МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

В. А. ГЛАЗУНОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ РАДИОСИСТЕМ

*Утверждено редакционно-издательским советом института
в качестве учебного пособия*

КУЙБЫШЕВ 1986

УДК 621.391:519.7

Глазунов В. А. *Оптимизация радиосистем:* Учебное пособие. — Куйбышев: Куйбышевский авиационный институт, 1986. — 54 с.

В пособии рассмотрены методы синтеза радиотехнических систем различного назначения. В начале обсуждается порядок оптимального проектирования радиосистем, затем подробно раскрывается каждый этап оптимизации: методы векторного синтеза, способы формирования целевой функции и графоаналитические методы нахождения наилучших параметров радиосистем.

В каждом из разделов даны примеры решения оптимизационных задач, взятые из практики радиотехнических расчетов, для самостоятельной проработки приведены задачи с ответами или указаниями по их решению.

Учебное пособие может быть полезно при изучении лекционных курсов «Основы кибернетики», «Радиотехнические системы», на практических занятиях, а также при курсовом и дипломном проектировании для технико-экономического обоснования решений. Пособие может быть также использовано студентами и аспирантами, связанными в своей деятельности с проектированием систем различного назначения.

Ил. 24. Табл. 6. Библиогр. — 20 назв.

Рецензенты: доц. Е. А. Муштаков, кафедра высшей математики Куйбышевского политехнического института им. В. В. Куйбышева

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным принципом проектирования систем является *принцип оптимальности*. Оптимизировать радиотехническую систему (РТС) значит выбрать наилучшую. Стремление к наилучшему лежит в самой природе человека, являющегося прирожденным «оптимизатором». И в обыденной жизни, и в технике человек постоянно целенаправленно или подсознательно принимает оптимальные решения: перейти площадь по кратчайшему пути (об этом свидетельствуют вытоптанные повсюду газоны, несмотря на запрещающие и угрожающие штрафом надписи), как можно удобнее приобрести билеты в кинотеатр («Товарищ кассир, серединку, пожалуйста...»), изготовить дополнительный усилитель к «вертушке» с минимальными частотными искажениями и т. п. В технике для принятия оптимального решения необходимо тщательно и всесторонне изучить задачу, описать ее математически, выбрать критерий оптимизации, сформулировать целевую функцию, ограничения и провести поиск оптимальной системы (синтез РТС) с применением математических количественных методов оптимизации.

С повышением требований к помехоустойчивости РТС, точности и надежности радиоэлектронной аппаратуры, ужесточением экономических требований наряду с графоаналитическими методами нахождения экстремума все шире используются такие методы оптимизации, как линейное, нелинейное и динамическое программирование, методы векторного синтеза и др. /1, 2/. Однако в учебном пособии основное внимание уделяется не математическому аппарату, а вопросам постановки задач синтеза РТС, методам формирования математических моделей систем, трансформации словесной формулировки задачи проектирования в математическую. Именно в этом, а не в технике математического решения заключены наибольшие трудности инженера-проектировщика /3/. Наконец, для математического решения задачи всегда можно привлечь соответствующих специалистов, математическая же формулировка задачи под силу лишь специалисту-радиоинженеру, хорошо разбирающемуся во всех тонкостях функционирования проектируемой РТС. Поэтому используемый в пособии математический аппарат не выходит за пределы втузовского математического курса и в необходимых случаях разъясняется. В пособии подробно раскрываются основные этапы проектирования РТС, начиная со словесной формулировки задачи, кончая принятием оптимального решения.

Для самостоятельной проработки и лучшего усвоения материала в каждом разделе приводятся задачи по оптимизации РТС различного назначения. В конце пособия наиболее характерные задачи снабжены ответами и указаниями по их решению.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ПО ОПТИМИЗАЦИИ РАДИОСИСТЕМ

Для того, чтобы лучше понять сущность оптимизации РТС, в настоящем разделе приводятся примеры задач, в которых требуется найти тот или иной параметр (те или иные параметры $x_1, x_2, ..., x_n$), обеспечивающий экстремум — минимум или максимум некоторого показателя качества системы (показателей $y_1, y_2, ..., y_n$). Параметры $\bar{x} = (x_1 ... x_n)$ описывают РТС с точки зрения разработчика, проектировщика системы и называются *внутренними*. Показатели $\bar{y} = (y_1 ... y_m)$ описывают РТС с точки зрения заказчика или потребителя системы и называются *внешними* параметрами. Так, для РТС передачи информации внешними параметрами могут быть дальность связи, точность воспроизведения сообщений, экономические затраты и др. Внутренними параметрами будут: вид модуляции, способ уплотнения каналов, частота несущей, мощность передатчика. Для радиолокационной станции — дальность обнаружения, разрешающая способность, надежность (внешние параметры) и частота несущей, мощность передатчика, длительность и период повторения зондирующего импульса (внутренние параметры). Вариацией внутренних параметров разработчик добивается определенных, требуемых внешних показателей качества РТС.

Внешние параметры радиосистемы образуют *критерий оптимизации* $\bar{W} = W(\bar{y}) = W(y_1 ... y_m)$ в некоторых источниках можно встретить другие названия — критерий качества, или критерий эффективности). Критерий $\bar{W}$ в общем случае является вектором. Некоторые авторы, чтобы подчеркнуть векторный характер критерия, вводят понятие «многокритериальности», что представляется не совсем удачным, ибо понятие вектора уже предполагает многокомпонентность.

Внешние и внутренние параметры РТС связаны уравнениями связи $F(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(\bar{x}) = f_1(x_1 \dots x_n) \\ y_2 = f_2(\bar{x}) = f_2(x_1 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(\bar{x}) = f_m(x_1 \dots x_n) \end{cases}$$

Уравнения связи представляют собой совокупность математических соотношений, связывающих внешние параметры качества РТС с внутренними, отображают техническое (функциональное, алгоритмическое) построение системы, и поэтому являются *математической моделью РТС*. Уравнения показывают, за счет каких параметров и в какой степени можно достичь определенного качества системы. Используя уравнения связи, в некоторых случаях критерий $\overline{W}$ можно выразить через оптимизируемые внутренние параметры. Критерий, представленный как функция оптимизируемых параметров, называется *целевой функцией* $W = F(x_1 \dots x_n)$.

Таким образом, целью оптимизации радиосистемы является нахождение совокупности внутренних параметров $\bar{x}_0 = (x_{1_0} \dots x_{n_0})$, обеспечивающих наибольшее (наименьшее) значение целевой функции $W = F(\bar{x})$ или вектора внешних параметров $\bar{y} = (y_1 \dots y_m) \Rightarrow \text{extr}$. В первом случае при расчете $\min(\max) F(\bar{x})$ используются математические методы скалярной оптимизации, так как функция $F(\bar{x})$ является скалярной. Для нахождения экстремума вектора внешних параметров $\overline{W} = \overline{W}(\bar{y})$ необходимо привлекать методы векторной оптимизации.

Рассмотрим несколько примеров оптимизационных задач: постараемся понять физическую сущность оптимизации, раскроем методологию математической постановки задач синтеза и покажем, какие математические методы решения можно использовать для количественной оценки параметров РТС. Численных решений проводить не будем, хотя каждый из приведенных примеров имеет большое самостоятельное практическое значение.

Пример 1. Выбрать полосу пропускания усилителя промежуточной частоты УПЧ, обеспечивающего максимальное отношение сигнала к шуму.

Физическую сущность оптимума в данном примере наглядно иллюстрирует рис. 1.1, на котором показаны спектр полезного сигнала S, шума N и идеальная прямоугольная амплитудно-частотная характеристика УПЧ(АЧХ) с полосой пропускания ΔF. Очевидно, что существует оптимальное значение полосы ΔF_0, при котором отношение эффективных значений сигнала $U_с$ и шума $U_ш$ на выходе УПЧ максимально: при бóльшей ширине полосы $\Delta F_2 > \Delta F_0$ эффективное значение сигнала на выходе УПЧ увеличится, но ненамного. Более значительно, как это видно из рис. 1.1, возрастет эффективное значение шума

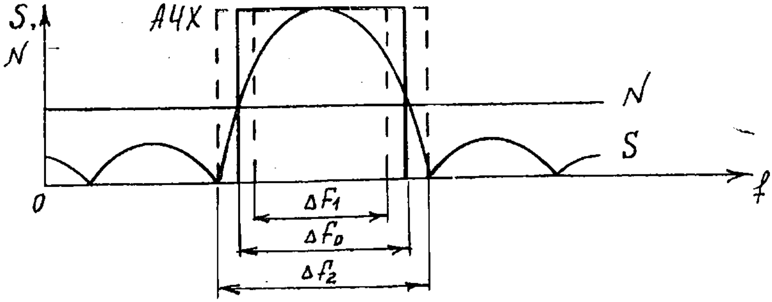

Рис. 1.1.

(приращение площади спектра шума N больше, чем для сигнала S), и отношение сигнала к шуму упадет. Наоборот, если сузить полосу УПЧ до значения $\Delta F_1 < \Delta F_0$, напряжение шума на выходе УПЧ снизится, но более существенно уменьшится значение сигнала, и отношение сигнала к шуму также упадет. Для того, чтобы количественно найти наилучшее значение полосы ΔF_0, необходимо выразить критерий оптимизации, в данном случае отношение эффективных значений сигнала и шума $W = U_с / U_ш$, через полосу пропускания УПЧ ΔF: $W = U_с / U_ш = W(\Delta F)$. В соответствии с принятой в начале раздела терминологией полоса УПЧ является внутренним параметром $x = \Delta F$, а отношение сигнала к шуму — внешним $y = U_с / U_ш$. Задача оптимизации математически сводится к отысканию $x_0 = \Delta F_0$, при котором обеспечивается $\max W = y = U_с / U_ш = y(x)$. Уравнение связи $y(x) = U_с / U_ш(\Delta F)$ обсуждается в теории оптимального приема сигналов /4/, а максимум целевой функции одного параметра, в данном случае скалярной функции одного параметра, легко находится из условия дифференцирования $dy/dx = 0$.

Пример 2. Построить наиболее экономичный резервированный УПЧ, обеспечивающий заданное отношение сигнала к шуму.

В соответствии со словесной формулировкой внутренним (оптимизируемым) параметром РТС является кратность резервирования $x = n$, внешним — затраты на УПЧ $y = C_\Sigma = C_п + C_э$, где $C_п$ и $C_э$ — затраты на изготовление и эксплуатацию УПЧ (рис. 1.2). При увеличении кратности резервирования (числа резервных блоков) затраты на изготовление растут линейно: $C_п = a_1 + a_2 n$, а затраты на эксплуатацию снижаются: $C_э = a_3 + a_4 / n$, где $a_1 \dots a_4$ — коэффициенты пропорциональности. Очевидно, что существует оптимальное значение $x_0 = n_0$, при котором обеспечивается $\min C_\Sigma = a_1 + a_3 + a_2 n + \frac{a_4}{n}$, или

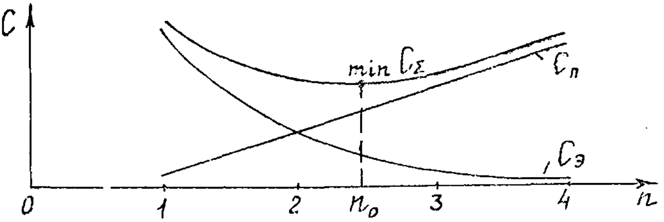

Рис. 1.2

$\min y = a_1 + a_3 + a_2 x + \frac{a_4}{x}$. Из условия $dy / dx = a_2 - \frac{a_4}{x^2} = 0$ находим $x_0 = n_0 = \sqrt{a_4/a_2}$.

Пример 3. Найти оптимальные значения длительности τ и периода повторения T зондирующего импульса радиолокационной станции РЛС.

Из принципа работы радиолокационных систем известно, что при сокращении длительности зондирующего импульса уменьшается так называемая «мёртвая зона» локатора $\delta R = c\tau / 2$ (минимальное расстояние, которое может быть измерено, c—скорость распространения радиоволн), но снижается помехоустойчивость вследствие требующегося расширения полосы пропускания приемника РЛС $\Delta F = 1 / \tau$ (рис. 1.3). Так же противоречив выбор периода повторения зондирующего импульса T: при его увеличении растёт дальность однозначного измерения $R_{одн} = cT / 2$, но одновременно возрастает динамическая погрешность измерения дальности $\Delta R = V_r T / k$, где V_r — радиальная скорость цели, k — коэффициент усиления системы автосопровождения цели /5/. В рассмотренном примере два внутренних $x_1 = \tau$, $x_2 = T$ и четыре внешних $y_1 = \delta R$, $y_2 = \Delta F$,

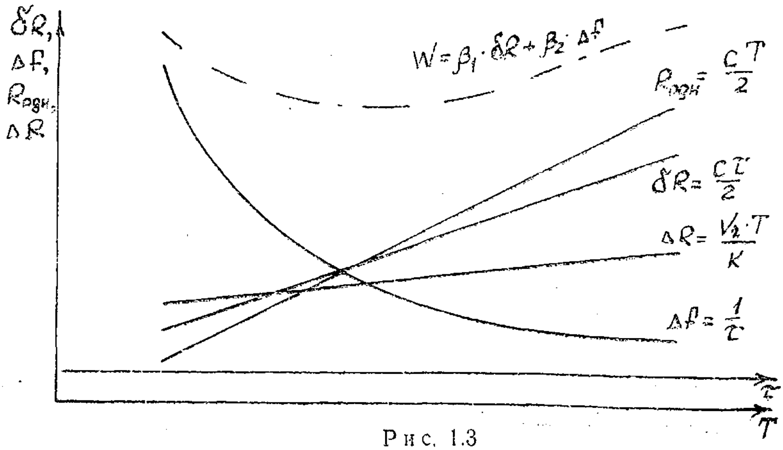

Рис. 1.3

$y_3 = \dot{R}_{\text{одн}}$, $y_4 = \Delta \tilde{R}$ параметра, следовательно, математически задача оптимизации сводится к отысканию экстремума векторной функции $\bar{y} = W(y_1 \ldots y_4)$ векторного аргумента $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Решение подобной векторной задачи получить простыми способами не удается: при формировании целевой функции необходимо учитывать разную размерность внешних параметров, часть которых следует увеличить, другую часть — уменьшить. Методы решения векторных задач и способы формирования целевой функции рассматриваются в последующих разделах.

Таким образом, в радиотехнике существует большое разнообразие задач синтеза РТС, математически сводящихся к решению задач векторной и скалярной оптимизации. При постановке задачи синтеза необходимо разобраться в большом многообразии параметров, характеризующих радиосистему, выделить критерий и произвести математическую запись задачи.

В следующих задачах попробуйте самостоятельно выделить внешние и внутренние параметры РТС, объясните физическую сущность экстремума и запишите математически в общем виде задачу отыскания оптимальных параметров РТС.

Задача 1. При выбранном типе транзистора найти коэффициент передачи трансформаторного усилительного каскада с общим эмиттером, обеспечивающий максимальный коэффициент усиления по напряжению.

Задача 2. Распределить суммарную погрешность δ_0 между последовательно соединенными элементами радиотехнической системы передачи информации таким образом, чтобы суммарная стоимость системы была минимальна.

Задача 3. Вероятность поражения цели зенитным управляемым снарядом $P_{\text{пор}}$ определяется величиной промаха, «гарантированного» системой радиоуправления (СУ) и эффективностью боевого заряда (БЗ). При известном ограничении на стоимость снаряда в целом C_0 найти допустимые значения затрат на СУ и БЗ, при которых обеспечивается максимальное поражение цели.

Задача 4. Назовите основной принцип проектирования РТС.

Задача 5. При решении примера 2 получен дробный результат, например, $n_0 = 2{,}3$. Каков будет окончательный ответ в задаче?

