МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С.П.Королева

Н.В.КЛИЕНТОВ

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Конспект лекций

Утвержден
редакционным
советом института
I8 марта I969 г.

Куйбышев I970

Настоящее пособие предназначается для студентов, изучающих курс теоретической механики по расширенной программе (200 - 220 часов), и представляет собой попытку дать систематическое изложение простейших случаев движения тел переменного состава.

Основой для написания пособия послужил курс лекций, который читается автором для студентов Куйбышевского авиационного института.

Список литературы, приведенный в конце пособия и использованный при его написании, не претендует на полноту.

Данное пособие имеет целью помочь студентам при самостоятельной работе над курсом.

Автор сознает, что работа не лишена недостатков, и будет признателен всем читателям, приславшим свои замечания и пожелания, направленные на улучшение пособия.

При подготовке пособия к изданию внимательно рукопись прорецензировали и дали ряд ценных советов профессора, доктора физико-математических наук В.А. САПА и С.М.ТАРГ, которым автор считает приятным долгом выразить искреннюю благодарность.

I. ДИНАМИКА ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Лекция I

ВВЕДЕНИЕ

В природе встречается большое число тел, масса которых изменяется в процессе движения. Такими телами являются: ракета, совершающая полет с работающим ракетным двигателем, реактивный самолет с работающим ВРД (воздушно-реактивным двигателем), вращающееся веретено, на которое наматывается нить, и т.д.

При полете космических ракет за счет выгорания топлива и выбрасывания продуктов горения, а также отделения ненужных частей масса ракеты значительно уменьшается и по истечении сравнительно короткого промежутка времени в ряде случаев составляет 5-10 % от общей начальной массы.

В различных областях техники при современных скоростях работы станков и машин за короткий промежуток времени происходят значительные изменения массы (увеличение или уменьшение) различных веретен, шпуль, рулонов, барабанов и т.д.

Наряду с телами переменной массы, существуют тела, масса которых в процессе движения формально остается постоянной, изменяется только их состав. Примером такого тела является реактивное судно - его масса при движении остается постоянной, но непрерывно изменяется состав воды в канале. Таким образом, реактивное судно будет телом переменного состава.

Очевидно, что любое тело переменной массы одновременно будет и телом переменного состава, так как изменение массы тела всегда является результатом изменения его состава.

Поэтому в механике под телом переменной массы подразумевают систему („тело") переменного состава.

К чести русской и советской науки, создателями основ механики тел переменного состава являются И.Б.Мещерский (1859-1935) и К.Э.Циолковский (1857-1935).

Основные работы И.В.Мещерского „Динамика точки переменной массы" (1897) и „Уравнения движения материальной точки переменной массы в общем случае" (1904) представляют собой теоретическую базу механики тел переменного состава, являющейся научной основой современной ракетодинамики. В работах И.В.Мещерского по существу дана теория поступательного движения реактивных аппаратов с ВРД.

Теория Мещерского более 30 лет была единственной аналитической теорией движения тел переменного состава и получила интенсивное развитие в связи с исследованиями в области ракетной и реактивной техники.

Решению задач, связанных с движением ракет, посвящены работы К.Э.Циолковского, указавшие правильный путь к разрешению проблемы космических полетов. Одной из наиболее важных его работ является „Исследование мировых пространств реактивными приборами" (1903). За полстолетие до запуска первого в мире советского искусственного спутника Земли Циолковский выдвинул идею устройства пассажирской ракеты на жидком топливе, дал подробный расчет условий полета многоступенчатой ракеты и теоретически доказал, что с помощью такой ракеты можно разорвать оковы земного тяготения. К.Э.Циолковский по праву считается основоположником теории межпланетных сообщений.

Замечательные работы Мещерского [1] и Циолковского [2] прекрасно дополняют друг друга и являются фундаментом, на котором строится механика тел переменного состава. Формулы и уравнения, полученные ими, лежат в основе современной динамики ракет.

Идеи Мещерского и Циолковского получили дальнейшее развитие в работах советских ученых А.А.Космодемьянского, Ф.Р.Гантмахера и Л.М.Левина, М.Ш.Аминова, В.А.Сапа, В.М.Карагодина, В.С.Новоселова, В.Ф.Котова, Д.Е.Охоцимского и других.

Ярким свидетельством выдающихся успехов советских ученых в области теории и практики ракетостроения являются запуски искусственных спутников Земли и космических кораблей.

Наши успехи в области космических исследований находятся в центре внимания народов всего мира. Они признаны в качестве фундаментальных первооткрытий, определяющих лицо и уровень современной науки.

ПОНЯТИЕ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА. ГИПОТЕЗА МЕЩЕРСКОГО

Изучение механики тел переменного состава начнем с изучения движения простейшего объекта - точки переменного состава.

> Точкой переменного состава называется материальная точка, состав которой в процессе движения непрерывно изменяется в результате отделения или присоединения или одновременного присоединения и отделения частиц постоянной массы.

Из этого определения следует, что совокупность частиц, отброшенных, присоединенных и сосредоточенных в основной точке, можно рассматривать как одну обычную механическую систему постоянной массы, для исследования движения которой могут быть применены методы классической механики.

Для современной реактивной техники особый интерес представляют задачи, где масса точки является заданной непрерывной и дифференцируемой функцией времени, т.е. $m = m(t)$.

Будем считать, что процесс изменения массы основной точки происходит непрерывно и первая производная $\dot{m}(t)$ имеет конечную величину в любой момент времени.

Если скорость основной точки в процессе движения изменяется непрерывно, а скорости присоединяющихся и отделяющихся частиц - на конечную величину, то будет иметь место явление, аналогичное явлению удара. Возникающая при этом добавочная или реактивная сила в случае отделения частиц прилагается к основной точке, излучающей частицы, и аналогична ударной силе, возникающей при внезапном разрушении связи в задачах классической механики. В случае присоединения частиц к основной точке считают, что имеет место неупругий удар.

Исследование движения основной точки без учета и с учетом ударной силы частиц позволило И.В.Мещерскому высказать вполне естественное предположение:

> присоединяющиеся и отделяющиеся частицы взаимодействуют с основной точкой только в момент соприкосновения.

Другими словами,

> присоединяющиеся и отделяющиеся частицы изменяют количество движения основной точки только в момент контакта с основной точкой.

В этом состоит основное допущение Мещерского, значительно упрощающее изучение движения точки переменного состава. На основании этой гипотезы мы получаем право не учитывать движение частиц после их отделения от основной точки или до их присоединения к точке.

Строго говоря, допущению Мещерского удовлетворяют точки (или тела) только с поверхностным изменением состава. Однако оказывается, что эффект внутреннего движения частиц в современных реактивных двигателях настолько мал, что при изучении движения ракет и реактивных самолетов можно исходить из гипотезы Мещерского.

Для исследования движения точки переменного состава прежде всего необходимо иметь основное уравнение ее движения. В силу переменности состава точки и принятой рабочей гипотезы Мещерского, оно будет отличаться от основного уравнения движения точки постоянного состава.

Л е к ц и я 2

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА. УРАВНЕНИЕ МЕЩЕРСКОГО

Движение точки переменного состава будем изучать в неподвижной декартовой системе координат O, x, y, z.

Рассмотрим общий случай, когда состав материальной точки изменяется в результате одновременного присоединения и отделения частиц (рис.I).

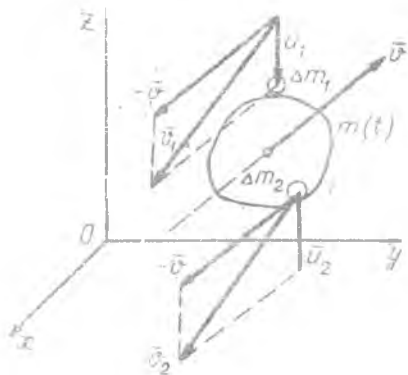

Рис. I.

Предположим, что в момент времени t точка имеет массу $m(t)$ и абсолютную скорость $\bar{v}$.

Будем считать, что к этой основной точке за малый промежуток времени ΔT присоединяется частица постоянной массы Δm_1 и отделяется частица массы Δm_2. Эти частицы, в силу гипотезы Мещерского, взаимодействуют с основной точкой только в момент присоединения и отделения, т.е. эти частицы и основная точка в момент времени t образуют обычную механическую систему. Поэтому окончательные результаты будут справедливы только после предельного перехода при $\Delta t \to 0$.

В момент времени $t+\Delta t$ точка будет иметь массу $m+\Delta m_1-\Delta m_2$ и абсолютную скорость $\bar{\vartheta}+\Delta\bar{\vartheta}$. Приращение скорости обусловливается действием внешних сил и процессом присоединения и отделения частиц.

Обозначим абсолютную скорость частицы с массой Δm_1 до ее присоединения к основной точке через $\bar{u}_1$, а абсолютную скорость частицы с массой Δm_2 после ее отделения от основной точки – через $\bar{u}_2$.

Поскольку наша система, состоящая из частиц, сосредоточенных в основной точке, и частиц, присоединившихся и отделившихся за время Δt, будет механической системой постоянной массы и состава, применим к ней теорему об изменении количества движения, известную из классической механики.

В моменты времени t и $t+\Delta t$ количества движения нашей системы соответственно запишутся в виде

$$\bar{Q}=m\bar{\vartheta}+\bar{u}_1\Delta m_1 ;$$

$$\bar{Q}+\Delta\bar{Q}=(m+\Delta m_1-\Delta m_2)(\bar{\vartheta}+\Delta\bar{\vartheta})+\bar{u}_2\Delta m_2 .$$

Отсюда находим приращение количества движения

$$\Delta\bar{Q}=m\Delta\bar{\vartheta}-(\bar{u}_1-\bar{\vartheta})\Delta m_1+(\bar{u}_2-\bar{\vartheta})\Delta m_2+ +(\Delta m_1-\Delta m_2)\Delta\bar{\vartheta} . \tag{2.1}$$

Разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$\dot{\bar{Q}}=m\dot{\bar{\vartheta}}-(\bar{u}_1-\bar{\vartheta})\dot{m}_1+(\bar{u}_2-\bar{\vartheta})\dot{m}_2 . \tag{2.2}$$

По теореме об изменении количества движения

$$\dot{\bar{Q}}=\bar{F} ,$$

где $\bar{F}=\sum\bar{F}_K^e$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на точку.

Следовательно, окончательно получаем

$$\boxed{m\dot{\bar{\vartheta}} = \bar{F} + (\bar{u}_1 - \bar{\vartheta})\dot{m}_1 - (\bar{u}_2 - \bar{\vartheta})\dot{m}_2} \qquad (2.3)$$

Это уравнение выражает основной закон динамики точки переменного состава и называется уравнением Мещерского.

Если с точкой переменного состава связать подвижную систему координат, поступательно движущуюся относительно неподвижной системы координат O, x, y, z со скоростью $\bar{\vartheta}_e = \bar{\vartheta}$, то, на основании теоремы сложения скоростей, векторы $\bar{\vartheta}_1 = \bar{u}_1 - \bar{\vartheta}$ и $\bar{\vartheta}_2 = \bar{u}_2 - \bar{\vartheta}$ будут определять относительные скорости соответственно присоединяемой и отделяемой частиц, т.е. скорости присоединяемой и отделяемой частиц по отношению к основной точке.

Уравнение Мещерского примет вид

$$m\dot{\bar{\vartheta}} = \bar{F} + \bar{\vartheta}_1\dot{m}_1 - \bar{\vartheta}_2\dot{m}_2 \qquad (2.4)$$

Производные

$$\dot{m}_1 > 0 \quad \text{и} \quad \dot{m}_2 > 0$$

характеризуют соответственно приход и расход массы основной точки в единицу времени, т.е. представляют собой соответственно секундный массовый приход и секундный массовый расход точки.

Поэтому векторы

$$\bar{P}_1 = \bar{\vartheta}_1\dot{m}_1 \quad \text{и} \quad \bar{P}_2 = -\bar{\vartheta}_2\dot{m}_2$$

будут силами, обусловленными соответственно присоединением и отделением частиц. Эти дополнительные силы называются <u>реактивными силами</u>. Поскольку возникновение их обусловлено только присоединением и отделением частиц, то они будут существовать и в случае, когда масса точки формально остается постоянной, а состав ее изменяется за счет присоединения и отделения равных масс частиц с различными относительными скоростями $\bar{\vartheta}_1$ и $\bar{\vartheta}_2$ (при $\bar{\vartheta}_1 = -\bar{\vartheta}_2$ точка будет двигаться только под действием внешних сил).

Видно, что направление реактивной силы $\bar{P}_1$ будет совпадать с направлением вектора относительной скорости $\bar{\vartheta}_1$ присоединяемых частиц, а реактивная сила $\bar{P}_2$ будет направлена в сторону, противоположную вектору относительной скорости $\bar{v}_2$ отделяемых частиц.

Вводя реактивные силы, уравнение Мещерского примет вид

$$\boxed{m\bar{w} = \bar{F} + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 .} \qquad (2.5)$$

Эта векторная форма уравнения Мещерского позволяет сформулировать основной закон динамики точки переменного состава следующим образом.

> Произведение массы точки переменного состава на ее ускорение равно геометрической сумме всех внешних и реактивных сил, действующих на точку.

Следовательно, для составления основного уравнения динамики точки переменного состава нужно к внешним силам, действующим на точку, добавить реактивные силы, обусловленные изменением состава точки.

Эта аналогия со вторым законом Ньютона позволяет, исходя из уравнения Мещерского, вывести общие теоремы для точки и системы переменного состава.

