУ-ИАСУ, объединяющие в своей структуре все или часть АСУ предыдущих видов.

Модели функционирования АСУ зависят от ее вида, т.е. от функций, выполняемых системой, и от вида управляемого объекта (УО). Ввиду чрезвычайной сложности процессов, обычно ограничиваются либо моделированием отдельных свойств процессов (например, надежностных), либо моделированием отдельных подсистем АСУ, выполняющих относительно самостоятельные функции.

Среди подсистем АСУ можно выделить следующие основные подсистемы: подсистема сбора и предварительной обработки данных (станции реального времени и станции пакетной обработки данных);

подсистема вторичной обработки данных, оптимизации управляемого процесса - второй уровень в иерархической АСУ;

подсистема связи, включающая устройства передачи данных (УПД), линии связи, связанные процессоры, коммутаторы и концентраторы сообщений, объединенных в единую сеть передачи данных;

подсистема отображения информации, включающая устройства регистрации, устройства вывода информации, индикаторы, дисплеи, табло, экраны и т.п.

Каждую из подсистем следует рассматривать в неразрывной связи с ее алгоритмическим и программным обеспечением.

Кроме того, отдельные свойства подсистем и АСУ в целом могут исследоваться на упрощенных моделях, важнейшими из которых являются модели систем массового обслуживания, а также надежно-функциональные модели АСУ.

Общий метод моделирования АСУ - построение блочных моделей в виде программных модулей (блоков) на основе предварительно сформулиро-

ванной языковой или графической модели. Часто языковая и графическая модель (граф) взаимно дополняют друг друга и должны содержать все исходные данные, необходимые для построения программной модели на ЭВМ. Нечетко сформулированная или неполная языковая или графическая модель ведет неизбежно к неполноценной программной модели.

Характерной особенностью моделирования АСУ является необходимость задания модели управляемого объекта (УО) или информационного процесса, а также модели управляющего устройства (УУ) в виде некоторых алгоритмов управления УО. Таким образом, в программной модели функционирование АСУ представляется в виде взаимодействия двух моделей - производственного или информационного процесса и процесса управления, взаимно влияющих друг на друга. В этом проявляется принцип обратной связи, лежащей в основе всех систем управления.

По характеру протекания все процессы могут быть подразделены на непрерывные, дискретные и непрерывно-дискретные. При этом дискретность может пониматься как по уровням сигналов, так и по времени. Моделирование соответствующих процессов имеет свои особенности, так как математические модели, описывающие процессы различных типов, различны. При моделировании непрерывных процессов чаще всего применяется принцип Δt с организацией счетчика времени, где Δt - задаваемый исследователем минимальный интервал дискретности по времени; при этом для решения дифференциальных уравнений используются различные шаговые приближенные методы, например, четырехточечная схема Рунге-Кутты [12]. При моделировании дискретных процессов может использоваться принцип "особых состояний" без организации счетчика времени или комбинация обоих методов [2], [13].

Далее рассмотрены наиболее важные и типичные примеры формализации моделей АСУ и изложены принципы общей организации программной модели на ЭВМ.

§ 1. Моделирование АСУ по критериям надежности и эффективности функционирования

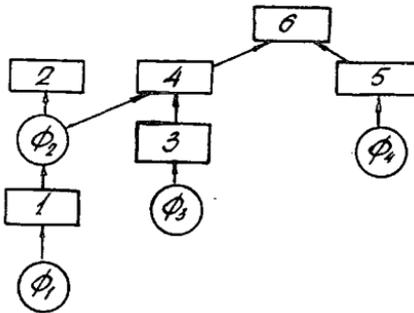
Эффективность функционирования АСУ, оцениваемая, как правило, по экономическим показателям, тесно связана с ее надежностью, которая, в свою очередь, определяется надежностью выполнения функций отдельными элементами и подсистемами, входящими в состав АСУ [14].

О п и с а н и е. Имеется АСУ, состоящая из нескольких компонентов (элементов, подсистем) и выполняющая некоторые функции Φ_i ($i=1, n$ -

- номер функции). Каждый j -й компонент системы ($j = \overline{1, n}$) может находиться в двух состояниях: I - работоспособен и 0 - неработоспособен (состояние отказа). В начальный момент времени $t_0 = 0$ все компоненты работоспособны, однако, в дальнейшем с течением времени компоненты могут отказывать, а затем восстанавливаться, причем соответствующие потоки отказов и восстановлений считаются полностью заданными в виде законов распределений и численных значений параметров этих законов каждого из компонентов. Известно, какой компонент участвует в выполнении данной функции системы (например, в виде таблицы). Эффективность функционирования системы оценивается функционалом, вид которого известен, но для вычисления которого следует использовать конкретные реализации параметров, связанных с выполнением отдельных функций системы, с учетом отказов компонентов. Интервал функционирования системы $(0, T)$, а также требуемая точность моделирования заданы.

Цель моделирования - определение средних значений дисперсий и других статистических характеристик показателей, характеризующих эффективность и надежность функционирования АСУ на интервале функционирования; функционала эффективности по АСУ в целом и по каждой из подсистем; число отказов j -го компонента; суммарной величины затрат на ремонты; времени восстановления работоспособности системы по каждой из выполняемых функций; времени нормального функционирования системы по каждой из выполняемых функций; времени пребывания системы на уровнях эффективности выше заданной; суммарная величина потерь от простоев системы; максимальное значение эффективности; относительная потеря эффективности и др.

По заданному языковому описанию можно составить надежность-функциональный граф системы (НФГ) (рис. 3.1).



Р и с. 3.1

Узлы графа - компоненты и функции, выполняемые системой. Ребра отображают взаимодействия компонентов в выполнении функций. Функция выполняется системой, если имеется путь вверх от этой функции. Например, функция Φ_1 может выполняться двумя способами: компонентами 1-2 или компонентами 1-4-6. Функция Φ_3 - только одним способом: компонентами 3-4-6. В по-

следнем случае при отказе любого из компонентов данного пути АСУ перестает функционировать по данной функции.

При таком способе представления часть компонентов может входить в граф неоднократно - в виде нескольких узлов в разных путях следования от функций вверх по ребрам. Анализ в модели данного графа позволяет определить, по каким функциям происходит нарушение функционирования в системе при отказах любого компонента, а также восстановление функций при восстановлении компонентов.

Принцип построения модели следующий: исходные данные в виде законов распределения отказов и восстановлений компонентов и их параметров, таблицы, кодирующей НФГ, формул для вычисления показателей эффективности вводятся в ОЗУ перед началом моделирования. Применяется метод особых состояний в сочетании с принципом Δt . При этом необходимо иметь информацию о состоянии каждого компонента АСУ в любой момент времени, что достигается выделением в ОЗУ двух одномерных массивов длиной, равной числу компонентов m . В первом массиве хранятся признаки состояний каждого компонента:

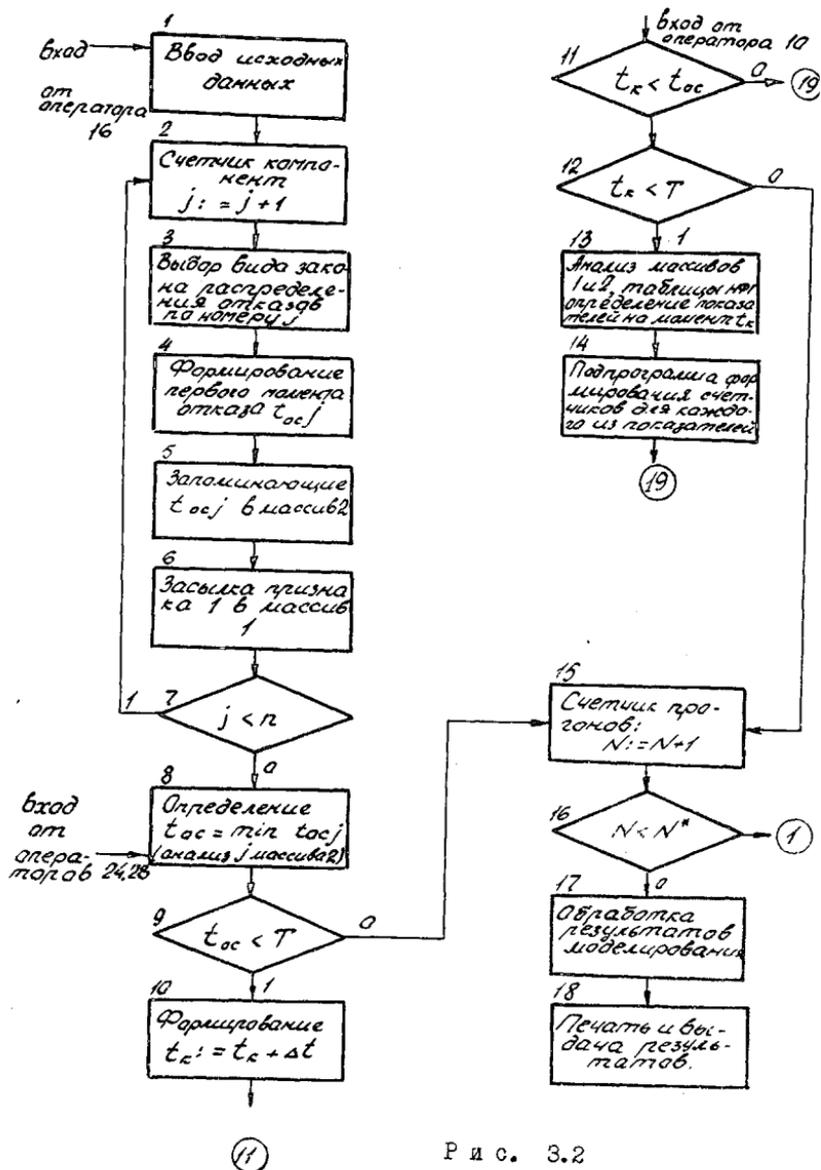
$$X_j = \begin{cases} 1, & j-\bar{a} \\ 0, & \text{---} \\ & j = \bar{1}, m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{компонент работоспособен;} \\ \text{в противоположном случае;} \end{array}$$

