

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.А. КОВАЛЁВ, В.В. КОТЛЯР

НОВЫЕ ВИДЫ БЕЗДИФРАКЦИОННЫХ
И СТРУКТУРНО-УСТОЙЧИВЫХ АСИММЕТРИЧНЫХ
ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИЧЕСКОЙ
ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 03.04.01 Прикладные математика и физика, 01.04.02 Прикладная математика и информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2019

УДК 535(075)
ББК 22.34я7
К 561

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Д. Л. Г о л о в а ш к и н,
канд. физ.-мат. наук А. А. М о р о з о в

Ковалёв, Алексей Андреевич

К 561 **Новые виды бездифракционных и структурно-устойчивых асимметричных лазерных пучков для задач оптической передачи информации:** учеб. пособие / *А.А. Ковалёв, В.В. Котляр.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2019. – 64 с.

ISBN 978-5-7883-1401-3

Описаны методы поиска новых видов бездифракционных и структурно-устойчивых лазерных пучков. Такие пучки привлекательны для задач оптических коммуникаций в свободном пространстве и для задач оптического захвата и перемещения микрообъектов. Рассмотрены суперпозиции бездифракционных асимметричных мод Бесселя, комплексная амплитуда которых получается из комплексной амплитуды традиционных мод Бесселя путем комплексного смещения в поперечной плоскости. Для таких суперпозиций были получены аналитические выражения, позволяющие вычислять орбитальный угловой момент. Предложен способ формирования бездифракционных пучков с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ.

Предназначено для студентов направлений подготовки 03.04.01 Прикладные математика и физика, 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Подготовлено на кафедре технической кибернетики.

УДК 535(075)
ББК 22.34я7

ISBN 978-5-7883-1401-3

© Самарский университет, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Применяемые методы и подходы	6
2. Фурье-спектр пучка Бесселя, смещённого в поперечной плоскости.....	7
3. Орбитальный угловой момент пучка Бесселя с комплексным смещением в поперечной плоскости	10
4. Орбитальный угловой момент суперпозиции смещённых пучков Бесселя	11
5. Орбитальный угловой момент суперпозиции трёх смещённых пучков Бесселя	13
6. Орбитальный угловой момент суперпозиции пучков Бесселя, расположенных в вершинах правильного многоугольника	18
7. Суперпозиция большого числа пучков Бесселя, центры которых расположены на окружности.....	22
8. Бездифракционные пучки Ломмеля	26
9. Структурно-устойчивые трёхмерные и двумерные лазерные половинные пучки Пирси	33
10. Теоремы о сохранении орбитального углового момента суперпозиций смещённых оптических вихрей.....	43
Заключение.....	57
Список литературы.....	58

ВВЕДЕНИЕ

Явление дифракции является одним из проявлений волновой природы света. Когда световой пучок распространяется вдоль оптической оси от начальной плоскости к плоскости наблюдения (обе плоскости параллельны друг другу и перпендикулярны оптической оси), световые поля, исходящие от разных участков начальной плоскости, интерферируют друг с другом и в плоскости наблюдения возникает дифракционная картина, распределение интенсивности в которой в общем случае отличается от распределения в начальной плоскости. Распространение светового пучка в однородной среде описывается уравнением Гельмгольца и его парааксиальным приближением – уравнением типа Шрёдингера. Несмотря на дифракцию, у этих уравнений существуют решения, описывающие световые поля, которые свободны от этого явления. В первую очередь это давно известные традиционные и недавно открытые асимметричные пучки Бесселя [1-3], Матье [4] и Эйри [5]. Пучки Бесселя распространяются без дифракции в трехмерном пространстве, а пучки Эйри – в двумерном. Распределение интенсивности пучков Матье в поперечной плоскости в отличие от пучков Бесселя не обладает кольцевой структурой. Также не обладают дифракцией плоские волны, так как распределение интенсивности у них не меняется при распространении от одной плоскости к другой. В трехмерном случае не обладает дифракцией любое световое поле, угловой спектр плоских волн которого отличен от нуля на бесконечно тонком кольце [1]. Наряду с пучками Бесселя и Эйри, интерес представляют парааксиальные структурно-устойчивые пучки, инвариантные к распространению. Такие пучки не являются бездифракционными, но при распространении структура их распределения интенсивности в поперечной плоскости не меняется, меняется только масштаб. Наиболее известными такими пучками являются пучки Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса [6], гипергеометрические моды [7]. В работе [8] рассмотрены пучки Пирси, как трехмерные аналоги пучков Эйри. Распределение комплексных амплитуд таких пучков описывается функцией Пирси [9, 10], определяемой как интеграл от комплексной экспоненты, аргумент которой является полиномом (подобно функции Эйри). Угловой спектр таких пучков представляет собой параболу с фазовой модуляцией. Эти пучки обладают свойством автофокусировки и

восстанавливаются после искажения препятствиями. В работе [11] предложен виртуальный источник, формирующий пучок Пирси.

Бездифракционные пучки рассматривались также в неоднородных средах: в тонких пленках [12], в одномерных металло-диэлектрических фотонных кристаллах [13], в периодических структурах из нановолокон [14]. Распространение сингулярного поверхностного плазмона-поляритона на большое расстояние без дифракции рассмотрено в работе [15]. В работе [16] рассматривается формирование бесселеподобного пучка с помощью рефракционного логарифмического аксикона, а в работе [17] – формирование целого массива пучков Бесселя с помощью решеток Дамманна.

В данном пособии описаны теоретическое исследование, компьютерное моделирование и экспериментальное формирование новых видов лазерных пучков, которые, подобно модам Бесселя, не меняют своей формы при распространении в однородной среде или форма которых меняется только масштабно, но не структурно, подобно модам Эрмита-Гаусса и Лагера-Гаусса. Исследование таких пучков актуально для оптической передачи информации (в частности для уплотнения каналов связи и снижения потерь от искажений в турбулентной атмосфере), а также для перспективных технологических процессов микро- и наноэлектроники. В отличие от большинства известных аналогичных пучков новые лазерные пучки обладают асимметричным распределением интенсивности в поперечном сечении.

В рамках проблемы, описанной в данном пособии, рассматриваются некоторые суперпозиции бездифракционных пучков Бесселя, которые представляют собой лазерные пучки, описываемые простыми математическими выражениями, позволяющими анализировать их оптические свойства. Исследуются наличие и величина орбитального углового момента таких пучков, а также вид их углового спектра плоских волн. В отличие от большинства известных аналогичных пучков новые лазерные пучки обладают асимметричным распределением интенсивности в поперечном сечении.

1. ПРИМЕНЯЕМЫЕ МЕТОДЫ И ПОДХОДЫ

Математически цель работы состоит в получении новых решений уравнения Гельмгольца (а также его парааксиального приближения – параболического уравнения типа Шредингера), описывающих бездифракционные лазерные пучки. Существует несколько подходов к получению таких решений. Мы рассмотрим три разных подхода. Все они основываются на получении одних решений из других, ранее известных. Рассмотрим эти подходы подробнее.

Первый подход заключается в применении операторов симметрии [18]. Например, простое дифференцирование комплексной амплитуды по любой декартовой координате также позволяет получить решение уравнения. Так, из Гауссова пучка получаются элегантные пучки Эрмита-Гаусса [19], комплексная амплитуда которых пропорциональна полиному Эрмита с комплексным аргументом.

Другой подход состоит в комплексном смещении в декартовой плоскости. Идея комплексного смещения была опубликована еще в 1967 году [20], когда Ю.А. Кравцов показал, что выражение для поля точечного источника с мнимой координатой сводится к парааксиальному Гауссову пучку в том случае, когда мнимое расстояние от источника до вещественного пространства во много раз превосходит длину волны света. Позже идея комплексного смещения была развита в работах [21-23].

Третий подход основан на том, что суперпозиция бездифракционных пучков с одинаковой константой распространения также является бездифракционным пучком. Так, в работе [24] рассмотрены бездифракционные пучки, описываемые в виде линейной комбинации мод Бесселя и имеющие комплексную амплитуду, пропорциональную функции Матье. На этой же идее основаны недавние работы [2, 3, 25].

Для численного моделирования в работе применяется коммерческое программное обеспечение RSoft, в котором реализован конечно-разностный FDTD-метод (Finite Difference Time Domain) решения системы уравнений Максвелла [26], а также конечно-разностный BPM-метод (Beam Propagation Method, метод распространения пучка) для моделирования парааксиального распространения монохроматического света [27]. Оба эти метода не новы и хорошо зарекомендовали себя для решения задач электродинамики.

Экспериментальные исследования проведены с использованием фазового пространственного модулятора света. Поскольку

формируемые световые распределения являются амплитудно-фазовыми, используются различные методы кодирования [28, 29].

Описанные методы получения новых решений уравнения Гельмгольца не новы. Однако далеко не всегда они приводят к получению решений, описывающих бездифракционные пучки. Известно лишь несколько работ, в которых рассматриваются суперпозиции пучков Бесселя, также не обладающие дифракцией и описываемые замкнутыми аналитическими выражениями (например, [24, 25, 30]). Новизна данной работы заключается не в применяемых методах, а в новых физических свойствах полученных решений уравнения Гельмгольца.

2. ФУРЬЕ-СПЕКТР ПУЧКА БЕССЕЛЯ, СМЕЩЁННОГО В ПОПЕРЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

Известно, что комплексная амплитуда непараксиального стационарного светового поля, $E(x, y, z)$ удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде углового спектра плоских волн:

$$E(x, y, z) = \iint_{\square^2} A(\xi, \eta) \times \exp\left[ik(\xi x + \eta y) + ikz\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}\right] d\xi d\eta, \quad (1)$$

где k – волновое число монохроматического света, $A(\xi, \eta)$ – комплексная амплитуда углового спектра плоских волн. В полярных координатах (r, φ) выражение (1) примет вид

$$E(r, \phi, z) = \iint_{\square^2} A(\rho, \theta) \times \exp\left[ikr\rho\cos(\theta - \phi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (2)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в Фурье-плоскости. Амплитуда углового спектра плоских волн для пучка, смещённого на вектор с декартовыми координатами (x_0, y_0) , имеет вид

$$A'(\rho, \theta) = A(\rho, \theta) \exp\left[-ik\rho(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right], \quad (3)$$

где $A(\rho, \theta)$ – амплитуда углового спектра плоских волн исходного несмещённого пучка. Координаты смещения (x_0, y_0) могут быть комплексными числами.

Известен вид углового спектра несмещённого пучка Бесселя n -го порядка:

$$A_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha\lambda} \exp(in\theta) \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right), \quad (4)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, α – масштабный параметр несмещённой моды Бесселя:

$$E_n(r, \varphi, z) = \exp\left(in\varphi + iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) J_n(\alpha r), \quad (5)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя n -го порядка первого рода. С учётом (3) амплитуда углового спектра смещённого пучка Бесселя n -го порядка равна:

$$A'_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha\lambda} \exp(in\theta) \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \times \\ \times \exp(-ikx_0\rho \cos\theta -iky_0\rho \sin\theta). \quad (6)$$

Найдем коэффициенты A_{mn} ряда, который описывает разложение амплитуды спектра смещённого пучка Бесселя n -го порядка (6) по амплитудам спектра несмещённых пучков Бесселя разных порядков:

$$A'_n(\rho, \theta) = \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{pn} \frac{(-i)^p}{\alpha\lambda} \exp(ip\theta). \quad (7)$$

Умножая обе части равенства (7) на $(\alpha\lambda/\delta\rho - \alpha/k)\exp(-im\theta)$ и интегрируя по θ от 0 до 2π получим:

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(n-m)\theta] \exp(-i\alpha x_0 \cos\theta - i\alpha y_0 \sin\theta) d\theta = \\ = i^n \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{pn} (-i)^p 2\pi \delta_{pm}. \quad (8)$$

Интеграл в левой части (8) равен

$$\int_0^{2\pi} \exp(in\theta + ia \cos\theta + ib \sin\theta) d\theta = \\ = 2\pi \left(\frac{ia - b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^n J_n\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right). \quad (9)$$

С учётом (9) коэффициенты ряда в правой части (8) равны:

$$A_{mn} = \left(\frac{x_0 + iy_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right)^{n-m} J_{m-n} \left(\alpha \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right). \quad (10)$$

В частном случае, когда по одной координате смещение действительное, а по другой – чисто мнимое, и по модулю оба смещения равны ($x_0 = c/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$), то коэффициенты (10) упрощаются:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{c^{m-n}}{(m-n)!}, & m \geq n, \\ 0, & m < n. \end{cases} \quad (11)$$

Выражение (11) было получено из (10) с помощью предельного перехода (при малых значениях аргумента функции Бесселя). В этом частном случае амплитуда углового спектра плоских волн смещённого пучка Бесселя представляется в виде линейной комбинации мод Бесселя в виде

$$A'_n(\rho, \theta) = \delta \left(\rho - \frac{\alpha}{k} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} \frac{(-i)^{n+p}}{\alpha \lambda} \exp[i(n+p)\theta], \quad (12)$$

где параметр c задает степень асимметрии смещённой моды Бесселя n -го порядка. Используя (6) и (9), из (1) получим очевидное выражение для амплитуды смещённого пучка Бесселя:

$$E'_n(x, y, z) = \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) \times \\ \times \left[\frac{(x + x_0) + i(y + y_0)}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}} \right]^n \times \\ \times J_n \left(\alpha \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2} \right). \quad (13)$$

3. ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ ПУЧКА БЕССЕЛЯ С КОМПЛЕКСНЫМ СМЕЩЕНИЕМ В ПОПЕРЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

Проекцию на оптическую ось z орбитального углового момента (ОУМ) и полную мощность лазерного пучка можно рассчитать с помощью выражений:

$$iJ_z = \iint_{\square^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \phi} r dr d\phi = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \iint_{\square^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta} \rho d\rho d\theta, \quad (14)$$

$$I = \iint_{\square^2} E^* E r dr d\phi = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \iint_{\square^2} A^* A \rho d\rho d\theta. \quad (15)$$

При вычислении (14) и (15) для смещённого пучка Бесселя воспользуемся (6). Тогда получим проекцию ОУМ на оптическую ось:

$$J_z = \frac{\lambda}{\alpha} \delta(0) \left[n I_0(2\alpha r_{0i}) + \frac{\alpha}{r_{0i}} \operatorname{Im}(y_0 x_0^*) I_1(2\alpha r_{0i}) \right], \quad (16)$$

где $r_{0i} = [(\operatorname{Im} x_0)^2 + (\operatorname{Im} y_0)^2]^{1/2}$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя, а также мощность всего пучка:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\delta(0)}{k\alpha} \int_0^{2\pi} \exp[2\alpha(\operatorname{Im} x_0 \cos \theta + \operatorname{Im} y_0 \sin \theta)] d\theta = \\ &= \frac{\lambda}{\alpha} \delta(0) I_0(2\alpha r_{0i}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\delta(0)$ – дельта-функция Дирака в нуле. Из (16) и (17) следует, что проекция ОУМ на оптическую ось и мощность смещённого пучка Бесселя неограниченны, но их отношение имеет вполне определённую величину:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\alpha}{r_{0i}} \operatorname{Im}(x_0^* y_0) \frac{I_1(2\alpha r_{0i})}{I_0(2\alpha r_{0i})}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что, если обе координаты вектора смещения (x_0, y_0) действительные или обе чисто мнимые, то нормированный ОУМ (18) не отличается от ОУМ для несмещённого пучка Бесселя и равен топологическому заряду:

$$\frac{J_z}{I} = n. \quad (19)$$

Нормированный ОУМ смещённого пучка Бесселя (18) будет отличаться от ОУМ несмещённого пучка Бесселя (19), только если смещение по одной координате действительное, а по другой чисто мнимое. Например, пусть $x_0 = b/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$, тогда ОУМ (18) примет вид

$$\frac{J_z}{I} = n + b \frac{I_1(2|c|)}{I_0(2|c|)}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что ОУМ будет увеличиваться по сравнению с (19), если $b > 0$, и уменьшаться, если $b < 0$. Причем величина мнимого смещения c определяет изменение формы пучка: при небольших значениях $c < 1$ амплитуда смещённого пучка (13) будет иметь вид эллипса, при $c > 1$ амплитуда пучка (13) будет иметь вид полумесяца, и при $c \gg 1$ пучок (13) будет иметь вид астигматического Гауссова пучка. При этом центр пучка Бесселя (5) смещается по оси x на величину $\Delta x = (b - c)/\alpha$.

4. ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ СУПЕРПОЗИЦИИ СМЕЩЁННЫХ ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ

Рассмотрим суперпозицию P смещённых пучков Бесселя n -го порядка (13). Амплитуда углового спектра плоских волн для такой суперпозиции будет иметь вид

$$A(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p A_{pn}(\rho, \theta), \quad (21)$$

где

$$A_{pn}(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha \lambda} \exp(in\theta) \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \times \\ \times \exp(-ikx_p \rho \cos \theta -iky_p \rho \sin \theta) \quad (22)$$

– амплитуда углового спектра p -го пучка в суперпозиции, смещённого на комплексный вектор с координатами (x_p, y_p) . С помощью (14) и (15) получим нормированный ОУМ суперпозиции (21) ОАМ:

$$\frac{J_z}{I} = n - i\alpha \frac{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{P-1} C_p^* C_q \frac{x_p^* y_q - x_q y_p^*}{R_{pq}} J_1(\alpha R_{pq})}{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{P-1} C_p^* C_q J_0(\alpha R_{pq})}, \quad (23)$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков,

$$R_{pq} = \sqrt{(x_p^* - x_q)^2 + (y_p^* - y_q)^2} \quad (\text{при } q \neq p), \quad (24)$$

$$R_{pp} = 2i\sqrt{(\text{Im } x_p)^2 + (\text{Im } y_p)^2}.$$

Хотя перед дробью в (23) есть множитель $i\alpha$, все выражение является вещественным. Это следует из того, что: 1) при $p=q$ в числителе величина $|C_p|^2$ вещественна, величины R_{pq} и $J_1(\alpha R_{pq})$ чисто мнимые, а разность $x_p^* y_p - x_p y_p^*$ тоже чисто мнимая, так как представляет собой разность двух комплексно-сопряжённых чисел; 2) для любых неравных друг другу p и q $R_{pq} = R_{qp}^*$, а слагаемые с номерами (p, q) и (q, p) также представляют собой разность двух комплексно-сопряжённых чисел.

Можно показать, что если все пучки Бесселя в суперпозиции (21) смещаются на действительный вектор (x_p, y_p) и все коэффициенты C_p также действительны, то числитель дроби в (23) будет равен нулю и ОУМ всей суперпозиции будет равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя n -го порядка (19). Это основной результат данной работы. Он позволяет формировать самые различные непараксиальные лазерные пучки, которые будут иметь разные распределения интенсивности в сечении пучка, но будут иметь один и тот же ОУМ (19) и будут распространяться без дифракции. Ниже в разделе моделирования будут приведены примеры таких пучков.

Из (23) следуют интересные частные случаи. Если $P = 2$, $x_0 = c/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$, $x_1 = -c/\alpha$, $y_1 = ic/\alpha$, то $R_{00} = R_{11} = 2ic/\alpha$, $R_{01} = R_{10} = 0$, и получим для нормированного ОУМ простую формулу (коэффициенты в (21) произвольные комплексные числа C_0, C_1):

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{c(|C_0|^2 - |C_1|^2)I_1(2|c|)}{(|C_0|^2 + |C_1|^2)I_0(2|c|) + 2\text{Re}\{C_0^* C_1\}}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что при сложении двух пучков Бесселя n -го порядка, смещение которых хоть и комплексное (чисто мнимое по одной координате), но согласованное между собой, то при одинаковых по модулю коэффициентах $|C_0|=|C_1|$ нормированный ОУМ (25) будет равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя n -го порядка (19). То есть при равных коэффициентах $|C_0|=|C_1|$ можно менять распределение интенсивности в поперечном сечении суперпозиции двух смещённых пучков Бесселя (так как при изменении величины c изменяется форма пучка Бесселя), хотя их общий ОУМ не будет меняться.

5. ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ СУПЕРПОЗИЦИИ ТРЁХ СМЕЩЁННЫХ ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ

Рассмотрим 3 пучка Бесселя n -го порядка, смещённые так, что центры их находятся в углах равностороннего треугольника. То есть $P = 3$, $R_{01} = R_{02} = R_{12}$, весовые коэффициенты суперпозиции (21) C_0, C_1, C_2 – произвольные комплексные числа, и пусть координаты комплексного вектора смещения заданы выражением:

$$\begin{cases} x_p = R_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{3}\right) + \frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{3}\right), \\ y_p = R_0 \sin\left(\frac{2\pi p}{3}\right) + i\frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{3}\right), \end{cases} \quad (26)$$

где R_0 – радиус окружности, на которой расположены центры сингулярности смещённых пучков Бесселя, c задает асимметрию смещённого пучка Бесселя, γ – угол поворота асимметричного смещённого пучка Бесселя. Тогда ОУМ будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\pm D_1 \xi I_1(2c) + \text{Im}\left\{D_2(\xi \mp ic\sqrt{3})J_1(\sqrt{3}\xi \pm ic)\right\}}{D_1 I_0(2c) + 2\text{Re}\left\{D_2 J_0(\sqrt{3}\xi \pm ic)\right\}}, \quad (27)$$

где верхний знак берётся для $\gamma = 0$ и нижний знак берётся для $\gamma = \pi$ (для других значений γ выражение для нормированного ОУМ будет более громоздким),

$$\begin{cases} D_1 = |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2, \\ D_2 = C_0^* C_1 + C_1^* C_2 + C_2^* C_0, \end{cases} \quad (28)$$

где $\xi = \alpha R_0 \pm c$.

В частном случае, когда $\gamma = \pi$, $c = \alpha R_0$, параметр ξ равен нулю, и вместо (27) получим:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{c\sqrt{3}I_1(c)\text{Im}\{D_2\}}{D_1 I_0(2c) + 2I_0(c)\text{Re}\{D_2\}}. \quad (29)$$

Из (29) следует, что если коэффициенты C_0 , C_1 , C_2 действительные, то сомножитель $\text{Im}\{D_2\}$ в (29) равен нулю и ОУМ суперпозиции из трёх пучков Бесселя n -го порядка будет равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя (19). На рис.1 для примера показана интенсивность и фаза суперпозиции из трёх смещённых пучков Бесселя с топологическим зарядом $n=3$. ОУМ суперпозиции равен $J_z/I = 3$.

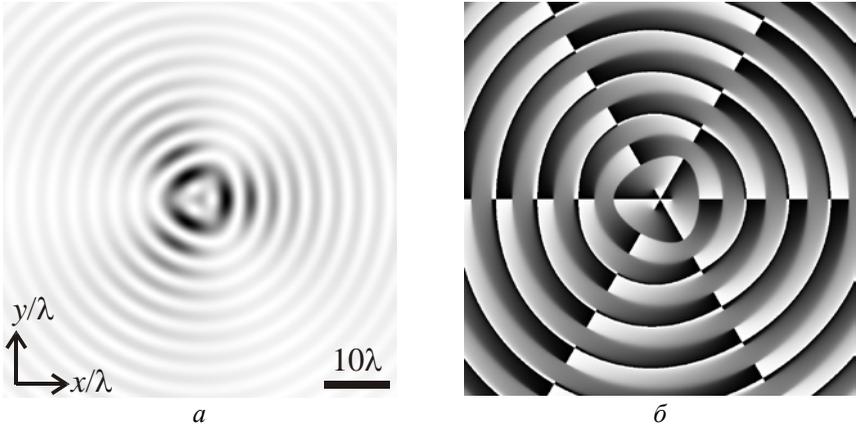


Рис. 1. Суперпозиция из трёх смещённых мод Бесселя с параметрами: $n = 3$, $R_0 = 4\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 4$, $\gamma = \pi$, вектор весовых коэффициентов $\mathbf{C} = [1, 1, 1]$, размер кадра $2R = 60\lambda$:
a – интенсивность (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль);
б – фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$)

На рис.2 показана кодированная фаза (рис. 2,*a*) суперпозиции из трёх смещённых пучков Бесселя с топологическим зарядом $n=3$

(рис. 1,б). Эта фаза подавалась на пространственный модулятор света SLM PLUTO-VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм).

На рис. 2,б–г показаны распределения интенсивности, сформированные SLM, при отражении линейно-поляризованной плоской волны с длиной волны 633 нм на разных расстояниях. Из рис. 2 видно, что пучок сохраняет свою структуру при распространении, и распределение интенсивности согласуется с расчётным (рис. 1,а). Интенсивность регистрировалась с помощью CMOS-камеры MDCE-5A (1/2", разрешение 1280×1024 пикселей).

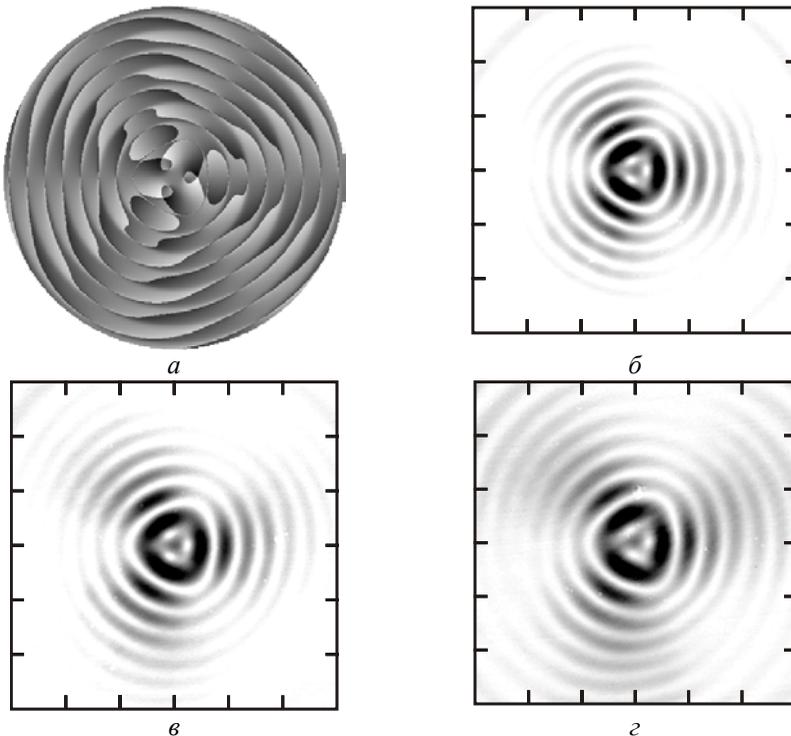


Рис. 2. Экспериментальное формирование пучка Бесселя в виде контура равностороннего треугольника:
a – кодированная фаза (рис. 1,б, негатив);
 сформированные распределения интенсивности (негативы)
 на различных расстояниях от плоскости $z = 0$ (шаг сетки 0,5 мм):
б – 0 мм; *в* – 200 мм; *г* – 400 мм

На рис.3 показано распределение интенсивности и фазы суперпозиции из трёх смещённых пучков Бесселя с одинаковыми единичными весовыми коэффициентами $\mathbf{C} = [1, 1, 1]$, но для других значений параметров: $n=5$, $R_0=8\lambda$, $c=3$. Картина дифракции такого пучка совсем иная – вместо светового треугольника формируются три световых пятна. Для такого пучка $c \neq \alpha R_0$, поэтому ОУМ не может быть определён с помощью формулы (29). Согласно формуле (27), ОУМ этого пучка дробный и равен

$$\frac{J_z}{I} = 5 + \frac{\text{Im}\left\{(5 + i3\sqrt{3})J_1(5\sqrt{3} - 3i)\right\} - 5I_1(6)}{I_0(6) + 2\text{Re}\left\{J_0(5\sqrt{3} - 3i)\right\}} \approx 0.62.$$

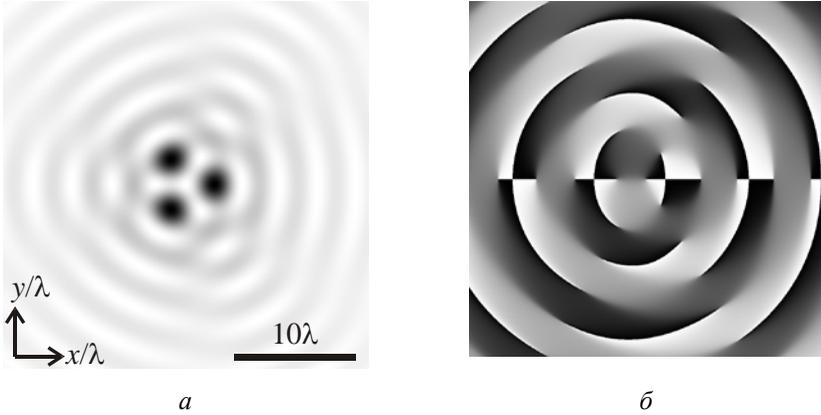
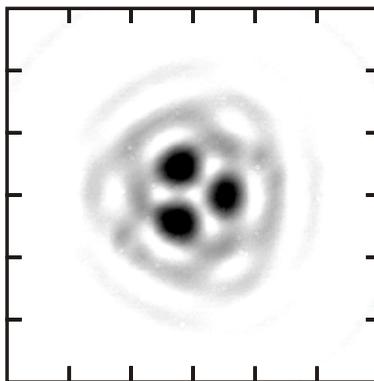


Рис. 3. Суперпозиция из трёх пучков Бесселя с параметрами $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 3$, $\gamma = \pi$, вектор весовых коэффициентов $\mathbf{C} = [1, 1, 1]$, размер кадра $2R = 30\lambda$:
a – интенсивность (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль);
б – фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$)

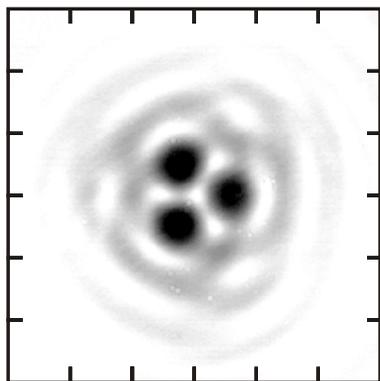
На рис. 4 показаны фаза (*a*) и распределения интенсивности (*б-г*), сформированные SLM, для суперпозиции из 3 пучков Бесселя с параметрами $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 3$, $\gamma = \pi$. Из рис. 4 видно, что картины дифракции согласуются с расчётной интенсивностью на рис. 3, *a*.



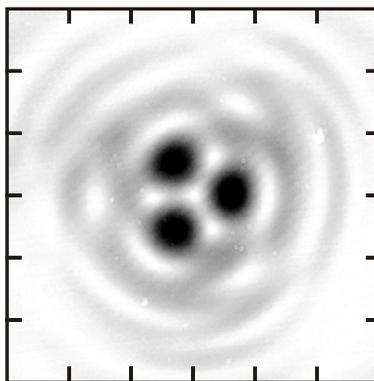
a



б



в



г

Рис. 4. Экспериментальное формирование пучка Бесселя в виде трёх световых пятен: *a* – кодированная фаза для рис. 3,*б* (негатив); сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях от плоскости $z = 0$ (шаг сетки 0,5 мм):

б – 0 мм; *в* – 200 мм; *г* – 400 мм

6. ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ СУПЕРПОЗИЦИИ ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Как и в предыдущем случае, рассмотрим суперпозицию из P смещённых пучков Бесселя n -го порядка, центры сингулярности которых расположены в вершинах правильного многоугольника (аналогично (26)):

$$\begin{cases} x_p = R_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{P}\right) + \frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{P}\right), \\ y_p = R_0 \sin\left(\frac{2\pi p}{P}\right) + i\frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{P}\right), \end{cases} \quad (30)$$

где $p = 0, \dots, P-1$.