2. *ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ РТС*

Проектирование РТС любого назначения включает постановку задачи и ее решение. На основе рассмотренной в пре-

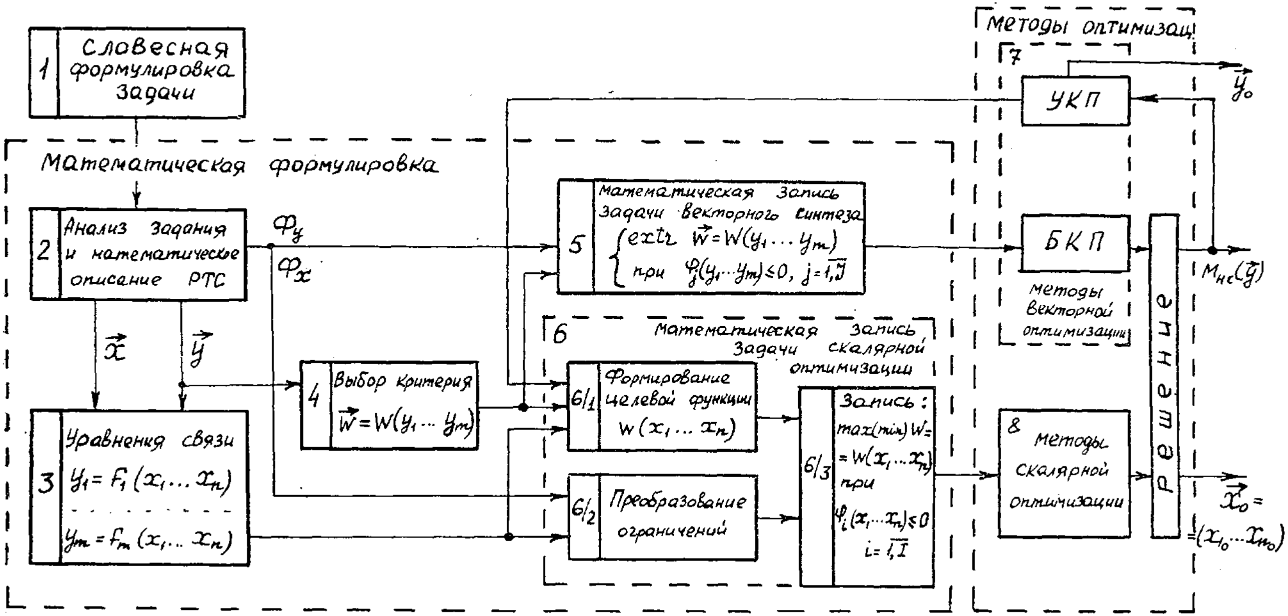
Методы оптимизац
7
1 Словесная формулировка задачи
Математическая формулировка
2 Анализ задания и математическое описание РТС
Φ_y
Φ_x
$\vec{x}$
$\vec{y}$
3 Уравнения связи
$y_1 = f_1(x_1 \dots x_n)$
$y_m = f_m(x_1 \dots x_n)$
4 Выбор критерия
$\vec{W} = W(y_1 \dots y_m)$
5 Математическая запись задачи векторного синтеза
$\begin{cases} \text{extr } \vec{W} = W(y_1 \dots y_m) \\ \text{при } \varphi_j(y_1 \dots y_m) \le 0, \ j = \overline{1, J} \end{cases}$
6 Математическая запись задачи скалярной оптимизации
6/1 Формирование целевой функции
$W(x_1 \dots x_n)$
6/2 Преобразование ограничений
6/3 Запись:
$\max(\min) W = W(x_1 \dots x_n)$
при
$\varphi_i(x_1 \dots x_n) \le 0$
$i = \overline{1, I}$
УКП
БКП
методы векторной оптимизации
8 методы скалярной оптимизации
решение
$\vec{y}_0$
$M_{нс}(\vec{y})$
$\vec{x}_0 = (x_{1_0} \dots x_{n_0})$

Рис. 2.1

дыдущем разделе последовательности решаемых при синтезе системы задач, представим методику оптимального проектирования РТС в виде структурной схемы (рис. 2.1).

Первоначально задача проектирования формулируется «на словах» (блок 1). Словесная формулировка представляет собой техническое задание на проектирование и отражает состояние вопроса, наши знания и опыт в рассматриваемой области. Следующий этап — математическая формулировка задачи оптимального проектирования (блоки 2—6). Цель этого этапа — перевести задачу синтеза РТС на язык «иксов» и «игреков». Выделим следующие характерные моменты данного этапа:

анализ задания и математическое описание системы (блок 2). В результате анализа выделяются внешние $\bar{y}=(y_1 ... y_m)$ и внутренние $\bar{x}=(x_1 ... x_n)$ параметры, а также ограничения на них: Φ_y и Φ_x соответственно. Ограничения определяют область изменения параметров и назначаются по физическому смыслу (ограничения неотрицательности), техническому заданию, а также исходя из анализа взаимосвязи между параметрами или по влиянию на РТС более высокой ступени иерархии, в которую входит проектируемая система. Совокупность ограничений Φ_y, Φ_x представляет собой систему функциональных зависимостей, представленных в виде равенств и (или) неравенств:

$$\varphi_j (y_1 ... y_m) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, J}, \quad \varphi_i (x_1 ... x_n) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если ограничения представлены нематематическими условиями, касающимися элементной базы проектируемой системы или условий эксплуатации, их желательно преобразовать в математические ограничения типа равенств или неравенств. Например, если радиопередатчик требуется выполнить на транзисторах, можно задать его мощность $P_{\text{прд}}$ в виде неравенства $P_{\text{прд}} \leqslant P_0$;

выбор критерия $\overline{W} = W(y_1 ... y_m)$, представляющего собой в общем случае векторную функцию внешних разноразмерных параметров (блок 4);

определение уравнений связи между внешними и внутренними параметрами $y_i = f_i (x_1 ... x_n)$, $i = \overline{1, m}$ (блок 3);

математическая запись задачи векторной (блок 5) или скалярной (блок 6) оптимизации. Задача векторного синтеза записывается в виде задачи отыскания экстремума векторной функции $\overline{W}$ при функциональных ограничениях на внешние параметры (блок 5):

$$\begin{cases} \text{найти } \bar{y}_0 = (y_{1_0} ... y_{m_0}), \text{ обеспечивающий } \operatorname{extr} \overline{W} = W(y_1 ... y_m) \\ \text{при } \varphi_j (y_1 ... y_m) \leqslant 0, \ j = \overline{1, J} \end{cases} \qquad (2.1)$$

При записи скалярной задачи синтеза критерий оптимизации с помощью уравнений связи преобразуется в функцию оптимизируемых параметров—целевую функцию $W(x_1 \dots x_n)$ (блок 6/1). Также с помощью уравнений связи можно преобразовать ограничения на внешние параметры через внутренние (блок 6/2) и произвести математическую запись задачи синтеза (блок 6/3) как задачи нахождения экстремума скалярной функции многих переменных W при функциональных ограничениях на эти переменные:

$$\begin{cases} \text{найти } \bar{x}_0 = (x_{1_0} \dots x_{n_0}), \\ \text{обеспечивающий } \min (\max) \, W = F\,(x_1 \dots x_n) \\ \text{при } \varphi_i\,(x_1 \dots x_n) \leqslant 0, \; i = \overline{1, I}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Число ограничений J, I в задачах (2.1), (2.2) не связано с числом внутренних n или внешних m параметров. Эти ограничения определяют область допустимых систем, из которых по extr W необходимо выбрать одну оптимальную РТС.

Заключительным этапом проектирования является решение сформулированной задачи (2.1) или (2.2) известными методами векторной (блок 7) или скалярной (блок 8) оптимизации соответственно. При решении скалярной задачи удается получить одну единственную РТС с оптимальными внутренними параметрами $\bar{x}_0 = (x_{1_0} \dots x_{n_0})$, обеспечивающими максимум или минимум целевой функции. При решении векторной задачи используется так называемый *безусловный критерий предпочтения* (БКП) /2/, однако результат решения по БКП не является однозначным, в общем случае находится некоторое множество нехудших систем $М_{нс}$ $(\bar{y})$. Поэтому для выбора единственной оптимальной РТС необходимо использовать *условный критерий предпочтения* (УКП) (блок 7).

Известные методы УКП можно разделить на два вида — методы решения векторной задачи синтеза в области внешних параметров и методы сведения векторной задачи к скалярной путем использования одной из форм целевой функции с последующим решением задачи в области внутренних параметров. В первом случае УКП представляется через нормированные внешние параметры, а искомый вектор $\bar{y}_0$ определяется сравнительным анализом скалярных величин. На рис. 2.1 эта разновидность УКП показана справа от блока «УКП». Во втором случае используются определенные формы целевой функции, которая представляет основу формулировки скалярной оптимизационной задачи (см. связь блоков 7 и 6/1 на рис. 2.1).

Оба вида УКП позволяют найти одну оптимальную РТС и подробно рассматриваются в последующих разделах: первый вид УКП — в разделе методов векторного синтеза, второй — при рассмотрении форм целевой функции в разделе методов скалярной оптимизации.

Пример. Найти мощность передатчика $P_{прд}$ и пороговую мощность приемника $P_{пор}$ (чувствительность) радиолокатора, обеспечивающих заданную максимальную дальность действия R_{max} при минимальных затратах на приемную и передающую части РЛС.

Заданную дальность действия радиолокатора можно обеспечить либо увеличением мощности передатчика, либо повышением чувствительности приёмника. В первом случае увеличатся затраты на передатчик, но снизятся расходы на приёмник, во втором случае повысятся затраты на приёмную часть, но уменьшатся расходы на передающую часть. Очевидно, что существуют некоторые оптимальные значения $P_{прд_{opt}}$, $P_{пор\ opt}$, при которых суммарные затраты минимальны.

В соответствии со словесной формулировкой внешними параметрами задачи являются суммарные затраты и дальность действия РЛС: $y_1 = C = C_{пр} + C_{прд}$, $y_2 = R$. Ограничения на внешние параметры формулируются по физическому смыслу ($y_1 > 0$), и в соответствии с заданием: $y_2 \geqslant R_{max}$.

Внутренними параметрами являются мощность передатчика и чувствительность приемника: $x_1 = P_{прд}$, $x_2 = P_{пор}$. По физическому смыслу $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Критерий оптимизации является вектором: $\overline{W} = W\,(y_1, y_2)$. Но в задаче требуется минимизировать один внешний параметр $y_1 = C$, а на другой наложено ограничение по условию, поэтому целевую функцию удобно сформулировать по простейшей форме: минимизировать затраты при ограничении на дальность действия, т. е. обеспечить $\min W = \min y_1 = C_{пр} + C_{прд}$ при $y_2 = R \geqslant R_{max}$.

Уравнения связи, а их здесь два: $y_1 = f_1\,(x_1, x_2)$ и $y_2 = f_2\,(x_1, x_2)$ — находятся следующим образом. Первое — технико-экономическая зависимость затрат на РЛС от мощности передатчика и чувствительности приемника — методом интерполяции искомой зависимости по опорным точкам $C_{прд\,1}\,(P_{прд\,1})$, ..., $C_{прд\,к}\,(P_{прд\,к})$, $C_{пр1}\,(P_{пор\,1})$, ..., $C_{пр\,к}\,(P_{пор\,к})$ (рис. 2.2). Последние могут быть получены в результате анализа известных схем приемников и передатчиков, например, методом калькуляции. Искомые зависимости имеют вид прямой линии и гиперболы: $C_{прд} = a_1 + a_2 P_{прд}$, $C_{пр} = a_3/P_{пор}$, т. е. $y_1 = C_{прд} + C_{пр} = a_1 + a_2 x_1 + a_3 / x_2$, что справедливо при $P_{прд} \geqslant P_{прд\,0}$, $P_{пор} \geqslant P_{пор\,0}$, или $x_1 \geqslant P_{прд\,0}$, $x_2 \geqslant P_{пор\,0}$. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются методом наименьших квадратов /6/.

Второе уравнение $R = f_2\,(P_{прд}, P_{пор})$ представляет собой основное уравнение радиолокации /5/: $R = \sqrt[4]{\dfrac{P_{прд}\,G^2 \cdot \lambda^2}{(4\,\pi)^3\,P_{пор}}\,\sigma_ц} =$

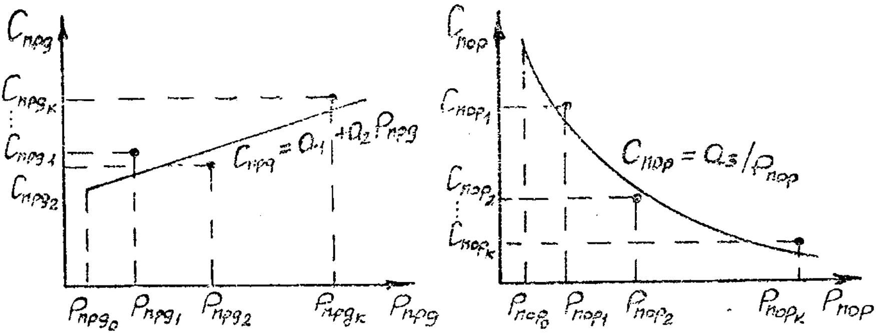

Рис. 2.2

$$= a_4 \sqrt[4]{\frac{P_{\text{прд}}}{P_{\text{пор}}}} \quad \text{или} \quad y_2 = a_4 \sqrt[4]{x_1 / x_2},$$

где G — коэффициент направленного действия антенно-фидерного тракта РЛС,

λ — длина волны,

$\sigma_ц$ — эффективная поверхность рассеяния цели.

Преобразуем целевую функцию $\min y_1$ и ограничение на другой внешний параметр $y_2 \geqslant R_{\max}$ через внутренние с помощью уравнений связи: $\min W = a_1 + a_2 x_1 + a_3/x_2$ при $a_4 \sqrt[4]{x_1/x_2} \geqslant R_{\max}$. Из всей совокупности ограничений на внутренние параметры ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 \geqslant P_{\text{прд}\,0}$, $x_2 \geqslant P_{\text{пор}\,0}$) выберем наиболее жесткие: $x_1 \geqslant P_{\text{прд}\,0}$, $x_2 \geqslant P_{\text{пор}\,0}$, тогда задача оптимизации формулируется в виде (2.2), причем $n = 2$, $i = \overline{1,3}$:

$$\begin{cases} \text{найти } \bar{x}_0 = (x_{1\,0},\ x_{2\,0}), \text{ обеспечивающие} \\ \qquad \min W = a_1 + a_2 x_1 + a_3 / x_2 \\ \text{при} \begin{cases} R_{\max} - a_4 \sqrt[4]{x_1 / x_2} \leqslant 0, \\ P_{\text{прд}\,0} - x_1 \leqslant 0, \quad P_{\text{пор}\,0} - x_2 \leqslant 0. \end{cases} \end{cases}$$

Решить полученную задачу можно различными математическими методами скалярной оптимизации. Так как $n = 2$, наиболее нагляден графоаналитический метод (рис. 2.3). Область допустимых параметров (систем) M_c на плоскости $x_1 - x_2$ представляет собой пересечение трех полуплоскостей, заданных тремя линейными ограничениями типа неравенств. На рис. 2.3 эта область выделена штриховкой. Уравнение $W = a_1 + a_2 x_1 + a_3/x_2$ представляет собой семейство гипербол, в котором параметром является значение W. Действительно, преобразуем целевую функцию к каноническому виду: $\left(x_1 - \frac{W - a_1}{a_3}\right) x_2 = -a_2$.

