

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.С. БУКАТЫЙ, С.А. БУКАТЫЙ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.03 Прикладная механика, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.01 Технология транспортных процессов, 24.03.04, 24.04.04 Авиастроение, 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей, 24.05.04 Двигатели летательных аппаратов, 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение, 25.03.01 Техническая эксплуатация, летательных аппаратов и двигателей, 27.03.02 Управление качеством

САМАРА

Издательство Самарского университета

2022

УДК 539(075)

ББК 30.121я7

Б906

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Г. В. Смирнов,
д-р техн. наук, проф. Я. М. Клебанов

Букатый, Алексей Станиславович

Р248 Определение перемещений стержневых систем методами сопротивления материалов: учебное пособие / *А.С. Букатый, С.А. Букатый.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 92 с.

ISBN 978-5-7883-1834-9

Содержит теоретические сведения по определению перемещений – деформаций деталей и элементов конструкций типа стержень от действия внешних нагрузок. Рассмотрены методы, основанные на интегрировании относительных деформаций, метод начальных параметров при изгибе балок, а также более универсальные энергетические методы определения перемещений: на основе теоремы Кастилиано и метод интегралов Мора. Все рассмотренные методы проиллюстрированы примерами решения задач.

Предназначено для студентов авиационных и других машиностроительных специальностей всех форм обучения, изучающих курс «Сопротивление материалов». Подготовлено на кафедре Сопротивление материалов Самарского университета.

УДК 539(075)

ББК 30.121я7

ISBN 978-5-7883-1834-9

© Самарский университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-------------------	---

I. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Общие принципы определения перемещений методом непосредственного интегрирования	6
1.1. Растяжение-сжатие	6
1.2. Кручение	7
1.3. Определение перемещений балок при изгибе	7
2. Метод начальных параметров. Универсальное уравнение упругой оси балки	11
2.1. Определение перемещений в балках с типовыми сосредоточенными и постоянными распределёнными поперечными нагрузками.....	11
2.2. Определение перемещений в балках с линейно-распределёнными поперечными нагрузками	17
2.3. Нагружение линейно-возрастающей нагрузкой	18
2.4. Нагружение линейно-убывающей нагрузкой	21
3. Энергетические методы определения перемещений	24
3.1. Теорема Кастилиано	25
3.2. Интегралы Мора	27
3.3. Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)	31

II. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Определение перемещений стержневых систем методом непосредственного интегрирования	34
1.1. Задачи на растяжение-сжатие и кручение	34
Задача № 1-1	34
Задача № 1-2	37
Задача № 1-3	39
1.2. Определение перемещений балок при изгибе методом непосредственного интегрирования	41
Задача № 1-4	42
Задача № 1-5	43
Задача № 1-6	45

2. Определение перемещений балок методом начальных параметров	48
2.1. Балки без линейно-изменяющихся нагрузок	48
Задача № 2-1	48
Задача № 2-2	50
Задача № 2-3	51
Задача № 2-4	55
Задача № 2-5	59
2.2. Балки с линейно-изменяющимися нагрузками	62
Задача № 2-6	62
Задача № 2-7	65
3. Энергетические методы	68
3.1. Потенциальная энергия упругой деформации.	
Теорема Кастилиано	68
Задача № 3-1	68
Задача № 3-2	69
Задача № 3-3	70
3.2. Интегралы Мора	71
Задача № 3-4	72
Задача № 3-5	73
Задача № 3-6	78
Задача № 3-7	83
3.3. Теорема о взаимности работ	87
Задача № 3-8	87
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	90

Предисловие

Большая часть курса сопротивления материалов (СМ) посвящена рассмотрению стержневых систем. Поэтому рассматриваемые в данном пособии методы относятся к определению перемещений упругих стержней (брусьев) или конструкций, в состав которых входят элементы – стержни. Нелинейные задачи, возникающие, например, при продольно-поперечном изгибе, выходят за рамки данного пособия.

Определение перемещений необходимо не только для расчётов на жёсткость, но и для определения внутренних силовых факторов в статически неопределимых системах, для определения собственных частот и динамических коэффициентов при расчётах на колебания или ударные воздействия. Поэтому важно понимать идеи, лежащие в основе методов определения перемещений.

Следует пояснить, что СМ – не наука, а учебная дисциплина, синтезирующая сведения различных наук, и при изложении теории и методов СМ часто используется прагматический подход, основанный на применении не только точных физических, но и менее строгих феноменологических теорий и подходов. Поэтому в основе методов СМ лежат гипотезы и принципы, расходящиеся в ряде случаев с современными достижениями наук, а точность и строгость зачастую приносятся в жертву ясности и простоте изложения. Но современная техника ставит перед инженерами новые, более сложные задачи и проблемы, для решения которых требуется чёткое понимание сути применяемых методов. Поэтому важно понимать физический смысл применяемых методов и размерности используемых и получаемых характеристик.

Для удобства пользования и восприятия материала пособие разделено на две части: сначала кратко изложена теория, а примеры её применения приводятся во второй части пособия.

I. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Общие принципы определения перемещений методом непосредственного интегрирования

Независимо от вида нагружения определение перемещений стержневых систем основано на следующих общих принципах:

- *интегрирование относительных деформаций*;
- *принцип независимости действия сил*, позволяет определять перемещения от каждого силового фактора по отдельности. Справедливость этого принципа основана на законе Гука.

Рассмотрим сначала простые виды нагружения: растяжение-сжатие и кручение стержней длиной l .

1.1. Растяжение-сжатие

В соответствии с законом Гука для относительной деформации удлинения ε имеем:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA},$$

где N , E и A – силовой фактор, модуль продольной упругости материала и площадь поперечного сечения стержня.

Здесь произведение EA называется *жёсткостью на растяжение-сжатие*.

Если величина $\varepsilon = const$, то получаем простое выражение:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{EA}.$$

В общем случае, когда величина ε переменная, получаем:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dz = \int_0^l \frac{N}{EA} dz,$$

где N и A задаются как функции от координаты z .

1.2. Кручение

Аналогично при кручении стержней (валов) с круглым поперечным сечением относительный угол закручивания определяется выражениями

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{M_k}{GI_p},$$

где M_k , G и I_p – крутящий момент, модуль сдвига и полярный момент инерции поперечного сечения, GI_p – жёсткость на кручение.

Как и при растяжении для постоянных и переменных θ , получаем выражения для углов закручивания стержней:

$$\Delta\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_k \cdot l}{GI_p} \quad \text{и} \quad \Delta\varphi = \int_0^l \theta dz = \int_0^l \frac{M_k}{GI_p} dz.$$

Если поперечное сечение стержня не круглое, то вместо полярного момента инерции I_p используют I_k – момент инерции поперечного сечения при кручении.

1.3. Определение перемещений балок при изгибе

Изгиб стержней – балок моментом M по сравнению с растяжением и кручением является более сложным видом сопротивления, т. к. одновременно с линейными перемещениями – прогибами у происходит поворот поперечных сечений балок на угол θ (рис. 1). Как при растяжении и кручении, при изгибе перемещения балок определяют аналогично интегрированием относительной деформации, которой является кривизна продольной оси балки χ :

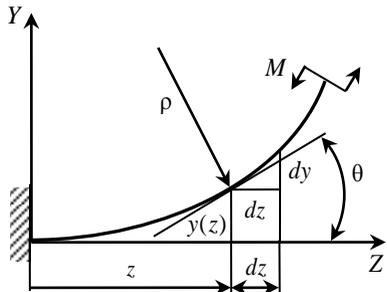


Рис. 1.

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (1)$$

где ρ – радиус кривизны оси балки; I – осевой момент инерции поперечного сечения относительно осей X или Y ; EI – жёсткость балки при изгибе (аналогично жёсткостям EA при растяжении-сжатии и GI_p при кручении).

Здесь и далее для общности жёсткостью EI будем обозначать жёсткости EI_x или EI_y , выбор индексов которых зависит от системы координат и направления действия нагрузок.

Представим в системе координат Z - Y перемещения – прогибы оси балки функцией $y(z)$. Тогда кривизну оси балки χ при изгибе можно выразить через производные функции $y(z)$:

$$\chi = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx y''. \quad (2)$$

Здесь первая производная от прогибов y' , в соответствии с рис. 1 при $dz \rightarrow 0$ определяется как тангенс угла поворота оси и поперечных сечений балки θ : $y' = \frac{dy}{dz} = \operatorname{tg}\theta$. В соответствии с гипотезой о малости перемещений прогибы $y(z)$ и углы поворота сечений малы. Следовательно, справедливо соотношение $y' = \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ и величина $(y')^2 \ll 1$, т. е. мала по сравнению с 1 и ею можно пренебречь. Например, $\theta = 0,1$ рад, $\operatorname{tg}(0,1) \approx 0,10033$, $(\operatorname{tg}(0,1))^2 \approx 0,010067$. Тогда $[1 + (y')^2]^{3/2} = 1,0151 \approx 1$ и в уравнении (2) можно принять $\chi \approx y''$.

Приравняв выражения (2) и (1), получаем для упругой оси балки дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' = \frac{M}{EI}. \quad (3)$$

После двукратного интегрирования уравнения (3) получаем:

$$\theta = \int \chi dz = \int \frac{M}{EI} dz + C_1,$$

$$y = \int \theta dz = \iint \frac{M}{EI} dz dz + C_1 z + C_2,$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий закрепления балки (см. табл. 1).

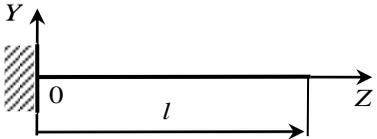
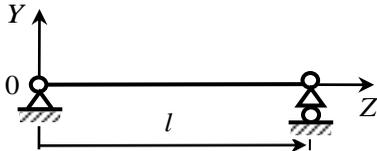
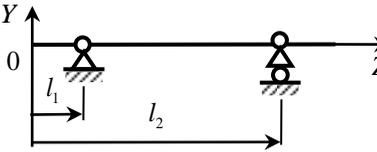
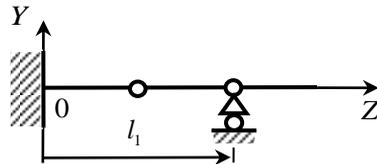
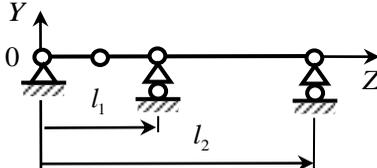
Недостаток метода непосредственного интегрирования: данный метод становится сложным и трудоёмким, когда балка имеет несколько участков нагружения или участки имеют различную жёсткость. В таких случаях для каждого участка нужно составлять свои выражения для изгибающих моментов и интегрировать соответствующие дифференциальные уравнения. Получающееся количество постоянных – констант интегрирования в два раза больше количества участков и для их определения необходимо составить и решить такое же количество уравнений. Эти уравнения получают из граничных условий закрепления балок на опорах и условий совместности деформаций на границах участков. Поэтому в практических расчётах пользуются более простым и эффективным **методом начальных параметров**, который является дальнейшим развитием метода непосредственного интегрирования.

Возникает вопрос: почему константы интегрирования (КИ) не учитывались в процессе определения перемещений стержней при растяжении-сжатии и кручении?

При рассмотрении этих видов сопротивлений стержни и валы имеют одностороннее закрепление жёстким защемлением, которое обнуляет все КИ, в т. ч. и для балок при изгибе (см. табл. 1, строка 1). Но балки имеют и другие различные способы закрепления, при которых КИ необходимо определять.

Примеры решения задач на определение перемещений стержней методом непосредственного интегрирования приведены в разделе II, задачи № 1-1...1-6.

Таблица 1. Варианты закрепления балок
и соответствующие им граничные условия

Расчётная схема	Граничные условия
	<p>При $z = 0$, $y(0) = 0$, $\theta(0) = 0$.</p> <p>В результате получаем: $y_0 = \theta_0 = 0$.</p>
	<p>При $z = 0$, $y(0) = 0$, $z = l$, $y(l) = 0$.</p> <p>В результате получаем: $y_0 = 0$, $\theta_0 \neq 0$.</p>
	<p>При $z = l_1$, $y(l_1) = 0$, $z = l_2$, $y(l_2) = 0$.</p> <p>В результате получаем: $y_0 \neq 0$, $\theta_0 \neq 0$.</p>
	<p>При $z = 0$, $y(0) = 0$, $\theta(0) = 0$. $z = l_1$, $y(l_1) = 0$.</p> <p>В результате получаем: $y_0 = \theta_0 = 0$, $\theta_{ш} \neq 0$.</p>
	<p>При $z = 0$, $y(0) = 0$, $z = l_1$, $y(l_1) = 0$, $z = l_2$, $y(l_2) = 0$.</p> <p>В результате получаем: $y_0 = 0$, $\theta_0 \neq 0$, $\theta_{ш} \neq 0$.</p>

2. Метод начальных параметров.

Универсальное уравнение упругой оси балки

Начинают решение с определения реакций опор балки, и далее рассматривают балку в обобщённом виде, т. е. под действием всех нагрузок, в число которых входят и реакции опор. При этом, для исключения ошибок со знаками реакций опор (если они получились отрицательными), на расчётной схеме указывают их фактическое направление и в расчётах учитывают со знаком в соответствии с направлением их действия. В дальнейшем мы будем рассматривать правостороннюю систему координат, когда начало координат находится на левом конце балки, а также будем полагать, что жёсткость балки постоянна, т. е. $EI = const$. В отдельных случаях, для упрощения расчётов, начало координат можно помещать на правом конце балки, но методика решения задач остаётся прежней.

2.1. Определение перемещений в балках с типовыми сосредоточенными и постоянными распределёнными поперечными нагрузками

Рассмотрим сначала нагружение балок типовыми нагрузками: сосредоточенным моментом M и силой F , а также распределённой постоянной поперечной нагрузкой q , действующей на ограниченном по длине участке $c-d$ (рис. 2).

При определении перемещений используется *глобальная*, т. е. *сквозная система координат*, когда координата z отсчитывается для каждого участка от начала системы координат $Z-Y$. На рис. 2 показана в обобщённом виде схема балки длиной L со всеми указанными выше нагрузками и с шарниром III на расстоянии g . Распределённая нагрузка q действует на участке длиной $(d - c)$.

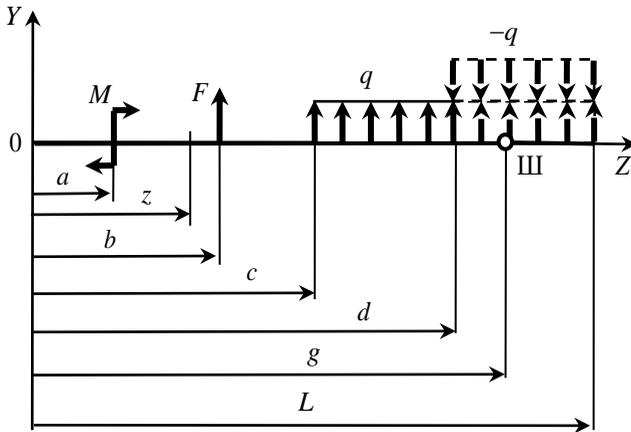


Рис. 2.

Для определения перемещений нужно интегрировать дифференциальное уравнение, в котором выражение для изгибающих моментов $M(z)$ от всех нагрузок можно представить в следующем универсальном виде¹:

$$M(z) = M \Big|_{z>a} + F(z-b) \Big|_{z>b} + q \frac{(z-c)^2}{2} \Big|_{z>c} - q \frac{(z-d)^2}{2} \Big|_{z>d}, \quad (4)$$

где $a...d$ – координаты точек приложения нагрузок.

Универсальная форма записи означает, что действие каждой нагрузки распространяется от точки приложения до конца балки. Например, сила F начинает изгибать балку на участке $z > b$, и момент от данной нагрузки в выражении (4) нужно учитывать только при условии, что расчётная координата $z > b$. Т. о. *действие нагрузок распространяется от координаты точки их приложения и далее до конца балки*. Кратко это обозначается как $\Big|_{z>b}$. Момент M (рис. 2) начинает действовать в сечении a и действие

¹ Необходимо отметить, что универсальное выражение моментов $M(z)$ можно получить с учётом момента M указанным ниже способом интегрирования универсального выражения для поперечных сил $Q(z)$, которое в данном случае имеет вид $Q(z) = F \Big|_{z>b} + q(z-c) \Big|_{z>c} - q(z-d) \Big|_{z>d}$.

этого момента распространяется на область $z > a$ до конца балки. Аналогично, универсальная форма записи моментов распространяет действие распределённой нагрузки q тоже до конца балки – показано прерывистыми стрелками. Но нагрузка q при $z = d$ заканчивается. Поэтому для исключения возникающей ошибки при $z > d$ прикладывают равную по величине, но в противоположном направлении, нагрузку $(-q)$, которая *компенсирует действие q за пределами координаты d .*

Подставив полное выражение $M(z)$ от всех нагрузок (4) в уравнение (3), получаем дифференциальное уравнение упругой оси балки. Для определения перемещений воспользуемся специальным *способом интегрирования – интегрированием дифференциального уравнения без раскрытия скобок:*

если принять выражение $(z - z_i) = u$, то $d(z - z_i) = du$.

Но если $z_i = const$, в нашем случае $z_i = a, b, c, \dots$, то получаем:

$d(z - z_i) = dz$. Следовательно $dz = du$ и можно считать, что

$$\int (z - z_i) dz = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{(z - z_i)^2}{2}.$$

Необходимо отметить, что результаты такого интегрирования каждого слагаемого из выражения (4) будут отличаться от результатов интегрирования обычным способом на некоторую *постоянную величину*. Например, в данном случае для участка $a \leq z \leq b$, где $u = (z - a)$, различие составляет величину $(a^2 - ab)$:

$$\int_a^b u du = \frac{u^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}; \quad \int_a^b (z - a) dz = \left(\frac{z^2}{2} - az \right) \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} + (a^2 - ab).$$

Следовательно, в результате интегрирования каждого слагаемого (4) будет накапливаться некоторая сумма постоянных величин, которая в дальнейшем будет учтена в процессе определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 на основе граничных условий закрепления балки на опорах (см. табл. 1 на с. 10).

Если балка на расстоянии g содержит шарнир Ш (рис. 2), то ось за шарниром изменяет направление на угол $\theta_{ш}$ (рис. 3, а). На выражение моментов (4) $\theta_{ш}$ не влияет, т. к. шарнир моментов не передаёт. Но в выражение для углов поворота сечений балки $\theta(z)$ при $z > g$ добавляют постоянную величину $\theta_{ш} = const$.

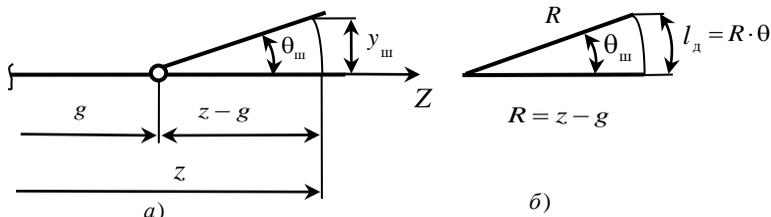


Рис. 3.

Соответственно в выражении для прогибов $y(z)$ добавится слагаемое – перемещение $y_{ш}$, которое тоже учитывают при условии $z > g$. Это линейное перемещение – прогиб $y_{ш}$, в соответствии с гипотезой о малости перемещений, принимают равным длине дуги (рис. 3, б):

$$y_{ш} \approx l_{д} = \theta_{ш} \cdot R = \theta_{ш}(z - g). \quad (5)$$

Обозначим константы интегрирования: $C_1 = \theta_0$ и $C_2 = y_0$. Тогда в результате интегрирования уравнения (3) указанным выше способом с учётом выражений (4) и (5), получим следующие общие уравнения для перемещений балки:

$$\theta(z) = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M(z-a) \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^2}{2} \Big|_{z>b} + q \frac{(z-c)^3}{6} \Big|_{z>c} - \right. \\ \left. - q \frac{(z-d)^3}{6} \Big|_{z>d} \right\} + \theta_{ш} \Big|_{z>g}, \quad (6)$$

$$y(z) = y_0 \Big|_{z>0} + \theta_0 \cdot z \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M \frac{(z-a)^2}{2} \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^3}{6} \Big|_{z>b} + \right. \\ \left. + q \frac{(z-c)^4}{24} \Big|_{z>c} - q \frac{(z-d)^4}{24} \Big|_{z>d} \right\} + \theta_{ш} (z - g) \Big|_{z>g}. \quad (7)$$

Здесь, поскольку момент M начинает действовать с координаты $z = a$, при интегрировании в уравнении (6), по аналогии с остальными слагаемыми, записываем слагаемые для момента M с учётом координаты a : $M(z - a)$. Возникающая при этом дополнительная постоянная величина $-Ma$ так же будет учтена в процессе определения постоянных интегрирования θ_0 и y_0 .

При отсутствии шарнира, независимо от количества участков нагружения, получаем всего две постоянные интегрирования: θ_0 и y_0 . При $z = 0$ из (6) и (7) получаем: $\theta(0) = \theta_0$ и $y(0) = y_0$. Следовательно, y_0 и θ_0 – это прогиб и угол поворота оси балки в начале координаты z , т. е. при $z = 0$. Поэтому y_0 и θ_0 называют начальными параметрами. Их определяют путём решения уравнений, полученных на основе граничных условий закрепления балки на опорах (см. табл. 1 на с. 10). К начальным параметрам относят также и нагрузки F_0 и M_0 , если они действуют в начале балки при $z = 0$: являются реакциями шарнирной опоры или жёсткого защемления.

