МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра функционального анализа и теории функции

С.Я.Новиков

Основы теории числовых неравенств

Учебное пособие

Издательство «Самарский университет»
2001

ББК 22.143
Н 731
УДК 512.1
Новиков С.Я. Основы теории числовых неравенств: Учебное пособие. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001. 70 с.

В учебном пособии систематически изложены общие методы доказательства числовых неравенств. Оно восполняет заметный пробел в методическом обеспечении студентов математических специальностей, которые встречаются с неравенствами постоянно, но не имеют систематического подхода к их доказательствам.

Рекомендовано студентам младших курсов в качестве дополнительного пособия к курсам математического анализа и алгебры. Может быть взято за основу специального курса для студентов специальностей «Математика» и «Прикладная математика».

Учебное пособие можно использовать для проведения факультативных занятий в школах с углубленным изучением математики.

Рецензенты: проф., заведующий кафедрой функционального анализа СамГУ С.В.Асташкин; проф., заведующий кафедрой высшей математики Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики И.А.Блатов

Содержание

Введение

В математике неравенства встречаются повсюду: в ее основных разделах (например, в геометрии, дифференциальных уравнениях, теории чисел) и в сравнительно новых (таких, как теория автоматов, синтез схем, теория кодировки). И ничего удивительного в этом нет, так как «основной результат математики чаще выражается неравенствами, а не равенствами» [6].

В течение XX века проводились попытки систематизировать неравенства в отдельную теорию, наиболее известные из них - это книга Г. Г. Харди , Дж. Е. Литтльвуда и Г. Полиа «Неравенства», опубликованная в 1948 году на русском языке (оригинальное английское издание опубликовано в 1934 году), а также вышедшая практически спустя 30 лет книга А. Маршалла и И. Олкина «Неравенства: теория мажоризации». В последней авторы продемонстрировали своеобразие и широкие возможности довольно общего метода получения и доказательства неравенств, называемого мажоризацией, и собрали вокруг него большой материал (в книге было показано применение этого метода в таких разделах математики, как геометрия, комбинаторный анализ, теория матриц и проч.).

Но, несмотря на это, единая теория неравенств до сих пор не создана, например, классические неравенства между средними доказать с помощью мажоризации не удается. Трудности, связанные с неравенствами, начинают встречаться у студентов-математиков уже на первом курсе. Задачи на доказательство неравенств почти полностью исчезли из школьного курса математики. Но как только начинается освоение серьезных математических курсов, сразу возникает необходимость получать различные оценки тех или иных величин в виде неравенств. А так как общего подхода к их получению нет, то приходится каждый раз проявлять изобретательность.

Трудно переоценить роль неравенств и в теории операторов. Видимо, не будет преувеличением сказать, что фундаментом современной теории операторных идеалов [11] является числовое неравенство Гротендика.

В предлагаемом пособии рассказывается о некоторых довольно общих методах доказательств неравенств.

Оно состоит из трех глав, каждая из которых разбита на параграфы. В первой главе рассматривается теория неравенств между средними, в основу которой легла упрощенная схема из книги [6]. Эта глава дополнена примерами и задачами для самостоятельного решения, взятыми из [2, 3]. Здесь же представлены некоторые результаты из современных работ, посвященных теории неравенств.

Вторая глава посвящена неравенству Карлемана, имеющему интересные приложения в теории рядов и спектральной теории операторов. Приводятся два способа доказательства: с помощью неравенства Харди и с использованием теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Кроме того, здесь собраны задачи из теории числовых рядов, которые можно решить с использованием неравенства Карлемана.

В третьей главе представлены основные теоретические аспекты метода мажоризации, который был впервые изложен Мюрхедом в 1903 году, а также неравенства, которые доказываются и выводятся с помощью этого метода.

В приложениях содержатся решения или указания к большинству задач, встречающихся в пособии.

Кроме того, в отдельном приложении приведен образец оформления титульного листа дипломной работы выпускника механико-математического факультета СамГУ.

1. Неравенства между средними

1.1. Предельные значения среднего $\mu_r(a)$

Определение 1.1.1. *Пусть $a = (a_1, a_2 \dots a_n)$ — конечный набор неотрицательных чисел, $r \in R$ и $r \neq 0$; средним порядка r с равномерно распределенным весом называется число*

$$\mu_r(a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{1/r}.$$

Для сокращения записи суммы мы будем использовать обозначение $\sum a$, которое в стандартных обозначениях будет выглядеть так:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

При $r = 1$ получается среднее арифметическое, при $r = 2$ – среднее квадратичное, при $r = -1$ — среднее гармоническое чисел a. Для $r < 0$, если среди a_k есть нули, полагаем $\mu_r(a) = 0$.

Взвешенным средним с весами $p = (p_k)$, $p_k > 0$, $k = 1, \dots n$, называется число

$$\mu_r(a,p) = \left(\sum p a^r\right)^{1/r}.$$

Удобнее работать с весами, подчиненными условию $\sum p = 1$; если это условие выполнено, вес будет обозначаться буквой q.

Если p — произвольный вес, то в качестве q следует взять $\frac{p}{\sum p}$.

Итак, основной объект, который мы будем рассматривать в этом разделе, это среднее порядка r с нормированным весом q:

$$\mu_r(a,q) = \left(\sum q\, a^r\right)^{1/r}.$$

Видимо, чаще других работают с весом $q = 1/n$.

Теорема 1.1.1. *Справедливы строгие неравенства:*

$$\min_k a_k < \mu_r(a,q) < \max_k a_k,$$

если среди (a_k) есть хотя бы пара неравных друг другу чисел. Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, то будут равенства в обоих неравенствах. Если $r < 0$ и $\exists k_0 : a_k = 0$, то одно из неравенств превращается в равенство.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) при $r > 0$

$$\mu_r^r(a,q) = \sum q\, a^r < \left(\max_k a_k\right)^r \sum q = \left(\max_k a_k\right)^r,$$

то есть $\mu_r(a,q) < \max_k a_k$. Аналогично доказывается, что $\mu_r(a,q) > \min_k a_k$. Рассмотрим функцию $y = x^r$; она возрастает на $(0,+\infty)$ при $r > 0$ и убывает на $(0,+\infty)$ при $r < 0$.

2) При $r < 0$

$$\mu_r^r(a,q) = \sum q\, a^r > \sum q \left(\min_k a_k\right)^r = \left(\min_k a_k\right)^r,$$

так как при $r < 0$ функция убывает. Таким образом,

$$\mu_r(a,q) > \min_k a_k.$$

Аналогично доказывается, что $\mu_r(a,q) < \max_k a_k$. Теорема доказана.

Определение 1.1.2. *Число*

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

называется средним геометрическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $a_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$. Средним геометрическим с весом q называется число

$$G(a,q) = \prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k},\ \sum q = 1.$$

Для этого числа справедлива теорема, аналогичная теореме 1.1.1.

Теорема 1.1.2. *Справедливы строгие неравенства:*

$$\min a < G(a,q) < \max a.$$

Равенство будет в следующих случаях:

$$a)\ a_1 = a_2 = \ldots = a_n;$$

$$b)\ \exists k_0 : a_{k_0} = 0.$$

Доказательство. Пусть $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, тогда

$$a^{q_1} \cdots a^{q_n} = a^{q_1+q_2+\cdots+q_n} = a,$$

то есть получается верное равенство. В случае $b)$ будет также верное равенство: $G = 0$, $\min a = 0$. В остальных случаях $G > 0$.