Во втором массиве для каждого компонента указывается очередной момент времени изменения его состояния (момент отказа или восстановления). Наименьшее из чисел второго массива и определяет очередной момент перехода системы в новое состояние. Опрос состояний для вычисления статистических оценок показателей эффективности и надежности функционирования производится через заданный интервал времени Δt для чего в системе организуется счетчик временных интервалов.

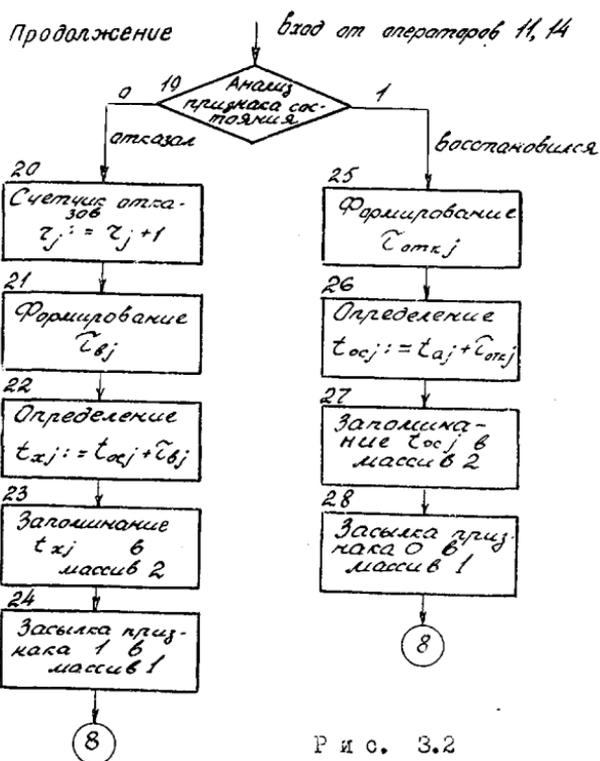
После окончания очередной реализации на интервале $(0, T)$ следует ее повторение до тех пор, пока не наберется нужное число реализаций N^* . После этого происходит окончательная статистическая обработка результатов моделирования и вывод их на печать. Блок-схема алгоритма моделирования приведена на рис. 3.2.

§ 2. Моделирование подсистем сбора и предварительной обработки данных

О п и с а н и е. Типовыми операциями по сбору и предварительной обработке информации являются следующие (для аналоговых входных сигналов):



Р и с. 3.2

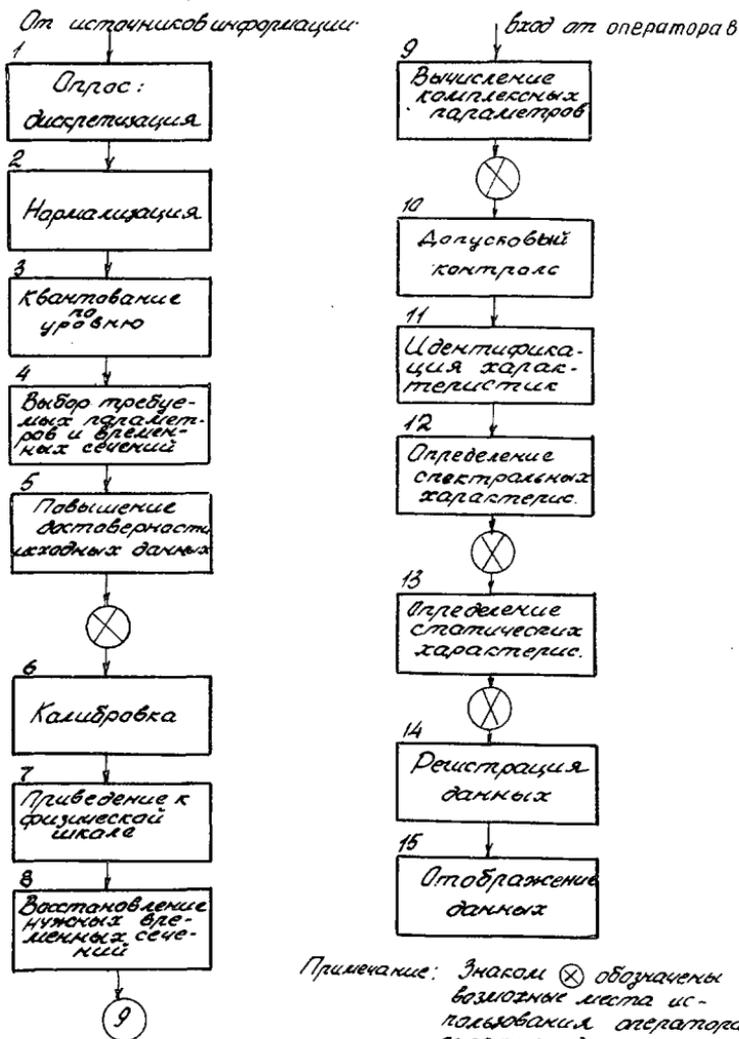


Р и с. 3.2

нормализация;
 дискретизация во времени (опрос с помощью коммутаторов);
 квантование по уровню, калибровка и тарифовка;
 кодирование;
 приведение к физической шкале;
 скользящее усреднение (фильтрация);
 сжатие данных;
 восстановление данных, комплексных параметров;
 вычисление значений;
 определение спектральных и статистических характеристик (обычно средних, дисперсий, а также корреляционных функций и т.д.);
 допусковый контроль;

регистрация и отображение результатов обработки;
идентификация характеристик.

Алгоритмическая структурная схема процесса сбора, обработки,
регистрации и отображения данных представлена на рис. 3.3.



Примечание: Знаком ⊗ обозначены возможные места использования клавиш оператора сжатия данных

Р и с . 3.3

П р и м е ч а н и е

1. Для системы цифровой регистрации блоки 1,2,3,6,7 являются обязательными.
2. Возможна перестановка блоков местами в порядке следования потока данных.
3. Часть блоков может отсутствовать.

Кратко охарактеризуем основные операции обработки данных.

Нормализация. Операция заключается в линейном преобразовании параметров сигнала вида

$$y = ax + b,$$

(x - параметр входного сигнала; a и b - константа) с целью получения стандартных величин сигналов, необходимых для нормальной работы аппаратуры аналого-цифрового преобразования и коммутации. В простейшем случае - это просто ослабление или усиление сигналов, поступающих с групп разнородных датчиков. Выполняется согласующими устройствами (СУ) - обычно УПТ с $K = 1-6000$.

Считаем эту операцию безинерционной. Возможно применение как индивидуальных (для одного датчика) так и групповых (для группы из нескольких однородных датчиков) СУ.