Если уравнение Мещерского (2.5) спроектировать на декартовые оси координат, то получим дифференциальные уравнения движения точки переменного состава в скалярной форме:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + P_{1x} + P_{2x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + P_{1y} + P_{2y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + P_{1z} + P_{2z}. \end{aligned}\right| \qquad (2.6)$$

Очевидно, что при постоянстве состава точки реактивные силы возникать не будут. В этом случае из уравнения Мещерского, как частный случай, получим второй закон Ньютона и уравнения (2.6) обратятся в известные дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки классической механики.

Уравнения движения точки переменного состава, как и второй закон Ньютона, справедливы по отношению инерциальной системы отсчета и в общем случае не интегрируются в квадратурах. Но в частных случаях можно получить решение уравнения Мещерского в квадратурах.

причем в некоторых практически важных задачах - даже в элементарных функциях.

Если равнодействующая внешних сил $F = 0$, то уравнение Мещерского примет вид

$$m\bar{w} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

Отсюда видим, что и без внешних сил точка переменного состава будет совершать движение с определенным ускорением.

Если при изменении состава точки относительные скорости присоединяемых и отделяемых частиц окажутся равными нулю, то уравнение Мещерского будет совпадать с уравнением Ньютона только по форме, а по существу, в силу переменности состава точки, это будут различные уравнения. В этом случае (при $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$) уравнение Мещерского

$$m\bar{w} = \bar{F} \tag{2.7}$$

математически будет описывать процесс безударного „прилипания" и „крошения" движущейся материальной точки переменного состава.

Если в уравнении (2.7) положить $F = 0$, то получим закон инерции для точки переменного состава. Действительно, в этом случае при $\vartheta_0 \neq 0$ точка будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью ϑ_0, а при $\vartheta_0 = 0$ будет находиться в покое.

Лекция 3

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИСОЕДИНЕНИИ И ОТДЕЛЕНИИ ЧАСТИЦ

Предположим, что точка переменного состава движется прямолинейно под действием трех сил: реактивных $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ и силы сопротивления $\bar{R}$, линиями действия которых является прямолинейная траектория точки.

Прямая, вдоль которой движется точка, принимается за координатную ось OX с положительным направлением, совпадающим с направлением движения точки.

Составим схему сил и скоростей (рис.2).

Рис. 2.

Движение точки будет определяться уравнением Мещерского, которое обычно записывают в форме, наиболее удобной для решения поставленной задачи.

Рассмотрим некоторые примеры применения уравнения Мещерского к решению задач при поступательном движении тела переменного состава.

Предположим, что центр масс тела движется прямолинейно и не

4-1689

перемещается относительно оболочки тела. Присоединение и отделение частиц будем считать поверхностным, т.е. движением частиц внутри тела пренебрегаем (на основании гипотезы Мещерского).

1. Движение реактивного судна

Рассмотрим движение реактивного судна с горизонтальным каналом и постоянным режимом работы насоса (рис.3).

Найдем максимальную скорость v_{max} движения судна и время T, по истечении которого судно будет иметь заданную скорость v^*, считая сопротивление воды пропорциональным квадрату скорости $R=k^2v^2$ и предполагая, что в начальный момент судно находилось в покое.

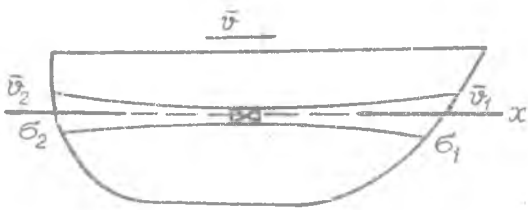

Рис. 3.

Реактивное судно будет двигаться поступательно. Поэтому его можно принять за материальную точку, состав которой изменяется в результате одновременного присоединения и отделения частиц воды.

Введем обозначения:

σ_1 и σ_2 - площади соответственно входного и выходного сечений канала;

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ - относительные скорости воды, поступающей в канал и вытекающей из него за корму;

$m=const$ - масса судна;

$\gamma=const$ - плотность.

Составим схему сил. На точку (судно) будут действовать внешняя сила $\bar{F}=\bar{R}$ и реактивные силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$. Движение судна определяется уравнением Мещерского

$$m\dot{\bar{v}}=\bar{R}+\bar{v}_1\dot{m}_1-\bar{v}_2\dot{m}_2 \quad . \qquad (3.1)$$

Проектируя это уравнение на прямую, вдоль которой движется судно, получим

$$m\dot{v} = -k^2 v^2 - v_1 \dot{m}_1 + v_2 \dot{m}_2 \quad . \qquad (3.2)$$

Поскольку за один и тот же промежуток времени количество воды, втекающей в канал и вытекающей из него, одинаково, то

$$\dot{m}_1 = m^* \sigma_1 v_1 ; \quad \dot{m}_2 = m^* \sigma_2 v_2 ;$$

$$\sigma_1 v_1 = \sigma_2 v_2 ; \quad v_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} v_1 \quad .$$

После подстановки в уравнение (3.2), получим

$$m\dot{v} = -k^2 v^2 + m^* \sigma_1 v_1^2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) \quad .$$

Отсюда видим, что для увеличения скорости судна необходимо, чтобы

$$\sigma_1 > \sigma_2 \quad \text{или} \quad v_2 > v_1 \quad .$$

Вводя обозначение

$$m^* \sigma_1 v_1^2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) = a^2 ,$$

уравнение движения судна примет вид

$$m\dot{v} = -k^2 v^2 + a^2 \quad . \qquad (3.3)$$

Подстановка $v = v_{max}$ при $\dot{v} = 0$ дает

$$v_{max} = \frac{a}{k} \quad . \qquad (3.4)$$

Очевидно, что заданная скорость должна быть такой, чтобы

$$v^* \le v_{max} \quad .$$

Разделяя переменные в уравнении (3.3) и производя интегрирование в соответствующих пределах, получим

$$T = m \int_0^{v^*} \frac{dv}{a^2 - k^2 v^2} = \frac{m}{2ak} \ln \frac{a + kv^*}{a - kv^*} \quad . \qquad (3.5)$$

Отсюда видим, что заданная скорость $\vartheta^* \to \vartheta_{max}$ при $T \to \infty$. Это значит, что ϑ_{max} является предельной скоростью.

2. Полет самолета с ВРД

В воздушно-реактивном двигателе окислителем, необходимым для сгорания топлива, является воздух, который непрерывно поступает в двигатель, а затем выбрасывается из сопла вместе с продуктами горения, т.е. при полете самолета с ВРД будет иметь место одновременное присоединение и отделение частиц. При этом известно, что на каждый килограмм воздуха расходуется незначительное количество топлива (около 0,02 кг). Поэтому приближенно можно считать $dm_1 = dm_2$.

Найдем реактивную силу тяги и относительную скорость ϑ_2 газов, выбрасываемых из сопла воздушно-реактивного двигателя самолета, при равномерном и прямолинейном полете с околозвуковой скоростью.

Если скорость полета самолета является околозвуковой, то сила лобового сопротивления $X = k\vartheta^2$ и можно считать, что в неподвижной системе отсчета скорость присоединяющихся частиц воздуха до их присоединения $u_1 = 0$, т.е. самолет набегает на неподвижные частицы воздуха.

Движение самолета, на основании уравнения Мещерского (2.3), будет определяться уравнением

$$m\dot{\bar{\vartheta}} = X - (\bar{\vartheta}_2 + \bar{\vartheta})\dot{m}_2 \quad . \qquad (3.6)$$

Проектируя на прямую, вдоль которой происходит полет самолета, получим

$$m\dot{\vartheta} = -k\vartheta^2 + (\vartheta_2 - \vartheta)\dot{m}_2 \quad . \qquad (3.7)$$

Отсюда видим, что величина реактивной силы тяги будет определяться формулой

$$P = (\vartheta_2 - \vartheta)\dot{m}_2 \quad . \qquad (3.8)$$

Эта формула используется при определении реактивной силы тяги идеального ВРД, а также для строгого вычисления силы тяги реального ВРД, если в качестве источника тепла применяется, например, атомный реактор.

Если в ВРД применяются обычные источники тепла, то за счет сгорания топлива секундный массовый расход газов всегда больше секундного массового прихода воздуха. В этих случаях формула (3.8) может применяться только для приближенной оценки силы тяги ВРД.

Очевидно, при $v = v_2$ сила тяги ВРД обращается в нуль, а при скоростях полета, больших скорости истечения газов, двигатель превращается в тормоз.

В самолетах с ВРД секундная масса воздуха, проходящего через двигатель, для каждого вполне определенного режима полета является величиной постоянной и зависит от скорости полета, т.е.

$$m_2 = f(v) .$$

Тогда, учитывая условие равномерности полета $\dot{v} = 0$, уравнение (3.7) примет вид

$$(v_2 - v) f(v) = K v^2 .$$

Отсюда для искомой относительной скорости истечения газов получим формулу

$$v_2 = v + \frac{K v^2}{f(v)} , \qquad (3.9)$$

т.е. для равномерного прямолинейного полета самолета с заданной скоростью v нужно обеспечить вполне определенную скорость истечения газов.

Лекция 4

УРАВНЕНИЕ МЕЩЕРСКОГО ДЛЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Предположим, что состав материальной точки изменяется только в результате присоединения или отделения частиц. Тогда в любой момент времени масса точки будет определяться так:

а) в случае только присоединения частиц

$$m(t)=m_0+m_1(t)$$

б) в случае только отделения частиц

$$m(t)=m_0-m_2(t)$$

Секундный массовый приход и расход соответственно будут

$$\dot{m}=\dot{m}_1 \qquad \text{при} \qquad m_2=0\,;$$

$$\dot{m}=-\dot{m}_2 \qquad \text{при} \qquad m_1=0\,.$$

Если обозначить через $\bar{u}$ абсолютную скорость присоединяемых частиц ($\bar{u}=\bar{u}_1$) до их присоединения или отделяемых частиц ($\bar{u}=\bar{u}_2$) после их отделения, то уравнение Мещерского примет вид

$$\boxed{m\bar{w}=\bar{F}+(\bar{u}-\bar{v})\dot{m}} \qquad (4.1)$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\bar{v})=\bar{F}+\bar{u}\dot{m}} \qquad (4.1')$$

Это уравнение является основным уравнением динамики точки переменной массы. Впервые оно было опубликовано И.В.Мещерским в 1897 году.

Вводя вектор относительной скорости $\bar{v}_r = \bar{u} - \bar{v}$, уравнение Мещерского примет вид

$$\boxed{m\bar{w} = \bar{F} + \bar{v}_r \dot{m}} \qquad (4.2)$$

или

$$\boxed{m\bar{w} = \bar{F} + \bar{P}_r ,} \qquad (4.3)$$

где $\bar{P}_r = \bar{v}_r \dot{m}$ называется реактивной силой или динамической тягой.

Практически для ракеты реактивной силой является сила тяги двигателя. Определение ее - один из важнейших вопросов теории двигателей.

Рассмотрим частный случай, когда отделяющиеся от точки или присоединяющиеся к ней частицы не перемещаются относительно неподвижной системы координат, т.е. когда $u = 0$.

В этом случае реактивной силой будет вектор

$$\bar{P}_r = -\bar{v}\dot{m}$$

и движение точки определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \dot{\bar{q}} = \bar{F} \qquad (4.4)$$

Такой вид имеет, например, уравнение подъема свободного аэростата при непрерывном обледенении его оболочки.

Очевидно, при $F = 0$, получим

$$m\bar{v} = m_o \bar{v}_o$$

или в скалярной форме

$$mv = m_o v_o \quad .$$

Отсюда следует, что

$$v = \frac{m_o}{m} v_o \quad , \qquad (4.5)$$

т.е. точка будет двигаться прямолинейно, причем с уменьшением массы точки скорость ее возрастает, а с увеличением массы - убывает.

Это является следствием того, что реактивное ускорение $w_p = \frac{P_r}{m}$, при уменьшении массы ($\dot{m} < 0$) будет положительным, а при возрастании массы ($\dot{m} > 0$) - отрицательным.

В частном случае, когда масса $m(t)=m_0$ постоянна, получим $v=v_0$. В этом случае точка будет двигаться равномерно и прямолинейно по закону инерции.

Формула (4.5) позволяет, например, дать оценку потери скорости самолета или корабля при их обледенении.

СТЕНДОВАЯ СИЛА ТЯГИ РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ. ЭФФЕКТИВНАЯ СКОРОСТЬ. УДЕЛЬНАЯ ТЯГА ДВИГАТЕЛЯ

Силой тяги двигателя называется осевая равнодействующая всех внешних сил, действующих на внешние и внутренние поверхности двигателя.

Рассмотрим ракету, которая неподвижно закреплена на стенде в горизонтальном положении (рис.4).

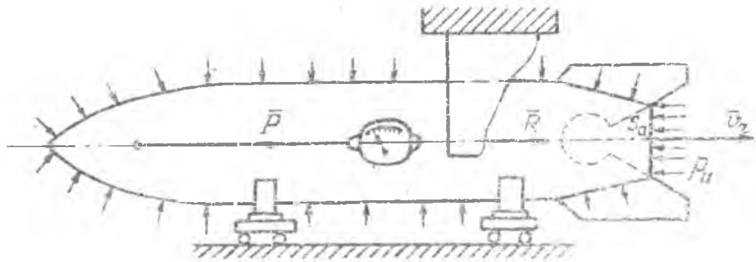

Рис. 4.

Введем обозначения:

S_a - площадь выходного сечения сопла;

p_a - давление газов в выходном сечении сопла на единицу площади;

p - внешнее атмосферное давление на соответствующей высоте, на которой работает двигатель;

p_0 - атмосферное давление на поверхности Земли.

Внешними силами, действующими на ракету, будут: сила тяжести, реакции опор и силы давления, приложенные к внешней поверхности ракеты и срезу сопла.

Проекция силы тяжести на ось симметрии ракеты равна нулю.