Докажем основное утверждение теоремы. Из равенств

$$\prod\left(\frac{a_k}{G}\right)^{q_k} = \prod\frac{(a_k)^{q_k}}{G^{q_k}} = \frac{1}{G}\prod a_k^{q_k} = 1$$

будет следовать, что $\forall k$, $a_k = G$ или $\exists a_{k_1} < G$ и $\exists a_{k_2} > G$, то есть

$$\min a \le a_{k_1} < G < a_{k_2} \le \max a.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 1.1.3.

$$\lim_{r\to 0}\mu_r(a,q) = G(a,q)$$

Доказательство. Рассмотрим два случая. 1) При $\forall k$, $a_k > 0$

$$\mu_r(a,q) = \left(\sum q\, a^r\right)^{1/r} = e^{\frac{1}{r}\ln\left(\sum q\, a^r\right)} = \exp\left[\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{k=1}^{n} q_k e^{r\ln a_k}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{r}\ln\left(\sum q_k(1 + r\ln a_k + o(r^2))\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{r}\ln\left(1 + \sum r\, q_r \ln a_k + o(r^2)\right)\right] =$$

$$\exp\left[\frac{1}{r}\left(\sum r\, q_k \ln a_k + o(r^2)\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\sum q_k \ln a_k + o(r)\right] \overset{r\to 0}{\to} \exp\left(\sum q_k \ln a_k\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k} = G(a).$$

2) Пусть $\exists k_0 : a_{k_0} = 0$, тогда $G(a,q) = 0$. Нам нужно показать, что

$$\lim_{r\to 0}\mu_r(a,q) = 0.$$

Случай, когда все $a_k = 0$, – тривиальный. Обозначим через b_k строго положительные a, а через s_k — те q_k, которые соответствуют b_k.

Тогда имеем

$$\mu_r(a,q) = \left(\sum q\,a^r\right)^{1/r} = \left(\sum s\,b^r\right)^{1/r} = \left(\sum \frac{s}{\sum s} b^r\right)^{1/r} \left(\sum s\right)^{1/r} =$$

$$= \mu_r(b,s)\left(\sum s\right)^{1/r} \stackrel{r\to 0}{\to} 0,$$

так как $\lim\limits_{r\to+0} \mu_r(b,s) = G(b,s)$, и

$$\left(\sum s\right)^{1/r} \stackrel{r\to+0}{\to} 0,$$

потому что $\sum s < 1$.

Таким образом, мы получили

$$\lim_{r\to 0} \mu_r(a,q) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.1.4. *Справедливы предельные соотношения:*

$$\lim_{r\to+\infty} \mu_r(a,q) = \max a,$$

$$\lim_{r\to-\infty} \mu_r(a,q) = \min a.$$

Доказательство. Пусть $r > 0$ и $a_k = \max a$, тогда $\mu_r(a,q) \le a_k$ по теореме 1.1.1; а, с другой стороны,

$$\mu_r(a,q) \ge (q_k\,a_k^r)^{1/r} = q_k^{1/r} a_k \stackrel{r\to+\infty}{\to} a_k,$$

то есть $a_k \le \mu_r(a,q) \le a_k$; переходом к пределу получаем

$$\mu_r(a,q) \stackrel{r\to+\infty}{\to} a_k = \max a.$$

Если $\exists k_0 : a_{k_0} = 0$, то $\min a = 0$ и $\mu_r(a,q) = 0$ при $r < 0$.

Пусть $\forall k$, $a_k > 0$. Введем в рассмотрение

$$\mu_{-r}(a,q) = \left(\sum_{k=1}^{n} q_k\,a_k^{-r}\right)^{-1/r} = \left(\sum_{k=1}^{n} q_k \frac{1}{a_k^r}\right)^{-1/r} =$$

$$= \frac{1}{\left[\sum q\left(\frac{1}{a}\right)^r\right]^{1/r}} = \frac{1}{\mu_r(\frac{1}{a},q)}.$$

Таким образом, получилось полезное равенство

$$\mu_r(\frac{1}{a}, q) = \frac{1}{\mu_{-r}(a, q)},$$

из которого следует, что

$$\mu_r(a, q) = \frac{1}{\mu_{-r}(\frac{1}{a}, q)} \overset{r \to -\infty}{\to} \frac{1}{\max \frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{\min a}} = \min a.$$

Теорема доказана.

Соглашение:

$$\mu_0(a, q) = G(a, q),$$

$$\mu_\infty(a, q) = \max a,$$

$$\mu_{-\infty}(a, q) = \min a.$$

Таким образом,

$$\mu_{-\infty}(a, q) < \mu_r(a, q) < \mu_\infty(a, q), \quad \forall r \in R.$$

Случаи равенства: 1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$,
2) $r \leq 0$ и $\exists k_0 : a_{k_0} = 0$.

1.2. Неравенство Коши-Буняковского и его следствие для средних

Теорема 1.2.1. *Справедливо неравенство:*

$$\left(\sum a\, b\right)^2 < \sum a^2 \sum b^2, \; a, b \geq 0.$$

Равенство возможно только в случае пропорциональности (a) и (b), то есть существует $\lambda \neq 0$ *такое, что*

$$a = \lambda\, b, \; a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \; b = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Доказательство. Эту теорему можно доказать двумя способами:

1 способ основан на известном тождестве Лагранжа:

$$\sum a^2 \sum b^2 - \left(\sum a\,b\right)^2 = \sum_{1\le i<k\le n} (a_i\,b_k - a_k\,b_i)^2 \ge 0.$$

Тождество Лагранжа рассматривают в курсах алгебры и математического анализа.

2 способ. $\forall x,\ y \in R$ рассмотрим квадратичную форму:

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} (x\,a_k + y\,b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\,x\,y \sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k + y^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

а это равносильно тому, что ее дискриминант должен быть меньше (либо равен) нулю, то есть

$$\left(\sum a\,b\right)^2 - \sum a^2 \sum b^2 \le 0,$$

теорема доказана.

Следствие 1.2.1. *Для $r > 0$*

$$\mu_r(a,q) \le \mu_{2\,r}(a,q).$$

Равенство возможно только в случае, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказательство.

$$\mu_r(a,q) = \left(\sum q\,a^r\right)^{1/r} = \left(\sum \sqrt{q}(\sqrt{q}\,a^r)\right)^{1/r} \overset{K-Б}{<}$$
$$< \left((\sum q)^{1/2}(\sum q\,a^{2\,r})^{1/2}\right)^{1/r} = \left(\sum q\,a^{2r}\right)^{1/2r} = \mu_{2r}(a,q),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры использования неравенства Коши-Буняковского (примеры взяты из [3]).

Пример 1.2.1. *Доказать, что для $\forall a_1,\ldots,a_n \in R$ справедливо неравенство*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Решение. Пусть $x \in R^n$, $x = (a_1, \ldots, a_n)$,

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Возьмем $y \in R^n : y = (1, 1, \ldots, 1)$. По определению,

$$|(x, y)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1| = |a_1 + \cdots + a_n| \leq \|x\| \, \|y\| =$$
$$= \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{1 + 1 + \cdots + 1} = \sqrt{n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2).$$

Пример 1.2.2. *Доказать, что для* $\forall a_1, \ldots, a_n \in R$ *и* $\forall b_1, \ldots, b_n \in R$, *удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1,$$

справедливо неравенство

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k \, b_k| \leq 1.$$

Решение.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \, b_k\right| = |(a, b)| \leq \|a\| \, \|b\| =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} = 1.$$

1.3. Неравенство между средними: арифметическим и геометрическим

Пусть $A(a, q) = \mu_1(a, q) = \sum q \, a$ — среднее арифметическое.

Теорема 1.3.1. *Справедливо неравенство*

$$G(a, q) < A(a, q),$$

причем равенство будет наблюдаться лишь в случае, когда

$$a_1 = \ldots = a_n.$$

Доказательство [1, 5, 6].