Дискретизация (опрос). Дискретизация сигналов во времени необходима в том случае, когда одно устройство квантования и обработки используется с несколькими (до нескольких тысяч) источниками данных (датчиками). Осуществляется коммутатором. Самым распространенным способом является циклический опрос, позволяющий разделить для многоканальной системы каналы во времени. Данные вводятся в систему обработки порциями (квантами), через определенные временные интервалы - периоды опроса. При достаточно малом периоде опроса

$$\Delta t \leq \frac{1}{2F_m},$$

где F_m - верхняя часть спектра входного сигнала, появляется возможность полного восстановления входного сигнала по дискретным отсчетам (теорема Котельникова). Частоту опроса (и период) можно изменять.

Квантование по уровню лежит в основе работы всех АЦП и служит для преобразования параметра сигнала в цифровую форму для последующей обработки, регистрации и отображения. Шкала разбивается на n интервалов квантования u_m^i . Всем $u(t_k) \in u_m^i$ соответствует некоторое оценочное значение u^i , $i = \overline{1, n}$ по одному из 3-х способов округления:

верхний ближайший уровень;
нижний ближайший уровень;
средняя точка интервала.

Для выбранной шкалы квантования иногда достаточно все уровни перенумеровать и далее работать лишь с этим номером, выраженным в двоичной системе (двоичным кодом).

Выбор нужных параметров и временных сечений. При циклическом опросе I кадр представляет собой временное сечение всех обрабатываемых каналов, расположенных в определенной последовательности. Для обработки разных комплексных параметров, определенных на различных временных интервалах, требуется выборка нужных параметров для соответствующих сечений. Кроме того, если один коммутатор используется для группы, а частота опроса выбрана по наиболее информативному параметру, то для уменьшения избыточности по остальным параметрам целесообразно организовать их выборку.

Повышение достоверности исходных данных - это обычно алгоритм скользящего среднего. [15]

$$u^*(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^n [u(t + k\Delta t) + \varepsilon(t + k\Delta t)],$$

где ε - случайное значение погрешности всех предыдущих фаз обработки; u - истинное значение в момент $t + k\Delta t$.

При $\varepsilon \approx 0$ и стационарности процесса достоверность отсчета будет существенно выше.

Сжатие данных может применяться на всех последовательных стадиях обработки данных и в конечном итоге ведет к уменьшению среднего времени обработки одного отсчета, т.е. к увеличению пропускной способности системы. Кроме того, для бортовых систем и периферии уменьшаются требования к каналам связи. Известно много алгоритмов сжатия, простейший - линейный интерполятор первого порядка включает

4 операции сложения;	} на I отсчет.
2 операции деления;	
1 операцию пересылки	

Алгоритм предсказателя нулевого порядка:

последний переданный отсчет сигнала порождает два апертурных уровня $u(t_k) + \varepsilon$ и $u(t_k) - \varepsilon$ и следующий отсчет признается существенным, если он достиг какой-либо границы.

Линейный предсказатель первого порядка:

два последних избыточных отсчета порождают две апертурные пря-

прямые и следующий отсчет признается существенным, если он выходит за границы любой из апертур. Несущественные отсчеты пропускаются.

Калибровка применяется для устранения погрешности от нестабильности аппаратуры усиления и преобразования. Для устранения нестабильности как отдельные параметры передаются калибровочные уровни 0 и 100% шкалы группы параметров. Учет их значений производится по формуле

$$u^*(t_k) = \frac{u(t_k) - u_0}{u_{100} - u_0} 100\%$$

(преобразование данных производилось в относительных единицах - процентах измерительной шкалы).

Приведение к физической шкале осуществляется использованием тарировочных характеристик датчиков. При использовании датчика с линейной характеристикой:

$$u(t) = \kappa p + u_0; \quad \kappa \text{ и } u = \text{const},$$

p - отсчет в относительных единицах шкалы.

Глубина дальнейшей обработки может быть различной. Например, некоторые параметры уже после восстановления нужных временных сечений передаются на регистрацию и отображение, другие подвергаются дополнительной обработке с целью определения состояний контролируемых систем и оценки их технических характеристик.

Восстановление нужных временных сечений исходных процессов достигается путем применения различных методов интерполяции промежуточных значений параметров процесса. Вид интерполирующей функции выбирается с учетом примененного алгоритма сжатия.

Восстановление многочленами нулевой степени (ступенчатая интерполяция) производится в соответствии с формулой

$$u(t) = \begin{cases} u(t_{k-1}) & \text{при } t_{k-1} \leq t < t_k; \\ u(t_k) & \text{при } t_k \leq t < t_{k+1}. \end{cases}$$

При линейной интерполяции (многочлен первого порядка) используется уравнение прямой, проходящей через две точки (соседние отсчеты) t_k и t_{k+1} :

$$u(t) = u(t_k) \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} + u(t_{k+1}) \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}$$

Вычисление комплексных параметров связано с конкретной задачей исследований, в данном вычислении могут участвовать все параметры, измеряемые по каждому из каналов.

Допусковый контроль заключается в проверке того, что мгновенные

или другие значения параметров вышли за границы заранее установленного допуска. При этом могут определяться различные статистические характеристики (среднее время пребывания параметра в зоне допуска, распределение плотности вероятности выходов и др.).

Идентификация характеристик может происходить по алгоритмам различной степени сложности; обычно встречается вычисление " сколь-зких " мгновенных спектров параметров.

Определение спектральных и статистических характеристик связано с вычислением математических ожиданий (средних), дисперсий, корреляционных функций и т.п. Алгоритмы эти достаточно широко известны [15].

Основные цели моделирования:

исследование характеристик выбранных алгоритмов квантования и кодирования информации, а также ее сжатие;

исследование точности обработки при действии помех в различных сечениях обработки;

оценка эффективности выбранной алгоритмической структуры обработки;

оценка требуемых объемов памяти и быстродействия ЭМ, реализующей данный процесс обработки.

При вероятностном моделировании такой системы на ЭМ следует принять блочную структуру модели, позволяющую достаточно легко изменять ее конфигурацию. При детерминированном способе дискретизации через равные Δt можно ограничиться лишь нумерацией отсчетов, не организуя специального счетчика времени. При этом вся совокупность отсчетов представится в виде двумерного массива $\{a_{ij}\}$, где i - номер канала (датчика), j - номер отсчета.

Для организации соответствующей структуры кадра в модель необходимо ввести еще блок кодирования, моделирующий процесс построения помехозащищенных кодов по одному из известных принципов [15].

Общая структура модели отображает алгоритмическую структуру (рис. 3.4).

В блоке задания начальных условий и исходных данных определяют следующие переменные и массивы:

количество опрашиваемых датчиков (каналов);

массивы граничных частот спектров соответствующих сигналов ;

массивы границ шкал измеряемых сигналов;

время функционирования системы;

интервал опроса;

количество уровней квантования;
разрядность применяемого кода;
количество отсчетов, необходимое для усреднения в блоке повышения достоверности;
массивы апертур для блоков сжатия данных;
массив коэффициентов нормализации;
массив коэффициентов тарифовочных характеристик датчиков;
количество прогонов N^* ;
массивы границ временных сечений для блока восстановления;
массивы средних и дисперсий помех, накладываемых в различных блоках модели;
начальные значения счетчиков;
матрица изменения передачи управлений блоков;
массив допусков.

Таким образом, задавая матрицу изменений, можно изменять структуру процесса обработки и набирать на модели ту или иную информацию. Оценивая эффективность обработки, можно выбрать рациональную структуру системы сбора и предварительной обработки информации.