При наличии шарнира, количество опор увеличивается и для определения постоянной $\theta_{ш}$ на основе дополнительного граничного условия составляют аналогично разрешающее уравнение. Все типовые варианты закрепления балок и соответствующие им граничные условия приведены в указанной выше таблице на с. 10.

После определения y_0 и θ_0 (и $\theta_{ш}$ при наличии шарнира), выражения (6) и (7) служат для определения угловых и линейных перемещений оси балки в произвольной точке, т. е. в зависимости от координаты z в пределах длины балки L . Поэтому уравнение (7) называют **универсальным уравнением упругой оси балки**. Если учесть, что $2 = 1 \cdot 2 = 2!$, $6 = 3!$, $24 = 4!$, то уравнение (7) принимает канонический вид, который будем использовать в дальнейшем:

$$y(z) = y_0|_{z>0} + \theta_0 \cdot z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M \frac{(z-a)^2}{2!} \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^3}{3!} \Big|_{z>b} + \right. \\ \left. + q \frac{(z-c)^4}{4!} \Big|_{z>c} - q \frac{(z-d)^4}{4!} \Big|_{z>d} \right\} + \theta_{\text{ш}}(z-g) \Big|_{z>g}. \quad (8)$$

В практических расчётах обычно составляют уравнение (8) для $y(z)$, а уравнение для $\theta(z)$ получают путём дифференцирования выражения $y(z)$ аналогично – способом без раскрытия скобок:

$$\theta(z) = y'(z) = \theta_0|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M(z-a) \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^2}{2!} \Big|_{z>b} + \right. \\ \left. + q \frac{(z-c)^3}{3!} \Big|_{z>c} - q \frac{(z-d)^3}{3!} \Big|_{z>d} \right\} + \theta_{\text{ш}} \Big|_{z>g}. \quad (9)$$

Если каких-либо одноимённых нагрузок несколько, то после определения реакций опор соответствующие уравнения перемещений составляют аналогично с учётом координат точек приложения и направления действия всех нагрузок.

Примечание:

Если балка содержит участки с различной жёсткостью EI , (например, с различными размерами или формой сечения или из материалов с неодинаковыми модулями упругости E), то уравнения (8) и (9) составляют для каждого участка с учётом своей жёсткости EI .

Примеры решения задач на определение перемещений балок методом начальных параметров приведены в разделе II, задачи № 2-1...2-5.

2.2. Определение перемещений в балках с линейно-распределёнными поперечными нагрузками

Пример нагружения балки линейно-распределённой поперечной нагрузкой $q(z) = q_e + k(z-e)$ показан на рис. 4.

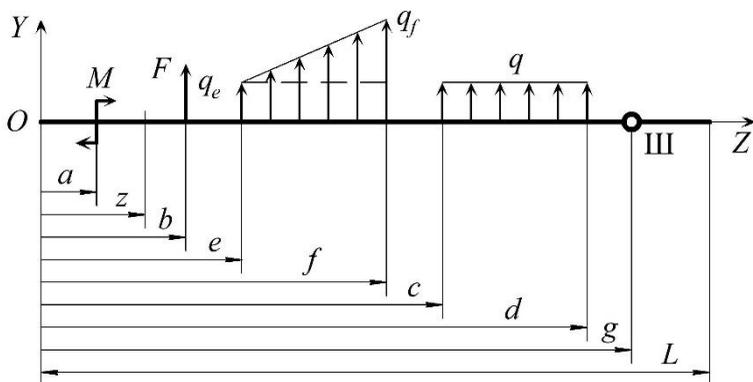


Рис. 4.

Это более сложное нагружение в соответствии с *принципом независимости действия сил* можно рассматривать по отдельности как сумму двух нагрузок: постоянной $q = q_e = const$ и линейно-распределённой $q(z) = k(z-e)$, где k – угловой коэффициент, определяющий увеличение или уменьшение нагрузки по линейному закону. Обозначим длину участка балки $f - e = l$, а разность величин $q_f - q_e = q_{max}$.

Тогда величина углового коэффициента будет определяться выражением:

$$k = \frac{q_f - q_e}{f - e} = \frac{\pm q_{max}}{l}, \quad (10)$$

где знак перед q_{max} определяется соотношением величин q_f и q_e .

Нагружение сосредоточенными и постоянной распределённой нагрузками рассмотрено выше в разделе 2.1. Поэтому далее будем

рассматривать только действие линейно-распределённой нагрузки в двух вариантах нагружения при $z > e$: линейно-возрастающей нагрузкой $q(z) = k(z-e)$ (рис. 5), и линейно-убывающей нагрузкой $q(z) = q_e - k(z-e)$ (рис. 6).

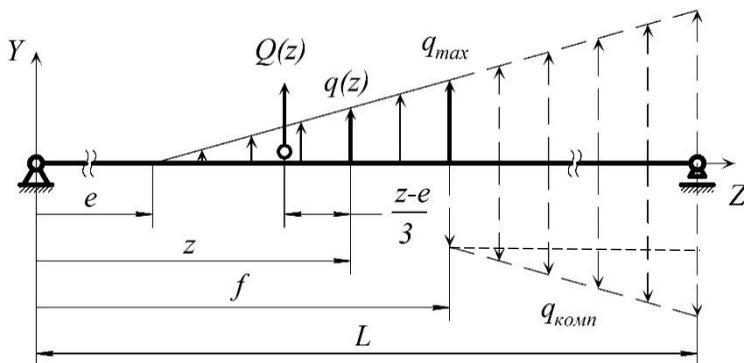


Рис. 5.

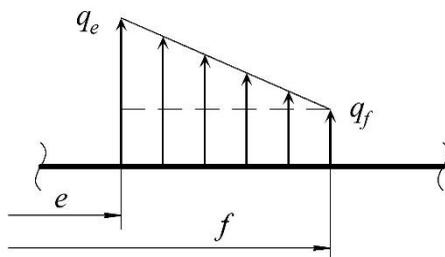


Рис. 6.

2.3. Нагружение линейно-возрастающей нагрузкой

Рассмотрим сначала определение внутренних силовых факторов $Q(z)$ и $M(z)$ на участке $f-e$ при $z > e$ только от нагрузки $q(z) = k \cdot (z-e)$, т. е. без учёта реакций опор и других нагрузок (рис. 5). В обычной задаче на построение эпюр Q и M удобно пользоваться *местной системой координат*, т. е. на каждом

участке своя координата z и можно выбирать её направление произвольно от обоих концов балки. Примеры определения и построения эпюр $Q(z)$ и $M(z)$ с использованием местной системы координат приведены в задачах № 2-3 и 2-4. Но в задачах на определение перемещений используется *сквозная система координат*, т.е. координата z для каждого участка отсчитывается от левого конца балки (рис. 5). Тогда $Q(z)$ и $M(z)$ при $e < z \leq f$ определяются выражениями:

$$Q(z) = \frac{1}{2}q(z)(z-e)\Big|_{z>e} = \frac{1}{2}k(z-e)(z-e)\Big|_{z>e} = k\frac{(z-e)^2}{2!}\Big|_{z>e},$$

$$M(z) = Q(z)\frac{(z-e)}{3}\Big|_{z>e} = k\frac{(z-e)^2}{2!}\frac{(z-e)}{3}\Big|_{z>e} = k\frac{(z-e)^3}{3!}\Big|_{z>e},$$

где $(z-e)/3$ – расстояние от центра давления $Q(z)$ до сечения z .

Отметим, что выражение $M(z)$ можно получить путём интегрирования выражения $Q(z)$ указанным выше способом без раскрытия скобок.

Но универсальная форма записи $Q(z)$ и $M(z)$ аналогично продляет действие нагрузки $q(z)$ до конца балки (рис. 5), показано пунктирными линиями). Следовательно, как и в случае с постоянной распределённой нагрузкой с координаты f нужно приложить компенсирующую нагрузку $q_{\text{комп}}$ с противоположным знаком в следующем виде (рис. 5):

$$q_{\text{комп}} = -q_{\text{max}} - k(z-f).$$

Тогда выражения $Q(z)$ и $M(z)$ с учётом $q_{\text{комп}}$ принимают следующий вид:

$$Q(z) = k\frac{(z-e)^2}{2!}\Big|_{z>e} - q_{\text{max}}(z-f)\Big|_{z>f} - k\frac{(z-f)^2}{2!}\Big|_{z>f},$$

$$M(z) = k\frac{(z-e)^3}{3!}\Big|_{z>e} - q_{\text{max}}\frac{(z-f)^2}{2!}\Big|_{z>f} - k\frac{(z-f)^3}{3!}\Big|_{z>f}. \quad (11)$$

Подставив выражение $M(z)$ в дифференциальное уравнение (3) и аналогично проинтегрировав его два раза, получаем:

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{1}{EI} \left(k \frac{(z-e)^3}{3!} \Big|_{z>e} - q_{\max} \frac{(z-f)^2}{2!} \Big|_{z>f} - k \frac{(z-f)^3}{3!} \Big|_{z>f} \right), \\
y' = \theta(z) &= \frac{1}{EI} \left(k \frac{(z-e)^4}{4!} \Big|_{z>e} - q_{\max} \frac{(z-f)^3}{3!} \Big|_{z>f} - k \frac{(z-f)^4}{4!} \Big|_{z>f} \right), \\
y(z) &= \frac{1}{EI} \left(k \frac{(z-e)^5}{5!} \Big|_{z>e} - q_{\max} \frac{(z-f)^4}{4!} \Big|_{z>f} - k \frac{(z-f)^5}{5!} \Big|_{z>f} \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Полученные выражения представляют только вклад линейно-распределённой нагрузки в определение $\theta(z)$ и $y(z)$ без учёта соответствующих констант интегрирования θ_0 и y_0 . В общем случае действия различных нагрузок полученные выражения для перемещений (12) добавляют в уравнения (8) и (9).

В результате, учитывая выражения (12), универсальные уравнения (8) и (9) для $\theta(z)$ и $y(z)$ с учётом нагрузки $q(z)$ (рис. 4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\theta(z) = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M(z-a) \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^2}{2!} \Big|_{z>b} + q \frac{(z-c)^3}{3!} \Big|_{z>c} - \right. \\
\left. - q \frac{(z-d)^3}{3!} \Big|_{z>d} + q_e \frac{(z-e)^3}{3!} \Big|_{z>e} - q_e \frac{(z-f)^3}{3!} \Big|_{z>f} + k \frac{(z-e)^4}{4!} \Big|_{z>e} - \right. \\
\left. - q_{\max} \frac{(z-f)^3}{3!} \Big|_{z>f} - k \frac{(z-f)^4}{4!} \Big|_{z>f} \right\} + \theta_{\text{ш}} \Big|_{z>g}.
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
y(z) = y_0 \Big|_{z>0} + \theta_0 \cdot z \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M \frac{(z-a)^2}{2!} \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^3}{3!} \Big|_{z>b} + \right. \\
\left. + q \frac{(z-c)^4}{4!} \Big|_{z>c} - q \frac{(z-d)^4}{4!} \Big|_{z>d} + q_e \frac{(z-e)^4}{4!} \Big|_{z>e} - q_e \frac{(z-f)^4}{4!} \Big|_{z>f} + \right. \\
\left. + k \frac{(z-e)^5}{5!} \Big|_{z>e} - q_{\max} \frac{(z-f)^4}{4!} \Big|_{z>f} - k \frac{(z-f)^5}{5!} \Big|_{z>f} \right\} + \theta_{\text{ш}} (z-g) \Big|_{z>g}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнения (13) и (14) получены для нагрузок, действующих в положительном направлении, т. е. в направлении оси Y . Если нагрузки действуют в противоположном направлении, то перед

соответствующими слагаемыми нужно изменить знаки на противоположные. В практических расчётах в общих выражениях учитывают только действующие на балку нагрузки. Обычно составляют уравнение (14), а уравнение для $\theta(z)$ получают дифференцированием $y(z)$.

2.4. Нагружение линейно-убывающей нагрузкой

В общем случае линейно-убывающую нагрузку на участке $e-f$ (рис. 7) тоже рассматриваем как сумму нагрузок: постоянной составляющей $q_f = const$, рассмотренной выше в разделе 2.1, и линейно-убывающей $q(z) = q_{max} - k \cdot (z - e)$ при $z > e$, где $q_{max} = q_e - q_f$.

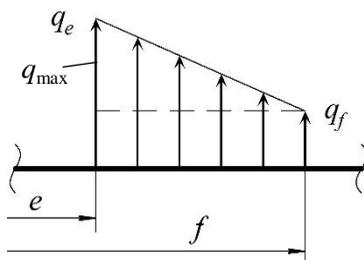


Рис. 7.

В свою очередь, нагрузку $q(z)$ можно представить как действие двух нагрузок (рис. 8): положительной постоянной $q_{пост} = q_{max}$ и отрицательной линейной нагрузки $q_{лин} = -k \cdot (z - e)$, действующей в противоположном $q_{пост}$ направлении.

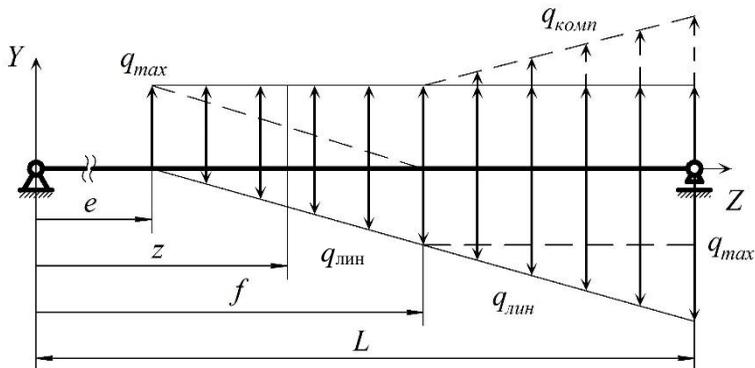


Рис. 8.

Но при $z > f$ величина $q_{\text{лин}}$ становится больше q_{max} и её действие начинает превышать действие q_{max} . Следовательно, начиная с координаты f должна действовать компенсирующая нагрузка $q_{\text{комп}} = k \cdot (z - f)$ в противоположном направлении (рис. 8). Тогда выражение для поперечной силы $Q(z)$ в сечениях при всех $z > e$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(z) &= Q_{\text{пост}} - Q_{\text{лин}} + Q_{\text{комп}} = q_{\text{max}}(z - e) - \frac{1}{2}q_{\text{лин}}(z - e) + \frac{1}{2}q_{\text{комп}}(z - f) = \\ &= q_{\text{max}}(z - e) \Big|_{z > e} - k \frac{(z - e)^2}{2!} \Big|_{z > e} + k \frac{(z - f)^2}{2!} \Big|_{z > f}. \end{aligned}$$

Момент $M(z)$ получим интегрированием последнего выражения $Q(z)$ способом без раскрытия скобок:

$$M(z) = q_{\text{max}} \frac{(z - e)^2}{2!} \Big|_{z > e} - k \frac{(z - e)^3}{3!} \Big|_{z > e} + k \frac{(z - f)^3}{3!} \Big|_{z > f}. \quad (15)$$

После двукратного интегрирования выражения (15) получаем аналогично следующие дополнительные слагаемые к универсальным уравнениям (8) и (9) для угловых и линейных перемещений:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \frac{1}{EI} \left\{ q_{\text{max}} \frac{(z - e)^3}{3!} \Big|_{z > e} - k \frac{(z - e)^4}{4!} \Big|_{z > e} + k \frac{(z - f)^4}{4!} \Big|_{z > f} \right\}, \\ y(z) &= \frac{1}{EI} \left\{ q_{\text{max}} \frac{(z - e)^4}{4!} \Big|_{z > e} - k \frac{(z - e)^5}{5!} \Big|_{z > e} + k \frac{(z - f)^5}{5!} \Big|_{z > f} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда общие уравнения (8) и (9) с учётом линейно-убывающей нагрузки (рис. 7) имеют вид:

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \theta_0 \Big|_{z > 0} + \frac{1}{EI} \left\{ M(z - a) \Big|_{z > a} + F \frac{(z - b)^2}{2!} \Big|_{z > b} + q \frac{(z - c)^3}{3!} \Big|_{z > c} - \right. \\ &\quad \left. - q \frac{(z - d)^3}{3!} \Big|_{z > d} + q_f \frac{(z - e)^3}{3!} \Big|_{z > e} - q_f \frac{(z - f)^3}{3!} \Big|_{z > f} + \right. \\ &\quad \left. + q_{\text{max}} \frac{(z - e)^3}{3!} \Big|_{z > e} - k \frac{(z - e)^4}{4!} \Big|_{z > e} + k \frac{(z - f)^4}{4!} \Big|_{z > f} \right\} + \theta_{\text{ш}} \Big|_{z > g}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
y(z) = & y_0 \Big|_{z>0} + \theta_0 \cdot z \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ M \frac{(z-a)^2}{2!} \Big|_{z>a} + F \frac{(z-b)^3}{3!} \Big|_{z>b} + \right. \\
& + q \frac{(z-c)^4}{4!} \Big|_{z>c} - q \frac{(z-d)^4}{4!} \Big|_{z>d} + q_f \frac{(z-e)^4}{4!} \Big|_{z>e} - q_f \frac{(z-f)^4}{4!} \Big|_{z>f} + (17) \\
& \left. + q_{\max} \frac{(z-e)^4}{4!} \Big|_{z>e} - k \frac{(z-e)^5}{5!} \Big|_{z>e} + k \frac{(z-f)^5}{5!} \Big|_{z>f} \right\} + \theta_{\text{ш}} (z-g) \Big|_{z>g}.
\end{aligned}$$

Здесь так же, учитывают только те слагаемые, которые соответствуют действующим нагрузкам, и если нагрузки действуют в отрицательном направлении, то перед соответствующими слагаемыми нужно изменить знаки на противоположные.

Примеры решения задач на определение перемещений балок с линейно-распределёнными поперечными нагрузками приведены в разделе II, задачи № 2-6 и 2-7.

3. Энергетические методы определения перемещений

При определении перемещений сложных стержневых конструкций и рам пользуются более общими и эффективными энергетическими методами, в основе которых лежат:

- закон Гука;
- закон сохранения энергии;
- принцип независимости действия сил,

который в данном случае означает, что каждый силовой фактор совершает работу только на соответствующем ему перемещении.

Для применения энергетических методов необходимо уметь определять потенциальную энергию упругой деформации стержневых систем, общее выражение которой имеет вид:

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_l \frac{M_k^2 dz}{2GI_k} + \int_l \frac{N^2 dz}{2EA} + k_x \int_l \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + k_y \int_l \frac{Q_y^2 dz}{2GA}. \quad (18)$$

Здесь k_x и k_y – безразмерные коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения стержня; l – обобщённое обозначение длины всех участков стержневой системы.

Определение U осуществляют путём поочерёдного интегрирования соответствующих выражений вдоль каждого участка упругой системы. При этом не все слагаемые в (18) подлежат обязательному определению. Для достаточно длинных балок, длина которых не менее чем на порядок больше размеров поперечного сечения, величина последних трёх слагаемых в U очень мала и ими пренебрегают. Последние два слагаемые, характеризующие энергию сдвига, следует учитывать только для коротких балок, длина которых соизмерима с размерами поперечного сечения (например, зубья шестерён). Но для стержневых систем, нагруженных растяжением или сжатием, учитывают только одно слагаемое с осевой силой N , т. к. все остальные силовые факторы отсутствуют.

3.1. Теорема Кастилиано

Ниже на примере балки (рис. 9) приводится доказательство теоремы в упрощённом виде. Но теорема носит общий характер, справедлива для любых упругих тел или конструкций при действии различных нагрузок.

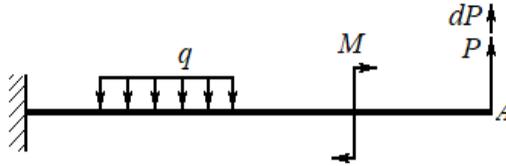


Рис. 9.

Теорема: Частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы в направлении действия этой силы.

На рис. 9 балка нагружена системой различных нагрузок $\{P\}$, в т. ч. силой P , являющейся обобщённой – это может быть любая другая нагрузка. Требуется найти перемещение δ точки A балки, где приложена сила P . В данном случае в соответствии с теоремой δ – линейное перемещение в направлении силы P .

Обозначим U – потенциальную энергию деформации балки при действии заданной системы нагрузок $\{P\}$. Дадим силе P бесконечно малое (б. м.) приращение dP . Это приведет к увеличению энергии балки:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P} dP.$$

Изменим порядок приложения нагрузок: приложим сначала dP , а затем остальные нагрузки. Под действием dP балка в точке A получит б. м. перемещение $d\delta$ и соответствующую долю энергии $\frac{1}{2} \cdot dP \cdot d\delta$. После приложения всех остальных нагрузок $\{P\}$ балка, упруго деформируясь, получит прежнюю энергию U , а точка A переместится на величину δ . Но в процессе деформирования ранее

приложенная сила dP на перемещении δ совершает работу $dP \cdot \delta$ (здесь множитель $\frac{1}{2}$ отсутствует, т.к. в процессе перемещения точки A сила dP остаётся неизменной). В результате получаем следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U + dP \cdot \delta + \frac{1}{2} dP \cdot d\delta.$$

Приравнявая оба выражения энергий и пренебрегая величиной $\frac{1}{2} \cdot dP \cdot d\delta$ как б. м. высшего порядка (произведение двух б. м. величин), после сокращения одинаковых слагаемых U получим:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}.$$

Как указано выше, нагрузка P , следовательно и перемещение δ являются обобщёнными. Если вместо поперечной силы P будет момент M , то δ будет обозначать угол поворота продольной оси и поперечного сечения θ ; продольной силе N соответствует удлинение Δl , линейно-распределённой поперечной нагрузке q соответствует площадь эпюры прогибов балки в направлении действия q , а поверхностной постоянной нагрузке p (например, гидростатическому давлению) соответствует изменение объёма тела ΔV .