Пусть для определённости $\gamma = \pi$ и $c = \alpha R_0$. В этом случае вместо (30) будет:

$$\begin{cases} x_p = iR_0 \sin\left(\frac{2\pi p}{P}\right), \\ y_p = -iR_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{P}\right). \end{cases} \quad (31)$$

Общая формула для ОУМ (23) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{I} = n + \\ + 2R_0\alpha \left[\sum_{p=0}^{P-1} |C_p|^2 I_0(2\alpha r_{pi}) + 2 \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{q=0}^{p-1} \operatorname{Re}\{C_p^* C_q J_0(\alpha R_{pq})\} \right]^{-1} \times (32) \\ \times \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{q=0}^{p-1} \operatorname{Im}\{C_p^* C_q\} \sin\left[\frac{\pi(p-q)}{P}\right] I_1\left\{2\alpha R_0 \cos\left[\frac{\pi(p-q)}{P}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Если все коэффициенты C_p действительные, то числитель в (32) равен нулю и ОУМ такой суперпозиции смещённых пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя (19). В качестве примера на рис. 5 показаны интенсивность и фаза суперпозиции из четырёх смещённых пучков Бесселя с топологическими зарядами $n=7$. Нормированный ОУМ этой суперпозиции равен $J_z/I = 7$. Из рис. 5,б видно, что внутри основного светлого кольца, похожего на квадрат, имеются 7 оптических вихрей с топологическим зарядом +1.

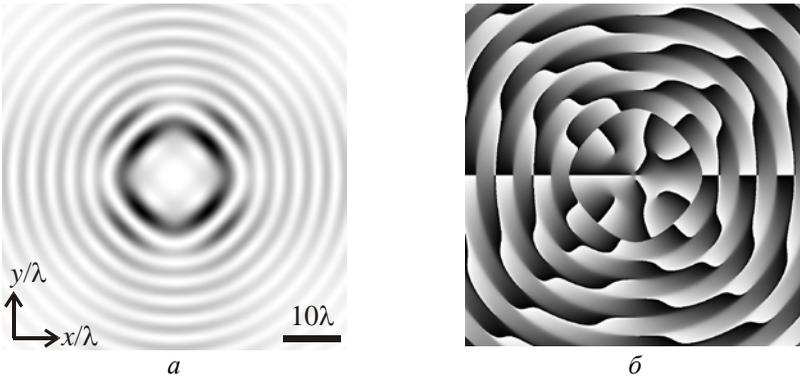


Рис. 5. Суперпозиция из четырёх ($P=4$) смещённых пучков Бесселя с параметрами $n = 7$, $R_0 = 6\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 6$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1]$, размер кадра $2R = 60\lambda$:

a – интенсивность (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль);
 b – фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$)

На рис. 6 показаны кодированная фаза (a) и распределения интенсивности (b – z), сформированные SLM, для суперпозиции из четырёх смещённых пучков Бесселя (рис. 5) с топологическими зарядами $n = 7$, $R_0 = 6\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 6$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1]$. Из рис. 6 видно, что картины дифракции согласуются с расчётной интенсивностью на рис. 5, a .

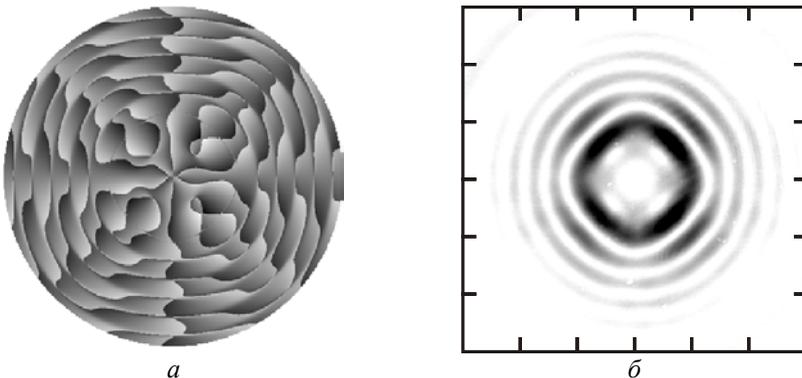


Рис. 6. Экспериментальное формирование пучка Бесселя в виде контура квадрата: a – кодированная фаза (рис. 5, b , негатив); сформированные распределения интенсивности на различных расстояниях от плоскости $z = 0$ (шаг сетки 0,5 мм): b – 0 мм; $в$ – 200 мм; $г$ – 400 мм (начало)

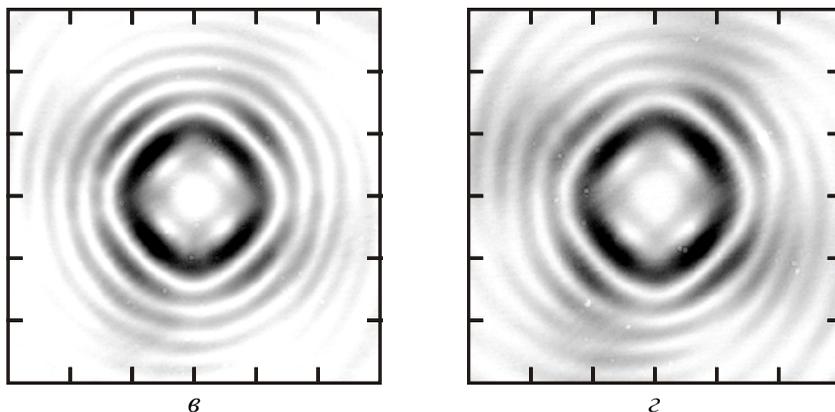


Рис. 6 (окончание)

На рис. 7 показан другой пример: интенсивность (*a*) и фаза (*б*) суперпозиции из шести ($P=6$) смещённых пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом $n=10$, центры сингулярности которых расположены в вершинах правильного шестиугольника. Нормированный ОУМ такой суперпозиции равен $J_z/I = 10$.

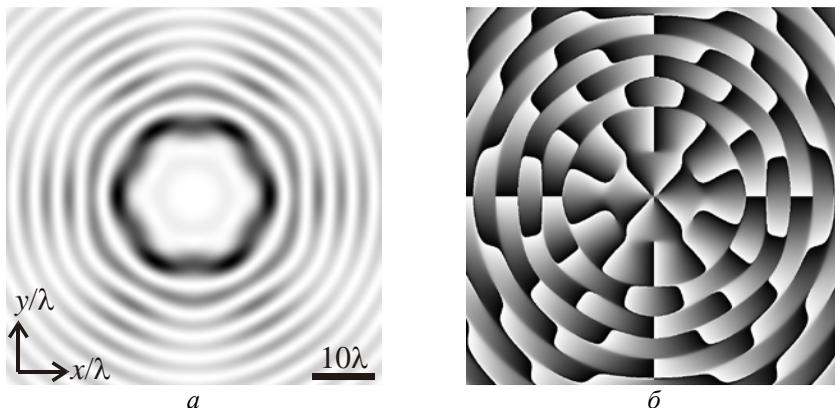


Рис. 7. Суперпозиция из 6 смещённых пучков Бесселя с параметрами: $P = 6$, $n = 10$, $R_0 = 12\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 12$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$, размер кадра $2R = 60\lambda$:
a – интенсивность; *б* – фаза (*б*) (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$)

На рис.8 показаны кодированная фаза (а) и распределение интенсивности ($\delta-z$), сформированные SLM на разных расстояниях, для суперпозиции из шести ($P=6$) смещённых пучков Бесселя (рис.7) с одинаковым топологическим зарядом $n = 10$, $R_0 = 12\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 12$, $\gamma = \pi$, $\mathbf{C} = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Из рис.8 видно, что картины дифракции согласуются с расчётной интенсивностью на рис.7,а.

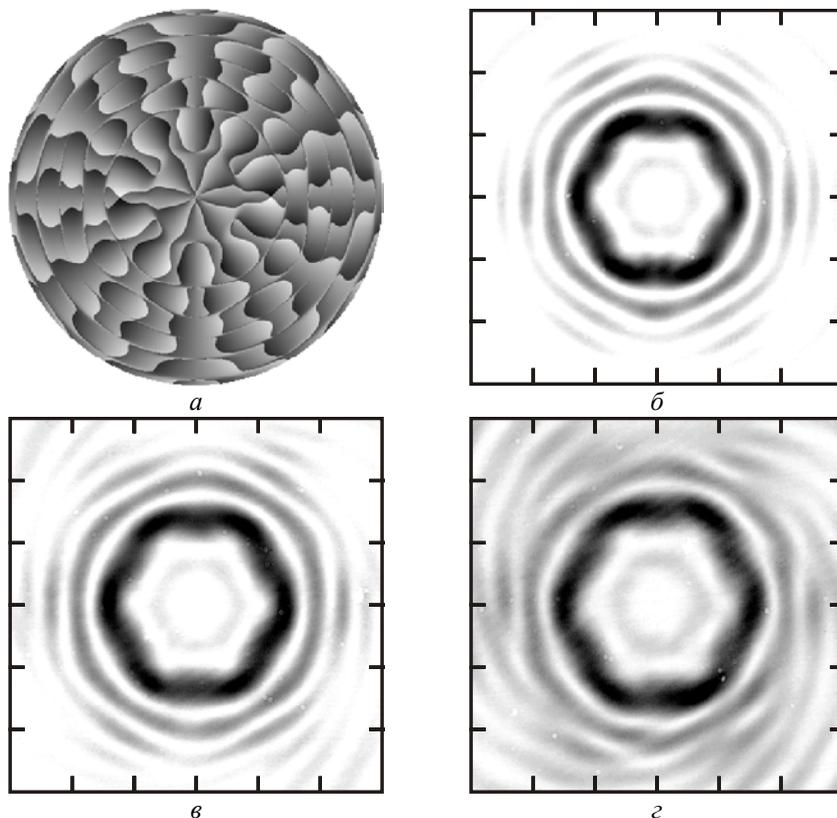


Рис. 8. Экспериментальное формирование пучка Бесселя в виде контура шестиугольника:
 а – кодированная фаза (рис. 7,а, негатив);
 б – сформированные распределения интенсивности на разных расстояниях от плоскости $z = 0$ (шаг сетки 0,5 мм):
 б – 0 мм; в – 200 мм; з – 400 мм

7. СУПЕРПОЗИЦИЯ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ, ЦЕНТРЫ КОТОРЫХ РАСПОЛОЖЕНЫ НА ОКРУЖНОСТИ

В этом разделе показано, что если в каждой точке окружности радиуса R_0 расположить центр смещённого пучка Бесселя n -го порядка и рассмотреть суперпозицию бесконечного числа таких пучков с одинаковыми весовыми коэффициентами, то вся суперпозиция сформирует обычный несмещённый пучок Бесселя n -го порядка.

Используя представление функции Бесселя в виде ряда, несмещённый пучок Бесселя (5) в начальной плоскости ($z = 0$) можно также представить в виде ряда:

$$\begin{aligned}
 E(x, y, z = 0) &= \\
 &= \exp(in\varphi) J_n(\alpha r) = \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} (x-iy)^p (x+iy)^{n+p}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Рассмотрим непрерывную суперпозицию смещённых пучков Бесселя (33), центры которых расположены на окружности радиуса R_0 :

$$\begin{aligned}
 E(x, y, z = 0) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} \left[(x - R_0 \cos \theta) - i(y - R_0 \sin \theta) \right]^p \times \\
 &\times \left[(x - R_0 \cos \theta) + i(y - R_0 \sin \theta) \right]^{n+p} d\theta.
 \end{aligned} \tag{34}$$

В полярных координатах (34) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z = 0) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} \left[r \exp(-i\varphi) - R_0 \exp(-i\theta) \right]^p \times \\
 &\times \left[r \exp(i\varphi) - R_0 \exp(i\theta) \right]^{n+p} d\theta.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Представим оба сомножителя под интегралом в (35) в виде биномиального разложения:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z=0) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \\
 &\times \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^{n+p} \binom{p}{m} \binom{n+p}{k} (-R_0)^{m+k} r^{2p-m+n-k} \times \\
 &\times \exp[i(n+p-k)\varphi - i(p-m)\varphi] \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} \exp[i(k-m)\theta] d\theta.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Так как интеграл по θ не равен нулю только при $k = m$, сумма по k пропадает и вместо (36) получим:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z=0) &= 2\pi \exp(in\varphi) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \times \\
 &\times \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p} \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} \binom{n+p}{m} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Изменим порядок суммирования в (37), тогда получим:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z=0) &= 2\pi \exp(in\varphi) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m} \times \right. \\
 &\times \left. \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} \binom{n+p}{m} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p} \right] = \\
 &= 2\pi \exp(in\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m} \times \\
 &\times \sum_{p=m}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(m!)^2 (p-m)!(n+p-m)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Заменим $p-m$ на p и перегруппируем сомножители в двух рядах так, что станет видно, что эти ряды равны функциям Бесселя:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z=0) &= 2\pi \exp(in\varphi) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(R_0/r)^{2m}}{(m!)^2} \times \right. \\
 &\times \left. \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+m}}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p+2m} \right] = \\
 &= 2\pi \exp(in\varphi) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha R_0}{2}\right)^{2m} \right] \times \\
 &\times \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p} \right] = \tag{39} \\
 &= 2\pi J_0(\alpha R_0) J_n(\alpha r) \exp(in\varphi).
 \end{aligned}$$

Амплитуда (39) отличается от амплитуды обычного пучка Бесселя множителем $2\pi J_0(\alpha R_0)$. На рис. 9 показаны интенсивности суперпозиции из 5, 8, 10, 20, 40 и 60 смещённых пучков Бесселя с топологическим зарядом $n=7$, центры которых лежат на окружности радиуса $R_0 = 100\lambda$. Параметры расчёта для всех рис. 9, *a-e* одинаковы: $n=7$, $R_0 = 100\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$. Размер кадров $2R = 240\lambda$.

Из рис. 9 видно, что уже при $P = 60$ почти формируется несмещённая мода Бесселя с амплитудой (39). Нормированный ОУМ для всех суперпозиций на рис. 9, *a-e* одинаковый и равен $J_z/I = 7$. Из (39) видно, что при $\alpha R_0 = \gamma_{0,s}$, ($\gamma_{0,s}$ – s -й корень функции Бесселя нулевого порядка) комплексная амплитуда равна нулю (т.е. все пучки Бесселя испытывают деструктивную интерференцию). Численное моделирование это подтверждает: для суперпозиции из $P = 360$ пучков при $R_0 = 100\lambda$ и при $R_0 = \gamma_{0,32}\lambda = 99,74682\lambda$ получаются изображения, аналогичные рис. 9, *e*, однако интенсивность во втором случае в 3×10^{12} раз меньше.