Сила реакции опор, с помощью которых закреплена ракета, по величине равна силе тяги двигателя, т.е. $R = P$.

Силы атмосферного давления, действующие на боковую поверхность ракеты, будут уравновешиваться. Поэтому осевая составляющая сил атмосферного давления равна равнодействующей сил атмосферного давления, действующих на выходное сечение сопла, т.е. равна

$$-pS_a \ .$$

Знак минус показывает, что она имеет направление, противоположное силе тяги, т.е. является тормозящей силой.

Рассматривая объем газа, ограниченный внутренней поверхностью двигателя и срезом сопла, получим силу давления газов в выходном сечении сопла, равную $p_a S_a$.

Таким образом, осевая составляющая сил атмосферного давления и давления газов на срезе сопла будет равна

$$F_* = (p_a - p) S_a \ . \qquad (4.6)$$

Поскольку ракета неподвижно закреплена на стенде, то $\vartheta = 0$. Тогда, при работе двигателя на некоторой высоте, уравнение Мещерского (4.3) примет вид

$$0 = -R + (p_a - p) S_a + v_z \dot{m} \ .$$

Отсюда для силы тяги двигателя ракеты получаем формулу

$$P = v_z \dot{m} + (p_a - p) S_a \ . \qquad (4.7)$$

Изучая движение ракет, К.Э.Циолковский высказал гипотезу, что вектор относительной скорости отбрасываемых частиц постоянен по величине и направлен по касательной к траектории движения ракеты в сторону, противоположную вектору скорости. Это предположение называется гипотезой Циолковского.

Газодинамические расчеты и опыты подтверждают эту гипотезу. Относительную скорость v_2 можно считать постоянной, если $p_a > 0{,}8 p_0$ и режим работы двигателя не изменяется в больших пределах.

В теории реактивных двигателей и неуправляемых ракет вместо относительной скорости вводят постоянную во времени эффективную скорость $\bar{c} = \overline{const}$, направленную в сторону, противоположную вектору скорости $\bar{\vartheta}$.

Эффективная скорость истечения газов из сопла ракеты определяется формулой [3,4,5]

$$c = v_z + \frac{S_a p_a}{\dot{m}} = const \quad . \qquad (4.8)$$

Второе слагаемое в этой формуле обычно составляет не более 10 % от v_z.

Вводя эффективную скорость истечения, формула для силы тяги двигателя в полете на некоторой высоте примет вид

$$P = c\dot{m} - pS_a \quad . \qquad (4.9)$$

В пустоте $p = 0$. Тогда

$$P_п = c\dot{m} \quad . \qquad (4.10)$$

У поверхности Земли сила тяги ракетного двигателя будет определяться формулой

$$P_o = c\dot{m}_o - p_o S_a \quad .$$

Отсюда

$$c = \frac{P_o + p_o S_a}{\dot{m}} \quad .$$

Тяга двигателя P_o на поверхности Земли и секундный расход $\dot{m}_o$ (для ракеты $\dot{m} < 0$) определяются при стендовых испытаниях двигателя.

Если предположить, что секундный расход в полете $\dot{m} = \dot{m}_o = const$,

то

$$P = P_o + (p_o - p) S_a \, .$$

При оценке эффективности ракетного двигателя одним из важных показателей является удельная тяга

$$P_{уд} = \frac{P}{\dot{m} g_o} = \frac{c}{g_o} - \frac{pS_a}{\dot{m} g_o} \quad .$$

Удельная тяга зависит от высоты полета и скорости газов. Обычно при изменении давления от одной атмосферы до полного вакуума удельная тяга изменяется на 10-20 %.

Скорость истечения газов зависит от теплотворности топлива и от конструкции двигателя. Чем выше теплотворность, тем выше удельная тяга. Конструктивные особенности двигателя сказываются на условиях сгорания топлива и скорости истечения, что влечет изменение удельной тяги.

В пустоте удельная тяга определяется формулой

$$P_{уд.п} = \frac{c}{g_0} = const \quad .$$

Лекция 5

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

I. Теорема об изменении количества движения точки

Задачу об одновременном присоединении и отделении частиц можно свести к задаче о движении точки, когда происходит только отделение частиц, если понятие „отделение" считать условным, имея в виду, что в действительности возможно не только уменьшение, но и увеличение массы точки.

В этом случае основное уравнение движения точки может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \dot{\bar{q}} = \bar{F} + \bar{u}\dot{m}$$

или

$$\boxed{\dot{\bar{q}} = \bar{F} + \bar{P}_u ,} \qquad (5.1)$$

где $\bar{P}_u = \bar{u}\dot{m}$ – реактивная сила, которая возникала бы, если бы относительная скорость „отделяемых" частиц была равна абсолютной скорости. Эту силу будем называть „реактивной", обусловленной абсолютным движением „отделяемых" частиц.

Соотношение (5.1) является математическим выражением теоремы об изменении количества движения точки переменного состава в дифференциальной форме, которая формулируется так.

Производная по времени от количества движения точки переменного состава равна геометрической сумме всех приложенных к точке внешних сил и „реактивных" сил, обусловленных абсолютным движением „отделяемых" частиц.

Если уравнение (5.I) проинтегрировать в пределах от t_0 до t, предполагая, что за это время скорость точки изменится от ϑ_0 до ϑ, то получим

$$m\bar{\vartheta} - m\bar{\vartheta}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{F}dt + \int_{t_0}^{t} \bar{P}_u dt \quad . \tag{5.2}$$

Это есть математическая запись теоремы об изменении количества движения точки в интегральной форме.

Изменение количества движения точки переменного состава за какой-либо промежуток времени равно сумме импульсов за тот же промежуток времени всех приложенных к точке внешних сил и „реактивных" сил, обусловленных абсолютным движением „отделяемых" частиц.

2. Теорема об изменении кинетического момента или момента количества движения точки

Если положение точки переменного состава относительно неподвижной системы координат с началом „О" определить радиус-вектором $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то кинетический момент или момент количества движения точки переменного состава относительно точки „О" определяется вектором

$$\bar{K}_o = \bar{r} \times m\bar{\vartheta} \quad .$$

Дифференцируя по t, получим

$$\dot{\bar{K}}_o = \bar{r} \times \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{r}} \times m\bar{\vartheta} = \bar{r} \times \dot{\bar{q}} \quad . \tag{5.3}$$

Воспользовавшись формулой, выражающей теорему об изменении количества движения, найдем

$$\dot{\bar{K}}_o = \bar{r} \times \bar{F} + \bar{r} \times \bar{P}_u$$

или

$$\dot{\bar{K}}_o = \bar{m}_o(\bar{F}) + \bar{m}_o(\bar{P}_u) \quad . \tag{5.4}$$

Эта формула выражает теорему об изменении кинетического момента точки в дифференциальной форме, которая формулируется так.

> Производная по времени от кинетического момента точки переменного состава относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов относительно того же центра всех активных сил и „реактивных" сил, обусловленных абсолютным движением „отделяемых" частиц.

Рассмотрим частный случай, когда

$$\bar{F}+\bar{P}_{\text{ц}}=0 .$$

В этом случае

$$\bar{K}_0=\bar{r}\times m\bar{v}=\overline{const}=\bar{\lambda} . \qquad (5.5)$$

Скалярное умножение на радиус-вектор $\bar{r}$ даст

$$\bar{\lambda}\bar{r}=0 ,$$

т.е. траекторией точки будет плоская кривая. Однако теорема площадей в этом случае не будет иметь места. Действительно, проектируя выражение (5.5) на направление постоянного вектора $\bar{\lambda}$, получим

$$m2\dot{\sigma}=\lambda$$

или

$$\dot{\sigma}=\frac{\lambda}{2m} .$$

Отсюда видим, что при переменной массе $m=m(t)$ секториальная скорость точки будет изменяться, т.е. в этом случае условие теоремы площадей не будет выполняться.

Покажем, что теорема площадей будет иметь место, если активная сила, действующая на точку, является центральной силой и относительная скорость отделяемых частиц равна нулю.

В этом случае теорема об изменении кинетического момента точки примет вид

$$\dot{\bar{K}}_0=\bar{r}\times\bar{v}\dot{m} .$$

С другой стороны, на основании (5.3)

$$\dot{\bar{K}}_0=\bar{r}\times\bar{v}\dot{m}+\bar{r}\times m\dot{\bar{v}} .$$

Из сравнения полученных выражений находим

$$\bar{r}\times m\dot{\bar{v}}=0 \qquad (m\neq 0)$$

или
$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r} \times \bar{v}\right) = 0 \quad .$$

Отсюда вытекает справедливость теоремы площадей
$$2\dot{\bar{\sigma}} = \overline{const} = \bar{r}_0 \times \bar{v}_0 \quad .$$

Аналогично можно показать, что теорема площадей будет иметь место еще в следующих случаях:

а) если сила $\bar{F}$ центральная и относительная скорость отделяемых частиц коллинеарна радиус-вектору $\bar{r}$;

б) если равнодействующая всех внешних сил, действующих на точку в любой момент времени, уравновешивается реактивной силой;

в) если равнодействующая реактивной силы и всех внешних сил коллинеарна радиус-вектору $\bar{r}$.

3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Кинетическая энергия точки переменного состава определяется, как и в случае точки постоянной массы и состава, формулой
$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\bar{v}^2}{2} \quad .$$

Тогда
$$dT = \frac{v^2}{2}dm + m\bar{v}\,d\bar{v} \quad .$$

На основании уравнения Мещерского
$$m\,d\bar{v} = \bar{F}dt + \bar{P}dt \quad .$$

Тогда
$$dT = \delta A_{(\bar{F})} + \delta A_{(\bar{P})} + \frac{1}{2}v^2 dm \quad . \qquad (5.6)$$

Эта формула выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.

Дифференциал кинетической энергии точки переменного состава равен сумме элементарных работ всех активных и реактивных сил плюс кинетическая энергия элементарной массы „отделяемых" частиц, обусловленная их переносной скоростью.

Формулировка теоремы в интегральной форме очевидна.

Частные случаи

I. Если состав точки изменяется, а ее масса формально остается постоянной, то $\dot{m} = 0$.

Если учесть, что $\bar{u} = \bar{\vartheta} + \bar{c}$, то $\bar{P}_u = \bar{u}\dot{m} = \bar{\vartheta}\dot{m} + \bar{P}$. Тогда формулы (5.I) и (5.4) примут вид

$$\dot{\bar{q}} = \bar{F} + \bar{P} + \bar{\vartheta}\dot{m} \quad ,$$

$$\dot{\bar{K}}_o = \bar{m}_o(\bar{F}) + \bar{m}_o(\bar{P}) + \bar{r} \times \bar{\vartheta}\dot{m} \quad .$$

Полагая в этих соотношениях $\dot{m} = 0$ и $dm = 0$ -в формуле (5.6), получим

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\bar{q}} = \bar{F} + \bar{P} \quad , \\ &\dot{\bar{K}}_o = \bar{m}_o(\bar{F}) + \bar{m}_o(\bar{P}) \quad , \\ &dT = \delta A_{(\bar{F})} + \delta A_{(\bar{P})} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

Поскольку для вывода теоремы об изменении кинетической энергии непосредственно использовалось уравнение Мещерского, то в третьей формуле нет надобности расшифровывать структуру реактивной силы.

В первых же двух формулах (5.7) следует иметь в виду, что $\bar{P} = \bar{c}\dot{m}$ будет иметь вполне определенную величину при $\dot{m} \to 0$, если эффективная относительная скорость неограниченно возрастает, т.е. должно выполняться дополнительное условие $c \to \infty$.

Условие $\dot{m} = 0$ строго выполняется для атомных воздушно-реактивных двигателей. Поэтому рассмотренный частный случай при исследовании динамических характеристик летательных аппаратов с такими двигателями представляет особый интерес.

2. Если материальная точка имеет постоянную массу и состав, т.е.

$$m = const \quad , \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \quad , \text{ то } \quad c = 0 \quad , \quad P = 0 \quad .$$

В этом случае получим известные соотношения классической динамики точки

$$\dot{\bar{q}} = \bar{F} \ ; \quad \dot{\bar{K}}_o = \bar{m}_o(\bar{F}) \ ; \quad dT = \delta A_{(\bar{F})} \quad .$$

II. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ РАКЕТ

Лекция 6

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ЦИОЛКОВСКОГО. ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО

Первой задачей Циолковского называется задача о движении ракеты в космическом пространстве так далеко от Земли и других планет, что единственной силой, действующей на ракету, является реактивная сила.

Очевидно, что эта задача является классическим примером прямолинейного движения точки переменной массы. Ее сформулируем следующим образом.

> Пренебрегая силами сопротивления и гравитации, определить скорость и закон прямолинейного движения ракеты под действием только реактивной силы тяги, если $c = const$ и в момент старта при $t = 0$ ракета имела массу m_0 и стартовую скорость v_0.

Составим схему сил и скоростей (рис.5).

На основании уравнения Мещерского (4.3) и формулы (4.10) движение ракеты будет определяться уравнением

$$m\dot{\bar{v}} = \bar{c}\dot{m} \quad .$$

Вектор $\bar{c}$ коллинеарен вектору скорости основной точки и направлен в сторону, противоположную ее движению. Поэтому, проектируя на прямую, вдоль которой движется ракета, получим

$$dv = -c\frac{dm}{m} \quad .$$

Произведя интегрирование с учетом начальных условий, получим формулу для скорости ракеты в любой момент времени t, в виде

$$\boxed{v = v_0 + c\ln\frac{m_0}{m}.} \qquad (6.1)$$

Эта формула называется формулой Циолковского. Впервые она была опубликована К.Э.Циолковским в 1903 году.