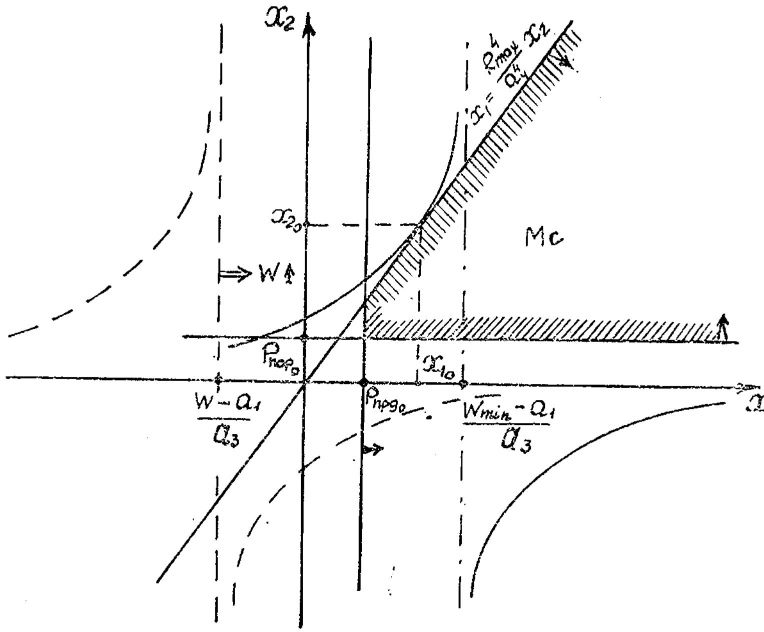

Рис. 2.3

Асимптоты гиперболы: $\frac{W-a_1}{a_3}$; 0. При увеличении W вертикальная асимптота и ветви гиперболы (последние расположены во 2-м и 4-м квадрантах, образованных асимптотами гиперболы, так как правая часть канонического уравнения отрицательная) перемещаются вправо, и первая же точка касания гиперболы области допустимых систем даст искомые значения $\bar{x}_0 = (x_{1\,0}, x_{2\,0})$. Поскольку оптимальное значение РЛС находится на прямой $x_1 = \frac{R^4_{max}}{a_4{}^4} x_2$, преобразуем целевую функцию: $W = a_1 + a_2 \frac{R^4_{max}}{a_4{}^4} x_2 + \frac{a_3}{x_2}$ и из условия $dW/dx_2 = a_2 \frac{R^4_{max}}{a^4{}_4} - \frac{a_3}{x_2{}^2} = 0$ находим $x_{2\,0} = \frac{a_4{}^2}{R^2_{max}} \sqrt{\frac{a_3}{a_2}}$, тогда $x_{1\,0} = \frac{R^2_{max}}{a_4{}^2} \sqrt{\frac{a_3}{a_2}}$.

Итак

$$\begin{cases} P_{прд\ opt} = \frac{R^2_{max}}{a_4{}^2} \sqrt{\frac{a_3}{a_2}} \\ P_{пор\ opt} = \frac{a_4{}^2}{R^2_{max}} \sqrt{\frac{a_3}{a_2}} \end{cases}$$

Задача 6. Сформулируйте задачу 2 математически.

Задача 7. Сформулируйте задачу 3 математически.

Задача 8. В примере 3 первого раздела в качестве целевой функции W для определения оптимального значения длительности зондирующего импульса РЛС τ используется так называемая «весовая» функция $W = \beta_1 \delta R + \beta_2 \cdot \Delta F$, в которой β_1, 1/м и β_2, 1/Гц — весовые коэффициенты, выравнивающие размерность и показывающие степень важности, значимости соответствующего параметра, причем $\beta_1 + \beta_2 = 1$ (см. рис. 1.3). Запишите задачу отыскания оптимального значения τ_0.

3. ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ВЕКТОРНОГО СИНТЕЗА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

3.1. ПРИНЦИПЫ ВЫБОРА КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача выбора критерия (см. рис. 2.1, блок 4) является центральной проблемой оптимизации, так как в результате синтеза РТС является оптимальной в смысле выбранного критерия. Если критерий выбран неверно, то никакие изощренные математические методы не помогут получить правильный результат. В то же время выбор критерия является наиболее трудной задачей. Укажем основные трудности при назначении критерия $\overline{W}$.

Первая из них — разнообразие учитываемых факторов. Действительно, одним из принципов выбора критерия является требование учета существенных внешних параметров, определяющих качество РТС: $\overline{W} = W\,(y_1 \ldots y_m)$, где число внешних параметров m может быть достаточно большим. Так, для РТС передачи информации существенными параметрами являются точность воспроизведения сообщения на выходе системы, занимаемая полоса частот, надежность и экономические затраты $(m = 4)$, хотя в зависимости от требований заказчика этот список параметров можно продолжить. Для РЛС существенными параметрами являются дальность действия, точность определения координат цели (дальности, углов азимута и места), сектор обзора (по азимуту и углу места), стоимость РЛС $(m = 7)$; для системы радиоуправления — вероятность поражения цели и экономические затраты $(m=2)$ и т. п. Некоторые авторы рассмотренный принцип учёта всех факторов радиосистемы называют «проклятием размерности», ибо при большом числе m разработчику системы вряд ли удастся получить решение задачи, — слишком велико число учитываемых разноразмерных параметров.

Далее большая роль элементов субъективизма. Критерии разнообразны, как разнообразны проектируемые системы, для каждой РТС — свой, назначаемый разработчиком. И кто не знает: сколько людей — столько и мнений!

И последнее — противоречивость принципов формирования критерия. С одной стороны, для большей полноты синтеза желательно увеличивать число учитываемых внешних параметров m, что, однако, может завести разработчика в тупик, т. е. привести к невозможности решения задачи и «из-за деревьев не увидеть леса». Поэтому критерий должен допускать возможность определения его численного значения и быть достаточно простым. Но здесь также существует опасность потери истины, а упрощенчество и огрубление ситуации может «выплеснуть воду из таза вместе с ребёнком».

О трудностях выбора критерия оптимизации свидетельствуют многочисленные примеры из жизни и техники: просмотрев кинофильм, различные зрители дают ему разные, часто диаметрально противоположные оценки; усилительное устройство может обеспечить высокий коэффициент усиления, но не лучше ли повысить верхнюю граничную частоту, снизив коэффициент усиления? Поэтому при выборе критерия оптимизации много решает опыт и интуиция разработчика. Непременным и порой решающим фактором при формировании критерия является эрудиция разработчика системы: необходимо хорошо знать проектируемую РТС и использовать определенный опыт, традиции в конкретной технической дисциплине: «кибернетика, электроника, ... — а голова на что?» (А. Райкин).

Таким образом, критерий оптимизации является вектор-функцией $\overline{W} = W\,(y_1 \ldots y_m)$ разноразмерных внешних параметров, часть которых стремятся увеличить, другие — уменьшить, и задача оптимизации в общем случае представляет собой задачу векторного синтеза:

$$\left|\begin{array}{l} \text{найти вектор } \bar{y}_0 = (y_{1_0} \ldots y_{m_0}), \text{ при котором обеспечивается} \\ \operatorname{extr} \overline{W} = W\,(y_1 \ldots y_m) \quad \text{при} \quad \varphi_j\,(y_1 \ldots y_m) \leqslant 0, \ \ j = \overline{1, J}. \end{array}\right. \quad (3.1)$$

Ограничения $\varphi_j\,(\bar{y})$ задачи (3.1) определяют множество допустимых систем M_c, из которого и необходимо выбрать оптимальную РТС.

3.2. *МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОГО СИНТЕЗА*

Решение задачи векторного синтеза (3.1) в области внешних параметров (т. е. без преобразования в область $\bar{x}$ внутренних параметров с помощью уравнений связи) осуществляется по критериям безусловного предпочтения.

Для реализации методов условимся параметры $\ddot{y}$ считать стандартными, т. е. неотрицательными и такими, что чем они меньше, тем лучше система. Так, вероятность ошибки при передаче сообщения $P_{\text{ош}}$, стоимость С и т. п. являются стандартными, а время безотказной работы T_0, вероятность поражения цели $P_{\text{пор}}$ — нестандартные параметры. Для приведения к стандартному виду используются формулы перевода $1/y_i$ и $1-y_i$. Являются стандартными параметры $\lambda_0 = 1/T_0$, 1/час — интенсивность отказа и $P_{\text{пр}} = 1 - P_{\text{пор}}$ — вероятность промаха.

При стандартных показателях качества $\bar{y}$ для решения задачи (3.1) используется векторное неравенство Парето* или безусловный критерий предпочтения БКП /2/: если $\overline{W}_1 \leqslant \overline{W}_2$, т. е. в случае выполнения неравенства $y_i^{(1)} \leqslant y_i^{(2)}$ при соблюдении хотя бы для одного параметра $y_{i=k}$ строгого неравенства $y_k^{(1)} < y_k^{(2)}$, система с показателем $\overline{W}_1$ безусловно лучше другой системы. В результате использования БКП из исходного множества систем $M_{\text{с}}$ находится класс так называемых нехудших систем $M_{\text{нс}}$. Таким образом, согласно БКП система называется *худшей,* если среди остальных — «нехудших» систем найдётся хотя бы одна, у которой все показатели качества меньше или равны соответствующим показателям данной системы, но хотя бы по одному из m параметров соблюдается знак строгого неравенства.

Дальнейший анализ, т. е. выбор единственной оптимальной системы из множества $M_{\text{нс}}$, предполагает использование условных критериев предпочтения УКП. В данном разделе рассматриваются методы УКП, позволяющие найти оптимальное значение $\bar{y}_0 = (y_{10} \dots y_{m0})$ из области допустимых внешних параметров по нормированным показателям, без перевода задачи (3.1) в область внутренних параметров. Методы УКП, позволяющие сформулировать целевую функцию, рассмотрим в следующем разделе, так как при этом задача векторного синтеза преобразуется в скалярную.

3.3. МЕТОДЫ БКП

Известно несколько методов использования БКП, основными из которых являются следующие.

Метод непосредственного последовательного использования неравенства $\overline{W}_1 >< \overline{W}_2$, который применяется для дискретного множества $M_{\text{с}}$.

П р и м е р 1. Найти множество нехудших систем $M_{\text{нс}}$ из пяти систем $M_{\text{с}} = \{S_1 \dots S_5\}$, представленных на рис. 3.1.

Имея в виду, что при $\overline{W}_1 \geqslant \overline{W}_2$ система S_2 лучше системы S_1,

* Парето — итальянский математик.

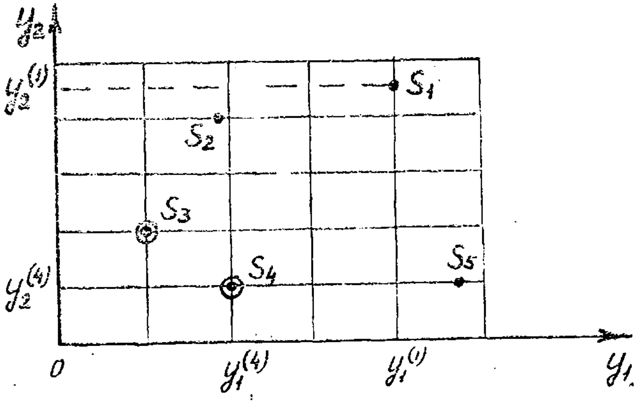

Рис. 3.1

можно заключить, что множество нехудших систем составляют системы S_3 и S_4: $M_{нс} = \{S_3, S_4\}$.

Действительно, система S_2 лучше системы S_1, так как оба параметра $y_1^{(2)}$ и $y_2^{(2)}$ для S_2 меньше соответствующих параметров $y_1^{(1)}$ и $y_2^{(1)}$ первой системы. Аналогично система S_3 лучше, чем S_2. Следовательно, из систем S_1 — S_2 — S_3 лучшей является S_3. Далее, система S_4 лучше, чем S_5, так как при равенстве $y_2^{(4)} = y_2^{(5)}$ параметр $y_1^{(4)}$ меньше параметра $y_1^{(5)}$. В то же время системы S_3 и S_4 несравнимы: система S_3 лучше, чем S_4 по параметру y_1, а по параметру y_2 лучшей является система S_4. На рис. 3.1 $M_{гс}$ выделено знаком ⊙.

Графический метод, основанный на выделении левой нижней границы множества $M_с$ (используется при $m=2$). При дискретном $M_с$(рис. 3.2) выделяются самые левые ($S_{л1}$) и нижние ($S_{н1}$)

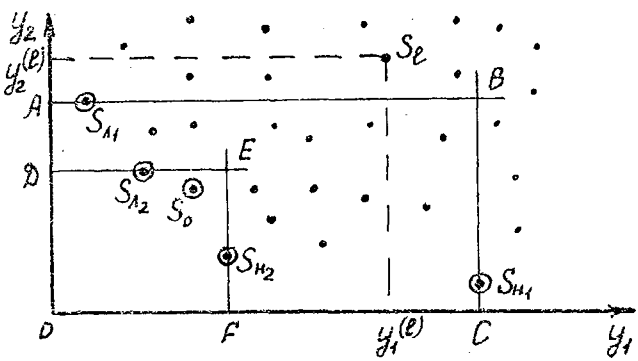

Рис. 3.2

точки — системы, и с осями координат строится прямоугольник $OABC$. Очевидно, что все системы S_l вне этого прямоугольника хуже, чем $S_{л1}$ и (или) $S_{н1}$. Далее для оставшихся внутри прямоугольника $OABC$ систем выделяются левые и нижние системы $S_{л2}$, $S_{н2}$, строится прямоугольник $ODEF$ и т. д. до тех пор, пока внутри нового прямоугольника останется не более одной системы (см. S_0 на рис. 3.2). Полученная совокупность систем $S_{л1}$, $S_{л2} \ldots S_{н1}$, $S_{н2} \ldots S_0$ и составляет искомое множество нехудших систем: $M_{нс} = \{S_{л1}, S_{л2}, S_{н1}, S_{н2}, S_0\}$ — выделено знаком ⊙.

Для непрерывного M_c (рис. 3.3) множество нехудших систем составляет часть границы множества M_c, заключенной между точками $S_л$ и $S_н$, если эта граница носит монотонный характер (выделено более жирной линией).

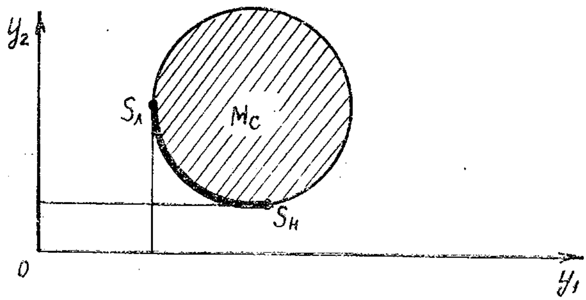

Рис. 3.3

Метод рабочих характеристик, основанный на минимизации какого-то одного показателя при фиксированных значениях остальных $m-1$ показателей, например,

$$\begin{cases} \min y_1 \\ \text{при } y_{2\min} \leqslant y_2 \leqslant y_{2\max} \end{cases} \tag{3.2}$$

или

$$\begin{cases} \min y_2 \\ \text{при } y_{1\min} \leqslant y_1 \leqslant y_{1\max} \end{cases} \tag{3.2}$$

При $m = 2$ метод рабочих характеристик реализуется графически, причем $M_{нс} = M_{нс\,1} \cap M_{нс\,2}$, где $M_{нс\,1}$ — множество нехудших систем, найденное по формуле (3.2), $M_{нс\,2}$ — множество нехудших систем, найденное из условия $\min y_2$ по (3.2), $\cap$ — знак пересечения множеств.

Пример 2. Найти множество нехудших систем из заданного графически множества M_c (рис. 3.4) методом рабочих характеристик.