Следует отметить следующие важные обстоятельства теоремы.

1. Формулировка теоремы означает, что в случае сложного перемещения (деформирования) упругой системы будет найдена проекция полного перемещения заданной точки на направление действия нагрузки P .

2. Если определяемое перемещение δ получается отрицательным, то его фактическое направление противоположно действию обобщённой нагрузки P , используемой в частной производной.

Применение теоремы Кастилиано имеет ограничения:

- *нельзя определять перемещения в точках, где нет соответствующих нагрузок;*
- *в точке, где приложена нагрузка, нельзя найти перемещения, не соответствующие направлению действия нагрузки.*

Например, в т. A (рис. 9) при изгибе наряду с линейным перемещением – прогибом δ происходит угловое перемещение продольной оси и поперечного сечения балки θ , но определить его в соответствии с теоремой Кастилиано нельзя.

Указанные недостатки устраняет **метод интегралов Мора**, являющийся обобщением теоремы Кастилиано.

Примеры решения задач на основе теоремы Кастилиано приведены в разделе II, задачи 3-1...3-3.

3.2. Интегралы Мора

Будем обозначать индексом $\{P\}$ систему внешних сил, действующих на некоторую упругую стержневую систему (рис. 10). Требуется определить, например, линейное перемещение δ в сечении A в направлении 1–1, где нет нагрузок. Чтобы воспользоваться теоремой Кастилиано приложим дополнительно в точке A и в нужном нам направлении соответствующую фиктивную нагрузку Φ . Составив выражение для потенциальной энергии U от внешних сил $\{P\}$ и от нагрузки Φ , продифференцируем его по Φ . Поскольку в действительности нагрузки Φ нет, в полученном выражении исключим все слагаемые, содержащие Φ . В результате получим искомое перемещение, обусловленное внешней нагрузкой.

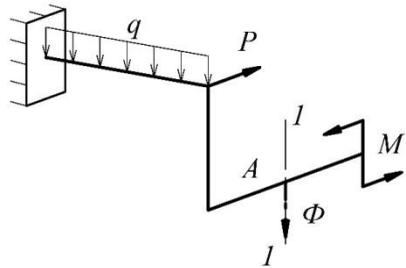


Рис. 10.

Для реализации этой идеи в самом общем виде, выразим все возможные внутренние силовые факторы (ВСФ), возникающие в упругой системе от действия внешних сил $\{P\}$ и нагрузки Φ :

$$M_x = M_{xp} + M_{x\Phi}, \quad M_y = M_{yp} + M_{y\Phi}, \dots, \quad Q_y = Q_{yp} + Q_{y\Phi}.$$

В соответствии с законом Гука дополнительные силовые факторы с индексом Φ будут пропорциональны нагрузке Φ , т.е. $M_{x\Phi} = M_{x1} \cdot \Phi$, $M_{y\Phi} = M_{y1} \cdot \Phi, \dots$ и т. д., где M_{x1}, \dots, Q_{y1} – некоторые коэффициенты пропорциональности². Следовательно

$$M_x = M_{xp} + M_{x1}\Phi, \quad M_y = M_{yp} + M_{y1}\Phi, \dots \text{ и т. д.}$$

Чтобы выяснить физический смысл коэффициентов пропорциональности $M_{x1}, M_{y1}, \dots, Q_{y1}$, положим, что соответствующая искомого перемещению нагрузка в нашем случае в соответствии с теоремой Кастилиано – это сила $\Phi = 1$ Н. Тогда

$$M_{x\Phi} = M_{x1} \cdot 1 = M_{x1}, \quad M_{y\Phi} = M_{y1} \cdot 1, \dots \quad N_{\Phi} = N_1 \cdot 1, \dots \quad Q_{y\Phi} = Q_{y1} \cdot 1.$$

Учитывая размерность изгибающих и крутящих моментов – [Нм], продольных и поперечных сил – [Н], получаем, что коэффициенты пропорциональности по величине равны ВСФ от единичного нагружения, но имеют иную размерность: M_{x1}, M_{y1}, M_{k1} – [м], а N_1, Q_{x1}, Q_{y1} – величины безразмерные.

Для определения углового перемещения θ при изгибе или кручении в т. А потребуется приложить момент $\Phi = 1$ Нм. Тогда M_{x1}, M_{y1}, M_{k1} будут безразмерными, а $N_1, Q_{x1}, Q_{y1} = 0$, т. е. будут отсутствовать, т. к. момент – это самоуравновешенная пара сил.

В учебниках, например [1, 2], в отличие от требований теоремы Кастилиано, единичное нагружение полагают обобщённым и безразмерным. В этом случае указанные выше коэффициенты пропорциональности приобретают размерность соответствующих

² Обычно коэффициентами называют постоянные безразмерные величины. В нашем случае указанные коэффициенты пропорциональности являются множителями, которые могут иметь размерность и быть как постоянными, так и переменными величинами, т.е. зависящими от координаты z.

ВСФ и называются силовыми факторами от обобщённого единичного нагружения.

Т. о., выражение (18) для потенциальной энергии будет иметь вид:

$$U = \int_l \frac{(M_{xp} + M_{x1}\Phi)^2 dz}{2EI_x} + \dots + \int_l \frac{(M_{kp} + M_{k1}\Phi)^2 dz}{2GI_k} + \\ + \int_l \frac{(N_p + N_1\Phi)^2 dz}{2EF} + \dots + k_y \int_l \frac{(Q_{yp} + Q_{y1}\Phi)^2 dz}{2GF}.$$

Дифференцируя U по Φ и полагая $\Phi = 0$, получаем выражение для определения перемещений, называемое *интегралами Мора*:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=0} = \int_l \frac{M_{xp} M_{x1} dz}{EI_x} + \int_l \frac{M_{yp} M_{y1} dz}{EI_y} + \int_l \frac{M_{kp} M_{k1} dz}{GI_k} + \\ + \int_l \frac{N_p N_1 dz}{EF} + k_x \int_l \frac{Q_{xp} Q_{x1} dz}{GF} + k_y \int_l \frac{Q_{yp} Q_{y1} dz}{GF}. \quad (19)$$

Здесь при интегрировании и выборе числа слагаемых руководствуются такими же правилами, как и при вычислении потенциальной энергии упругой деформации системы.

Как и в теореме Кастилиано нагрузка Φ и перемещение δ являются обобщёнными. Это означает, что в зависимости от определяемого перемещения необходимо в заданной точке упругой системы³ прикладывать соответствующую единичную нагрузку:

– при растяжении-сжатии удлинению Δl соответствует осевая сила $N = 1$ Н;

– при изгибе прогибам f балки соответствует единичная поперечная сила $P = 1$ Н, а угловым перемещениям балки θ соответствует единичный изгибающий момент $M = 1$ Нм;

³ Это может быть любая конструкция из стержней, соединённых жёстко или шарнирно, а также достаточно длинные валы с круглым и некруглым поперечным сечением.

– при кручении, чтобы найти угол закручивания вала φ , необходимо приложить в заданном сечении вала единичный крутящий момент $M_k = 1$ Нм.

Порядок вычисления перемещений методом интегралов Мора.

1. Определяем количество участков нагружения и на каждом участке выбираем направление отсчёта осевых координат z_i .

2. Учитывая вид нагружения, методом сечений составляем для каждого участка необходимые выражения для ВСФ⁴ от внешних нагрузок в зависимости от выбранных координат z_i .

3. В заданном сечении упругой системы прикладываем единичную нагрузку, соответствующую искомому перемещению. Для каждого участка составляем выражения для коэффициентов пропорциональности – как ВСФ от единичного нагружения в зависимости от тех же координат z_i . Если заданное сечение делит какой-либо участок системы на две части, то для нового участка так же выбираем направление отсчёта координаты z и составляем аналогичные выражения для ВСФ от внешних нагрузок и единичного нагружения.

4. Подставляем все полученные выражения для ВСФ в интегралы Мора и вычисляем их, поочерёдно интегрируя в пределах каждого участка.

5. Если определяемое перемещение получается отрицательным, то его действительное направление противоположно направлению единичной нагрузки.

Необходимо отметить, что иной, более общий вид интегралов Мора, справедливый и для неупругих систем, приводится в [1].

Примеры решения задач методом интегралов Мора приведены в разделе II, задачи № 3-4...3-7.

⁴ Обычно это изгибающие моменты, за исключением задач, где действуют только крутящие моменты или осевые силы

3.3. Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)

Как и в теореме Кастилиано рассмотрим в качестве произвольного упругого тела консольно-закрепленную балку (рис. 11), нагружаемую силами P_1 и P_2 ⁵.

Нагрузим балку сначала силой P_1 в точке 1 и обозначим возникающие при этом перемещения в точках 1 и 2 через Δ_{11} и Δ_{21} . Затем нагрузим балку в т. 2 силой P_2 (рис. 11, а) и обозначим возникающие перемещения соответственно Δ_{12} и Δ_{22} . Тогда полную потенциальную энергию балки можно представить как сумму работ:

$$U_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12}.$$

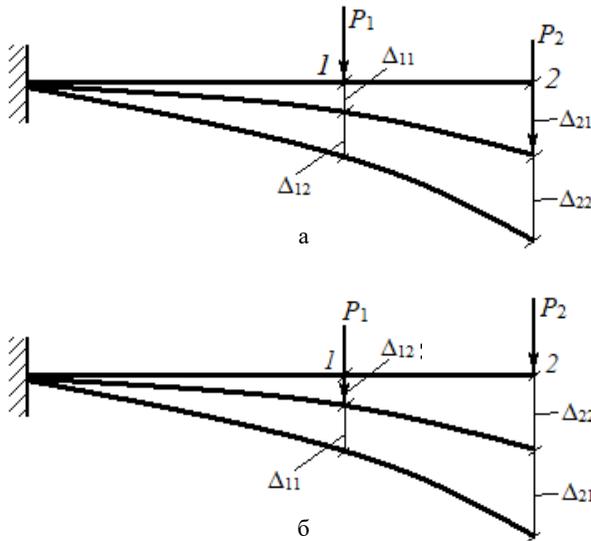


Рис. 11.

⁵ Для простоты здесь рассматривается нагружение балки двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2 , но в общем случае это могут быть две независимые группы различных сил, т.е. нагрузки P_1 и P_2 являются обобщенными.

Изменим порядок приложения сил. Приложим сначала силу P_2 и затем силу P_1 . Возникающие при этом перемещения в точках 1 и 2 обозначим соответственно Δ_{22} , Δ_{12} и Δ_{11} , Δ_{21} (рис. 11, б).

Энергия упругой деформации балки в этом случае будет равна:

$$U_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}.$$

Конечное состояние в обоих случаях одинаково и в соответствии с принципом независимости действия сил $U_1 = U_2$. После сокращения одинаковых величин получаем выражение теоремы о взаимности работ:

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}, \quad (20)$$

которая формулируется следующим образом:

Работа 1-й группы сил на перемещениях от 2-й группы сил равна работе 2-й группы сил на перемещениях от 1-й группы сил.

Заметим, что сила совершает работу только на соответствующем ей перемещении. Следовательно, 2-ю группу сил нужно подбирать в соответствии с определяемыми параметрами.

Частным случаем теоремы о взаимности работ является *теорема о взаимности перемещений*. Если принять в уравнении (20) $P_1 = P_2$, то получаем

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}, \quad (21)$$

и теорема формулируется следующим образом:

Сила, приложенная в точке 1, вызывает в точке 2 такое же перемещение, какое она вызвала бы в точке 1, будучи приложенной в точке 2.

Иллюстрация теоремы показана на рис. 12.

Использование теоремы о взаимности перемещений позволяет уменьшить объём вычислений, например, при расчёте статически неопределимых рам.

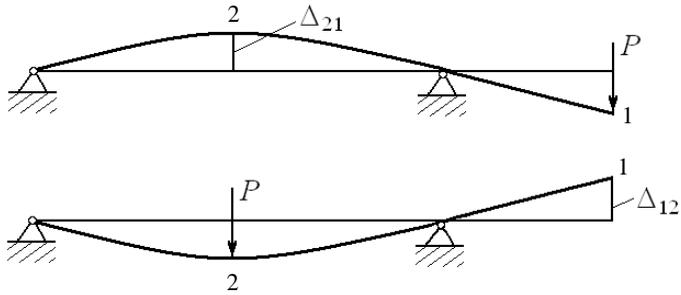


Рис. 12.

Теорема о взаимности работ позволяет получать решение сложных задач простыми средствами (см., например, интересную задачу об изменении объёма тела произвольной формы под действием двух одинаковых сосредоточенных сил в [1], с. 214).

Задача на применение теоремы приводится в разделе II, задача № 3-8, с. 87.

II. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач все расчёты проводятся в системе СИ с учётом порядка степеней используемых величин: $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$, $1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$, $1 \text{ мм}^2 = 10^{-6} \text{ м}^2$.

Определение перемещений деталей типа стержень нужно начинать с определения реакций опор, которые в дальнейшем учитывают вместе со всеми внешними нагрузками.

1. Определение перемещений стержневых систем методом непосредственного интегрирования

1.1. Задачи на растяжение-сжатие и кручение

Задача № 1-1

Исходные данные: стержень (рис. 13), нагружен силами $P_1 = 40 \text{ кН}$, $P_2 = 30 \text{ кН}$ и $P_3 = 10 \text{ кН}$. Длина участков стержня $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2 \text{ м}$; площадь поперечных сечений $A_1 = 200 \text{ мм}^2$, $A_2 = 400 \text{ мм}^2$. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

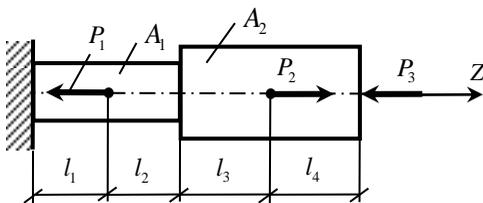


Рис.13.

Требуется: определить и построить эпюры N , σ , ε и Δl .

Решение

1. Составляем расчётную схему стержня: удаляем опору и заменяем её действие реакцией A , направленной на растяжение стержня (рис. 14). Под расчётной схемой выделяем место для построения эпюр искомых характеристик.

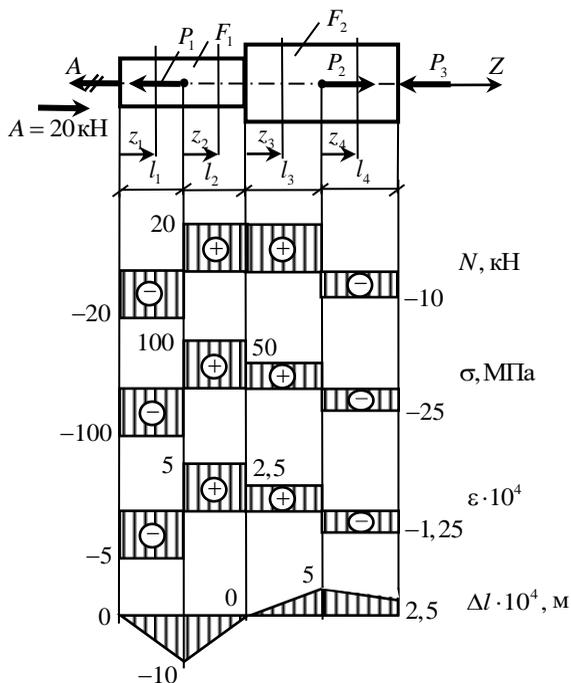


Рис. 14.

2. Для определения реакции A составляем уравнение равновесия стержня, из которого находим величину A :

$$\sum Z = 0, \quad -A - P_1 + P_2 - P_3 = 0$$

$$A = -P_1 + P_2 - P_3 = -40 + 30 - 10 = -20 \text{ кН.}$$

Так как величина реакции A оказалась отрицательной, её действительное направление противоположно указанному на расчётной схеме. После изменения направления реакции A , она становится сжимающей и должна учитываться со знаком « \leftarrow ».

3. Для того, чтобы найти распределение сил N по длине стержня, выбираем на каждом участке расчётной схемы стержня местную систему отсчёта координаты z : z_1, z_2, z_3 и z_4 (рис. 14).

4. Используя метод сечений, составляем выражения для сил $N(z_i)$ и проводим расчёты.

$$N(z_1) = -A = -20 \text{ кН},$$

$$N(z_2) = -A + P_1 = -20 + 40 = 20 \text{ кН},$$

$$N(z_3) = -A + P_1 = -20 + 40 = 20 \text{ кН},$$

$$N(z_4) = -A + P_1 - P_2 = -20 + 40 - 30 = -10 \text{ кН}.$$

Эпюру N строим в масштабе под расчётной схемой (рис. 14, N). Полученные скачки на эпюре N обусловлены действием сил P_1 и P_2 . Расчёты показывают, что продольные силы N_i на участках от координат z_i не зависят, т. е. в пределах каждого участка являются постоянными. Следовательно, напряжения σ_i и деформации относительного удлинения ε_i в пределах участков тоже будут постоянными, не зависящими от координат z_i .

5. Определяем напряжения по формуле $\sigma = N/A$:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-20 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^{-6}} = -100 \cdot 10^6 \text{ Па} = -100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^{-6}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^{-6}} = 50 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50 \text{ МПа},$$

$$\sigma_4 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^{-6}} = -25 \cdot 10^6 \text{ Па} = -25 \text{ МПа}.$$

Эпюру $\sigma(z)$ строим в масштабе под эпюрой N (рис. 14, σ). Из-за разности величин площадей A_1 и A_2 напряжения на границе между вторым и третьим участками изменяются скачкообразно.

6. На основе закона Гука определяем деформации относительного удлинения по формуле $\varepsilon = \sigma/E$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{-100}{2 \cdot 10^5} = -5 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{100}{2 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} = \frac{50}{2 \cdot 10^5} = 2,5 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\sigma_4}{E} = \frac{-25}{2 \cdot 10^5} = -1,25 \cdot 10^{-4}.$$

Эпюру $\varepsilon(z)$ строим в масштабе под эпюрой $\sigma(z)$ (рис. 14, ε). Скачки на эпюре ε обусловлены скачками на эпюре σ .

7. Определяем абсолютные удлинения – перемещения участков стержня по формуле $\Delta l(z) = \int \frac{N}{EF} dz = \int \varepsilon dz$. При этом учитываем, что перемещения каждого следующего участка, начиная со второго, состоят из перемещений предыдущего участка и собственных перемещений.

$$\Delta l(z_1) = \int_0^{l_1} \varepsilon_1 dz = \varepsilon_1 \cdot z_1 \Big|_0^{l_1} = -5 \cdot 10^{-4} \cdot z_1 \Big|_0^{2\text{м}} = \begin{cases} -10 \cdot 10^{-4} \text{ м} & \text{при } z_1 = 2\text{ м;} \\ 0 & \text{при } z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\Delta l(z_2) = \Delta l_1 + \int_0^{l_2} \varepsilon_2 dz = \Delta l_1 + \varepsilon_2 \cdot z_2 \Big|_0^{l_2} =$$

$$= -10 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot z_2 \Big|_0^{2\text{м}} = \begin{cases} 0 & \text{при } z_2 = 2\text{ м;} \\ -10 \cdot 10^{-4} \text{ м} & \text{при } z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\Delta l(z_3) = \Delta l_2 + \int_0^{l_3} \varepsilon_3 dz = \Delta l_2 + \varepsilon_3 \cdot z_3 \Big|_0^{l_3} =$$

$$= 0 + 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot z_3 \Big|_0^{2\text{м}} = \begin{cases} 5 \cdot 10^{-4} \text{ м} & \text{при } z_3 = 2\text{ м;} \\ 0 & \text{при } z_3 = 0, \end{cases}$$

$$\Delta l(z_4) = \Delta l_3 + \int_0^{l_4} \varepsilon_4 dz = \Delta l_3 + \varepsilon_4 \cdot z_4 \Big|_0^{l_4} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-4} - 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot z_4 \Big|_0^{2\text{м}} = \begin{cases} 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} & \text{при } z_4 = 2\text{ м.} \\ 5 \cdot 10^{-4} \text{ м} & \text{при } z_4 = 0, \end{cases}$$

Задача № 1-2

Исходные данные: стержень (рис. 15) нагружен силой P и распределённой нагрузкой $q = P/l$. Параметр длины стержня l , площадь поперечных сечений $A_1 = A$, $A_2 = 2A$, модуль упругости материала стержня E .

Требуется: определить внутренние силовые факторы N и удлинение Δl стержня.

