МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

П. Э. КОЛОМИЕЦ

ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

Учебное пособие

САМАРА 2004

УДК 330.43 (075.8)

Коломиец П.Э. **Основы эконометрики**: Учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2004. – 72 с.

ISBN 5–7883–0308–7

Учебное пособие обеспечивает теоретическую и методическую поддержку при изучении дисциплины «Эконометрика». Рассмотрены предмет и основные понятия эконометрики, излагаются условия и методы построения эконометрических моделей по пространственным и временным рядам.

Предназначено для студентов заочного и второго высшего образования, обучающихся по специальностям 061100 «Менеджмент организации» и 060800 «Экономика и управление на предприятии», учебный план которых включает изучение дисциплины «Эконометрика».

Табл. 2. Ил. 6. Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета

Рецензенты: д-р техн.наук, проф. кафедры «Экономика» СГАУ В.М. Дуплякин,
проректор по учебной и научной работе института «ТЕЛЕИНФО»
Е.А. Матвеева

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные аспекты эконометрического исследования........................5

1.1. Предмет и методы эконометрики........................5

1.2. Типы данных и виды переменных в эконометрических исследованиях........................6

1.3. Эконометрическая модель, задачи и этапы эконометрического моделирования........................7

2. Парная регрессия и корреляция........................11

2.1. Однофакторная регрессионная модель........................11

2.2. Показатели качества парной регрессии........................12

2.3. Классическая линейная регрессионная модель........................15

2.4. Метод наименьших квадратов........................17

2.5. Проверка гипотез о значимости параметров регрессии и уравнения регрессии в целом........................18

2.6. Прогноз ожидаемого значения результативного признака по линейному уравнению регрессии........................22

2.7. Нелинейная парная регрессия........................23

2.8. Корреляция для нелинейной регрессии. Коэффициенты эластичности........................29

3. Множественная регрессия и корреляция........................32

3.1. Линейная модель множественной регрессии........................33

3.2. Показатели тесноты связи фактора с результатом. Коэффициенты частной эластичности и стандартизованные коэффициенты регрессии........................35

3.3. Частная корреляция........................37

3.4. Оценка значимости уравнения множественной регрессии. Общий и частный F- критерии........................40

3.5. Фиктивные переменные множественной регрессии........................42

3.6. Нелинейная множественная регрессия.
Производственная функция..44

4. Системы эконометрических уравнений..46
4.1. Виды систем эконометрических уравнений.
Структурная и приведенная формы модели..47
4.2. Проблема идентификации..50
4.3. Оценивание параметров структурной модели..52
4.4. Применение систем эконометрических уравнений..54

5. Одномерные временные ряды..57
5.1. Автокорреляция уровней временного ряда и
выявление его структуры..57
5.2. Модели тенденции временного ряда (построение тренда)..59
5.3. Модели сезонных и циклических колебаний..60
5.4. Изучение взаимосвязей временных рядов..61
5.5. Методы исключения тенденции (тренда)..62
5.6. Автокорреляция случайных составляющих..63

Список рекомендуемой литературы..68

Приложения..69

1. ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Эконометрика - одна из базовых (наряду с микро- и макроэкономикой) дисциплин экономического образования. Эконометрические методы позволяют построить зависимости, отражающие взаимосвязи социально-экономических явлений, получить научно обоснованный прогноз, проверить надежность эмпирических зависимостей.

1.1. ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

Слово «эконометрика» представляет собой комбинацию двух слов: «экономика» и «метрика», что подчеркивает специфику содержания эконометрики как науки - изучение количественных взаимосвязей экономических явлений и процессов. Предмет эконометрики - отражение особенностей экономических переменных и связей между ними.

Эконометрика представляет собой комбинацию трех областей знаний: экономической теории, общей теории статистики и математической статистики. Специфика эконометрики в том, что она ставит своей задачей при помощи статистики выразить те количественные закономерности, которые экономическая теория определяет в общем, схематически. Например, микроэкономическая теория устанавливает связь между ценой товара и спросом на него, однако при этом неизвестны количественные оценки этой связи. Расчет количественных оценок и есть задача эконометрики.

Большинство эконометрических методов заимствовано из математической статистики. Однако экономические данные часто не обладают полнотой, в экономике невозможны многократные эксперименты, что порождает ряд специфических проблем, решение которых не входит в математическую статистику. Кроме того, экономические данные часто содержат ошибки измерения. В эконометрике разрабатываются методы, позволяющие снизить влияние этих ошибок на полученные результаты.

Таким образом, эконометрика связывает между собой экономическую теорию и экономическую статистику и с помощью математических методов придает конкретное количественное выражение общим закономерностям, устанавливаемым экономической теорией.

1.2. ТИПЫ ДАННЫХ И ВИДЫ ПЕРЕМЕННЫХ В ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

При моделировании экономических процессов используют два типа данных: пространственные (cross-sectional data) и временные данные (time-series data).

Пространственными данными является набор сведений по разным объектам, взятым за один и тот же период или момент времени. Например, набор сведений по разным фирмам (объем производства, численность работников, размер основных производственных фондов и пр.). Другим примером могут служить данные об объеме, ценах потребления некоторого товара по потребителям.

Временными данными является набор сведений, характеризующий один и тот же объект, но за разные периоды или моменты времени. Примером временных данных могут быть ежеквартальные данные о средней заработной плате, индексе потребительских цен, числе занятых за последние годы или, например, ежедневный курс доллара США или евро на ММВБ. Отличительной особенностью врёменных данных является то, что они естественным образом упорядочены по времени.

Набор данных представляет собой множество признаков, характеризующих объект исследования. Признаки являются взаимосвязанными, причем в этой взаимосвязи они могут выступать в одной из двух ролей:

1) в роли ***результативного*** признака, или ***объясняемой*** переменной (аналог зависимой переменной y в математике);
2) в роли ***факторного*** признака, или ***объясняющей*** переменной, значения которой определяют значение признака-результата (аналог независимой переменной x в математике).

Переменные, участвующие в эконометрической модели любого типа, разделяются на типы:

- *экзогенные* (независимые) переменные, значения которых задаются извне, автономно, в определенной степени они являются управляемыми (планируемыми);
- *эндогенные* (зависимые) переменные, значения которых определяются внутри модели, или взаимозависимые переменные;
- *лаговые* (экзогенные или эндогенные) переменные эконометрической модели, датированные предыдущими моментами времени и находящиеся в уравнении с текущими переменными. Например: y_t текущая эндогенная переменная, y_{t-1} — лаговая эндогенная переменная;
- *предопределенные* (объясняющие) переменные. К ним относятся лаговые и текущие экзогенные переменные x_t, x_{t-1}, а также лаговые эндогенные переменные y_{t-1}.

Любая эконометрическая модель предназначена для объяснения значений текущих эндогенных переменных (одной или нескольких) в зависимости от значений предопределенных переменных.

1.3. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ЗАДАЧИ И ЭТАПЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Центральной проблемой эконометрики является построение эконометрической модели и определение возможностей ее использования для описания, анализа и прогнозирования реальных экономических процессов в условиях недостатка информации и неполноты исходных данных.

Можно выделить три класса эконометрических моделей:

1. ***Регрессионные модели с одним уравнением.*** В таких моделях результативный признак представляется в виде функции факторных признаков (независимых переменных). Примеры таких регрессионных моделей:

- Функция цены $P = f(Q, P_k)$, где цена товара P зависит от объема его поставки Q и от цен конкурирующих товаров P_k.
- Функция спроса $Q = f(P; P_k; L)$, где величина спроса на определенный товар Q зависит от цены данного товара P, от цен конкурирующих товаров P_k и от реальных доходов потребителей L.
- Производственная функция $Q = f(K; L)$, где объем производства товара Q зависит от производственных факторов, например, от затрат капитала K и затрат труда L.

2. *Системы одновременных уравнений* описываются системами взаимосвязанных регрессионных уравнений, которые могут включать в качестве независимых переменных не только факторные, но и результативные признаки из других уравнений системы. Значения параметров уравнений требуется оценить. Примером системы одновременных уравнений является *модель спроса и предложения*, включающая три уравнения:

- уравнение предложения: $Q_t^s = a_0 + a_1 \cdot P_t + a_2 \cdot P_{t-1}$,
- уравнение спроса: $Q_t^d = b_0 + b_1 \cdot P_t + b_2 \cdot I_t$,
- тождество равновесия: $Q_t^s = Q_t^d$,

где Q_t^s — предложение товара в момент времени t;

Q_t^d — спрос на товар в момент времени t;

P_t — цена товара в момент времени t;

P_{t-1} — цена товара в предыдущий момент времени $(t-1)$;

I_t — доход потребителей в момент времени t.

Данная модель «объясняет» две результативные переменные:

Q_t — объем спроса, равный объему предложения в момент времени t,

P_t — цену товара в момент времени t.

3. Модели временных данных, в которых результативный признак является функцией времени или переменных, относящихся к различным моментам времени. К моделям временных данных, в которых результативный признак зависит от времени, относятся модели:

- основной тенденции или тренда (зависимости результативного признака от трендовой компоненты);
- сезонных колебаний (зависимости результативного признака от сезонной компоненты);
- тренда и сезонности.

К моделям временных данных, в которых результативный признак зависит от переменных, датированных другими моментами времени, относятся:

- модели с распределенным лагом (сдвигом во времени), объясняющие поведение результативного признака в зависимости от предыдущих значений факторных переменных (зависимость между ВВП и инвестициями, приемом на учебу и выпуском из учебных заведений и т. д.);
- модели авторегрессии, объясняющие поведение результативного признака в зависимости от предыдущих значений результативных переменных. Особенность таких моделей - наличие эффекта автокорреляции, выявление и устранение которого составляет одну из важнейших особенностей эконометрического метода;
- модели ожиданий, объясняющие поведение результативного признака в зависимости от будущих значений факторных или результативных переменных.

Модели временных данных подразделяются также на модели, построенные по стационарным и нестационарным временным рядам. Стационарные временные ряды - ряды, имеющие постоянное среднее значение и колеблющиеся вокруг него с постоянной дисперсией. В таких рядах распределение уровня ряда не зависит от времени, т.е. стационарный временной ряд не содержит трендовой или сезонной компонент.

В нестационарных временных рядах распределение уровня ряда зависит от времени.

Задачи, решаемые на основе эконометрической модели, можно классифицировать по трем признакам:

1) По конечным прикладным целям: прогноз экономических и социально-экономических показателей, характеризующих состояние и развитие анализируемой системы, или имитация возможных сценариев социально-экономического развития.
2) По уровню иерархии: задачи, решаемые на макроуровне (страна в целом); на мезоуровне (на уровне регионов, отраслей, корпораций); на микроуровне (на уровне семьи, предприятия, фирмы).
3) По профилю анализируемой экономической системы: задачи, направленные на решение проблем рынка; инвестиционной, финансовой или социальной политики; ценообразования; распределительных отношений; спроса и потребления; на определенный комплекс проблем.

Основные этапы эконометрического моделирования:

1) Определение конечных целей модели, набора участвующих факторных и результативных признаков.
2) Качественный (теоретический) анализ сущности изучаемого явления. Формирование и формализации априорной информации, относящейся к природе исходных статистических данных и случайных составляющих.
3) Выбор общего вида модели, состава и формы входящих в нее связей.
4) Сбор необходимой информации, анализ ее качества.
5) Оценка параметров модели.
6) Оценка качества модели (т. е. оценка ее достоверности и надежности). Если качество модели не устраивает исследователя, то следует переход ко второму этапу.
7) Интерпретация полученных результатов.

2. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

В зависимости от количества факторов, включенных в уравнение регрессии, принято различать однофакторную (парную) и множественную регрессии.

2.1. ОДНОФАКТОРНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

Пусть имеется набор значений двух переменных: y_k (эндогенная переменная или результат) и x_k (экзогенная переменная или фактор). Между этими переменными имеется взаимосвязь $y = f(x)$.

Необходимо по данным наблюдений $\left(x_k, y_k\right), k = 1,...,n$, подобрать функцию $\hat{y} = \hat{y}(x)$, наилучшим образом описывающую истинную зависимость. Класс математических функций для описания связи двух переменных достаточно широк. Наиболее часто используют функции:

1) $\hat{y} = a + b \cdot x$ (линейная);

2) $\hat{y} = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ (квадратичная парабола);

3) $\hat{y} = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$ (кубическая парабола);

4) $\hat{y} = a + b/x$ (гипербола);

5) $\hat{y} = a \cdot x^b$ (степенная);

6) $\hat{y} = a \cdot b^x$ (показательная);

7) $\hat{y} = a + b \cdot \ln x$ (логарифмическая) и т.д.

На практике предпочтение отдается простым видам функций, ибо они в большей степени поддаются экономической интерпретации и требуют меньшего объема наблюдений. Результаты многих исследований подтверждают, что число наблюдений должно как минимум в 7 раз превышать число коэффициентов при переменной x в модели. Например, для квадратичной параболы $\hat{y} = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ требуется не менее 14 наблюдений. Статистические оценки коэффициентов уравнения регрессии находятся, например, с помощью метода наименьших квадратов.

В модели парной регрессии зависимость между объясняемой переменной y и объясняющей переменной x в генеральной совокупности представляется в виде $y = \hat{y}(x) + \varepsilon$, где ε - случайная величина (ошибка регрессии). Наличие случайного члена связано с воздействием на зависимую переменную других неучтенных в модели факторов и ошибками измерений.