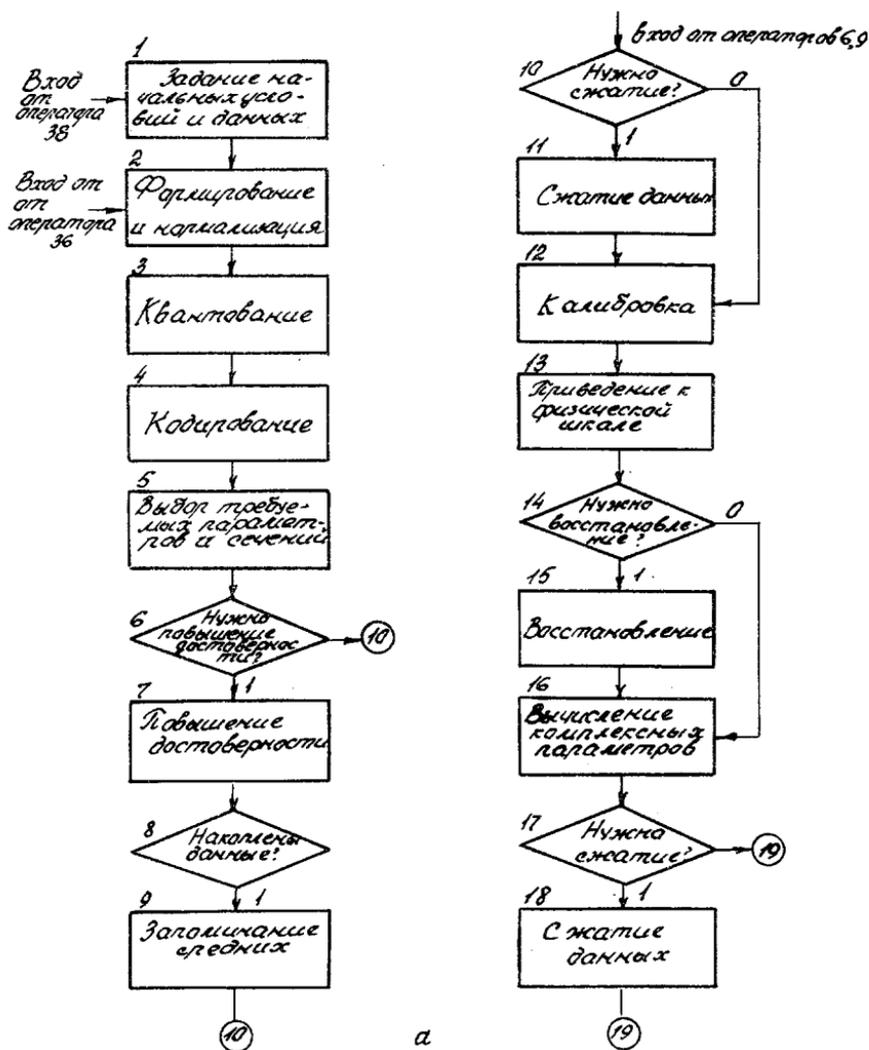
§ 3. Моделирование подсистемы вторичной обработки информации сложной АСУ, использующей МВК

Современные АСУ со сложной иерархией решения задач обработки данных строятся, как правило, на основе использования многомашинных вычислительных комплексов (МВК). Это позволяет рационально использовать мощность вычислительных и запоминающих устройств, сократить время решения задач и, в конечном итоге, повысить быстродействие системы, увеличить коэффициент использования оборудования, повысить надежность и экономичность системы, достоверность решения задач [8].

О п и с а н и е. Имеется АСУ, построенная на основе использования МВК и работающая в режиме обслуживания двух абонентских пунктов (станций).

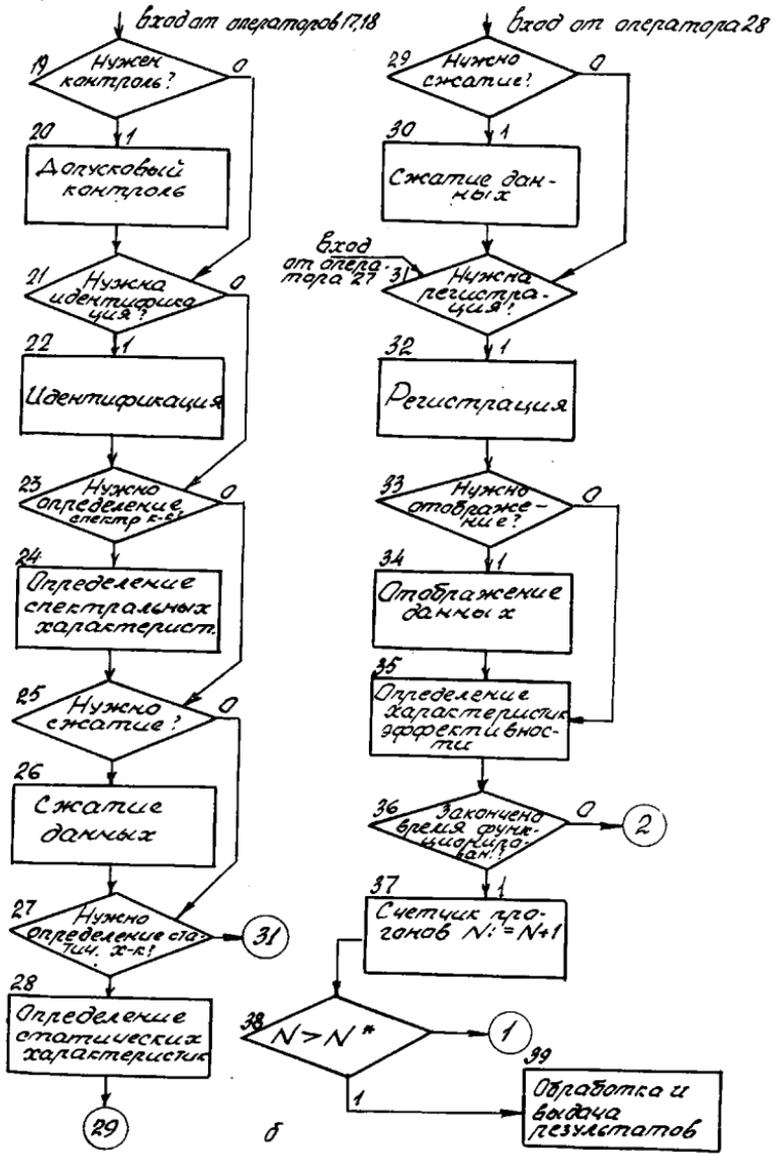
Структура системы представлена на рис. 3.5.

Абонентские пункты работают в режиме формирования заявок к операционной системе (ОС) на выполнение определенной программы (транслятор, программа оптимизации, любая конкретная программа). Источниками заявок являются терминалы (оконечные устройства), расположенные на абонентских пунктах (по 2 терминала на каждом пункте). Это могут быть станции пакетной обработки, управляющие вычислительные машины (УВМ) и другие устройства подсистемы сбора и предварительной



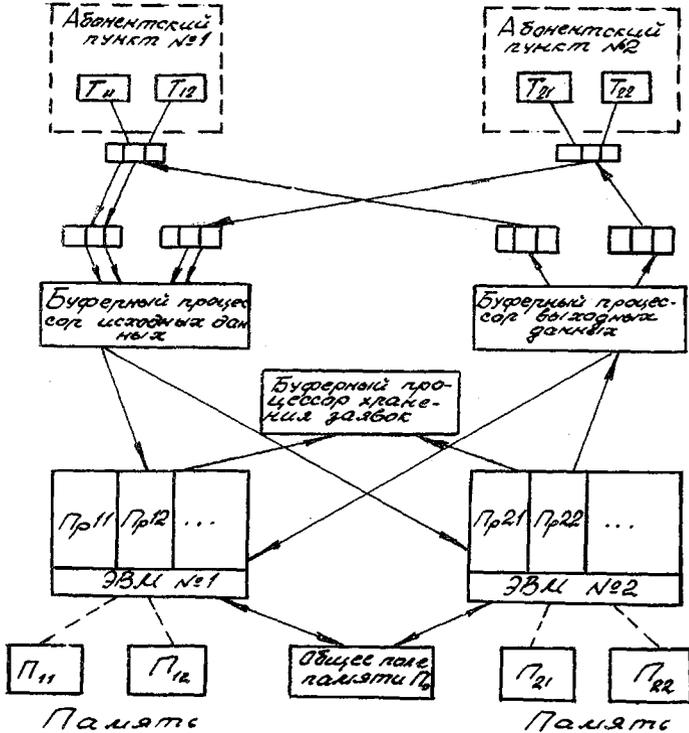
Р и с. 3.4

Продолжение



Р и с. 3.4

обработки данных. Интервалы между поступлениями заявок на обслуживание могут быть как детерминированными (они считаются заданными), так и случайными.



Р и с. 3.5

В последнем случае задан закон распределения интервалов времени между поступлениями заявок для каждого из терминалов. Каждая заявка имеет свой приоритет (обслуживание с приоритетом). Процесс обработки каждой заявки складывается из следующих этапов:

- прием исходных данных в буферный процессор исходных данных;
- загрузка данных в одну из свободных ЭВМ;
- непосредственное решение задачи на одной из ЭВМ;
- передача результатов решения в промежуточную память – буферный процессор выходных данных;
- выдача результатов решения абоненту.