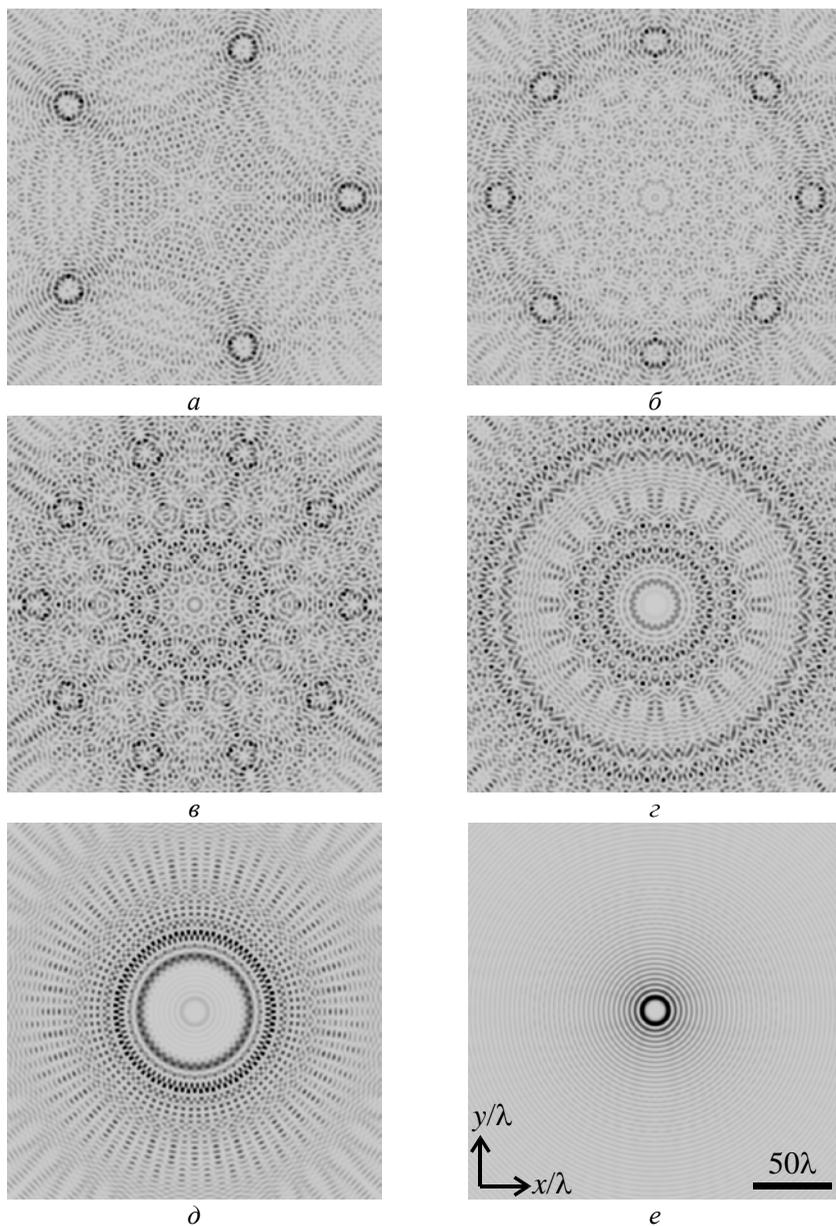


Рис. 9. Интенсивность суперпозиции P пучков Бесселя (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль) при разных значениях P :
 $a - 5$; $б - 8$; $в - 10$; $г - 20$; $е - 60$

8. БЕЗДИФРАКЦИОННЫЕ ПУЧКИ ЛОММЕЛЯ

Среди известных лазерных пучков особое место занимают бездифракционные пучки. Структура распределения их комплексной амплитуды в поперечном сечении такова, что, несмотря на дифракцию, она сохраняется при прохождении произвольного расстояния вдоль оптической оси. Известно, что в трёхмерном пространстве свободны от дифракции моды Бесселя [1], а в двумерном – пучки Эйри [5]. Также бездифракционные пучки обобщались на случай более высокой размерности пространства [31]. Известно также, что в трёхмерном пространстве бездифракционным является световой пучок, для которого угловой спектр плоских волн является бесконечно тонкой окружностью. Так, в [24] рассмотрены бездифракционные пучки, описываемые в виде линейной комбинации мод Бесселя. Комплексная амплитуда таких пучков описывается функцией Матье. В [2] рассмотрены асимметричные моды Бесселя, распределение интенсивности которых в поперечном сечении имеет вид полумесяца, а в [3] рассмотрено обобщение этого семейства путём введения дополнительного параметра, позволяющего управлять асимметрией поперечного распределения интенсивности. Бездифракционные пучки устойчивы при распространении в турбулентной атмосфере [32] и фемтосекундные бесселевы импульсы сохраняют форму при распространении [33].

В данной работе рассматривается линейная комбинация мод Бесселя с такими коэффициентами, что комплексная амплитуда пучка описывается функцией Ломмеля двух переменных, одна из которых комплексная. Функции Ломмеля двух переменных встречаются в оптике не впервые. Так, в [34] (§ 8.8) рассмотрено трёхмерное распределение света вблизи фокуса для сферической монохроматической волны, выходящей из круглого отверстия и сходящейся в осевой фокальной точке. Для получения этого распределения в [34] используется интеграл Френеля, выраженный через функции Ломмеля двух переменных [35]. В недавней работе [36] с помощью этих функций описана фокусировка с помощью линзы вихревого лазерного пучка Лагерра-Гаусса с нулевым радиальным индексом, ограниченного круглой диафрагмой. В отличие от традиционных мод Бесселя [1] распределение интенсивности моды Ломмеля (Л-моды) не обладает радиально-симметричной формой в виде набора световых колец, а в отличие от асимметричных мод из [2,

3] оно обладает симметрией относительно не одной, а обеих декартовых осей. В работе точно рассчитан орбитальный угловой момент пучков Ломмеля. Он превышает момент Бесселевой моды, входящей в линейную комбинацию с наименьшим топологическим зарядом. Моды Ломмеля, как и все бездифракционные пучки, обладают бесконечной энергией, и поэтому на практике могут быть реализованы только приближенно. Мы называем пучки Ломмеля по аналогии с пучками Бесселя. Но так как пучки Бесселя являются модами, то мы и пучки Ломмеля иногда называем модами Ломмеля.

Рассмотрим световой пучок, угловой спектр плоских волн которого имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A(\rho, \theta) &= \frac{(-i)^n}{\lambda \alpha} \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \sum_{p=0}^{\infty} c^{2p} \exp[i(n+2p)\theta] = \\
 &= \frac{(-i)^n \exp(in\theta)}{\lambda \alpha [1 - c^2 \exp(2i\theta)]} \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right), \tag{40}
 \end{aligned}$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в спектральной плоскости, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , а параметры α , c и n , как будет показано ниже, характеризуют соответственно масштаб пучка, асимметрию его формы и орбитальный угловой момент. Заметим, что в отличие от асимметричных мод Бесселя из [2, 3], параметр асимметрии c у пучков Ломмеля не может быть произвольным, а должен быть по модулю меньше единицы, иначе ряд (41) будет расходящимся. Из (40) видно, что модуль амплитуды спектра меняется вдоль кольца с радиусом $\rho = \alpha/k$: при вещественных значениях c максимальное значение имеет место при $\theta = 0, \pi$, а минимальное – при $\theta = \pm\pi/2$. Комплексная амплитуда пучка Ломмеля находится как преобразование Фурье от углового спектра (40) и равна

$$\begin{aligned}
 E_n(r, \varphi, z) &= \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) \times \\
 &\times \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p c^{2p} \exp[i(n+2p)\varphi] J_{n+2p}(\alpha r) = \\
 &= c^{-n} \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) U_n[car \exp(i\varphi), \alpha r], \tag{41}
 \end{aligned}$$

где $U_n(w, z)$ – функция Ломмеля двух переменных [35]:

$$U_n(w, z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2p} J_{n+2p}(z). \quad (42)$$

В (41) параметр α входит в аргумент функций Бесселя, поэтому он характеризует масштаб (ширину светового кольца) пучка Ломмеля.

С помощью (41) нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} |E_n(r, \varphi, z)| &= |E_n(r, -\varphi, z)| = |E_n(r, \pi - \varphi, z)| = \\ &= \left| \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p c^{2p} \exp[i(n+2p)\varphi] J_{n+2p}(\alpha r) \right|. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (43) следует, что, в отличие от асимметричных пучков Бесселя из [2, 3], распределение интенсивности в поперечном сечении пучков Ломмеля (41) симметрично не только относительно горизонтальной плоскости Oxz , но и относительно вертикальной плоскости Oyz .

При $c = 0$ в (41) остается только одно слагаемое и пучок Ломмеля преобразуется в традиционный пучок Бесселя:

$$E_n(r, \varphi, z) = \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2} + in\varphi\right) J_n(\alpha r).$$

На рис. 10 показаны распределения интенсивности и фазы (при $z = 0$) в поперечной плоскости для пучков Ломмеля со следующими параметрами: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд $n = 4$, масштабирующий множитель $\alpha = k/3$, параметр асимметрии $c = 0,5i$ (а, б) и $c = 0,9i$ (в, г). На рис. 10 интенсивность показана в области $-20\lambda \leq x, y \leq 20\lambda$. Рис. 10 был получен путем расчёта по формуле (41).

Как видно из рис. 10, при небольших по модулю значениях параметра c дифракционная картина похожа на картину моды Бесселя, но вытянутую вдоль одной декартовой координаты (оси x). При двумерной реализации таких пучков (т.е. распространяющихся в плоскости Oxz) их форма будет похожа на форму ускоряющихся эллиптических мод, рассмотренных в [37].

Далее с ростом параметра c возрастает асимметрия пучка Ломмеля и он в поперечном сечении имеет вид двух полумесяцев с нулевой интенсивностью в центре. В оптическом микроманипулировании такое распределение удобно для задачи удерживания на месте микрообъекта по одной координате [38].

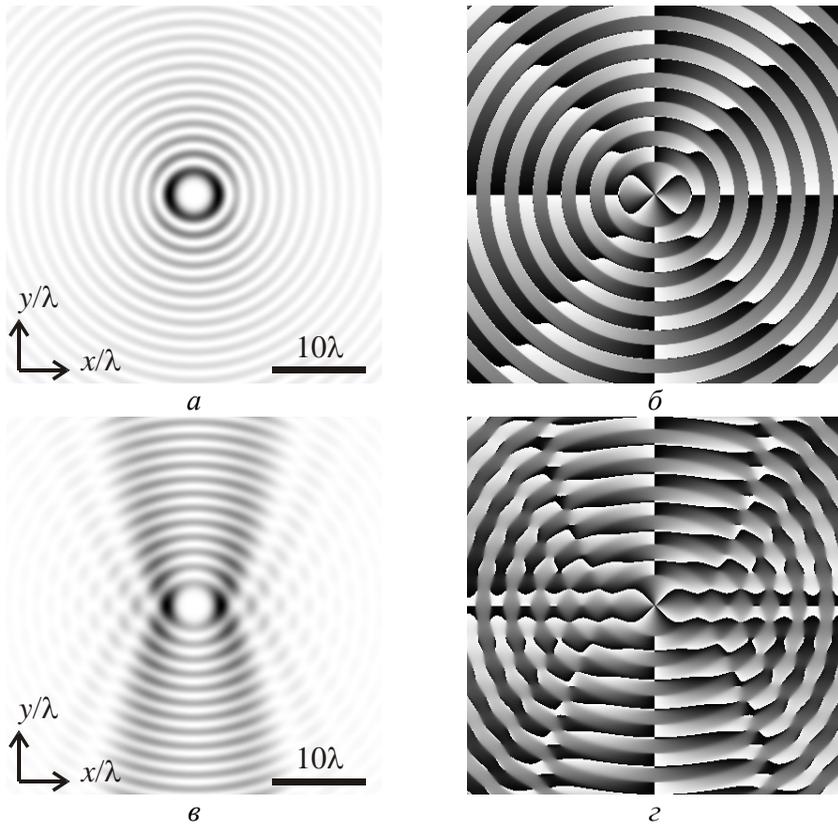
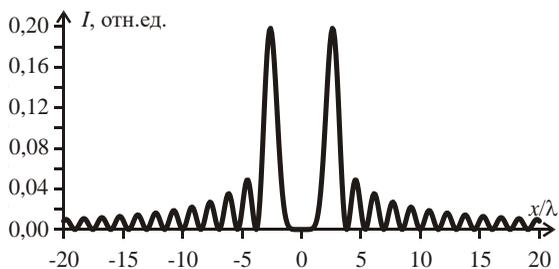


Рис. 10. Распределения интенсивности и фазы в поперечной плоскости для пучков Ломмеля:

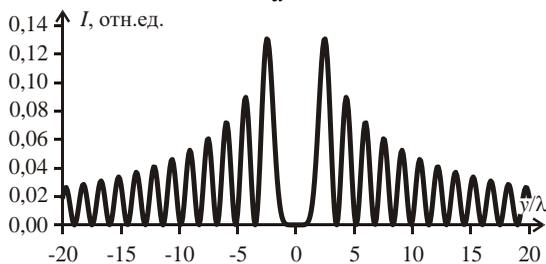
$a, в$ – интенсивности (негатив); $б, д$ – фазы;
 $a, б - c = 0,5i$; $в, д - c = 0,9i$

Без ограничения общности, параметр c можно считать вещественным положительным. В противном случае дифракционная картина поворачивается на угол, соответствующий аргументу параметра c . Так, для рис. 10 параметр c чисто мнимый, поэтому полумесяцы разнесены по оси x .

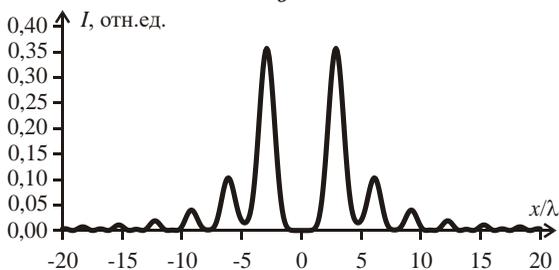
С ростом параметра c не только возрастает асимметрия поперечного распределения интенсивности, но и контраст интенсивности вдоль декартовых координатных осей x и y . Это хорошо заметно из рис. 11, рассчитанного также по формуле (41) для тех же параметров, что и рис. 10.



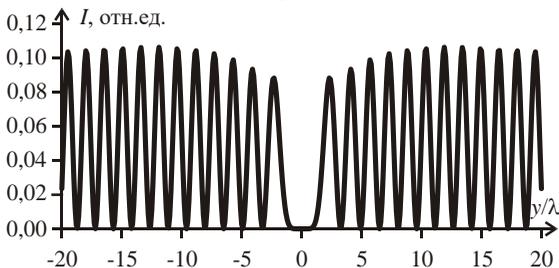
a



б



в



г

Рис. 11. Сечения интенсивности для пучков Ломмеля (по горизонтальной оси отложены длины волн, а по вертикальной – интенсивность в произвольных единицах): *a*, *в* – $y=0$; *б*, *д* – $x=0$; *a*, *б* – $c = 0,5i$; *б*, *в* – $c = 0,9i$

Из рис. 11 видно, что если при $c = 0,5i$ максимальная интенсивность в горизонтальной плоскости превышает максимальную интенсивность в вертикальной плоскости примерно в полтора раза, то при $c = 0,9i$ это соотношение уже составляет 3,5. Причем в вертикальной плоскости боковые лепестки превышают главные центральные максимумы.

Орбитальный угловой момент (ОУМ) J_z (проекция ОУМ на оптическую ось) и суммарная интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, определяются по следующим формулам [39]:

$$J_z = \text{Im} \left\{ \iint_{\square^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r \, dr \, d\varphi \right\} =$$

$$= \text{Im} \left\{ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r \, dr \, d\varphi \right\}, \quad (44)$$

$$I = \iint_{\square^2} E^* E r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} E^* E r \, dr \, d\varphi. \quad (45)$$

Подставив в (44), (45) комплексную амплитуду (41), получим ОУМ и суммарную интенсивность пучка Ломмеля:

$$J_z = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} (n+2p) (cc^*)^{2p} \int_0^R J_{n+2p}^2(\alpha r) r \, dr. \quad (46)$$

$$I = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} (cc^*)^{2p} \int_0^R J_{n+2p}^2(\alpha r) r \, dr. \quad (47)$$

Интегралы в этих выражениях описаны в [40] (выражение 5.54.2):

$$\int J_p^2(\alpha r) r \, dr = \frac{r^2}{2} \left[J_p^2(\alpha r) - J_{p-1}(\alpha r) J_{p+1}(\alpha r) \right]. \quad (48)$$

Используя асимптотику функции Бесселя при больших значениях аргумента (выражение 9.2.1 в [41]), получим, что все интегралы в (46) и (47) не зависят от порядка функции Бесселя и равны $R/(\pi\alpha)$. Тогда, используя числовые ряды 0.246.1 и 0.246.2 из [40] и разделив (46) на (47), получим выражение для ОУМ, нормированного на интенсивность:

$$\frac{J_z}{I} = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} (cc^*)^{2p} (n+2p)}{\sum_{p=0}^{\infty} (cc^*)^{2p}} = n + \frac{2|c|^4}{1-|c|^4}. \quad (49)$$

Из (49) следует, что при возрастании параметра асимметрии $c < 1$ ОУМ возрастает. На рис. 10,а для $c = 0,5i$ нормированный ОУМ равен $J_z/I \approx 4,1$, а на рис. 10,в для $c = 0,9i$ он равен $J_z/I \approx 7,8$.