Очевидно, что формулой Циолковского можно пользоваться во всех случаях, когда реактивная сила тяги ракеты значительно превосходит силу сопротивления и гравитации (например, для тактических пороховых ракет). Формула Циолковского позволяет оценивать скоростные ресурсы и дальних ракет, у которых потери скорости вследствие земного тяготения незначительны.

Поскольку формула Циолковского выведена при идеальных условиях полета, то она дает верхнюю границу для скорости ракеты. Действительная скорость будет меньше, вследствие неизбежных потерь на преодоление силы тяготения, силы аэродинамического сопротивления и необходимости обеспечить траекторию полета определенной формы, когда направление силы тяги не совпадает с направлением скорости.

Если формулу (6.1) проинтегрировать еще раз, то получим закон движения ракеты в виде

$$\boxed{S = S_0 + v_0 t + c\int_0^t \ln\frac{m_0}{m}\,dt} \qquad (6.2)$$

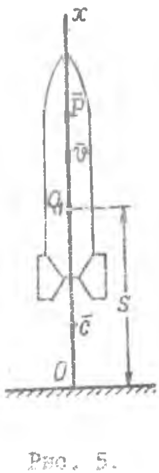

Рис. 5.

Из формул (6.1) и (6.2) видим, что скорость и путь, проходимый ракетой, зависят от закона изменения массы, т.е. от характера сгорания топлива, а следовательно от режима работы двигателя.

ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ МАССЫ РАКЕТ

В динамике точки переменной массы наибольшее распространение получили два закона изменения массы точки.

1. Линейный закон

$$\boxed{m = m_0(1-\alpha t),}$$

где $\alpha > 0$ постоянный параметр.
В этом случае секундный массовый расход

$$\mu = -\dot{m} = \alpha m_0 = const \quad .$$

Отсюда видим, что параметр α может быть определен как отношение секундного расхода массы точки к ее начальной массе. Поэтому параметр α называется удельным расходом.

Вводя эффективную скорость истечения, реактивная сила тяги будет

$$P = \mu c = \alpha m_0 c = const \quad .$$

Таким образом, линейный закон изменения массы соответствует движению точки при постоянной реактивной силе тяги, а следовательно, и при постоянном секундном расходе массы.

Такой закон имеет место при полете ракет с ЖРД. В некоторых случаях линейный закон изменения массы имеют и ракеты на твердом топливе.

2. Показательный закон

$$\boxed{m = m_0 exp(-\alpha t).}$$

В этом случае

$$\mu = \alpha m \; ; \; P = \alpha mc.$$

Отсюда видим, что при показательном законе изменения массы точки секундный массовый расход и реактивная сила не будут постоянными величинами, а будут уменьшаться по тому же закону, что и масса движущейся точки.

Одной из важных характеристик ракетного двигателя является его тяговооруженность, т.е. отношение реактивной силы тяги к силе тяжести, характеризующее перегрузку, обусловленную силой тяжести.

При показательном законе изменения массы точки в однородном поле силы тяжести ($g=\mathrm{const}$) тяговооруженность

$$n=\frac{P}{mg}=\frac{\alpha c}{g}=\mathrm{const} \quad .$$

Реактивное ускорение

$$w_p=\frac{P}{m}=\alpha c=\mathrm{const} \quad .$$

Таким образом, показательный закон изменения массы соответствует движению точки при постоянной тяговооруженности, а следовательно, и при постоянном реактивном ускорении. Это имеет место при полете ракет с двигателями, работающими на твердом топливе.

В случае линейного закона изменения массы точки тяговооруженность

$$n=\frac{\alpha m_0 c}{g}$$

и не является величиной постоянной.

В начальный момент масса точки $m=m_0$ и стартовая тяговооруженность будет

$$n_0=\frac{\alpha c}{g}=\mathrm{const} \quad .$$

Поэтому, говоря о тяговооруженности, в случае линейного закона изменения массы имеют в виду стартовую тяговооруженность.

В заключение заметим, что практически закон изменения массы определяется режимом работы двигателя. Существуют и другие законы изменения массы, но рассмотренные два закона получили наибольшее применение потому, что имеют ясный механический смысл.

Встречаются задачи, в которых масса точки является функцией только ее положения, т.е. $m=m(x)$. При решении таких задач в уравнение движения неизбежно войдут члены, зависящие от скорости движения точки, потому что

$$\dot{m}=v\frac{dm}{dx} \quad .$$

Такой задачей, например, является задача о подъеме привязного аэростата (Мещерский. Сборник задач по теоретической механике № 1155).В этом случае масса аэростата непрерывно возрастает за счет увеличения длины выбранного каната, т.е.

$$m = m_o + \gamma x \quad ,$$

где γ - масса единицы длины каната;

x - высота подъема;

γx - масса выбранной части каната, принимающей участие в движении системы.

При рассмотрении задач о полете ракет особый интерес представляют задачи, в которых масса точки является функцией только времени.

Лекция 7

МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ И ПУТЬ, ПРОХОДИМЫЙ ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ РАКЕТОЙ ЗА ВРЕМЯ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ ТЯГИ

Путь, проходимый ракетой с работающим двигателем, называется активным участком траектории.

В конце процесса сгорания топлива масса ракеты $m=m_K$, т.е. равна массе ее конструкции с небольшими остатками топлива в баках и трубопроводе. Поэтому в конце активного участка траектории, на основании формулы Циолковского, ракета будет иметь максимальную скорость

$$\vartheta_A=\vartheta_0+c\ln\frac{m_0}{m_K}$$

или

$$\boxed{\vartheta_A=\vartheta_0+c\ln Z,} \tag{7.1}$$

где $Z=\frac{m_0}{m_K}$ называется числом Циолковского.

Отсюда видим, что скорость ракеты в конце активного участка траектории не зависит от закона изменения массы, а следовательно, не зависит от режима работы двигателя. Это значит, что ракета будет иметь одну и ту же максимальную скорость как при быстром, так и при медленном сгорании топлива.

Скорость

$$\upsilon_Z = c \ln Z$$

называется скоростью по Циолковскому.

Тогда формулу (7.I) можно переписать в виде

$$\upsilon_A = \upsilon_0 + \upsilon_Z \quad .$$

Если через T_A обозначить время работы двигателя, то путь, пройденный ракетой за это время, будет определяться формулой

$$\boxed{S_A = S_0 + \upsilon_0 T_A + c\int_0^{T_A} \ln\frac{m_0}{m}\,dt.} \qquad (7.2)$$

Отсюда видим, что длина активного участка траектории, в отличие от максимальной скорости, будет зависеть от T_A , а следовательно от режима работы двигателя.

Если масса ракеты изменяется по линейному закону $m = m_0(1-\alpha t)$, то, произведя интегрирование в формуле (7.2), получим

$$S_A^Л = S_0 + \upsilon_0 T_A + \frac{c}{\alpha}\left[\alpha T_A + (1-\alpha T_A)\ln(1-\alpha T_A)\right] \qquad (7.3)$$

В конце активного участка траектории

$$m_K = m_0(1-\alpha T_A^Л) \quad .$$

Отсюда

$$T_A^Л = \frac{Z-1}{\alpha Z}$$

или, вводя стартовую тяговооруженность $n_0 = \frac{\alpha c}{g}$, получим

$$T_A^Л = \frac{c(Z-1)}{n_0 g Z} \qquad (7.4)$$

Подстановка в выражение (7.3) даст

$$S_A^Л = S_0 + \frac{c}{n_0 g Z}\left[(\upsilon_0 + c)(Z-1) - \upsilon_Z\right] \qquad (7.5)$$

В случае показательного закона изменения массы ракеты

$$S_A^n = S_0 + v_0 T_A + n \frac{g T_A^2}{2} \cdot \qquad (7.6)$$

Но так как

$$T_A^n = \frac{1}{\alpha} \ln Z = \frac{v_z}{ng} \cdot \qquad (7.7)$$

Поэтому окончательно получим

$$S_A^n = S_0 + \frac{v_z}{ng}\left(v_0 + \frac{v_z}{2}\right) \cdot \qquad (7.8)$$

В заключение отметим исключительно важное значение формулы (7.I), определяющей максимальную скорость ракеты.

Эта формула показывает, что большие скорости, необходимые для космических полетов, могут быть получены только за счет увеличения v_0 и v_z .

Увеличение v_z , а следовательно увеличение числа Z и эффективной скорости c связано с конструкцией ракеты и проблемой топлива, которое давало бы большие скорости истечения газов из сопла.

В настоящее время имеются конструкции ракет с числом $Z = 6$ и ракетные двигатели, обеспечивающие $C = 3000$ м/сек. Практически можно получить $C = 4000$ м/сек.

Если в формуле (7.I) положить $v_0 = 0$, $Z = 6$, $c = 4000$ м/сек, что подходит к границе энергетических возможностей химических ракетных топлив, то найдем

$$v_A = 5388 \text{ м/сек} , \qquad (7.9)$$

т.е. приходим к выводу, что в настоящее время с помощью одноступенчатой ракеты нельзя получить даже первой космической скорости - 8000 м/сек.

Следовательно, решение задачи получения больших скоростей связано с исследованием возможностей увеличения v_0 .

Изучение этого вопроса привело к созданию многоступенчатых ракет, с помощью которых осуществляются запуски ИСЗ, космических кораблей и достигаются большие космические скорости.

СКОРОСТЬ МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ РАКЕТЫ

Многоступенчатой ракетой называется ракета, состоящая из нескольких ракет, соединенных последовательно.

Схематически изобразим многоступенчатую ракету, состоящую из ступеней и полезного груза (рис.6).

В каждую ступень, т.е. часть ракеты входят: двигатели, приборы управления, топливо, арматура и т.д.

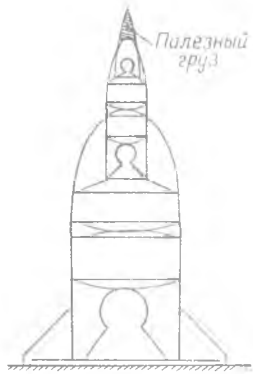

Рис. 6.

При подъеме многоступенчатой ракеты, по мере израсходования топлива, ступени автоматически отделяются и работа двигателя каждой последующей ступени начинается с дополнительной начальной скоростью. Так решается проблема увеличения ϑ_0.

Сочетание работающей ступени ракеты, всех неработающих и полезного груза называется субракетой. Поэтому для каждой данной субракеты все неработающие ступени и полезный груз будут составлять полезный груз.

Вводя понятие субракеты, замечаем, что расчет каждой субракеты может производиться так же, как и расчет одноступенчатой ракеты.

Для определения максимальной скорости многоступенчатой ракеты применим формулу Циолковского к каждой субракете.

Полагая $\vartheta_0 = 0$, скорость I-й субракеты в конце процесса сгорания топлива будет

$$\vartheta_A^{I} = c_1 \ln Z_1 \quad .$$

Это будет начальная скорость для 2-й субракеты. Тогда максимальную скорость для 2-й субракеты получим в виде

$$\vartheta_A^{II} = c_1 \ln Z_1 + c_2 \ln Z_2$$

Это будет начальная скорость для 3-й субракеты.

Продолжая этот процесс для каждой последующей субракеты, найдем максимальную скорость в конце процесса сгорания топлива. в

ν -й субракете, которая определяется формулой

$$v_A = \sum_{K=1}^{\nu} c_K \ln Z_K \quad .$$

Если скорости истечения газов во всех субракетах одинаковы, то максимальная скорость многоступенчатой ракеты будет

$$v_A = c \ln \left(\prod_{1}^{\nu} Z_K \right),$$

а в случае одинаковых и чисел Циолковского получим

$$v_A = c \nu \ln Z \quad .$$

Следовательно, если все субракеты имеют одинаковые эффективные скорости и числа Циолковского, то максимальная скорость полезного груза пропорциональна числу ступеней ракеты.

Если в предыдущем примере (7.9) поставить дополнительное условие, что ракета является двухступенчатой, то, положив $\nu = 2$, получим

$$2 \cdot 5388 = 10776 \quad м/сек \quad ,$$

т.е. первая космическая скорость достигается ракетой даже и в том случае, если 2-я субракета будет менее мощной, чем первая.

Лекция 8

ВТОРАЯ ЗАДАЧА ЦИОЛКОВСКОГО

Второй задачей Циолковского называется задача о вертикальном полете ракеты под действием реактивной силы тяги и силы тяжести.

Сформулируем ее так.

Пренебрегая сопротивлением среды, определить скорость и закон вертикального полета ракеты по нормали к поверхности Земли в однородном поле силы тяжести ($g = const$), если $\bar{c} = \overline{const}$ и в момент старта при $t = 0$ ракета имела массу m_0 и стартовую скорость v_0.

Составим схему сил и скоростей (рис.7).

Движение ракеты будет определяться уравнением Мещерского:

$$m\bar{w} = m\bar{g} + \bar{c}\dot{m}$$

или в скалярной форме

$$dv = -g\,dt - c\frac{dm}{m} .$$

Производя интегрирование с учетом начальных условий, получим

$$\boxed{v = v_0 - gt + c\ln\frac{m_0}{m}} \qquad (8.1)$$

Эта формула называется второй формулой Циолковского. Она определяет скорость одноступенчатой ракеты, движущейся в однородном поле силы тяжести в пустоте.

Интегрирование формулы (8.I) еще раз даст закон движения ракеты в виде

$$\boxed{S = S_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} + c\int_0^t \ln\frac{m_0}{m}\,dt} \qquad (8.2)$$

Если принять линейный закон изменения массы ракеты, то получим

$$v = v_0 - gt - c\ln(1-\alpha t) \ ; \qquad (8.3)$$

$$S = S_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{c}{\alpha}\left[\alpha t + (1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)\right]. \qquad (8.4)$$

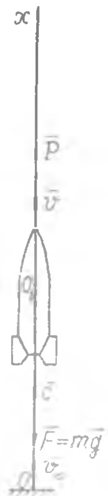

Рис.7.