а) Пусть сначала $p_1 = \ldots = p_n = 1$, для этого случая приведем доказательство Коши. Доказываемое неравенство будет выглядеть следующим образом:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k < \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n,$$

а для $n = 2$, $a_1 a_2 < \left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$, кроме случая $a_1 = a_2$ (так как при таких a_i, $i = 1, 2$ будет равенство). Доказательство этого неравенства очевидно: $0 \le (a-b)^2 \Longrightarrow 2ab \le a^2 + b^2 \Longrightarrow 4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \Longrightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \le \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4,$$

и хотя бы одно из неравенств будет строгое, если не все a_k равны между собой. По индукции можно получить:

$$a_1 a_2 \cdots a_{2^m} < \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m}, \tag{1.3.1}$$

то есть неравенство доказано для $n = 2^m$. Для произвольного n находим $m : n < 2^m$; введем новую последовательность:

$$b_1 = a_1, \ldots, b_n = a_n, b_{n+1} = \ldots = b_{2^m} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A(a).$$

Применим (1.3.1) к (b), получим:

$$a_1 a_2 \cdots a_n (A(a))^{2^m - n} < \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m} =$$

$$= \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + (2^m - n)A(a)}{2^m}\right)^{2^m} =$$

$$= \left(\frac{nA(a) + (2^m - n)A(a)}{2^m}\right)^{2^m} = A^{2^m}(a),$$

или

$$a_1 a_2 \cdots a_n < (A(a))^n.$$

b) Для случая произвольных положительных весов применим следствие из п. 1.2:

$$A(a,q) = \mu_1(a,q) > \mu_{1/2}(a,q) > \ldots > \mu_{2^{-m}}.$$

Но $\mu_{1/2}(a,q) \geq \lim\limits_{m\to\infty} \mu_{2^{-m}}(a,q) = \lim\limits_{s\to 0} \mu_s(a,q) = \mu_0(a,q) = G(a,q).$

Таким образом, $A(a,q) > G(a,q)$, и теорема доказана.

Замечание.

Запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для случая произвольных весов $p_k > 0$.

Положим $q_k = \frac{p_k}{\sum p_k}$, тогда

$$\prod a_k^{\frac{p_k}{\sum p_k}} < \sum \frac{p_k}{\sum p_k} a_k\,,$$

$$\prod a_k^{p_k} < \left(\sum \frac{p_k\, a_k}{\sum p_k}\right)^{\sum p},$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{p_k} < \left(\frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n}\right)^{p_1+\cdots+p_n}.$$

Посмотрим, как применяется эта теорема в доказательствах неравенств из [2, 3].

Пример 1.3.1. *Доказать, что при $\forall a,\, b,\, c > 0$ верно неравенство*

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Равенство будет в случае, когда $a = b = c$.

Решение. Перед применением теоремы сделаем следующее преобразование: разделим обе части неравенства на 3 и будем доказывать, что

$$\frac{\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c}.$$

Применим нашу теорему сначала к числам $\frac{2}{a+b}, \frac{2}{b+c}, \frac{2}{c+a}$, а затем к

$$(a+b), (b+c), (c+a).$$

Получаем, что

$$\frac{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}}{3} \overset{G<A}{\geq} \sqrt[3]{\frac{2^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \overset{G<A}{\geq}$$

$$\geq \frac{2}{\frac{a+b+b+c+c+a}{3}} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Пример 1.3.2. *Доказать, что при* $\forall a_1, \ldots, a_n > 0$ *верно неравенство*

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Равенство наблюдается в случае, когда $a_1 = \ldots = a_n$.

Решение. Умножением на n^2 левую часть неравенства превращаем в произведение двух средних арифметических, а затем применяем к ним теорему 1.3.1:

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= n^2\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}\right) \overset{G<A}{\geq}$$

$$\geq n^2 \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n} \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot \ldots a_n}} = n^2.$$

Пример 1.3.3. *Доказать неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > 1.$$

Решение. Будем применять теорему 1.3.1 к каждому слагаемому:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \overset{A>G}{>} \frac{1}{\frac{k+n-k+1}{2}} = \frac{2}{n+1}.$$

Оценивая таким образом каждое слагаемое, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > n\frac{2}{n+1} = 2\frac{n}{n+1} > 1,$$

последнее неравенство получилось в силу того, что $\frac{n}{n+1} > \frac{1}{2}$ для $n > 1$.

Задачи для самостоятельного решения [3].

(Решения или указания можно посмотреть в приложении 1.)

1.3.1. Доказать, что для любых действительных чисел a, b справедливы неравенства:

$$1)\ a^2+b^2 \geq 2|ab|; \qquad 2)\ |a-b| \geq \big||a|-|b|\big|;$$

$$3)\ \left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right) \geq \left(a^3+b^3\right)^2;$$

$$4)\ a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3.$$

1.3.2. Доказать, что для любых *положительных* чисел a, b справедливы неравенства:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

1.3.3. Доказать, что для любых *неотрицательных* чисел a, b справедливы неравенства:

$$1) \qquad a^n+b^n \leq (a+b)^n, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$2) \qquad a^n+b^n \geq a^kb^{n-k}+b^ka^{n-k}, \quad n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{N},\ k \leq n;$$

$$3) \qquad (a+b)^n \leq 2^{n-1}\left(a^n+b^n\right),\ n \in \mathbf{N}.$$

1.3.4. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c справедливы неравенства:

$$1) \qquad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac;$$

$$2) \qquad (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2);$$

3) $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le |a|+|b|+|c|$;

4) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ac)$;

5) $(ab+bc+ac)^2 \ge 3(a+b+c)\,abc$;

6) $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2 \ge ab+bc+ac$.

1.3.5. Доказать, что для любых *положительных* чисел a, b, c справедливы неравенства:

1) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \ge a+b+c$;

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$;

3) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$;

4) $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3$;

5) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

1.3.6. Доказать, что для любых *неотрицательных* чисел a, b, c справедливы неравенства:

1) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8\,abc$;

2) $a^3+b^3+c^3 \ge 3\,abc$;

3) $(a+b+c)(ab+bc+ac) \ge 9\,abc$;

4) $(ab+bc+ca)^3 \geq 27(a\,b\,c)^2$;

5) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$;

6) $(a+b+c)^3 - 4(a+b+c)(ab+bc+ac) + 9a\,b\,c \geq 0$;

7) $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(ab+bc+ac)$;

8) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

1.3.7. Доказать, что для любого натурального $n \geq 3$ выполняются неравенства:

1) $n^{n+1} > (n+1)^n$; 2) $(n!)^2 > n^n$.

1.3.8. Доказать, что для любого натурального n справедливы неравенства:

1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$;

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$; 3) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$.

1.3.9. Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$ справедливы неравенства:

1) $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$; 2) $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$;

3) $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$.

1.3.10. Доказать, что если A - наименьшее, B - наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то справедливо неравенство

$$A \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq B.$$

1.3.11. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ - действительные числа. А - наименьшее, а В - наибольшее из чисел $|a_1|, \ldots, |a_n|$. Доказать, что

$$A \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \le B.$$

1.3.12. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа такие, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \ge 2^n.$$

1.3.13. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливы неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

1.3.14. Пусть положительные числа $a_1, \ldots, a_n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Доказать, что

$$\sqrt{a_1 a_n} \le \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_n}{n}.$$

1.3.15. Доказать, что если A — наименьшее, а B — наибольшее из положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то справедливы неравенства:

$$1) \quad A \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le B, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$2) \quad A \le \left(\tfrac{a_1^m + \cdots + a_n^m}{n}\right)^{1/m} \le B, \ m > 0;$$

$$3) \quad A \le \tfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le B.$$

Как уже отмечалось, число

$$\mu_{-1}(a, \{1/n\}) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

называется средним гармоническим чисел a.

1.4. Неравенства Гёльдера

Отто Гёльдер (1859 - 1937) — немецкий математик.

Теорема 1.4.1. *Пусть дано m наборов неотрицательных чисел* $(a), (b), \ldots, (l)$. *Тогда*

$$G(a,q) + G(b,q) + \cdots + G(l,q) \le G(a+b+\cdots+l, q),$$

или

$$a_1^{q_1}\ldots a_n^{q_n}+\cdots+l_1^{q_1}\ldots l_n^{q_n} \le (a_1+\cdots+l_1)^{q_1}(a_2+\cdots+l_2)^{q_2}\ldots(a_n+\cdots+l_n)^{q_n}.$$

Случай равенства будет, когда наборы чисел пропорциональны или одно из чисел последовательности $a+b+\cdots+l$ *равно* 0.

Вот один из простых вариантов неравенства Гёльдера:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2} < \sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}.$$

Теорема 1.4.2. *Если* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *- положительны и* $\alpha+\beta+\cdots+\lambda = 1$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta \ldots l_k^\lambda \le \left(\sum a_k\right)^\alpha \left(\sum b_k\right)^\beta \left(\sum l_k\right)^\lambda.$$

Случай равенства: все последовательности чисел пропорциональны или одна последовательность нулевая.