После построения уравнения регрессии и определения оценок параметров модели выборочные значения зависимой переменной можно представить в виде $y_k = \hat{y}(x_k) + e_k$. Остатки $e_k = y_k - \hat{y}(x_k)$ представляют собой отклонения фактических значений зависимой переменной от значений, полученных расчетным путем. Остатки e_k, как и ошибки ε_k, являются случайными величинами, однако они, в отличие от ошибок ε_k, наблюдаемы.

2.2. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

По выборке значений результативного признака y_k и факторного признака x_k, $k = 1,\ldots,n$, можно вычислить следующие статистики:

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_k$ - выборочное среднее факторного признака,

$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_k$ - выборочное среднее результативного признака,

$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum x_k \cdot y_k$ - выборочное среднее произведений фактора на результат,

$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum (x_k - \overline{x})^2$ - выборочная дисперсия факторного признака,

$D_y = \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum (y_k - \overline{y})^2$ - выборочная дисперсия результативного признака,

$R_{xy} = \frac{1}{n}\sum(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}$ - выборочный корреляционный момент.

Все эти статистики являются ***оценками*** соответствующих параметров генеральной совокупности, вычисленными по данной конкретной выборке данных. Для другой выборки, полученной в результате эксперимента, значение оценки параметра может отличаться (поэтому и название – «оценка» параметра, а не его точное значение, которое неизвестно).

Проверка адекватности построенной модели наблюдаемым данным проводится на основе анализа остатков $e_k = y_k - \hat{y}(x_k)$. При анализе качества модели регрессии используется теорема о разложении дисперсии, согласно которой общая дисперсия результативного признака может быть разложена на две составляющие – объясненную и необъясненную дисперсии:

$$D_y = D_{y(объясн)} + D_{y(ост)},$$

где $D_{y(объясн)} = \frac{1}{n}\sum(\hat{y}(x_k) - \overline{y})^2$ – объясненная уравнением регрессии дисперсия результативного признака,

$D_{y(ост)} = \frac{1}{n}\sum(\hat{y}(x_k) - y_k)^2 = \frac{1}{n}\sum e_k^2$ – необъясненная уравнением регрессии (остаточная) дисперсия результативного признака.

На основе теоремы о разложении дисперсии рассчитываются ***показатели качества модели регрессии***:

1. $r_{xy} = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ - *выборочный линейный коэффициент корреляции.*

Выборочный коэффициент корреляции принимает значения от –1 до 1 и характеризует тесноту связи между признаками. Если значение r_{xy} близко по модулю к единице, то связь между x и y очень сильная, близкая к линейной.

Если же значение r_{xy} близко к нулю, то факторы некоррелированы, что не означает отсутствие связи между ними.

2. *Коэффициент детерминации* $R^2 = \dfrac{D_{y(объясн)}}{D_y} = 1 - \dfrac{D_{y(ост)}}{D_y}$, $0 \le R^2 \le 1$. Он характеризует долю вариации результативного признака, объясняемую уравнением регрессии в общей вариации y. Чем больше доля объясненной вариации, тем соответственно меньше роль прочих факторов, не учтенных в модели. Если значения R^2 близки к единице, то модель хорошо аппроксимирует исходные данные и может быть использована для прогноза значений результативного признака. Коэффициент детерминации – основная характеристика прогнозных качеств модели.

3. $R = \sqrt{\dfrac{D_{y(объясн)}}{D_y}}$ – *коэффициент множественной корреляции* (корень из коэффициента детерминации). Если $R \approx 1$, то уравнение регрессии хорошо описывает фактические данные. Если $R \approx 0$, то связь между признаками отсутствует и уравнение регрессии плохо описывает данные. В случае линейной регрессии $R = \left| r_{xy} \right|$.

4. $S_{кв} = \dfrac{1}{\sqrt{n-h}} \sqrt{\sum \left(y_k - \hat{y}(x_k) \right)^2}$ – *среднеквадратическая ошибка* уравнения регрессии, где h – число параметров в уравнении регрессии. Величину среднеквадратической ошибки можно сравнить со среднеквадратическим отклонением результативного признака σ_y. Если окажется, что $S_{кв} < \sigma_y$, то использование данной модели регрессии является целесообразным. Среднеквадратическую ошибку можно найти другим

способом – через коэффициент детерминации, не прибегая к расчетам значений признаков – результатов и остатков: $S_{кв} = \sqrt{\dfrac{n \cdot (1-R^2) \cdot \sigma_y^2}{n-h}}$.

5. $A = \dfrac{1}{n}\sum\left|\dfrac{y_k - \hat{y}(x_k)}{y_k}\right|$ - *средняя ошибка аппроксимации.* Ошибка аппроксимации меньше 7% свидетельствует о хорошем качестве модели.

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется методом сравнения показателей качества моделей при разных видах зависимостей.

2.3. КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

Линейная регрессия имеет широкое применение в эконометрике в связи с четкой экономической интерпретацией ее параметров.

Классическая нормальная линейная регрессионная модель с одной переменной – это модель вида

$$y_k = b_o + b_1 \cdot x_k + \varepsilon_k \quad , \quad k = 1,...,n \ , \qquad (1)$$

для которой выполняются следующие условия (предпосылки):

1) x_k - детерминированная (неслучайная) величина;

2) математическое ожидание случайной составляющей равно нулю в любом наблюдении: $M\left[\varepsilon_k\right] = 0$;

3) теоретическая дисперсия случайной составляющей постоянна для всех наблюдений: $D_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 = M\left[\left(\varepsilon_k - M\left[\varepsilon_k\right]\right)^2\right] = M\left[\varepsilon_k^2\right] = 0 \quad , k = 1,...,n$;

4) ковариация случайных составляющих в любых двух разных наблюдениях равна нулю: $Cov\left[\varepsilon_k;\varepsilon_m\right] = M\left[\varepsilon_k \cdot \varepsilon_m\right] = 0 \ \left(k \neq m\right)$, что означает отсутствие систематической связи между значениями случайной составляющей в любых двух наблюдениях;

5) случайная составляющая является нормально распределенной случайной величиной: $\varepsilon_k \sim N(0;\sigma_\varepsilon^2)$.

Первая предпосылка – сильное предположение. Иногда достаточно предположения о независимости распределения случайной составляющей ε_k от факторов x_k.

Третья предпосылка о независимости дисперсии случайной составляющей от наблюдения называется *гомоскедастичностью* (homoscedasticity в переводе означает одинаковый разброс). Случай, когда условие гомоскедастичности не выполняется, называется *гетероскедастичностью* (heteroscedasticity неодинаковый разброс).

Четвертая предпосылка указывает на некоррелированность случайных составляющих для разных наблюдений. Если это условие не выполняется, говорят об *автокорреляции* случайных составляющих. Автокорреляция, например, имеет место, когда данные являются временными рядами.

Графическая иллюстрация линейной модели приведена на рис. 1.

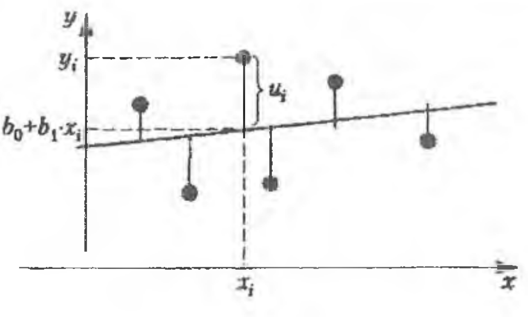

Рис. 1.
Линейная зависимость между факторами

Наиболее часто для определения оценок параметров линейного уравнения регрессии используется метод наименьших квадратов (МНК).

2.4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В математической статистике принято обозначать оценки «крышками» над параметрами. В качестве оценок параметров b_o и b_1 в модели (2) принимаются величины $\hat{b}_o$ и $\hat{b}_1$, минимизирующие сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений результативного признака y_k от расчетных (теоретических) значений:

$$S(\hat{b}_o, \hat{b}_1) = \sum\left(y_k - \left(\hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_k\right)\right)^2 \to \min. \qquad (2)$$

Значения x_k и y_k известны – это данные наблюдений. Переменными данной функции являются оценки параметров $\hat{b}_o$ и $\hat{b}_1$. Чтобы найти минимум функции двух переменных, нужно вычислить частные производные по каждому из параметров и приравнять их к нулю: $\frac{\partial S}{\partial b_o} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0$.

В результате получим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y_k = \hat{b}_o \cdot n + \hat{b}_1 \cdot \sum x_k\,; \\ \sum x_k y_k = \hat{b}_o \cdot \sum x_k + \hat{b}_1 \cdot \sum x_k^2. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем оценки параметров:

$$\hat{b}_1 = \frac{n \cdot \sum x_k y_k - \left(\sum x_k\right)\left(\sum y_k\right)}{n \cdot \sum x_k^2 - \left(\sum x_k\right)^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}; \quad \hat{b}_o = \bar{y} - \hat{b}_1 \cdot \bar{x}.$$

Если оценки параметров линейной модели найдены, можно записать уравнение регрессии: $y_k = \hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_k + e_k$.

Остаточная дисперсия результативного признака равна $D_{y(ост)} = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_k - y_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum e_k^2$, а коэффициент детерминации в этом случае равен квадрату линейного коэффициента корреляции $R^2 = r_{xy}^2$.

МНК позволяет также получить несмещенную оценку дисперсии случайной составляющей, которая в этом случае совпадает с квадратом среднеквадратической ошибки уравнения регрессии:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\sum\left(y_k - \hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_k\right)^2}{n-2}.$$

2.5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗНАЧИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИИ И УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ В ЦЕЛОМ

С помощью метода наименьших квадратов можно получить лишь оценки параметров уравнения регрессии. Чтобы проверить, значимы ли эти параметры, используют статистические методы проверки гипотез. С помощью статистических методов проверки гипотез можно также проверить значимость коэффициента парной линейной корреляции (т. е. значимо ли он отличается от нуля в генеральной совокупности).

В качестве основной (нулевой) гипотезы H_0 выдвигают гипотезу о незначимом отличии от нуля «истинного» параметра регрессии или коэффициента корреляции. Альтернативной гипотезой H_1 при этом является гипотеза о неравенстве нулю «истинного» параметра или коэффициента корреляции. Уравнение регрессии считается значимым, адекватно описывающим истинную зависимость между признаками, если основная гипотеза отвергается и принимается альтернативная. При проверке гипотезы H_0 задается уровень значимости α - вероятность отвергнуть гипотезу при условии, что она верна. Понятно, что число α должно быть достаточно малым. Критерий проверки гипотезы использует специальную t-статистику, которая имеет распределение Стьюдента. Формулы для вычисления t-статистики зависят от вида функции регрессии.

Найденное по данным наблюдений значение t-статистики $t_{набл}$ сравнивается с критическим значением t-статистики $t_{кр}$, определяемым по таблицам распределения Стьюдента (приложение 1). Критическое значение $t_{кр}$ определяется в зависимости от уровня значимости (α) и числа степеней свободы, которое равно $(n-h)$, n — число наблюдений, h — число оцениваемых параметров в уравнении регрессии. Обычно выбирают уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$. Критическое значение $t_{кр}$ может быть также вычислено на компьютере с помощью встроенной функции СТЬЮДРАСПОБР пакета Excel.

Если $\left|t_{набл}\right| > t_{кр}$, то основную гипотезу отвергают и считают, что с вероятностью $(1-\alpha)$ «истинный» параметр регрессии (либо коэффициент корреляции) значимо отличается от нуля.

Если $\left|t_{набл}\right| < t_{кр}$, то принимается основная гипотеза, т.е. «истинный» параметр регрессии незначимо отличается от нуля и уравнение регрессии плохо описывает зависимость между факторами.

2.5.1. Проверка значимости параметров линейной регрессии

В случае линейной парной регрессии $\hat{y}(x) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x$ число степеней свободы равно *(n* - 2). Для проверки гипотезы $H_0 : (b_1 = 0)$ статистика критерия имеет вид $t_{набл}\left[b_1 = 0\right] = \dfrac{\hat{b}_1}{\mu_1}$, где $\hat{b}_1$ - оценка коэффициента регрессии b_1, полученная по наблюдаемым данным; μ_1 — стандартная ошибка оценки коэффициента регрессии b_1, которая для линейного парного уравнения регрессии вычисляется по формуле

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\sum\left(y_k - \hat{y}(x_k)\right)^2}{(n-2)\sum\left(x_k - \overline{x}\right)^2}} = \frac{S_{кв}}{\sqrt{n} \cdot \sigma_x}.$$

Для проверки гипотезы $H_0:(b_o=0)$ статистика критерия имеет вид $t_{набл}\left[b_o=0\right]=\dfrac{\hat{b}_o}{\mu_o}$, где $\hat{b}_o$ — оценка параметра регрессии, полученная по наблюдаемым данным. Для линейного парного уравнения регрессии стандартная ошибка оценки параметра b_o имеет вид

$$\mu_o=\sqrt{\frac{\sum\left(y_k-\hat{y}(x_k)\right)^2\cdot\sum x_k^2}{n(n-2)\sum\left(x_k-\bar{x}\right)^2}}=\frac{S_{кв}\cdot\sqrt{\sum x_k^2}}{n\cdot\sigma_x}.$$

2.5.2. Проверка значимости линейного коэффициента корреляции

Для проверки гипотезы о незначимом отличии от нуля «истинного» коэффициента линейной парной корреляции используют статистику критерия $t_{набл}\left[r=0\right]=\dfrac{r_{xy}}{\mu_r}$, где r_{xy} - оценка коэффициента корреляции, полученная по наблюдаемым данным (выборочный коэффициент корреляции); μ_r - стандартная ошибка выборочного коэффициента корреляции, которая для линейного парного уравнения регрессии вычисляется по формуле $\mu_r=\sqrt{\dfrac{1-r_{xy}^2}{n-2}}$. Эту формулу статистики $t_{набл}\left[r=0\right]$ рекомендуется использовать, если число наблюдений n большое или величина $\left|r_{xy}\right|\ll 1$. Если же величина выборочного коэффициента корреляции по модулю близка к единице, то распределение его оценок отличается от распределения Стьюдента. В таком случае используют подход, предложенный Р. Фишером, а именно, для оценки значимости линейного парного коэффициента корреляции r_{xy} вводится вспомогательная величина z, связанная с данным коэффициентом следующим соотношением: $z=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}}\right)$. При изменении r_{xy} от -1 до +1 величина z

изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, что соответствует нормальному распределению. Доказано, что распределение величины z мало отличается от нормального даже при близких к единице значениях коэффициента корреляции. Тогда гипотеза о том, что «истинный» коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля, сводится к гипотезе о незначимом отличии от нуля величины z. Для проверки данной гипотезы используют статистику критерия $t_{набл}[z=0]=z\cdot\sqrt{n-3}$. Критическое значение статистики $t_{кр}$ находят по таблицам стандартного нормального распределения по доверительной вероятности $(1-\alpha)$. Основную гипотезу H_0: $(z=0)$ отвергают, если $|t_{набл}|>t_{кр}$.