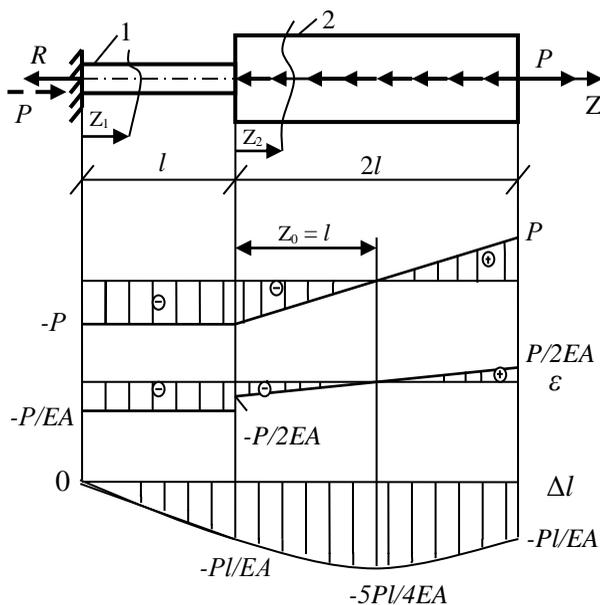


Рис. 15.

Решение

1. Определяем реакцию опоры стержня. Для этого удаляем (условно) опору, а её действие заменяем неизвестной реакцией R (рис. 15). Составляем уравнение равновесия стержня:

$$\sum Z = 0, \quad -R - q \cdot 2l + P = 0.$$

Решая уравнение, находим: $R = P - q \cdot 2l = -P$.

Следовательно, направление силы A противоположно указанному на рис. 15.

2. Составляем выражения для осевых сил $N(z)$:

$$N(z_1) = -R = -P;$$

$$N(z_2) = -P + q \cdot z = -P + \frac{P}{l} \cdot z = -P \left(1 - \frac{z}{l}\right) = \begin{cases} P, & \text{при } z = 2l \\ -P, & \text{при } z = 0 \end{cases}$$

3. Составляем выражения для линейных относительных деформаций:

$$\varepsilon(z_1) = -\frac{P}{EA}, \quad \varepsilon(z_2) = \frac{-P + q \cdot z}{E \cdot 2A} = \frac{-P}{2EA} \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

4. Определяем перемещения стержня на границах участков:

$$\begin{aligned} \Delta l(z_1) &= \int_0^l \varepsilon_1 dz = \int_0^l \frac{-P}{EA} dz = \left. \frac{-P \cdot z}{EA} \right|_0^l = \left. \frac{\frac{P \cdot l}{EA}}{EA} \right|_0^l, \\ \Delta l(z_2) &= \Delta l_1 + \int_0^l \varepsilon_2 dz = \Delta l_1 + \int_0^l \frac{-P}{2EA} \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz = \\ &= -\frac{P \cdot l}{EA} - \frac{P}{2EA} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) \Big|_0^{2l} = \left. \frac{\frac{P \cdot l}{EA}}{\frac{P \cdot l}{EA}} \right|_0^{2l}. \end{aligned}$$

5. Определение экстремальной величины перемещения стержня:

$$\begin{aligned} N(z_0) = -P + q \cdot z = 0, \quad \rightarrow \quad z_0 = \frac{P}{q} = \frac{P}{P/l} = l, \\ \Delta l(z_0) = -\frac{P \cdot l}{EA} - \frac{P}{2EA} \left(l - \frac{(l)^2}{2l}\right) = -\frac{5Pl}{4EA}. \end{aligned}$$

Задача № 1-3

Исходные данные: вал (рис. 16) нагружен крутящим моментом M и распределённым крутящим моментом $m = M/l$. Модуль упругости материала G , полярные моменты инерции поперечных сечений $I_{p1} = I_p$, $I_{p2} = 2I_p$ и длина вала пропорциональна l .

Требуется: определить внутренние силовые факторы M_k и углы закручивания вала $\Delta\varphi$.

(Исходные данные этой задачи выбраны по аналогии с задачей на растяжение, чтобы показать аналогию при решении обеих задач. Аналогами являются: $M_k \rightarrow N$, $GI_p \rightarrow EA$, $\theta \rightarrow \varepsilon$ и $\Delta\varphi \rightarrow \Delta l$.)

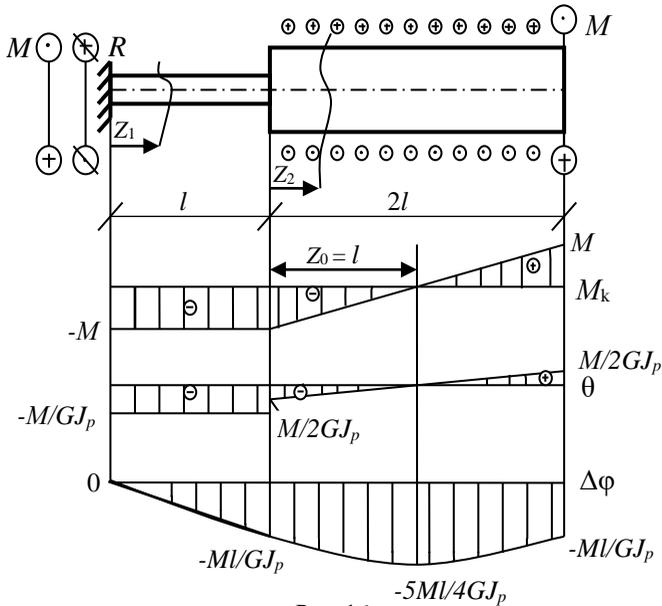


Рис. 16.

Решение

1. Определяем реакцию опоры вала. Для этого удаляем (условно) опору, а её действие заменяем неизвестной реакцией R (рис. 16). Составляем уравнение равновесия вала:

$$\sum Z = 0, \quad -R - m \cdot 2l + M = 0.$$

Решая уравнение, находим: $R = M - m \cdot 2l = -M$. Следовательно, направление R противоположно указанному на рис. 16. Изменяем направление реакции опоры.

2. Составляем выражения для крутящих моментов $M_k(z)$:

$$M_k(z_1) = -A = -M;$$

$$M_k(z_2) = -P + m \cdot z = -M + \frac{M}{l} \cdot z = -M \left(1 - \frac{z}{l}\right) = \begin{cases} M, & \text{при } z = 2l \\ -M, & \text{при } z = 0 \end{cases}$$

3. Составляем выражения для относительных углов закручивания поперечных сечений вала:

$$\theta(z_1) = -\frac{M}{GI_p}, \quad \theta(z_2) = \frac{-M + m \cdot z}{G \cdot 2I_p} = \frac{-M}{2GI_p} \left(1 - \frac{z}{l}\right).$$

4. Определяем угловые перемещения вала на границах участков:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(z_1) &= \int_0^l \theta_1 dz = \int_0^l \frac{-M}{GI_p} dz = \left. \frac{-M \cdot z}{GI_p} \right|_0^l = \left. \frac{\frac{M \cdot l}{GI_p}}{0} \right|_0^l, \\ \Delta\varphi(z_2) &= \Delta\varphi_1 + \int_0^l \theta_2 dz = \Delta\varphi_1 + \int_0^l \frac{-M}{2GI_p} \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz = \\ &= -\frac{M \cdot l}{GI_p} - \frac{M}{2GI_p} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right) \Big|_0^{2l} = \left. \frac{\frac{M \cdot l}{GI_p}}{\frac{M \cdot l}{GI_p}} \right|_0^{2l}. \end{aligned}$$

5. Определение экстремальной величины перемещения вала:

$$\begin{aligned} M_k(z_0) = -M + m \cdot z = 0, \quad \rightarrow \quad z_0 = \frac{M}{m} = \frac{M}{M/l} = l, \\ \Delta\varphi(z_0) = -\frac{M \cdot l}{GI_p} - \frac{M}{2GI_p} \left(l - \frac{l^2}{2l}\right) = -\frac{5Ml}{4GI_p}. \end{aligned}$$

Решения задач № 1-2 и 1-3 показывают, что методики решения задач на растяжение-сжатие и на кручение одинаковы.

1.2. Определение перемещений балок при изгибе методом непосредственного интегрирования

Решения задач № 2-6 и 2-7 для наглядности применения местной и сквозной систем координат приведены полностью с определением внутренних силовых факторов и построением эпюр Q и M , а также перемещений в заданных сечениях балок.

Задача № 1-4

Исходные данные: консольно закреплённая балка (рис. 17) с жёсткостью на изгиб $EI = const$ и длиной l нагружена силой P .

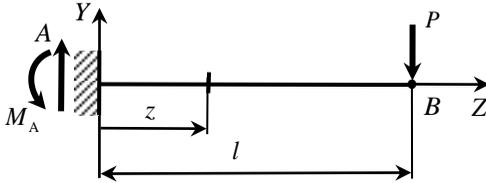


Рис. 17.

Требуется: определить максимальные прогиб балки y_{max} и угол поворота поперечных сечений θ_{max} .

Решение

1. В жёстком защемлении в соответствии с рис. 17 при отсутствии продольных сил возникают реакции опоры A и M_A , величину которых определяем из условий равновесия балки:

$$\begin{aligned}\sum Y = 0, \quad A - P = 0 &\rightarrow A = P, \\ \sum M_B = 0, \quad P \cdot l - M_A = 0 &\rightarrow M_A = P \cdot l.\end{aligned}$$

2. Составляем выражение для изгибающих моментов и дифференциальное уравнение упругой оси балки:

$$M(z) = A \cdot z - M_A = P \cdot (z - l),$$

$$y'' = \frac{M(z)}{EI} = \frac{P}{EI}(z - l).$$

3. Интегрируя дифференциальное уравнение, получим выражения для углов поворота поперечных сечений и прогибов оси балки. Учитывая, что величины F и EI постоянные, при интегрировании выносим их за знак интеграла:

$$\theta(z) = \int \frac{P}{EI}(z - l) dz = \frac{P}{EI} \int (z - l) dz = \frac{P}{EI} \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) + C_1;$$

$$y(z) = \frac{P}{EI} \int \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) dz + \int C_1 dz = \frac{P}{EI} \left(\frac{z^3}{6} - l \frac{z^2}{2} \right) + C_1 z + C_2.$$

4. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из граничных условий закрепления балки. В соответствии с

таблицей 1 (с. 10, первая строка) в заделке при $z = 0$ поворот сечений и прогибы балки отсутствуют:

$$\text{при } z = 0 \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

В результате получаем:

$$\theta(0) = C_1 = 0, \quad y(0) = C_2 = 0.$$

5. Окончательные выражения для перемещений балки:

$$\theta(z) = \frac{P}{EI} \left(\frac{z^2}{2} - lz \right), \quad y(z) = \frac{P}{EI} \left(\frac{z^3}{6} - l \frac{z^2}{2} \right).$$

6. Полученные выражения показывают, что перемещения $\theta(z)$ и $y(z)$ отрицательные и при увеличении координаты z они увеличиваются и наибольшие их значения находятся в точке B при $z = l$:

$$\theta_B = \theta(l) = \frac{P}{EI} \left(\frac{l^2}{2} - l^2 \right) = -\frac{Pl^2}{2EI}, \quad y_B(l) = \frac{P}{EI} \left(\frac{l^3}{6} - l \frac{l^2}{2} \right) = -\frac{Pl^3}{3EI}.$$

Знак « \rightarrow » означает, что перемещения направлены в отрицательных направлениях: θ_B – по направлению движения часовой стрелки, y_B – вниз, против направления оси Y .

Задача № 1-5

Исходные данные: балка, закреплённая на двух шарнирных опорах, нагружена распределённой поперечной нагрузкой q (рис. 18).

Длина балки l , жёсткость на изгиб $EI = const$. Требуется: определить прогиб балки при $z = l/2$ и угол поворота на правой опоре B .

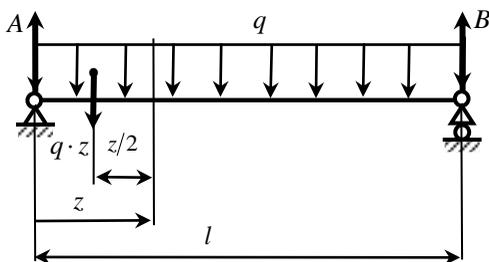


Рис. 18.

Решение

1. Выбираем положительное направление реакций опор A и B и составляем уравнения равновесия, учитывая, что

равнодействующая поперечная сила от распределённой нагрузки q направлена вниз, равна $Q = ql$ и расположена посередине длины l :

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0, & A - ql + B &= 0, \\ \sum M_B &= 0, & A \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему из двух уравнений, находим реакции A и B :

$$A = \frac{ql^2}{l \cdot 2} = \frac{ql}{2}, \quad B = ql - A = ql - \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2}.$$

2. Балка с одним участком длиной l . Отсекаем координатой z часть балки (рис. 18) и методом сечений – из условия равновесия отсечённой части определяем изгибающий момент $M(z)$. Для этого выделяем нагрузки, действующие на отсечённый участок балки: $A = q \cdot l / 2$ и равнодействующую силу qz , приложенную посередине участка длиной z и направленную вниз (рис. 18).

Для определения $M(z)$ находим сумму моментов: от реакции A это $A \cdot z$, направленный вверх, и от равнодействующей силы qz относительно сечения z момент $qz \cdot z / 2 = qz^2 / 2$, действующий вниз:

$$M(z) = A \cdot z - q \frac{z^2}{2} = \frac{ql}{2} \cdot z - q \frac{z^2}{2} = \frac{q}{2} (lz - z^2).$$

3. Для определения заданных перемещений подставляем выражение для момента $M(z)$ в дифференциальное уравнение (3):

$$y'' = \frac{M(z)}{EI} = \frac{q}{2EI} (lz - z^2).$$

4. Интегрируя дифференциальное уравнение, получим выражения для углов поворота поперечных сечений и прогибов оси балки. При этом учтём, что величины q и EI постоянные.

$$\theta(z) = \int \frac{q}{2EI} (lz - z^2) dz = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + C_1,$$

$$y(z) = \frac{q}{2EI} \int \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) dz + \int C_1 dz = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + C_1 z + C_2.$$

5. В соответствии с табл. 1 граничных условий (с. 10, вторая строка) составляем граничные условия и определяем C_1 и C_2 :

$$\text{при } z = 0 \quad y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad y(0) = C_2 = 0,$$

$$\text{при } z = l \quad y(l) = 0 \quad \rightarrow \quad y(l) = \frac{q}{2EI} \left(\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} \right) + C_1 l = 0.$$

$$\text{Из второго условия получаем: } C_1 = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

6. Подставляя значения C_1 и C_2 в выражения перемещений, получаем в окончательном виде выражения для углов поворота и прогибов балки:

$$\theta(z) = -\frac{q}{24EI} (l^3 - 6lz^2 + 4z^3), \quad y(z) = -\frac{q}{24EI} (l^3 z - 2lz^3 + z^4).$$

7. Требуемые перемещения получим при $z = l/2$ и $z = l$:

$$\theta_B(l) = \frac{ql^3}{24EI}, \text{ рад,} \quad y(l/2) = -\frac{5ql^4}{384EI}, \text{ м.}$$

Для сравнения: решение этой задачи методом начальных параметров приведено в задаче № 5.

Задача № 1-6

Исходные данные: балка с постоянной жёсткостью на изгиб $EI = const$, длиной $3l$ опирается на две шарнирные опоры и нагружена моментом $M = P \cdot l$ (рис. 19).

Требуется:
определить угол поворота и прогиб балки в сечении, где приложен момент M .

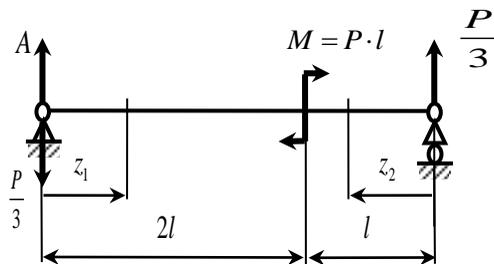


Рис. 19.

Решение

1. Выбираем положительное направление реакций опор A и B и составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0, & A + B &= 0, \\ \sum M_B &= 0, & A \cdot 3l + M &= 0.\end{aligned}$$

Решая систему из двух уравнений, находим реакции A и B :

$$A = -\frac{M}{3l} = -\frac{Pl}{3l} = -\frac{P}{3}, \quad B = -A = \frac{P}{3}.$$

Реакция A получилась отрицательной, поэтому изменяем её направление на противоположное.

2. Для определения перемещений балки составляем выражения моментов $M(z)$ в пределах каждого участка балки:

$$M(z_1) = -\frac{P}{3} \cdot z_1, \quad M(z_2) = \frac{P}{3} \cdot z_2.$$

3. Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид:

$$y_1'' = -\frac{P}{3EI} z_1, \quad y_2'' = \frac{P}{3EI} z_2.$$

4. После двукратного интегрирования уравнений получаем:

$$\begin{aligned}\theta_1(z_1) &= -\frac{P}{6EI} z_1^2 + C_1, & \theta_2(z_2) &= \frac{P}{6EI} z_2^2 + C_3, \\ y_1(z_1) &= -\frac{P}{18EI} z_1^3 + C_1 z_1 + C_2, & y_2(z_2) &= \frac{P}{18EI} z_2^3 + C_3 z_2 + C_4.\end{aligned}$$

5. Для определения постоянных интегрирования C_i составляем граничные условия (ГУ) – прогибы балки на опорах отсутствуют (табл. 1, с. 10, вторая строка), и условия совместности деформаций (УСД) – на границе между 1-м и 2-м участками балки угловые θ и линейные перемещения y одинаковы:

$$\begin{aligned}\text{ГУ: при } z_1 = 0 & \quad y_1(0) = 0, \\ & \quad z_2 = 0 \quad y_2(0) = 0. \\ \text{УСД: при } z_1 = 2l, & \quad \theta_1(2l) = -\theta_2(l),\end{aligned}$$

$$z_2 = l, \quad y_1(2l) = y_2(l).$$

Здесь $\theta_2(l)$ определяется со знаком «-», т. к. на втором участке используется левосторонняя система, т.е. направление координаты z_2 противоположно координате z_1 .

6. Из граничных условий получаем:

$$y_1(0) = C_2 = 0, \quad y_2(0) = C_4 = 0.$$

Из условий совместности деформаций, учитывая, что $C_2 = 0$ и $C_4 = 0$, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{P}{6EI}(2l)^2 + C_1 &= -\frac{P}{6EI}l^2 - C_3, \\ \frac{P}{18EI}(2l)^3 + C_3 \cdot 2l &= \frac{P}{18EI}l^3 + C_1 \cdot l. \end{aligned}$$

Решив систему, находим:

$$C_1 = \frac{Pl^2}{3EI}, \quad C_3 = \frac{Pl^2}{6EI}.$$

7. В результате получаем следующие уравнения для определения перемещений балки:

для 1-го участка

$$\theta_1(z_1) = \frac{P}{6EI}(2l^2 - z_1^2), \quad y_1(z_1) = \frac{P}{18EI}(6l^2 z_1 - z_1^3);$$

для 2-го участка

$$\theta_2(z_2) = \frac{P}{6EI}(l^2 + z_2^2), \quad y_2(z_2) = \frac{P}{18EI}(3l^2 z_2 + z_2^3).$$

8. Подставив в уравнения для 1-го участка $z_1 = 2l$, получаем искомые угол поворота и прогиб балки:

$$\begin{aligned} \theta(2l) &= \frac{P}{6EI} [2l^2 - (2l)^2] = -\frac{Pl^2}{3EI}, \\ y(2l) &= \frac{P}{18EI} (6l^2 \cdot 2l - (2l)^3) = \frac{2Pl^3}{9EI}. \end{aligned}$$

2. Определение перемещений балок методом начальных параметров

2.1. Балки без линейно-изменяющихся нагрузок

В этом случае перемещения балок будем определять на основе уравнений (8) и (9).

Задача № 2-1

Исходные данные: консольно закреплённая балка (рис. 20) длиной l и жёсткостью на изгиб $EI = const$ нагружена силой P .

(Эта задача является повторением задачи № 1-4, с. 42).

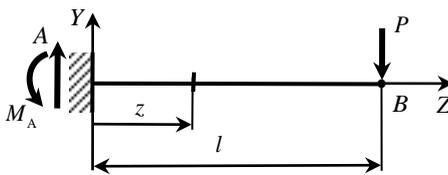


Рис. 20.

Требуется: определить максимальные прогибы балки y_{max} и углы поворота поперечных сечений θ_{max} .

Решение

1. В жёстком защемлении в соответствии с рис. 11 при отсутствии продольных сил возникают реакции опоры A и M_A , величину которых определяем из условий равновесия балки:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0, \quad A - P = 0 & \rightarrow A = P, \\ \sum M_A = 0, \quad P \cdot l - M_A = 0 & \rightarrow M_A = Pl. \end{aligned}$$

Здесь положительные значения реакций опоры подтверждают указанные на расчётной схеме направления их действия. Но момент M_A изгибает балку вниз, поэтому в расчётах перемещений балки его учитывают со знаком «-».

2. На основе уравнений (8) и (9) составляем уравнения перемещений $y(z)$ и $\theta(z)$:

$$\begin{aligned}
y(z) &= y_0|_{z>0} + \theta_0 \cdot z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -M_A \frac{(z-0)^2}{2!} \Big|_{z>0} + A \frac{(z-0)^3}{3!} \Big|_{z>0} \right\} = \\
&= y_0|_{z>0} + \theta_0 \cdot z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -Pl \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} + P \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} \right\}. \\
\theta(z) &= \theta_0|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -M_A (z-0) \Big|_{z>0} + A \frac{(z-0)^2}{2} \Big|_{z>0} \right\} = \\
&= \theta_0|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -Pl \cdot z \Big|_{z>0} + P \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} \right\},
\end{aligned}$$

В этих выражениях здесь и ниже в других задачах первые строки с общими наименованиями нагрузок – реакций опор M_A и A приведены в методических целях и в расчётах можно сразу указывать реальные значения нагрузок. Также в выражениях при $z > 0$ не обязательно указывать вычитание нуля.