Если свободных вычислительных ресурсов в данный момент не имеется и обслуживается заявка с большим приоритетом, то заявка устанавливается в очередь. Длина очереди (количество одновременно находящихся в системе заявок) ограничена, поэтому при приходе более приоритетной заявки и полном использовании мест в очереди наименее приоритетная заявка удаляется из системы и больше не обслуживается. Хранение данных по заявкам, находящимся в очереди, осуществляется буферным процессором хранения заявок. Передача данных из БЗУ может быть осуществлена по разным алгоритмам:

по импульсу от специального таймера - время-задающего устройства;

по инициативе ЭВМ (циклический опрос с использованием таймера ОС);

по запросу непосредственно от БЗУ, причем здесь могут быть два случая: 1) возможность переполнения; 2) угроза переполнения - более приоритетный запрос. Заявки имеют ограниченное время пребывания в системе, по истечении которого заявка удаляется из системы и все ресурсы, связанные с ней, освобождаются. Обслуживание заявок в ЭВМ происходит с прерыванием: при приходе заявки с максимальным приоритетом и отсутствии свободных вычислительных средств наименее важная обслуживаемая в данный момент заявка устанавливается в очередь, а взамен нее обслуживается заявка с максимальным приоритетом.

ЭВМ в системе состоят из нескольких процессоров, каждый из которых может использоваться для решения любой задачи, кроме того, с каждой из ЭВМ связаны несколько " своих " модулей ОЗУ, к которым могут обращаться все процессоры данной ЭВМ. ЭВМ МВК связаны между собой общим полем памяти P_0 , в качестве которого могут выступать накопители на магнитной ленте (НМЛ) или магнитных дисках (НМД). Любой из процессоров МВК может обращаться к общему полю памяти. Функционирование системы происходит под управлением программы-диспетчера ОС, анализирующей все поступающие заявки и осуществляющей распределение ресурсов по задачам. Каждая единица оборудования может находиться в следующих состояниях:

S_0 - свободна;

S_1 - занята выполнением запроса диспетчера;

S_2 - занята выполнением конкретного алгоритма решения задачи.

Запросы программы - диспетчера обладают наивысшим рангом и их следует выполнять в первую очередь, а затем уже запросы других программных модулей. При наличии нескольких запросов одинакового ранга они выполняются в порядке поступления. При одновременном поступлении нескольких запросов диспетчера учитывается приоритет заявки, с кото-

рой связан запрос. Длительность операции обращения к ИМД и НМД являются случайными величинами, закон распределения которых известен. Длительность передачи определенного массива данных по линии связи от терминалов к буферным процессорам является случайной величиной с заданным законом распределения.

Имеется n типов задач, решаемых системой, все алгоритмы решения (программы в системе ОС) их известны (P_i - программа решения задачи i -го типа, $i = \overline{1, n}$).

Интервал функционирования системы задан - $(0, T)$.

Цель моделирования : определение средних, дисперсий и других статистических характеристик следующих параметров АСУ:

требуемый объем памяти различного типа, соответствующий обслуживанию всех заявок;

коэффициенты загрузки оборудования различного типа сервисными (обслуживающими) операциями и основными операциями;

требуемая комплектация оборудования по процессорам и ЭВМ;

средняя длина очереди заявок;

вероятность того, что устройство i -го типа формирует запрос на работу устройства j -го типа.

Из описания следует, что модель АСУ в данном случае может быть представлена моделью многоканальной многофазной СМО с ожиданием, с ограниченной очередью и приоритетным обслуживанием заявок. Причем, особенностью моделирования является то, что помимо внешних потоков заявок в системе возникают внутренние потоки заявок от оборудования одного типа к оборудованию другого типа (через ОС). Здесь может быть применен комбинированный принцип моделирования, когда, помимо обычного принципа особых состояний, для определения состояний в отдельные моменты времени используется счетчик времени, обновляемый через заданный интервал дискретности Δt . Так как состояние всех компонентов системы необходимо постоянно контролировать и анализировать, то в ОЗУ необходимо иметь при моделировании два массива с длиной, равной общему числу различных компонентов системы. В первом массиве хранятся признаки состояний каждого компонента (S_0, S_1, S_2), во втором массиве - моменты, в которые произошло изменение состояний (заносятся с началом или окончанием выполнения операции соответствующим компонентом из счетчика времени системы).

Модель должна иметь блочную структуру, причем каждая операция обработки описывается своим программным модулем. Поскольку один и тот же программный модуль может выполняться на различном оборудовании (например, на разных процессорах), то должен быть предусмотр-

рен двумерный массив (таблица), в которой указывается, какое оборудование может использоваться для выполнения того или иного программного модуля. Окончанием этапа процесса обработки на оборудовании S -го типа следует считать формирование некоторого слова или массива, в котором указываются выходные параметры, необходимые для работы следующего программного модуля. В случае, если для выполнения программного модуля свободного оборудования нет, формируется очередь. Таким образом, очередь в системе носит сложный характер, одна и та же заявка может по несколько раз до окончания процесса обработки побывать в очереди. Учет загрузки оборудования производится организацией соответствующих счетчиков.

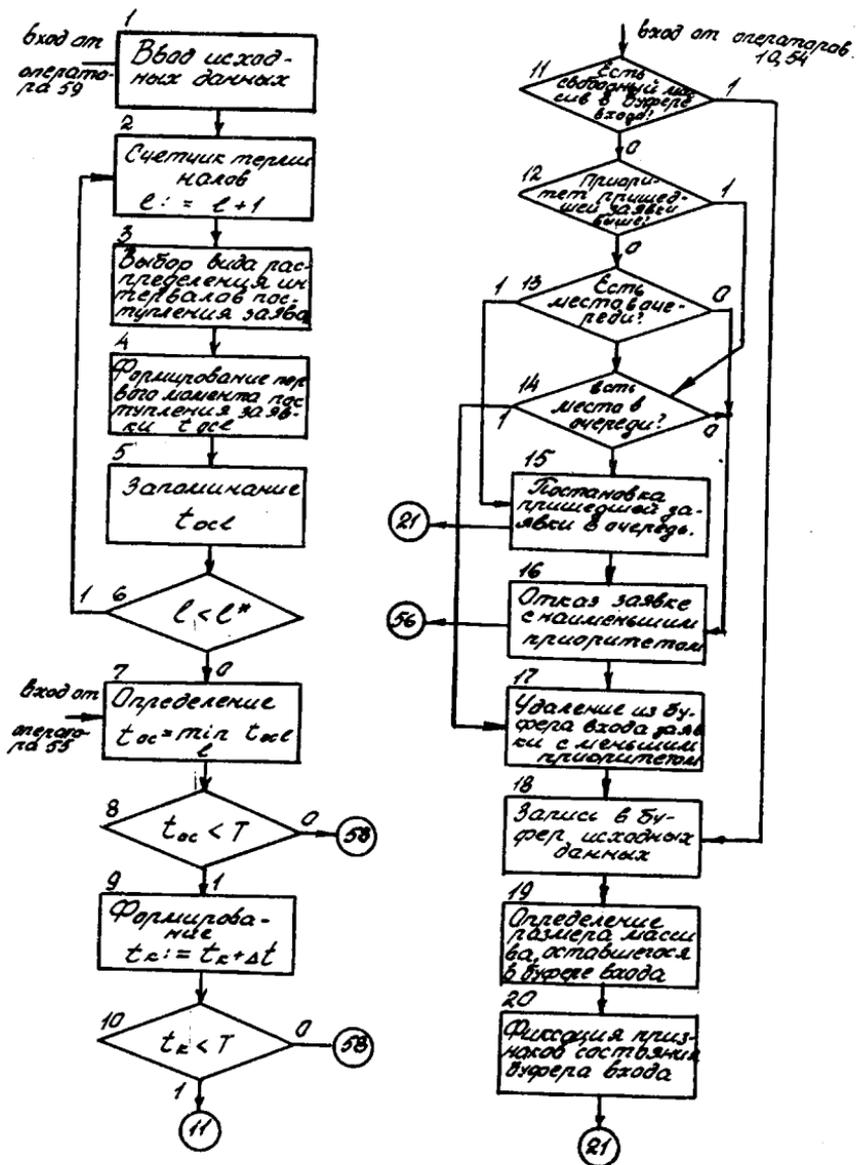
Блок-схема моделирующего алгоритма представлена на рис. 3.6. Условные обозначения:

l^* - число всех терминалов; Δt - интервал дискретности ;
 t_k - текущий момент времени; t_{oc} - очередной момент поступления заявки.

При моделировании предполагается, что длительности операций по пересылке, загрузке и освобождению буферных и основных процессоров укладываются в интервал дискретности Δt , т.е. малы по отношению ко времени решения задачи на ЭВМ.