2.5.3. Проверка значимости уравнения регрессии в целом

Оценка значимости уравнения регрессии в целом производится для того, чтобы узнать, пригодно уравнение регрессии для практического использования (например, для прогноза) или нет. При этом выдвигают основную гипотезу о незначимости уравнения в целом, которая формально сводится к гипотезе о равенстве нулю коэффициента детерминации $R^2=0$. Альтернативная ей гипотеза о значимости уравнения - гипотеза о неравенстве нулю коэффициента детерминации. Для проверки используют F-статистику критерия Фишера: $F_{набл}=\dfrac{R^2}{1-R^2}\cdot\dfrac{n-h}{h-1}$. По таблицам распределения Фишера – Снедоккора (приложение 2) находят критическое значение F-критерия в зависимости от уровня значимости α (обычно его берут равным 0,05) и двух чисел степеней свободы $k1=h-1$ и $k2=n-h$. Если $F_{набл}>F_{кр}$, то принимают альтернативную гипотезу о статистической значимости уравнения регрессии.

В случае линейной парной регрессии существует взаимосвязь между статистиками критериев: $t_{набл}[b_1=0]=t_{набл}[r=0]=\sqrt{F_{набл}}$.

2.6. ПРОГНОЗ ОЖИДАЕМОГО ЗНАЧЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТИВНОГО ПРИЗНАКА ПО ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ РЕГРЕССИИ

Пусть требуется оценить прогнозное значение признака-результата для заданного значения признака-фактора x^{np}. В прогнозных расчетах по уравнению регрессии определяется предсказываемое значение y^{np} как точечный прогноз: $y^{np} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x^{np}$. Однако точечный прогноз, очевидно, не дает точного значения. Поэтому он дополняется интервальной оценкой прогнозного значения – доверительным интервалом.

Прогнозируемое значение признака-результата с доверительной вероятностью, равной $(1-\alpha)$, принадлежит интервалу прогноза:

$$\left(y^{np} - t \cdot \mu_{np} \; ; \; y^{np} + t \cdot \mu_{np} \right),$$

где y^{np} - точечный прогноз; t—коэффициент доверия, определяемый по таблицам распределения Стьюдента в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $(n - 2)$; $\mu_{np} = \dfrac{S_{\kappa e}}{\sqrt{n} \cdot \sigma_x} \sqrt{(n+1) \cdot \sigma_x^2 + (x^{np} - \bar{x})^2}$ — средняя ошибка прогноза. По мере удаления x^{np} от среднего значения $\bar{x}$ ширина доверительного интервала будет увеличиваться (рис. 2).

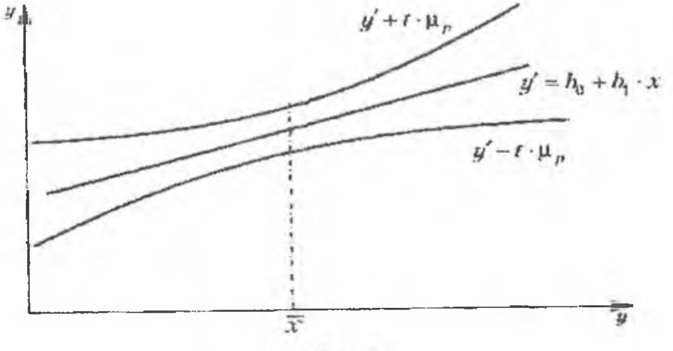

Рис. 2.
Точечная и интервальная оценки прогноза

2.7. НЕЛИНЕЙНАЯ ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций, например равносторонней гиперболы $y(x) = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, параболы второй степени $y(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$ и др.

Различают два класса нелинейных регрессий:

1) нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам;
2) нелинейные по оцениваемым параметрам.

2.7.1. Нелинейные регрессии по объясняющим переменным, но линейные по оцениваемым параметрам

Данный класс нелинейных регрессий включает уравнения, в которых результативный признак y линейно связан с параметрами. Примером могут служить полиномы разных степеней $y(x) = b_o + b_1 \cdot x + ... + b_m \cdot x^m + \varepsilon$, равносторонняя гипербола $y(x) = a + {}^{b}\!/_{x} + \varepsilon$.

Для оценки параметров регрессий, нелинейных по объясняющим переменным, используется замена переменных. Суть этого метода состоит в замене «нелинейных» объясняющих переменных новыми «линейными» переменными и сведении нелинейной регрессии к линейной. К новой «преобразованной» регрессии может быть применен обычный метод наименьших квадратов.

Рассмотрим применение данного подхода к параболе второй степени $y(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$. Заменяя переменную x^2 на z, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии $y_k = a + b \cdot x_k + c \cdot z_k + \varepsilon_k$, для оценки параметров которого используется МНК. Соответственно, для полинома порядка m при замене $z_1 = x$; $z_2 = x^2$;...; $z_m = x^m$ получим уравнение множественной линейной регрессии:

$$y(x) = b_o + b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2 ... + b_m \cdot z_m + \varepsilon .$$

В качестве нелинейной полиноминальной регрессии чаще всего используется парабола второй степени; в отдельных случаях - полином третьего порядка. Ограничения в использовании полиномов более высоких степеней связаны с требованием однородности исследуемой совокупности: чем выше порядок полинома, тем больше изгибов имеет кривая и, соответственно, менее однородна совокупность по результативному признаку.

Парабола второй степени (рис. 3) целесообразна к применению, если для определенного интервала значений фактора меняется характер связи: прямая связь меняется на обратную или обратная на прямую. В этом случае определяется значение фактора, при котором достигается максимальное (или минимальное) значение результативного признака. Если параметры параболы второй степени трудно интерпретируемы с экономической точки зрения, то форма связи заменяется другими нелинейными моделями.

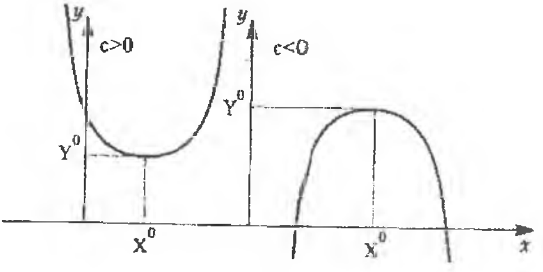

Рис. 3.
Параболическая зависимость

Например, такую функцию обычно рассматривают в экономике труда при изучении *зависимости заработной платы от возраста*: сначала наблюдается увеличение зарплаты в связи с повышением квалификации и опыта. Однако с определенного возраста в связи со старением организма увеличение возраста может привести к уменьшению зарплаты (график параболы).

Аналогичная ситуация наблюдается при *зависимости урожайности от количества удобрений*: урожайность растет лишь до достижения оптимальной нормы удобрений, большее их количество вредно для растений и урожайность снижается.

Если параболическая модель демонстрирует сначала рост, а потом снижение результативного признака, то можно определить значение, при котором достигается максимум. Например, предполагая, что потребление товара А в зависимости от уровня дохода семьи записывается уравнением $y = 5 + 6x - x^2$, приравнивая к нулю первую производную $y' = 6 - 2x = 0$, найдем, что потребление будет максимально при уровне дохода $x = 3$ тыс. руб. В обратной ситуации можно определить минимум. Например, если затраты зависят от количества продукции по уравнению $C(y) = 1200 - 60x + 2x^2$, то в точке $C'(y) = -60 + 4x = 0$ или $x = 15$ единиц продукции затраты будут минимальны.

Среди класса нелинейных функций, параметры которых хорошо оцениваются МНК, следует назвать часто применяемую в эконометрике равностороннюю гиперболу $y(x) = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$. Она используется, например, для характеристики *связи удельных расходов сырья, материалов и топлива с объемом выпускаемой продукции*. Для оценки параметров равносторонней гиперболы используется тот же подход замены переменных: заменив $\frac{1}{x}$ на z, получим линейное уравнение регрессии $y(x) = a + b \cdot z + \varepsilon$, для которого может быть применен обычный МНК.

При $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой, т.е. минимальным предельным значением *y*, оценкой которого служит параметр *a* (рис. 4, *а*). При $b < 0$ имеем медленно повышающуюся функцию с верхней асимптотой при $x \to \infty$, т.е. максимальным предельным уровнем *y* (рис. 4, *б*).

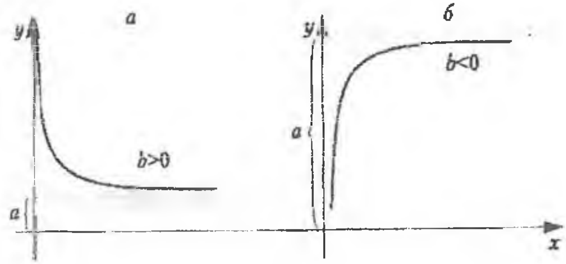

Рис. 4.
Зависимость в виде равносторонней гиперболы

Примеры случаев возникновения гиперболической зависимости:

- Если зависимость затрат от объема производства обычно характеризуется линейной функцией $C(y) = a_0 + a_1 y + \varepsilon$, то зависимость себестоимости единицы продукции от объема производства – равносторонней гиперболой $z = b + \dfrac{a}{x} + \varepsilon$.
- Кривая Филлипса (английский экономист, в 50-х гг. 20 века анализировал данные за 100-летний период) характеризует нелинейное соотношение между нормой безработицы x и процентом прироста заработной платы y: $y = a + \dfrac{b}{x} + \varepsilon$. По этой кривой можно определить тот уровень безработицы, при котором заработная плата оказывается стабильной и темп ее прироста равен нулю.
- Кривые Энгеля (немецкий статистик) показывают, что с ростом доходов x уменьшается доля расходов на продовольствие и, наоборот, увеличивается доля расходов на непродовольственные товары y: $y = a - \dfrac{b}{x} + \varepsilon$. Соответственно можно определить границу величины дохода, дальнейшее увеличение которого не приводит к росту расходов на непродовольственные товары. Кривые Энгеля могут также описываться и зависимостью $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$, линейной по параметрам, но нелинейной по объясняющей переменной x.

Еще одной моделью, нелинейной по объясняющим переменным, является $y = a + b \cdot \sqrt{x} + \varepsilon$, с помощью которой исследуется урожайность и трудоемкость сельскохозяйственного производства.

2.7.2. Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам

К данному классу регрессий относятся уравнения, в которых признак y нелинейно связан с параметрами. Примеры нелинейных регрессий: степенная $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$, показательная $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$, экспоненциальная $y = e^{a+b \cdot x} \cdot \varepsilon$.

Этот класс нелинейных моделей подразделяется на два типа:

1) нелинейные модели, внутренне линейные, которые с помощью соответствующих преобразований могут быть приведены к линейному виду (например, логарифмированием и заменой переменных);

2) нелинейные модели, внутренне нелинейные, которые не могут быть сведены к линейной модели.

Примером внутренне линейной регрессии является степенная функция, которая широко используется в эконометрических исследованиях при изучении *зависимости спроса от цен*: $y_k = a \cdot x_k^b \cdot \varepsilon_k$, где y — спрашиваемое количество товара; x — его цена; ε — случайная составляющая. Данная модель нелинейна относительно оцениваемых параметров a и b. Однако ее можно считать внутренне линейной, ибо логарифмирование данного уравнения приводит его к линейному виду: $\ln y_k = \ln a + b \cdot \ln x_k + \ln \varepsilon_k$. Заменив переменные и параметры новыми переменными: $Y_k = A + b \cdot z_k + \beta_k$, получим линейную регрессию, оценки параметров которой $\hat{A}$ и $\hat{b}$ могут быть найдены с помощью МНК. Поскольку параметр a экономически не интерпретируется, то нередко зависимость записывается в виде логарифмически линейной: $\ln y_k = A + b \cdot \ln x_k + \ln \varepsilon_k \quad ; A = \ln a$.

В рассматриваемой степенной функции предполагалось, что случайная составляющая ε мультипликативно связана с объясняющей переменной x.

Если же модель представить в виде $y_k = a \cdot x_k^b + \varepsilon_k$, то она становится внутренне нелинейной, т. к. ее невозможно преобразовать к линейному виду.