Подобно тому, как был вычислен орбитальный угловой момент, можно вычислить скалярное произведение двух пучков Ломмеля – имеющих соответственно топологические заряды n и m , масштабирующие множители α и β , параметры асимметрии c и d :

$$\begin{aligned} (E_{n\alpha c}, E_{m\beta d}) &= \iint_{\square^2} E_{n\alpha c} E_{m\beta d}^* r dr d\varphi = \\ &= \begin{cases} 2\pi (-1)^{(n-m)/2} \frac{\delta(\alpha-\beta)}{\alpha} \frac{(d^*)^{n-m}}{1-(cd^*)^2}, & \text{если } (m+n) \text{ чётно и } n \geq m, \\ 2\pi (-1)^{(n-m)/2} \frac{\delta(\alpha-\beta)}{\alpha} \frac{c^{m-n}}{1-(cd^*)^2}, & \text{если } (m+n) \text{ чётно и } n \leq m, \\ 0, & \text{если } (m+n) \text{ нечётно.} \end{cases} \quad (50) \end{aligned}$$

Из (50) видно, что комплексные амплитуды пучков Ломмеля, подобно традиционным и асимметричным пучкам Бесселя, ортогональны по масштабирующему множителю. Из (50) также видно, что в отличие от асимметричных пучков Бесселя из [2, 3] пучки Ломмеля распадаются на два класса с чётным и нечётным топологическим зарядом. Комплексные амплитуды пучков из двух разных классов ортогональны между собой.

Таким образом, в данном разделе получены следующие результаты: получено новое решение уравнения Гельмгольца, описывающее трёхпараметрическое семейство бездифракционных непараксиальных пучков Ломмеля; комплексная амплитуда этих пучков описывается функциями Ломмеля двух переменных, первая из которых комплексная. Показано, что с ростом параметра асимметрии

у пучков Ломмеля интенсивность боковых лепестков возрастает вдоль одной декартовой координаты и спадает вдоль другой координаты. Также показано, что пучки Ломмеля, как и любые другие бездифракционные трёхмерные пучки, имеют кольцевой угловой спектр плоских волн, зависящий только от угловой полярной координаты. Установлено, что пучки Ломмеля имеют ОУМ, который растёт линейно с ростом номера моды n и нелинейно с ростом параметра асимметрии c , а функции, описывающие комплексные амплитуды пучков Ломмеля, ортогональны по масштабирующему множителю α и не ортогональны по параметру асимметрии c ; по номеру моды n пучки ортогональны в случае разной чётности.

9. СТРУКТУРНО-УСТОЙЧИВЫЕ ТРЁХМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПОЛОВИННЫЕ ПУЧКИ ПИРСИ

Явление дифракции является одним из проявлений волновой природы света. Когда световой пучок распространяется вдоль оптической оси от начальной плоскости к плоскости наблюдения (обе плоскости параллельны друг другу и перпендикулярны оптической оси), световые поля, исходящие от разных участков начальной плоскости, интерферируют друг с другом, и в плоскости наблюдения возникает дифракционная картина, распределение интенсивности в которой в общем случае отличается от распределения в начальной плоскости. Распространение светового пучка в однородной среде описывается уравнением Гельмгольца и его параксиальным приближением – уравнением типа Шрёдингера. Несмотря на дифракцию, у этих уравнений существуют решения, описывающие световые поля, которые свободны от этого явления. В первую очередь это давно известные традиционные и недавно открытые асимметричные пучки Бесселя [1-3], Матье [4] и Эйри [5]. Пучки Бесселя распространяются без дифракции в трехмерном пространстве, а пучки Эйри – в двумерном. Также не обладают дифракцией плоские волны, так как распределение интенсивности у них не меняется при распространении от одной плоскости к другой. В трехмерном случае не обладает дифракцией любое световое поле, угловой спектр плоских волн которого отличен от нуля на бесконечно тонком кольце [1]. Наряду с пучками Бесселя и Эйри, интерес представляют параксиальные структурно-устойчивые пучки, инвариантные к

распространению. Такие пучки не являются бездифракционными, но при распространении структура их распределения интенсивности в поперечной плоскости не меняется, меняется только масштаб. Наиболее известными такими пучками являются пучки Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса [6], гипергеометрические моды [7]. В недавней работе [8] рассмотрены пучки Пирси, как трехмерные аналоги пучков Эйри. Распределение комплексных амплитуд таких пучков описывается функцией Пирси [9, 10], определяемой как интеграл от комплексной экспоненты, аргумент которой является полиномом (подобно функции Эйри). Угловой спектр таких пучков представляет собой параболу с фазовой модуляцией. Эти пучки обладают свойством автофокусировки и восстанавливаются после искажения препятствиями. В недавней принятой к печати работе [11] предложен виртуальный источник, формирующий пучок Пирси.

В данной работе проводится обобщение функции Пирси и рассматриваются структурно-устойчивые половинные пучки Пирси (ПП-пучки). Обычные пучки Пирси [8] являются суммой двух ПП-пучков первого порядка. Угловой спектр ПП-пучков представляет собой не параболу (как у пучков Пирси из [8]), а только одну ее половину. Также рассматриваются двумерные аналоги пучков Пирси, обладающие ускоряющейся (искривленной) траекторией.

Комплексная амплитуда парааксиальных световых пучков Пирси [8] в начальной плоскости имеет вид

$$E(x, y, z=0) = \text{Pe} \left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[is^4 + is^2 \left(\frac{y}{y_0} \right) + is \left(\frac{x}{x_0} \right) \right] ds. \quad (51)$$

В [8] показано, что при распространении структура пучка не меняется, происходит лишь сдвиг центра пучка вдоль одной декартовой координаты и масштабирование по обеим декартовым координатам, причем масштаб по осям x и y разный:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/4}} \text{Pe} \left(\frac{x}{x_0 (1 - z/z_e)^{1/4}}, \frac{y - y_0 z / (2kx_0^2)}{y_0 (1 - z/z_e)^{1/2}} \right), \quad (52)$$

где $z_e = 2ky_0^2$.

При $z = z_e$ комплексная амплитуда имеет вид

$$E(x, y, z_e) = \sqrt{\frac{i\pi}{y/y_0 - (y_0/x_0)^2}} \exp\left[\frac{-iy_0x^2}{4(x_0^2y_0 - y_0^3)}\right].$$

В конце работы [8] приводится обобщение пучков (51) в виде пучков с комплексной амплитудой в начальной плоскости, описываемой функцией

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\left(s^{2n} + ys^n + xs^m\right)\right] ds, \quad (53)$$

причем при $n = 2m$ такие пучки являются структурно-устойчивыми. Числа n и m должны быть целыми. Требование целочисленности следует из того, что интеграл в (53) берется по всей числовой оси, поэтому при дробных значениях n и m в интервале $s < 0$ экспонента может стать вещественной и устремиться к бесконечности при $s \rightarrow -\infty$.

Вывод выражения (52) из (51) осуществляется с помощью преобразования Френеля, при вычислении которого используется замена переменной интегрирования, причем пределы интегрирования не меняются, так как они бесконечны. Однако, заменив один из пределов на ноль, при замене переменных пределы также не поменяются, поэтому наряду с (51) и (53) можно рассмотреть половинный пучок Пирси ν -го порядка, который также не меняет свою структуру при распространении и который в начальной плоскости имеет комплексную амплитуду:

$$\begin{aligned} E(x, y, z=0) &= \text{HPe}_\nu\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) = \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left[is^{4\nu} + is^{2\nu}\left(y/y_0\right) + is^\nu\left(x/x_0\right)\right] ds. \end{aligned} \quad (54)$$

В произвольной плоскости комплексная амплитуда такого пучка примет вид

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/(4\nu)}} \times \\ &\times \text{HPe}_\nu\left(\frac{x}{x_0(1 - z/z_e)^{1/4}}, \frac{y - y_0z/(2kx_0^2)}{y_0(1 - z/z_e)^{1/2}}\right). \end{aligned} \quad (55)$$

Заметим, что в отличие от (53) в (54) уже не требуется целочисленности параметра ν , так как интеграл берется только по положительным значениям переменной интегрирования s .

Дифракционная картина пучков (55) в поперечной плоскости имеет вид наклонных световых линий, дифракционной толщины (рис. 12,а). Функция $\text{HRe}_\nu(x/x_0, y/y_0)$ была рассчитана тем же способом, что и в работе [8], т.е. использовался поворот контура интегрирования в комплексной плоскости, только вместо замены переменных $s \rightarrow s'\exp(i\pi/8)$ была применена замена $s \rightarrow s'\exp(i\pi/(8\nu))$. При вычислении были использованы следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, $x_0 = y_0 = \lambda$, $\nu = 1$.

Угловой спектр ПП-пучка ν -го порядка имеет вид

$$\tilde{E}(k_x, k_y) = \begin{cases} \frac{x_0 y_0}{P} (-k_x x_0)^{\frac{1-\nu}{\nu}} \exp(ik_x^4 x_0^4) \times \\ \times \delta(k_x^2 x_0^2 + k_y y_0), k_x x_0 < 0, \\ 0, k_x x_0 \geq 0. \end{cases} \quad (56)$$

Подобно работе [8], угловой спектр (56) отличен от нуля на параболе $k_x^2 x_0^2 + k_y y_0$, однако не на всей параболе, а только на ее половине (при $k_x x_0 < 0$).

Пучок Пирси с начальным полем (51) является линейной комбинацией ПП-пучков (54) первого порядка:

$$\text{Pe}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) = \text{HRe}_1\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) + \text{HRe}_1\left(-\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right). \quad (57)$$

Это также видно и из рис. 12,а, б: пучок Пирси из [8] является результатом интерференции ПП-пучка из рис. 12,а и его зеркального отражения относительно плоскости $x=0$. Заметим, что слагаемые в (57) описывают два пучка, при распространении которых их амплитуды приобретают лишь множитель, зависящий от y_0^2 , т.е. одинаковый для обоих пучков. Поэтому коэффициенты в линейной комбинации могут быть произвольными и, тем не менее, пучок будет сохранять свою структуру. В частности, можно рассмотреть в (57) вместо суммы разность, и тогда получится пучок, аналогичный пучку Пирси в [8], но в центре вместо максимума интенсивности будет

минимум. Интенсивность разницы двух симметричных относительно плоскости $x = 0$ ПП-пучков показана на рис. 12,в.

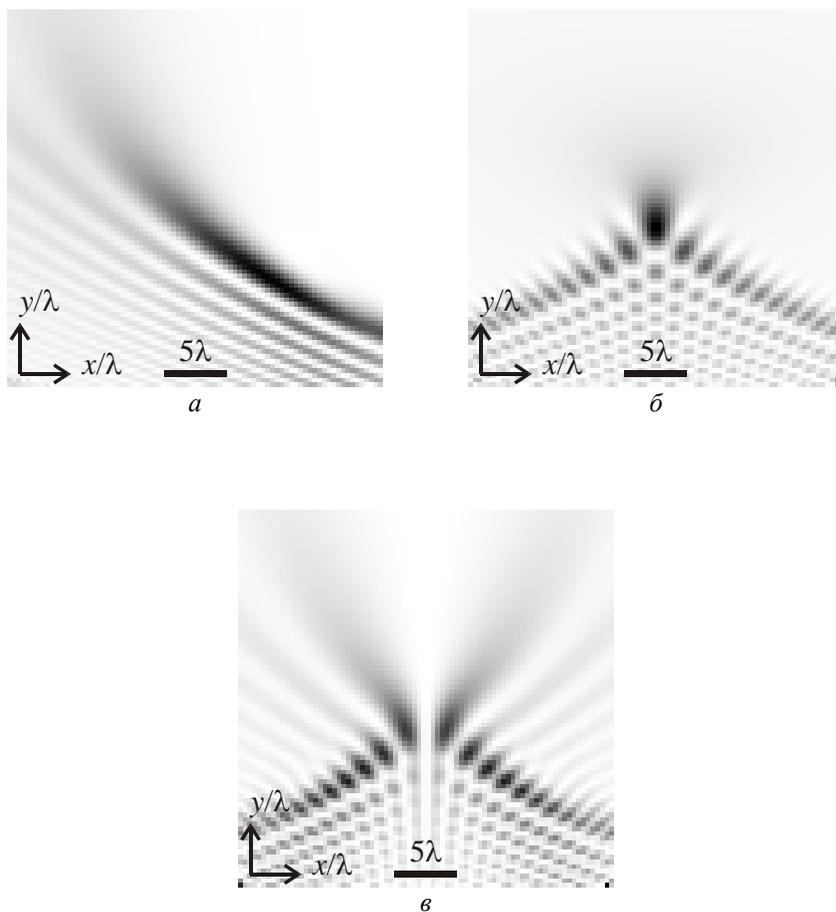


Рис. 12. Распределение интенсивности (негатив):
 а – ПП-пучка при $\nu = 1$; б – полного пучка Пирси из [8];
 в – разности симметричных ПП-пучков с нулевой интенсивностью
 в плоскости $x = 0$

На рис. 13 показаны те же дифракционные картины, что и на рис. 12, но для случая дробного порядка $\nu = 1,5$.

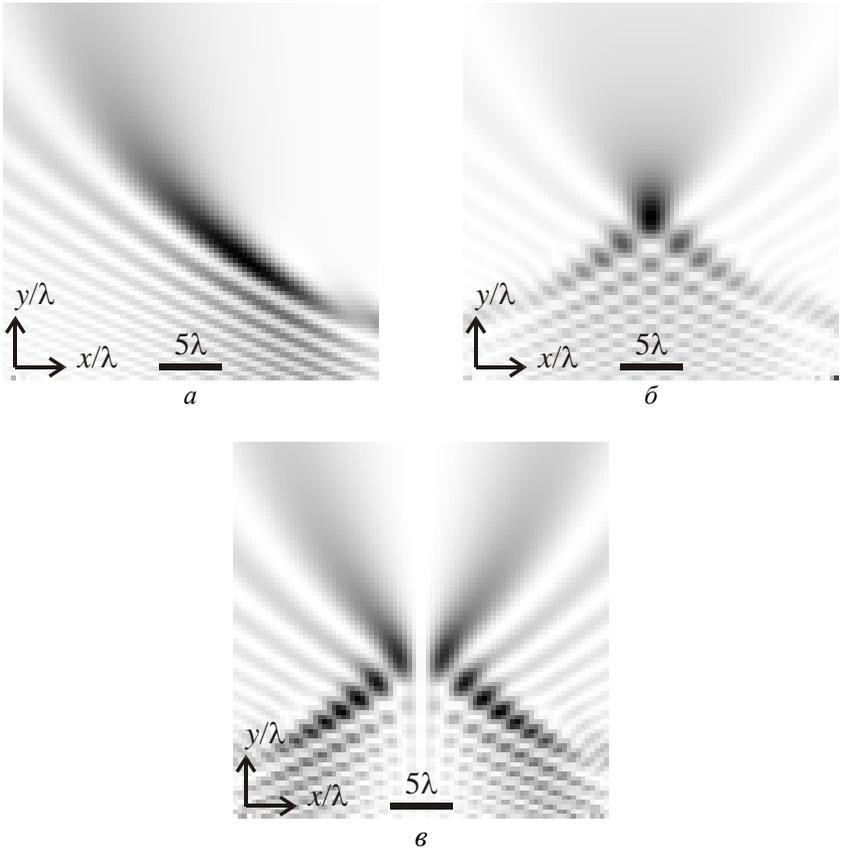


Рис. 13. Распределение интенсивности (негатив) ПП-пучка:
 $a - \nu = 1,5$; b – полного пучка Пирси из [8];
 c – разности половинных ПП-пучков с нулевой интенсивностью
 в плоскости $x = 0$

Из рис. 13 видно, что с ростом порядка функции Пирси ν дифракционная картина принципиально не изменилась, хотя при $\nu = 1,5$ к краю картины пики интенсивности спадают быстрее.