3. Для определения констант интегрирования θ_0 и y_0 составляем граничные условия – на опоре в жёстком закреплении углы поворота θ и прогибы y балки отсутствуют (в табл. 1, с. 10, первая строка). Из граничных условий получаем:

$$\begin{aligned}
\theta(0) = 0 &\quad \rightarrow \quad \theta(0) = \theta_0 = 0, \\
y(0) = 0 &\quad \rightarrow \quad y(0) = y_0 = 0.
\end{aligned}$$

4. Окончательные выражения для перемещений балки:

$$\begin{aligned}
y(z) &= \frac{1}{EI} \left\{ -Pl \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} + P \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} \right\} = -\frac{P}{6EI} (3l \cdot z^2 - z^3) \Big|_{z>0}, \\
\theta(z) &= \frac{1}{EI} \left\{ -Pl \cdot z \Big|_{z>0} + P \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} \right\} = -\frac{P}{2EI} (2l \cdot z - z^2) \Big|_{z>0}.
\end{aligned}$$

5. Наибольшие значения перемещений находятся в точке B при $z = l$:

$$y_B(l) = -\frac{Pl^3}{3EI_x}, \quad \theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI_x}.$$

Задача № 2-2

Исходные данные: балка, закреплённая на двух шарнирных опорах, нагружена распределенной поперечной нагрузкой q (рис. 21). Длина балки l , жесткость балки на изгиб $EI = const$. (Задача является повторением задачи № 1-5, с. 43).

Требуется: определить перемещения: угол поворота на правой опоре при $z = l$ и прогиб посередине балки при $z = l/2$.

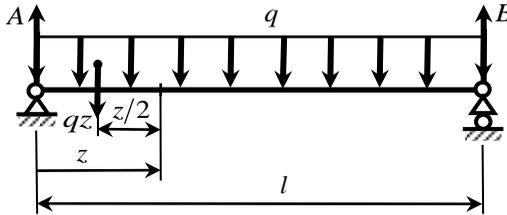


Рис. 21.

Решение

1. Показываем реакции опор A и B (рис. 21), которые определяем из условий равновесия балки:

$$\sum Y = 0, \quad A - q \cdot l + B = 0,$$

$$\sum M_B = 0, \quad A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, \quad \rightarrow \quad A = \frac{ql}{2}, \quad B = \frac{ql}{2}.$$

2. На основе уравнения (8) составляем уравнение для линейных перемещений $y(z)$:

$$\begin{aligned} y(z) &= y_0|_{z>0} + \theta_0 \cdot z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ A \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} - q \frac{z^4}{4!} \Big|_{z>0} \right\} = \\ &= y_0|_{z>0} + \theta_0 \cdot z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{ql}{2} \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \right\} \Big|_{z>0} = \\ &= y_0|_{z>0} + \theta_0 \cdot z|_{z>0} + \frac{qz^3}{24EI} (2l - z) \Big|_{z>0}. \end{aligned}$$

Уравнение для $\theta(z)$ получим, продифференцировав предпоследнее выражение $y(z)$:

$$\theta(z) = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ \frac{ql}{2} \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} - q \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} \right\} = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{q \cdot z^2}{12EI} (3l - 2z) \Big|_{z>0}.$$

3. В соответствии с табл. 1 (с. 10, вторая строка) составляем граничные условия и определяем y_0 и θ_0 :

$$\text{при } z = 0 \quad y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad y(0) = y_0 = 0,$$

$$\text{при } z = l \quad y(l) = 0 \quad \rightarrow \quad y(l) = \theta_0 \cdot l + \frac{ql^4}{24EI} = 0.$$

$$\text{Из второго условия получаем: } \theta_0 = -\frac{ql^3}{24EI}.$$

4. Подставляя значения θ_0 и y_0 в выражения перемещений, получаем в окончательном виде прогибы и углы поворота балки:

$$y(z) = -\frac{q}{24EI} (l^3 z - 2lz^3 + z^4) \Big|_{z>0}, \quad \theta(z) = -\frac{q}{24EI} (l^3 - 6lz^2 + 4z^3) \Big|_{z>0}.$$

5. Требуемые перемещения получим при $z = l/2$ и $z = l$:

$$y(l/2) = -\frac{5ql^4}{384EI}, \quad \theta_B(l) = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Задача № 2-3

Исходные данные: балка – жёстко закреплённая консоль, нагружена силой P , моментом $M = 2P \cdot l$ и распределённой нагрузкой $q = P/l$ (рис. 22, а). Параметр длины балки l , жёсткость балки на изгиб $EI = const$.

Требуется: построить эпюры Q и M , а также определить перемещения: угол поворота при $z = 4l$ и прогибы балки при $z = 5l$.

Решение

При определении внутренних силовых факторов (ВСФ) для консольных балок не обязательно составлять уравнения равновесия и определять реакции опоры. Все ВСФ можно определять сразу, если начинать их определение при выборе отсчёта координат z_i от свободного незакреплённого конца.

1. Выбираем направления местных координат $z_1 \dots z_3$ от свободного – незакреплённого конца к опоре (рис. 22, а).

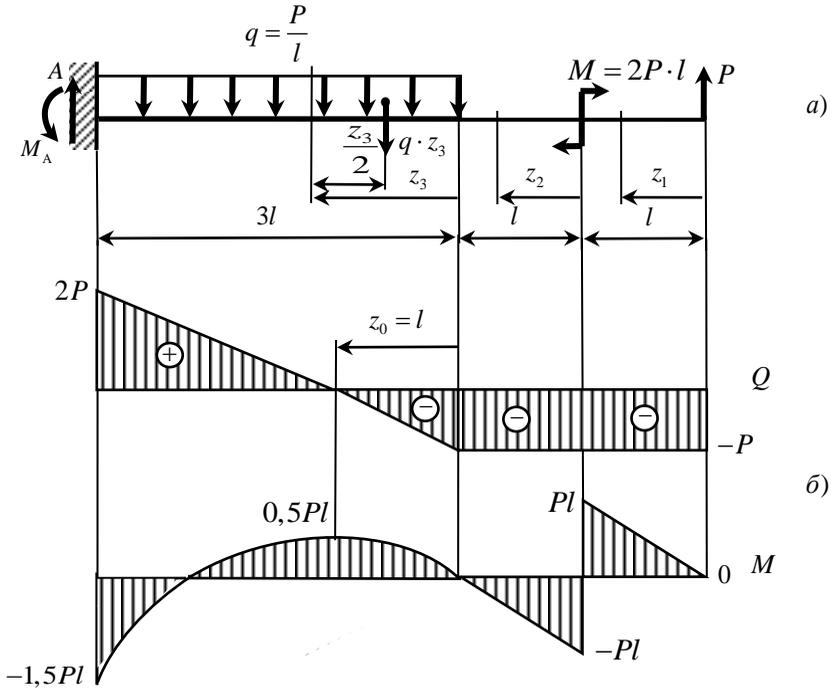


Рис. 22.

2. Методом сечений (из условий равновесия отсекаемых частей балки) определяем поперечные силы Q . Для этого определяем сумму проекций на ось Y всех нагрузок, которые действуют на отсечённые участки справа относительно сечений $z_1 \dots z_3$ и, учитывая правила знаков Q , получаем:

$$Q(z_1) = -P, \quad Q(z_2) = -P, \quad Q(z_3) = -P + q \cdot z_3 \Big|_0^{3l} = \begin{cases} 2P & \text{при } z_3 = 3l, \\ -P & \text{при } z_3 = 0. \end{cases}$$

3. На третьем участке $Q(z_3)$ изменяет знак с « \leftarrow » на « \rightarrow » (рис. 22). Координату особой точки z_0 определяем из условия:

$$Q(z_3) = -P + q \cdot z_0 = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = \frac{P}{q} = \frac{P}{\frac{P}{l}} = l.$$

4. Для определения изгибающих моментов M аналогично методом сечений составляем выражения моментов от нагрузок, действующих справа относительно сечений $z_1 \dots z_3$:

$$M(z_1) = P \cdot z_1 \Big|_0^l = \begin{cases} Pl & \text{при } z_1 = l, \\ 0 & \text{при } z_1 = 0, \end{cases}$$

$$M(z_2) = P \cdot (l + z_2) \Big|_0^l - M = P \cdot (l + z_2) \Big|_0^l - 2Pl = \begin{cases} 0 & \text{при } z_2 = l, \\ -Pl & \text{при } z_2 = 0, \end{cases}$$

$$M(z_3) = P(2l + z_3) \Big|_0^{3l} - M - qz_3 \frac{z_3}{2} \Big|_0^{3l} = P(2l + z_3) \Big|_0^{3l} - 2Pl - q \frac{z_3^2}{2} \Big|_0^{3l} = \\ = \begin{cases} -1,5Pl & \text{при } z_3 = 3l, \\ 0 & \text{при } z_3 = 0. \end{cases}$$

5. Определяем экстремальное значение момента $M_{\max} = M(z_0)$:

$$M(z_0) = P \cdot (2l + z_0) - 2Pl - q \frac{z_0^2}{2} = P \cdot (2l + l) - 2Pl - \frac{P l^2}{l \cdot 2} = \frac{Pl}{2}.$$

Соответствующие эпюры Q и M показаны на рис. 22, б. Полученные значения Q и M на опоре определяют реакции опоры: $A = 2P$, $M_A = -1,5Pl$. Эти реакции необходимы для определения перемещений балки.

6. Если эпюры Q и M строить не требуется, то для определения перемещений балки необходимые реакции опоры определяют из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0, \quad A - q \cdot 3l + P = 0, & \quad \rightarrow \quad A = 2P, \\ \sum M_A = 0, \quad M_A - q \cdot 3l \cdot 1,5l - M + P \cdot 5l = 0, & \quad \rightarrow \quad M_A = 1,5Pl. \end{aligned}$$

Здесь положительные значения реакций опоры подтверждают указанные на расчётной схеме направления их действия. Но момент M_A изгибает балку вниз, поэтому в расчётах его учитывают со знаком «←».

7. На основе уравнения (8) составляем уравнение для прогибов балки $y(z)$:

$$y(z) = y_0 \Big|_{z>0} + \theta_0 \cdot z \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -1,5Pl \cdot \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} + 2P \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} - q \frac{z^4}{4!} \Big|_{z>0} + \right. \\ \left. + q \frac{(z-3l)^4}{4!} \Big|_{z>3l} + 2Pl \frac{(z-4l)^2}{2!} \Big|_{z>4l} \right\}.$$

Продифференцировав $y(z)$, получаем уравнение для $\theta(z)$:

$$\theta(z) = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -1,5Pl \cdot z \Big|_{z>0} + 2P \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} - q \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} + \right. \\ \left. + q \frac{(z-3l)^3}{3!} \Big|_{z>3l} + 2Pl(z-4l) \Big|_{z>4l} \right\}.$$

8. Для определения θ_0 и y_0 составляем граничные условия – в жёстком заземлении углы поворота θ и прогибы y балки отсутствуют (табл. 1, с. 10, первая строка):

$$\begin{aligned} \theta(0) = 0 &\rightarrow \theta(0) = \theta_0 = 0, \\ y(0) = 0 &\rightarrow y(0) = y_0 = 0. \end{aligned}$$

9. Окончательные выражения для углов поворота и прогибов балки после подстановки значений q :

$$y(z) = \frac{P}{EI} \left\{ -1,5l \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} + 2 \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} - \frac{z^4}{4! \cdot l} \Big|_{z>0} + \frac{(z-3l)^4}{4! \cdot l} \Big|_{z>3l} + \right. \\ \left. + 2l \frac{(z-4l)^2}{2!} \Big|_{z>4l} \right\},$$

$$\theta(z) = \frac{P}{EI} \left\{ -1,5lz \Big|_{z>0} + 2 \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} - \frac{z^3}{3! \cdot l} \Big|_{z>0} + \frac{(z-3l)^3}{3! \cdot l} \Big|_{z>3l} + 2l(z-4l) \Big|_{z>4l} \right\}.$$

10. Определяем перемещения балки в заданных сечениях. При вычислении перемещений в сечении с заданной координатой $z_i = 5l$ или $4l$ (рис. 22, а), учитывают только те слагаемые, которые попадают в интервал $(0 - z_i)$:

$$y(5l) = \frac{P}{EI} \left\{ -1,5l \frac{(5l)^2}{2} \Big|_{z>0} + 2 \frac{(5l)^3}{6} \Big|_{z>0} - \frac{(5l)^4}{24 \cdot l} \Big|_{z>0} + \frac{(5l-3l)^4}{24 \cdot l} \Big|_{z>3l} + 2l \frac{(5l-4l)^2}{2} \Big|_{z>4l} \right\} = -\frac{1,458 \cdot Pl^3}{EI},$$

$$\theta(4l) = \frac{P}{EI} \left\{ -1,5l \cdot 4l \Big|_{z>0} + 2 \frac{(4l)^2}{2} \Big|_{z>0} - \frac{(4l)^3}{6 \cdot l} \Big|_{z>0} + \frac{(4l-3l)^3}{6 \cdot l} \Big|_{z>3l} \right\} = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Задача № 2-4

Исходные данные: балка, закреплённая на двух шарнирных опорах с консольным участком в конце, нагружена силой $P = 50$ кН, распределённой нагрузкой $q = 110$ кН/м и моментом $M = 60$ кН·м (рис. 23, а). Длина участков равна величине $l = 1$ м, жёсткость балки на изгиб $EI = const.$

Требуется: построить эпюры Q и M , а также определить перемещения: угол поворота при $z = 2l$ и прогибы балки при $z = 4l$.

Решение

1. Выбираем направление реакций опор A и B и составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0, & A + q \cdot 2l + B - P &= 0, \\ \sum M_B &= 0, & A3l + q2l \cdot l + P \cdot l - M &= 0. \end{aligned}$$

2. Решая систему из двух уравнений, находим реакции A и B :

$$A = \frac{1}{3l} (-q2 \cdot l^2 - Pl + M) = \frac{1}{3 \cdot 1} (-110 \cdot 2 \cdot 1^2 - 50 \cdot 1 + 60) = -70 \text{ кН.}$$

$$B = -A - q2l + P = -(-70) - 110 \cdot 2 \cdot 1 + 50 = -100 \text{ кН.}$$

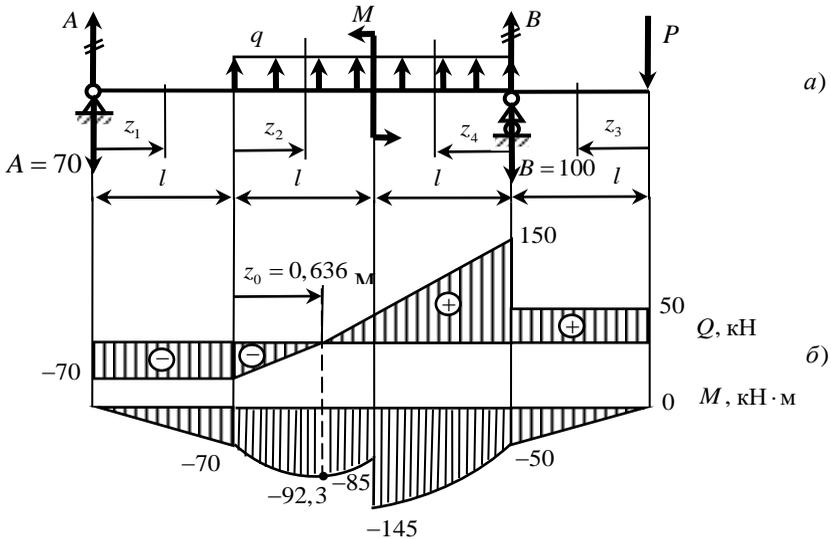


Рис. 23.

Обе реакции опор получились отрицательными. Поэтому изменяем их направление на противоположное (рис. 23, а).

3. Выбираем направления координат z_1 , z_2 , z_3 и z_4 в соответствии с рис. 23, а.

4. Методом сечений из условий равновесия отсекаемых частей балки определяем поперечные силы Q . Для этого определяем сумму проекции на ось Y нагрузок, которые действуют на отсечённые участки слева относительно сечений z_1 и z_2 и справа относительно сечений z_3 и z_4 . Учитывая правило знаков для Q , получаем:

$$Q(z_1) = -A = -70 \text{ кН},$$

$$Q(z_2) = -A + qz_2 \Big|_0^l = -70 + 110z_2 \Big|_0^l = \begin{cases} 40 \text{ кН} & \text{при } z_2 = 1 \text{ м}, \\ -70 \text{ кН} & \text{при } z_2 = 0 \text{ м}, \end{cases}$$

$$Q(z_3) = P = 50 \text{ кН},$$

$$Q(z_4) = P + B - qz_4 \Big|_0^l = 50 + 100 - 110z_4 \Big|_0^l = \begin{cases} 40 \text{ кН} & \text{при } z_4 = 1 \text{ м}, \\ 150 \text{ кН} & \text{при } z_4 = 0 \text{ м}. \end{cases}$$

5. На втором участке $Q(z_2)$ изменяет знак с «-» на «+». Координату особой точки z_0 определяем из условия $Q(z_2) = 0$:

$$Q(z_2) = -70 + 110 \cdot z_0 = 0 \quad \rightarrow \quad z_0 = \frac{70}{110} = 0,636 \text{ м.}$$

6. Для определения изгибающих моментов M составляем выражения моментов от сил, действующих слева относительно сечений z_1 и z_2 и справа относительно сечений z_3 и z_4 :

$$M(z_1) = -A \cdot z_1 \Big|_0^l = -70 \cdot z_1 \Big|_0^{1 \text{ м}} = \begin{cases} -70 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_1 = 1 \text{ м,} \\ 0 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_1 = 0 \text{ м,} \end{cases}$$

$$M(z_2) = -A(l + z_2) \Big|_0^l + q \frac{z_2^2}{2} \Big|_0^l = -70(1 + z_2) \Big|_0^{1 \text{ м}} + 110 \frac{z_2^2}{2} \Big|_0^{1 \text{ м}} =$$

$$= \begin{cases} -85 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_2 = 1 \text{ м,} \\ -70 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_2 = 0 \text{ м,} \end{cases}$$

$$M(z_3) = -P z_3 \Big|_0^l = -50 \cdot z_3 \Big|_0^{1 \text{ м}} = \begin{cases} -50 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_3 = 1 \text{ м,} \\ 0 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_3 = 0 \text{ м,} \end{cases}$$

$$M(z_4) = -P(l + z_4) - B \cdot z_4 + q \frac{z_4^2}{2} \Big|_0^l =$$

$$= -50(1 + z_4) - 100 z_4 + 110 \frac{z_4^2}{2} \Big|_0^{1 \text{ м}} = \begin{cases} -145 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_4 = 1 \text{ м,} \\ -50 \text{ кН} \cdot \text{м} & \text{при } z_4 = 0 \text{ м.} \end{cases}$$

7. Определяем на втором участке экстремальное значение момента $M(z_0)$ при $z_0 = 0,636$ м:

$$M(z_0) = -A(l + z_0) + q \frac{z_0^2}{2} = -70(1 + 0,636) + 110 \frac{0,636^2}{2} = -92,3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Соответствующие эпюры Q и M показаны на рис. 23, б.

8. На основе уравнения (8) составляем выражение для прогибов балки $y(z)$:

$$y(z) = y_0 \Big|_{z>0} + \theta_0 z \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} + q \frac{(z-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} - \right.$$

$$\left. - M \frac{(z-2l)^2}{2!} \Big|_{z>2l} - B \frac{(z-3l)^3}{3!} \Big|_{z>3l} - q \frac{(z-3l)^4}{4!} \Big|_{z>3l} \right\}.$$

Продифференцировав $y(z)$, получаем уравнение для $\theta(z)$:

$$\theta(z) = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} + q \frac{(z-l)^3}{3!} \Big|_{z>l} - M(z-2l) \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - B \frac{(z-3l)^2}{2!} \Big|_{z>3l} - q \frac{(z-3l)^3}{3!} \Big|_{z>3l} \right\}.$$

9. Для определения θ_0 и y_0 составляем граничные условия – на левой и правой опорах прогибы y балки отсутствуют (с. 10, вторая строка в таблице): $y(0) = 0$, $y(3l) = 0$.