Для оценки параметров степенной функции $y_k = a \cdot x_k^b \cdot \varepsilon_k$ применяется МНК к линеаризованному уравнению $Y_k = A + b \cdot z_k + \beta_k$, $Y_k = \ln y_k$, $z_k = \ln x_k$, $A = \ln a$. В результате нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum \ln y_k = \ln \hat{a} \cdot n + \hat{b} \cdot \sum \ln x_k \,; \\ \sum \ln x_k \cdot \ln y_k = \ln \hat{a} \cdot \sum \ln x_k + \hat{b} \cdot \sum (\ln x_k)^2 \end{cases}.$$

Оценка параметра $\hat{b}$ определяется непосредственно из системы, а оценка параметра $\hat{a}$ — после потенцирования величины $A = \ln \hat{a}$.

При исследовании взаимосвязей среди функций, использующих $\ln y$, в эконометрике преобладают *степенные зависимости* - это кривые спроса и предложения, кривые Энгеля, производственные функции, кривые освоения для характеристики связи между трудоемкостью продукции и масштабами производства в период освоения выпуска нового вида изделий, а также зависимость валового национального дохода от уровня занятости.

В виде степенной функции изучается эластичность не только спроса, но и предложения. При этом обычно в функциях спроса параметр $b < 0$, а в функциях предложения $b > 0$.

В отдельных случаях может использоваться так называемая обратная функция $y = \dfrac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$, являющаяся разновидностью гиперболы. Но если в равносторонней гиперболе $y(x) = a + \dfrac{b}{x} + \varepsilon$ преобразованию подвергается объясняющая переменная $\dfrac{1}{x} = z$ и $y(x) = a + b \cdot z + \varepsilon$, то для получения линейной формы зависимости в обратной модели преобразовывается $y: \dfrac{1}{y} = z$.

Тогда модель обратной зависимости принимает вид: $z(x) = a + b \cdot x + \varepsilon$. Обратная модель является внутренне линейной по параметрам. Требование МНК при этом выполняется для обратных значений результативного признака $\frac{1}{y} = z$, а именно: $\sum (z_k - \hat{z}_k)^2 \to \min$. Коэффициент регрессии интерпретируется так же, как в линейном уравнении регрессии. Если, например, под y подразумеваются затраты на рубль продукции, а под x - производительность труда (выработка продукции на одного работника), то обратная величина $\frac{1}{y}$ характеризует затратоотдачу, следовательно, параметр b имеет экономическое содержание - средний прирост продукции в стоимостном измерении на 1 руб. затрат с ростом производительности труда на единицу своего измерения.

2.8. КОРРЕЛЯЦИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭЛАСТИЧНОСТИ

Для уравнения нелинейной регрессии, так же как и для линейной зависимости, рассчитываются показатели корреляции:

$$R^2 = \frac{D_{y(объясн)}}{D_y} = 1 - \frac{D_{y(ост)}}{D_y} = 1 - \frac{n \cdot \sum (y_k - \hat{y}(x_k))^2}{\sum (y_k - \bar{y})^2}.$$

Величину R^2 (равную отношению объясненной уравнением регрессии дисперсии результата y к общей дисперсии y) для нелинейных связей называют ***индексом детерминации***, а корень из данной величины R называют ***индексом корреляции***. Величина индекса корреляции R находится в границах от 0 до 1. Чем ближе она к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, тем более надежно уравнение регрессии.

Если после преобразования уравнение регрессии (нелинейное по объясняющим переменным) принимает форму линейного парного уравнения регрессии, то для оценки тесноты связи может быть использован линейный коэффициент корреляции $R_{yx} = r_{yz}$, где z — преобразованная величина признака-фактора, например $z = \frac{1}{x}$ или $z = \ln x$.

Иначе обстоит дело, когда преобразования уравнения в линейную форму связаны с результативным признаком (нелинейность по параметрам). В этом случае линейный коэффициент корреляции по преобразованным значениям признаков дает лишь приближенную оценку тесноты связи и численно не совпадает с индексом корреляции.

Индекс детерминации R^2 используется для проверки существенности уравнения нелинейной регрессии в целом по F-критерию Фишера: $F_{набл} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-h}{h-1}$, где R^2 — индекс детерминации; n — число наблюдений; h — число параметров в уравнении. По таблицам распределения Фишера - Снедоккора (приложение 2) находят критическое значение F-критерия в зависимости от уровня значимости α (обычно его берут равным 0,05) и двух чисел степеней свободы $k1 = h-1$ и $k2 = n-h$. Если $F_{набл} > F_{кр}$, то принимают альтернативную гипотезу о статистической значимости уравнения регрессии.

Коэффициент эластичности как характеристика степени взаимодействия фактора с результатом. Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменится значение фактора y при изменении значения фактора x на 1 %. Коэффициент эластичности *(Э)* рассчитывается как относительное изменение y на единицу относительного изменения x:

$$Э = \frac{dy}{dx} : \frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}.$$

Различают средние и точечные коэффициенты эластичности. *Средний* коэффициент эластичности рассчитывается для среднего значения x:

$Э(\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{y(\overline{x})} \cdot \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\overline{x}}$ и показывает, на сколько процентов изменится y относительно своего среднего уровня $y(\overline{x})$ при росте x на 1% относительно своего среднего уровня $\overline{x}$.

Точечный коэффициент эластичности рассчитывается для конкретного значения $x = x_o$: $Э(x_o) = \frac{x_o}{y(x_o)} \cdot \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_o}$ и показывает, на сколько процентов изменится y относительно уровня $y(x_o)$ при увеличении x на 1% от уровня x_o. В зависимости от вида зависимости между x и y формулы расчета коэффициентов эластичности будут меняться (табл. 1).

Таблица 1

Вид функции $y(x)$	Точечный коэффициент эластичности	Средний коэффициент эластичности
Линейная $y = b_o + b_1 \cdot x$	$Э(x_o) = \frac{b_1 \cdot x_o}{b_o + b_1 \cdot x_o}$	$Э(\overline{x}) = \frac{b_1 \cdot \overline{x}}{b_o + b_1 \cdot \overline{x}}$
Парабола $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$	$Э(x_o) = \frac{(b + 2c \cdot x_o) \cdot x_o}{a + b \cdot x_o + c \cdot x_o^2}$	$Э(\overline{x}) = \frac{(b + 2c \cdot \overline{x}) \cdot \overline{x}}{a + b \cdot \overline{x} + c \cdot \overline{x}^2}$
Гипербола $y = a + \frac{b}{x}$	$Э(x_o) = \frac{-b}{a \cdot x_o + b}$	$Э(\overline{x}) = \frac{-b}{a \cdot \overline{x} + b}$
Степенная $y = a \cdot x^b$	$Э(x_o) = b$	$Э(\overline{x}) = b$
Показательная $y = a \cdot b^x$	$Э(x_o) = x_o \cdot \ln b$	$Э(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \ln b$

Только для степенных функций $y = a \cdot x^b$ коэффициент эластичности представляет собой постоянную величину (равную параметру b). Именно поэтому степенные функции широко используются в эконометрических исследованиях. Параметр b в таких функциях имеет четкую экономическую интерпретацию – он показывает процентное изменение результата при увеличении фактора на 1%. Так, если зависимость спроса y от цен p характеризуется уравнением вида $y = 200 \cdot p^{-1,5}$, то с увеличением цен на 1% спрос снижается в среднем на 1,5 %.

Несмотря на широкое использование в эконометрике степенной функции, возможны случаи, когда она не имеет экономического смысла. Например, степенная функция не может быть экономически интерпретирована при исследовании зависимости заработной платы от возраста рабочих.

3. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов можно пренебречь. Однако в экономике такая ситуация встречается довольно редко. Например, функция потребления чаще всего рассматривается как модель $C = C(y, P, M, Z)$, зависящая от четырех переменных: y - доход, P- цена, M – наличные деньги, Z - ликвидные активы. Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчетах.

Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

3.1. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Естественным обобщением линейной регрессии с двумя переменными является многомерная регрессионная модель (multiple regression model), или модель множественной регрессии:

$$y_k = b_o + b_1 \cdot x_{1k} + b_2 \cdot x_{2k} + \ldots + b_m \cdot x_{mk} + u_k\ , \quad k = 1,\ldots,n\ ,$$

где y_k — значение признака-результата (зависимой переменной) для k-го наблюдения;

x_{ik} — значение i-го фактора (независимой или объясняющей переменной) $(i = 1,\ldots,m)$ для k-го наблюдения;

u_k — случайная составляющая результативного признака для k-го наблюдения;

b_o — свободный член, который формально показывает среднее значение y при $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$;

b_i. — коэффициент «чистой» регрессии при i-м факторе $(i = 1,\ldots,m)$. Он характеризует среднее изменение признака-результата y с изменением соответствующего факторах на единицу, при условии, что прочие факторы модели не изменяются и фиксированы на средних уровнях.

Обычно для многомерной регрессионной модели делаются предпосылки, аналогичные классической линейной двухфакторной модели (п.2.3). Главной из этих предпосылок является утверждение о том, что факторы являются детерминированными (неслучайными) переменными.

Модель линейной множественной регрессии, для которой выполняются эти предпосылки, называется нормальной линейной регрессионной моделью (Classical Normal Regression model).

Факторы, включаемые в модель множественной регрессии, должны отвечать следующим требованиям:

1. Факторы должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность (например, в модели урожайности качество почвы задается в баллах).

2. Каждый фактор должен быть достаточно тесно связан с результатом (т. е. коэффициент парной линейной корреляции между фактором и результатом должен существенно отличаться от нуля).

3. Факторы не должны сильно коррелировать друг с другом, тем более не должны находиться в строгой функциональной связи. Последнее требование связано с понятием мультиколлинеарности.

Мультиколлинеарность — это нестрогая линейная зависимость между факторными признаками, которая может привести к следующим нежелательным последствиям.

1. Оценки параметров становятся ненадежными. Они обнаруживают большие стандартные ошибки, малую значимость. В то же время модель в целом является значимой, т. е. значение множественного коэффициента корреляции завышено.

2. Небольшое изменение исходных данных приводит к существенному изменению оценок параметров модели.

3. Оценки параметров модели имеют неправильные с точки зрения теории знаки или неоправданно большие значения, что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

4. Становится невозможным определить изолированное влияние факторов на результативный показатель.

Данная проблема является обычной для регрессий временных рядов. Если независимые переменные имеют ярко выраженный временной тренд, то они будут тесно коррелированны, и это может привести к мультиколлинеарности.

На практике о наличии мультиколлинеарности судят по матрице парных линейных коэффициентов корреляции (корреляционной матрице):

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{01} & \dots & r_{0m} \\ r_{01} & 1 & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m0} & r_{m1} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где, например, r_{1m} — коэффициент парной линейной корреляции между 1-м и m-м факторными признаками, а r_{0m} — коэффициент парной линейной корреляции между результативным признаком и m-м фактором.

Коэффициент корреляции, измеряющий связь признака с самим собой, равен единице, поэтому на главной диагонали в корреляционной матрице стоят единицы. Корреляционная матрица является симметричной относительно главной диагонали. Если имеет место мультиколлинеарность, то в модель следует включать не все факторы, а только те, которые в меньшей степени ответственны за мультиколлинеарность и имеют наименьшие по модулю значения коэффициентов парной линейной корреляции.

Оценки параметров b_i в модели линейной регрессии находятся методом наименьших квадратов, в котором минимизируется сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений результативного признака y_k от расчетных (теоретических) значений:

$$S(\hat{b}_o, \hat{b}_1, ..., \hat{b}_m) = \sum\left(y_k - \left(\hat{b}_o + \sum \hat{b}_i \cdot x_{ik}\right)\right)^2 \to \min .$$

Приравнивая частные производные к нулю, получим систему из m уравнений, решая которую найдем оценки параметров уравнения регрессии.

3.2. ПОКАЗАТЕЛИ ТЕСНОТЫ СВЯЗИ ФАКТОРА С РЕЗУЛЬТАТОМ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧАСТНОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ И СТАНДАРТИЗОВАННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РЕГРЕССИИ

Если факторные признаки различны по своей сущности и/или имеют различные единицы измерения, то коэффициенты регрессии b_i уравнения

$y_k = b_o + b_1 \cdot x_{1k} + b_2 \cdot x_{2k} + u_k$ являются несопоставимыми. Поэтому уравнение регрессии дополняют соизмеримыми показателями тесноты связи фактора с результатом, позволяющими ранжировать факторы по силе влияния на результат. К таким показателям тесноты связи относят: частные коэффициенты эластичности, β-коэффициенты и другие.

Частные коэффициенты эластичности $Э_i$ рассчитываются по формуле

$Э_i = \frac{dy}{dx_i} \cdot \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}}$, где $\overline{x}_i$ — среднее значение фактора x_i; $\overline{y}$ — среднее значение результата y. Частный коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем изменяется признак-результат y с увеличением признака-фактора x_i на 1% от своего среднего уровня при фиксированном положении других факторов модели. В случае линейной зависимости частные коэффициенты эластичности рассчитываются по формуле $Э_i = b_i \cdot \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}}$.

Стандартизованные частные коэффициенты регрессии – бета-*коэффициенты* β_i показывают, на какую часть своего среднеквадратического отклонения σ_y изменится признак-результат y с увеличением соответствующего фактора x_i на величину своего среднеквадратического отклонения σ_{xi} при неизменном влиянии прочих факторов модели. В случае линейной зависимости вычисляются по формуле $\beta_i = b_i \cdot \frac{\sigma_{xi}}{\sigma_y}$, где b_i - коэффициенты уравнения линейной регрессии.