Заметим, что при получении (55) из (54) замену переменной интегрирования можно делать только для $z < z_e$, в противном случае пределы становятся мнимыми. Однако можно показать, что

$$E\left(x, \frac{y_0^3}{x_0^2} + \eta, z_e + \zeta\right) = E^*\left(-x, \frac{y_0^3}{x_0^2} - \eta, z_e - \zeta\right), \quad (58)$$

т.е. подобно пучку Пирси [8] после прохождения пучка через плоскость $z = z_e$ распределение интенсивности является зеркальным отражением распределения интенсивности до плоскости $z = z_e$ относительно плоскостей $x = 0$ и $y = y_0^3/x_0^2$.

В заключение данного раздела заметим, что комплексные амплитуды двух трёхмерных ПП-пучков с параметрами (x_{01}, y_{01}) и (x_{02}, y_{02}) ортогональны при условии, что $y_{02}/y_{01} \neq x_{02}^2/x_{01}^2$. Это условие может быть получено как непосредственно с помощью скалярного произведения функций $\text{HRe}_v(x/x_{01}, y/y_{01})$ и $\text{HRe}_v(x/x_{02}, y/y_{02})$, так и из того, что при данном условии угловые спектры плоских волн (56) отличны от нуля на разных непересекающихся параболах.

Аналогично (54) можно рассмотреть 2D ПП-пучки, комплексная амплитуда которых в начальной плоскости имеет вид

$$E(x, 0) = \int_0^{+\infty} \exp \left[is^p \left(\frac{x}{x_0} \right) + is^{2p} \right] ds = \text{HRe}_p^{2D} \left(\frac{x}{x_0} \right). \quad (59)$$

С помощью преобразования Френеля можно показать, что на некотором расстоянии z комплексная амплитуда станет равна

$$E(x, z) = \int_0^{+\infty} \exp \left[is^p \left(\frac{x}{x_0} \right) + i \left(1 - \frac{z}{2kx_0^2} \right) s^{2p} \right] ds. \quad (60)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $s = (1 - z/z_e)^{-1/(2p)} t$, где $z_e = 2kx_0^2$. Тогда вместо (60) получим для комплексной амплитуды 2D ПП-пучка:

$$E(x, z) = \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/(2p)}} \text{HRe}_p^{2D} \left(\frac{x}{x_0 (1 - z/z_e)^{1/2}} \right). \quad (61)$$

Как и в трёхмерном случае, здесь замену переменной интегрирования можно делать только для $z < z_e$. В противном случае пределы становятся мнимыми. Но из (60) следует, что

$$E(x, z_e + \zeta) = E^* (-x, z_e - \zeta), \quad (62)$$

т.е. после прохождения 2D ПП-пучка через плоскость $z = z_e$ распределение его интенсивности является зеркальным отражением распределения интенсивности до плоскости $z = z_e$ относительно оптической оси.

Из (61) видно, что в начале распространения (до фокальной плоскости $z = z_e$) в любой поперечной плоскости $z < z_e$ координаты максимумов интенсивности 2D ПП-пучка определяются по формуле

$$x_{\max} = y_m x_0 \sqrt{1 - \frac{z}{z_e}}, \quad (63)$$

где y_m – координата m -го максимума функции $\left| \text{HRe}_p^{2D}(x) \right|^2$. Дважды продифференцировав (63) по z , получим, что при $z < z_e$ будет выполняться неравенство $(dx_{\max}/dz)(d^2x_{\max}/dz^2) > 0$, что свидетельствует о наличии ускорения траектории пучка перед фокусировкой. Из свойства симметрии (62) следует, что после прохождения через плоскость $z = z_e$ 2D ПП-пучок начнет распространяться с замедлением.

Рассмотрим распространение 2D ПП-пучка при $p = 2$. Пусть $\lambda = 532$ нм, $x_0 = \lambda$. Тогда $z_e = 4\pi\lambda$. На расстоянии $z = 3z_e/4$ пучок сужается в два раза, в нашем случае это расстояние равно $z = 3\pi\lambda$. Максимальная интенсивность при этом увеличивается в два раза. В плоскости $z_e = 4\pi\lambda$ поле (61) "бесконечно" сужается и возникает фокус. Для выбранных параметров интенсивность в начальной плоскости имеет вид, показанный на рис. 14,а. Моделирование проводилось конечно-разностным методом распространения пучка (ВРМ-методом) в области $-80\lambda \leq x \leq 80\lambda$, $0 \leq z \leq 30\lambda$. На рис. 14,б показано рассчитанное распределение интенсивности в плоскости Oxz . На рис. 14, в,г показаны сечения интенсивности (рис. 14,б) при $z = 0$ (рис. 14,в) и $z = 75\lambda/8$ ($\approx 3\pi\lambda$) (рис. 14,г). Из рис. 14 видно, что действительно пучок сузился в два раза: при $z = 0$ координата четвертого нуля равна примерно -10λ , а при $z = 75\lambda/8$ она равна примерно -5λ . Максимальная интенсивность на рис. 14,г в два раза выше максимальной интенсивности на рис. 14,в. Кроме того, видно, что и на рис. 14,в, и на рис. 14,г интенсивность второго максимума примерно в два раза меньше интенсивности главного максимума, что также демонстрирует изменение светового пучка при распространении только в масштабе, но не в структуре.

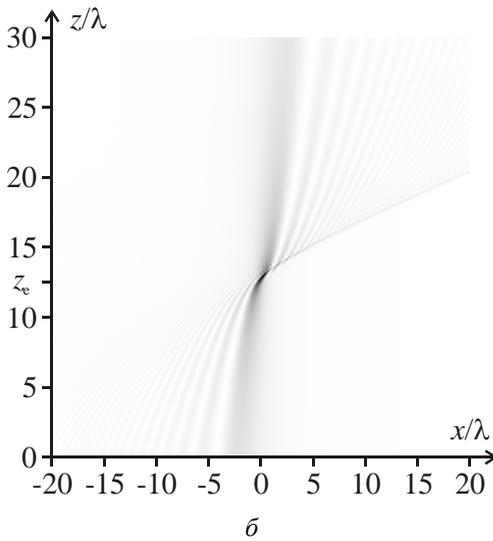
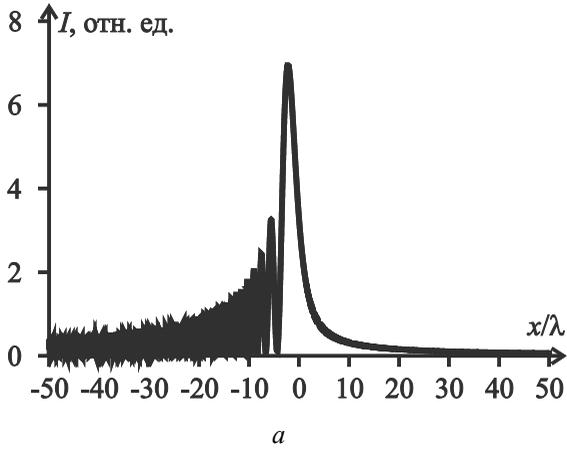


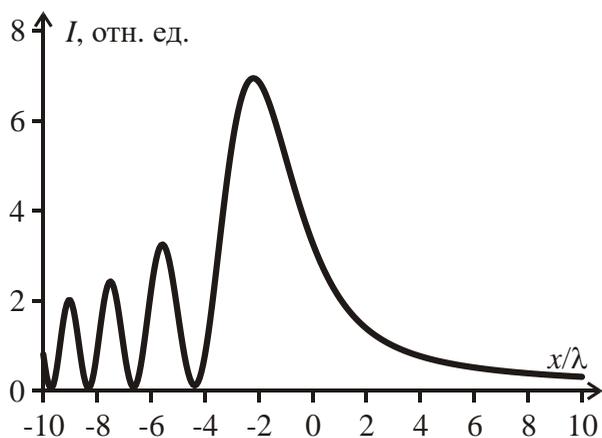
Рис. 14. Распределение интенсивности 2D ПП-пучка, рассчитанное
ВРМ-методом:

a – сечение интенсивности вдоль оси x при $z = 0$;

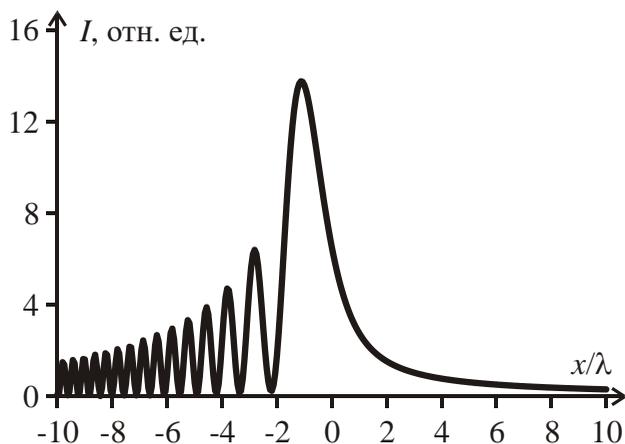
b – интенсивность в плоскости Oxz (негатив);

v – сечение интенсивности вдоль оси x при $z = 0$ (увеличенное);

z – сечение интенсивности вдоль оси x при $z = 75\lambda/8$ (начало)



а



б

Рис. 14. (окончание)

В заключение данного раздела заметим, что в отличие от трёхмерных пучков комплексные амплитуды двух 2D ПП-пучков с параметрами x_{01} и x_{02} не ортогональны.

Таким образом, в данном разделе получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца (уравнения типа Шрёдингера), описывающее трёхпараметрическое семейство

структурно-устойчивых трёхмерных половинных пучков Пирси. Показано, что полный пучок Пирси из [8] является суммой двух симметричных половинных пучков Пирси первого порядка, т.е. с помощью линейной комбинации из двух симметричных половинных пучков Пирси с разными амплитудами можно формировать новые структурно-устойчивые пучки, которые не будут ни полными пучками Пирси [8], ни половинными пучками Пирси. Получена формула для амплитуды углового спектра плоских волн трёхмерных половинных пучков Пирси и показано, что амплитуда спектра отлична от нуля на половине параболы. Получено условие ортогональности комплексных амплитуд трёхмерных половинных пучков Пирси: ортогональны половинные пучки Пирси, Фурье-спектр которых лежит на непересекающихся параболах. Установлено, что двумерные пучки Пирси не ортогональны. Получено решение двумерного паракиального уравнения Гельмгольца, описывающее двумерный аналог структурно-устойчивых половинных пучков Пирси. Показано, что двумерный половинный пучок Пирси, как и трёхмерный, обладает свойством автофокусировки, а также ускоряющейся траекторией до фокальной плоскости.

10. ТЕОРЕМЫ О СОХРАНЕНИИ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА СУПЕРПОЗИЦИЙ СМЕЩЁННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) нашли применение в манипуляции микрообъектами, квантовых телекоммуникациях, микроскопии, интерферометрии, метрологии. Недавний обзор работ по ОУМ приведён в [42]. В [43] впервые было показано, что моды Лагерра-Гаусса обладают ОУМ. Среди пучков, обладающих ОУМ, известны также пучки Бесселя, способные распространяться без дифракции. В некоторых работах были получены аналитические выражения для плотности ОУМ для пучков Бесселя [44-46]. Недавно были рассмотрены непаракиальные асимметричные моды Бесселя [3], для которых также было получено аналитическое выражение для ОУМ всего пучка. Суперпозиция несмещённых вихревых лазерных пучков, в частности Бесселевых пучков, рассматривалась ранее в [46-50], в [51] рассматривался ОУМ суперпозиции вихревых лазерных пучков с периодическим

смещением. В работе [52] рассматривается формирование парааксиальных световых пучков различной формы с заданным значением орбитального углового момента.

В данной работе рассматривается суперпозиция произвольных одинаковых радиально-симметричных оптических вихрей (в том числе непарааксиальных), каждый из которых смещен на произвольный вектор в плоскости, поперечной оптической оси. Доказываются две теоремы. Первая теорема утверждает, что если весовые коэффициенты суперпозиции вещественны (т.е. разность фаз между пучками в суперпозиции равна 0 или π), то нормированный ОУМ (точнее, проекция ОУМ на оптическую ось) всей суперпозиции равен нормированному ОУМ каждого входящего в неё пучка. Вторая теорема утверждает, что для сохранения нормированного ОУМ коэффициенты суперпозиции могут и не быть вещественными, но тогда центры всех вихрей должны находиться на одной прямой, проходящей через начало координат (точку, относительно которой рассчитывается ОУМ). Численный расчёт ОУМ для суперпозиций трёх и пяти оптических вихрей разной формы подтверждает утверждения обеих теорем.

Хорошо известно, что любое решение непарааксиального уравнения Гельмгольца может быть представлено как суперпозиция плоских волн:

$$E(r, \phi, z) = \iint_{\square^2} A(\rho, \theta) \times \exp\left[ikr\rho \cos(\theta - \phi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (64)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , E – комплексная амплитуда поля в цилиндрических координатах (ρ, ϕ, z) , A – угловой спектр в полярных координатах (ρ, θ) . В парааксиальном приближении вместо корня $(1 - \rho^2)^{1/2}$ в показателе экспоненты будет $(1 - \rho^2/2)$.

Если исходный пучок смещён на вектор с декартовыми координатами (x_0, y_0) , то его угловой спектр плоских волн имеет вид

$$A'(\rho, \theta) = A(\rho, \theta) \exp\left[-ik\rho(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)\right], \quad (65)$$

где $A(\rho, \theta)$ – угловой спектр плоских волн исходного (несмещенного) пучка. ОУМ и мощность пучка могут быть рассчитаны как через

комплексную амплитуду, так и через угловой спектр плоских волн. Можно показать, проекция ОУМ на оптическую ось J_z и мощность лазерного пучка I вычисляются с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} J_z &= -i \iint_{\square^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \phi} r dr d\phi = \\ &= -i \lambda^2 \iint_{\square^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta} \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\square^2} E^* E r dr d\phi = \\ &= \lambda^2 \iint_{\square^2} A^* A \rho d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (67)$$

Нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) получается как отношение J_z/I .

Пусть угловой спектр плоских волн вихревого лазерного пучка имеет вид

$$A(\rho, \theta) = D(\rho) \exp(in\theta), \quad (68)$$

где $D(\rho)$ – произвольная, в общем случае комплексно-значная, функция, n – целочисленный топологический заряд. Тогда комплексная амплитуда такого вихревого пучка будет иметь вид

$$\begin{aligned} E(r, \phi, z) &= \iint_{\square^2} D(\rho) \exp(in\theta) \times \\ &\times \exp\left[ikr\rho \cos(\theta - \phi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2} \right] \rho d\rho d\theta = \\ &= 2\pi i^n \exp(in\phi) \times \\ &\times \int_0^\infty D(\rho) \exp\left(ikz\sqrt{1 - \rho^2} \right) J_n(kr\rho) \rho d\rho = \\ &= B(r, z) \exp(in\phi). \end{aligned} \quad (69)$$

А в начальной плоскости комплексная амплитуда будет иметь вид, аналогичный (68):

$$E(r, \phi, z = 0) = B(r, z = 0) \exp(in\phi) = B(r) \exp(in\phi). \quad (70)$$

Рассмотрим суперпозицию M одинаковых оптических вихрей (70) с весовыми коэффициентами C_m , причем каждый пучок смещен в декартовой плоскости на вектор с координатами (x_m, y_m) , $m = 0, \dots, M-1$. Угловой спектр плоских волн всей суперпозиции равен

$$A(\rho, \theta) = D(\rho) \exp(in\theta) \times \sum_{m=0}^{M-1} C_m \exp[-ik\rho(x_m \cos\theta + y_m \sin\theta)]. \quad (71)$$

Подставив (61) в (67), вычислим мощность такого пучка:

$$I = \lambda^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} C_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho d\rho \times \int_0^{2\pi} \exp[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)] d\theta, \quad (72)$$

где $a_{pq} = x_p - x_q$, $b_{pq} = y_p - y_q$.