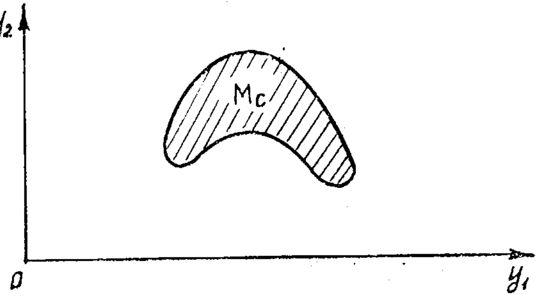

Рис. 3.4

Решение задачи иллюстрируется графически на рис. 3.5. На рис. 3.5,а найдено $М_{нс\,1}$ по формуле (3.2) из условия $\min y_1$: для каждого фиксированного значения y_2 (горизонтальные линии $y_2 = \text{const}$) выделяются левые точки из $M_с$, совокупность которых и образует $М_{нс\,1}$. На рис. 3.5,б, аналогично найдено $М_{нс\,2}$ (выделено более жирной линией), а затем найдено и $М_{нс}$, (рис. 3.5,в) как пересечение множеств.

Рассмотренные методы БКП вытекают непосредственно из векторного неравенства.

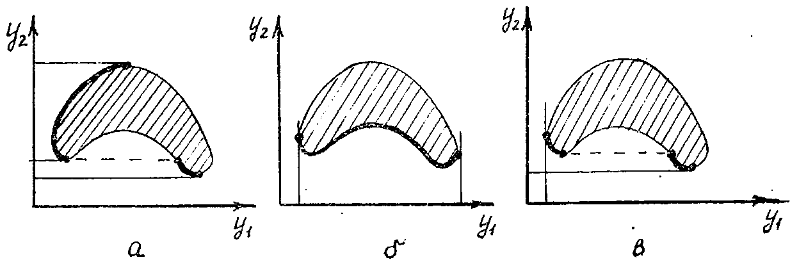

Рис. 3.5

3.4. МЕТОДЫ УКП

В основе известных методов УКП лежит определенная доля субъективизма и произвола, однако использование УКП позволяет выбрать одну-единственную систему, оптимальную в соответствии с выбранным критерием. Выбор того или иного метода УКП определяется назначением, целью создания системы, а также требованиями заказчика.

Известны следующие методы УКП:

перевод всех показателей качества, кроме одного, в разряд ограничений; по существу, оптимальная радиосистема выбирается по одному параметру, например, по $\min y_1$ или $\min y_2$ (для $m = 2$);

введение результирующей функции

$$W_{\text{р}} = F(y_1 \ldots y_m) \Rightarrow \min,$$

например весовой: $W_{\text{р}} = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m$, где $\beta_1 \ldots \beta_m$—весовые коэффициенты, выравнивающие размерность и характеризующие степень важности показателя качества;

минимаксный метод, согласно которому лучшей считается система, имеющая наименьший из наихудших (наибольших) нормированных параметров:

$$\max_i \{k_i\} = \max\left(\frac{y_1}{y_{1\max}} \cdots \frac{y_i}{y_{i\max}} \cdots \frac{y_m}{y_{m\max}}\right) \Rightarrow \min$$

$$\text{или} \quad \max\left(\frac{y_{1\min}}{y_1} \cdots \frac{y_{i\min}}{y_i} \cdots \frac{y_{m\min}}{y_m}\right) \Rightarrow \min$$

модифицированный минимаксный метод, считающийся наиболее объективным, ибо учитывает возможный разброс внешних параметров:

$$\max_i \{k_i'\} = \max\left(\frac{y_1 - y_{1\min}}{y_{1\max}} \cdots \frac{y_i - y_{i\min}}{y_{i\max}} \cdots \frac{y_m - y_{m\min}}{y_{m\max}}\right) \Rightarrow \min$$

Пример 3. Различные варианты построения системы радиоуправления, просчитанные проектировщиком, имеют вероятность поражения цели $P_{\text{пор}} = 0{,}8$; 0,9; 0,85; 0,7; 0,8; 0,8; 0,85; 0,85, надежность $\lambda =$ 0,5; 0,6; 0,1; 0,5; 0,45; 0,6; 1,0; $0{,}6 \cdot 10^{-4}$, 1/час, и стоимость $C = 3{,}5$; 4,0; 5,0; 3,5; 5,5; 4,0; 8,0; $10 \cdot 10^3$, руб. соответственно. Выбрать оптимальную систему из имеющихся.

По БКП выделим $M_{\text{нс}}$. Для этого приведем заданные показатели к стандартному виду. Из трех показателей нестандартным является вероятность поражения цели $P_{\text{пор}}$. По формуле перехода $y_i^* = 1 - y_i$ введем вероятность промаха $P_{\text{пр}} = 1 - P_{\text{пор}} = 0{,}2$; 0,1; 0,15; 0,3; 0,2; 0,2; 0,15; 0,15. Используем БКП непосредственно. По сравнению с системой S_1 худшими (по всем трем показателям) являются системы S_4, S_6, по сравнению с S_2 — системы S_7 и S_8, по сравнению с S_3 — система S_5. Следовательно, $M_{\text{нс}} = \{S_1, S_2, S_3\}$.

Используем все рассмотренные методы УКП:

по критерию $\min y_1 = P_{\text{пр}}$ лучшей является система S_2, по $\min y_2 = \lambda$ — система S_3, по $\min y_3 = C$ — система S_1;

по результирующему критерию вида $W_{\text{р}} = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$ лучшей является система S_3;

для использования минимаксного метода определим значения нормированных показателей: $k_1 = \frac{y_1}{y_{1\max}}$, $k_2 = \frac{y_2}{y_{2\max}}$ и $k_3 = \frac{y_3}{y_{3\max}}$,

Таблица 3.1

Варианты	УКП												
	1				2	3				4			
	$P_{пор}$	$P_{пр}$	$\lambda \cdot 10^{-4}$ 1/час	C тыс. руб.	$W_р = P_{пр} \times \lambda \cdot C \cdot 10^{-4}$, тыс. руб./час	k_1	k_2	k_3	k_{max}	k_1'	k_2'	k_3'	k'_{max}
S_1	0,8	0,2	0,5	**3,5**	0,35	0,2	0,5	0,35	**0,5**	0,2	0,4	0,0	0,4
S_2	0,9	**0,1**	0,6	4,0	0,24	0,1	0,6	0,4	0,6	0,1	0,5	0,05	0,5
S_3	0,85	0,15	**0,1**	5,0	**0,075**	0,15	0,1	0,5	**0,5**	0,15	0,0	0,15	**0,15**
S_4	0,7	0,3	0,5	3,5									
S_5	0,8	0,2	0,45	5,5									
S_6	0,8	0,2	0,6	4,0									
S_7	0,85	0,15	1,0	8,0									
S_8	0,85	0,15	0,6	10,0									

Примечание. Выделены лучшие по каждому из методов УКП системы.

где $y_{1\,max} = 1$ (исходя из физического смысла), $y_{2\,max} = 10^{-4}$, 1/час, $y_{3\,max} = 10$ тыс. руб. (из исходных данных). Выбираем для каждой системы максимальное из трех нормированных значение $k_{max\,1} = 0{,}5$, $k_{max\,2} = 0{,}6$, $k_{max\,3} = 0{,}5$, откуда видно, что по $\min k_{max}$ лучшими являются системы S_1 и S_3;

по модифицированному минимаксному критерию учитываем минимальные значения $y_{1\,min} = 0$, $y_{2\,min} = 0{,}1 \cdot 10^{-4}$ 1/час, $y_{3\,min} = 3{,}5$ тыс. руб., тогда $k'_{max1} = 0{,}4$, $k'_{max2} = 0{,}5$, $k'_{max3} = 0{,}15$, и по $\min k'_{max}$ лучшей является система S_3. Результаты расчетов сведены в табл. 3.1.

Задача 9. Найти множество нехудших систем радиоуправления, если расчет десяти вариантов построения систем дал следующие значения надёжности λ, 1/час и вероятности поражения цели $P_{пор}$:

Номер варианта	1	2	3	4	5
λ	$2 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-6}$	10^{-4}	$3 \cdot 10^{-4}$
$P_{пор}$	0,8	0,9	0,7	0,95	0,9
Номер варианта	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-5}	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-5}$	$7{,}5 \cdot 10^{-5}$
$P_{пор}$	0,7	0,8	0,85	0,65	0,75

Задача 10. РЛС характеризуется тремя показателями качества: отношением сигнал/помеха, разрешающей способностью по дальности δR, м и затратами, тыс. руб. Выбрать наилучшую РЛС из имеющихся $S_1 \ldots S_8$, показатели которых приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Номер варианта	Сигнал / Помеха	δR, м	C, тыс. руб.
1	3,0	100	35
2	3,5	120	20
3	3,0	150	50
4	5,0	110	45
5	4,0	120	15
6	2,0	200	35
7	1,0	100	40
8	4,5	180	20

Задача 11. Из множества систем M_c, заданных графически на рис. 3,6, выделить $M_{нс}$.

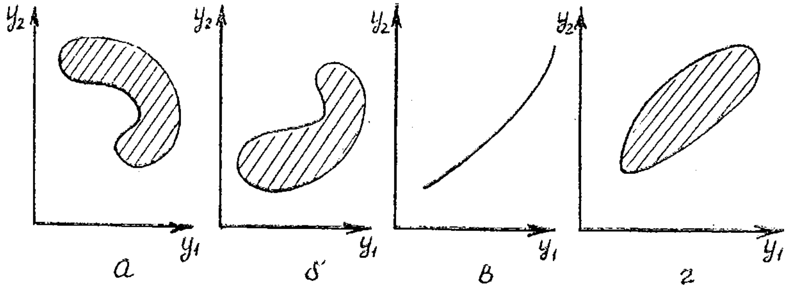

Рис. 3.6

Задача 12. Радиопередающая связная система самолета конструктивно состоит из модулятора М, передатчика П и антенно-фидерной (АФ) системы. Каждый блок может быть выполнен в четырех различных вариантах, характеризующихся различными весом и стоимостью (табл. 3.3).

Таблица 3.3

№ п/п	М		П		АФ	
	P, кг	С, руб.	*P*, кг	С, руб.	*P*, кг	С, руб.
1	4,5	800	3,0	500	2,5	400
2	3,0	700	2,0	800	2,0	600
3	4,0	800	2,5	600	3,0	500
4	3,5	600	1,5	800	3,5	450

Найти наилучший вариант (варианты) построения самолетной радиопередающей системы.

Указание. Задачу решать двумя методами: 1) графически, изобразив всевозможные варианты построения системы в координатах *P*—С; 2) непосредственным использованием БКП сначала к каждому блоку, а затем к их сочетаниям. Сравнить результаты решения.

Задача 13. Каждый из трех блоков, входящих в состав радиосистемы передачи информации (Д — датчик, Пр — преобразователь, М — модулятор), характеризуется различным временем безотказной работы $T_{0\,д} = 500;\ 350;\ 300$, час. $T_{0\,пр} = 400, 250, 600, 800$, час, $T_{0\,м} = 1000, 1200, 1000$, час и соответствующей среднеквадратической погрешностью при передаче единицы информации $\sigma_д\% = 2,0;\ 1,0;\ 2,5;\ \sigma_{пр} = 1,2;\ 1,0;\ 0,5;\ 1,0\%;$ $\sigma_м = 1,5;\ 1,0;\ 2,0\%$.

Выбрать наилучшее сочетание указанных блоков, обеспечивающее наиболее достоверную и надежную передачу сообщений. Дать графическую интерпретацию задачи.

Задача 14. Для многоканальных РТС передачи информации с временным разделением каналов (ВРК) найти $M_{нс}$ по полосе частот Δf_c, занимаемой сигналом, и требуемой мощности сигнала на входе приёмника P_c. Формулы для расчета указанных параметров сведены в табл. 3.4 /7/.

Таблица 3.4

Вид модуляции	$y_1 = \Delta f_c$	$y_2 = P_c$	Пределы изменения индексов модуляции
АИМ—АМ	$4\mu N F_{cm}$	$\dfrac{N_0 N F_в}{\delta^2_{вых} m^2_{ам}}$	$m_{ам} = 1$
ВИМ—АМ (ШИМ—АМ)	$\dfrac{4\mu N F_{cm}}{1 - m_\tau}$	$\dfrac{N_0 N F_в (1 - m_\tau)^2}{2\delta^2_{вых} m^2_\tau}$	$m_\tau = 0,5...0,9$
АИМ—ЧМ	$4\mu N F_{cm} (1 + m_{чм})$	$\dfrac{N_0 N F_в}{3\delta^2_{вых} m^2_{чм}}$	$m_{чм} \ll 10$
ВИМ—ЧМ (ШИМ—ЧМ)	$\dfrac{4\mu N F_{cm}}{1 - m_\tau}(1 + m_{чм})$	$\dfrac{N_0 N F_в (1 - m_\tau)}{3\delta^2_{вых} m^2_{чм} m^2_\tau}$	$m_{чм} = 1, 2, 4, 10$; $m_\tau = 0,5...0,9$

В формулах (см. табл. 3.4) N — число каналов РТС, $\mu = 2,5 ... 5,0$ — коэффициент в формуле Котельникова, F_{cm} — максимальная частота в спектре передаваемого сообщения, $F_в$ — частота среза фильтра приемника, $\delta^2_{вых}$ — точность воспроизведения сообщения на выходе системы. Записать $M_{нс}$ аналитически.

Указание. Для упрощения расчетов ввести относительные показатели полосы и мощности сигнала: $y_{1\,отн} = \dfrac{\Delta f_c}{\Delta f_{c\,АИМ\text{-}АМ}}$, $y_{2\,отн} = \dfrac{P_c}{P_{c\,АИМ\text{-}АМ}}$ и построить зависимости $y_{1\,отн}$ ($y_{2\,отн}$) для каждого вида модуляции при изменениях индексов модуляции m_τ, $m_{чм}$ в указанных пределах. Левая нижняя граница полученного M_c и представляет собой $M_{нс}$.

Задача 15. Выбрать вид модуляции в цифровых РТС передачи информации по полосе частот, занимаемой сигналом, и требуемой мощности сигнала на входе приемника.

Указание: при анализе РТС передачи информации рассмотреть амплитудную (АМн), частотную (ЧМн) и фазовую (ФМн) манипуляции ортогональными $ФМн_{орт}$ и противоположными $ФМн_{пр}$ сигналами. Как и в предыдущей задаче, при сравнении ввести относительные значения внешних параметров.

Задача 16. В задаче 9 определить оптимальную систему радиоуправления по модифицированному минимаксному критерию, если значение интенсивности отказов лежит в пределах $\lambda = 10^{-7}...10^{-4}$ 1/час.

Задача 17. В задаче 10 использовать различные методы УКП и сравнить между собой полученные результаты.

Задача 18. Найти оптимальное значение длительности импульса τ РЛС, обеспечивающее наилучшее значение помехоустойчивости ($\min \Delta F = 1/\tau$) и разрешающей способности ($\min \delta R = c\tau/2$) по дальности. Для решения использовать весовую результирующую функцию с изменением весовых коэффициентов в пределах 0,1...0,9.

Задача 19.. Найти оптимальное значение периода повторения T зондирующего сигнала РЛС, обеспечивающее наименьшую ошибку слежения за целью ($\min \Delta R = V_r T/k$) и наибольшую дальность однозначного измерения ($\max R_{одн} = cT/2$), приняв в качестве целевой функции весовую, $V_r/k = 0{,}1$ м/с, размерность «весов» — в единицах СИ. Решить задачу для различных значений весовых коэффициентов, изменяя их через интервал 0,2.

Задача 20. Найти (выбрать) наилучшую систему самолетного передатчика в задаче 12 минимаксным и модифицированным минимаксным методами.

Указание: при расчете максимально- и минимально возможных значений учитывать всевозможные варианты построения системы.

Задача 21. Решить задачу 13 различными методами УКП и проанализировать полученные результаты.