Частные коэффициенты эластичности и стандартизованные частные коэффициенты регрессии используются для ранжирования факторов по силе влияния на результат. Чем больше величина $Э_i$ или β_i, тем сильнее влияет фактор x_i на результат y. Рассмотрим ранжирование факторов на примере. Пусть известны результаты оценивания регрессии заработной платы рабочих y по возрасту x_1 и выработке x_2: $y = -16{,}04 + 5{,}1 \cdot x_1 + 8{,}08 \cdot x_2$. Частный коэффициент эластичности для фактора «возраст» будет равен: $Э_1 = \frac{5{,}1 \cdot 35{,}65}{320} = 0{,}568$, $\left(\bar{y} = 320\,;\, \bar{x}_1 = 35{,}65\right)$. Частный коэффициент эластичности для фактора «выработка» будет равен: $Э_2 = \frac{8{,}08 \cdot 19{,}1}{320} = 0{,}482$, $\left(\bar{y} = 320\,;\, \bar{x}_2 = 19{,}1\right)$. Так как $Э_1 > Э_2$, то фактор «возраст» сильнее влияет на заработную плату рабочего (т. е. вызывает более существенное изменение заработной платы), чем фактор «выработка».

β-коэффициенты для данного примера равны: для фактора «возраст» $\beta_1 = 0{,}602$ и для фактора «выработка» $\beta_2 = 0{,}408$. Так как $\beta_1 > \beta_2$, то фактор «возраст» сильнее влияет на заработную плату рабочего, чем фактор «выработка», что совпадает с выводом по коэффициентам эластичности. Однако в некоторых примерах по коэффициентам эластичности и β-коэффициентам могут быть сделаны противоположные выводы. Причины для этого две: а) вариация одного фактора очень велика; б) разнонаправленное воздействие факторов на результат.

3.3. ЧАСТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Показатели парной корреляции — r_{xy} характеризуют тесноту связи результата и фактора, не принимая во внимание возможного влияния на результат других факторных признаков. Поэтому во множественном регрессионном анализе возникает проблема определения тесноты связи между двумя признаками в чистом виде, т. е. при устранении воздействия других факторов, учтенных в модели.

Показателем «чистого» влияния фактора на результат при устранении влияния прочих факторов, включенных в модель регрессии, является *частный коэффициент корреляции*, или частный индекс корреляции (в зависимости от формы связи).

Пусть исследовалась зависимость $y = \hat{y}(x_1)$, для которой остаточная дисперсия равна $\varepsilon_1^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y_k - \hat{y}(x_1)\right)^2$. Включив в уравнение регрессии дополнительный фактор x_2, т.е. найдя зависимость $y = \hat{y}(x_1, x_2)$, мы получим остаточную дисперсию результата $\varepsilon_{12}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y_k - \hat{y}(x_1, x_2)\right)^2$, которая будет не больше ε_1^2. Сокращение остаточной дисперсии за счет дополнительного включения в уравнение регрессии фактора x_2 составит $\left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{12}^2\right)$. Чем выше доля этого сокращения в исходной дисперсии, т.е. чем больше соотношение $\left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{12}^2\right)/\varepsilon_1^2$, тем теснее связь между y и x_2 при постоянном действии x_1.

Корень квадратный из этой величины и есть ***коэффициент частной корреляции*** результата со вторым фактором при постоянном действии первого фактора: $r_{yx2/x1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_1^2}}$. Аналогично можно определить коэффициент частной корреляции результата с первым фактором при постоянном действии второго фактора: $r_{yx1/x2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_2^2}}$ (фактор x_2 фиксирован). В обозначении коэффициента частной корреляции после знака «/» перечисляются те факторы модели, влияние которых устраняется.

Рассмотренные частные коэффициенты корреляции являются коэффициентами частной корреляции первого порядка. Порядок частного коэффициента корреляции определяется числом факторов, влияние которых исключается. Для коэффициента парной корреляции r_{xy} порядок равен 0.

Для расчета частных коэффициентов корреляции можно использовать парные коэффициенты корреляции. Для двухфакторной модели регрессии можно вычислить следующие коэффициенты частной корреляции первого порядка: $r_{yx1/x2} = \dfrac{r_{yx1} - r_{yx2} \cdot r_{x1x2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x1x2}\right)\left(1 - r^2_{yx2}\right)}}$ (фактор x_2 фиксирован);

$$r_{yx2/x1} = \frac{r_{yx2} - r_{yx1} \cdot r_{x1x2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x1x2}\right)\left(1 - r^2_{yx1}\right)}}$$ (фактор x_1 фиксирован).

Можно рассчитать также коэффициент частной корреляции, измеряющий тесноту связи между x_1 и x_2 при фиксации признака-результата y:

$$r_{x1x2/y} = \frac{r_{x2x1} - r_{yx1} \cdot r_{yx2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx1}\right)\left(1 - r^2_{yx2}\right)}}.$$

Для трехфакторной модели регрессии можно рассчитать частные коэффициенты корреляции 2-го порядка:

$$r_{yx1/x2x3} = \frac{r_{yx1/x2} - r_{yx3/x2} \cdot r_{x1x3/x2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x1x3/x2}\right)\left(1 - r^2_{yx3/x2}\right)}}$$ и так далее.

Данные формулы для расчета частных коэффициентов корреляции k-го порядка через коэффициенты частной корреляции $(k-1)$-го порядка называются ***рекуррентными***. На практике наибольший интерес представляют частные коэффициенты корреляции самого высокого порядка.

Частные коэффициенты корреляции, рассчитанные по рекуррентным формулам, изменяются от -1 до + 1. Чем ближе к единице модуль частного коэффициента корреляции, тем теснее связь фактора с результатом при устранении влияния прочих факторов, включенных в модель регрессии. Частные коэффициенты корреляции используются не только для ранжирования факторов модели по степени влияния на результат, но и также для отсева факторов. Например, при близких к нулю значениях $r_{yx3/x1x2}$ нет смысла вводить в уравнение третий фактор, т. к. качество уравнения регрессии при его введении возрастет незначительно.

Значимость частных коэффициентов корреляции, так же как и парных коэффициентов корреляции, проверяется с помощью критерия Стьюдента.

Наблюдаемое значение статистики находится по формуле $t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-q-2}$, где r - выборочная оценка частного коэффициента корреляции, q - порядок этого коэффициента.

3.4. ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ УРАВНЕНИЯ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ. ОБЩИЙ И ЧАСТНЫЙ F-КРИТЕРИИ

Главным показателем качества модели множественной регрессии, как и для парной регрессии, является коэффициент множественной детерминации R^2, который характеризует совместное влияние всех факторов на результат.

Корень квадратный из этого коэффициента $R = \sqrt{R^2}$ называется ***коэффициентом множественной корреляции***. Он принимает значения от 0 до 1 (в отличие от парного коэффициента корреляции r_{xy}, который может принимать отрицательные значения). Чем плотнее фактические значения y_k располагаются относительно теоретической линии регрессии, тем меньше остаточная дисперсия и, следовательно, больше величина *R*. Таким образом, при значении *R*, близком к 1, уравнение регрессии лучше описывает фактические данные, и факторы сильнее влияют на результат. При значении *R*, близком к нулю, уравнение регрессии плохо описывает фактические данные, т.е. факторы оказывают слабое воздействие на результат.

Важное свойство коэффициента детерминации состоит в том, что это неубывающая функция от числа факторов, т. е. включение в модель любого дополнительного фактора x_{m+1} не приведет к снижению коэффициента детерминации.

Формула расчета коэффициента детерминации через необъясненную дисперсию аналогична приведенной в п. 2.8:

$$R^2 = \frac{D_{y(объясн)}}{D_y} = 1 - \frac{D_{y(ост)}}{D_y} = 1 - \frac{n \cdot \sum\left(y_k - \hat{y}\left(x_{1k}, x_{2k}, x_{mk}\right)\right)^2}{\sum\left(y_k - \overline{y}\right)^2}.$$

Для линейного уравнения регрессии данный показатель может быть рассчитан через β-коэффициенты: $R^2 = \sum \beta_k \cdot r_{yx_k}$.

Для того чтобы значения R^2 были сравнимы по разным моделям, необходимо учесть число независимых переменных в модели и вычислить ***скорректированный коэффициент детерминации***:

$$\overline{R}^2 = R^2_{скор} = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-h},$$

где n - число наблюдений, h - число параметров в уравнении регрессии.

Если n велико, R^2 и $\overline{R}^2$ будут незначительно отличаться.

Оценка значимости уравнения множественной регрессии осуществляется путем проверки основной гипотезы H_0: $R^2 = 0$ или $\hat{b}_1 = \hat{b}_2 = \ldots = \hat{b}_m = 0$ (гипотеза о статистической незначимости уравнения регрессии). Для проверки основной гипотезы используют общий F-критерий Фишера, описанный в п. 2.8.

Так, схема проверки и фактическое (наблюдаемое) значение статистики F-критерия вычисляется по формуле из п. 2.8: $F_{набл} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-h}{h-1}$.

Оценка значимости дополнительного включения фактора (частный F-критерий). Необходимость такой оценки связана с тем, что не каждый фактор, вошедший в модель, может существенно увеличить долю объясненной вариации результативного признака. Это может быть связано с последовательностью вводимых факторов (т. к. существует корреляция между самими факторами).

Допустим, что оценивается значимость фактора x_1 как дополнительно включенного в модель $y = \hat{y}(x_2)$. Тогда наблюдаемое значение статистики частного F-критерия будет вычисляться по формуле

$$F_{x1} = \frac{R^2_{y(x1,x2)} - R^2_{y(x2)}}{1 - R^2_{y(x1,x2)}} \cdot \frac{n-h}{1} = \frac{R^2_{y(x1,x2)} - r^2_{yx2}}{1 - R^2_{y(x1,x2)}} \cdot \frac{n-3}{1},$$

где h - число оцениваемых параметров модели (для линейной регрессии двух переменных число параметров равно 3).

Наблюдаемое значение частного F-критерия сравнивается с критическим значением: если $F_{x1} > F_{kp}$, то фактор x_1 целесообразно включать в модель.

3.5. ФИКТИВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ

До сих пор мы рассматривали в качестве факторов количественные признаки (признаки, принимающие числовые значения). Вместе с тем может оказаться необходимым включить в модель качественный (атрибутивный) фактор (факторы). Примером качественных признаков может служить пол, образование, климатические условия.

Чтобы ввести такие признаки в модель, они должны быть преобразованы в количественные, т.е. им должны быть присвоены цифровые метки. Сконструированные на основе качественных факторов числовые переменные называют фиктивными переменными.

Рассмотрим применение фиктивных переменных на примере. Пусть по данным о 20 рабочих цеха оценивается регрессия заработной платы рабочего за месяц y (руб.) от количественного фактора x_1 — возраст рабочего (лет) и качественного фактора x_2 — пол. Мы предполагаем, что у мужчин зарплата выше, чем у женщин. Введем в модель $y = b_o + b_1 \cdot x_1$ фиктивную переменную z, которая принимает два значения: 1 – если пол рабочего мужской; 0 – если пол женский. Для построения модели $y = b_o + b_1 \cdot x_1 + c \cdot z$ используется обычный МНК. Предположим, что в результате решения получено следующее уравнение регрессии: $\hat{y} = 63{,}52 + 7 \cdot x_1 + 103{,}2 \cdot z$. Интерпретация параметра c = 103,2 при фиктивной переменной следующая: у мужчин-рабочих зарплата в среднем выше на 103,2 рубля, чем у женщин-рабочих при одном и том же возрасте мужчины и женщины.

В рассмотренном примере качественный признак принимает только 2 значения. Если же число градаций (значений) качественного фактора больше двух, в модель вводится несколько фиктивных переменных. Их число должно быть на 1 меньше числа градаций качественного фактора. Например, введем в модель регрессии заработной платы рабочего *(y)* от возраста *(x_1)* качественный фактор — образование, принимающий 3 градации (значения): «до 8 классов»; «среднее»; «специальное». Для придания этому фактору численных значений введем 2 фиктивные переменные z_1 и z_2. Их значения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Образование	z_1	z_2
До 8 классов	0	0
Среднее	1	0
Специальное	0	1

В результате оценивания с помощью МНК получим уравнение регрессии: $\hat{y} = \hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_1 + \hat{c}_1 \cdot z_1 + \hat{c}_2 \cdot z_2$. Из этого уравнения можно получить частные уравнения регрессии, соответствующие различным значениям качественного признака «образование»:

«до 8 классов»: $\hat{y} = \hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_1$, $(z_1 = 0;\ z_2 = 0)$;

«среднее»: $\hat{y} = \hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_1 + \hat{c}_1$, $(z_1 = 1; z_2 = 0)$;

«специальное»: $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x_1 + \hat{c}_2$, $(z_1 = 0; z_2 = 1)$.

Значение качественного фактора, для которого все фиктивные переменные равны нулю $(z_1 = z_2 = 0)$, называют базовым значением. В нашем примере базовым значением является образование «до 8 классов».

Параметр при первой фиктивной переменной - c_1 означает, что при одном и том же возрасте рабочие со средним образованием получают заработную плату на c_1 долларов выше по сравнению с рабочими, имеющими образование «до 8 классов». Параметр при второй фиктивной переменной - c_2 означает, что при одном и том же возрасте рабочие со специальным образованием получают заработную плату на c_2 долларов выше по сравнению с рабочими, имеющими образование «до 8 классов».