Простейший случай:

$$\sum a^\alpha b^\beta < \left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1,$$

или (при $\alpha = 1/2$)

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k} < \sqrt{\sum a_k}\sqrt{\sum b_k}.$$

Упражнение. Доказать, что теоремы 1.4.1 и 1.4.2 эквивалентны друг другу. Для доказательства удобно расположить числовые наборы a, $b, \ldots l$ в виде столбцов матрицы.

Доказательство (теоремы 1.4.2). Сведем эту теорему к теореме 1.3.1:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda}{(\sum a)^\alpha \dots (\sum l)^\lambda} &= \sum \left(\frac{a_k}{\sum a}\right)^\alpha \left(\frac{b_k}{\sum b}\right)^\beta \dots \left(\frac{l_k}{\sum l}\right)^\lambda \overset{A>G}{\leq} \\
&\leq \sum \left(\alpha \frac{a}{\sum a} + \beta \frac{b}{\sum b} + \dots + \lambda \frac{l}{\sum l}\right) = \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum a_k} + \beta \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\sum b_k} + \dots + \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{\sum l_k} = \\
&= \alpha + \beta + \dots + \lambda = 1,
\end{aligned}$$

это неравенство является следствием неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Теорема доказана.

Применим теорему 1.4.2 в такой ситуации: заменим

$$a_k \rightsquigarrow q_k a_k^{r/\alpha}, b_k \rightsquigarrow q_k b_k^{r/\beta} \dots, l_k \rightsquigarrow q_k l_k^{r/\lambda},$$

где $r \neq 0$, $\alpha, \beta, \dots, \lambda > 0$ и $\alpha + \beta + \dots + \lambda = 1$, тогда мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n} (q_k a_k^{r/\alpha})^\alpha \dots (q_k l_k^{r/\lambda})^\lambda < \left(\sum q_k\, a_k^{r/\alpha}\right)^\alpha \dots \left(\sum q_k\, l_k^{r/\lambda}\right)^\lambda,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} q_k\, a_k^r \dots l_k^r < \left(\sum q\, a^{r/\alpha}\right)^\alpha \dots \left(\sum q\, l^{r/\lambda}\right)^\lambda.$$

Следствие 1.4.1. *При* $r > 0$

$$\mu_r(a\, b \cdot \dots \cdot l, q) < \mu_{r/\alpha}(a, q) \dots \mu_{r/\lambda}(l, q).$$

При $r < 0$

$$\mu_r(a\, b \dots l, q) > \mu_{r/\alpha}(a, q) \dots \mu_{r/\lambda}(l, q).$$

Пусть $k \neq 1$, $k' = \frac{k}{k-1}$ или $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ (последнее при $k \neq 0$). Число k' является сопряженным к k, точнее, k и k' - сопряженные показатели.

Следствие 1.4.2. *Пусть* $k \neq 1$, $k \neq 0$, k' *- сопряженное к* k, *тогда, если* $k > 1$, *то*

$$\sum a\, b < \left(\sum a^k\right)^{1/k} \left(\sum b^{k'}\right)^{1/k'}, \tag{1.4.1}$$

случай равенства: (a^k) *пропорциональна* $(b^{k'})$.

Если $k < 1$, то

$$\sum a\,b > (\sum a^k)^{1/k}(\sum b^{k'})^{1/k'}, \tag{1.4.2}$$

случай равенства: (a^k) пропорциональна $(b^{k'})$ или $(a\,b) = 0$.

Примечание: при $k = 2$ получается неравенство Коши-Буняковского.

Доказательство: а) $k > 1$, вспомним теорему 1.4.2 и возьмем в ней $\alpha = 1/k$, $\beta = 1/k'$; $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Заменим $a \rightsquigarrow a^k$ так, что

$$a^\alpha = (a^k)^{1/k} = a,$$

тогда получим

$$\sum a\,b < \left(\sum a^k\right)^{1/k} \left(\sum b^{k'}\right)^{1/k'};$$

б) $0 < k < 1$, тогда $k' = \frac{k}{k-1} < 0$. Если среди (b) есть нули, то справа второй множитель равен нулю и неравенство доказано.

Если $(b) > 0$, то введем в рассмотрение новое число

$$l = \frac{1}{k} > 1,$$

найдем сопряженное к нему

$$l' = \frac{l}{l-1} = \frac{1/k}{1/k - 1} = \frac{1/k}{\frac{1-k}{k}} = \frac{1}{1-k},$$

откуда следует $k' = \frac{k}{k-1} = -rl'$.

Введем последовательности (u) и (v) следующим образом: $u = (ab)^k$, $v = b^{-k}$; то есть $ab = u^l$, $a^k = (ab)^k b^{-k} = uv$, $b^{k'} = b^{-kl'} = v^{l'}$. В неравенстве, доказанном в а): $a \rightsquigarrow u$, $b \rightsquigarrow v$, $k \rightsquigarrow l > 1$, тогда

$$\sum u\,v < \left(\sum u^l\right)^{1/l} \left(\sum v^{l'}\right)^{1/l'},$$

$$\sum a^k < \left(\sum ab\right)^{1/l} \left(\sum b^{k'}\right)^{1/l'},$$

или

$$\left(\sum ab\right)^{1/l} > \left(\sum a^k\right)\left(\sum b^{k'}\right)^{-1/l'},$$

$$\sum ab > \left(\sum a^k\right)^l \left(\sum b^{k'}\right)^{-l/l'} = \left(\sum a^k\right)^{1/k}\left(\sum b^{k'}\right)^{1/k'}.$$

в) $k < 0$, то есть $k' \in (0,1)$ и сводится к б) переменой мест k и k'; то есть $k' \rightsquigarrow k$, а $k \rightsquigarrow k'$.

Теорема доказана.

Теорема 1.4.3. (Обратное неравенство Гёльдера) .
Пусть $k > 1$, k' - сопряженное к k и $B > 0$. Тогда

$$\sum a^k \le A \Leftrightarrow \left[(\forall b : \sum b^{k'} \le B) \Rightarrow \sum ab \le A^{1/k} B^{1/k'}\right].$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\sum a^k \le A$, $\sum b^{k'} \le B$. Тогда из (1.4.1) следует

$$\sum ab \le A^{1/k} B^{1/k'}.$$

Достаточность. Для доказательства будем использовать метод от противного. Пусть $\sum ab \le A^{1/k}B^{1/k'}$, $\forall b : \sum b^{k'} \le B$. Предположим, что $\sum a^k > A$; положим $b^{k'} = \lambda a^k$ и $\lambda > 0$ подберем так, чтобы $\sum b^{k'} = B$ или $\lambda \sum a^k = B$, таким образом, мы получили, что $\lambda = \frac{B}{A}$; тогда $\sum ab = \left(\sum a^k\right)^{1/k}\left(\sum b^{k'}\right)^{1/k'} > A^{1/k}B^{1/k'}$ - а это противоречит условию.

Теорема доказана.

Следствие 1.4.3.

$$p > 1 \Rightarrow \sup_{\sum b^{p'} \le 1} \sum ab = \left(\sum a^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Будем искать (b) в виде: $b^{p'} = \lambda a^p$ (чтобы обеспечить равенство в неравенстве Гёльдера), или $b = \lambda^{1/p'} a^{p/p'}$, а λ подберем так, чтобы $\sum b^{p'} = 1 \Rightarrow \lambda = 1/\left(\sum a^p\right)$.

Имеем:

$$ab = a\lambda^{1/p'} a^{p/p'} = \lambda^{1/p'} a^{1+p/p'} = \lambda^{1/p'} a^p = \frac{a^p}{\left(\sum a^p\right)^{1/p'}};$$

$$\sum ab = \frac{1}{\left(\sum a^p\right)^{1/p'}} \sum a^p = \left(\sum a^p\right)^{1-1/p'} = \left(\sum a^p\right)^{1/p}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\sum b^{p'} \leq 1} \sum ab \geq \left(\sum a^p\right)^{1/p}.$$

Обратное следует из неравенства Гёльдера.