При показательном законе изменения массы ракеты формулы для скорости и пути, проходимого ракетой, примут вид

$$v = v_0 + (\alpha c - g)t \ ;$$

$$S = S_0 + v_0 t + (\alpha c - g)\frac{t^2}{2}$$

или

$$v = v_0 + (n-1)gt \ ; \qquad (8.5)$$

$$S = S_0 + v_0 t + (n-1)\frac{gt^2}{2} \ . \qquad (8.6)$$

Отсюда видим, что при тяговооруженности $n > 1$ ракета будет двигаться равноускоренно, при $n < 1$ - равнозамедленно и при $n =$ I - равномерно.

Очевидно, что при полете ракеты в космическом пространстве под действием только реактивной силы тяги (первая задача Циолковского) скорость и путь, проходимый ракетой при показательном законе изменения массы, будут определяться формулами

$$v = v_0 + ngt \ ;$$

$$S = S_0 + v_0 t + n\frac{gt^2}{2} \ ,$$

т.е. полет ракеты будет происходить равноускоренно при $n>0$, равнозамедленно при $n<0$ и равномерно при $n=0$.

Отметим один интересный случай, непосредственно вытекающий из формулы (8.I).

Предположим, что в какой-либо промежуток времени ракета не движется. Тогда $v=0$, т.е.

$$\ln\frac{m_0}{m}=\frac{gt-v_0}{c} .$$

Отсюда получаем

$$m=m_0\exp\left(\frac{v_0-gt}{c}\right) . \tag{8.7}$$

Следовательно, ракета в пустоте будет в состоянии равновесия, если закон изменения ее массы будет определяться формулой (8.7). Поэтому для движения ракеты необходимо, чтобы процесс истечения газов был более интенсивным.

Очевидно, если процесс изменения массы будет происходить по закону

$$m=m_0\exp\left(-\frac{gt}{c}\right) ,$$

то ракета в однородном поле силы тяжести при отсутствии сил сопротивления будет двигаться с постоянной скоростью v_0.

Задачи, в которых по заданным внешним силам и заданному закону движения определяется закон изменения массы, обеспечивающий заданное движение, называются обратными задачами динамики точки переменной массы.

МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ И ДЛИНА АКТИВНОГО УЧАСТКА ТРАЕКТОРИИ ОДНОСТУПЕНЧАТОЙ РАКЕТЫ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Сохраняя прежние обозначения, на основании второй формулы Циолковского, максимальная скорость ракеты будет

$$v_A=v_0+v_z-gT_A . \tag{8.8}$$

Длина активного участка траектории определяется формулой

$$S_A = S_0 + v_0 T_A - \frac{g T_A^2}{2} + c \int_0^{T_A} \ln \frac{m_0}{m} dt \quad . \tag{8.9}$$

В случае линейного закона изменения массы ракеты время $T_A^л$ работы двигателя определяется формулой (7.4). Тогда

$$v_A^л = v_0 + v_z - \frac{c}{n_0 g} (z - 1) \quad ; \tag{8.10}$$

$$S_A^л = S_0 + \frac{c}{n_0 g z} \left[(v_0 + c)(z - 1) - v_z - \frac{c}{2 n_0 z} (z - 1)^2 \right] . \tag{8.11}$$

В случае показательного закона изменения массы ракеты время $T_A^п$ определяется формулой (7.7). Тогда

$$v_A^п = v_0 + v_z - \frac{v_z}{n} \quad ; \tag{8.12}$$

$$S_A^п = S_0 + \frac{v_z}{n g} \left(v_0 + \frac{v_z}{2} - \frac{v_z}{2n} \right) \quad . \tag{8.13}$$

Выведенные формулы для скорости и высоты подъема используются в ракетостроении при проектировании ракет и при поверочных расчетах. Их применяют также и при расчете подъема ракет в атмосфере, если аэродинамические силы малы по сравнению с силой $(P - G)$.

Л е к ц и я 9

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Выясним оптимальные режимы, обеспечивающие при заданном запасе топлива максимальную высоту подъема одноступенчатой ракеты.

Рассмотрим две экстремальные задачи.

1. При заданном запасе топлива найти максимальную высоту, на которую поднимется ракета

В этом случае высота подъема ракеты складывается из двух участков:

а) активного участка H_A (рис.8), который проходит ракета за время $t = T_A$ работы двигателя;

б) участка свободного полета $H_{св}$, который ракета проходит за счет скорости υ_A, приобретенной в конце активного участка траектории. Очевидно, что этот участок ракета будет проходить как точка постоянной массы.

Поэтому

$$H_{св} = \frac{\upsilon_A^2}{2g} \qquad (9.I)$$

Предположим, что масса ракеты изменяется по показательному закону. В этом случае

$$\upsilon_A = \upsilon_0 + \upsilon_z - \frac{\upsilon_z}{n}$$

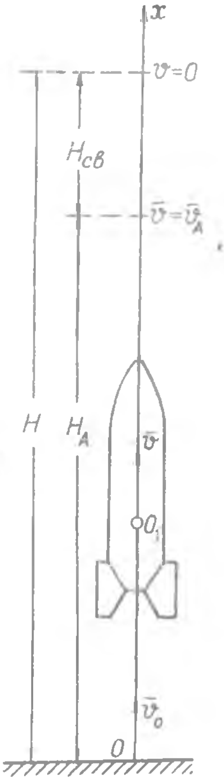

Рис. 8.

и полная высота подъема ракеты (при $S_0=0$) будет равна

$$H = H_A^n + H_{cв} = \frac{v_z}{ng}\left(v_0 + \frac{v_z}{2} - \frac{v_z}{2n}\right) + \frac{1}{2g}\left(v_0 + v_z - \frac{v_z}{n}\right)^2 = H(n) \quad . \tag{9.2}$$

Для определения значения n, при котором высота подъема ракеты будет максимальной, найдем производную $\frac{dH}{dn}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{dH}{dn} = \frac{dH_A}{dn} + \frac{dH_{cв}}{dn} = \frac{v_z}{n^2 g}\left(-v_0 - \frac{v_z}{2} + \frac{v_z}{n}\right) + \frac{v_z}{n^2 g}\left(v_0 + v_z - \frac{v_z}{n}\right) \tag{9.3}$$

или

$$\frac{dH}{dn} = \frac{v_z^2}{2n^2 g} \quad . \tag{9.4}$$

Отсюда видим, что $\frac{dH}{dn} = 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\frac{d^2H}{dn^2} < 0$,

то заключаем, что максимальная высота подъема будет при $n=\infty$, соответствующем мгновенному сгоранию всего запаса топлива. Такой режим изменения массы, обеспечивающий достижение ракетой максимальной высоты, в данной задаче будет оптимальным.

В этом случае (при $n=\infty$) получаем

$$H_A = 0\ , \quad H_{max}^{мгн} = \frac{(v_0 + v_z)^2}{2g} \quad . \tag{9.5}$$

Отсюда следует, что в однородном поле силы тяжести, когда силами сопротивления можно пренебречь, выгодно для достижения максимальных высот быстрее сжигать заданный запас топлива.

Поэтому в настоящее время наряду с улучшением конструкции ракет и применением легких высокопрочных материалов, позволяющих уменьшить массу m_K , большое внимание уделяется получению таких источников энергии для реактивных двигателей, которые давали бы возможно большую скорость отбрасывания частиц и уменьшали бы время их отбрасывания. Теоретически максимально возможной скоростью отбрасывания частиц является скорость распространения света в пустоте.

2. При заданном запасе топлива и максимальном активном участке траектории найти высоту подъема ракеты

В этом случае задача сводится при показательном законе изменения массы к отысканию максимума функции

$$H_A = \frac{v_z}{ng}\left(v_0 + \frac{v_z}{2} - \frac{v_z}{n}\right) .$$

Дифференцируя по n , получим

$$\frac{dH_A}{dn} = \frac{v_z}{n^2 g}\left(v_0 + \frac{v_z}{2} - \frac{v_z}{n}\right) .$$

Полагая

$$\frac{dH_A}{dn} = 0 ,$$

найдем тяговооруженность

$$n_1 = \frac{2v_z}{2v_0 + v_z} , \qquad (9.6)$$

при которой активный участок траектории будет максимальным. Легко убедиться, что

$$\left.\frac{d^2H_A}{dn^2}\right|_{n_1} < 0 .$$

Непосредственно из выражения (9.6) видим, что при $v_0 = 0$ оптимальный режим реализуется при $n = 2$, т.е. когда реактивное ускорение в два раза больше ускорения силы тяжести.

Для определения высоты подъема ракеты при максимальном активном участке траектории подставим значение n_1 в формулы для H_A и $H_{св}$. В результате получим

$$H_{A,max} = \frac{(2v_0 + v_z)^2}{8g} \; ; \tag{9.7}$$

$$H_{св}\Big|_{n_1} = \frac{v_z^2}{8g} \; ; \tag{9.8}$$

$$H = H_{A,max} + H_{св}\Big|_{n_1} = \frac{(2v_0 + v_z)^2 + v_z^2}{8g} \; . \tag{9.9}$$

Если в формулах (9.5) и (9.9) положить $v_0 = 0$, то получим

$$H^{мгн}_{max,0} = \frac{v_z^2}{2g} \; ;$$

$$H_0 = \frac{v_z^2}{4g} \; .$$

Отсюда видим, что в этом частном случае

$$H_{max,0} = 2H_0 \; , \tag{9.10}$$

т.е. при одном и том же заданном запасе топлива мгновенное сгорание его приводит к достижению высоты подъема в два раза большей, чем при медленном сгорании, обеспечивающем максимальный активный участок траектории.

Следовательно, желательное для человека уменьшение перегрузок неизбежно влечет уменьшение достигаемой высоты подъема ракеты.

Аналогичные выводы мы получим и при линейном законе изменения массы. Мгновенное сгорание топлива и в этом случае будет оптимальным режимом, обеспечивающим максимальную скорость ракеты при заданном запасе топлива.

Лекция I0

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ПОЛЕТ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Рассмотрим поступательное движение крылатой ракеты с ЖРД, центр масс которой не изменяет своего положения по отношению системы координат, связанной с ракетой, т.е. будем считать, что баки с топливом расположены так, что центр масс при выгорании топлива не смещается относительно твердой оболочки ракеты.

Горизонтальный полет ракеты в воздухе равносилен движению ракеты по абсолютно гладкой направляющей, когда вес ее уравновешивается подъемной силой.

Составим схему сил (рис.9).

Движение центра масс ракеты будет определяться дифференциальным уравнением вида

$$m\dot{v} = -Q_x - c\dot{m}. \qquad (I0.I)$$

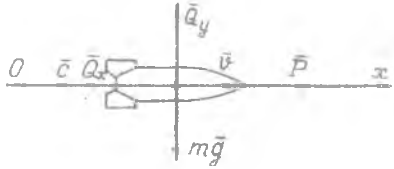

Рис. 9.

В экспериментальной аэродинамике установлено, что сила лобового сопротивления, обусловленная атмосферой, при скоростях полета до 250-300 м/сек и свыше I500-I600 м/сек определяется формулой

$$Q_x = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2 , \qquad (I0.2)$$

где c_x – аэродинамический коэффициент сопротивления;
ρ – плотность воздуха;
S – площадь миделева сечения.

Для подъемной силы имеется формула

$$Q_y=\frac{1}{2}c_y\rho S v^2 ,$$

где c_y – коэффициент подъемной силы.

Поскольку при горизонтальном полете $Q_y=mg$, то находим

$$\rho S v^2=2\frac{mg}{c_y} .$$

Подставляя в формулу (I0.2), получим

$$Q_x=\frac{mg}{\kappa} , \tag{I0.3}$$

где $\kappa=\frac{c_y}{c_x}$ – число, характеризующее аэродинамическое качество, называется качеством ракеты (самолета).

Тогда уравнение движения ракеты примет вид

$$m\dot{v}=-\frac{mg}{\kappa}-c\dot{m} . \tag{I0.4}$$

Предположим, что ракета имеет постоянную реактивную силу тяги, т.е. масса ракеты изменяется по линейному закону, а следовательно, удельный секундный расход

$$\mu=-\dot{m}=\alpha m_0 .$$

Подставляя в уравнение (I0.4), получим

$$\dot{v}=-\frac{g}{\kappa}+\frac{\alpha c}{1+\alpha t} . \tag{I0.5}$$

Для интегрирования этого уравнения нужно знать изменение качества ракеты при заданном режиме полета.

Найдем решение уравнения (I0.5) в простейшем случае, когда $\kappa=const$, т.е. в случае полета ракеты при постоянном угле атаки.

Опытами установлено, что в области трансзвуковых и околозвуковых скоростей качество очень сильно падает, так как c_x сильно возрастет, а c_y заметно убывает. Доказано, что качество зависит от числа Маха, т.е. от отношения скорости движения ракеты к скорости звука. Но в области квадратичного закона сопротивления качество зависит только от угла атаки.

Полагая $K=const$ и производя интегрирование уравнения (I0.5) с учетом, что $v=v_0$ при $t=0$, получим

$$v=v_0-\frac{gt}{K}-c\ln(1-\alpha t) \quad . \tag{I0.6}$$

Интегрируя это уравнение еще раз при условии, что $S_0=0$ при $t=0$, найдем закон движения ракеты на активном участке траектории в виде

$$S=(v_0+c)t-\frac{gt^2}{2K}+\frac{c}{\alpha}(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t) \quad . \tag{I0.7}$$

Исходя из этого закона, решим экстремальную задачу.

При заданном относительном запасе массы найдем удельный секундный расход, при котором активный участок траектории ракеты является максимальным.