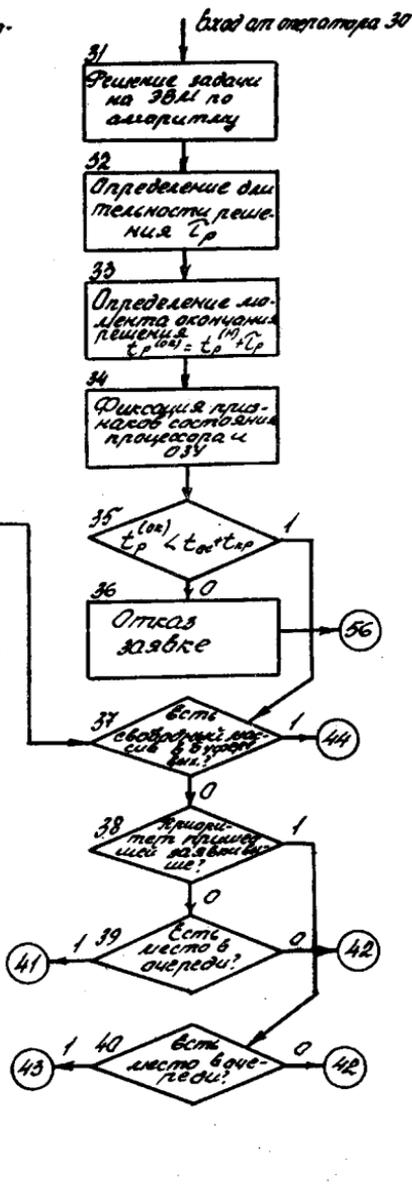
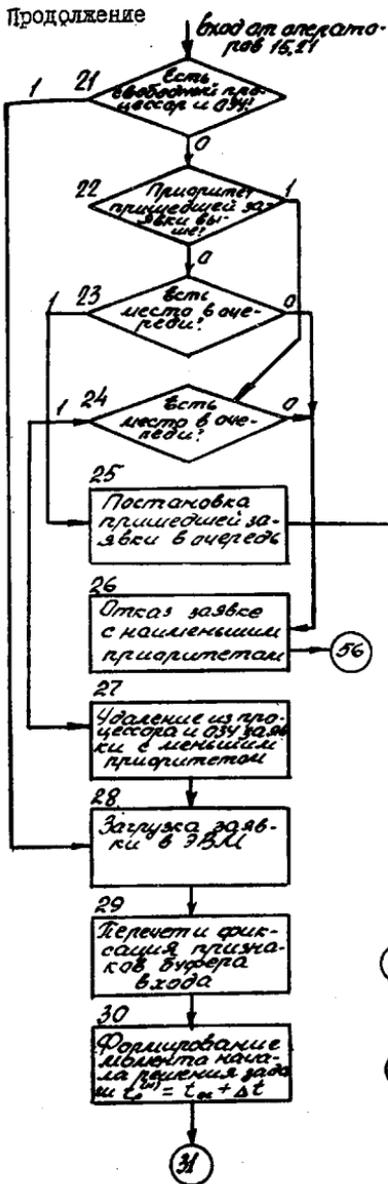
При необходимости их учета следует блок-схему дополнить соответствующими блоками, формирующими моменты начала и окончания пересылки, длительности указанных операций, фиксацию состояния соответствующих единиц оборудования.

Кроме того, можно поставить специальный счетчик обращений к программе - диспетчеру, чтобы оценить объем сервисных операций по отношению к основным. Массивы признаков лучше хранить в виде цепных списков, что уменьшает объем памяти, требуемой для моделирования АСУ. Следует всю программу моделирования и все данные хранить в памяти ОЗУ, иначе время моделирования может быть недопустимо большим. При невозможности выполнения этого условия следует уменьшить интервал функционирования системы и число фиксируемых параметров, а также рассмотреть возможность по увеличению интервала дискретности Δt .

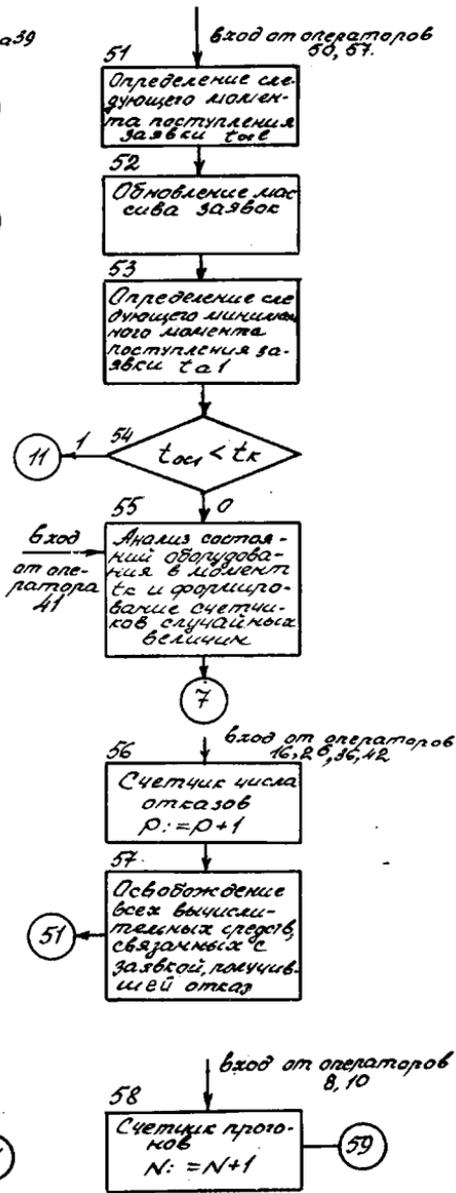
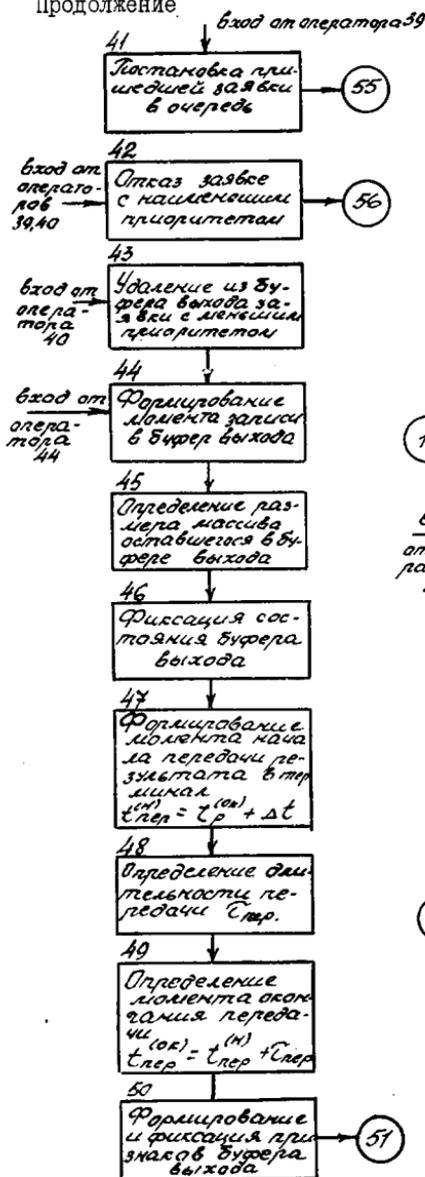


Р и с. 3.6

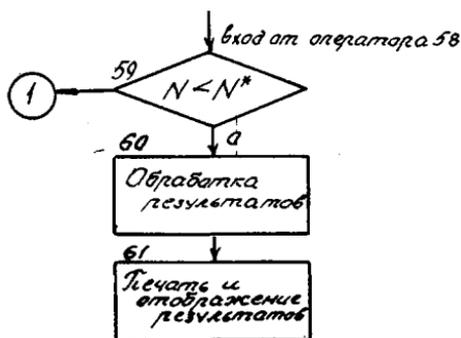
Продолжение



Продолжение



Продолжение



§ 4. Языки моделирования

Языки моделирования систем специализированы не по отношению к той технике, на которой будет реализована программа моделирования, а по отношению к кругу исследуемых с их помощью систем, поэтому подобные языки называют проблемно-ориентированными. Большинство из существующих языков моделирования тесно связаны с функциональными моделями систем массового обслуживания и являются фактически удобным средством формализации моделей массового обслуживания. Разные по построению, организации данных, используемым понятиям, они, тем не менее, весьма схожи по принципам моделирования, поскольку реализуют модели одного общего класса.