Аналогично вычислим ОУМ (66):

$$J_z = nI + \lambda^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} S_{pq}, \quad (73)$$

где

$$S_{pq} = kC_p^* C_q \int_0^\infty |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times \int_0^{2\pi} (x_q \sin\theta - y_q \cos\theta) \times \exp[ik\rho(a_{pq} \cos\theta + b_{pq} \sin\theta)] d\theta. \quad (74)$$

Поделив ОУМ на мощность пучка, получим выражение для нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\lambda^2}{I} \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} S_{pq}. \quad (75)$$

Сначала в двойной сумме в (75) вычислим диагональные слагаемые (т.е. при $p = q$):

$$S_{pp} = k |C_p|^2 \int_0^{\infty} |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times \int_0^{2\pi} (x_p \sin \theta - y_p \cos \theta) d\theta = 0. \quad (76)$$

Внедиагональные слагаемые входят в двойную сумму в (75) попарно, вычислим сумму двух симметричных слагаемых:

$$\begin{aligned} S_{pq} + S_{qp} &= \\ &= k C_p^* C_q \int_0^{\infty} |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} (x_q \sin \theta - y_q \cos \theta) \times \\ &\times \exp \left[ik\rho (a_{pq} \cos \theta + b_{pq} \sin \theta) \right] d\theta + \\ &+ k C_p C_q^* \int_0^{\infty} |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} (x_p \sin \theta - y_p \cos \theta) \times \\ &\times \exp \left[ik\rho (-a_{pq} \cos \theta - b_{pq} \sin \theta) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (77)$$

Во втором интеграле сделаем замену $\theta \rightarrow \theta + \pi$, но пределы интегрирования оставим прежними, так как производится интегрирование периодической функции по всему периоду. Тогда показатели экспонент в обоих интегралах станут одинаковыми и выражение (77) примет вид

$$\begin{aligned} S_{pq} + S_{qp} &= k \int_0^{\infty} |D(\rho)|^2 \rho^2 d\rho \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \left[(C_p C_q^* y_p - C_p^* C_q y_q) \cos \theta - \right. \\ &\left. - (C_p C_q^* x_p - C_p^* C_q x_q) \sin \theta \right] \times \\ &\times \exp \left[ik\rho (a_{pq} \cos \theta + b_{pq} \sin \theta) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (78)$$

Если все весовые коэффициенты суперпозиции (71) вещественны (т.е. разность фаз между пучками в суперпозиции равна 0 или π), то подынтегральное выражение можно представить в виде полного дифференциала по переменной θ от экспоненты, т.е.

$$S_{pq} + S_{qp} = -iC_p C_q \int_0^{\infty} |D(\rho)|^2 \rho d\rho \times \exp \left[ik\rho (a_{pq} \cos \theta + b_{pq} \sin \theta) \right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0, \quad (79)$$

поэтому второе слагаемое в (75) равно нулю. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть имеется световой пучок, являющийся суперпозицией смещённых с оптической оси одинаковых оптических вихрей с произвольной радиальной формой и топологическим зарядом n , причем все весовые коэффициенты суперпозиции вещественны, а смещение каждого пучка может быть произвольным. Тогда нормированный ОУМ всей суперпозиции равен ОУМ одного пучка $J_z/I = n$.

Как частный случай, из теоремы следует, что смещение одиночного пучка в поперечной плоскости не приводит к изменению его нормированного ОУМ [51].

Если же коэффициенты в суперпозиции (71) комплексны, то для вычисления нормированного ОУМ можно воспользоваться следующим интегралом:

$$\int_0^{2\pi} \exp(ia \cos \theta + ib \sin \theta) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta = \frac{i2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} J_1 \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right). \quad (80)$$

Тогда из (78) вместо (79) получим:

$$\begin{aligned}
S_{pq} + S_{qp} &= \frac{2\pi ik}{R_{pq}} \times \\
&\times \left[(C_p C_q^* y_p - C_p^* C_q y_q)(x_p - x_q) - \right. \\
&\left. - (C_p C_q^* x_p - C_p^* C_q x_q)(y_p - y_q) \right] \times \\
&\times \int_0^\infty |D(\rho)|^2 J_1(kR_{pq}\rho) \rho^2 d\rho,
\end{aligned} \tag{81}$$

где $R_{pq} = [(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2]^{1/2}$ – расстояние между центрами p -го и q -го вихрей. Для того чтобы сумма (81) была равна нулю, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\begin{aligned}
C_p C_q^* [y_p (x_p - x_q) - x_p (y_p - y_q)] &= \\
= C_p^* C_q [y_q (x_p - x_q) - x_q (y_p - y_q)],
\end{aligned} \tag{82}$$

которое после сокращений в квадратных скобках приводится к виду

$$C_p C_q^* (x_p y_q - x_q y_p) = C_p^* C_q (x_p y_q - x_q y_p). \tag{83}$$

Если коэффициенты C_p и C_q не вещественные, то условие (83) выполняется только при равенстве нулю выражений в скобках. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть имеется световой пучок, являющийся суперпозицией M смещённых с оптической оси одинаковых оптических вихрей с произвольной радиальной формой и топологическим зарядом n , причем центры всех оптических вихрей (x_p, y_p) ($p = 0, \dots, M-1$) в суперпозиции находятся на одной прямой, проходящей через начало координат (т.е. $x_p y_q = x_q y_p$ для любых p и q). Тогда нормированный ОУМ всей суперпозиции равен ОУМ одного пучка $J_z/I = n$.

Проверка утверждений обеих теорем осуществлялась путём численного моделирования. Были рассмотрены четыре различных вида оптических вихрей с топологическим зарядом n : бездифракционные моды Бесселя [1], непараксиальные пучки Ханкеля-Бесселя [53], параксиальные пучки Бесселя-Гаусса [54] и

параксиальные моды Лагерра-Гаусса [43]. Комплексная амплитуда пучка Бесселя в начальной плоскости имеет вид [1]

$$E_1(r, \varphi, z = 0) = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (84)$$

где α – масштабирующий множитель. Комплексная амплитуда пучка Ханкеля-Бесселя в начальной плоскости равна [53]:

$$E_2(r, \varphi, z = 0) = H_{n/2}^{(1)}\left(\frac{kr}{2}\right) J_{n/2}\left(\frac{kr}{2}\right) \exp(in\varphi), \quad (85)$$

где k – волновое число света. Комплексная амплитуда пучка Бесселя-Гаусса в начальной плоскости имеет вид [54]

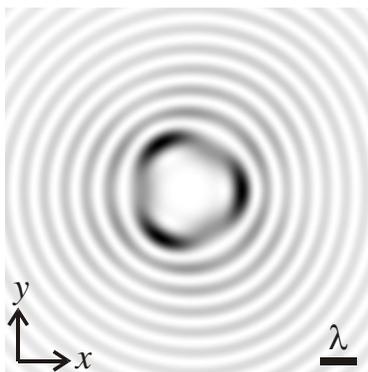
$$E_3(r, \varphi, z = 0) = J_n(\alpha r) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \quad (86)$$

где α – масштабирующий множитель, w – радиус перетяжки Гауссова пучка. Комплексная амплитуда пучка Лагерра-Гаусса в начальной плоскости равна [43]:

$$E_4(r, \varphi, z = 0) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w}\right)^n L_m^n\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \quad (87)$$

где m – порядок моды, w – радиус перетяжки Гауссова пучка, $L_m^n(x)$ – полином Лагерра.

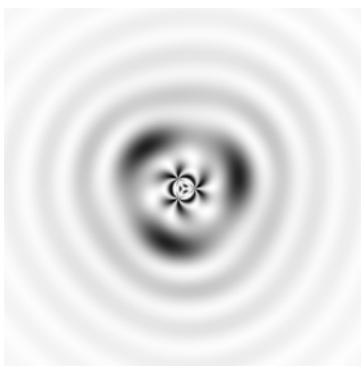
На рис. 15 показаны интенсивности и фазы суперпозиций из трёх пучков, центры которых находятся в вершинах правильного треугольника. Все пучки в суперпозициях имеют топологический заряд $n = 7$. Рис. 15 был рассчитан по формулам (84)-(87) с числом отсчётов 1000×1000 . Параметры пучков были подобраны таким образом, чтобы световой треугольник на всех дифракционных картинах имел примерно одинаковые размеры. Нормированный ОУМ всех четырёх пучков был рассчитан по формулам (66), (67) и оказался равен $J_z/I \cong 7$, несмотря на различие дифракционных картин. Аналогично на рис. 16 показаны интенсивности и фазы суперпозиций из пяти таких же пучков, но расположенных в вершинах правильного пятиугольника (большого размера). Нормированный ОУМ всех пучков на рис. 16 также был рассчитан по формулам (66), (67) и также оказался равен $J_z/I \cong 7$.



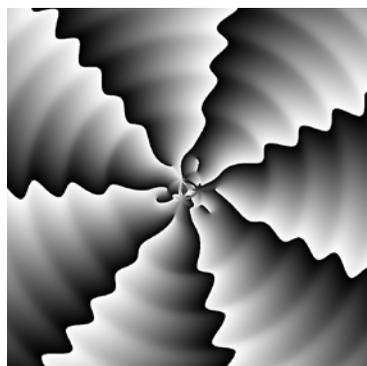
a



б



в



г

Рис. 15. Интенсивность и фаза суперпозиций трёх вихревых пучков (длина волны $\lambda = 532$ нм), расположенных в вершинах правильного треугольника в точках с координатами $x_p = R_0 \cos \varphi_p$, $y_p = R_0 \sin \varphi_p$ ($R_0 = 0,3\lambda$, $\varphi_p = 2\pi p/3$, $p = 0, 1, 2$), и имеющих топологический заряд, равный 7 (вектор весовых коэффициентов в каждой суперпозиции равен $\mathbf{C} = (1, 1, 1)$, размер расчётной области $2R = 10\lambda$): *a*, *в*, *д*, *ж* – интенсивность (негатив); *б*, *г*, *е*, *з* – фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$); *a*, *б* – моды Бесселя (масштабирующий множитель $\alpha = 6/\lambda$); *в*, *г* – пучки Ханкеля-Бесселя; *д*, *е* – пучки Бесселя-Гаусса (масштабирующий множитель $\alpha = 6/\lambda$, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 2\lambda$); *ж*, *з* – пучки Лагерра-Гаусса (индекс $(n, m) = (7, 1)$, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = \lambda$) (начало)



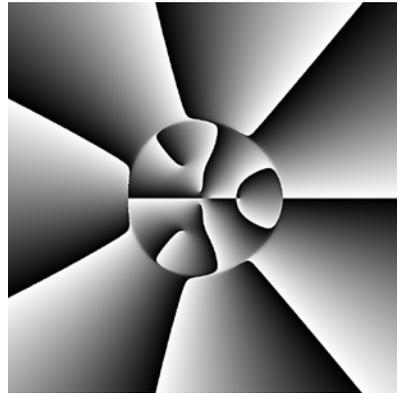
д



е



ж



з

Рис. 15 (окончание)

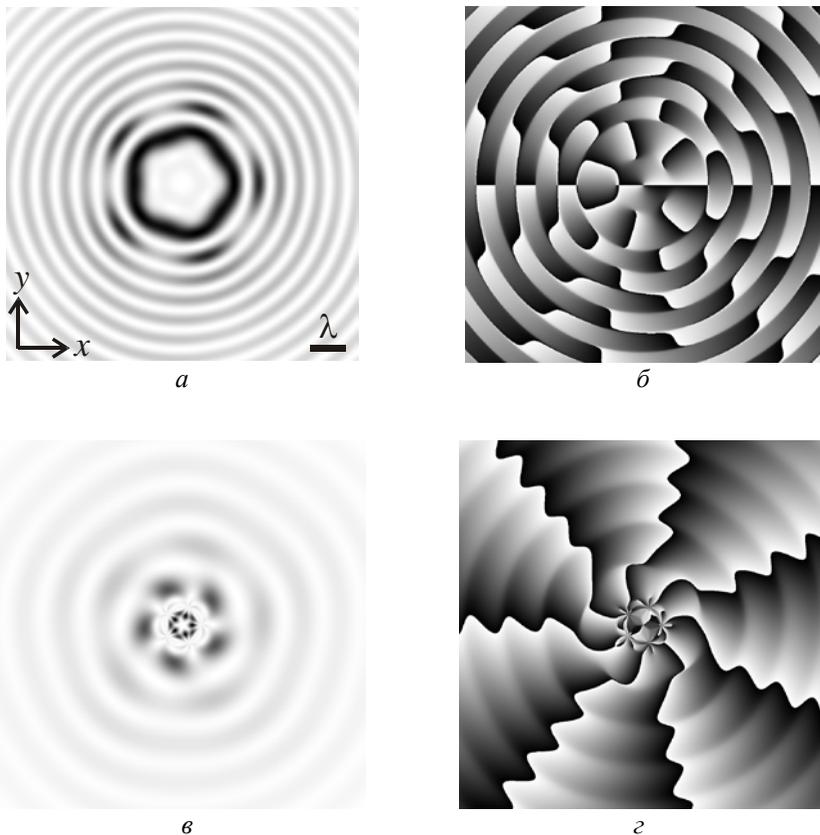


Рис. 16. Интенсивность и фаза суперпозиций пяти вихревых пучков (длина волны $\lambda = 532$ нм), расположенных в вершинах правильного пятиугольника в точках с координатами $x_p = R_0 \cos \varphi_p$, $y_p = R_0 \sin \varphi_p$ ($R_0 = 0,5\lambda$, $\varphi_p = 2\pi p/5$, $p = 0, \dots, 4$), и имеющих топологический заряд, равный 7 (вектор весовых коэффициентов в каждой суперпозиции равен $\mathbf{C} = (1, 1, 1, 1, 1)$, размер расчётной области $2R = 10\lambda$): *a, в, д, ж* – интенсивность (негатив); *б, з, е, з* – фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$); *a, б* – моды Бесселя (масштабирующий множитель $\alpha = 6/\lambda$); *в, з* – пучки Ханкеля-Бесселя; *д, е* – пучки Бесселя-Гаусса (масштабирующий множитель $\alpha = 6/\lambda$, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 2\lambda$); *ж, з* – пучки Лагерра-Гаусса (индекс $(n, m) = (7, 1)$, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = \lambda$), (начало)

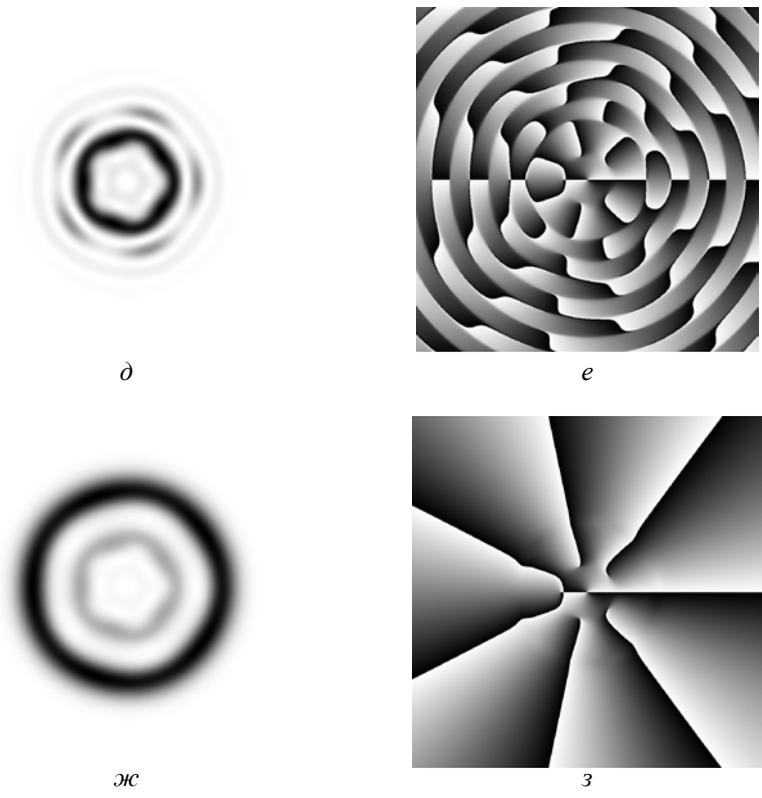
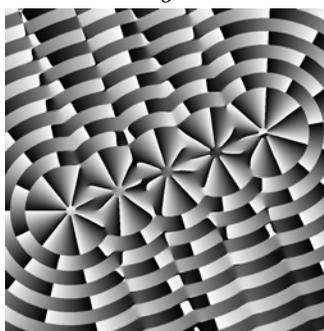
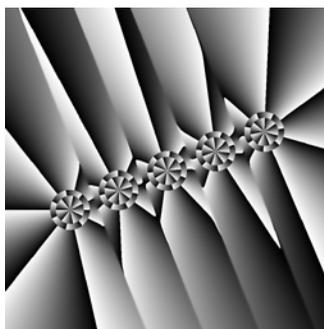
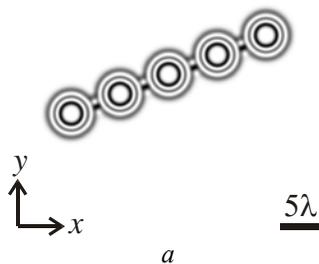