4. МЕТОДЫ СКАЛЯРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

4.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМЫ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ /6, 11–13/

Для сведения векторной задачи к скалярной используется одна из форм целевой функции. Первой, наиболее простейшей формой целевой функции является представление ее в виде одного внешнего параметра с переводом остальных внешних параметров в ограничения типа равенств или неравенств, например:

$$\operatorname{extr} \overline{W} = W(y_1 \ldots y_m) \Rightarrow \begin{cases} \min(\max)\ W = F(y_1) \\ \text{при} \quad \begin{cases} y_2 \leqslant y_{2\,\text{огр}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_m \leqslant y_{m\,\text{огр}} \end{cases} \end{cases}$$

В этой форме за простотой и ясным физическим смыслом скрыта значительная доля произвола и субъективизма при разделении внешних параметров на главные и второстепенные. Большие трудности возникают при назначении ограничений на внешние параметры.

Более объективно представление целевой функции в виде упорядоченной совокупности целевых функций первой формы с приоритетом, например:

$$\overline{W} = \begin{cases} W_1 = F(y_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_i = F(y_i) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_m = F(y_m) \end{cases}$$

Здесь наиболее важным принят параметр y_1, вторым по важности y_2 и т. д. Подобная «ранжировка» внешних параметров соответствует нашему ,часто интуитивному процессу принятия решений. Так, при покупке телевизора мы, в первую очередь, обратим внимание на качество изображения. Затем, из всех примерно одинаковых по качеству изображения, выбираем наиболее подходящий по цвету передней панели и т. д. К сожалению, не всегда можно количественно оценить степень превосходства параметров, что превращает процесс отыскания решения в субъективный.

Наиболее приемлемой формой является представление целевой функции некоторой результирующей зависимостью. Такая форма широко используется, если в качестве обобщающего параметра взять экономический: затраты С, экономическую эффективность Э или их разность Э—С:

$$\operatorname{extr} \overline{W} = \begin{cases} \min\left[\mathrm{C}(y_1) + \ldots + \mathrm{C}(y_m)\right] \\ \max\left[\text{Э}(y_1) + \ldots + \text{Э}(y_m)\right] \\ \max\left[\text{Э}(y_1) + \ldots + \text{Э}(y_m) - \mathrm{C}(y_1) - \ldots - \mathrm{C}(y_m)\right]. \end{cases}$$

В этом случае субъективизм сводится к нулю, однако для практической реализации этой формы необходимо знать технико-экономические зависимости, нахождение которых часто связано с большими трудностями.

Другим способом формирования результирующей целевой функции является введение весовых коэффициентов β_i, $i = 1,m$, выравнивающих размерность и характеризующих степень важности, значимости данного параметра, например:

$$\mathrm{extr}\,\overline{W} = \begin{cases} F = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i y_i \quad \text{или} \quad F = \prod\limits_{i=1}^{m} \beta_i y_i \quad \text{или} \\ F = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^{\beta_i} \quad \text{или} \quad F = \prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{\beta_i} \Rightarrow \max\,(\min), \end{cases}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i = 1$. Знак коэффициента определяется тем, в какую сторону стремятся изменить показатели. Так, если в последней формуле принять $\beta_i = \pm 1$, то функция W будет иметь вид дроби, в которой в числителе расположатся показатели, которые желательно увеличить, в знаменателе — уменьшить и т. д.

Наибольшей трудностью этой формы является назначение «весов», которые находятся методом экспертных оценок /14, 15/. По результатам опроса группы экспертов (специально подобранных компетентных лиц) осуществляется статистическая обработка — нормирование и усреднение оценок и расчет весовых коэффициентов. Достоверность оценок достаточно высокая — 0,9...0,95.

Наконец, в практике проектирования РТС широко используются комбинированные формы, когда некоторую часть m_1 параметров можно представить результирующей функцией или расположить «по ранжиру», а остальные $m - m_1$, которые на данном этапе развития научной мысли не приводятся к единой размерности или не могут быть проранжированы, переводятся в разряд ограничений. В результате получаем комбинации 2-й или 3-й форм с первой.

Таким образом, использование любой формы целевой функции или их комбинаций преобразует векторную функцию $\overline{W}$ в скалярную $W = F\,(y_1 \ldots y_m)$. Далее, для формулировки скалярной оптимизационной задачи необходимо выразить функцию $F(y_1 \ldots y_m)$ и ограничения на внешние параметры $\varphi_j\,(y_1 \ldots y_m) \leqslant 0$, $j = 1, J$ через внутренние параметры. Для этого используются уравнения связи.

4.2. УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ

С помощью уравнений связи осуществляется преобразование целевой функции и ограничений на внешние параметры через внутренние. Уравнения связи отображают техническое построение РТС, и могут быть найдены в результате анализа функционирования системы. Очевидно, что такой анализ может осуществить квалифицированный специалист, хорошо подготовленный в области радиотехники. Для него не составит труда установить такие взаимосвязи, как зависимости параметров антенно-фидерного тракта от длины волны, дальности обнаружения от мощности излучения и параметров зондирующего сигнала РЛС и т. п.

Если искомые зависимости аналитически не определяются, можно использовать метод аппроксимации экспериментальных данных, который позволяет установить функциональные зависимости между двумя случайными величинами. Для реализации метода предварительно находится ряд точек $x_i - y_i$, $i = \overline{1, k}$, через которые и требуется некоторым наилучшим образом провести искомую кривую $y = f(x)$ (рис. 4.1). Искомые точки $y_i(x_i)$ могут быть получены либо экспериментально, например, путем моделирования поведения РТС на ЭВМ, либо рассчитаны. Способ расчета точек $y_i(x_i)$ широко используется при нахождении технико-экономических зависимостей.

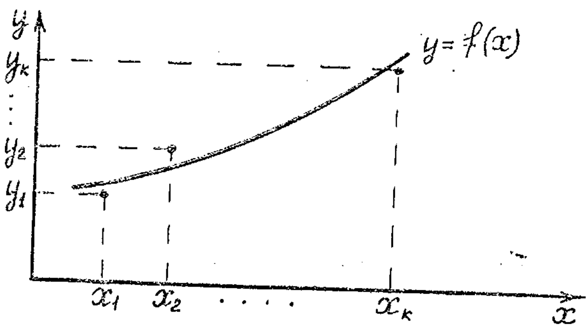

Рис. 4.1

Конкретная реализация метода аппроксимации экспериментальных данных зависит от критерия, принятого при проведении искомой зависимости $y = f(x)$ и от вида последней. В частности, если искомая зависимость линейна: $f(x) = A_1 x + A_2$, то при минимизации суммы квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{k} [y_i - f(x_i)]^2 = \min$ можно найти /6, 16/:

$$A_1 = \frac{k \sum_{i=1}^{k} x_i y_i - \sum_{i=1}^{k} y_i \sum_{i=1}^{k} x_i}{k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2},$$

$$A_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sum_{i=1}^{k} y_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{i=1}^{k} x_i y_i}{k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}. \qquad (4.1)$$

Пример 1. Найти зависимость стоимости ЭВМ типа ЕС С от ее производительности П по следующим исходным данным (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Параметры ЭВМ	Тип ЭВМ			
	ЕС 1020	ЕС 1033	ЕС 1040	ЕС 1050
$П_i$, тыс. операц./с	20	100	300	500
$С_i$, тыс. руб.	313,2	660	1300	1600

Известно, что $С = С_0 П^a$ /17/. Для нахождения искомых коэффициентов $С_0$ и a можно воспользоваться найденными зависимостями (4.1), если произвести замену переменных: $\lg С_i = \lg С_0 + a \lg П_i$, тогда $y_i = \lg С_i$, $A_1 = a$, $x_i = \lg П_i$, $A_2 = \lg С_0$. Результаты расчетов сведем в табл. 4.2.

Таблица 4.2

k	$С_i$, млн. руб.	$П_i$, млн. оп./с	$x_i = \lg П_i$	$y_i = \lg C_i$	x_i^2	$x_i y_i$
1	0,3132	0,02	—1,699	—0,5042	2,886	0,85
2	0,66	0,1	—1,0	—0,1805	1,0	0,1805
3	1,3	0,3	—0,5229	0,1139	0,2734	—0,06
4	1,6	0,5	—0,301	0,2041	0,0906	—0,06
Σ			—3,523	—3,3667	4,249	0,91

В соответствии с выражениями (4. 1)

$$A_1 = \frac{4 \cdot 0{,}91 - (-0{,}3667)\ (-3{,}523)}{4 \cdot 4{,}249 - 3{,}523^2} = 0{,}5\,,$$

$$A_2 = \frac{4{,}249 \cdot (-0{,}3667) - (-3{,}523) \cdot 0{,}91}{4 \cdot 4{,}249 - 3{,}523^2} = 0{,}343\,.$$

Переходя к прежним переменным, получим $a = 0{,}5$, $С_0 = 10^{0{,}343} = 2{,}2$, т. е. $С = 2{,}2 \cdot П^{0{,}5}$. Найденная зависимость представлена графиком на рис. 4.2.

Таким образом, в результате использования одной из форм целевой функции и уравнений связи задача оптимального проектирования РТС (3.1) преобразуется в общем случае в задачу нелинейного программирования (НЛП), заключающуюся в нахождении экстремального значения скалярной функции многих переменных F при функциональных ограничениях на эти переменные, например:

найти $\bar{x}_0 = (x_{1_0} \dots x_{n_0})$, обеспечивающий

$$\begin{cases} \min (\max) \ W = F \ (x_1 \dots x_n) \\ \text{при } \varphi_i \ (x_1 \dots x_n) \leqslant 0, \ \ i = \overline{1, I}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Если функции n переменных F и φ_i, $i = \overline{1, I}$ линейны, то модель (4.2) определяет задачу линейного программирования (ЛП).

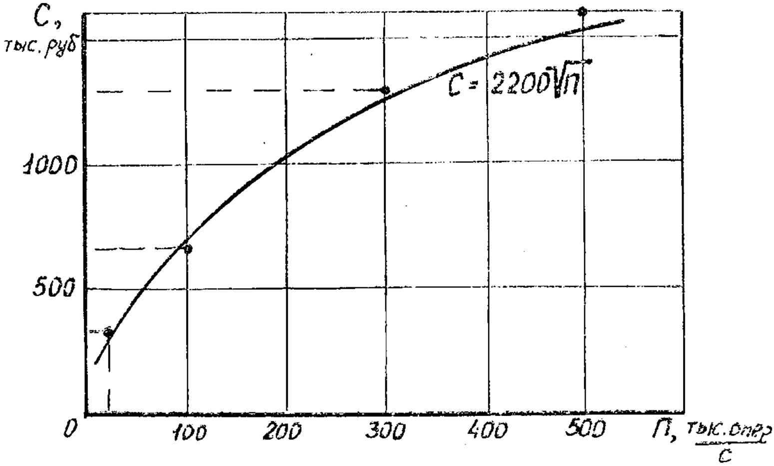

Рис. 4.2

4.3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СКАЛЯРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ /8—10/

Рассмотрим некоторые методы решения задач, сформулированных по модели (4.2), и позволяющих понять и осмыслить сущность скалярной оптимизации: *классический* метод нахождения безусловного экстремума функции многих переменных, *графический* метод отыскания экстремума функции двух переменных $F\ (x_1\, x_2)$ при известных ограничениях $\varphi_i\ (x_1\, x_2) \leqslant 0$, $i = \overline{1, I}$ и *метод множителей Лагранжа*. В начале каждого пункта будем давать методику решения задач (на примерах), а затем приводить задания для самостоятельного решения (с ответами в конце пособия для более сложных задач). Студентам настоятельно рекомендуется самостоятельно попробовать свои силы и прорешать предлагаемые задания. Необходимый справочный материал можно получить в литературе /18/. Студентам, желающим дополнительно ознакомиться с примерами задач оптимизации и их решениями, рекомендуются задачники /19, 20/.

4.3.1. Классические задачи на безусловный экстремум

В задачах на безусловный экстремум ограничения φ в модели (4.2) отсутствуют, если функция $W=F(x_1 \ldots x_n)$ непрерывна вместе со своими частными производными, то необходимым условием существования экстремума в точке $\bar{x}_0=(x_{1_0} \ldots x_{n_0})$ является равенство нулю градиента целевой функции в этой точке, т. е.

$$\nabla W = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\bar{x}_0} = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.3}$$

Условие (4.3) в общем случае определяет множество так называемых стационарных (подозрительных на экстремум) точек, ибо оно выполняется не только в точках экстремума, но и в седловых точках, точках перегиба.

Достаточные условия экстремума связаны с изучением дифференциала второго порядка целевой функции в стационарных точках, а именно со знаком главных диагональных миноров матрицы (Гессиана): если

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \cdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1} \cdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} \end{bmatrix}_{\bar{x}_0} > 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

то точка $\bar{x}_0$ является точкой минимума;
если

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \cdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1} \cdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} \end{bmatrix}_{\bar{x}_0} (-1)^k > 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

то точка $\bar{x}_0$ является точкой максимума.

Пример 2. Найти $\min W = 3x_1^3 - x_1 + x_2^3 - 3x_2^2 - 1$.

Решение. Необходимые условия минимума

$$\begin{cases} \partial W/\partial x_1 = 9x_1^2 - 1 = 0 \\ \partial W/\partial x_2 = 3x_2^2 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

выполняются в четырех точках: $\bar{x}_0^{(1)} = (1/3, 0)$; $\bar{x}_0^{(2)} = (1/3, 2)$; $\bar{x}_0^{(3)} = (-1/3, 0)$; $\bar{x}_0^{(4)} = (-1/3, 2)$, поэтому исследуем на знак Гессиан:

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2 \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 - 6 \end{bmatrix} =$$

$$= 18x_1, \quad 108x_1x_2 - 108x_1.$$

Достаточные условия минимума (4.4) выполняются лишь в точке $x_0^{(2)}$, в которой $18 \cdot 1/3 > 0$, $108 \cdot 1/3 \cdot 2 - 108 \cdot 1/3 > 0$, поэтому $\bar{x}_{0\,\min} = (1/3, 2)$, при этом $W_{\min} = 3 \cdot (1/3)^3 - 1/3 + 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 1 = -47/9$. Предлагаем читателю убедиться в этом лишний раз, вычислив значение целевой функции в остальных подозрительных на экстремум точках.

П р и м е р 3. Оценка по методу наименьших квадратов. Найти коэффициенты A и B прямой $C = AP_{\text{прд}} + B$, аппроксимирующей функциональную зависимость между значениями мощности передатчика $P_{\text{прд}} = P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_k$ и соответствующими им стоимостями $C = C_1, \ldots C_i \ldots C_k$ (рис. 4.3).

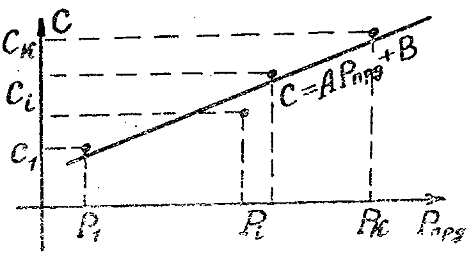

Рис. 4.3

Проведем функциональную зависимость таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек $C_i\,(P_i)$ от прямой $C\,(P_{\text{прд}})$ была минимальной

$$W = \sum_{i=1}^{k} [C_i - (AP_i + B)] \Rightarrow \min.$$

Тогда коэффициенты A и B находим по условию (4.3), так как в данном случае имеем задачу безусловного минимума функции двух переменных:

$$\begin{cases} \partial W/\partial A = 2 \sum\limits_{i=1}^{k} [C_i - (AP_i + B)]\,P_i = 0 \\ \partial W/\partial B = 2 \sum\limits_{i=1}^{k} [C_i - (AP_i + B)] \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда легко получить (после раскрытия знака $\sum$)

$$A = \frac{\sum\limits_1^k C_i \sum\limits_1^k P_i - k \sum\limits_1^k C_i P_i}{(\sum\limits_1^k P_i)^2 - k \sum\limits_1^k P_i^2}, \quad B = \frac{\sum\limits_1^k C_i P_i \sum\limits_1^k P_i - \sum\limits_1^k C_i \sum\limits_1^k P_i^2}{(\sum\limits_1^k P_i)^2 - k \sum\limits_1^k P_i^2},$$

что совпадает с приведенными выше соотношениями (4.1).