Основное достоинство всех проблемно-ориентированных языков моделирования - удобство программирования. Это обстоятельство не только облегчает труд программиста, но делает более эффективным общение между заказчиком - разработчиком системы и исполнителем, создающим программу ее моделирования. Однако на пути использования языков моделирования немало трудностей, и в первую очередь это трудности эксплуатационного плана. В отличие от языков программирования, таких как ФОРТРАН, АЛГОЛ, КОБОЛ, для которых имеются эффективные трансляторы, языки моделирования как правило имеют неэффективные трансляторы, которые не получили широкого распространения. Кроме того, они разрабатывались разными организациями, в различных странах, зачастую плохо описаны и могут содержать невыявленные ошибки. Несмотря на привлекательность языков моделирования, зачастую от них приходится отказываться лишь потому, что в распоряжении исследователя нет соответствующего

транслятора, нет достаточно подробного описания языка и т.д. Разработка же транслятора с языка моделирования - трудоемкий процесс, который требует немалых материальных затрат и под силу лишь организациям, располагающим достаточным штатом квалифицированных специалистов.

В этом параграфе мы дадим краткую характеристику языкам моделирования, получившим наибольшее распространение: СИМСКРИПТ и GPSS - оба используются фактически для моделирования сложных систем массового обслуживания.

СИМСКРИПТ [11], [16]. Язык был первоначально разработан в фирме "РЭНД корпорейшн" для вычислительной системы IBM-7090. Использовался также в других машинах. СИМСКРИПТ иногда называют языком событий [11]. События представляют последовательность сгруппированных предположений, изменяющих состояние моделируемой системы в различные моменты времени. Система состоит из объектов, которые описываются с помощью характеристик. Состояние системы в СИМСКРИПТе описывается, таким образом, с помощью таких понятий как объекты, их характеристики и множества объектов. Эти элементы описывают статическую структуру. Динамика же работы системы проявляется в чередовании определенных событий, происходящих в системе. Таким образом, программа моделирования на СИМСКРИПТе подразделяется на следующие части:

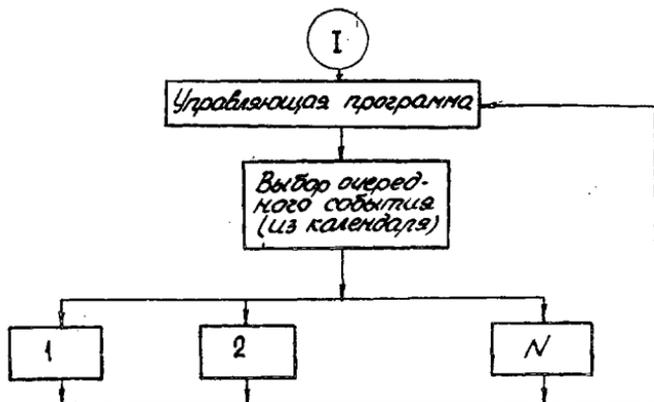
1. Описание элементов моделируемой системы - объектов.

2. Набор подпрограмм событий (для каждого события своя подпрограмма).

3. Перечень возможных событий. В процессе моделирования каждому событию приписывается метка времени, в которое это событие произойдет. Перечень событий вместе с метками времени образует программу - календарь, которая постоянно обновляется за счет внесения новых событий с новыми метками времени. Общая структура программы моделирования показана на рис. 3.7.

Управляющая программа - неотъемлемая часть любого языка моделирования. Счет по программе моделирования начинается в пункте 1, где фиксируются и вводятся начальные условия, определяющие характеристики объектов системы, и характеристики временных объектов - часов модельного времени. Подобные часы " переводят стрелки" от события к событию с пропуском тактов, на которых ничего не происходит. Подобный принцип называют контролем времени по текущему событию [11], а в отечественной литературе его называют принципом " особых состояний" [2]. " Особое состояние " в СИМСКРИПТе - это состояние системы в тот момент времени, когда произошло событие. Управляющая программа производит выбор очередного события (из календаря) и передает

управление подпрограмме, соответствующей этому событию (1, 2, ..., N). Из календаря как правило выбирается событие, которое наступит раньше всех остальных, при этом часы модели сразу устанавливаются на момент времени, когда это событие произойдет.



Р и с. 3.7

Построение СИМСКРИПТ-программы в виде основной программы (управляющей) и набора подпрограмм - генераторов событий-характерно для ФОРТРАНА, на базе которого и создавался этот язык моделирования. Наибольшее распространение СИМСКРИПТ получил в США.

Принцип функционирования этого языка - языка событий, можно сравнить с чисто иллюстративной целью с ведением расписания (пятидневки, например) некоторым административным работником. В расписании делаются записи того, что нужно сделать (события) и когда это необходимо сделать (метки времени). При наступлении отмеченных моментов времени работник, во-первых, зачеркивает соответствующую запись в своем расписании (уничтожает событие) и, во-вторых, выполняет все те действия, которые были намечены на этот момент времени (с кем-то встречается, обсуждает определенный вопрос, выслушивает доклады подчиненных и т.п.). Причем в процессе выполнения подобных действий он записывает в свое расписание -пятидневку некоторые новые записи (события), которые предстоит выполнить в последующие моменты времени и т.д. Ведение подобного расписания и есть основная функция управляющей программы на СИМСКРИПТе.

Структура моделирующей программы поясняется схемой, представленной на рис.3.8.

PREAMBLE

(описание статической и динамической структур моделируемой системы; перечень событий, происходящих в системе, порядок выполнения одновременных событий, задания по сбору и обработке результатов)

END

MAIN(управляющая программа)

INITIALIZE CALL INITIALIZATION (вызов подпрограммы установки начального состояния системы)

START SIMULATION (выбор первого события. Начало имитации. Когда испытание окончено, управление передается сюда)

IF DATA IS ENDED, STOP
OTHERWISE...

если данные исчерпаны - закончить имитацию, в противном случае ...

UNTIL REQUEST FILE IS EMPTY, DO

REMOVE THE FIRST TASK FROM THE REQUEST FILE

DESTROY THE TASK

LOOP

(... пока не опустеет расписание, продолжать имитацию, уничтожая записи событий (задачи), выбранные из расписания)

GO INITIALIZE передача управления в начало подпрограммы

END

ROUTINE FOR INITIALIZATION

(подпрограмма установки начального состояния системы)

END

ROUTINE "ИМЯ" подпрограмма " события I "

.....

RETURN возврат к управляющей программе

END

ROUTINE

подпрограмма " события 2 "

RETURN

END

```
.....  
{ ROUTINE  
  " подпрограмма " события L "  
  RETURN  
  END  
  ROUTINE REPORT  
{ отчет. Вывод результатов счета  
  RETURN  
  END
```

Р и с. 3.8

В случае, если в подобной системе несколько событий могут произойти одновременно, т.е. в расписании событий на одной метке времени значатся несколько событий, необходимо предусмотреть механизм, который позволит отдать предпочтение какому-либо из этих событий в соответствии с приоритетами событий. Этот механизм имеется в СИМСКРИПТе. На рис. 3.8 подробнее, чем в остальных частях, представлена структура управляющей программы - MAIN. Именно она иллюстрирует возможности управления имитацией систем на СИМСКРИПТе.

GPSS [11], [17] (*General Purpose System Simulator*) разработан Гордоном в фирме IBM для использования в вычислительной машине IBM-7090. С 1962 года этот язык входит в математическое обеспечение машин фирмы IBM (в настоящее время этот язык и его упрощенная версия используются и в Европе).