Из первого граничного условия получаем:

$$y(0) = 0 \rightarrow y(0) = y_0 = 0.$$

Из второго условия с учётом $y_0 = 0$ получаем уравнение:

$$y(3l) = \theta_0 3l + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{(3l)^3}{3!} + q \frac{(3l-l)^4}{4!} - M \frac{(3l-2l)^2}{2!} \right\} = 0.$$

10. Подставив численные значения и решая полученное уравнение, получаем величину θ_0 , измеряемую в радианах:

$$\theta_0 = -\frac{1}{3 \cdot 1 \cdot EI} \left\{ -70 \frac{(3 \cdot 1)^3}{3!} + 110 \frac{(3 \cdot 1 - 1)^4}{4!} - 60 \frac{(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1)^2}{2!} \right\} = \frac{90,6}{EI} \text{ рад.}$$

11. Окончательный вид уравнений перемещений:

$$y(z) = \frac{1}{EI} \left\{ 90,6z \Big|_{z>0} - 70 \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} + 110 \frac{(z-l)^4}{24} \Big|_{z>l} - 60 \frac{(z-2l)^2}{2} \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - 100 \frac{(z-3l)^3}{6} \Big|_{z>3l} - 110 \frac{(z-3l)^4}{24} \Big|_{z>3l} \right\}.$$

$$\theta(z) = \frac{1}{EI} \left\{ 90,6 - 70 \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} + 110 \frac{(z-l)^3}{6} \Big|_{z>l} - 60(z-2l) \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - 100 \frac{(z-3l)^2}{2} \Big|_{z>3l} - 110 \frac{(z-3l)^3}{6} \Big|_{z>3l} \right\},$$

12. Определяем перемещения балки в заданных сечениях. При вычислении перемещений в сечении с заданной координатой

$z_i = 4l$ или $2l$ (рис. 23, а), учитывают только те слагаемые, которые попадают в интервал $(0 - z_i)$:

$$y(4 \cdot 1) = \frac{1}{EI} \left\{ 90,6 \cdot 4 \cdot 1 - 70 \frac{(4 \cdot 1)^3}{6} + 110 \frac{(4 \cdot 1 - 1)^4}{24} - 60 \frac{(4 \cdot 1 - 2 \cdot 1)^2}{2} - \right. \\ \left. - 100 \frac{(4 \cdot 1 - 3 \cdot 1)^3}{6} - 110 \frac{(4 \cdot 1 - 3 \cdot 1)^4}{24} \right\} = -\frac{154,3}{EI} \text{ м,}$$

$$\theta(2 \cdot 1) = \frac{1}{EI} \left\{ 90,6 - 70 \frac{(2 \cdot 1)^2}{2} + 110 \frac{(2 \cdot 1 - 1)^3}{6} \right\} = -\frac{31,1}{EI}, \text{ рад.}$$

Задача № 2-5

Исходные данные: балка с шарниром (рис. 24), длиной участка $l = 2$ м и с постоянной жесткостью на изгиб $EI = const$ нагружена силой $P = 500$ Н, изгибающим моментом $M = 1000$ Нм и распределённой нагрузкой $q = 250$ Н/м.

Требуется: определить прогибы балки $y(z)$ в сечении $z = 4$ м и углы поворота сечений $\theta(z)$ слева и справа от шарнира.

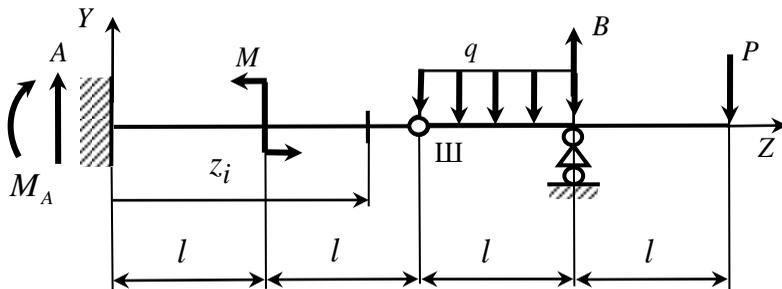


Рис. 24.

Решение

1. Направляем реакции опор A , M_A и B в положительном направлении. Реакций опор определяем из уравнений равновесия. Поскольку шарнир моментов не передаёт, можно составлять уравнения равновесия моментов относительно шарнира для левой и правой частей балки по-отдельности.

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 & \rightarrow A - q \cdot l + B - P = 0 & \rightarrow A = q \cdot l - B + P, \\ \sum M_{\text{Шлев}} = 0 & \rightarrow M_A + A \cdot 2l - M = 0 & \rightarrow M_A = M - A \cdot 2l, \\ \sum M_{\text{Шправ}} = 0 & \rightarrow -B \cdot l + 0,5 \cdot ql^2 + P \cdot 2l = 0 & \rightarrow B = 0,5q \cdot l + 2P. \end{aligned}$$

Порядок решения системы уравнений следующий: сначала из третьего уравнения определяем реакцию B . Подставив её в первое уравнение, получим реакцию A , и затем из второго уравнения определим величину M_A :

$$\begin{aligned} B &= 0,5 \cdot 250 \cdot 2 + 2 \cdot 500 = 1250 \text{ Н}, \\ A &= 250 \cdot 2 - 1250 + 500 = -250 \text{ Н}, \\ M_A &= 1000 - (-250) \cdot 2 \cdot 2 = 2000 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Реакция A определилась со знаком « \leftarrow », что необходимо учесть в уравнениях перемещений.

2. Составляем выражение для линейных перемещений – прогибов балки $y(z)$

$$\begin{aligned} y(z) = y_0|_{z>0} + \theta_0 z|_{z>0} + \frac{1}{EI} & \left\{ M_A \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} - A \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} - M \frac{(z-l)^2}{2!} \Big|_{z>l} - \right. \\ & \left. - q \frac{(z-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} + q \frac{(z-3l)^4}{4!} \Big|_{z>3l} + B \frac{(z-3l)^3}{3!} \Big|_{z>3l} \right\} + \theta_{\text{ш}} (z-2l) \Big|_{z>2l} \end{aligned}$$

Продифференцировав $y(z)$, получаем уравнение для угловых перемещений $\theta(z)$:

$$\begin{aligned} \theta(z) = \theta_0|_{z>0} + \frac{1}{EI} & \left\{ M_A z|_{z>0} - A \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} - M (z-l) \Big|_{z>l} - q \frac{(z-2l)^3}{3!} \Big|_{z>2l} + \right. \\ & \left. + q \frac{(z-3l)^3}{3!} \Big|_{z>3l} + B \frac{(z-3l)^2}{2!} \Big|_{z>3l} \right\} + \theta_{\text{ш}}|_{z>2l}. \end{aligned}$$

3. Для определения констант интегрирования y_0 , θ_0 и $\theta_{\text{ш}}$ составляем граничные условия на опорах балки. В соответствии с табл. 1 (с. 10, строка 4) получаем:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad \theta(0) = 0, \quad y(0) = 0, \\ \text{при } z = 3l & \quad y(3l) = 0. \end{aligned}$$

Из граничных условий получаем:

$$\theta(0) = \theta_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 0,$$

$$y(3l) = \frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{(3l)^2}{2} - A \frac{(3l)^3}{6} - M \frac{(2l)^2}{2} - q \frac{(l)^4}{24} \right\} + \theta_{ш} l = 0.$$

4. Подставив значения M_A , A , M , q и решив полученное уравнение относительно $\theta_{ш}$, с учётом $l = 2$ м получаем:

$$\begin{aligned} \theta_{ш} &= -\frac{1}{EI \cdot l} \left\{ M_A \frac{(3l)^2}{2} - A \frac{(3l)^3}{6} - M \frac{(2l)^2}{2} - q \frac{(l)^4}{24} \right\} = \\ &= -\frac{1}{EI \cdot 2} \left\{ 2000 \frac{6^2}{2} - 250 \frac{6^3}{6} - 1000 \frac{4^2}{2} - 250 \frac{2^4}{24} \right\} = -\frac{9417}{EI} \text{ рад.} \end{aligned}$$

5. Окончательные выражения для перемещений имеют вид:

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} - A \frac{z^3}{6} \Big|_{z>0} - M \frac{(z-l)^2}{2} \Big|_{z>l} - q \frac{(z-2l)^4}{24} \Big|_{z>2l} + \right. \\ &\quad \left. + q \frac{(z-3l)^4}{24} \Big|_{z>3l} + B \frac{(z-3l)^3}{6} \Big|_{z>3l} \right\} - \frac{9417}{EI} (z-2l) \Big|_{z>2l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \frac{1}{EI} \left\{ M_A z \Big|_{z>0} - A \frac{z^2}{2} \Big|_{z>0} - M (z-l) \Big|_{z>l} - q \frac{(z-2l)^3}{6} \Big|_{z>2l} + \right. \\ &\quad \left. + q \frac{(z-3l)^3}{6} \Big|_{z>3l} + B \frac{(z-3l)^2}{2} \Big|_{z>3l} \right\} - \frac{9417}{EI} \Big|_{z>2l}. \end{aligned}$$

6. Определяем перемещения балки в заданных сечениях. При вычислении перемещений в сечении с заданной координатой $z_i = 2l$ (рис. 24), учитывают только те слагаемые, которые попадают в интервал $(0 - 2l)$:

прогибы балки

$$\begin{aligned} y(2l) &= \frac{1}{EI} \left\{ M_A \frac{(2l)^2}{2} - A \frac{(2l)^3}{6} - M \frac{(2l-l)^2}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ 2000 \frac{4^2}{2} - 250 \frac{4^3}{6} - 1000 \frac{(4-2)^2}{2} \right\} = \frac{11333}{EI} \text{ м.} \end{aligned}$$

углы поворота поперечных сечений:

$$\begin{aligned} \text{слева от шарнира} \quad \theta(2l) &= \frac{1}{EI} \left\{ M_A \cdot 2l - A \frac{(2l)^2}{2} - M(2l-l) \right\} = \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ 2000 \cdot 4 - 250 \frac{4^2}{2} - 1000(4-2) \right\} = \frac{4000}{EI} \text{ рад,} \end{aligned}$$

$$\text{справа от шарнира} \quad \theta(2l) + \theta_{\text{ш}} = \frac{4000}{EI} + \left(-\frac{9417}{EI} \right) = -\frac{5417}{EI} \text{ рад.}$$

2.2. Балки с линейно-изменяющимися нагрузками

Задача № 2-6

Исходные данные: балка (рис. 25) с длиной участка $l = 2$ м и постоянной жесткостью на изгиб $EI = \text{const}$ нагружена изгибающим моментом $M = 500$ кН·м и линейно-убывающей распределённой нагрузкой: $q_1 = 300$ кН/м и $q_2 = 100$ кН/м.

Требуется: определить перемещения балки: прогибы $y(z)$ в сечении $z = 2l = 4$ м и углы поворота $\theta(z)$ в сечении $z = 3l = 6$ м.

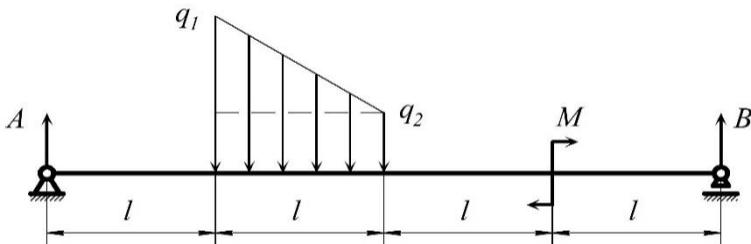


Рис. 25.

Решение

1. Направляем реакции опор A и B в положительном направлении (рис. 25). Разделяем линейно-распределённую нагрузку на постоянную q_2 и линейно-убывающую с $q_{\text{max}} = q_1 - q_2 = 300 - 100 = 200$ кН/м. Для определения реакций

опор составляем уравнения равновесия балки: сумму проекций всех сил на направление оси Y и уравнение равновесия моментов относительно опоры B :

$$\sum Y = 0 \rightarrow A - 0,5(q_1 + q_2) \cdot l + B = 0,$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A \cdot 4l - q_2 \cdot l \cdot 2,5 \cdot l - 0,5q_{\max} \cdot l \cdot (2 + 2/3) \cdot l + M = 0.$$

Решив уравнения и подставив численные значения нагрузок, получаем $A = 195,8$ кН, $B = 204,2$ кН.

2. Составляем общие выражения для перемещений балки, предварительно определив величину углового коэффициента:

$$k = \frac{q_{\max}}{l} = \frac{200}{2} = 100 \text{ кН/м}^2.$$

Сначала записываем универсальное уравнение для линейных перемещений – прогибов $y(z)$:

$$y(z) = y_0|_{z>0} + \theta_0 z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ A \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} - q_2 \frac{(z-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} + q_2 \frac{(z-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - q_{\max} \frac{(z-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} + k \frac{(z-l)^5}{5!} \Big|_{z>l} - k \frac{(z-2l)^5}{5!} \Big|_{z>2l} + M \frac{(z-3l)^2}{2!} \Big|_{z>3l} \right\}. \quad (22)$$

Уравнение для угловых перемещений $\theta(z)$ получим путём дифференцирования $y(z)$:

$$\theta(z) = \theta_0|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ A \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} - q_2 \frac{(z-l)^3}{3!} \Big|_{z>l} + q_2 \frac{(z-2l)^3}{3!} \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - q_{\max} \frac{(z-l)^3}{3!} \Big|_{z>l} + k \frac{(z-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} - k \frac{(z-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} + M (z-3l) \Big|_{z>3l} \right\}. \quad (23)$$

3. Для определения констант интегрирования y_0 и θ_0 составляем граничные условия на опорах балки. В соответствии с табл. 1 (с. 10, строка 4) получаем:

$$\text{при } z = 0 \quad y(0) = 0,$$

$$\text{при } z = 4l \quad y(4l) = 0.$$

Из первого условия получаем:

$$y(0) = y_0 = 0.$$

Из второго условия получаем уравнение для определения θ_0 :

$$y(4l) = \theta_0 \cdot 4l \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ A \frac{4l^3}{3!} \Big|_{z>0} - q_2 \frac{(4l-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} + q_2 \frac{(4l-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - q_{\max} \frac{(4l-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} + k \frac{(4l-l)^5}{5!} \Big|_{z>l} - k \frac{(4l-2l)^5}{5!} \Big|_{z>2l} + M \frac{(4l-3l)^2}{2!} \Big|_{z>3l} \right\} = 0,$$

$$\theta_0 = -\frac{1}{EI \cdot 4l} \left\{ A \frac{(4l)^3}{3!} \Big|_{z>0} - q_2 \frac{(4l-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} + q_2 \frac{(4l-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. - q_{\max} \frac{(4l-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} + k \frac{(4l-l)^5}{5!} \Big|_{z>l} - k \frac{(4l-2l)^5}{5!} \Big|_{z>2l} + M \frac{(4l-3l)^2}{2!} \Big|_{z>3l} \right\}.$$

После подстановки численных значений получаем

$$\theta_0 = -\frac{1025}{EI} \text{ рад.}$$

4. Подставив в представленные выше уравнения (22) и (23) значения θ_0 и y_0 , получаем окончательные общие выражения для перемещений. Тогда прогибы и углы поворота балки в заданных сечениях $z = 2l$ и $3l$ будут определяться выражениями:

$$y(2l) = \theta_0 \cdot 2l + \frac{1}{EI} \left\{ A \frac{(2l)^3}{3!} - q_2 \frac{(2l-l)^4}{4!} - q_{\max} \frac{(2l-l)^4}{4!} + k \frac{(2l-l)^5}{5!} \right\} = \\ = -\frac{1025}{EI} \cdot 4l + \frac{1}{EI} \left\{ 195,8 \frac{4^3}{6} - 100 \frac{2^4}{24} - 200 \frac{2^4}{24} + 100 \frac{2^5}{120} \right\} = -\frac{2583}{EI} \text{ м.}$$

$$\theta(3l) = \theta_0 \Big|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ A \frac{(3l)^2}{2!} - q_2 \frac{(3l-l)^3}{3!} + q_2 \frac{(3l-2l)^3}{3!} - q_{\max} \frac{(3l-l)^3}{3!} + \right. \\ \left. + k \frac{(3l-l)^4}{4!} - k \frac{(3l-2l)^4}{4!} \right\} = -\frac{1025}{EI} + \frac{1}{EI} \left\{ 195,8 \frac{6^2}{2} - 100 \frac{4^3}{6} + \right. \\ \left. + 100 \frac{2^3}{6} - 200 \frac{4^3}{6} + 100 \frac{4^4}{24} - 100 \frac{2^4}{24} \right\} = \frac{433}{EI} \text{ рад.}$$

Задача № 2-7

Исходные данные: балка с шарниром (рис. 26), длиной каждого участка $l = 2$ м и с постоянной жёсткостью на изгиб $EI = const$ нагружена линейно-возрастающей распределённой нагрузкой с максимальной величиной $q = 200$ кН/м и изгибающим моментом $M = 400$ кН·м.

Требуется: определить перемещения балки: прогибы $y(z)$ в сечении $z = 2l = 4$ м и углы поворота $\theta(z)$ на опоре C при $z = 4l = 8$ м.

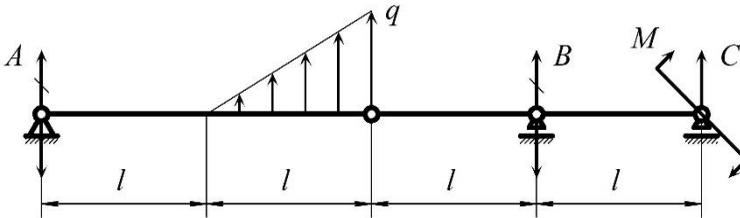


Рис. 26.

Решение

1. Направляем реакции опор A , B и C в положительном направлении. Для определения реакций опор составляем уравнения равновесия балки. Поскольку шарнир моментов не передаёт, то составляем уравнения равновесия моментов относительно шарнира для левой и правой частей балки по-отдельности.

$$\sum Y = 0, \quad \rightarrow \quad A + \frac{1}{2}q \cdot l + B + C = 0,$$

$$\sum M_{\text{ш лев}} = 0, \quad \rightarrow \quad A \cdot 2l + \frac{1}{2}ql \frac{l}{3} = 0,$$

$$\sum M_{\text{ш прав}} = 0. \quad \rightarrow \quad B \cdot l + C \cdot 2l - M = 0.$$

Решив систему уравнений, получаем:

$$A = -33,3 \text{ кН}, \quad B = -533 \text{ кН}, \quad C = 367 \text{ кН}.$$

В соответствии со знаками, изменяем направление действия реакций опор A и B на противоположное (рис. 18).

2. Определяем величину углового коэффициента k для распределённой нагрузки q :

$$k = \frac{q}{l} = \frac{200}{2} = 100 \text{ кН/м}^2.$$

3. Учитывая фактические направления действия реакций опор, составляем выражения для линейных перемещений балки $y(z)$:

$$y(z) = y_0|_{z>0} + \theta_0 z|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{z^3}{3!} \Big|_{z>0} + k \frac{(z-l)^5}{5!} \Big|_{z>l} - \right. \\ \left. -k \frac{(z-2l)^5}{5!} \Big|_{z>2l} - q \frac{(z-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} - B \frac{(z-3l)^3}{3!} \Big|_{z>3l} \right\} + \theta_{\text{ш}} (z-2l) \Big|_{z>2l}. \quad (20)$$

Продифференцировав $y(z)$, получаем уравнение для угловых перемещений $\theta(z)$:

$$\theta(z) = \theta_0|_{z>0} + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{z^2}{2!} \Big|_{z>0} + k \frac{(z-l)^4}{4!} \Big|_{z>l} - k \frac{(z-2l)^4}{4!} \Big|_{z>2l} - \right. \\ \left. -q \frac{(z-2l)^3}{3!} \Big|_{z>2l} - B \frac{(z-3l)^2}{2!} \Big|_{z>3l} \right\} + \theta_{\text{ш}}|_{z>2l}. \quad (21)$$

3. Для определения констант интегрирования y_0 , θ_0 и $\theta_{\text{ш}}$ составляем граничные условия на опорах балки. В соответствии с табл. (с. 10, строка 5) получаем:

$$\text{при } z=0 \quad y(0) = 0, \quad \text{при } z=3l \quad y(3l) = 0, \quad \text{при } z=4l \quad y(4l) = 0.$$

В результате из граничных условий получаем:

$$y(0) = y_0 = 0,$$

$$y(3l) = \theta_0 3l + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{(3l)^3}{3!} + k \frac{(3l-l)^5}{5!} - k \frac{(3l-2l)^5}{5!} - \right. \\ \left. -q \frac{(3l-2l)^4}{4!} \right\} + \theta_{\text{ш}} (3l-2l) = 0,$$

$$y(4l) = \theta_0 4l + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{(4l)^3}{3!} + k \frac{(4l-l)^5}{5!} - k \frac{(4l-2l)^5}{5!} - \right. \\ \left. -q \frac{(4l-2l)^4}{4!} - B \frac{(4l-3l)^3}{3!} \right\} + \theta_{\text{ш}} (4l-2l) = 0.$$

Подставив значения нагрузок и решив полученную систему уравнений, с учётом $l = 2$ м, получаем:

$$y_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{238}{EI} \text{ рад}, \quad \theta_{\text{ш}} = -\frac{461}{EI} \text{ рад}.$$

4. Подставив эти значения в уравнения для $y(z)$ (20) и $\theta(z)$ (21), получим окончательные общие выражения для перемещений. Тогда прогибы и углы поворота балки в заданных сечениях $z = 2l$ и $4l$ будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} y(2l) &= \theta_0 2l + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{(2l)^3}{3!} + k \frac{l^5}{5!} \right\} = \\ &= \frac{238}{EI} 2 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \left\{ -33,3 \frac{(2 \cdot 2)^3}{6} + 100 \frac{2^5}{120} \right\} = \frac{623,5}{EI} \text{ м}. \\ \theta(4l) &= \theta_0 + \frac{1}{EI} \left\{ -A \frac{(4l)^2}{2!} + k \frac{(4l-l)^4}{4!} - k \frac{(4l-2l)^4}{4!} - \right. \\ &\quad \left. - q \frac{(4l-2l)^3}{3!} - B \frac{(4l-3l)^2}{2!} \right\} + \theta_{\text{ш}} = \\ &= \frac{238}{EI} + \frac{1}{EI} \left\{ -33,3 \frac{8^2}{2} + 100 \frac{6^4}{24} - 100 \frac{4^4}{24} - \right. \\ &\quad \left. - 200 \frac{4^3}{6} - 533 \frac{2^2}{2} \right\} - \frac{461}{EI} = -\frac{154,6}{EI} \text{ рад}. \end{aligned}$$

3. Энергетические методы

3.1. Потенциальная энергия упругой деформации. Теорема Кастилиано

Задача № 3-1

Исходные данные: консольно закреплённая балка (рис. 27) нагружена поперечной силой P . Длина балки l , жёсткость балки на изгиб $EI = const$.