3.6. НЕЛИНЕЙНАЯ МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Для линейного регрессионного анализа требуется линейность только по параметрам, поскольку нелинейность по объясняющим переменным может быть устранена с помощью метода замены переменных. Например, зависимость $y = b_o + b_1 \cdot x_1^2 + b_2 \cdot x_2^{0,5} + \varepsilon$ может быть переписана в форме, которая будет линейной по объясняющим переменным $z_1 = x_1^2$, $z_2 = x_2^{0,5}$.

Нелинейность по параметрам является более серьезной проблемой. Если имеет место показательная либо степенная зависимость и случайная составляющая входит в модель мультипликативно, то модель может быть линеаризована посредством логарифмирования обеих ее частей. Например, функция спроса $y = a \cdot x^b \cdot p^c \cdot \varepsilon$, где y - объем потребления товара; x - доход; p - цена; ε - случайная составляющая, может быть преобразована в форму, которая является линейной по параметрам: $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + c \cdot \ln p + \ln \varepsilon$. При этом коэффициент при $\ln x$ будет непосредственной оценкой b – эластичности спроса по доходу, коэффициент при $\ln p$ будет оценкой C – эластичности спроса по цене.

Производственная функция. Производственная функция представляет собой математическую модель, характеризующую зависимость объема выпускаемой продукции от факторов производства. При этом модель может быть построена как для отдельной фирмы и отрасли, так и для всей национальной экономики.

Рассмотрим производственную функцию, включающую два фактора производства: затраты капитала *K* и трудовые затраты *L*, определяющие объем выпуска *Q*. Тогда можно записать: *Q = f (K , L)*. Определенного уровня выпуска можно достичь с помощью различного сочетания капитальных и трудовых затрат. Кривые, описываемые условиями *f (K , L)* = const, называют ***изоквантами***. Предполагается, что по мере роста значений одного из факторов предельная норма замещения данного фактора производства уменьшается. Поэтому при сохранении постоянного объема производства экономия (сокращение) одного вида затрат, связанная с увеличением затрат другого фактора, постепенно уменьшается.

Рассмотрим подробно производственную функцию Кобба—Дугласа, которая для двух факторов производства имеет вид $Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, где *A, a*, β — параметры модели. Величина *A* зависит от единиц измерения *Q, K, L,* а также от эффективности производственного процесса. При фиксированных значениях *K* и *L* функции, характеризующейся большей величиной параметра *A*, соответствует большее значение *Q*, следовательно, и производственный процесс, описываемый такой функцией, более эффективен.

Параметры α и β называют коэффициентами эластичности. Они показывают, на сколько процентов в среднем изменится *Q*, если α и β увеличить соответственно на 1 %. Можно предположить, что обе величины α и

β находятся между нулем и единицей. Они должны быть положительными, так как увеличение затрат производственных факторов должно вызвать рост объема выпуска. Скорее всего они будут меньше единицы, так как разумно предположить, что рост объема выпуска происходит медленнее, чем рост производственных затрат, если другие факторы остаются постоянными.

Эффект от масштаба производства. Рассмотрим поведение производственной функции при изменении масштабов производства. Предположим для этого, что затраты каждого фактора производства увеличились в C раз. Тогда новое значение будет определяться следующим образом: $Q' = A \cdot (C \cdot K)^{\alpha} \cdot (C \cdot L)^{\beta} = C^{\alpha+\beta} \cdot Q$. Если $(\alpha + \beta) > 1$, то говорят, что функция имеет возрастающий эффект от масштабов производства. Это значит, что если K и L увеличиваются в некоторой пропорции (C раз), то Q растет в большей пропорции ($C^{\alpha+\beta} > C$). Если $(\alpha + \beta) = 1$, то говорят, что функция имеет постоянный эффект от масштабов производства. Это значит, что Q увеличивается в той же пропорции, что и K и L. Если $(\alpha + \beta) < 1$, то говорят, что функция имеет убывающий эффект от масштабов производства. Это значит, что Q увеличивается в меньшей пропорции, чем K и L.

4. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Описать адекватно сложное социально-экономическое явление с помощью только одного соотношения (уравнения) не всегда получается. Кроме того, некоторые переменные могут оказывать взаимные воздействия и трудно однозначно определить, какая из них является зависимой, а какая независимой переменной. Поэтому при построении эконометрической модели прибегают к системам уравнений.

Так, если изучается модель спроса как соотношение цен и количества потребляемых товаров, то одновременно для прогнозирования спроса необходима модель предложения товаров, в которой рассматривается также взаимосвязь между количеством и ценой предлагаемых благ. Это позволяет достичь равновесия между спросом и предложением.

4.1. ВИДЫ СИСТЕМ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. СТРУКТУРНАЯ И ПРИВЕДЕННАЯ ФОРМЫ МОДЕЛИ

Системы эконометрических уравнений включают множество эндогенных (зависимых) переменных $y_1, y_2, ..., y_K$ и множество предопределенных переменных, к которым относятся лаговые и текущие экзогенные переменные — $x_1, x_2, ..., x_m$, а также лаговые эндогенные переменные — y_{K-1}. Все эконометрические модели предназначены для объяснения текущих значений *эндогенных* переменных по значениям *предопределенных* переменных.

Система уравнений в эконометрических исследованиях может быть построена по-разному. Выделяют три вида эконометрических систем:

Система независимых уравнений, когда каждая зависимая переменная y рассматривается как функция только от предопределенных переменных x:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1 ; \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2 ; \\ \quad ... \\ y_K = a_{K1} \cdot x_1 + a_{K2} \cdot x_1 + ... + a_{Km} \cdot x_m + \varepsilon_K . \end{cases}$$

Примером такой системы может служить модель экономической эффективности сельскохозяйственного производства, где в качестве зависимых переменных выступают показатели эффективности производства (продуктивность коров, себестоимость 1 т молока и т.п.), а в качестве факторов – специализация хозяйства, количество голов на 100 га пашни, затраты труда.

Система рекурсивных уравнений, когда в каждом последующем уравнении системы зависимая переменная представляет функцию от всех зависимых и предопределенных переменных из предыдущих уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1 ; \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{21} \cdot x_1 + ... + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2 ; \\ \quad ... \\ y_K = (b_{K1} \cdot y_1 + b_{K2} \cdot y_2 + ... + b_{K\,K-1} \cdot y_{K-1}) + a_{K1} \cdot x_1 + ... + a_{Km} \cdot x_K + \varepsilon_K . \end{cases}$$

Примером такой системы может служить модель, где фактор фондоотдачи зависит от производительности, фондовооруженности и энерговооруженности труда и от квалификации рабочих.

В рассмотренных двух видах систем каждое уравнение может рассматриваться самостоятельно, и параметры таких уравнений можно определить с помощью традиционного метода наименьших квадратов.

Система взаимозависимых (совместных, одновременных) уравнений, когда зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть (т. е. выступают в роли признаков-результатов), а в других уравнениях — в правую часть системы (т. е. выступают в роли признаков-факторов):

$$\begin{cases} y_1 = (b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 + \ldots + b_{1K} \cdot y_K) + (a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1m} \cdot x_m) + \varepsilon_1 ; \\ y_2 = (b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + \ldots + b_{2K} \cdot y_K) + a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2 ; \\ \ldots \\ y_K = (b_{K1} \cdot y_1 + b_{K2} \cdot y_2 + \ldots + b_{K\,K-1} \cdot y_{K-1}) + a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon_K . \end{cases}$$

Название «система одновременных уравнений» подчеркивает тот факт, что в системе одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других.

В отличие от предыдущих систем каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим, так как нарушаются предпосылки, лежащие в основе МНК:

- причинно-следственная зависимость между переменными в уравнении. В первом уравнении y_1 есть функция от y_2, во втором уравнении y_2 есть функция от y_1;
- факторы в такой системе мультиколлинеарны. Как следует из 2-го уравнения системы, y_2 зависит от x_1. Но в других уравнениях системы признаки y_2 и x_1 фигурируют как факторные (объясняющие переменные);

- случайные составляющие оказываются коррелированными с объясняющими переменными.

Таким образом, нарушается 1-я предпосылка нормальной регрессионной модели о нестохастичности объясняющих переменных. В результате оценки параметров получаются смещенными и несостоятельными.

Структурная и приведенная формы системы одновременных уравнений. *Структурная форма модели* описывает реальное экономическое явление или процесс. Чаще всего реальные явления или процессы настолько сложны, что для их описания системы независимых или рекурсивных уравнений не подходят, поэтому прибегают к системам одновременных уравнений. Параметры структурной формы называются структурными параметрами, или коэффициентами. Некоторые из уравнений структурной формы могут быть представлены в виде тождеств, т. е. уравнений заданной формы с известными параметрами. Простейшая структурная форма модели имеет вид $\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + a_{11} \cdot x_1 + \varepsilon_1 , \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2 + \varepsilon_2 , \end{cases}$

где y - эндогенные переменные, x - экзогенные переменные.

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели дает смещенные и несостоятельные оценки. Поэтому обычно структурная форма модели преобразуется в приведенную форму.

Приведенная форма модели — система независимых уравнений, в которой все текущие эндогенные переменные модели выражены через предопределенные переменные модели:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + ... + \delta_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1 ; \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + ... + \delta_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2 ; \\ \quad ... \\ y_K = \delta_{K1} \cdot x_1 + \delta_{K2} \cdot x_1 + ... + \delta_{Km} \cdot x_m + \varepsilon_K . \end{cases}$$

Параметры приведенной формы модели δ_{ij} называются приведенными коэффициентами. Например, приведенная выше простейшая структурная форма модели после преобразований может быть переписана в виде равносильной системы: $\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 , \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 . \end{cases}$

Приведенные коэффициенты выражаются через первоначальные по формулам:

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}}, \delta_{12} = \frac{a_{22} \cdot b_{12}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}}, \delta_{21} = \frac{a_{11} \cdot b_{21}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}}, \delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}}.$$

Приведенная форма строится для того, чтобы по МНК- оценкам ее параметров определить оценки структурных коэффициентов.

4.2. ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИКАЦИИ

Зная оценки приведенных коэффициентов, можно определить параметры структурной формы модели. Но не всегда, а только если модель является идентифицируемой.

Модель считается точно идентифицированной, если все ее уравнения точно идентифицированы, т.е. если все оценки структурных параметров можно однозначно (единственным способом) найти по коэффициентам приведенной модели.

Модель считается неидентифицированной, если среди уравнений модели есть хотя бы одно неидентифицированное, т.е. оценки структурных параметров невозможно найти по коэффициентам приведенной модели.

Модель считается сверхидентифицированной, если среди уравнений модели есть хотя бы одно сверхидентифицированное, т.е. если для некоторых структурных параметров можно получить более одного численного значения.

Правила идентификации (применяются только к структурной форме модели). Введем следующие обозначения:

M — число предопределенных переменных в модели;

m — число предопределенных переменных в данном уравнении;

K — число эндогенных переменных в модели;

k — число эндогенных переменных в данном уравнении;

A — матрица коэффициентов при переменных, ***не входящих*** в данное уравнение.

Необходимое и достаточное условия идентификации уравнения модели:

- Если $M - m > k - 1$ и ранг матрицы A равен K - 1, то уравнение сверхидентифицировано.
- Если $M - m = k - 1$ и ранг матрицы A равен K - 1, то уравнение точно идентифицировано.
- Если $M - m \geq k - 1$ и ранг матрицы A меньше K - 1, то уравнение неидентифицировано.
- Если $M - m < k - 1$, то уравнение неидентифицировано. В этом случае ранг матрицы A будет меньше K - 1.

Рассмотрим пример. Дана структурная модель спроса и предложения:

1 — уравнение предложения: $Q_t^s = a_o + a_1 \cdot P_t + a_2 \cdot P_{t-1}$;

2 — уравнение спроса: $Q_t^d = b_o + b_1 \cdot P_t + b_2 \cdot I_t$;

3 — тождество равновесия: $Q_t^s = Q_t^d$.

Проверим модель на идентификацию и составим приведенную форму модели. Учитывая тождество, система примет вид

$$\begin{cases} Q_t = a_o + a_1 \cdot P_t + a_2 \cdot P_{t-1} + \varepsilon_1 ; \\ Q_t = b_o + b_1 \cdot P_t + b_2 \cdot I_t + \varepsilon_2 . \end{cases}$$

В данной модели: *эндогенными* переменными являются взаимозависимые переменные: P_t – цена, Q – количество товара; *предопределенными* переменными являются: I_t – доход (экзогенная переменная); P_{t-1} – цена в предыдущий период времени (лаговая эндогенная переменная); *случайными* переменными являются: $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. *Структурными параметрами* модели являются: a_o , a_1 , a_2 , b_1 , b_2.

Таким образом, число эндогенных переменных модели $K = 2$; число предопределенных переменных модели $M = 2$.

Проверим выполнение условий идентификации.

Для 1-го уравнения системы (функции спроса) $k = 2$; $m = 1$. Выполняется условие $M - m = k - 1 = 1$. В первом уравнении отсутствует только переменная I_t. Матрица $A = \left(b_2\right)$. Определитель данной матрицы не равен нулю, следовательно, ранг равен $K - 1 = 1$ и уравнение идентифицируемо.