В отличие от большинства языков моделирования в GPSS есть две формы записи программы: блочная и кодовая. Эта особенность делает использование языка моделирования систем GPSS чрезвычайно удобным: структура моделируемой системы, описываемая блок-схемой программы и структура программы оказываются тесно связанными. Как и СИМСКРИПТ язык GPSS фактически является удобным средством для реализации моделей сложных систем массового обслуживания на ЭМ, однако в отличие от СИМСКРИПТа этот язык основан на другом принципе моделирования систем, принципе "последовательной проводки заявок". События, происходящие в системе, вызываются собственно процессом прохождения заявок через отдельные блоки модели. Эти события чередуются в той же

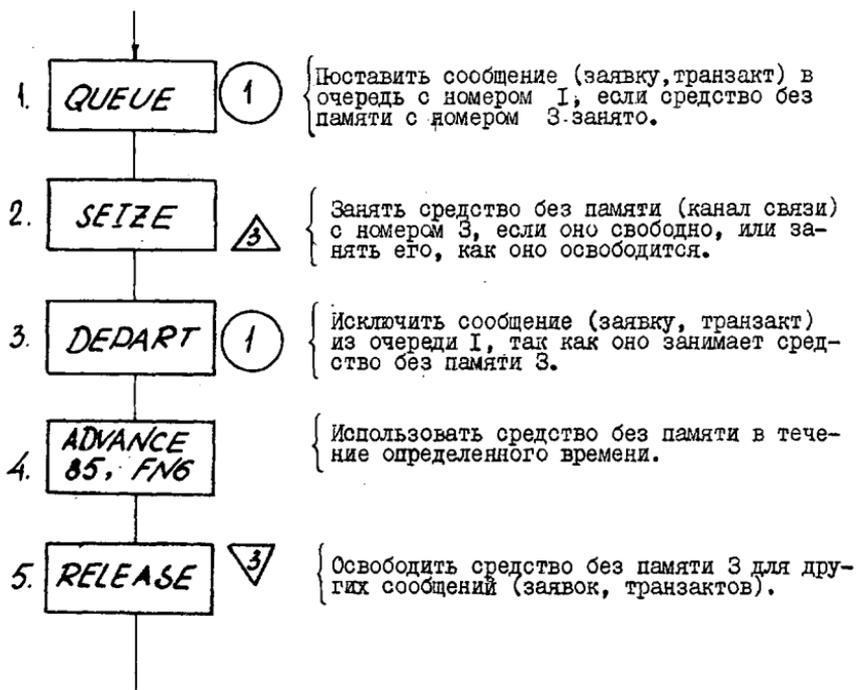
временной последовательности, что и в реальной системе. Подобное обстоятельство и позволяет говорить об адекватности реальной системы и соответствующей ей имитационной модели. Язык *GPSS* иногда называют языком транзактов, реже языком процессов. К сожалению, подробного описания этого языка в отечественной литературе пока не имеется.

Блочная запись программы моделирования на *GPSS* определяется в виде, во многом аналогичном обычным блок-схемам программ, широко используемым для описания вычислительных процессов, однако набор блоков специфичен для *GPSS*.

Оборудование, моделируемое на этом языке, делится на два типа: средства без памяти и средства с памятью. Подобное деление оборудования на типы во многом обусловлено тем обстоятельством, что язык этот ориентирован в первую очередь на моделирование таких систем, как вычислительные системы, системы передачи данных - для этих разновидностей общего класса систем массового обслуживания подобное деление оборудования оказывается удобным.

Средство без памяти может обрабатывать одновременно только одно сообщение (например, через канал связи в большинстве случаев может передаваться только один блок данных). Если средство без памяти занято, другие сообщения к нему должны ждать: образуется очередь. На рис. 3.9 приведен фрагмент блочной записи программы на *GPSS*, иллюстрирующий моделирование средства без памяти - канала связи. Блоки 1 и 3 этого фрагмента связаны с очередью к каналу связи - средству без памяти. Эти блоки необходимы для сбора статистических данных об очередях сообщений, возникающих к заданному средству без памяти. Блок 2 и блок 5 связаны с занятием и освобождением соответственно средства без памяти № 3 - канала связи. Блок 4 иллюстрирует время, затрачиваемое на передачу сообщения, время, в течение которого средство без памяти № 3 оказывается занятым.

Это время в общем случае - величина случайная. В блоке 4 указывается среднее значение этого времени (85, например, миллисекунд) и интегральная функция распределения FN № 6. Более подробно функция FN № 6 определяется в ином месте программы. Все блоки, относящиеся к какому-либо средству без памяти, имеют индекс (номер) этого средства (указывается справа от блока в треугольнике). Аналогичная индексация используется для блоков, связанных с одной и той же очередью (номер очереди справа от блока в круге).



Р и с. 3.9

Средство с памятью - модель оборудования, имеющего некоторую емкость, которая обеспечивает обработку нескольких сообщений одновременно. В качестве примера средства с памятью можно назвать динамически распределяемую область оперативной памяти вычислительной системы. Ввод сообщений в средства с памятью и вывод из них осуществляется с помощью блоков, аналогичных блокам 2 и 5 (см. рис. 3.9).

Программа, имитирующая систему на *GPSS*, работает следующим образом. Когда сообщение (используют также термины "заявка" или "транзакт") поступает в какой-либо блок, событие, определяемое этим блоком, происходит немедленно, после чего сообщение пытается перейти в следующий блок. Однако, если программа не может выполнить действие, задаваемое этим следующим блоком, сообщение остается в предыдущем блоке до тех пор, пока не исчезнут условия, вызывающие задержку. Движение сообщений через модель имеет, таким образом, прерывистый характер, так как они на своем пути встречают моделируемые

программой задержки и очереди, свойственные реальной системе.

Сообщения в *GPSS* генерируются специальным блоком „*GENERATE X1, FN4*“, в котором указываются среднее время между появлениями сообщений (*X1*) и функция распределения интервалов времени между появлениями сообщений (*FN4*). Каждое сообщение, прошедшее через все блоки модели, уничтожается в блоке „*TERMINATE*“.

Структура программы на *GPSS* полностью определяется блочной структурой модели. При кодировке имитационной программы номера операторов соответствуют номерам блоков в блочной структуре программы. Например, фрагмент, представленный на рис. 3.3, при переходе к кодовой структуре будет иметь вид:

1. *QUEUE 1*
2. *SEIZE 3*
3. *DEPART 1*
4. *ADVANCE 85, FN6*
5. *RELEASE 3*

Вообще же кодовая структура программы на *GPSS* делится на три части: вспомогательная, собственно программа и управляющая.

Во вспомогательной (или описательной) части описываются типы функций, используемых при моделировании (здесь, например, должна быть описана функция *FN6*). Эта часть в чем-то аналогична „*PREAMBLE*“ СИМСКРИПТа.

Собственно программа имитации перечисляет те же операторы и в той же последовательности, что и блок-схема модели. Номер блока на блок-схеме и тип оператора, описанного в блоке, соответствуют номеру этого же оператора в записи собственно программы модели (кодовой структуры).

Наконец, управляющая часть программы содержит исходные данные для моделирования и управляющие операторы. Например, оператор „*START 5000*“ осуществляет начало имитации, при этом через систему проводится 5000 заявок в соответствии с описанными выше принципами последовательной проводки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Основы теории подобия и моделирования. Сб. рекомендуемых терминов. Вып. 83, М., "Наука", 1978, 24 с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М., "Наука", 1968, 355 с.
3. Биков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., "Советское радио", 1971, 326 с.
4. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М., "Мир", 1965, 302 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Изд. 2-е, М., "Высшая школа", 1975, 333 с.
6. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М., "Мир", 1969, 395 с.
7. Тараканов К.В., Овчаров Л.А., Тырышкин А.Н. Аналитические методы исследования систем. М., "Советское радио", 1974, 240 с.
8. Каган Б.М., Каневский М.М. Цифровые вычислительные машины и системы. Изд. 2-е, М., "Энергия", 1973, 679 с.
9. Соболев Л.М. Численные методы Монте-Карло. Изд. 2-е, М., "Наука", 1972, 64 с.
10. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М., "Наука", 1968, 288 с.
11. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М., "Наука", 1975, 500 с.
12. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1. Изд. 3-е, М., "Наука", 1966, 632 с.
13. Поляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., "Советское радио", 1971, 400 с.
14. Надежность и эффективность АСУ. Под ред. Ю.Г. Заренина. Киев, "Техника", 1975, 368 с.
15. Мановцев А.П. Основы теории радиотелеметрии. М., "Энергия", 1973, 592 с.
16. Мартин Ф. Моделирование на вычислительных машинах. М., "Мир", 1972, 283 с.
17. Мартин Дж. Системный анализ передачи данных, т.2. М., "Мир", 1975, 256 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	3
<u>Глава I.</u> ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ . .	6
§ 1. Модели систем массового обслуживания (СМО)	6
§ 2. Модели скользящего среднего - авторегрессий	20
<u>Глава II.</u> СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	28
§ 1. Получение случайных чисел с равномерным законом распределения вероятностей	30
§ 2. Моделирование случайных величин с заданным законом распределения вероятностей	34
§ 3. Цифровые модели случайных процессов	38
§ 4. Точность и достоверность статистической мо- дели	42
§ 5. Статистическая имитационная модель системы контроля	47
<u>Глава III.</u> МОДЕЛИРОВАНИЕ АСУ	52
§ 1. Моделирование АСУ по критериям надежности и эффективности функционирования	53
§ 2. Моделирование подсистем сбора и предваритель- ной обработки данных	55
§ 3. Моделирование подсистемы вторичной обработки информации сложной АСУ, использующей МВК . .	63
§ 4. Языки моделирования	73
<u>ЛИТЕРАТУРА</u>	81