(Эта задача является повторением задач № 1-4, с. 42, и № 2-1, с. 48).

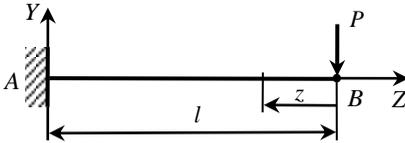


Рис. 27.

Определить: потенциальную энергию упругой деформации U и вертикальное перемещение балки f_A в т. B .

Решение

1. Чтобы не определять реакции опоры принимаем направление координаты z от свободного конца B . Тогда выражения для внутренних силовых факторов имеют вид:

$$M(z) = P \cdot z, \quad Q = P.$$

2. Вычисляем U :

$$\begin{aligned} U &= \int_1 \frac{M^2}{2EI} dz + k_y \int_1 \frac{Q^2}{2GA} dz = \int_1 \frac{(Pz)^2}{2EI} dz + k_y \int_1 \frac{P^2}{2GA} dz = \\ &= \frac{P^2 z^3}{6EI} \Big|_0^l + k_y \frac{P^2 z}{2GA} \Big|_0^l = \frac{P^2 l^3}{6EI} + k_y \frac{P^2 l}{2GA}. \end{aligned}$$

3. Сравним величины составляющих энергии от изгибающего момента и поперечной силы. Предположим, что поперечное сечение балки квадратное с размерами h , при этом $l > 10 \cdot h$. Тогда, учитывая, что $k_y = 1,2$ и $E \approx 2,5G$, получаем

$$\frac{\frac{P^2 l^3}{6EI}}{k_y \frac{P^2 l}{2GA}} = \frac{l^2 2GA}{k_y 6 \cdot 2,5GI} = \frac{(10h)^2 h^2}{1,2 \cdot 7,5 \frac{h^4}{12}} > 133.$$

Следовательно, энергия изгиба более чем в 133 раза больше энергии поперечных сил и ими можно пренебречь.

4. В соответствии с теоремой Кастилиано вычисляем вертикальное перемещение т. В:

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2Pl^3}{6EI} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Задача № 3-2

Исходные данные: шарнирно закреплённая балка длиной l (рис. 28) нагружена моментом M . Жёсткость на изгиб $EI = const$.

Определить: потенциальную энергию упругой деформации U и угловое перемещение θ_c в точке C балки.

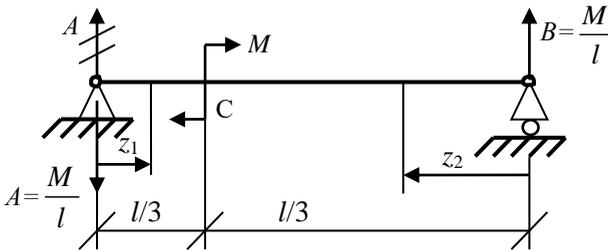


Рис. 28.

Решение

1. Полагая реакции опор A и B положительными, составляем уравнения равновесия балки и находим величину реакций:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0, & \quad A + B = 0, & \rightarrow A = -B = -M/l, \\ \sum M_A = 0, & \quad M - B \cdot l = 0, & \rightarrow B = M/l. \end{aligned}$$

Изменяем направление реакции A .

2. Составляем выражения для моментов в соответствии с выбранными координатами z_1 и z_2 :

$$M(z_1) = -\frac{M \cdot z}{l}, \quad M(z_2) = \frac{M \cdot z}{l}.$$

3. Вычисляем U :

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{M^2}{2EI} dz = \int_0^{\frac{l}{3}} \frac{\left(-\frac{M \cdot z}{l}\right)^2}{2EI} dz + \int_0^{\frac{2l}{3}} \frac{\left(\frac{M \cdot z}{l}\right)^2}{2EI} dz = \\ &= \frac{M^2 z^3}{6l^2 EI} \Big|_0^{\frac{l}{3}} + \frac{M^2 z^3}{6l^2 EI} \Big|_0^{\frac{2l}{3}} = \frac{M^2 l}{18EI}. \end{aligned}$$

4. В соответствии с теоремой Кастилиано вычисляем угловое перемещение т. С:

$$\theta_C = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{2M \cdot l}{18EI} = \frac{M \cdot l}{9EI}.$$

Задача № 3-3

Исходные данные: стержневая система (рис. 29) нагружена силой P . Размеры системы: l , α ; жёсткость стержней на растяжение $EA = const$.

Определить: потенциальную энергию упругой деформации U и вертикальное перемещение f_B узла B системы.

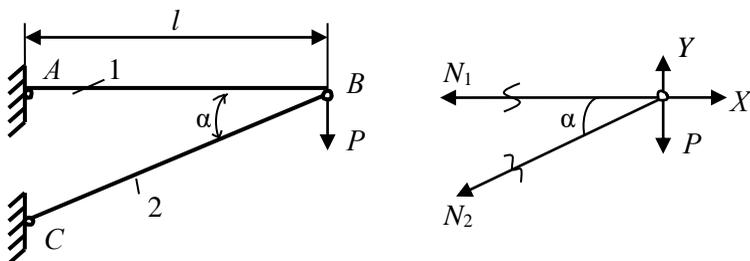


Рис. 29.

Решение

1. Используя метод сечений, составляем уравнения равновесия отсечённого узла и находим усилия, действующие в стержнях:

$$\begin{aligned}\sum X = 0, & \rightarrow -N_1 - N_2 \cdot \cos \alpha = 0, \rightarrow N_1 = -N_2 \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \\ \sum Y = 0, & \rightarrow -N_2 \cdot \sin \alpha - P = 0, \rightarrow N_2 = -P / \sin \alpha.\end{aligned}$$

2. Вычисляем U , учитывая, что $l_1 = l$, $l_2 = \frac{l}{\cos \alpha}$:

$$\begin{aligned}U &= \int_{l_1} \frac{N_1^2}{2EA} dz + \int_{l_2} \frac{N_2^2}{2EA} dz = \int_0^{l_1} \frac{P^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2EA} dz + \int_0^{l_2} \frac{(-P)^2}{2(\sin \alpha)^2 EA} dz = \\ &= \frac{P^2}{2EA} (\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot z \Big|_0^{l_1} + \frac{z}{\sin^2 \alpha} \Big|_0^{l_2}) = \frac{P^2 l}{2EA} (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}).\end{aligned}$$

3. Дифференцируя полученное выражение U по силе P , получаем искомое перемещение:

$$f_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P \cdot l}{EA} (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}).$$

3.2. Интегралы Мора

При использовании интегралов Мора наряду с требованиями, изложенными в разделе 3.2, будем руководствоваться дополнительно следующими правилами.

1. Сначала устанавливается количество участков в стержневой системе, границы которых определяются приложенными нагрузками, а также жёсткостью стержней EI и GI_p , зависящими от формы и размеров поперечного сечения, а также и от материала, из которого изготовлены стержни. В пределах каждого участка выбирается направление отсчёта координат z_i , $i = 1 \dots n$.

2. Если сечение, в котором определяется перемещение, делит участок на две части, то на появившемся участке выбирают так же направление координаты z_{n+1} .

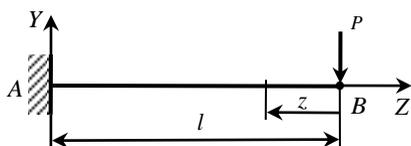
3. На каждом участке составляют выражения для ВСФ от внешних нагрузок в зависимости от выбранных координат z_i . При

этом руководствуются правилами знаков ВСФ: общепринятыми для продольных и поперечных сил, и произвольными, удобными для расчётов моментных ВСФ. При наличии в раме моментных ВСФ продольными и поперечными силами можно пренебречь.

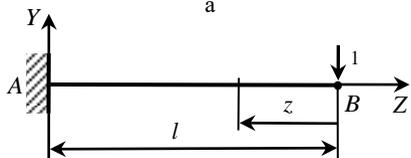
4. В заданном сечении задают единичное нагружение, соответствующее искомому перемещению, и, пользуясь принятыми правилами знаков, составляют выражения для ВСФ в зависимости от выбранных координат z_i .

5. Подставляют полученные выражения ВСФ на каждом участке от внешних нагрузок и единичного нагружения в интегралы Мора и вычисляют их аналитическим или графическим способами. При наличии криволинейных участков рамы или участков с переменной жёсткостью интегрирование проводят только аналитическим способом. Для рам с прямолинейными участками и постоянной жёсткостью можно использовать графический способ Верещагина, с которым можно ознакомиться в [1, 2].

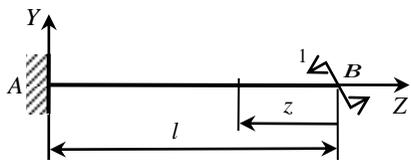
Задача № 3-4



а



б



в

Рис. 30.

Исходные данные: консольно закреплённая балка (рис. 30) нагружена поперечной силой P . Длина балки l , жёсткость балки на изгиб $EI = const$.

(Эта задача является повторением задач № 1-4, с. 42, № 2-1, с. 48 и № 3-1, с. 68).

Определить: вертикальное f_B и угловое θ_B перемещения балки в сечении B .

Решение

1. Чтобы не определять реакции опоры принимаем направление координаты z от

свободного конца B . Тогда, пренебрегая поперечными силами, выражение для изгибающих моментов от нагрузки P имеет вид:

$$M_p(z) = P \cdot z.$$

2. Для определения прогибов f_B нагружаем балку единичной силой (рис. 30, б) и составляем выражение для M_1 :

$$M_1(z) = 1 \cdot z = z.$$

3. Подставляем полученные выражения в интеграл Мора и определяем величину прогиба f_B :

$$f_B = \int_0^l \frac{Pz \cdot z}{EI} dz = \frac{Pz^3}{3EI} \Big|_0^l = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

4. Для определения углового перемещения θ_B нагружаем балку единичным моментом (рис. 30, в) и составляем выражение для M_1 со знаком «-», т. к. направление действия M_1 противоположно направлению $M_p(z)$:

$$M_1(z) = -1.$$

5. Подставляем полученные выражения в интеграл Мора и определяем угловое перемещение θ_B :

$$f_B = \int_0^l \frac{Pz \cdot (-1)}{EI} dz = -\frac{Pz^2}{2EI} \Big|_0^l = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Следовательно, действительное направление перемещения противоположно направлению единичного нагружения.

Задача № 3-5

Исходные данные: рама, закреплённая на шарнирных опорах (рис. 31, а) нагружена поперечной силой $P = 5$ кН, распределённой нагрузкой $q = 100$ кН/м и изгибающим моментом $M = 20$ кНм. Длина параметра $l = 1$ м, жёсткость стержней рамы на изгиб $EI = const$.

Определить: вертикальное перемещение рамы в т. $B - \Delta_B$ верт и угловое перемещение в т. $D - \Delta_D$ угл.

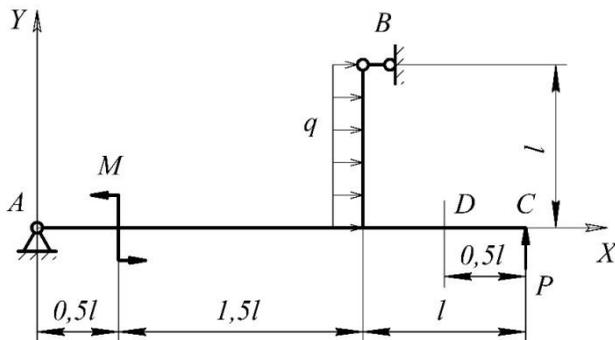


Рис. 31, а

Решение

1. Показываем на расчётной схеме направление (произвольно) реакций опор A_r , A_B и B (рис. 31, б). Для определения реакций опор составляем уравнения равновесия рамы.

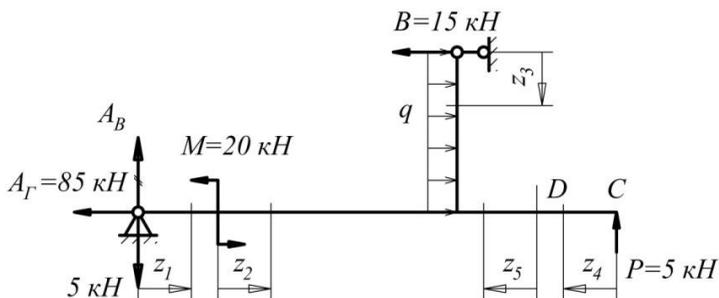


Рис. 31, б

$$\begin{aligned} \sum X = 0, & \quad -A_r + ql - B = 0, \\ \sum Y = 0, & \quad A_B + P = 0, \\ \sum M_A = 0, & \quad -M + \frac{ql^2}{2} - Bl - P \cdot 3l = 0. \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$A_B = -P = -5 \text{ кН}, \quad A_r = ql - B = 100 \cdot 1 - 15 = 85 \text{ кН},$$

$$B = \frac{1}{l} \left(\frac{ql^2}{2} - M - P \cdot 3l \right) = \frac{1}{1} \left(\frac{100 \cdot 1^2}{2} - 20 - 5 \cdot 3 \cdot 1 \right) = 15 \text{ кН}.$$

Изменяем направление реакции A_B на противоположное (рис. 31, б).

2. На каждом участке выбираем направление отсчёта координат z_i (рис. 31, б). Поскольку т. D делит правый участок на две части, добавляем координату z_5 , необходимую для определения Δ_D угл.

3. Составляем выражения для изгибающих моментов от внешних нагрузок в зависимости от координат z_i .

$$M_p(z_1) = A_B \cdot z = -5z, \quad M_p(z_2) = -P(0,5l + z) - M = -22,5 - 5z,$$

$$M_p(z_3) = -Bz + \frac{qz^2}{2} = -15z + 50z^2, \quad M_p(z_4) = -Pz = -5z,$$

$$M_p(z_5) = -P(0,5l + z) = -2,5 - 5z.$$

4. Для определения вертикального перемещения Δ_B верт нагружаем раму в т. B единичной силой (рис. 31, в), определяем реакции опор, составляем выражения для $M_1(z_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

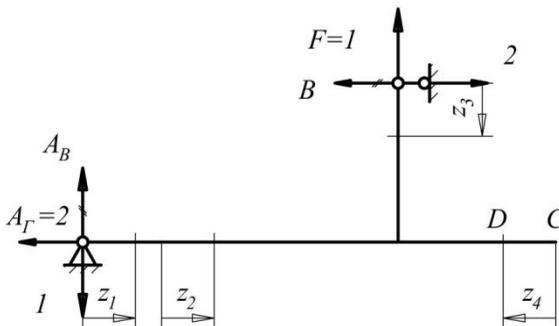


Рис. 31, в

$$\begin{aligned} \sum X = 0, & \quad -A_r - B = 0, & \rightarrow A_r = -B = 2, \\ \sum Y = 0, & \quad A_B + 1 = 0, & \rightarrow A_B = -1, \\ \sum M_A = 0, & \quad Bl - 1 \cdot 2l = 0, & \rightarrow B = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1(z_1) &= -1 \cdot z = -z, & M_1(z_2) &= -1(0,5l + z) = -0,5 - z, \\ M_1(z_3) &= 2z, & M_1(z_4) &= 0. \end{aligned}$$

5. Для определения углового перемещения Δ_D угла нагружаем раму в т. D единичным моментом $M = 1$ (рис. 31, г), определяем реакции опор, составляем выражения для $M_1(z_i)$, $i = 1, \dots, 5$.

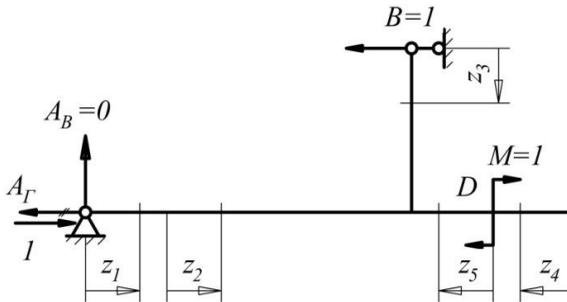


Рис. 31, г

$$\begin{aligned} \sum X = 0, & \quad -A_r - B = 0, & \rightarrow A_r = -B = -1, \\ \sum Y = 0, & \quad A_B = 0, \\ \sum M_A = 0, & \quad M - Bl = 0, & \rightarrow B = \frac{M}{l} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1(z_1) &= 0, & M_1(z_2) &= 0, & M_1(z_3) &= -1z = -z, \\ M_1(z_4) &= 0, & M_1(z_5) &= 1. \end{aligned}$$

6. Для дальнейших расчётов, когда рама содержит несколько участков и требуется определять несколько перемещений, можно воспользоваться табл. 2 соответствия ВСФ от внешних нагрузок и от единичных нагружений.

Таблица 2. Таблица соответствия внутренних силовых факторов

ВСФ M_P от внешних нагрузок	ВСФ M_1 от нагружения единичной силой $P = 1$	ВСФ M_1 от нагружения единичным моментом $M = 1$
$M_P(z_1) = -5z$	$-z$	0
$M_P(z_2) = -22,5 - 5z$	$-0,5 - z$	0
$M_P(z_3) = -15z + 50z^2$	$2z$	$-z$
$M_P(z_4) = -5z$	0	0
$M_P(z_5) = -2,5 - 5z$	—	1

7. Подставляем выражения $M_P(z)$ и $M_1(z)$ в интегралы Мора и вычисляем заданные перемещения $\Delta_{B \text{ верт}}$ и $\Delta_{D \text{ угл}}$. Поскольку жёсткость $EI = const$, в расчётах выносим её за знак интегралов.

$$\begin{aligned} \Delta_{B \text{ верт}} &= \sum \int \frac{M_P \cdot M_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{0,5} (-5z)(-z) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{1,5} (-22,5 - 5z)(-0,5 - z) dz + \int_0^1 (-15z + 50z^2) 2z dz + 0 \right\} = \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ 5 \frac{z^3}{3} \Big|_0^{0,5} + \left(11,25z + 25 \frac{z^2}{2} + 5 \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1,5} + \left(-30 \frac{z^3}{3} + 100 \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^1 \right\} = \\ &= \frac{1}{EI} \{ 0,208 + 16,875 + 28,125 + 5,625 + 15 \} = \frac{65,83}{EI} \text{ м.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{D \text{ угл}} &= \frac{1}{EI} \left\{ 0 + 0 + \int_0^1 (-15z + 50z^2)(-z) dz + 0 + \int_0^{0,5} (-2,5 - 5z) 1 dz \right\} = \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ \left(15 \frac{z^2}{2} - 50 \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(-2,5z - 5 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{0,5} \right\} = \\ &= \frac{1}{EI} \{ 7,5 - 12,5 - 1,25 - 0,625 \} = -\frac{6,875}{EI} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Задача № 3-6

Исходные данные: рама, закреплённая на шарнирных опорах (рис. 32, а) нагружена поперечными силами $P_1 = 20$ кН и $P_2 = 10$ кН. Размеры параметров $R = 1$ м и $l = 0,5$ м, жёсткость стержней рамы на изгиб $EI = const$.

Определить: вертикальное перемещение рамы в т. $C - \Delta_{C \text{ верт}}$ и угловое перемещение в т. $B - \Delta_{B \text{ угл.}}$.

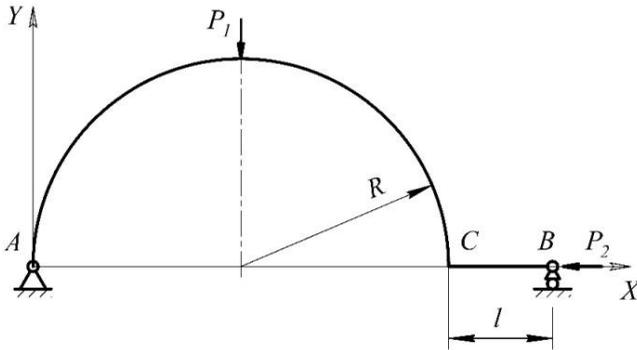


Рис. 32, а

Решение

1. Показываем на расчётной схеме направление (произвольно) реакций опор A_{Γ} , A_B и B (рис. 32, б). Для определения реакций опор составляем и решаем уравнения равновесия рамы.