Для 2-го уравнения (функция предложения) $k = 2$; $m = 1$. Условие $M - m = k - 1 = 1$ выполняется. Во 2-м уравнении отсутствует только переменная P_{t-1}. Матрица $A = \left(a_2\right)$, определитель данной матрицы не равен нулю, следовательно, ранг равен $K - 1 = 1$ и уравнение идентифицируемо.

Сделаем выводы: 1-е и 2-е уравнения системы точно идентифицированы. Следовательно, система в целом является точно идентифицируемой.

Составим приведенную форму. Приведенная форма содержит 2 уравнения (число уравнений равно числу текущих эндогенных переменных модели). Для количества товара – $Q_t = A_1 + A_2 \cdot I_t + A_3 \cdot P_{t-1} + U_1$.

Для цены – $P_t = B_1 + B_2 \cdot I_t + B_3 \cdot P_{t-1} + U_2$. Каждое уравнение представляет зависимость эндогенной переменной от предопределенных переменных модели (дохода и цены в предыдущий период).

4.3. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены разными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение в литературе получили следующие методы оценивания коэффициентов структурной модели:

- косвенный метод наименьших квадратов;
- двухшаговый метод наименьших квадратов;

- трехшаговый метод наименьших квадратов;
- метод максимального правдоподобия с полной информацией;
- метод максимального правдоподобия при ограниченной информации.

Косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) применяется для точно идентифицируемой системы одновременных уравнений, а двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК) используется для оценки коэффициентов сверхидентифицируемой модели. Метод максимального правдоподобия рассматривается как наиболее общий метод оценивания, результаты которого при нормальном распределении признаков совпадают с МНК. Однако при большом числе уравнений системы этот метод приводит к достаточно сложным вычислительным процедурам. Поэтому в качестве модификации используется метод максимального правдоподобия при ограниченной информации (метод наименьшего дисперсионного отношения). В данном методе сняты ограничения на параметры, связанные с функционированием системы в целом. Это делает решение более простым, но трудоемкость вычислений остается достаточно высокой. Несмотря на его значительную популярность, к середине 60-х годов он был практически вытеснен двухшаговым методом наименьших квадратов (ДМНК) в связи с гораздо большей простотой последнего.

Дальнейшим развитием ДМНК является трехшаговый МНК (ТМНК), предложенный в 1962 г. А. Зельнером и Г. Тейлом. Этот метод оценивания пригоден для всех видов уравнений структурной модели.

Процедура применения КМНК предполагает следующие этапы:

1. Структурная модель преобразовывается в приведенную форму модели.
2. Для каждого уравнения приведенной формы модели обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты (δ_{ij}).
3. Определяются оценки параметров структурной формы по оценкам приведенных коэффициентов, используя соотношения, найденные на 1-м шаге.

Двухшаговый МНК включает следующие этапы:

1. Составление приведенной формы и определение численных значений ее параметров обычным МНК.

2. Выявление эндогенных переменных, находящихся в правой части структурного уравнения и нахождение расчетных значений по соответствующим уравнениям приведенной формы.

3. Определение обычным МНК параметров структурного уравнения, используя в качестве исходных данных фактические значения предопределенных переменных и расчетные значения эндогенных переменных, стоящих в правой части структурного уравнения.

В большинстве компьютерных программ для решения систем одновременных уравнений применяется ДМНК.

4.4. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее широко системы одновременных уравнений используются для построения макроэкономических моделей функционирования экономики той или иной страны. Большинство из них представляют собой мультипликативные модели. Статическая модель Кейнса для описания народного хозяйства страны в наиболее простом варианте имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C = a + b \cdot y + \varepsilon , \\ y = C + I \qquad , \end{cases}$$

где C — личное потребление в постоянных ценах; y -национальный доход в постоянных ценах; I —инвестиции в постоянных ценах; ε — случайная составляющая. В силу наличия тождества в модели (второе уравнение системы) структурный коэффициент b не может быть больше 1. Он характеризует предельную склонность к потреблению (МРС). Если $b > 1$, то $y < C + I$, т. е. на потребление расходуются не только доходы, но и сбережения. Параметр a Кейнс истолковывал как прирост потребления за счет других факторов.

Рассматриваемая модель Кейнса точно идентифицируема, для получения величины структурного коэффициента b применяется КМНК. Это значит, что строится система приведенных уравнений:

$$\begin{cases} C = A + B \cdot I + U_1 , \\ y = A' + B' \cdot I + U_2 , \end{cases}$$

в которой $A = A' = \dfrac{a}{1-b}$, а параметры B и B являются мультипликаторами:

$B = \dfrac{b}{1-b} = M_C$ – инвестиционный мультипликатор потребления;

$B' = \dfrac{1}{1-b} = M_y$ - инвестиционный мультипликатор национального дохода.

Приведенная форма модели содержит мультипликаторы, интерпретируемые как коэффициенты линейной регрессии, отвечающие на вопрос: на сколько единиц изменится значение эндогенной переменной, если экзогенная переменная изменится на 1 ед. своего измерения. Этот смысл коэффициентов приведенной формы делает приведенную модель удобной для прогнозирования.

В более поздних исследованиях статическая модель Кейнса включала уже не только функцию потребления C, но и функцию сбережений r :

$$\begin{cases} C = a + b \cdot y + \varepsilon_1 & , \\ r = d + f \cdot (C + I) + \varepsilon_2 & , \\ y = C + I - r & . \end{cases}$$

Наряду со статическими широкое распространение получили *динамические* модели экономики. Они содержат в правой части лаговые переменные, а также учитывают тенденцию (фактор времени).

Примером могут служить модели Л. Клейна, разработанные им для экономики США в 1950— 1960 гг. :

$$\begin{cases} C_t = b_1 \cdot S_t + b_2 \cdot P_t + b_3 + \varepsilon_1 & , \\ I_t = b_4 \cdot P_t + b_5 \cdot P_{t-1} + b_6 + \varepsilon_2 & , \\ S_t = b_7 \cdot R_t + b_8 \cdot R_{t-1} + b_9 \cdot t + b_{10} + \varepsilon_3, & \\ R_t = S_t + P_t + T_t & , \\ R_t = C_t + I_t + G_t & . \end{cases}$$

где C_t - функция потребления в период t (эндогенная переменная);

S_t – заработная плата в период t (эндогенная переменная);

P_t – прибыль в период t (эндогенная переменная),

P_{t-1} – прибыль в период $(t-1)$ (лаговая переменная);

R_t – общий доход в период t (эндогенная переменная);

R_{t-1} – общий доход в предыдущий период (лаговая переменная);

t – время (экзогенная переменная);

T_t – чистые трансферты в период t (экзогенная переменная);

I_t – капиталовложения в период t (эндогенная переменная);

G_t – государственные расходы в период t (экзогенная переменная).

Как и большинство моделей такого типа, данная модель сверхидентифицируема и решается ДМНК.

Система одновременных уравнений нашла применение в исследованиях ***спроса и предложения***. Линейная модель спроса и предложения имеет вид

$$\begin{cases} Q^D = a_o + a_1 \cdot P + a_2 \cdot R + \varepsilon_1 , \\ Q^S = b_o + b_1 \cdot P + b_2 \cdot W + \varepsilon_2 , \\ Q^D = Q^S , \end{cases}$$

где Q^D – спрашиваемое количество благ (объем спроса); Q^S – предлагаемое количество благ (объем предложения); P – цена.

В этой системе Q^D и Q^S представляют собой эндогенные переменные исходя из структуры самой системы (они расположены в левой части), а P является эндогенной по экономическому содержанию. Переменные R — доход на душу населения и W - климатические условия являются экзогенными. Данная модель является точно идентифицируемой, оценки параметров могут быть найдены с помощью КМНК.

5. ОДНОМЕРНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Временной ряд X_t $(t = 1; n)$ — ряд значений какого-либо показателя, характеризующих один и тот же объект за несколько последовательных моментов или периодов времени. В литературе используются два синонима термина «временной ряд»: динамический ряд или ряд динамики.

Уровень временного ряда X_t складывается из следующих основных компонентов:

- *трендовой* компоненты, характеризующей основную тенденцию уровней ряда (T);
- *циклической*, или периодической, компоненты, характеризующей циклические или периодические колебания изучаемого явления. Различают конъюнктурную компоненту (K), связанную с большими экономическими циклами, и сезонную компоненту (S), связанную с внутригодовыми колебаниями уровней ряда;
- *случайной* компоненты, которая является результатом воздействия множества случайных факторов (E).

Тогда уровень ряда можно представить как функцию от этих компонент: $X = f(T, K, S, E)$. В зависимости от вида связи между этими компонентами может быть построена либо аддитивная модель: $X = T + K + S + E$, либо мультипликативная модель: $X = T \cdot K \cdot S \cdot E$ ряда динамики.

5.1. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ УРОВНЕЙ ВРЕМЕННОГО РЯДА И ВЫЯВЛЕНИЕ ЕГО СТРУКТУРЫ

При наличии во временном ряде трендовой и циклической компонент значения последующего уровня ряда зависят от предыдущих, поэтому для выявления структуры ряда (т.е. состава компонент) строят автокорреляционную функцию.

Автокорреляция уровней ряда — корреляционная связь между последовательными уровнями одного и того же ряда динамики, сдвинутыми на определенный промежуток времени L — *лаг* (сдвиг во времени, положительное целое число). То есть автокорреляция – это связь между рядом $X_1, X_2, \ldots, X_{n-L}$ и рядом $X_{1+L}, X_{2+L}, \ldots, X_n$.

Автокорреляция может быть измерена ***коэффициентом автокорреляции***:

$$r_{t;\,t-L} = \frac{\overline{X_t \cdot X_{t-L}} - \overline{X_t} \cdot \overline{X_{t-L}}}{\sigma_t \cdot \sigma_{t-L}},$$

где $\overline{X_t \cdot X_{t-L}} = \frac{1}{n-L} \cdot \sum_{i=1+L}^{n} X_i \cdot X_{i-L}$;

$\overline{X_t} = \frac{1}{n-L} \cdot \sum_{i=1+L}^{n} X_i$ - средний уровень ряда $X_1, X_2, \ldots, X_{n-L}$;

$\overline{X_{t-L}} = \frac{1}{n-L} \cdot \sum_{i=1+L}^{n} X_{i-L}$ - средний уровень ряда $X_{1+L}, X_{2+L}, \ldots, X_n$;

σ_t , σ_{t-L} - среднеквадратические отклонения для этих рядов соответственно.

Лаг (сдвиг во времени) определяет порядок коэффициента автокорреляции. Если $L = 1$, то имеем коэффициент автокорреляции 1-го порядка $r_{t;\,t-1}$, если $L = 2$, то получим коэффициент автокорреляции 2-го порядка $r_{t;\,t-2}$ и т. д. Следует учитывать, что с увеличением лага на единицу число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается на 1. Поэтому обычно рекомендуют максимальный порядок коэффициента автокорреляции, равный $n/4$.

Рассчитав несколько коэффициентов автокорреляции, можно определить лаг (L), при котором автокорреляция $(r_{t;\,t-L})$ наиболее высокая, выявив тем самым ***структуру временного ряда***. Если наиболее высоким оказывается значение $r_{t;\,t-1}$, то исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался $r_{t;\,t-L}$, то ряд содержит (помимо тенденции) колебания периодом L. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений:

- либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, а его уровень определяется только случайной компонентой;
- либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ.

Последовательность коэффициентов автокорреляции 1, 2 и т. д. порядков называют ***автокорреляционной функцией*** временного ряда. График зависимости значений коэффициентов автокорреляции от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называют коррелограммой.

5.2. МОДЕЛИ ТЕНДЕНЦИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА (ПОСТРОЕНИЕ ТРЕНДА)

Одним из наиболее распространенных способов моделирования тенденции временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, или *тренда* $\hat{X} = f(t)$. Этот способ называют *аналитическим выравниванием временного ряда*. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции: линейная, гипербола, экспонента, степенная функция, парабола второго и более высоких порядков.

Параметры каждого из перечисленных трендов можно определить обычным МНК, используя в качестве независимой переменной время t, а в качестве зависимой переменной — фактические уровни временного ряда X_t.

Анализ тенденции временного ряда включает несколько этапов:

- Построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени, выбор примерного вида зависимости.
- Расчет коэффициентов автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путем сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда. Чем

сильнее выражена нелинейная тенденция в изучаемом временном ряде, тем в большей степени будут различаться значения указанных коэффициентов.

- Выбор наилучшего уравнения в случае, если ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путем перебора основных форм тренда, расчета по каждому уравнению скорректированного коэффициента детерминации $\bar{R}^2$. Наилучшей формой регрессии будет та, при которой $\bar{R}^2$ выше. Реализация этого относительно проста при компьютерной обработке данных.

5.3. МОДЕЛИ СЕЗОННЫХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Существует несколько подходов к анализу структуры временных рядов, содержащих сезонные или циклические колебания.

Простейший подход — расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда. Общий вид ***аддитивной*** модели следующий: $Y = T + S + E$. Таким образом, каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (Т), сезонной *(S)* и случайной *(E)* компонент.

Общий вид ***мультипликативной*** модели: $Y = T \cdot S \cdot E$.

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

Расчет сезонной компоненты:

- Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
- Расчет значений сезонной компоненты S как разности (частное) между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними.

Расчет трендовой компоненты:

- Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных *(T+E)* в аддитивной или $(T \cdot E)$ в мультипликативной модели.
- Аналитическое выравнивание уровней *(T+E)* или $(T \cdot E)$ и расчет значений *T* с использованием уравнения тренда (см. выше).