Теорема доказана.

Рассмотрим крайние случаи, неосвещенные в следствии:

1) $p = 1$: $\sup\limits_{\max b \leq 1} \sum ab = \sum a$, чтобы это показать, нужно взять $b = 1$.

2) $p = \infty$: $\sup\limits_{\sum b \leq 1} \sum ab = \max a$, чтобы это получить, нужно в последовательности (b) поставить 1 на то место, где стоит $\max a$, а остальные положить равными нулю.

1.5. Общие свойства средних $\mu_r(a, q)$

Теорема 1.5.1. *Функция $\mu_r(a, q)$ возрастает по r, то есть*

$$r < s \Rightarrow \mu_r(a, q) < \mu_s(a, q).$$

Случай равенства: $a_1 = \ldots = a_n$ или $s \leq 0$ и $\exists k_0 : a_{k_0} = 0$.

Частные случаи данной теоремы, которые были доказаны выше:

а) $r = -\infty \Rightarrow$ по теореме 1.1.1 $\mu_{-\infty} = \min a$;

б) $s = +\infty \Rightarrow$ аналогично $\mu_\infty = \max a$, (см. п. 1.1);

в) $r = 0$, $s = 1$ - это теорема 1.3.1;

г) $r > 0$, $s = 2r$ - это следствие из неравенства Коши-Буняковского (см. п. 1.2).

Доказательство: а) рассмотрим случай, когда $0 < r < s$.

Определим число α равенством $r = \alpha s$, то есть $0 < \alpha = \frac{r}{s} < 1$. Положим $u = q\,a^s$, $v = q$; заметим, что

$$q\,a^{s\alpha} = (q\,a)^s q^{1-\alpha} = u^\alpha v^{1-\alpha}.$$

По теореме 1.4.2 имеем

$$\sum u^\alpha v^{1-\alpha} < \left(\sum u\right)^\alpha \left(\sum v\right)^{1-\alpha},$$

или

$$\begin{aligned} &\sum q\,a^r < \left(\sum q\,a^s\right)^{r/s} \cdot 1, \\ &\quad \left(\sum q\,a^r\right)^{1/r} < \left(\sum q\,a^s\right)^{1/s}, \\ &\quad \mu_r(a, q) < \mu_s(a, q). \end{aligned}$$

Случай равенства: (u) пропорционально (v) $\Leftrightarrow$ a_k не зависит от k.

б) $r \leq 0$ и $\exists k_0 : a_{k_0} = 0$, тогда

$$\mu_r(a, q) = 0, \quad \mu_s(a, q) \geq 0.$$

в) $r = 0 < s$ и $a > 0$

$$\begin{aligned} &\{\mu_0(a, q)\}^s = \{G(a, q)\}^s = G(a^s, q) < \\ &\quad < \mu_1(a^s, q) = \sum q\,a^s = (\mu_s(a, q))^s. \end{aligned}$$

г) $r < s < 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\mu_{-r}(a, q) = \left(\sum q\,a^{-r}\right)^{-1/r} = \left(\sum q \left(\frac{1}{a}\right)^r\right)^{-1/r} = \\ &\quad = \frac{1}{\left[\sum q \left(\frac{1}{a}\right)^r\right]^{1/r}} = \frac{1}{\mu_r(\frac{1}{a}, q)}. \end{aligned}$$

Все случаи рассмотрены, и теорема доказана.

Теорема 1.5.2. (неравенство Ляпунова) . *Пусть* $0 < r < s < t$, *тогда*

$$\mu_s^s < (\mu_r^r)^{\frac{t-s}{t-r}} (\mu_t^t)^{\frac{s-r}{t-r}}. \tag{1.5.1}$$

Равенство будет в случае, когда все (a), *отличные от нуля, равны между собой.*

Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918) — русский математик.

Доказательство. Положим $s = r\alpha + t(1-\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ или

$$s = (r-t)\alpha + t,\ \alpha = \frac{s-t}{r-t} = \frac{t-s}{t-r}.$$

Тогда (1.5.1) запишем следующим образом:

$$\sum q\, a^s < \left(\sum q\, a^r\right)^\alpha \left(\sum q\, a^t\right)^{1-\alpha}.$$

Положим $u := qa^r$, $\quad v = q\, a^t$ и применим теорему 1.4.2.

Равенство будет, если (u) пропорционально (v) или

$$q\, a^r = \lambda q\, a^t \stackrel{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} a = Const.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.5.1. *Функция* $\varphi(s) = \ln \mu_s^s = s \ln \mu_s$ *является выпуклой вниз функцией на* R_+.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы.

1.6. Сравнение средних $\mu_r(a,q)$ с суммами $S_r(a)$

Определение 1.6.1. *Суммами* $S_r(a)$ *называются числа:*

$$S_r(a) = \left(\sum a^r\right)^{1/r},\ r > 0.$$

Заметим, что
$$S_r(a) = n^{1/r}\mu_r\left(a, \left\{\frac{1}{n}\right\}\right). \qquad (1.6.1)$$

Теорема 1.6.1. (аналог теоремы 1.5.2) . *Пусть* $0 < r < s < t$, *тогда*
$$S_s^s < (S_r^r)^{\frac{t-s}{t-r}}(S_t^t)^{\frac{s-r}{t-r}}.$$

Равенство: все a, отличные от нуля, одинаковы.

Доказательство. Воспользуемся равенством (1.6.1):

$$S_s^s = n\mu_s^s(a,q) < n(\mu_r^r)^{\frac{t-s}{t-r}}(\mu_t^t)^{\frac{s-r}{t-r}} = n\left(\frac{S_r^r}{n}\right)^{\frac{t-s}{t-r}}\left(\frac{S_t^t}{n}\right)^{\frac{s-r}{t-r}} =$$

$$= \frac{n}{n^{\frac{t-s}{t-r}+\frac{s-r}{t-r}}}\left(S_r^r\right)^{\frac{t-s}{t-r}}\left(S_t^t\right)^{\frac{s-r}{t-r}} = \left(S_r^r\right)^{\frac{t-s}{t-r}}\left(S_t^t\right)^{\frac{s-r}{t-r}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.6.2. (аналог теоремы 1.5.1) . *Если*

$$0 < r < s, \text{ то } \quad S_s(a) < S_r(a).$$

Равенство возможно лишь в случае, когда ровно одно слагаемое отлично от нуля.

Доказательство. а) Предположим сначала, что $S_r(a) = 1$, тогда

$$0 \le a_k \le 1, \forall k \Rightarrow a_k^s \le a_k^r \Rightarrow \sum a^s \le \sum a^r = 1;$$

то есть мы получили
$$\left(\sum a^s\right)^{1/s} \le 1.$$

Если хотя бы два слагаемых больше нуля, то $\exists k : a_k < 1$ и неравенство будет строгое;

б) пусть a_k - произвольные, тогда $\left(\sum a_k^r\right)^{1/r} = A = S_r(a)$, заметим: $A^r = \sum a_k^r$, $a_k^{'} = a_k/A$; тогда

$$S_r(a^{'}) = \sum(a_k^{'})^r = \sum\frac{a_k^r}{A^r} = 1.$$

По а) получаем

$$S_s(a') < S_r(a') \Leftrightarrow \left[\sum (a')^s\right]^{1/s} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum \frac{a_k^s}{A^s}\right]^{1/s} < 1 \Leftrightarrow S_s(a) < A \Leftrightarrow S_s(a) < S_r(a).$$

Теорема доказана.

Теорема 1.6.3. *При $r \to +\infty$, $S_r(a) \to \max a$.*

Доказательство.

$$S_r(a) = n^{1/r}\mu_r(a) \to 1 \cdot \max a,$$

по теореме 1.1.4. Теорема доказана.

Теорема 1.6.4. *При $r \to +0$, $S_r \to +\infty$, если более одного $a > 0$.*

Доказательство. $a^r = e^{r \ln a} = 1 + r \ln a + O(r) = 1 + o(1)$, $r \to +0$; $\sum a^r = N + o(1)$, $r \to +0$, где N - число положительных слагаемых. Если $N > 2$, то $(\sum a^r)^{1/r} = (N + o(1))^{1/r} \to +\infty$ при $r \to +0$.
Теорема доказана.