При линейном законе изменения массы время $T_A^{л}$ работы двигателя определяется формулой

$$T_A^{л}=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{m_K}{m_0}\right)=\frac{1}{\alpha Z}(Z-1) \quad .$$

Подставляя в формулу (I0.7), получим длину активного участка траектории

$$S_A=\frac{1}{\alpha Z}\Big[(v_0+c)(Z-1)-v_Z\Big]-\frac{g(Z-1)^2}{2KZ\alpha^2} \quad .$$

Введем обозначения

$$A=\frac{1}{Z}\Big[(v_0+c)(Z-1)-v_Z\Big] \; ;$$

$$B=\frac{g(Z-1)^2}{2KZ} \quad .$$

Тогда поставленная задача будет сводиться к отысканию максимума функции одного параметра

$$S_A=\frac{A}{\alpha}-\frac{B}{\alpha^2} \; ;$$

$$\frac{dS_A}{d\alpha}=-\frac{A}{\alpha^2}+\frac{2B}{\alpha^3} \quad . \tag{I0.8}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{2B}{\alpha}-A\right)=0$$

при

$$\alpha_1=\infty \quad \text{и} \quad \alpha_2=\frac{2B}{A}.$$

Известно, что случай $\alpha=\infty$ соответствует мгновенному сгоранию топлива, когда S_A минимум.

Следовательно, оптимальное значение α, при котором длина активного участка максимальна, будет определяться формулой

$$\alpha_{opt}=\frac{2B}{A}=\frac{g(Z-1)^2}{\kappa\left[(v_0+c)(Z-1)-v_Z\right]}.$$

При дозвуковых скоростях отношение $\frac{v_0}{c}\approx 0$. В этом случае оптимальное значение α определяется формулой

$$\alpha_{opt}=\frac{g(Z-1)^2}{\kappa c(Z-1-\ln Z)}. \qquad (10.9)$$

Отсюда следует, что получение максимального активного участка траектории связано с проблемой увеличения относительной скорости истечения газов.

Если $\alpha_{opt}=\frac{2B}{A}$ подставить в выражение (10.8), то получим

$$S_{A,max}=\frac{A^2}{4B}=\frac{\kappa Z\left[(v_0+c)(Z-1)-v_Z\right]^2}{2g(Z-1)^2}.$$

При $\frac{v_0}{c}=0$ максимальная длина активного участка траектории будет определяться формулой

$$S_{A,max}=\frac{\kappa c^2 Z(Z-1-\ln Z)}{2g(Z-1)^2}. \qquad (10.10)$$

Отсюда видим, что длина активного участка прямо пропорциональна качеству ракеты и квадрату относительной скорости истечения газов. В заключение заметим, что полученные формулы будут справедливы и для самолета с ЖРД.

Ш. ДИНАМИКА ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Лекция II

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

В ряде работ, сохраняя аналогию с классической механикой, считают, что тело переменного состава состоит из материальных точек переменного состава, движение каждой из которых определяется соответствующим уравнением Мещерского

$$m_k \dot{\bar{v}}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{P}_k \quad ,$$
$$(k = \overline{1,n})$$

где m_k - масса k-той точки в момент времени t ;

$\bar{v}_k$ - скорость той же точки относительно неподвижной системы отсчета;

$\bar{F}_k^e, \bar{F}_k^i, \bar{P}_k$ - равнодействующие соответственно всех внешних, внутренних и реактивных сил, действующих на ту же точку.

Если имеет место только поверхностное изменение состава тела, т.е. отсутствует движение частиц внутри его (относительное движение), то в процессе движения тела расстояния между его точками не изменяются. В этом случае количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия тела переменного состава относительно неподвижной системы координат O,X,Y,Z будут определяться формулами

$$\bar{Q}=\sum_{1}^{n} m_{\kappa}\bar{v}_{\kappa} ;$$

$$K_{0}=\sum_{1}^{n}(\bar{r}_{\kappa}\times m_{\kappa}\bar{v}_{\kappa});$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_{\kappa}v_{\kappa}^{2} .$$

Тогда, по аналогии с классической механикой, устанавливаются основные понятия динамики тела переменного состава и выводятся теоремы, характеризующие его движение.

Доказательства всех основных теорем динамики тела переменного состава исключительно четко изложены в учебнике А.А.Космодемьянского [7] и монографии В.М.Карагодина [6].

В практическом отношении, применительно к авиационной и ракетной технике, более важное значение имеют теоремы ракетодинамики. Поэтому ограничимся рассмотрением теорем об изменении количества движения и кинетического момента для реактивного летательного аппарата (л.а.), представляющего собой, в общем случае, тело переменного состава с твердой, недеформируемой оболочкой, т.е. будем предполагать, что объем, занимаемый телом переменного состава, по форме и величине с течением времени не изменяется. Это допущение для л.а. достаточно близко к действительности. В случае многоступенчатых л.а. оно будет справедливо для каждой ступени.

Основные теоремы и уравнения движения л.а. с работающим реактивным двигателем сформулировали Гантмахер Ф.Р. и Левин Л.М. [8].

Следуя им и работе [9], предварительно установим некоторые зависимости, имеющие место между системами переменного и постоянного составов.

Зависимости между изменениями количества движения и кинетических моментов систем переменного и постоянного составов

В сплошной среде, состоящей из разнообразных частиц, выделим замкнутую поверхность S , которая является оболочкой системы σ переменного состава (рис.10).

Движение частиц среды и системы σ отнесем к неподвижной декартовой системе координат O,x,y,z .

С течением времени одни частицы среды будут входить внутрь поверхности S , а другие - выходить из нее.

Наряду с системой σ , рассмотрим систему σ^* постоянного состава, состоящую из тех материальных частиц, которые в некоторый фиксированный момент времени t находились внутри оболочки S .

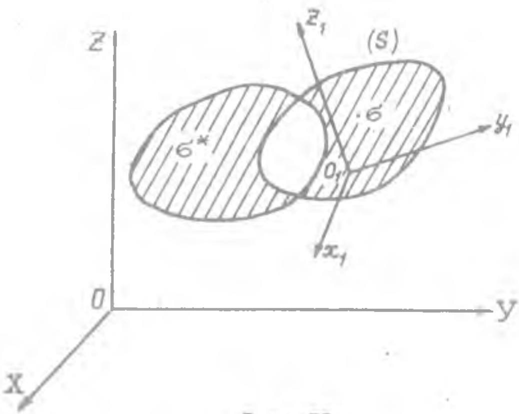

Рис. 10.

Количество движения и кинетический момент относительно точки O системы σ соответственно обозначим через $\bar{Q}$ и $\bar{K}_o$, а системы σ^* - через $\bar{Q}^*$ и $\bar{K}_o^*$.

В момент времени t системы σ и σ^* совпадают. Следовательно, в этот момент

$$\bar{Q}_t=\bar{Q}_t^* ; \quad \bar{K}_{o,t}=\bar{K}_{o,t}^* . \qquad (II.I)$$

Введем обозначения:

$\bar{Q}_u$, $\bar{K}_{o,u}$ - соответственно количество движения и кинетический момент относительно точки O частиц, поступивших за время Δt в объем, ограниченный оболочкой S ;

$\bar{Q}_v$, $\bar{K}_{o,v}$ - соответственно количество движения и кинетический момент относительно точки O частиц, вышедших из этого объема за время Δt .

Тогда в момент времени $t+\Delta t$ будем иметь

$$\bar{Q}^*_{t+\Delta t}=\bar{Q}_{t+\Delta t}+\bar{Q}_v-\bar{Q}_u ;$$

$$\bar{K}^*_{0,t+\Delta t}=\bar{K}_{0,t+\Delta t}+\bar{K}_{0,v}+\bar{K}_{0,u}$$

Вычитая из этих соотношений соответствующие равенства (II.I), получим

$$\bar{Q}^*_{t+\Delta t}-\bar{Q}^*_t=\bar{Q}_{t+\Delta t}-\bar{Q}_t+\bar{Q}_v-\bar{Q}_u ;$$

$$\overline{K}^{*}_{0,t+\Delta t}-\overline{K}^{*}_{0,t}=\overline{K}_{0,t+\Delta t}-\overline{K}_{0,t}+\overline{K}_{0,v}-\overline{K}_{0,u}\ .$$

Если эти равенства разделить на Δt и перейти к пределу при $\Delta t\to 0$, то найдем искомые зависимости в виде

$$\dot{\overline{Q}}^{*}=\dot{\overline{Q}}+\overline{q}\ ;\qquad \dot{\overline{K}}^{*}_{0}=\dot{\overline{K}}_{0}+\overline{K}\ , \tag{II.2}$$

где

$$\overline{q}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{Q}_{v}-\overline{Q}_{u}}{\Delta t}\ ;\qquad \overline{K}=\lim\frac{\overline{K}_{0,v}-\overline{K}_{0,u}}{\Delta t}\ ,$$

т.е. векторы $\overline{q}$ и $\overline{K}$ представляют собой секундные расходы количества движения и кинетического момента относительно точки O через оболочку S системы σ переменного состава в момент времени t .

Соотношения (II.2) справедливы для любой инерциальной и неинерциальной систем отсчета, а также для любой подвижной и деформирующейся оболочки S .

Предположим, что система переменного состава имеет твердую оболочку S , с которой неизменно связана система координат O_1, x_1, y_1, z_1 . Эта система координат вместе с твердой оболочкой будет двигаться относительно инерциальной системы координат O, x, y, z. Движение материальных частиц в системе координат O_1, x_1, y_1, z_1 будет относительным.

Если все величины в относительном движении отметить [illegible] r, а относительную производную обозначить через $\frac{\delta}{dt}$, [illegible] аналогичных рассуждений можно убедиться, что в подвижной, вообще говоря, неинерциальной системе координат O_1, x_1, y_1, z_1, будут иметь место соотношения

$$\frac{\delta\overline{Q}^{*}_{r}}{dt}=\frac{\delta\overline{Q}_{r}}{dt}+\overline{q}_{r}\ ;$$

$$\frac{\delta\overline{K}^{*}_{0,r}}{dt}=\frac{\delta\overline{K}_{0,r}}{dt}+\overline{K}_{r}\ ,$$

где $\overline{q}_r$ и $\overline{K}_r$ – относительные секундные расходы количества движения и кинетического момента относительно точки O_1, через твердую оболочку S в момент времени t .

Лекция I2

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА С ТВЕРДОЙ ОБОЛОЧКОЙ. ПРИНЦИП ЗАТВЕРДЕНИЯ

Рассмотрим систему σ переменного состава, ограниченную твердой оболочкой S.

Движение частиц среды и оболочки S отнесем к двум системам координат: неподвижной $-O,x,y,z$ и подвижной O_1,x_1,y_1,z_1, неизменно связанной с твердой оболочкой.

Наряду с системой σ, рассмотрим систему σ^* постоянного состава.

Поскольку к системе σ^* применены теоремы классической динамики, то основное уравнение относительного движения для каждой точки этой системы имеет вид

$$m_\kappa \bar{w}^*_{\kappa,\tau} = \bar{F}^e_\kappa + \bar{P}^{*ин}_{\kappa,e} + \bar{P}^{*ин}_{\kappa,кор} .$$

Если такие уравнения записать для каждой точки системы σ^*, а затем сложить, то получим

$$\Sigma m_\kappa \bar{w}^*_{\kappa,\tau} = \Sigma \bar{F}^e_\kappa + \Sigma \bar{P}^{*ин}_{\kappa,e} + \Sigma \bar{P}^{*ин}_{\kappa,кор} . \qquad (I2.I)$$

Учитывая, что

$$\Sigma m_\kappa \bar{w}^*_{\kappa,\tau} = \Sigma m_\kappa \frac{\delta \bar{v}^*_{\kappa,\tau}}{dt} = \frac{\delta}{dt} \Sigma m_\kappa \bar{v}^*_{\kappa,\tau} = \frac{\delta \bar{Q}^*_\tau}{dt} ;$$

$$\sum \bar{P}^{*ин}_{к,е} = -\sum m_к \bar{w}^*_{к,е} \quad ;$$

$\sum \bar{F}^e_к = \bar{F}$ – главный вектор внешних сил;

$\sum \bar{P}^{*ин}_{к,кор} = \bar{P}^{*ин}_{кор}$ – главный вектор кариолисовых сил инерции,

уравнение (I2.I) для системы σ^* постоянного состава примет вид

$$\sum m_к \bar{w}^*_{к,е} = \bar{F} + \bar{P}^{*ин}_{кор} - \frac{\delta \bar{Q}_r}{dt} \quad . \qquad (I2.2)$$

В момент времени t системы σ и σ^* совпадают и имеют одинаковые переносные и кориолисовые ускорения, т.е.

$$\bar{w}^*_{к,е} = \bar{w}_{к,е} \, ; \; \bar{P}^{*ин}_{кор} = \bar{P}^{ин}_{кор} \, ; \quad \frac{\delta \bar{Q}^*_r}{dt} = \frac{\delta \bar{Q}_r}{dt} + \bar{q}_r \quad .$$

Подставляя в уравнение (I2.2), получим

$$\sum m_к \bar{w}_{к,е} = \bar{F} + \bar{P}^{ин}_{кор} + (-\bar{q}_r) + \left(-\frac{\delta \bar{Q}_r}{dt}\right) \quad . \qquad (I2.3)$$

Это уравнение описывает переносное движение системы σ переменного состава в момент времени t .

Вектор $(-\bar{q}_r)$ называется главным вектором реактивных сил. Действительно, если секундный расход массы μdS через элемент dS умножить на $\bar{v}_r$, то получим силу $\mu \bar{v}_r dS$, которая обусловлена переносом количества движения частиц через элемент dS оболочки S , т.е. является реактивной силой, геометрическая сумма которых равна $(-\bar{q}_r)$.