Расчет случайной компоненты:

- Расчет полученных по модели значений *(T+S)* или $(T \cdot E)$.
- Расчет абсолютных и/или относительных ошибок: $E = Y - (T + S)$ или $E = \dfrac{Y}{T \cdot S}$.

5.4. ИЗУЧЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Предварительный этап анализа взаимосвязей заключается в выявлении *структуры* изучаемых временных рядов. Если на этом этапе было выявлено, что временные ряды содержат сезонные или циклические колебания, то перед проведением дальнейшего исследования взаимосвязи необходимо устранить сезонную или циклическую компоненту из уровней каждого ряда, поскольку ее наличие приведет к завышению истинных показателей силы и тесноты связи изучаемых временных рядов. Устранение сезонной компоненты из уровней временных рядов можно проводить в соответствии с методикой построения аддитивной и мультипликативной моделей.

Основная проблема изучения взаимосвязи временных рядов – характеристика *тенденции.* Так как для количественной характеристики взаимосвязи рядов используется линейный коэффициент корреляции, то при наличии во временных рядах тенденции, коэффициент корреляции по абсолютной величине будет высоким. Однако высокое значение данного коэффициента не означает наличие причинно-следственной связи. Например, коэффициент корреляции между численностью выпускников вузов и числом домов отдыха в РФ в период с 1970 по 1990 г. составил 0,8. Это, естественно, не означает, что увеличение количества домов отдыха способствует росту числа выпускников вузов.

Для того чтобы получить коэффициенты корреляции, характеризующие причинно-следственную связь между изучаемыми рядами, следует избавиться от так называемой ложной корреляции, вызванной наличием тенденции в каждом ряде. Обычно это осуществляют с помощью одного из методов исключения тенденции.

5.5. МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ТЕНДЕНЦИИ

Сущность всех методов исключения тенденции заключается в том, чтобы устранить или зафиксировать воздействие фактора времени на формирование уровней ряда. Основные методы исключения тенденции можно разделить на две группы:

- методы, основанные на преобразовании уровней исходного ряда в новые переменные, не содержащие тенденции. Полученные переменные используются далее для анализа взаимосвязи изучаемых временных рядов. Эти методы предполагают непосредственное устранение трендовой компоненты T из каждого уровня временного ряда. Два основных метода в данной группе - это метод последовательных разностей и метод отклонений от трендов;
- методы, основанные на изучении взаимосвязи исходных уровней временных рядов при элиминировании воздействия фактора времени на зависимую и независимые переменные модели. В первую очередь это метод включения в модель регрессии по временным рядам фактора времени.

Метод отклонений от тренда состоит в следующем. Пусть имеются два временных ряда x_t и y_t, каждый из которых содержит трендовую компоненту T и случайную компоненту e. С помощью аналитического выравнивания по каждому из этих рядов можно найти параметры соответствующих уравнений трендов и определить расчетные по тренду уровни $\hat{x}_t$ и $\hat{y}_t$ соответственно. Эти расчетные значения можно принять за оценки трендовой компоненты каждого ряда. Потому влияние тенденции можно устранить путем вычитания расчетных значений уровней ряда из фактических. Дальнейший анализ взаимосвязи рядов проводят с использованием не исходных уровней, а отклонений от тренда $(x_t - \hat{x}_t)$ и $(y_t - \hat{y}_t)$ при условии, что последние не содержат тенденции.

Включение в модель регрессии фактора времени. В корреляционно-регрессионном анализе устранить воздействие какого-либо фактора можно, если зафиксировать воздействие этого фактора на результат и другие включенные в модель факторы. Этот прием широко используется в анализе временных рядов, когда тенденция фиксируется через включение фактора времени в модель в качестве независимой переменной.

Модель вида $y_t = a + b_1 \cdot x_t + b_2 \cdot t + \varepsilon_t$ относится к группе моделей, включающих фактор времени. Очевидно, что число независимых переменных в такой модели может быть больше единицы. Кроме того, это могут быть не только текущие, но и лаговые значения независимой переменной, а также лаговые значения результативной переменной.

Данный метод позволяет учесть всю информацию, содержащуюся в исходных данных, и не приводит к потере числа наблюдений. Параметры a и b модели с включением фактора времени определяются обычным МНК.

Основная проблема – интерпретация параметра при факторе t. В большинстве случаев он интерпретируется как среднее за период воздействие прочих факторов (кроме x) на результативный показатель y.

5.6. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Предположим, что по двум временным рядам x и y строится уравнение парной линейной регрессии вида $y = a + b \cdot x + \varepsilon$. Наличие тенденции в каждом из этих временных рядов означает, что на зависимую y и независимую x переменные модели оказывает воздействие фактор *времени*, который непосредственно в модели не учтен. Влияние фактора времени будет выражено в корреляционной зависимости между значениями остатков за текущий и предыдущие моменты времени. Это явление получило название ***«автокорреляция»***, оно приводит к нарушению одной из основных предпосылок МНК — предпосылки о случайности остатков, полученных по уравнению регрессии.

Автокорреляция может быть как положительной, так и отрицательной. Положительная автокорреляция означает постоянное в одном направлении действие неучтенных факторов на результат. Например, спрос на мороженое всегда выше линии тренда летом (т. е. для летних наблюдений $\varepsilon > 0$) и ниже зимой (т. е. для зимы $\varepsilon < 0$) (рис. 5).

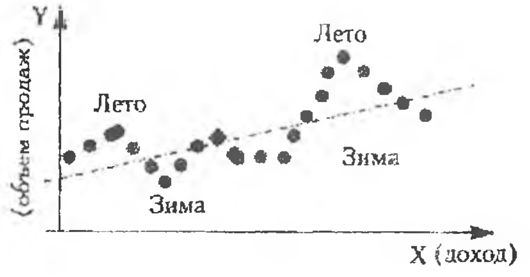

Рис. 5.
Пример положительной автокорреляции

Отрицательная автокорреляция означает разнонаправленное действие неучтенных в модели факторов на результат, что приводит к отрицательной корреляции между последовательными значениями случайной составляющей. То есть за положительными значениями случайной составляющей ε в одном наблюдении следуют отрицательные значения ε в следующем, и наоборот. Заметим, что отрицательная автокорреляция в экономике встречается относительно редко.

Последствия автокорреляции случайной составляющей:

- коэффициенты регрессии становятся неэффективными, состоятельными, хотя и несмещенными;

- стандартные ошибки коэффициентов регрессии становятся заниженными, а значения T-критерия завышенными.

5.6.1. Обнаружение автокорреляции случайных составляющих.

Оценкой случайной составляющей является ***остаток*** — разность между фактическим и рассчитанным по оцененному уравнению регрессии значениями признака-результата. Обозначим номер наблюдения как t $(t = 1; n)$. Тогда для этого наблюдения остаток будет равен: $e_t = y_t - (\hat{b}_o + \hat{b}_1 \cdot x_{1t} + ... + \hat{b}_m \cdot x_{mt})$,

где $\hat{b}_o, \hat{b}_1, ..., \hat{b}_m$ - МНК-оценки коэффициентов уравнения регрессии.

Рассмотрим способы обнаружения автокорреляции остатков (а следовательно, и случайных составляющих).

1-й способ — визуальный (графический). Рассматривая последовательность остатков как временной ряд, можно построить график их зависимости от времени визуально определить наличие или отсутствие автокорреляции.

2-й способ — основан на применении критерия Дарбина—Уотсона. Данный метод применяют для обнаружения автокорреляции, подчиняющейся авторегрессионному процессу 1-го порядка $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + e_t$. Предполагается, что величина e_t в каждом t-м наблюдении не зависит от его значений во всех других наблюдениях. Если величина ρ положительна, то автокорреляция положительна, если ρ отрицательна, то автокорреляция отрицательна. Если значение $\rho = 0$, то автокорреляции нет (т. е. четвертая предпосылка нормальной линейной модели выполняется).

Критерий Дарбина—Уотсона сводится к проверке гипотезы:

H_O (основная гипотеза): $\rho = 0$.

H_1 (альтернативная гипотеза): $\rho > 0$ или $\rho < 0$.

Для проверки основной гипотезы используется статистика критерия Дарбина—Уотсона: $DW = \frac{\sum(e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2}$. Специальные статистические таблицы (приложение 3) определяют нижнюю и верхнюю критические границы DW-статистики — d_L и d_U. Границы определяются в зависимости от уровня значимости α, числа наблюдений n и числа независимых переменных в модели p. По этим значениям d_L и d_U числовой промежуток $[0;4]$ разбивается на пять отрезков. Графически критерий Дарбина—Уотсона представлен на рис. 6 (штриховкой отмечена область неопределенности).

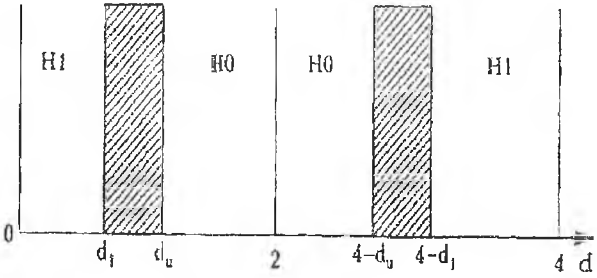

Рис. 6
Проверка гипотезы о наличии автокорреляции остатков

Если $0 < DW < d_L$, то принимается гипотеза H1: $\rho > 0$ (положительная автокорреляция). Если $d_U < DW < 2$ или $2 \leq DW < 4 - d_U$, то принимается гипотеза H0: $\rho = 0$ (автокорреляции нет). Если $4 - d_L < DW < 4$, то принимается гипотеза H1: $\rho < 0$ (отрицательная автокорреляция). Если $d_L < DW < d_U$ или $4 - d_U < DW < 4 - d_L$, то имеет место случай неопределенности.

Ограничения применения критерия Дарбина—Уотсона:

- данный критерий неприменим к моделям авторегрессии $y_i = f(y_{i-1})$;

- данный критерий проверяет только гипотезу о наличии автокорреляции *первого* порядка;
- достоверные результаты получаются только на больших выборках.

5.6.2. Оценивание параметров уравнения регрессии при наличии автокорреляции

Определение оценок параметров a и b уравнения регрессии обычным МНК при наличии в нем автокорреляции в остатках приводит к тому, что полученные оценки неэффективны, т. е. они не имеют минимальной дисперсии. Это означает увеличение стандартных ошибок, снижение фактических значений t-критерия и широкий доверительный интервал для коэффициентов регрессии. На основании таких результатов можно сделать ошибочный вывод о незначимом влиянии исследуемого фактора на результат, в то время как на самом деле его влияние статистически значимо.

Если остатки по исходному уравнению регрессии содержат автокорреляцию, то для оценки параметров уравнения используют ***обобщенный МНК (GLS)***. Для его реализации необходимо выполнять следующие действия:

1. Преобразовать исходные переменные y_t и x_t к виду:

$$y'_t = y_t - r_1^{\varepsilon} \cdot y_{t-1} \quad ; \quad x'_t = x_t - r_1^{\varepsilon} \cdot x_{t-1} \quad ;$$

$$u_t = \varepsilon_t - r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1} \quad ; \qquad a' = a \cdot (1 - r_1^{\varepsilon}),$$

где r_1^{ε} - коэффициент автокорреляции остатков первого порядка.

2. Записать новое уравнение регрессии: $y'_t = a' + b \cdot x'_t + u_t$. Поскольку u_t - случайная ошибка, для оценки параметров a' и b этого уравнения можно применить обычный МНК.

3. Рассчитать параметр a исходного уравнения как $a = \dfrac{a'}{(1 - r_1^{\varepsilon})}$.

4. Выписать исходное уравнение: $y_t = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t$.

Основная проблема, связанная с применением данного метода, заключается в том, как получить оценку r_1^{ε}. Основным способом оценки этого коэффициента является получение его приближенного значения из соотнесения с критерием Дарбина – Уотсона: $r_1^{\varepsilon} = 1 - \frac{DW}{2}$.

Расчет уравнения регрессии во всех пакетах прикладных программ (EXCEL, STATISTICA, STATGRAPHICS и др.) ведется на основе обобщенного МНК.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов: В 2 т. Т.2. Основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 432 с.
2. Доугерти К. Введение в эконометрику. - М.: ИНФРА-М, 1997. - 402 с.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика, ЮНИТИ, 2002, 311с.
4. Эконометрика. Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344 с.
5. Практикум по эконометрике: Учебное пособие / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.

Критические значения t- критерия Стьюдента при уровне значимости α (двусторонний критерий)

Число степеней свободы *к*	Уровень значимости α					
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,977	4,140
16	1,337	1,746	2,120	2,584	2,921	4,015
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,660
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,496
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,435
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Критические значения F- критерия Фишера при уровне значимости α=0,05

к2 \ к1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,5	19	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

Значения статистик критерия Дарбина- Уотсона d_L, d_U при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$,
n - число наблюдений, p - число переменных в модели

n	$p=1$		$p=2$		$p=3$		$p=4$		$p=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40	-	-	-	-				
7	0,70	1,36	0,47	1,90	-	-				
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,99	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	1,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1.28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,58	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Учебное издание

Коломиец Павел Эдуардович

ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

Учебное пособие

Редактор Л.Я. Чегодаева
Корректор Л.Я. Чегодаева

Подписано в печать 16.12.2004 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,19 Усл. кр. – отт. 4,31. Уч. – изд. л. 4,5
Тираж 300 экз. Заказ 64.

Самарский государственный аэрокосмический университет
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Отпечатано в УПЛ.
443056 Самара, пр. Масленникова, 37.