На практике, ввиду сложности достаточных условий (4.4) и

(4.5) обычно используется лишь необходимое условие (4.3) совместно с некоторыми физическими соображениями, относящимися к конкретной задаче. В частности, широко используется прием вычисления целевой функции W в стационарных точках и выбор ее экстремального значения, особенно в задачах, где дополнительно заданы простые ограничения вида $x_i \leqslant x_{i\,\text{огр}}$, т. е. $x_i \geqslant a$, $x_i \leqslant b$, $b \leqslant x_i \leqslant a$. Например, исходя из физических соображений, на оптимизируемые параметры РТС можно наложить ограничения неотрицательности $x_i \geqslant 0$, и т. п. В этом случае, если область допустимых значений замкнута и ограничена, точка экстремума располагается либо внутри области допустимых значений, заданной простыми ограничениями, либо на границе этой области. Внутренние точки определятся из условия (4.3), граничные точки — путем последовательного приравнивания каждой одной переменной к заданным значениям $x_{i\,\text{огр}}$ и определения $\text{extr}\, W\,(x_{1\,\text{огр}}, x_2 \ldots x_n)$, затем $\text{extr}\, W\,(x_1, x_{2\,\text{огр}}, x_3 \ldots \ldots x_n)$, ..., $\text{extr}\, W(x_1 \ldots x_{n-1}, x_{n\,\text{огр}})$, далее к $x_{i\,\text{огр}}$ приравниваются каждые две переменные и определяются $\text{extr}\, W\,(x_{1\,\text{огр}}, x_{2\,\text{огр}}, x_3 \ldots x_n)$, $\text{extr}\, W\,(x_{1\,\text{огр}}, x_2, x_{3\,\text{огр}}, x_4 \ldots x_n)$, ... и т. д. до значения $W\,(x_{1\,\text{огр}} \ldots x_{n\,\text{огр}})$.

Методика решения экстремальных задач при простых ограничениях имеет следующую последовательность:

из условия (4.3) находятся стационарные точки, проверяются на заданные ограничения и рассчитываются значения W в точках, удовлетворяющих простым ограничениям;

исследуется граница области, заданной ограничениями с вычислением W в граничных точках;

сравниваются полученные значения целевой функции W между собой и выбирается наибольшее (наименьшее).

Пример 4. Найти экстремумы функции $W = 4x_1 - x_1^2 + 1{,}5\,x_2 - 0{,}25\,x_2^2 + 2{,}75$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant 3$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 4$. Проиллюстрировать решение графически.

В соответствии с рассмотренной методикой из условия (4.3) находим

$$\begin{cases} \partial W/\partial x_1 = 4 - 2\,x_1 = 0 \\ \partial W/\partial x_2 = 1{,}5 - 0{,}5\,x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W\,(2{,}3) = 9 \text{ (точка } A).$$

Исследуем границы положительной области ($x_1 = 0; 3; x_2 = 0; 4$).

При $x_1 = 0$ $W = 1{,}5\,x_2 - 0{,}25\,x_2^2 + 2{,}75$, и из условия (4.3) $\partial W/\partial x_2 = 1{,}5 - 0{,}5\,x_2 = 0$ находим $x_2 = 3$, и $W(0{,}3) = 5$ (точка B);

при $x_2 = 0$ $W = 4\,x_1 - x_1^2 + 2{,}75$, $\partial W/\partial x_1 = 4 - 2\,x_1 = 0$, $x_1 = 2$, и $W(2{,}0) = 6{,}75$ (точка C) ;

при $x_1 = 3$ $W = 5{,}75 + 1{,}5\,x_2 - 0{,}25\,x_2^2$, $\partial W/\partial x_2 = 1{,}5 - 0{,}5\,x_2 = 0$, $x_2 = 3$, и $W\,(3{,}3) = 8$ (точка D) ;

при $x_2 = 4$ $W = 4x_1 - x_1^2 + 4{,}75$, $\partial W/\partial x_1 = 4 - 2x_1 = 0$, $x_1 = 2$ и $W(2{,}4) = 8{,}75$ (точка E);

при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $W(0{,}0) = 2{,}75$ (точка F);

при $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ $W(0{,}4) = 4{,}75$;

при $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ $W(3{,}0) = 5{,}75$;

при $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ $W(3{,}4) = 7{,}75$.

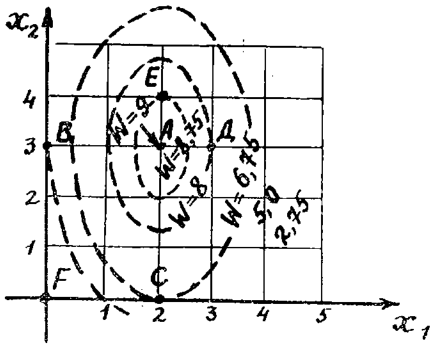

Рис. 4.4

Из найденных девяти стационарных точек выбираем $\max W = 9$, $\bar{x}_{\max} = (2{,}3)$, $\min W = 2{,}75$, $\bar{x}_{\min} = (0{,}0)$. Точки A, B, C, D, E, F показаны на рис. 4.4.

Линии цели $W(x_1, x_2)$ построены после выделения в целевой функции полных квадратов: $(x_1 - 2)^2 + \frac{(x_2 - 3)^2}{4} = -W + 9$ — семейство эллипсов с центром (2.3) и полуосями $a = \sqrt{9 - W}$, $b = 2\sqrt{9 - W}$.

Заметим, что для точки (2.3), найденной из условия (4.3), выполняются достаточные условия существования максимума (4.5), т. к. эта точка является внутренней безусловной (убедитесь в этом самостоятельно).

Задача 22. Найти:

а) $\max(\min)\ W = 4(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 1)^2 - (x_3 - 2)^2$;

б) $\mathrm{extr}\ W = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 11$;

в) $\mathrm{extr}\ W = x_1 - x_2^2 - 3$;

г) $\max(\min)\ W = 2x_1 - x_1^2 + x_2$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$;

д) $\max(\min)\ W = x_1^2 + 2x_1 + x_2$ при $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$;

е) $\mathrm{extr}\ W = x_1 - x_2^2 - 4x_2$ при $0 \leqslant x_1 \leqslant 3$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 2$;

ж) $\max(\min)\ W = 4x_1 - x_1^2 + 8x_1 - x_2^2$ в области $x_1, x_2 \geqslant 0$.

Дать, где это возможно, графическую интерпретацию задачи.

Задача 23. Найти кратность резервирования n ($n \geqslant 1$) УПЧ в примере 2 разд. 1 (см. рис. 1.2), если закон изменения затрат на производство УПЧ $C_п$ от n линеен, а закон снижения эксплуатационных затрат $C_э$ логарифмический, т. е. $C_п = q_п \cdot n + C_1$, $C_э = C_2 - q_э \ln(2 - 1/n)$. Найти n при различных соотношениях между $q_п$ и $q_э$.

Задача 24. Найти оптимальный коэффициент передачи трансформатора n в задаче 1.

Задача 25. Найти оптимальные значения затрат на СУ и БЗ в задаче 7.

Задача 26. Найти оптимальную длительность зондирующего импульса РЛС в задаче 8, если эмпирические коэффициенты удельных затрат на единицу разрешающей способности β_1, 1/м и единицу полосы β_2, 1/Гц известны.

Задача 27. Коэффициенты в эмпирических формулах $y = Ae^{-ax}$ и $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ должны быть оценены по методу наименьших квадратов. Сформулируйте эту задачу как задачу оптимизации и найдите искомые коэффициенты.

Указание: для формулы $y = Ae^{-ax}$ решить задачу двумя способами: 1) непосредственной формулировкой целевой функции W по методу наименьших квадратов и нахождением ее экстремума; 2) произвести замену переменных (через $\ln y$), свести задачу к линейному виду, воспользовавшись результатами примера 3 данного раздела, и затем сделать обратную замену переменных.

Задача 28. Оценить параметр k в уравнении $y_i = kU_{c\,i} + U_{п\,i}$, где $i = \overline{1,n}$ — дискретные моменты наблюдения входного колебания $y(t)$, $U_c(t)$ — полностью известный в точке приёма сигнал, $U_п(t)$ — помеха, на фоне которой осуществляется оценивание.

Вычислить значение k для $n = 3$ ($U_{c\,i} = 1$, 2, 3 В, $y_i = 4$, 9, 10 В) и дать геометрическую иллюстрацию задачи.

Задача 29. Найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в окружность $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ (см. указание к задаче 30).

Задача 30. Определить оптимальные размеры консервной банки (радиус r и высота h) заданного объёма V_0, имеющей минимальную поверхность. Убедитесь на имеющихся у Вас банках, что выпускаемые промышленностью банки имеют не оптимальные размеры, что приводит к излишнему расходу жести и свидетельствует о том, что в промышленности не хватает специалистов по оптимизации.

Указание: для сведения задач 29 и 30 к безусловным необходимо из ограничений выразить одну из искомых переменных, подставить ее в целевую функцию и затем найти решение, используя условия (4.3)—(4.5) задачи безусловного экстремума.

4.3.2. Графический метод решения оптимизационных задач

В n-мерном евклидовом пространстве система ограничений задачи оптимизации (4.2) определяет некоторое тело, ограниченное гиперповерхностями, уравнения которых имеют вид $\varphi_i(x_1 \dots x_n) = 0$, $i = \overline{1,m}$ — область допустимых значений, или допустимое множество систем M_c. Для нахождения экстремума W необходимо выявить такую точку в M_c, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня целевой функции $W(x_1 \dots x_n) = \mathrm{const}$. Эта точка может находиться как на границе, так и внутри M_c.

Если $n \leqslant 2$, то задачу оптимизации можно решить графически. При этом используются аналитические выражения алгебраических линий и поверхностей 1—2 порядка, известных из курса аналитической геометрии /18/.

Пример 5. Найти $\max(\min) W = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ при $x_1 + 2x_2 \leqslant 10$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

Решение задачи в двух- и трехмерном пространстве представлено на рис. 4.5,а,б.

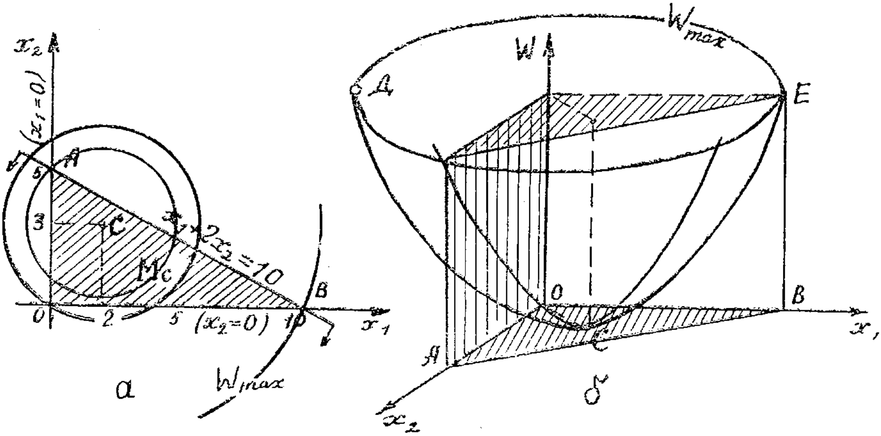

Рис. 4.5

Прямые $x_1 + 2x_2 = 10$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ образуют треугольник OAB, который и является областью допустимых систем M_c (в трехмерном пространстве—призма, рис. 4.5,б). Линии уровня представляют собой сечение параболоида вращения DCE, т. е. семейство окружностей $W = R^2 = (x_1 - A_1)^2 + (x_2 - A_2)^2$ с центром в точке C (2, 3) и радиусом $R = \sqrt{W}$. С увеличением R значение W увеличивается. Проводя из точки C (2, 3) окружности разных радиусов, видим, что наименьшее значение целевой функции $W_{\min} = 0$ — в центре параболоида, — точке C, принадлежащей M_c. Наибольшее значение целевая функция принимает в точке B, когда окружность «покидает» M_c, т. е. при бóльших значениях W не существует таких значений $(x_1 x_2)$ из M_c, которые бы удовлетворяли равенству $W_{\text{м}} = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$, где $W_{\text{м}} > W_{\max}$.

Координаты точки B определяются из решения системы уравнений, на пересечении которых данная точка находится, т. е.

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow B\ (10{,}0) \Rightarrow W_{max} = 73.$$

Итак, $W_{min}\ (2{,}3) = 0$, $W_{max}\ (10{,}0) = 73$.

Для нахождения экстремальной точки часто используется метод касательных.

Пример 6. Найти $\min\ (\max)\ W = 3x_1 + 4x_2$ при

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leqslant 25 \\ x_1 \cdot x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

и дать графическую интерпретацию.

Как и в предыдущем примере, решим задачу в следующей последовательности:

построим множество допустимых систем M_c. Первое уравнение представляет собой окружность с центром (0,0) и радиусом $R = 5$, второе — гиперболу с асимптотами $x_1 = x_2 = 0$ и ветвями, расположенными в 1—3 квадранте, третье и четвертое ограничения — прямые (оси координат). Обозначая для каждой линии множество M_c, строим совместную область M_c для исходной задачи (рис. 4.6);

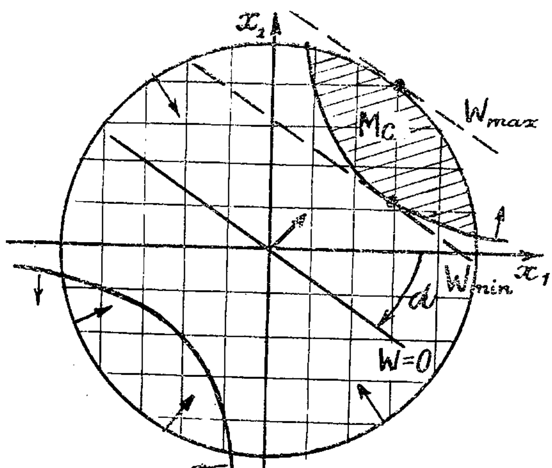

Рис. 4.6

строим семейство целевых функций, в данном случае семейство прямых, $\operatorname{tg}\alpha = -3/4$ ($\alpha \simeq 37°$), перемещающихся при увеличении W в сторону x_1, $x_2 \to +\infty$ (показано стрелкой на рис. 4.6);

находим точку экстремума графически: при увеличении W первая точка, коснувшаяся M_c, дает точку минимума, последняя же точка касания прямой и M_c (окружности) — точку максимума;

находим точки экстремума аналитически, используя метод касательных.

Угловой коэффициент прямой (целевой функции) в точке минимума $dx_2/dx_1 = -3/4$ (находится дифференцированием W как неявной функции: $0 = 3dx_1 + 4dx_2$), угловой коэффициент касательной к гиперболе в точке минимума находим дифференцированием гиперболы как неявной функции: $x_1 dx_2 + x_2 dx_1 = 0$, откуда $dx_2/dx_1 = -x_2/x_1$, в результате получаем одно из уравнений для определения $\bar{x}_{\min}$: $dx_2/dx_1 = -3/4 = -x_2/x_1$. Присоединяя к этому уравнению уравнение гиперболы, на которой расположена точка минимума, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 3/4 = x_2/x_1 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases},$$

откуда $x_{1\ \min} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \simeq 2{,}3$; $x_{2\ \min} = \sqrt{3} \simeq 1{,}7$;

$$W_{\min}\ (2{,}3;\ 1{,}7) = 14{,}2\,.$$

Аналогично находится точка максимума и значение $W_{\max}(3{,}0;\ 4{,}0) = 250$ (предлагаем студентам самостоятельно проверить правильность определения $\bar{x}_{\max}$ и $W_{\max}$).