Рис. 16 (окончание)

На рис. 17,а,б показаны интенсивность и фаза суперпозиции из пяти мод Лагерра-Гаусса порядка $(n, m) = (7, 2)$, расположенных на прямой $y = 0,4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0,4x_m$, $m = 0, \dots, 4$, с параметрами $\lambda = 532$ нм, $w = \lambda$, вектор весовых коэффициентов $C_m = \exp(2\pi im/5)$, размер расчётной области $2R = 40\lambda$ (т.е. $-R \leq x, y \leq R$).



a

б

з

Рис. 17. Интенсивность и фаза суперпозиции пяти мод Лагерра-Гаусса и пучков Бесселя-Гаусса (параметры мод Лагерра-Гаусса: порядок $(n, m) = (7, 2)$, радиус перетяжки $w = \lambda$, параметры пучков Бесселя-Гаусса: порядок $n = 7$, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 2/\lambda$) с длиной волны $\lambda = 532$ нм и центрами, расположенными на прямой $y = 0,4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0,4x_m$, $m = 0, \dots, 4$ (вектор весовых коэффициентов в суперпозиции $C_m = \exp(2\pi im/5)$, размер расчётной области $2R = 40\lambda$):

a, в – интенсивность (негатив); *б, д* – фаза (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$); *a, б* – моды Лагерра-Гаусса; *в, з* – пучки Бесселя-Гаусса

На рис. 17, *в, з* показаны интенсивность и фаза суперпозиции из пяти пучков Бесселя-Гаусса 7-го порядка, расположенных в тех же точках, что и на рис. 17, *а, б* (т.е. на прямой $y = 0,4x$ в точках с координатами $x_m = [-12, -6, 0, 6, 12]\lambda$, $y_m = 0,4x_m$, $m = 0, \dots, 4$), с параметрами $\lambda = 532$ нм, $w = 2\lambda$, $\alpha = 2/\lambda$, вектор весовых коэффициентов $C_m = \exp(2\pi im/5)$, размер расчётной области $2R = 40\lambda$ (т.е. $-R \leq x, y \leq R$).

Нормированный ОУМ обоих пучков на рис.17 также был рассчитан по формулам (66), (67) и также оказался равен $J_z/I \cong 7$.

Таким образом, в данном разделе рассмотрен ОУМ суперпозиции одинаковых радиально-симметричных оптических вихрей, каждый из которых смещён в плоскости, поперечной оптической оси. Доказаны две теоремы о сохранении нормированного ОУМ такой суперпозиции. Если весовые коэффициенты суперпозиции вещественны (т.е. разность фаз между пучками равна 0 или π), то, независимо от смещения пучков, нормированный ОУМ всей суперпозиции равен нормированному ОУМ каждого входящего в неё пучка, т.е. его топологическому заряду. Если центры пучков расположены на одной прямой, проходящей через начало координат (точку, относительно которой рассчитывается ОУМ), то даже при комплексных весовых коэффициентах нормированный ОУМ всей суперпозиции также равен нормированному ОУМ каждого входящего в неё пучка.

Проведено численное моделирование, подтвердившее сохранение нормированного ОУМ для суперпозиций трёх и пяти оптических вихрей разной формы. Доказанные теоремы позволяют с помощью любого числа одинаковых радиально-симметричных вихревых пучков, путем подбора весовых коэффициентов и величины смещения каждого пучка с оптической оси, формировать новые пучки с разным распределением интенсивности (в том числе и не радиально-симметричным), но обладающие одинаковым нормированным ОУМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены суперпозиции пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом, имеющие комплексное смещение с оптической оси. Для таких суперпозиций получено аналитическое выражение для расчёта нормированного орбитального углового момента (ОУМ) (выражение (23)). Показано, что если весовые коэффициенты суперпозиции действительны, то ОУМ всей суперпозиции пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя. Это позволяет формировать бездифракционные пучки с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ. Показано также, что комплексное смещение пучка Бесселя приводит к изменению распределения интенсивности в сечении пучка и изменению его ОУМ (выражения (18), (20)). Суперпозиция двух пучков Бесселя с комплексным смещением может не менять ОУМ, хотя распределение интенсивности будет меняться. Эксперимент хорошо согласуется с теорией (рис. 2, 4, 6, 8).

Результаты работы являются продолжением исследований различных лазерных пучков и вносят существенный вклад в решение фундаментальной проблемы оптической передачи информации и способствуют увеличению пропускной способности каналов связи при использовании мультиплексирования светового сигнала по орбитальному угловому моменту. Кроме того, бездифракционные световые пучки обладают способностью восстанавливать свою форму после искажения препятствиями, а потому являются привлекательными для передачи информации через среды с небольшими флуктуациями показателя преломления (например, через атмосферную турбулентность). Известно, что расходимость оптических вихрей растёт с увеличением их топологического заряда, и это требует увеличения апертуры приемника светового сигнала при увеличении количества используемых сигналов (алфавита), что отрицательно сказывается на стоимости приемной аппаратуры. Отсутствие расходимости бездифракционных пучков позволяет решить эту проблему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Durnin, J.** Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory [Text] / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 4. – No. 4. – P. 651-654.
2. **Котляр, В.В.** Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом [Текст] / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38. – № 1. – С. 4-10.
3. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes [Text] / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Opt. Lett. – 2014. – Vol. 39. – No. 8. – P. 2395–2398.
4. Experimental demonstration of optical Mathieu beams [Text] / JC Gutiérrez-Vega, MD Iturbe-Castillo, GA Ramirez [et al.] // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 195. – No. 1. – P. 35-40.
5. **Berry, M.V.** Nonspreading wave packets [Text] / M.V. Berry, N.L. Balazs // Am. J. Phys. – 1979. – V. 47. – No. 3. – P. 264-267.
6. **Siegman, A.E.** Lasers [Text] / A.E. Siegman – University Science, 1986.
7. Hypergeometric modes [Text] / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina [et al.] // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32. – P. 742-744.
8. Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams [Text] / J. Ring, J. Lindberg, A. Mourka [et al.] // Opt. Express. – 2012. – Vol. 20. – P. 18955-18966.
9. **Pearcey, T.** The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic [Text] / T. Pearcey // Phil. Mag. S. – 1946. – Vol. 7. – No. 37. – P. 311–317.
10. **Berry, M.V.** “Integrals with coalescing saddles” / M.V. Berry, C.J. Howls. <http://dlmf.nist.gov/36.2> (Digital Library of Mathematical Functions, National Institute of Standards and Technology, 2012).
11. Virtual Source of a Pearcey beam [Text] / D. Deng, C. Chen, X. Zhao [et al.] // Opt. Lett. – 2014. – Vol. 39. – No. 9. – P. 2703–2706.
12. **Zapata-Rodríguez, C.** Diffraction-free beams in thin films [Text] / C. Zapata-Rodríguez and J. Miret // J. Opt. Soc. Am. A. – 2010. – Vol. 27. – P. 663-670.

13. **Miret, J.** Diffraction-free propagation of subwavelength light beams in layered media [Text] / J. Miret and C. Zapata-Rodríguez // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2010. – Vol. 27. – P. 1435-1445.
14. **Zapata-Rodríguez, C.** Subwavelength Bessel beams in wire media [Text] / C. Zapata-Rodríguez and J. Miret // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 2014. – Vol. 31. – P. 135-143.
15. Singular diffraction-free surface plasmon beams generated by overlapping phase-shifted sources [Text] / S. Wei, J. Lin, Q. Wang [et al.] // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 38. – P. 1182-1184.
16. Characterization of a refractive logarithmic axicon [Text] / I. Golub, B. Chebbi, D. Shaw [et al.] // *Opt. Lett.* – 2010. – Vol. 35. – P. 2828-2830.
17. Generation of Bessel beam arrays through Dammann gratings [Text] / P. García-Martínez, M. Sánchez-López, J. Davis [et al.] // *Appl. Opt.* – 2012. – Vol. 51. – P. 1375-1381.
18. **Miller, W.** *Symmetry and Separation of Variables* / W. Miller. (Cambridge University, 1984).
19. **Enderlein, J.** Unified operator approach for deriving Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian laser modes [Text] / J. Enderlein and F. Pampaloni // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2004. – Vol. 21. – P. 1553-1558.
20. **Kravtsov, Yu.A.** Complex ray and complex caustics [Text] / Yu. A. Kravtsov // *Radiophys. Quantum Electron.* – 1967. – Vol. 10. – P. 719–730.
21. **Arnaud, J.** Degenerate optical cavities. II: Effects of misalignments [Text] / J. Arnaud // *Appl. Opt.* – 1967. – Vol. 8. – P. 1909–1917.
22. **Keller, J.B.** Complex rays with an application to Gaussian beams [Text] / J.B. Keller and W. Streifer // *J. Opt. Soc. Am.* – 1971. – Vol. 61. – P. 40–43.
23. **Deschamps, G.A.** Gaussian beams as a bundle of complex rays [Text] / G.A. Deschamps // *Electron. Lett.* – 1971. – Vol. 7. – P. 684–685.
24. **Dennis, M.R.** Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams [Text] / M.R. Dennis, J.D. Ring // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38. – P. 3325-3328.

25. **Ковалёв, А.А.** Бездифракционные пучки Ломмеля [Текст] / А.А.Ковалёв, В.В.Котляр // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38. – №. 2. – С. 188–192.
26. **Yee, K.S.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [Text] / K.S. Yee // IEEE Trans. Antenn. Prop. – 1966. – Vol. AP-14. – P. 302–307.
27. **Van Roey, J.** Beam-propagation method: analysis and assessment [Text] / J. van Roey, J. van der Donk, and P. Lagasse // J. Opt. Soc. Am. – 1981. – Vol. 71. – P. 803-810.
28. **Kirk, J.P.** Phase-only complex-valued spatial filters [Text] / J.P. Kirk, A.L. Jones // J. Opt. Soc. Am. – 1971. – Vol. 61. – No. 8. – P. 1023.
29. Кодирование дифракционных оптических элементов методом локального фазового скачка [Текст] / В.В.Котляр, С.Н.Хонина, А.С.Мелехин [и др.] // Компьютерная оптика. – 1999. – Т. 19. – С. 54–64.
30. **Gutiérrez-Vega, J.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams [Text] / J. Gutiérrez-Vega, M. Iturbe-Castillo and S. Chávez-Cerda // Opt. Lett. – 2000. – Vol. 25. – P. 1493-1495.
31. **Lu, J.** Diffraction-limited beams and their applications for ultrasonic imaging and tissue characterization [Text] / J. Lu, J. Greenleaf // Am. J. Phys. – 1979. – V. 47(3). – P. 264-267.
32. Propagation of Bessel and Airy beams through atmospheric turbulence [Text] /W. Nelson, J.P. Palastro, C.C. Davis [et al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31. – No.3. – P.603-609.
33. Spatiotemporal structure of femtosecond bessel beams from spatial light modulators [Text] / L. Froehly, M. Jacquot, P.A. Lacourt [et al.] // J. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31. – No. 4. – P. 790-793.
34. **Борн, М.** Основы оптики [Текст] / М. Борн, Э. Вольф. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973.
35. **Watson, G.N.** A Treatise on the Theory of Bessel Functions [Text] / G.N. Watson – 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, §16.5-16.59, pp. 537-550, 1966.

36. **Sheppard, C.J.R.** Focusing of vortex beams: Lommel treatment [Text] / C.J.R. Sheppard // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2014. – Vol. 31. – No. 3. – P. 644-651.
37. Fully Vectorial Accelerating Diffraction-Free Helmholtz Beams [Text] / P. Aleahmad, M-A. Miri, M.S. Mills [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – Vol. 109. – P. 203902.
38. **Скиданов, Р.В.** Дифракционные оптические элементы для формирования комбинаций вихревых пучков в задаче манипулирования микрообъектами [Текст] / Р.В. Скиданов, С.В. Ганчевская // *Компьютерная оптика.* – 2014. – Т. 38. – № 1. – С. 65-71.
39. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum [Text] / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2014. – V. 31(2). – P. 274-282.
40. **Gradshteyn, I.S.** Table of Integrals, Series, and Products [Text] / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. – New York: Academic, 1965.
41. **Abramovitz, M.** Handbook of mathematical functions [Text] / M. Abramovitz, I.A. Stegun // Dover Publications, 1965.
42. **Yao, A.M.** Orbital angular momentum: origins, behavior and applications [Text] / A.M. Yao, M.J. Padgett // *Advances in Optics and Photonics.* – 2011. – Vol. 3. – P. 161-204.
43. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes [Text] / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw [et al.] // *Physical Review A.* – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
44. **Barnett, S.M.** Orbital angular momentum and nonparaxial light-beams [Text] / S.M. Barnett, L. Allen // *Optics Communications.* – 1994. – Vol. 110. – P. 670-678.
45. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam [Text] / K. Volke-Sepulveda, V. Garces-Chavez, S. Chavez-Cedra [et al.] // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics.* – 2002. – Vol. 4. – P. S82-S89.

46. **Litvin, I.A.** Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams [Text] / I.A. Litvin, A. Dudley, A. Forbes // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19. – No. 18. – P. 16760-16771.
47. **Kotlyar, V.V.** An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images [Text] / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1997. – Vol. 44. – No. 7. – P. 1409-1416.
48. Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics [Text] / P. Paakkonen, J. Lautanen, M. Honkanen [et al.] // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45. – No. 11. – P. 2355-2369.
49. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE [Text] / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer [et al.] // *Optik*. – 1999. – Vol. 110. – No. 3. – P. 137-144.
50. Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures [Text] / M.P. MacDonald, L. Paterson, K. Volke-Sepulveda [et al.] // *Science*. – 2002. – Vol. 296. – P. 1101-1103.
51. Angular momentum of optical vortex arrays [Text] / J. Courtial, R. Zambrini, M. Dennis [et al.] // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 4. – P. 938-949.
52. **Martinez-Castellanos, I.** Shaping optical beams with non-integer orbital angular momentum: a generalized differential operator approach [Text] / I. Martinez-Castellanos and J. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2015. – doc. ID 229244 (posted 12 August 2014, in press).
53. **Kotlyar, V.V.** Hankel-Bessel laser beams [Text] / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 29. – No. 5. – P. 741-747.
54. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams [Text] / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64. – P. 491-495.

Учебное издание

*Ковалёв Алексей Андреевич,
Котляр Виктор Викторович*

**НОВЫЕ ВИДЫ БЕЗДИФРАКЦИОННЫХ
И СТРУКТУРНО-УСТОЙЧИВЫХ АСИММЕТРИЧНЫХ ЛАЗЕРНЫХ
ПУЧКОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**

Учебное пособие

Редактор Т.К. Кретинина
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 17.06.2019. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,0.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. - 28(Р1У)/2019.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