Теорема 1.6.5. (неравенство Йенсена) . *Возьмем $\alpha, \beta, \ldots, \lambda > 0$ и $\alpha + \beta + \cdots + \lambda > 1$, тогда верно*

$$\sum a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda < (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \ldots (\sum l)^\lambda.$$

Случаи равенства: а) в одной последовательности все члены равны нулю;

б) в каждой последовательности ровно одно положительное слагаемое, и положительные члены всех последовательностей имеют один номер.

Иоганн Йенсен (1859 - 1925) — датский математик.

Доказательство. Введем вспомогательное число $k = \alpha + \beta + \cdots + \lambda > 1$; пусть $\alpha' = \frac{\alpha}{k}, \ldots \lambda' = \frac{\lambda}{k}$ так, что $\alpha' + \beta' + \cdots + \lambda' = 1$. Применим теорему 1.4.2, но сначала положим

$$A = a^k,\ B = b^k, \ldots, L = l^k.$$

По упомянутой теореме получим:

$$\sum a^{\alpha} b^{\beta} \dots l^{\lambda} = \sum A^{\alpha'} B^{\beta'} \dots L^{\lambda'} \leq (\sum a^k)^{\alpha/k} \dots (\sum l^k)^{\lambda/k} =$$
$$= S_k^{\alpha}(a) S_k^{\beta}(b) \dots S_k^{\lambda}(l) \leq S_1^{\alpha}(a) S_1^{\beta}(b) \dots S_1^{\lambda}(l).$$

Последнее неравенство получено в силу теоремы 1.6.2 при $k > 1$. Теорема доказана.

1.7. Неравенства Минковского

Герман Минковский (1864 - 1909) — немецкий математик.

Вспомним один из вариантов неравенства Гёльдера (теорему 1.4.1)

$$G(a,q) + G(b,q) + \dots + G(l,q) < G(a+b+\dots+l)$$

и тот факт, что $G(a,q) = \mu_0(a,q)$.

Применим это неравенство для доказательства следующей теоремы Минковского.

Теорема 1.7.1. *Имеют место следующие импликации:*

$$r > 1 \Rightarrow \mu_r(a,q) + \mu_r(b,q) + \dots + \mu_r(l,q) > \mu_r(a+b+\dots+l,q),$$
$$r < 1 \Rightarrow \mu_r(a,q) + \mu_r(b,q) + \dots + \mu_r(l,q) < \mu_r(a+b+\dots+l,q).$$

Случаи равенства: при $r > 0$, когда $(a), (b), \dots, (l)$ пропорциональны. при $r \leq 0$, когда или последовательности $(a), (b), \dots, (l)$ пропорциональны, или $a_r = b_r = \dots = l_r$ для некоторого r.

Доказательство. Отметим частные случаи теоремы Минковского. При $r = 1$ мы получаем очевидное равенство, при $r = 0$ — неравенство Гёльдера. При $r = \infty$ результат остается таким же, как для $r > 1$ и предлагается к доказательству в качестве упражнения.

Введем набор чисел $s = a + b + \dots + l$, который состоит из

$$s_v = a_v + b_v + \dots + l_v\,,\ v = \overline{1,m}.$$

Положим $S = \mu_r(s,q)$, тогда

$$S^r = \sum q\, s^r = \sum q\, s^{r-1}\, s = \sum q\, a\, s^{r-1} + \sum q\, b\, s^{r-1} + \dots + \sum q\, l\, s^{r-1} =$$
$$= \sum (q^{1/r} a)(q^{1/r} s)^{r-1} + \sum (q^{1/r} b)(q^{1/r} s)^{r-1} + \dots + \sum (q^{1/r} l)(q^{1/r} s)^{r-1}.$$

А так как $r' = \frac{r}{r-1}$, то мы получаем

$$S^r = \sum(q^{1/r}a)(q^{1/r'}s^{r/r'}) + \sum(q^{1/r}b)(q^{1/r'}s^{r/r'}) + \cdots + \sum(q^{1/r}l)(q^{1/r'}s^{r/r'}).$$

а) Рассмотрим случай, когда $r > 1$. К каждой сумме правой части применим следствие 1.4.2 и получим:

$$\begin{aligned} S^r < (\textstyle\sum q\,a^r)^{1/r}(\sum q\,s^r)^{1/r'} + \cdots + (\sum q\,l^r)^{1/r}(\sum q\,s^r)^{1/r'} = \\ = S^{r/r'}\left[(\textstyle\sum q\,a^r)^{1/r} + \cdots + (\sum q\,l^r)^{1/r}\right] = \\ = S^{r-1}\left(\mu_r(a,q) + \cdots + \mu_r(l,q)\right). \end{aligned}$$

Итак, мы получим: если $S > 0$, то

$$S < \mu_r(a,q) + \mu_r(b,q) + \cdots + \mu_r(l,q).$$

Случай равенства будет, когда все последовательности

$$(qa^r), (qb^r), \ldots, (ql^r)$$

будут пропорциональны последовательности (qs^r); а это возможно тогда и только тогда, когда последовательности $(a), (b), \ldots, (l)$ пропорциональны;

б) случай, когда $r < 1$ рассматривается аналогично, только вместо первой части следствия 1.4.2 нужно применять вторую.

Теорема доказана.

Следствие 1.7.1. *Если $r > 1$, то*

$$\left(\sum(a+b+\cdots+l)^r\right)^{1/r} < (\textstyle\sum a^r)^{1/r} + (\sum b^r)^{1/r} + \cdots + (\sum l^r)^{1/r};$$

если $r < 1$ и $r \neq 0$, то

$$\left(\sum(a+b+\cdots+l)^r\right)^{1/r} > (\textstyle\sum a^r)^{1/r} + (\sum b^r)^{1/r} + \cdots + (\sum l^r)^{1/r}.$$

Случай равенства, когда последовательности $(a), (b), \ldots, (l)$ пропорциональны. При $r < 0$ появляется дополнительный случай равенства: $a_v = b_v = \ldots = l_v$ при некотором v.

Доказательство. Будем рассматривать частный случай весов

$$q_v = \frac{1}{n} \quad \forall v = \overline{1, n}.$$

Тогда по теореме Минковского для $r > 1$ можно записать следующее неравенство:

$$\mu_r(a + b + \cdots + l, q) < \mu_r(a, q) + \mu_r(b, q) + \cdots + \mu_r(l, q),$$

или

$$\left[\frac{1}{n}\sum(a + b + \cdots + l)^r\right]^{1/r} < \left[\frac{1}{n}\sum a^r\right]^{1/r} + \left[\frac{1}{n}\sum b^r\right]^{1/r} + \cdots + \left[\frac{1}{n}\sum l^r\right]^{1/r}.$$

Аналогично рассматривается случай $r < 1$.

Следствие 1.7.2. *Пусть*

$$\mu_r^{(\mu)}(p, a) = \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\, a_\mu^r\right)^{1/r}; \; \mu_s^{(\nu)}(q, b) = \left(\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu\, b_\nu^s\right)^{1/s};$$

тогда, если $0 < r < s < \infty$, *то*

$$\mu_s^{(\nu)}(q, \mu_r^{(\mu)}(p, a_{\mu\nu})) < \mu_r^{(\mu)}(p, \mu_s^{(\nu)}(q, a_{\mu\nu})).$$

Случай равенства будет, когда $a_{\mu\nu} = b_\mu\, c_\nu\; \forall \mu, \nu$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu a_{\mu\nu}^r\right)^{s/r}\right)^{1/s} < \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \left(\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu a_{\mu\nu}^s\right)^{r/s}\right)^{1/r}.$$

Введем следующее число $k = s/r > 1$. Положим $A_{\mu\nu} = p_\mu a_{\mu\nu}^r$, тогда $A_{\mu\nu}^k = p_\mu^k a_{\mu\nu}^s$. Перепишем наше неравенство в новых обозначениях, возведя обе части неравенства в r-ю степень:

$$\left[\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\nu}\right)^k\right]^{1/k} < \sum_\mu p_\mu \left(\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu \frac{A_{\mu\nu}^k}{p_{mu}^k}\right)^{1/k} = \sum_\mu \left(\sum_\nu q_\nu A_{\mu\nu}^k\right)^{1/k}.$$

По-другому полученное неравенство можно записать так:

$$\mu_k\left(\sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\nu}, q_\nu\right) < \sum_{\mu} \mu_k\left(A_{\mu\nu}, q_\nu\right),$$

а это и есть первое неравенство из теоремы 1.7.1.