Графическая интерпретация задачи приведена на рис. 4.6. Иллюстрацию задачи в трехмерном пространстве предлагаем студентам произвести самостоятельно.

В задачах линейного программирования (ЛП) допустимое множество систем M_c определяется линейными ограничениями — неравенствами вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$, $i = \overline{1,m}$ и представляет собой выпуклый многогранник (в 2-мерном пространстве — многоугольник). Так как целевая функция в задачах ЛП также линейна: $W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, то решение задачи ЛП, если оно существует, лежит в вершине выпуклого многогранника.

При решении задач ЛП возможны случаи отсутствия решения, когда $M_c = \varnothing$ или $W \to \pm\infty$, или задача может иметь бесчисленное множество решений, когда целевая функция совпадает с одним из ребер многогранника и достигает экстремума во всех точках этого ребра.

П р и м е р 7. Найти промежутки значений коэффициента β, при которых задача ЛП

$$\max W = x_1 + 2x_2 \quad \text{при}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 9 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 1 \\ \beta x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

неразрешима.

Выполним построение M_c (рис. 4.7), заданной первыми двумя прямыми с ограничениями неотрицательности, и целевой функции ($\operatorname{tg} \alpha = -1/2$). Здесь же изобразим третье ограничение при $\beta = 0$ ($x_1 \leqslant 2$). При β^+ M_c будет расширяться, при β^- — сужаться.

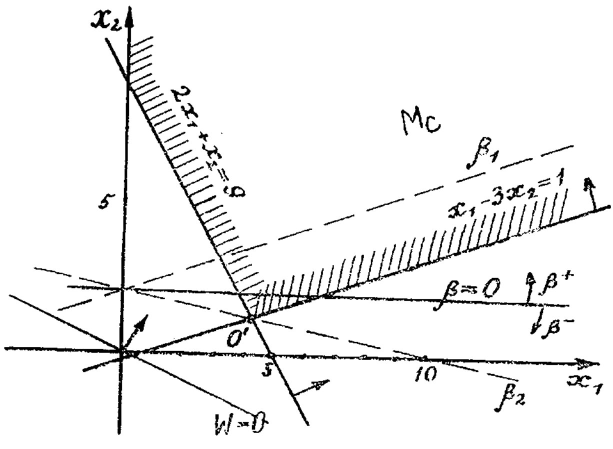

Рис. 4.7

Из геометрического построения видно, что задача не будет иметь решение ($W_{\max} = +\infty$) при таком β_1, когда третья прямая будет параллельна первой, т. е. $\beta_1/1 = 1/3$, $\beta_1 = 1/3$, или $\beta \geqslant \beta_1$, а также при таком β_2, когда $M_c = \varnothing$, т. е. третья прямая будет проходить через точку O', которую находят из системы уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$, откуда точка O' имеет координаты (4.1). Подставляя их в третье уравнение, получим $\beta_2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -2$, т. е. $\beta_2 = -1/4$. Сама точка O' должна быть исключена (иначе она будет решением ЛП), и окончательно $\beta \geqslant 1/3$, $\beta < -1/4$.

Если в задаче ЛП требуется найти неизвестный коэффициент в целевой функции, то необходимо построить M_c и два возможных варианта целевой функции W при $\beta > 0$ и $\beta < 0$, графически найти положение линии $W = 0$ для заданных условий задачи, и затем из условий пропорциональности коэффициентов найти искомые значения β.

Задача 31. Найти $\min(\max) W = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$

$$\text{при} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 & \\ 10x_1 - x_2 \leqslant 8 & x_1 \geqslant 0 \\ -18x_1 + 4x_2 \leqslant 12 & x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача 32. Используя графический метод найти:

а) $\max W = x_1 x_2$ при

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geqslant 12 & \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 24 & x_1 \geqslant 0 \\ -3x_1 + 4x_2 \leqslant 12 & x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$

б) $\max W = -x_1^2 + 4x_1 + x_2$ при

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + x_2 \leqslant 8; \end{cases}$$

в) $\max W = x_1^2 + x_2^2$ при

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 13 & x_1 \geqslant 0 \\ x_1 x_2 \geqslant 3 & x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$

г) $\min(\max) W = x_1 x_2 - 7x_2 - x_1$ при

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 12 & x_1 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 \leqslant 9 & x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$

д) $\min(\max) W = x_2 + 8x_1 - x_1^2$ при

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 12 & x_1 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 \leqslant 9 & x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$

е) $\min(\max) W = 3x_1 + 2x_2$ при

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 \leqslant 0 & x_1 > 0 \\ 4x_1 + x_2^2 \leqslant 16 & x_2 > 0. \end{cases}$$

Задача 33. Найти $\min(\max) W = 4x_1 + 6x_2$ при

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 9 & \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 8 & x_1 \geqslant 0 \\ x_1 + 6x_2 \geqslant 12 & x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача 34. Найти $\min(\max) W = 2x_1 + x_2$ при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача 35. Для $n=2$ и $m \geqslant 3$ (не менее трех ограничений) привести графическую интерпретацию задач ЛП, обладающих следующими свойствами:

а) имеют единственное решение для W_{max} и W_{min} ;

б) W_{max} достигается в бесконечном множестве точек, а W_{min} — в единственной;

в) W_{max} не существует, а W_{min} достигается в единственной точке;

г) W_{min} и W_{max} не существует $(=\pm\infty)$.

Записать целевую функцию в каждой задаче в виде $W=\pm Ax_1 \pm Bx_2$.

Указание: ограничения неотрицательности использовать в каждой задаче и в число m их не включать.

Задача 36. Найти значения коэффициентов β, при которых задача $\max W = 2x_1 + \beta x_2$ при

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 15 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}$$

имеет бесчисленное множество решений.

Задача 37. Определить область изменения параметра λ, при которой задача $\min W = x_1 - x_2$ при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant \lambda \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

а) не имеет решения;

б) имеет единственное решение;

в) имеет бесконечное множество решений.

4.3.3. Метод множителей Лагранжа

Если ограничения φ в задаче оптимизации (4.2) имеют вид строгих равенств, а функции W, φ_i, $i=\overline{1,m}$ непрерывны вместе со своими частными производными, то для отыскания экстремума W может быть использован метод перехода к некоторой эквивалентной задаче безусловного экстремума: метод исключения переменных или метод множителей Лагранжа. В первом, простейшем случае из уравнений связи нужно выразить m переменных через $n-m$ остальных, подставить их в целевую функцию и получить задачу безусловного экстремума функции $n-m$ переменных, как это было сделано в задачах 29 и 30.

Метод множителей Лагранжа заключается в переходе к задаче на безусловный экстремум функции Лагранжа $F(x_1 ... x_n, \lambda_1 ... \lambda_m) = W(x_1 ... x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$, где переменные $\lambda_1 ... \lambda_m$, характеризующие чувствительность целевой функции к изменениям соответствующего ограничения, называются множителями Лагранжа. Теперь к функции F можно применить необходимые (4.3) и достаточные (4.4)—(4.5) условия существования экстремума: точка $\bar{x}_0 = (x_{1_0} ... x_{n_0})$, в которой может достигаться условный экстремум функции W, находится из системы $m + n$ уравнений с $m + n$ неизвестными $x_1 ... x_n$, $\lambda_1 ... \lambda_m$:

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_j = \partial W/\partial x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \partial\varphi_i/\partial x_j = 0, & j=\overline{1,n} \\ \partial F/\partial \lambda_i = \varphi_i(x_1 ... x_n) = 0, & i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Достаточные условия (4.4)—(4.5) громоздки и сложны, поэтому на практике чаще всего исходят из физических соображений, вычисляя значения целевой функции W в различных точках допустимого множества систем (M_c). В некоторых случаях полезна геометрическая интерпретация задачи.

Пример 8. Найти max (min) $W = x_1^2 + x_2^2$ при $x_1 + x_2 = 5$. По методу исключения переменных $x_1 = 5 - x_2$, тогда $W = (5 - x_2)_2 + x_2^2 = 2x_2^2 - 10x^2 + 25$, $\partial W / \partial x_2 = 4x_2 - 10 = 0$, $x_{2_0} = 2{,}5$, $x_1 = 5 - 2{,}5 = 2{,}5$, т. е. $W(2{,}5;\ 2{,}5) = 12{,}5$.

По методу множителей Лагранжа $F = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5)$ и из условия (4.3)

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_1 = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \partial F/\partial x_2 = 2x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow x_{1_0} = x_{2_0} = 2{,}5, \quad W(2{,}5;\ 2{,}5) = 12{,}5. \\ \partial F/\partial \lambda = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Из графического построения (рис. 4.8) видно, что найденная точка $\bar{x}_0$ (2,5; 2,5) соответствует точке минимума. Максимума целевой функции не существует (max $W = \infty$).

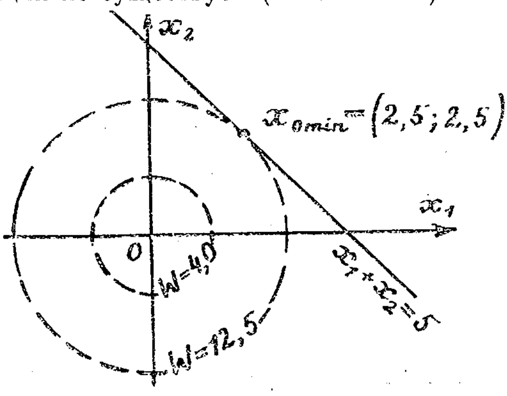

Рис. 4.8

Метод множителей Лагранжа может быть использован и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства

$$\varphi_i\ (x_1 \ldots x_n) \leqslant b_i, \quad i = \overline{1,m}\ .$$

В этом случае точка экстремума $\bar{x}_0$ расположена либо внутри области M_c, заданной системой m неравенств, либо на границе M_c. Поэтому оптимизационная задача решается в несколько этапов. Сначала находятся точки безусловного экстремума целевой функции $W\ (x_1 \ldots x_n)$ (из системы уравнений $\partial W/\partial x_j = 0$, $j = \overline{1,n}$), среди которых отбираются те, которые удовлетворяют условиям связи (неравенствам $\varphi_i\ (x_1 \ldots x_n) \leqslant b_i$, $i = 1,m$). Далее определяются точки условного экстремума, причем последовательно решается ряд задач, в которых неравенства по одному, затем по два и т. д. обращаются в равенства, как это делалось при исследовании области M_c, заданной простыми ограничениями в подразделе (4.3.1). Общее число решаемых на условный экстремум задач равно $\sum\limits_{i=1}^{m} C^i_m$. Так, при $m = 4$ число вспомогательно решаемых задач равно: $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$. Однако, несмотря на громоздкость решения, каждая задача имеет пониженную размерность. Найденные в ходе решения «подозрительные» точки должны удовлетворять всем заданным ограничениям, поэтому общее число стационарных точек, подлежащих дальнейшему исследованию, невелико. Если область M_c замкнута и ограничена, то в заключение достаточно вычислить в найденных точках значения W и выбрать из них экстремальные.

Пример 9. Найти $\min\,(\max)\ W = x_1^2 + x_2^2 - 6\,x_1 - 4\,x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 52$. Дать геометрическую интерпретацию.

Решение. 1) Находим точки безусловного экстремума W с проверкой на заданные ограничения:

$$\nabla W = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial W/\partial x_1 = 2\,x_1 - 6 = 0 \\ \partial W/\partial x_2 = 2\,x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{1\,0} = 3 \\ x_{2\,0} = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_0^{(1)} = (3{,}2)\ ,$$

ибо найденная точка заданному ограничению удовлетворяет: $3^2 + 2^2 < 52$;

2) находим точки условного экстремума W. Здесь $m = 1$, поэтому $\sum\limits_{i} C_m{}^i = C_1{}^1 = 1$, т. е. решается одна задача на условный экстремум: $\min\,(\max)\ W = x_1^2 + x_2^2 - 6\,x_1 - 4\,x_2$ при $x_1^2 + x_2^2 = 52$.

Методом множителей Лагранжа находим:

$$F = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + \lambda\,(x_1^2 + x_2^2 - 52) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_1 = 2x_1 - 6 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \partial F/\partial x_2 = 2x_2 - 4 + 2\lambda x_2 = 0 \\ \partial F/\partial \lambda = x_1^2 + x_2^2 - 52 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1_0} = 6;\ -6; \\ x_{2_0} = 4;\ -4; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_0^{(3)} = (-6,\ -4) \\ \bar{x}_0^{(2)} = (6,4) \end{cases};$$

3) Вычисляем значения целевых функций:
$W(\bar{x}_0^{(1)}) = W(3, 2) = -13$; $W(\bar{x}_0^{(2)}) = W(6,4) = 0$;
$W(\bar{x}_0^{(3)}) = W(-6, -4) = 104$.

Сравнивая полученные значения между собой, окончательно имеем $\max W(\bar{x}_{0\,\max} = (-6, -4)) = 104$, $\min W(\bar{x}_{0\,\min} = (3,2)) = -13$;

4) Иллюстрируем задачу графически (рис. 4.9). Из построения видно, что точка $\bar{x}_0^2 = (6, 4)$ является точкой локаль-

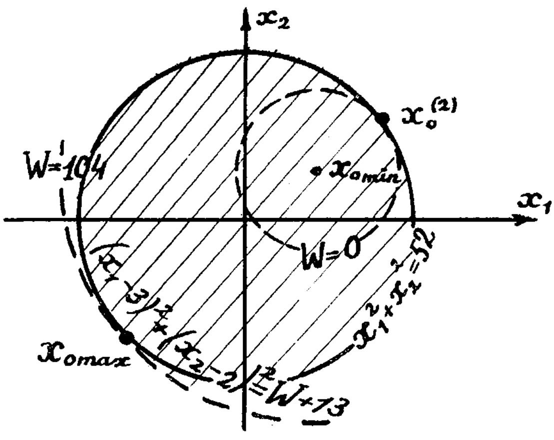

Рис. 4.9

ного экстремума, $\bar{x}_0^{(3)} = (-6, -4)$ — точка максимума, $\bar{x}_0^{(1)} = (3, 2)$ — точка минимума.

Задача 38. Найти $\operatorname{extr} W = 2x_1 - x_1^2 + x_2$

при $\begin{cases} x_1 x_2 + 2x_1 - 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 4 \end{cases}$

методом множителей Лагранжа и дать геометрическую интерпретацию решения.

Задача 39. Распределить наиболее экономно суммарную погрешность $\delta_0 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0{,}1$ (т. е. 10%) между тремя элементами передающей части радиотелеметрической системы — датчиком, преобразователем и модулятором, если известны зависимости экономических затрат от погрешности, вносимой каждым элементом: $C_1 = \frac{8}{\sqrt{\delta_1}} + 0{,}5$; $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} + 0{,}3$; $C_3 = \frac{4}{\sqrt{\delta_3}} + 1{,}0$ (условных единиц) — см. задачу 6. Сравнить полученное значение $C_{\Sigma\,\min}$ со стоимостью системы при равномерном распределении суммарной погрешности между элементами.

Задача 40. Решить задачи 29 и 30 методом множителей Лагранжа.

Задача 41. Синтезировать источник энергии, включающий n последовательно соединенных секций, каждая из которых состоит из m параллельно соединенных батареек. Определить оптимальное значение секций, если каждая из $N = 200$ батареек имеет напряжение E и внутреннее сопротивление $r_0 = 12$ Ом. Цель синтеза — обеспечить максимальный ток в нагрузке $R = 1000$ Ом.