Силы, геометрическая сумма которых равна $(-\frac{\delta \bar{Q}_r}{dt})$, называются вариационными силами. Эти силы возникают вследствие нестационарности относительного движения газа и жидкого топлива внутри летательных аппаратов. Они обусловлены изменениями, т.е. вариациями количества движения относительно подвижной системы координат, неизменно связанной с твердой оболочкой.

Очевидно, вариационные силы равны нулю, если плотность среды и относительная скорость $\bar{v}_r$ с течением времени не изменяются.

Предположим, что в некоторый момент времени система σ переменного состава затвердела. Тогда получим фиктивное твердое тело, неизменно связанное с реальной твердой оболочкой S .

Меняя моменты затвердевания, будем получать различные фиктивные тела, ограниченные одной и той же твердой оболочкой. Эти фиктивные тела будут отличаться друг от друга величиной массы и распределением ее внутри оболочки.

В момент затвердевания фиктивное твердое тело будет двигаться так же, как реальная твердая оболочка S . Следовательно, в этот момент переносные ускорения частиц системы σ переменного состава будут равны абсолютным ускорениям частиц фиктивного твердого тела S .

Если абсолютное ускорение κ-той точки фиктивного тела обозначить через $\bar{w}_{\kappa,S}$, то получим

$$\Sigma m_\kappa \bar{w}_{\kappa,e} = \Sigma m_\kappa \bar{w}_{\kappa,S} = \frac{d}{dt}(\Sigma m_\kappa \bar{v}_{\kappa,S}) = \dot{\bar{Q}}_S .$$

Тогда уравнение (I2.3) примет вид

$$\dot{\bar{Q}}_S = \bar{F} + \bar{P}^{ин}_{кор} + (-\bar{q}_z) + \left(-\frac{\delta \bar{Q}_z}{dt}\right) . \qquad (I2.4)$$

Это уравнение является математической записью теоремы об изменении количества движения системы переменного состава с твердой оболочкой.

Если точка O_1 является центром масс фиктивного твердого тела S , то путем аналогичных рассуждений устанавливается теорема об изменении кинетического момента системы переменного состава, математическая запись которой имеет вид

$$\dot{\bar{K}}_S = \bar{M} + \bar{M}_{кор} + (-\bar{\kappa}_z) + \left(-\frac{\delta \bar{K}_{O_1,z}}{dt}\right) , \qquad (I2.5)$$

где $\bar{K}_S$ - кинетический момент фиктивного тела S относительно его центра масс O_1 , принятого за начало подвижной системы координат;

$\bar{M} = \bar{m}_{O_1}(\bar{F})$ - главный момент всех внешних сил, действующих на систему переменного состава в момент времени t ;

$\bar{M}_{кор} = \bar{m}_{O_1}(\bar{P}^{ин}_{кор})$ - главный момент кориолисовых сил инерции;

$-\bar{\kappa}_z = \bar{m}_{O_1}(-\bar{q}_z)$ - главный момент реактивных сил;

$-\frac{\delta \bar{K}_{O_1,z}}{dt}$ - главный момент вариационных сил.

Поскольку движение фиктивного твердого тела совпадает с движением реальной твердой оболочки, то уравнение (12.5) будет описывать вращательное движение твердой оболочки относительно центра масс O_1 системы переменного состава.

На основании уравнений (12.4) и (12.5) Гантмахер и Левин сформулировали принцип затвердевания для системы переменного состава в следующем виде.

> Если систему σ переменного состава представить затвердевшей в некоторый произвольный момент времени t, то уравнение твердой оболочки этой системы в момент времени t имеет тот же вид, что и уравнение фиктивного твердого тела постоянного состава, к которому приложены внешние силы, действующие на систему σ, реактивные силы, кориолисовые силы инерции и вариационные силы.

Этот принцип имеет исключительно важное значение и может быть применен к любому реактивному летательному аппарату.

Уравнения (12.4) и (12.5) часто записывают сокращенно в виде

$$\dot{Q}_s = \Sigma \bar{F} \; ; \qquad (12.6)$$

$$\bar{K}_s = \Sigma \bar{M} \; , \qquad (12.7)$$

где $\Sigma \bar{F}$ и $\Sigma \bar{M}$ – соответственно главный вектор и главный момент относительно центра масс летательного аппарата всех внешних и реактивных сил, кориолисовых сил инерции и вариационных сил, действующих на летательный аппарат.

Лекция 13

СИЛА ТЯГИ РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассмотрим равномерное поступательное движение реактивного летательного аппарата по горизонтальной прямой со скоростью $\bar{v}$. Для решения задачи воспользуемся принципом обращения движения.

Предположим, что летательный аппарат симметричен относительно своей продольной оси, которую примем за ось x (рис.11).

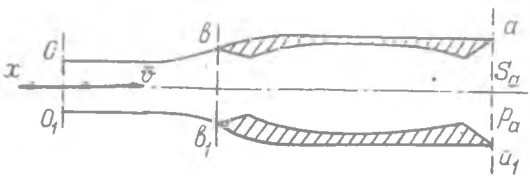

Рис. 11.

Твердой оболочкой реактивного летательного аппарата называется поверхность, образованная поверхностью летательного аппарата, плоскостью выходного сечения сопла aa_1 и поверхностью струи воздуха, втекающей в диффузор.

Если поверхность оболочки ограничить сечением bb_1, то во входном сечении диффузора будут неизвестными скорость частиц, давления и плотность воздушной среды. Поэтому сечение OO_1 диффузора проводится на некотором расстоянии от летательного аппарата, где местные скорости частиц, давление и плотность воздуха равны соответствующим значениям в невозмущенном потоке.

Поскольку твердая оболочка неподвижна, то $Q_s = 0$, $P^{ин}_{кор} = 0$. Следовательно, применительно к нашей системе переменного состава, ограниченной твердой оболочкой летательного аппарата, уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, примет вид

$$\bar{F} = \bar{q}_\tau + \frac{\delta \bar{Q}_\tau}{dt} . \qquad (13.1)$$

Внешними силами, действующими на нашу систему переменного состава, будут:

1. Сила тяжести, проекция которой на ось x равна нулю.

2. Сила $\bar{R}$ реакции опор, с помощью которых летательный аппарат закреплен на стенде.

3. Силы давления и трения, приложенные к твердой оболочке летательного аппарата.

Равнодействующая сил атмосферного давления и давления газов в выходном сечении сопла, как известно, равна

$$F_* = (p_a - p) S_a .$$

При относительном движении летательного аппарата в воздухе возникает добавочное давление, которое называется избыточным давлением. Равнодействующая сил трения и избыточного давления, приложенных к внешней поверхности летательного аппарата, представляет собой аэродинамическую силу, которая называется лобовым сопротивлением и обозначается через $\bar{X}$.

Равнодействующая сил избыточного давления, приложенных к поверхности воздушной среды $в, 0, 0_1, в_1$ называется добавочным сопротивлением воздухозаборника и обозначается через $\bar{X}_{вз}$.

Силы $\bar{X}$ и $\bar{X}_{вз}$ считаются положительными, если они направлены в отрицательную сторону оси x.

Следовательно, главный вектор всех внешних сил будет

$$\bar{F} = -\bar{R} + F_* + \bar{X} + \bar{X}_{вз} .$$

Подставляя в уравнение (13.1), получим уравнение равновесия реактивного летательного аппарата, неподвижно закрепленного на опорах, в виде

$$\bar{R} = F_* + \bar{X} + \bar{X}_{вз} + (-\bar{q}_\tau) + \left(-\frac{\delta \bar{Q}_\tau}{dt}\right) . \qquad (13.2)$$

Сила $\bar{R}$ давления летательного аппарата на опоры может быть измерена с помощью динамометра. Ее значение, определяемое равенством (13.2) называется эффективной тягой двигателя.

Если испытания двигателя производятся при отсутствии воздушного потока, то $v = 0$, а следовательно будет отсутствовать лобовое сопротивление и добавочное сопротивление воздухозаборника.

Сила $(\bar{R})_{v=0} = \bar{P}$ называется силой тяги двигателя. Поэтому в любых условиях полета сила тяги реактивного двигателя определяется формулой

$$\bar{P} = \bar{F}_{*} + (-\bar{q}_{v\tau}) + \left(-\frac{\delta \bar{Q}_{\tau}}{dt}\right) .$$

Проектируя на ось x, получим

$$P = (p_a - p)S_a - q_{v\tau} - \frac{\delta Q_{\tau}}{dt} . \qquad (13.3)$$

При расчете силы тяги обычно, ввиду малости, вариационными силами пренебрегают.

Введем обозначения:

$G_{т.сек}$ - секундный весовой расход топлива;

$G_{в.сек}$ - секундный весовой расход воздуха, входящего в двигатель;

$G_{в.сек} + G_{т.сек}$ - секундный весовой расход газов через сопло двигателя.

Тогда секундный расход количества движения будет

$$q_{v\tau} = \frac{G_{в.сек}}{g} v - \frac{c}{g}\left(G_{в.сек} + G_{т.сек}\right) .$$

Следовательно, сила тяги реактивного двигателя будет определяться формулой

$$P = \frac{c}{g}\left(G_{в.сек} + G_{т.сек}\right) - \frac{G_{в.сек}}{g} v + (p_a - p)S_a .$$

При работе ракетного двигателя воздух из атмосферы не используется $G_{в.сек} = 0$. Поэтому сила тяги ракетного двигателя будет определяться формулой

$$P = \frac{c}{g} G_{т.сек} + (p_a - p)S_a ,$$

где $G_{т.сек}$ - секундный весовой расход топлива и окислителя.

Если ввести силу тяги двигателя, то теоремы об изменении количества движения и кинетического момента относительно центра масс реактивного летательного аппарата можно записать в виде

$$\dot{\bar{Q}}_s = \bar{F} + \bar{P} + \bar{P}^{ин}_{кор} \; ;$$

$$\dot{\bar{K}}_s = \bar{M} + \bar{M}_{дв} + \bar{M}_{кор} \; ,$$

где $\bar{M}_{дв}$ – главный момент относительно центра масс летательного аппарата сил тяги двигателя, т.е. сил, входящих в выражение (13.3).

Лекция I4

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Предположим, что система координат O_1, x_1, y_1, z_1 , неизменно связанная с оболочкой летательного аппарата, вращается относительно осей неподвижной (инерциальной) системы координат с угловой скоростью ω .

При горении топлива центр масс летательных аппаратов будет смещаться относительно оболочки, а следовательно, и относительно подвижной системы координат.

На основании теоремы об изменении количества движения

$$\dot{\bar{Q}}_s = \Sigma \bar{F} \; . \qquad (14.1)$$

В момент затвердевания

$$\dot{\bar{Q}}_s = \Sigma m_k \bar{w}_{k,s} = \Sigma m_k \bar{w}_{k,e} = m \bar{w}_{c,e} \; ,$$

где $\bar{w}_{c,e}$ - переносное ускорение центра масс.

Таким образом, если воспользоваться понятием центра масс, то уравнение (I4.I) примет вид

$$m \bar{w}_{c,e} = \Sigma \bar{F} \; .$$

Но так как абсолютное ускорение центра масс

$$\bar{w}_c = \bar{w}_{c,e} + \bar{w}_{c,r} + \bar{w}_{c,кор}$$

то уравнение движения центра масс в векторной форме примет вид

$$m\bar{w}_c=\sum\bar{F}+m\bar{w}_{c,\tau}+m\bar{w}_{c,кор} \quad . \tag{14.2}$$

Последние два члена этого уравнения представляют собой силы, обусловленные перемещением центра масс л.а. относительно оболочки (корпуса). Обычно эти силы по сравнению со средними скоростями и ускорениями л.а. на активном участке траектории пренебрежимо малы.

Например, для ФАУ-2 $v_\tau < 0{,}1$ м/сек, $w_{c,кор} < 0{,}007$ м/сек^2.

Пренебрегая силами $m\bar{w}_{c,\tau}$ и $m\bar{w}_{c,кор}$, уравнение движения центра масс в векторной форме запишется в виде

$$m\bar{w}_c=\sum\bar{F} \quad . \tag{14.3}$$

Если воспользоваться формулой Бура

$$\dot{\bar{a}}=\frac{\delta\bar{a}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{a} \ ,$$

то уравнение (14.3) примет вид

$$m\left(\frac{\delta\bar{v}_c}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{v}_c\right)=\sum\bar{F} \quad .$$

Опуская индекс c в обозначении скорости центра масс и проектируя это уравнение на оси подвижной системы координат с началом в центре масс л.а., получим уравнение движения центра масс л.а. в скалярной форме

$$\left.\begin{aligned} &m\left(\dot{v}_{x_1}+\omega_{y_1}v_{z_1}-\omega_{z_1}v_{y_1}\right)=\sum F_{x_1} \ , \\ &m\left(\dot{v}_{y_1}+\omega_{z_1}v_{x_1}-\omega_{x_1}v_{z_1}\right)=\sum F_{y_1} \ , \\ &m\left(\dot{v}_{z_1}+\omega_{x_1}v_{y_1}-\omega_{y_1}v_{x_1}\right)=\sum F_{z_1} \ , \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

где $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$ – проекции линейной скорости центра масс на подвижные оси координат, неизменно связанные с оболочкой л.а.;

$\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ – проекции угловой скорости вращения подвижной системы координат относительно осей неподвижной системы координат;

$\Sigma F_{x_1}, \Sigma F_{y_1}, \Sigma F_{z_1}$ – суммы проекций на подвижные оси координат всех внешних и реактивных сил, кориолисовых сил инерции и вариационных сил, приложенных к л.а.

УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

На основании теоремы об изменении кинетического момента системы переменного состава с твердой оболочкой

$$\dot{\bar{K}}_S = \Sigma \bar{M} \qquad (I4.5)$$

В момент затвердевания t фиктивное тело и л.а. имеют одинаковое распределение масс. Это значит, что в момент затвердевания у них будут совпадать центры масс, направления главных центральных осей и значения моментов инерции относительно этих осей. Кроме этого, они будут иметь одну и ту же угловую скорость ω вращения относительно осей неподвижной системы координат и будут иметь одинаковые проекции угловой скорости на главные центральные оси инерции.

Если за координатные оси принять главные центральные оси инерции с началом в центре масс C л.а., то в момент затвердевания

$$\dot{\bar{K}}_S = \dot{\bar{K}}_C .$$

Применив к вектору $\bar{K}_C$ формулу Бура, уравнение (I4.5) примет вид

$$\frac{\delta \bar{K}_C}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_C = \Sigma \bar{M} . \qquad (I4.6)$$

Если спроектировать это уравнение на оси подвижной системы координат C, x_1, y_1, z_1, совпадающих с главными центральными осями инерции, то получим

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{K}_{x_1} + \omega_{y_1} K_{z_1} - \omega_{z_1} K_{y_1} = \Sigma M_{x_1} ,\\
&\dot{K}_{y_1} + \omega_{z_1} K_{x_1} - \omega_{x_1} K_{z_1} = \Sigma M_{y_1} ,\\
&\dot{K}_{z_1} + \omega_{x_1} K_{y_1} - \omega_{y_1} K_{x_1} = \Sigma M_{z_1} ,
\end{aligned}\right|$$

где $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ - проекции угловой скорости вращения л.а. на главные центральные оси инерции в данный момент t и вычисленные в предположении, что оси x_1, y_1, z_1 занимают неизменное положение относительно оболочки л.а.

Затвердевшее тело имеет постоянные осевые моменты инерции, равные осевым моментам инерции л.а. в момент времени t. Следовательно, согласно принципу затвердевания, проекции $\dot{K}_{x_1}$, $\dot{K}_{y_1}$, $\dot{K}_{z_1}$ в момент времени t будут вычисляться так же, как для твердого тела с постоянными моментами инерции.

Поэтому, учитывая, что

$$K_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1} J_{x_1}; \quad K_{y_1} = \omega_{y_1} J_{y_1}; \quad K_{z_1} = \omega_{z_1} J_{z_1},$$

уравнения вращательного движения л.а. относительно центра масс в скалярной форме примут вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_{x_1} J_{x_1} + \omega_{y_1}\omega_{z_1}(J_{z_1} - J_{y_1}) &= \Sigma M_{x_1}, \\ \dot{\omega}_{y_1} J_{y_1} + \omega_{z_1}\omega_{x_1}(J_{x_1} - J_{z_1}) &= \Sigma M_{y_1}, \\ \dot{\omega}_{z_1} J_{z_1} + \omega_{x_1}\omega_{y_1}(J_{y_1} - J_{x_1}) &= \Sigma M_{z_1}. \end{aligned}\right| \qquad (I4.7)$$

Эти уравнения получены для произвольного, но фиксированного момента времени t. Меняя момент затвердевания t, будем получать твердые тела с различными моментами инерции и различными направлениями главных центральных осей инерции.

Следовательно, в уравнениях (I4.7) осевые моменты инерции будут не постоянными величинами, а некоторыми функциями времени $J_{x_1} = J_{x_1}(t)$, $J_{y_1} = J_{y_1}(t)$, $J_{z_1} = J_{z_1}(t)$. Кроме этого, вследствие изменения величины и расположения масс в л.а., главные центральные оси инерции x_1, y_1, z_1 будут непрерывно поворачиваться в процессе движения л.а. на активном участке траектории.

Учет вращения главных центральных осей инерции относительно корпуса л.а. приведет к появлению в уравнениях (I4.7) дополнительных членов, которые в большинстве практических задач являются пренебрежимо малыми.

Поэтому в обычных расчетах предполагают, что за время работы двигателя направления главных центральных осей инерции не изменяются относительно оболочки л.а.

Уравнения (I4.7) совместно с уравнениями движения центра масс

(I4.4) составляют систему из шести уравнений, которая определяет движение оболочки л.а.

Очевидно, что уравнения (I4.7) по форме совпадают с известными уравнениями Эйлера, но существенно отличаются от них. Отличительной особенностью уравнений (I4.7) является то, что в них осевые моменты инерции представляют собой функции времени и главные центральные оси инерции являются мгновенными осями, т.е. являются главными центральными осями инерции только для данного момента времени t . В правые части уравнений (I4.7), наряду с моментами внешних сил относительно главных центральных осей инерции, входят моменты реактивных сил, кориолисовых сил инерции и вариационных сил относительно тех же осей.

Перемещение центра масс л.а. и изменение направлений осей x_1, y_1 , z_1 осложняет применение уравнений (I4.4) и (I4.7), но на практике этими крайне незначительными эффектами обычно пренебрегают.

В заключение заметим, что уравнения (I4.7) являются также и уравнениями вращательного движения тела переменной массы вокруг неподвижной точки O . В этом случае x_1 , y_1 , z_1 будут направлениями мгновенных осей инерции в точке O , а J_{x_1}, J_{y_1} , J_{z_1} - мгновенными значениями главных моментов инерции относительно этих осей.

Л е к ц и я 15

УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Предположим, что тело переменного состава вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, которую примем за ось Z .

Пренебрегая вариационными силами и кориолисовыми силами инерции, дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси Z примет вид

$$J_z\dot{\omega} = M_z^e + M_z^z \quad , \qquad (15.1)$$

где M_z^e и M_z^z - соответственно главные моменты всех внешних и реактивных сил относительно оси вращения.

В частном случае, когда на вращающееся тело действуют внешние силы, но относительные скорости излучаемых частиц равны нулю (частицы отделяются без ударов), дифференциальное уравнение (15.1) примет вид

$$J_z\dot{\omega} = M_z^e \quad , \qquad (15.2)$$

т.е. принимает вид известного из классической механики дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Но уравнение (15.2) отличается от него тем, что в уравнении (15.2) момент инерции тела относительно оси вращения является функцией времени $J_z = J_z(t)$.

В заключение рассмотрим некоторые примеры из сборника [10] , иллюстрирующие практическое применение уравнения (I5.I).

I. Задача о вращении кольца, радиально разбрасывающего жидкость (№ I286)

Кольцо радиусом R с равномерно распределенными по внешнему ободу отверстиями заполнено жидкостью. Оно вращается из состояния покоя под действием постоянного момента M_z вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии, в результате чего жидкость радиально выбрасывается из отверстий. Момент инерции кольца с жидкостью в начальный момент равен J_o. Считая секундный расход массы постоянным и равным μ, определить закон изменения угловой скорости кольца, пренебрегая его поперечными размерами. Перейти к пределу при $\mu \to 0$, т.е. пренебрегая изменением массы.

Решение. Момент инерции кольца относительно оси вращения в момент времени t будет

$$J_z = J_o - \mu t^2 R^2 \quad .$$

Тогда дифференциальное уравнение вращательного движения кольца, радиально разбрасывающего жидкость, запишется так:

$$(J_o - \mu t R^2)\dot{\omega} = M_z \, .$$

Производя интегрирование с учетом начального условия, что $\omega = 0$ при $t = 0$, получим

$$\omega = \frac{M_z}{\mu R^2} \ln \frac{J_o}{J_o - \mu t R^2} \, .$$

При $\mu \to 0$ $\omega \to \frac{M_z t}{J_o}$, что и должно быть для тела постоянной массы.

2. Задача о создании искусственного поля тяжести в межпланетной станции (№ I287)

Межпланетная станция имеет форму кольца с внешним радиусом R Для создания искусственного поля тяжести станция приводится во вращение вокруг оси симметрии. С этой целью на внешнем ободе кольца на противоположных концах диаметра установлены два реактивных двигателя. Относительная скорость $\bar{u}$ истечения газов в двигателе направлена по касательной к кольцу и постоянна по величине. Считая, что общий секундный расход массы $\mu=const$, определить, через какое время t тела на станции приобретут искусственный вес, равный земному, если начальный момент инерции станции вместе с горючим равен J_0.

Решение. Принимая ось вращения за ось z, как и в предыдущей задаче, момент инерции будет

$$J_z(t)=J_0-\mu t R^2 .$$

По условию задачи внешних сил, действующих на станцию, нет. Поэтому

$$m_z(\bar{F})\equiv 0.$$

Реактивная сила $\bar{u}\dot{m}=-\mu\bar{u}$ даст момент относительно оси вращения, равный $\mu R u$.

Следовательно, вращательное движение станции будет определяться уравнением

$$(J_0-\mu t R^2)\dot{\omega}=\mu R u .$$

Разделяя переменные и производя интегрирование, получим

$$\int_0^{\omega} d\omega=\mu R u\int_0^{t}\frac{dt}{J_0-\mu t R} .$$

Отсюда

$$t=\frac{J_0}{\mu R^2}\left(1-e^{-\frac{\omega R}{u}}\right) .$$

Если искусственный вес на ободе станции будет равен земному, то $m\omega^2 R=mg$, т.е. $\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$.

Полагая $\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$, получим

$$t=\frac{J_0}{\mu R^2}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{gR}}{u}}\right) .$$

3. Задача о расходе горючего ракетным автомобилем (№ 1275)

Ракетный автомобиль движется по горизонтальному пути. Суммарное сопротивление движению пропорционально нормальному давлению (коэффициент пропорциональности f).

Найти: I) расход горючего, необходимый для того, чтобы при постоянном ускорении w_0 автомобиль мог достигнуть скорости v_1, если начальная скорость была равна нулю; 2) расход горючего, необходимый для того, чтобы, двигаясь затем равномерно с этой скоростью v_1, автомобиль мог пройти путь S.
Начальная масса автомобиля m_0, скорость истечения газов $u=\mathrm{const}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Поскольку присоединения частиц в процессе движения автомобиля нет, то уравнение Мещерского в проекции на прямую, вдоль которой движется автомобиль, примет вид

$$m\dot{v} = mw_0 = -fmg - \dot{m}u$$

или

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w_0 + fg}{u}\,dt .$$

Производя интегрирование с учетом начального условия $m=m_0$ при $t = 0$, получим

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{w_0 - fg}{u}\,t .$$

Отсюда находим закон изменения массы автомобиля в виде

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{w_0 + fg}{u}\,t\right) .$$

Полагая $t = \frac{v_1}{w_0}$, получим расход горючего

$$\Delta m_1 = m_0 - m = m\left\{1 - \exp\left[-\frac{v_1}{u}\left(1 + \frac{fg}{w_0}\right)\right]\right\} .$$

Если дальнейшее движение автомобиля происходит равномерно, то $\dot{v} = 0$ и уравнение движения примет вид

$$-fm_1 g - u\dot{m}_1 = 0$$

или

$$\frac{dm_1}{m_1} = -\frac{fg}{u}\,dt .$$

Производя интегрирование с учетом, что

$$m_{1,0} = m_0 - \Delta m_1 = m_0 \exp\left[-\frac{v_1}{u}\left(1 + \frac{fg}{w_0}\right)\right] \qquad \text{при } t = 0$$

получим

$$\ln \frac{m_1}{m_{1,0}} = -\frac{fg}{u} t \quad .$$

Отсюда

$$m_1 = m_{1,0} \exp\left(-\frac{fgt}{u}\right) = m_0 \exp\left[-\frac{v_1}{u}\left(1+\frac{fg}{w_0}\right) - \frac{fg}{u} t\right] \quad .$$

Полагая $t = \frac{S}{v_1}$, получим расход горючего

$$\Delta m_2 = m_{1,0} - m_1 = m_0 \exp\left[-\frac{v_1}{u}\left(1+\frac{fg}{w_0}\right)\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{fgS}{uv_1}\right)\right] \quad .$$

ЛИТЕРАТУРА

I. МЕЩЕРСКИЙ И.В. Работы по механике тел переменной массы. ГИТТЛ, 1949.

2. ЦИОЛКОВСКИЙ К.Э. Труды по ракетной технике. Оборонгиз, 1947.

3. АППАЗОВ Р.Ф., ЛАВРОВ С.С., МИШИН В.П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. „Наука", 1966.

4. ФЕОДОСЬЕВ В.И., СИНАРЕВ Г.Б. Введение в ракетную технику. Оборонгиз, 1960.

5. ГУРИН А.И. Основы механики тел переменной массы и ракетодинамики. Издательство МГПИ им.Ленина, 1960.

6. КАРАГОДИН В.М. Теоретические основы механики тела переменного состава. Оборонгиз, 1963.

7. КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ А.А. Курс теоретической механики, часть 2, „Просвещение", 1966.

8. ГАНТМАХЕР Ф.Р., ЛЕВИН Л.М. Теория полета неуправляемых ракет. Физматгиз, 1959.

9. ЛЕБЕДЕВ А.А., ЧЕРНОБРОВКИН Л.С. Динамики полета. Оборонгиз, 1962.

10. БРАЖНИЧЕНКО Н.А., КАН В.Л., МИНЦБЕРГ Б.Л., МОРОЗОВ В.И., УШАКОВА Г.Н. Сборник задач по теоретической механике. „Высшая школа", 1967.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Николай Васильевич Клиентов

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Конспект лекций

Редактор А.И.Кондратьева
Корректор Е.М.Кошкина

Подписано в печать 27.II. 70 г. ЕО00155. Формат 60x84 1/16.
Объем 5 печ. л. Тираж 1000 экз. Цена 45 коп.

Куйбышевский авиационный институт, г. Куйбышев, Молодогвардейская, 151.

Ротапринтный цех типографии им. Мяги, г. Куйбышев, Венцека, 60. Заказ № 1689