1.8. Другое доказательство неравенств Гёльдера и Минковского

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы дать другое доказательство неравенств Гёльдера и Минковского, основанное на следующей лемме [8].

Лемма 1.8.1. *Для* $1 \le p < \infty$ *и* $\forall a, b > 0$ *имеем*

$$\inf_{t>0}\left[(1/p)\, t^{1/p-1} a + (1-1/p)\, t^{1/p} b\right] = a^{1/p} b^{1-1/p}, \tag{1.8.1}$$

$$\inf_{0<t<1}\left[t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p\right] = (a+b)^p. \tag{1.8.2}$$

Доказательство. В этом доказательстве мы будем использовать выпуклость некоторых функций:

а) доказательство (1.8.1).

$$\begin{aligned}
a^{1/p}b^{1-1/p} &= [t^{1/p-1}a]^{1/p}[t^{1/p}b]^{1-1/p} = \\
&= \exp\left[\frac{1}{p}\ln\left(t^{1/p-1}a\right) + \left(1-\frac{1}{p}\right)\ln\left(t^{1/p}b\right)\right] \le \\
&\le \frac{1}{p}\exp\left[\ln\left(t^{1/p-1}a\right)\right] + \left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\left[\ln(t^{1/p}b)\right] = \\
&= \frac{1}{p}t^{1/p-1}a + \left(1-\frac{1}{p}\right)t^{1/p}b,\ t > 0.
\end{aligned}$$

Для $t = a/b$ имеем равенство;

б) доказательство (1.8.2). Функция $\varphi(u) = u^p$ для $p > 1$ выпукла на $[0, +\infty)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
(a+b)^p &= \left[t\frac{a}{t} + (1-t)\frac{b}{1-t}\right]^p \le \\
&\le t\left(\frac{a}{t}\right)^p + (1-t)\left(\frac{b}{1-t}\right)^p = \\
&= t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p,\ 0 < t < 1.
\end{aligned}$$

Для $t = a/(a+b)$ мы имеем равенство.

Замечание 1.8.1. *Если* $0 < p < 1$, *то* $\forall a, b > 0$

$$\sup_{t>0} \left[(1/p)\, t^{1/p-1}\, a + (1-1/p)\, t^{1/p}\, b\right] = a^{1/p} b^{1-1/p}, \tag{1.8.3}$$

$$\sup_{0<t<1} \left[t^{1-p} a^p + (1-t)^{1-p} b^p\right] = (a+b)^p. \tag{1.8.4}$$

Доказательство:

а) доказательство (1.8.3). Пусть для $t > 0$ функция

$$f(t) = \frac{1}{p} t^{1/p-1} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} b, \quad \text{тогда}$$

$$f'(t) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) t^{1/p-2} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p} t^{1/p-1} b = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p-2}\,(a - t\,b)\,,$$

и $f'(t_0) = 0$ в точке $t_0 = a/b$, $f'(t) < 0$ для $t > t_0$ и положительна для $t < t_0$; в точке $t_0 = a/b$ функция имеет свой максимум, то есть

$$\sup_{t>0} f(t) = f\left(\frac{a}{b}\right),$$

причем

$$f(t_0) = f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p-1} a + (1 - 1/p)\left(\frac{a}{b}\right)\frac{1}{p} b = a^{1/p} b^{1-1/p};$$

б) доказательство (1.8.4). Для $0 < t < 1$ имеем

$$g(t) = t^{1-p} a^p + (1-t)^{1-p} b^p,$$

$$g'(t) = (1-p) t^{-p} a^p - (1-p)(1-t)^{-p} b^p = 0$$

тогда и только тогда, когда $t = t_1 = a/(a+b)$. Так как

$$g''(t) < 0 \text{ (проверьте, учитывая, что } a < b),$$

то $g(t)$ имеет локальный максимум в точке $t_1 = a/(a+b)$, причем

$$g\left(\frac{a}{a+b}\right) = (a+b)^p.$$

Теорема 1.8.1. (классическое неравенство Гёльдера) .
Пусть

$$1 \leq p < \infty$$

и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Если* $x \in L_p(\mu)$ *и* $y \in L_q(\mu)$, *то* $x \cdot y \in L_1(\mu)$ *и*

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Более общий факт: если $x, y \in L_1(\mu)$, *то* $|x|^{1/p} \cdot |y|^{1-1/p} \in L_1(\mu)$ *и*

$$\left\| |x|^{1/p} \cdot |y|^{1-1/p} \right\|_1 \leq \|x\|_1^{1/p} \|y\|_1^{1-1/p}. \tag{1.8.5}$$

Доказательство. Из леммы следует неравенство

$$a^{1/p} b^{1-1/p} \leq \frac{1}{p} t^{1/p-1} a + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} b, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\left\| |x|^{1/p} |y|^{1-1/p} \right\|_1 &= \int_\Omega |x(s)|^{1/p} |y(s)|^{1-1/p} \, d\mu(s) \leq \\
&\leq \int_\Omega \left[\frac{1}{p} t^{1/p-1} |x(s)| + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} |y(s)| \right] d\mu(s) = \\
&= \frac{1}{p} t^{1/p-1} \int_\Omega |x(s)| \, d\mu(s) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} \int_\Omega |y(s)| \, d\mu(s) = \\
&= \frac{1}{p} t^{1/p-1} \|x\|_1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) t^{1/p} \|y\|_1.
\end{aligned}$$

Переходом к inf по всем $t > 0$ и используя лемму, мы получим:

$$\left\| |x|^{1/p} |y|^{1-1/p} \right\|_1 \leq \|x\|_1^{1/p} \|y\|_1^{1-1/p},$$

что доказывает (1.8.5).

Теорема 1.8.2. (классическое неравенство Минковского) .
Для $1 \leq p < \infty$ *из* $x, y \in L_p(\mu)$ *следует, что* $x + y \in L_p(\mu)$ *и*

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p. \tag{1.8.6}$$

Доказательство. Мы будем использовать вторую часть леммы, то есть неравенство

$$(a+b)^p \le t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p.$$

Мы найдем, что $\forall t : 0 < t < 1$,

$$\begin{aligned}||x+y||_p^p &= \int\limits_\Omega |x(s)+y(s)|^p\,d\mu(s) \le \int\limits_\Omega [|x(s)|+|y(s)|]^p\,d\mu(s) \le \\ &\le \int\limits_\Omega \left[t^{1-p}|x(s)|^p + (1-t)^{1-p}|y(s)|^p\right] d\mu(s) = \\ &= t^{1-p}\int\limits_\Omega |x(s)|^p\,d\mu(s) + (1-t)^{1-p}\int\limits_\Omega |y(s)|^p\,d\mu(s) = \\ &= t^{1-p}||x||_p^p + (1-t)^{1-p}||y||_p^p.\end{aligned}$$

Переходя к inf по всем $0 < t < 1$ и используя лемму, получим:

$$||x+y||_p^p \le (||x||_p + ||y||_p)^p,$$

которое является неравенством Минковского.

1.9. Интегральные неравенства Гёльдера и Минковского

В этом параграфе мы используем стандартные обозначения теории измеримых функций. Функции в формулировках теорем предполагаются неотрицательными.

Определение 1.9.1. *Функции f и g будут называться пропорциональными, если существуют две постоянные A и B, хотя бы одна из них отлична от нуля, такие, что*

$$A\,f \equiv B\,g.$$

Нулевая функция пропорциональна любой функции. Будем говорить, что $f, g, \ldots, h$ пропорциональны, если пропорциональны каждые две из них [6].