Задача 42. Найти распределение вероятностей P_i случайной величины x, при котором энтропия распределения $H = -\sum_{i=1}^{N} P_i \ln P_i$ будет максимальна (при решении учесть условие нормировки $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$).

Задача 43. В следующих задачах найти extr W при заданных ограничениях и дать геометрическую интерпретацию задач, если это возможно:

а) $\operatorname{extr} W = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 8; \end{cases}$

б) $\max W = x_1\ \ x_2$ при $x_1 - x_2 + 2\,x_1 x_2 \leqslant 3$;

в) $\max W = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3^2 = 4 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 = 12; \end{cases}$

г) $\max W = x_1^2 + 2\,x_1 + x_2$ при $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 \leqslant 5; \end{cases}$

д) $\min (\max)\ W = x_1 x_2 - 2x_2$ при $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1 \leqslant 0 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гуткин Л. С.* Современная радиоэлектроника и ее проблемы — М.: Сов. радио, 1980. — 192 с.
2. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. — М.: Сов. радио, 1975. — 368 с.
3. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука. 1980. — 208 с.
4. *Березин Л. В., Вейцель В. А.* Теория и проектирование радиосистем.—М.: Сов. радио, 1977. — 448 с.
5. Теоретические основы радиолокации. / Под ред. *В. Е. Дулевича.* — М.: Сов. радио, 1978. — 608 с.
6. *Конюхов Н. Е., Глазунов В. А.* Технико-экономическая оценка эффективности радиотехнических систем передачи информации. — Куйбышев: КуАИ, 1980. — 32 с.
7. *Когновицкий Л. В.* Проектирование многоканальных систем передачи информации. — М: МЭИ, 1980. — 72 с.
8. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации, — М.: Наука, 1977. — 344 с.
9. *Кузин Л. Т.* Основы кибернетики. — М.: Энергия, 1973. — 504 с.
10. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 1976. — 352 с.
11. *Сервинский Е. Г.* Оптимизация систем передачи дискретной информации. — М.: Связь. 1974. — 336 с.
12. *Окунев Ю. Б., Плотников В. Г.* Принципы системного подхода к проектированию в технике связи. — М., Связь, 1976. — 184 с.
13. *Юрлов Ф. Ф.* Технико-экономическая эффективность сложных радиоэлектронных систем. — М.: Сов. радио, 1980. — 280 с.
14. *Дрихман Т. Р.* Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. — М.: Радио и связь, 1984. — 288 с.
15. *Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г.* Математико-статистические методы экспертных оценок. — М.: Статистика, 1980. — 263 с.
16. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. — 664 с.
17. Основы построения больших информационно-вычислительных сетей./Под ред. *Д. Г. Жимерина* и *В. И. Максименко.*—М.: Статистика, 1976.—296 с.
18. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. — М.: Наука, 1973. — 872 с.
19. *Егоров С. В.* Классические задачи статистической оптимизации. — М.: Наука, 1980. — 40 с.
20. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая школа, 1975. — 270 с.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧ

1. $x = n$ — коэффициент передачи трансформатора, $y = k = W$ — коэффициент усиления по напряжению. Используя известную из курса «Усилительные устройства» зависимость $k = \frac{n\,|Y_{21}|}{g_{вых} + n^2 g_{вх}}$, где $|Y_{21}|$ — взаимная проводимость транзистора с ОЭ, $g_{вх}$, $g_{вых}$ — входная и выходная проводимости усилительного каскада, можно сформулировать задачу оптимизации в следующем виде: найти значение $x_0 = n_{opt}$, обеспечивающее $\max y(x) = \frac{|Y_{21}| \cdot x}{g_{вых} + x^2 g_{вх}}$.

2. Радиосистема передачи информации состоит из последовательно соединенных датчиков, первичных преобразователей, АЦП, коммутатора, радиопередатчика, линии связи, радиоприемника, устройства выделения сообщений, устройства регистрации. В каждом элементе стоимость единицы погрешности различна, поэтому будут различны и суммарные затраты на РТС при изменении закона распределения погрешности между элементами.

3. Предположим, что затраты на СУ и БЗ оптимальны. Тогда любое другое распределение затрат между ними приведет к снижению $P_{пор}$. Действительно, попытки увеличить вероятность поражения цели путем уменьшения промаха за счет усложнения СУ не дает результатов, ибо при ограниченной суммарной стоимости снаряда придется снизить затраты на БЗ, и суммарная $P_{пор}$ упадет. Наоборот, если увеличить затраты на БЗ, то составляющая вероятности $P_{пор}$, определяемая эффективностью БЗ, возрастает, но из-за необходимости снижения затрат на СУ другая составляющая этой вероятности упадет таким образом, что суммарная вероятность поражения цели снизится. Таким образом, существует оптимальное распределение затрат между элементами снаряда СУ и БЗ, при котором $P_{пор}$ максимальна.

6. Для n последовательно соединенных элементов внутренними параметрами являются погрешности $x_i = \delta_i$, $i = \overline{1,n}$, вносимые каждым элементом, а внешними параметрами — стоимость, связанная с вносимой каждым элементом погрешностью, $y_i = C_i$, $i = 1, n$. По условию задачи суммарная погрешность $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \delta_i$ не должна превышать некоторого заданного значения δ_0:

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - \delta_0 = 0$, где β_i — коэффициенты влияния. В качестве критерия оптимизации принимаются суммарные затраты на систему $W = \sum_{i=1}^{n} C_i + C_0^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} y_i + C_0$, где C_0 — затраты, не зависящие от погрешности.

Уравнения связи находят методом интерполяции, имея в виду, что $C_i(\delta_i) = A_i \delta_i^{\alpha_i}$ или $y_i(x_i) = A_i x_i^{\alpha_i}$, где $-1 \leqslant \alpha_i < 0$, A_i — коэффициенты пропорциональности. Тогда искомая задача формулируется в виде задачи отыскания оптимальных значений x_i, $i=\overline{1,n}$, обеспечивающих

$$\begin{cases} \min W = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^{\alpha_i} + C_0 \\ \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - \delta_0 = 0 . \end{cases}$$

Решить задачу можно методом множителей Лагранжа (см. п. 4.3.3).

7. В качестве внешнего параметра необходимо принять вероятность поражения цели $y = P_{\text{пор}} = P_{\text{пор}\,1} \cdot P_{\text{пор}\,2}$, где $P_{\text{пор}\,1}$ и $P_{\text{пор}\,2}$ — составляющие, обеспечиваемые эффективностью действия СУ и БЗ, в качестве внутренних параметров — затраты на СУ и БЗ: $x_1 = C_{\text{ру}}$, $x_2 = C_{\text{бз}}$. По физическому смыслу $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $0 < y \leqslant 1$, а по условию задачи $x_1 + x_2 \leqslant C_0 - C_{\text{дв}}$, где $C_{\text{дв}}$ — затраты на двигательную установку. Критерием оптимизации является вероятность поражения цели $W = P_{\text{пор}} \Rightarrow \max$. Уравнения связи $y(x_1 x_2) = P_{\text{пор1}}(x_1 x_2)\, P_{\text{пор2}}(x_1 x_2)$ определяются по результатам анализа эффективности управляемого снаряда и имеют вид: $P_{\text{пор}\,1} = 1 - a_1 / C_{\text{ру}} = 1 - a_1 / x_1$, $P_{\text{пор}\,2} = 1 / 1 + a_2 / C_{\text{бз}} = 1 / 1 + a_2/x_2$, следовательно, $y = (1 - a_1 / x_1)\ (1 / 1 + a_2 / x_2)$.

Преобразуем ограничения на внешний параметр: $y > 0$, $1 - a_1/x_1 > 0$, (составляющая $1/1 + a_2/x_2$ всегда положительна), $x_1 > a_1$; $y \leqslant 1$, $(1 - a_1/x_1) \times \times (1/1 + a_2/x_2) \leqslant 1$, $a_2 x_1 + a_1 x_2 \geqslant 0$. Таким образом, необходимо найти $\bar{x}_0 = (x_{1\,0}\, x_{2\,0})$, обеспечивающие

$$\begin{cases} \max\, (1 - a_1/x_1)\ (1/1 + a_2/x_2) \\ \text{при} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - C_0 + C_{\text{дв}} \leqslant 0 \\ x_1 - a_1 > 0 \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

Графическая иллюстрация задачи приведена на рис. П1.

8. Найти значение x_0, обеспечивающее

$$\begin{cases} \min W = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 = \beta_1 (cx/2) + \beta_2 (1/x) \\ \text{при } \beta_1 + \beta_2 = 1 . \end{cases}$$

9. $M_{\text{нс}} = \{S_2\ S_4\ S_8\}$

10. $M_{\text{нс}} = \{S_1\ S_4\ S_5\}$

13. $М_{нс} = \{Д_1 П_3 М_2, \quad Д_2 П_3 М_2, \quad Д_1 П_4 М_2, \quad Д_2 П_4 М_2\}$

14. $М_{гс} = \{АИМ–АМ, \; АИМ–ЧМ/m_{чм} = 0,4 \ldots 10, \; ВИМ–АМ/m_{\tau} = 0,9 \ldots 0,95\}$,

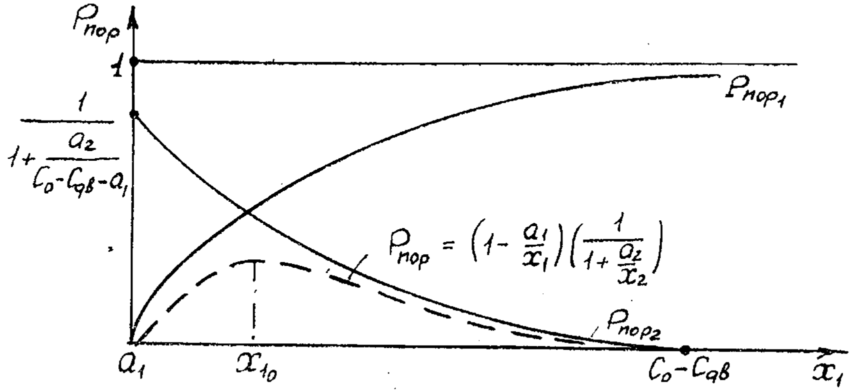

Рис. П 1

15. Для РТС с АМн, ФМн $y_1 = \Delta f_c = 2/\tau_0$, для ЧМн (при выборе разности частот заполнения «1» и «0» $f_1 - f_2 = 2/\tau_0$) $\Delta f_c = 2 \cdot 2/\tau_0$, тогда $y_{1отн} = \Delta f_c / \Delta f_{c\,фмн}$, $y_{1отн\,ам,\,фм} = 1$, $y_{1отн\,чм} = 2$. Мощность сигнала на входе приемника определяется коэффициентом взаимной корреляции сигналов, несущих информацию о символах «0» и «1». Для АМн $\rho_s = 0,5$, для ЧМн и ФМн$_{орт}$ $\rho_s = 0$, для ФМн$_{пр}$ $\rho_s = -1$. Поэтому $P_{c_{ам}} = 2P_{c_{чм}} = 2P_{c_{фм\,орт}} = 2 \cdot 2P_{c_{фм\,пр}}$; приняв $y_{2отн} = P_c / P_{c\,фм\,пр}$, имеем $y_{2\,отн\,фм\,пр} = 1$, $y_{2\,отн\,чм} = y_{2\,отн\,фм\,орт} = 2$, $y_{2\,отн\,ам} = 4$. На рис. П2 представлено множество $М_c$ цифровых РТС передачи информации, откуда видно, что $М_{нс}$ является вырожденным одноэлементным: $М_{нс} = ФМн_{пр}$.

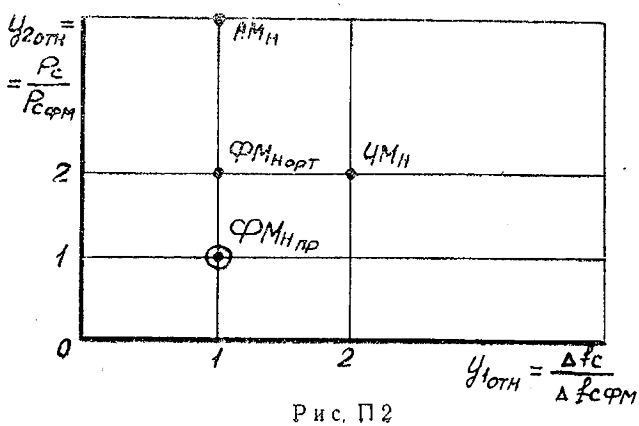

Рис. П 2

В данном случае с помощью БКП получено единственное оптимальное решение задачи. Отметим, что такой случай очень редкий. Как правило, в результате применения БКП находится некоторое множество $M_{нс}$.

16. S_2. 18. $\tau_{opt} = 27 \dots 244$ мкс, 19. При $\beta_1 = \beta_2$ $T_{opt} = 0{,}26$ мс. 20. По минимаксному критерию при $k_i = y_{i\,min} / y_i$ $S_{opt} = 2 + 3 + 1$, при $k_i = y_i / y_{i\,max}$ $S_{opt} = 1 + 2 + 1$, или $1 + 1 + 1$, или $2 + 2 + 1$; по модифицированному минимаксному критерию $S_{opt} = 2 + 3 + 1$ или $1 + 2 + 1$. 21. По модифицированному минимаксному критерию $S_{opt} = 2+4+2$ (при расчете суммарной погрешности нужно использовать выражение $\delta_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \delta_i^2}$). 22. б) $\max W\,(1, 3, 0) = 22$; в) экстремумов не существует; д) максимума W не существует. 23. $n_0 = 2$ при $q_э = 12\,q_п$. 24. $n_0 = \sqrt{g_{вых} / g_{вх}}$. 26. $\tau_0 = \sqrt{0{,}5\,(\beta_1/\beta_2)\,c}$. 28. $k = 3{,}7$. 29. $x_1 = x_2 = R / \sqrt{2}$. 30. $r = \sqrt[3]{V_0/2\pi}$, $h = 2\sqrt[3]{V_0/2\pi} = 2\,r$, 31. $W_{min}\left(1\frac{22}{101},\ 4\frac{18}{101}\right) = 3\frac{21}{101}$. $W_{max}\,(2{,}12) = 65$. 32. а) 24 (6,4); б) 40 (2,6); в) 36,25 [(0,5; 6) или (6; 0,5)]; г) —42 (0,6), 0 (0,0); д) —9 (9,0); 20,0625 (3,75; 4,125); е) минимума W не существует. 33. Максимума W не существует, $\min W\,(2.3) = 26$. 34. Задача не имеет решений.

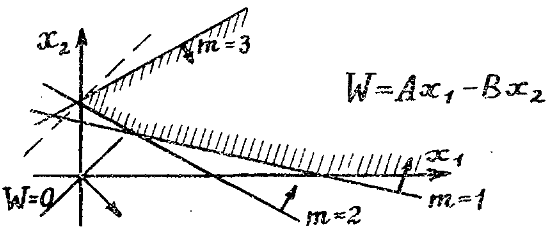

Рис. П3

35. в) рис. П3. 36. $\beta = -2/3$, $\beta = 4$. 37. а) $\lambda < 0$; б) $\lambda = 0$; в) такого λ не существует. 38. $\max W\,(1{,}4) = 5$, $\min W\,(0{,}0) = 0$. 41. $n = 100$. 42. $P_i = 1 / N$, т. е. равномерное распределение вероятностей. 43. а) $\min W\,(2, 2, 1;\ 2, 1, 2;\ 1, 2, 2) = 4$; $\max W\,(4/3, 4/3, 7/3;\ 4/3, 7/3, 4/3;\ 7/3, 4/3, 4/3) = 4{,}15$.

ОГЛАВЛЕНИЕ