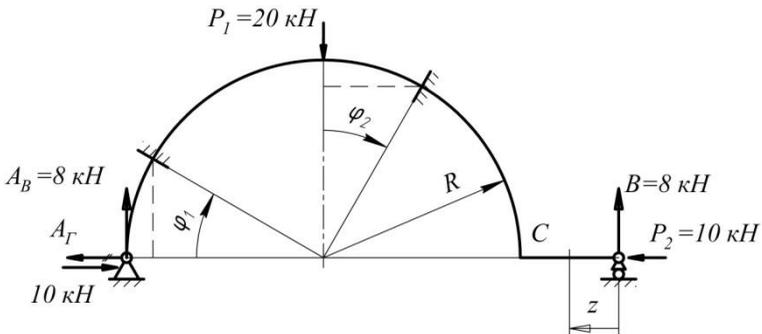


Рис. 32, б

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad -A_r - P_2 = 0, \quad \rightarrow \quad A_r = -P_2 = -10 \text{ кН}, \\ \sum Y = 0, \quad A_B - P_1 + B = 0, \quad \rightarrow \quad A_B = P_1 - B = 20 - 8 = 12 \text{ кН}, \\ \sum M_A = 0, \quad P_1 \cdot R - B(2R + l) = 0, \quad \rightarrow \quad B = P \frac{R}{2R + l} = 20 \frac{1}{2 \cdot 1 + 0,5} = 8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2. Изменяем направление реакции A_r на противоположное и на каждом участке выбираем направление отсчёта координат φ_i и z (рис. 32, б). Составляем выражения для изгибающих моментов от внешних нагрузок $M_{Pi}(\varphi, z)$, $i = 1, \dots, 3$.

$$\begin{aligned} M_p(\varphi_1) &= -A_r R \sin \varphi_1 + A_B (R - R \cos \varphi_1) = -10 \sin \varphi_1 + 12(1 - \cos \varphi_1), \\ M_p(\varphi_2) &= -A_r R \cos \varphi_2 + A_B (R + R \sin \varphi_2) - P_1 R \sin \varphi_2 = \\ &= -10 \cos \varphi_2 + 12 - 8 \sin \varphi_2, \\ M_p(z) &= B \cdot z = 8z. \end{aligned}$$

4. Для определения вертикального перемещения $\Delta_{C \text{ верт}}$ нагружаем раму в т. С единичной силой (рис. 32, в), определяем реакции опор и составляем выражения для $M_{li}(\varphi, z)$, $i = 1, \dots, 3$.

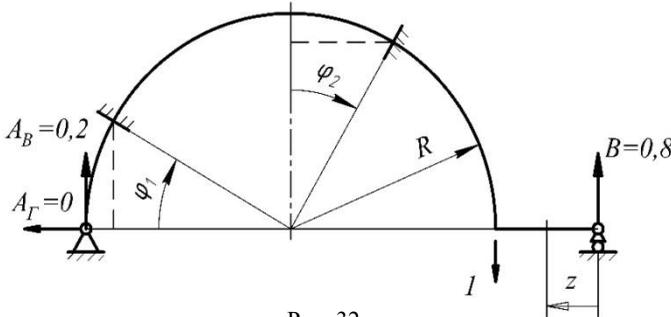


Рис. 32, в

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad -A_r = 0, \quad \rightarrow \quad A_r = 0, \\ \sum Y = 0, \quad A_B - 1 + B = 0, \quad \rightarrow \quad A_B = -1, \\ \sum M_A = 0, \quad 1 \cdot 2R - B(2R + l) = 0, \quad \rightarrow \quad B = \frac{1 \cdot 2R}{2R + l} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 0,5} = 0,8. \end{aligned}$$

$$M_1(\varphi_1) = A_B(R - R \cos \varphi_1) = 0,2 \cdot 1(1 - \cos \varphi_1) = 0,2(1 - \cos \varphi_1),$$

$$M_1(\varphi_2) = A_B(R + R \sin \varphi_2) = 0,2 \cdot 1(1 + \sin \varphi_2) = 0,2(1 + \sin \varphi_2),$$

$$M_1(z) = B \cdot z = 0,8z.$$

5. Для определения перемещения $\Delta_{B \text{ угл}}$ нагружаем раму в г. В единичным моментом $M = 1$ (рис. 32, г), определяем реакции опор и составляем выражения для $M_{1i}(\varphi, z)$, $i = 1, \dots, 3$.

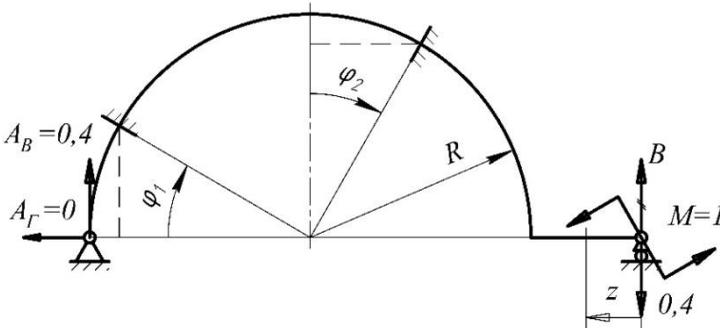


Рис. 32, г

$$\sum X = 0, \quad -A_r = 0, \quad \rightarrow \quad A_r = 0,$$

$$\sum Y = 0, \quad A_B + B = 0, \quad \rightarrow \quad A_B = -B = 0,4,$$

$$\sum M_A = 0, \quad -1 - B(2R + l) = 0, \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{2R + l} = -\frac{1}{2 \cdot 1 + 0,5} = -0,4.$$

$$M_1(\varphi_1) = A_B(R - R \cos \varphi_1) = 0,4 \cdot 1(1 - \cos \varphi_1) = 0,4(1 - \cos \varphi_1),$$

$$M_1(\varphi_2) = A_B(R + R \sin \varphi_2) = 0,4 \cdot 1(1 + \sin \varphi_2) = 0,4(1 + \sin \varphi_2),$$

$$M_1(z) = 1 - 0,4z.$$

6. Заносим полученные выражения моментов M_P и M_1 в табл. 3 соответствия ВСФ.

Таблица 3. Таблица соответствия внутренних силовых факторов

ВСФ M_P от внешних нагрузок	ВСФ M_1 от нагружения единичной силой $P = 1$	ВСФ M_1 от нагружения единичным моментом $M = 1$
$M_P(\varphi_1) = -10\sin\varphi_1 + 12(1 - \cos\varphi_1)$	$0,2(1 - \cos\varphi_1)$	$0,4(1 - \cos\varphi_1)$
$M_P(\varphi_2) = -10\cos\varphi_2 + 12 - 8\sin\varphi_2$	$0,2(1 + \sin\varphi_2)$	$0,4(1 + \sin\varphi_2)$
$M_P(z) = 8z$	$0,8z$	$1 - 0,4z$

6. Подставляем выражения $M_P(z)$ и $M_1(z)$ в интегралы Мора и вычисляем перемещения $\Delta_{С\text{ верт}}$ и $\Delta_{В\text{ угл}}$.

$$\begin{aligned} \Delta_{С\text{ верт}} &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\pi/2} [-10\sin\varphi_1 + 12(1 - \cos\varphi_1)] 0,2(1 - \cos\varphi_1) R d\varphi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\pi/2} [-10\cos\varphi_2 + 12 - 8\sin\varphi_2] 0,2(1 + \sin\varphi_1) R d\varphi + \int_0^l 8z \cdot 0,8z \cdot dz \right\} = \\ &= \frac{R}{EI} \left\{ \int_0^{\pi/2} [-2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_1) + 2,4(1 - 2\cos\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)] d\varphi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\pi/2} [-2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_2) + 2,4(1 + \sin\varphi_2) - \right. \\ &\left. - 1,6(\sin\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)] d\varphi \right\} + \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{0,5} 6,4z^2 dz \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{R}{EI} \left\{ \left[-2(-\cos \varphi - \frac{\sin^2 \varphi}{2}) + 2,4(\varphi - 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi) \right]_0^{\pi/2} + \left[-2(\sin \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2}) + 2,4(\varphi - \cos \varphi) - 1,6(-\cos \varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi) \right]_0^{\pi/2} \right\} + \frac{6,4}{EI} \frac{z^3}{3} \Big|_0^{0,5} = \frac{0,435}{EI} \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{B_{\text{упл}}} &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\pi/2} [-10 \sin \varphi_1 + 12(1 - \cos \varphi_1)] 0,4(1 - \cos \varphi_1) R d\varphi + \right. \\ &+ \int_0^{\pi/2} [-10 \cos \varphi_2 + 12 - 8 \sin \varphi_2] 0,4(1 + \sin \varphi_1) R d\varphi + \int_0^l 8z(1 - 0,4z) dz \Big\} = \\ &= \frac{R}{EI} \left\{ \int_0^{\pi/2} [-4(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) + 4,8(1 - 2 \cos \varphi_1 + (\cos \varphi_1)^2)] d\varphi + \right. \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} [-4(\cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) + 4,8(1 + \sin \varphi_2) - \\ &\quad \left. - 3,2(\sin \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)] d\varphi \right\} + \frac{1}{EI} \int_0^{0,5} (8z - 3,2z^2) dz = \\ &= \frac{R}{EI} \left\{ \left[-4(-\cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2}) + 4,8(\varphi - 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi) \right]_0^{\pi/2} + \right. \\ &\quad + \left[-4(\sin \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2}) + 4,8(\varphi - \cos \varphi) - 3,2(-\cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi) \right]_0^{\pi/2} \right\} + \frac{1}{EI} \left\{ 8 \frac{z^2}{2} - 3,2 \frac{z^3}{3} \right\}_0^{0,5} = \frac{-2,797}{EI} \text{ рад.} \end{aligned}$$

Отрицательный результат показывает, что направление поворота оси рамы в данном сечении противоположно направлению единичного момента.

Задача № 3-7

Исходные данные: пространственная рама, жёстко закреплённая на опоре A (рис. 33, а), нагружена поперечной силой $P = 5$ кН, моментом $M = 10$ кН и распределённой нагрузкой $q = 2$ кН/м. Размер параметра длины $l = 2$ м, жёсткость стержней рамы на изгиб $EI = const$ и на кручение $GI_p = const$.

Определить: вертикальное перемещение рамы в т. E – Δ_E верт и угловое перемещение в т. D – Δ_D угл в плоскости XY .

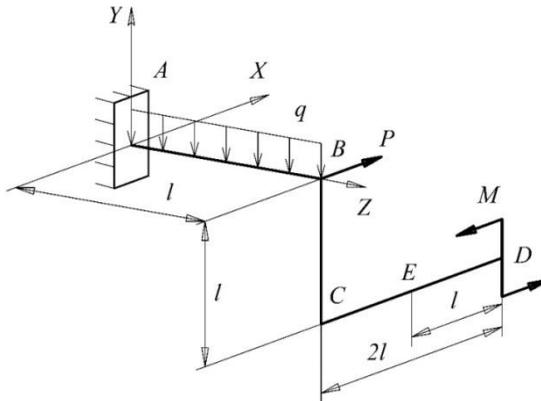


Рис. 33, а

Решение

1. Для расчёта рам объёмной конструкции сначала необходимо задавать систему координат, в которой в дальнейшем определяют ВСФ от внешних нагрузок и единичных нагружений. Можно на каждом i -м участке рамы выбирать собственную правостороннюю систему $X_i Y_i Z_i$, направляя оси Z_i вдоль продольной оси участка. Но для рамы с несколькими участками, на наш взгляд удобнее пользоваться глобальной системой координат, помещённой на одну из опор рамы, сохраняя при этом обозначения z_i для текущей продольной координаты на каждом участке. В нашем случае это жёсткая опора A , где может действовать до шести реакций (рис. 33, б). Поэтому предпочтительнее выбирать на расчётной схеме направление координат z_i от незакреплённого – свободного конца рамы в т. D (рис. 33, б).

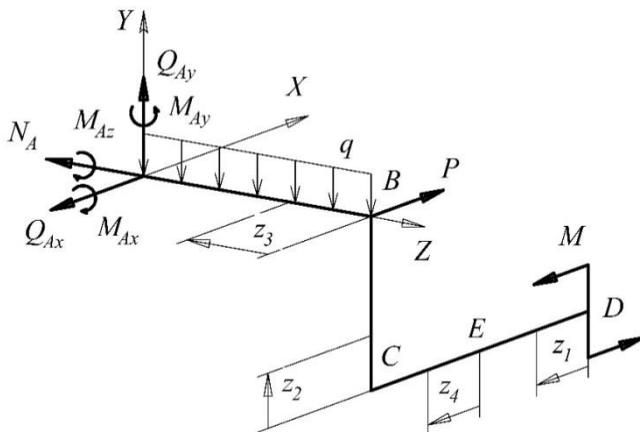


Рис. 33, б

При определении ВСФ рамы от единичных нагрузений будем учитывать только те факторы, которые соответствуют ВСФ от внешних нагрузок.

2. Пренебрегая продольными и поперечными силами, составляем для каждого участка выражения для изгибающих и крутящих моментов в зависимости от координат z_i . Поскольку сечение E делит первый участок на две части, вводим дополнительную координату z_4 (рис. 33, б). В соответствии с заданной глобальной системой координат получаем:

– от момента M возникают изгибающие моменты в вертикальной плоскости относительно оси Z

$$M_{zP}(z_1) = M, \quad M_{zP}(z_2) = M, \quad M_{zP}(z_4) = M,$$

и на третьем участке возникает крутящий момент относительно оси Z – $M_{kP}(z_3) = M$;

– сила P создаёт изгибающий момент только на третьем участке в горизонтальной плоскости относительно оси Y $M_{yP}(z_3) = P \cdot z_3$;

– распределённая нагрузка q создаёт изгибающий момент в вертикальной плоскости относительно оси X тоже только на третьем участке – $M_{xP}(z_3) = -\frac{q \cdot z_3^2}{2}$.

Для удобства дальнейших расчётов воспользуемся табл. 4 соответствия ВСФ и заносим выражения $M_P(z_i)$.

Таблица 4. Таблица соответствия внутренних силовых факторов

ВСФ M_P от внешних нагрузок	ВСФ M_1 от нагружения единичной силой $P = 1$	ВСФ M_1 от нагружения единичным моментом $M = 1$
$M_{zP}(z_1) = M$	0	1
$M_{zP}(z_2) = M$	l	1
$M_{xP}(z_3) = -\frac{q \cdot z_3^2}{2}$	z_3	0
$M_{yP}(z_3) = P \cdot z_3$	0	0
$M_{zP}(z_4) = M$	z_4	–
$M_{kP}(z_3) = M$	l	1

3. Для определения перемещения рамы $\Delta_{E \text{ верт}}$ в т. E нагружаем раму единичной силой $P = 1$ в направлении оси Y (рис. 33, в) и составляем выражения для соответствующих единичных моментов. При этом учитываем, что единичная сила при переносе на третий участок создаёт единичный изгибающий момент $M_{x1} = 1 \cdot z_3$, а также единичный крутящий момент $M_{k1} = 1 \cdot l$.

$$\begin{aligned}
 M_{z1}(z_1) &= 0, & M_{z1}(z_2) &= 1 \cdot l = l, & M_{x1}(z_3) &= 1 \cdot z_3 = z_3, \\
 M_{y1}(z_3) &= 0, & M_{z1}(z_4) &= 1 \cdot z_4 = z_4, & M_{k1}(z_3) &= 1 \cdot l = l.
 \end{aligned}$$

Полученные единичные моменты заносим в табл. 4.

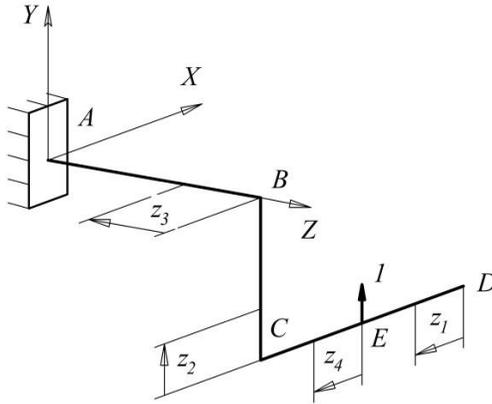


Рис. 33, в

4. Для определения углового перемещения рамы $\Delta_{D_{\text{угл}}}$ в т. D нагружаем раму в плоскости XU единичным изгибающим моментом $M = 1$ (рис. 33, г) и составляем на участках выражения для соответствующих единичных моментов. Единичный изгибающий момент при переносе на третий участок создаёт там единичный крутящий момент $M_{к1} = M = 1$.

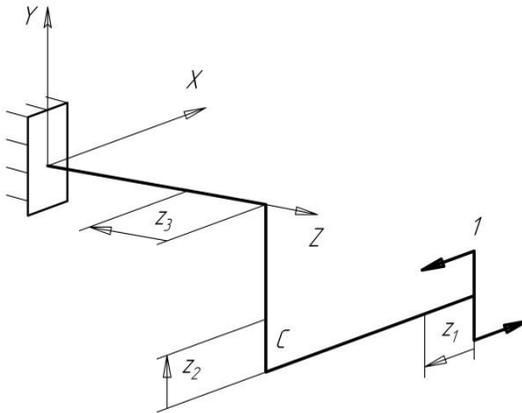


Рис. 33, г

$$M_{z_1}(z_1) = M = 1, \quad M_{z_1}(z_2) = M = 1, \quad M_{x_1}(z_3) = 0, \\ M_{y_1}(z_3) = 0, \quad M_{k_1}(z_3) = M = 1.$$

Полученные единичные моменты заносим в табл. 4.

5. Проводим расчёт искомым деформаций. Жёсткости стержневой рамы EI и $GI_p = const$, поэтому при интегрировании их выносим за знак интегралов.

$$\Delta_{E \text{ верт}} = \frac{1}{EI} \left\{ 0 + \int_0^l M \cdot ldz + \int_0^l \frac{q \cdot z_3^2}{2} z_3 dz + 0 + \int_0^l M z_4 dz \right\} + \frac{1}{GI_p} \int_0^l M \cdot ldz = \\ = \frac{1}{EI} \left\{ Ml z \Big|_0^l + \frac{q \cdot z^4}{2 \cdot 4} \Big|_0^l + M \frac{z^2}{2} \Big|_0^l \right\} + \frac{Ml z}{GI_p} \Big|_0^l = \\ = \frac{1}{EI} \left\{ 10 \cdot 2^2 + \frac{2 \cdot 2^4}{8} + 10 \frac{2^2}{2} \right\} + \frac{10 \cdot 2^2}{GI_p} = \frac{64}{EI} + \frac{40}{GI_p} \text{ м.}$$

$$\Delta_{D \text{ угл}} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{2l} M \cdot ldz + \int_0^l M \cdot ldz + 0 + 0 \right\} + \frac{1}{GI_p} \int_0^l M \cdot ldz = \\ = \frac{1}{EI} \left\{ M z \Big|_0^{2l} + \left\{ M z \Big|_0^l \right\} + \frac{Mz}{GI_p} \Big|_0^l \right\} = \frac{1}{EI} \{ M \cdot 2l + M \cdot l \} + \frac{Ml}{GI_p} = \\ = \frac{1}{EI} \{ 10 \cdot 2 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \} + \frac{10 \cdot 2}{GI_p} = \frac{60}{EI} + \frac{20}{GI_p} \text{ рад.}$$

3.3. Теорема о взаимности работ

Задача № 3-8

Исходные данные: задано кольцо, нагруженное силами P . Диаметр кольца D , жёсткость на растяжение $EA = const$.

Определить: изменение ΔS площади, ограниченной осевой линией кольца (рис. 34, а).

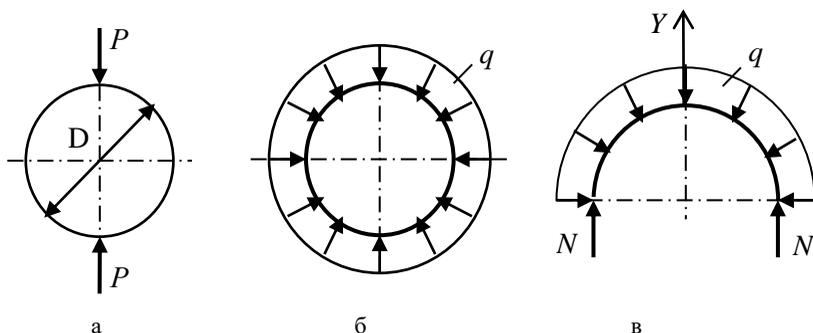


Рис. 34.

Решение

1. В соответствии с теоремой о взаимности работ определим обозначения сил и соответствующих им перемещений. К первой группе сил отнесём силы P : $P_1 = P$. Изменение площади, ограниченной осевой линией кольца, происходит за счёт изменения длины осевой линии кольца, определение которой должна обеспечивать вторая группа сил P_2 . Поэтому в качестве P_2 следует использовать равномерно распределённую нагрузку $P_2 = q$ (рис. 34, б). В таком случае будем иметь Δ_{12} – изменение диаметра ΔD от действия q и Δ_{21} – искомое перемещение – изменение площади ΔS . Тогда в соответствии с теоремой получаем

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21} \rightarrow P \cdot \Delta D = q \cdot \Delta S \rightarrow \Delta S = \frac{P \cdot \Delta D}{q}.$$

2. Определим перемещение $\Delta_{12} = \Delta D$ от действия q . Поскольку это нагружение осесимметричное, изгиб кольца отсутствует и изменение диаметра будет обусловлено осевыми силами N .

Для определения N воспользуемся методом сечений (рис. 34, в):

$$\sum Y = 0, \quad 2N - q \cdot D = 0, \quad \rightarrow \quad N = \frac{q \cdot D}{2}.$$

Тогда

$$\Delta_{12} = \Delta D = \frac{\Delta L}{\pi} = \frac{NL}{\pi EA} = \frac{N\pi D}{\pi EA} = \frac{q \cdot D^2}{2EA}.$$

3. Из теоремы о взаимности работ получаем:

$$\Delta S = \frac{P \cdot \Delta D}{q} = \frac{P \cdot q \cdot D^2}{q \cdot 2EA} = \frac{P \cdot D^2}{2EA}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1986. – 512 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и дополн. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

Учебное издание

Букатый Алексей Станиславович

Букатый Станислав Алексеевич

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка

И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 22.12.2022. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 5,75.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25) Заказ № . Арт. – 37 (Р2УП)/2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