Теорема 1.9.1. *Если $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ положительны и $\alpha + \beta + \dots + \lambda = 1$, то*

$$\int f^\alpha g^\beta \dots l^\lambda \, dx < \left(\int f \, dx\right)^\alpha \dots \left(\int l \, dx\right)^\lambda . \qquad (1.9.1)$$

Равенство возможно, когда одна из функций нулевая или они пропорциональны.

Доказательство. Пусть ни одна функция не равна нулю, тогда по теореме 1.3.1:

$$\frac{\int f^\alpha \dots l^\lambda \, dx}{(\int f \, dx)^\alpha \dots (\int l \, dx)^\lambda} = \int \left(\frac{f}{\int f \, dx}\right)^\alpha \dots \left(\frac{l}{\int l \, dx}\right)^\lambda dx \overset{A>G}{\leq}$$

$$\leq \int \left(\frac{\alpha f}{\int f \, dx} + \dots + \frac{\lambda l}{\int l \, dx}\right) dx = 1.$$

Теорема 1.9.2. *Если $k > 1$, то*

$$\int f g \, dx < \left(\int f^k \, dx\right)^{1/k} \left(\int g^{k'} \, dx\right)^{1/k'} , \qquad (1.9.2)$$

равенство возможно, если f^k и $g^{k'}$ пропорциональны.

Если $0 < k < 1$ или $k < 0$, то

$$\int f g \, dx > \left(\int f^k \, dx\right)^{1/k} \left(\int g^{k'} \, dx\right)^{1/k'} , \qquad (1.9.3)$$

равенство возможно, когда f^k и $g^{k'}$ пропорциональны или $(f\, g)$ - нулевая функция.

Доказательство. Рассмотрим случай $0 < k < 1$ и $\int g^{k'} dx < \infty$, так что g почти всюду положительна. Положим $l = 1/k > 1$ и $f = (uv)^l$, $g = v^{-l}$, так что $fg = u^l$, $f^k = u\,v$, $g^{k'} = v^{l'}$, тогда u и v определены для почти для всех x и

$$\int u\, v \, dx < \left(\int u^l \, dx\right)^{1/l} \left(\int v^{l'} \, dx\right)^{1/l'} ,$$

или

$$\int f^k \, dx < \left(\int f\, g \, dx\right)^k \left(\int g^{k'} \, dx\right)^{1-k} .$$

Так как $\int g^{k'}\,dx$ конечен и отличен от нуля, то из последнего неравенства следует утверждение теоремы.

Если $\int g^{k'}\,dx = \infty$, то

$$\left(\int g^{k'}\,dx\right)^{1/k'} = 0,$$

откуда следует, что правая часть равна нулю и имеет место неравенство, если $\int f\,g\,dx \neq 0$, то есть $f\,g \not\equiv 0$.

Теорема доказана.

Эта теорема неявно содержит утверждение о сходимости или конечности, если два из трех интегралов, входящих в неравенство, конечны, то конечен и третий интеграл. Интегралом, конечность которого следует из конечности двух остальных, является $\int f\,g\,dx$, если $k > 1$, $\int f^k\,dx$, если $0 < k < 1$ и $\int g^{k'}\,dx$, если $k < 0$.

Теорема 1.9.3. (неравенство Минковского) . *Если $k > 1$, то*

$$\left\{\int (f + \cdots + l)^k\,dx\right\}^{1/k} < \left(\int f^k\,dx\right)^{1/k} + \cdots + \left(\int l^k\,dx\right)^{1/k}, \qquad (1.9.4)$$

если $0 < k < 1$, то

$$\left\{\int (f + \cdots + l)^k\,dx\right\}^{1/k} > \left(\int f^k\,dx\right)^{1/k} + \cdots + \left(\int l^k\,dx\right)^{1/k}, \qquad (1.9.5)$$

равенство наблюдается, когда $f, g, \ldots, l$ пропорциональны, а при $k < 0$ и когда обе части неравенства (1.9.4) обращаются в нуль.

Доказательство. Эта теорема следует из предыдущей теоремы. Рассмотрим случай, когда $0 < k < 1$. Пусть $s = f + g + \cdots + l$, тогда

$$\int s^k\,dx = \int f\,s^{k-1}\,dx + \cdots + \int l\,s^{k-1}\,dx, \qquad (1.9.6)$$

и по теореме 1.6.2 мы получим

$$s^k \leq f^k + g^k + \cdots + l^k.$$

Откуда следует, что если $\int f^k\,dx, \ldots, \int l^k\,dx$ конечны, то $\int s^k\,dx$ тоже конечен.

Кроме того, $\int s^k\,dx > 0$, если $s \not\equiv 0$, то есть, если

$$f, g, \ldots, l \neq 0.$$

Предположим, что $\int s^k\,dx$ положителен и конечен, тогда по теореме 1.9.2

$$\int f\,s^{k-1}\,dx > \left(\int f^k\,dx\right)^{1/k}\left(\int s^{k'}\,dx\right)^{1/k'},$$

кроме того случая, когда f^k и s^k пропорциональны или $f\,s^{k-1} = 0$.

Так как $k-1 < 0$ и s почти всюду конечна, то $f\,s^{k-1} \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$. Теперь из (1.9.6) мы получим

$$\int s^k\,dx > \left\{(\int f^k\,dx)^{1/k} + \cdots + (\int l^k\,dx)^{1/k}\right\}\left(\int s^{k'}\,dx\right)^{1/k'},$$

кроме случая, когда $f, g, \ldots, l$ пропорциональны. Если $\int s^k\,dx = 0$, так как $k < 0$, то s почти всюду бесконечна, что невозможно, так как f почти всюду конечна. Если $\int s^k\,dx = \infty$, то

$$\int f^k\,dx, \ldots, \int l^k\,dx$$

все бесконечны, и обе части неравенства равны нулю. Это и есть дополнительный случай равенства, он имеет место, когда, например, $f = g = \ldots = l = 0$.

Теорема 1.9.4. *Если $k > 1$, то*

$$\int (f+g+\cdots+l)^k\,dx > \int f^k\,dx + \int g^k\,dx + \cdots + \int l^k\,dx,$$

если $0 < k < 1$, то

$$\int (f+g+\cdots+l)^k\,dx < \int f^k\,dx + \int g^k\,dx + \cdots + \int l^k\,dx,$$

равенство наблюдается, когда для любого x, кроме, быть может, точек множества меры нуль, не более чем одна из функций $f, g, \ldots, l$ отлична от нуля.

Если все $f, g, \ldots, l$ почти всюду положительны, то последнее неравенство имеет место и для $k < 0$.

1.10. Неоднородные аналоги неравенств Минковского

Теорема 1.10.1. *Справедливы следующие импликации:*

$$r > 1 \Rightarrow \sum(a+b+\cdots+l)^r > \sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r;$$

$$0 < r < 1 \Rightarrow \sum(a+b+\cdots+l)^r < \sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r.$$

Равенство возможно лишь в случае, когда в каждой последовательности ровно одно ненулевое число.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $r > 1$; из теоремы 1.6.2 следует, что

$$(a_i^r + b_i^r + \cdots + l_i^r)^{1/r} < a_i + b_i + \cdots + l_i, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

После возведения в r-ю степень и сложения получим

$$\sum(a+b+\cdots+l)^r > \sum a^r + \sum b^r + \cdots + \sum l^r.$$

Случай $0 < r < 1$ рассматривается аналогично.

1.11. Геометрический смысл неравенств Гёльдера и Минковского

Рассмотрим два вектора в пространстве R^3:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^*, \ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^*.$$

Запишем неравенство Гёльдера с показателем 2:

$$\left|\sum x_k y_k\right| \le \sum_{k=1}^{3} |x_k y_k| < \left(\sum x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum y_k^2\right)^{1/2} = ||x||_{l_2^3} ||y||_{l_2^3},$$

откуда следует, что

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{||\vec{x}||_2 ||\vec{y}||_2} < 1.$$

Полученное неравенство может быть записано в виде

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) < 1.$$

Равенство будет, если векторы параллельны, то есть когда их координаты пропорциональны. Таким образом, мы получили, что неравенство Гёльдера в евклидовом пространстве — это тривиальная оценка для косинуса угла между векторами.

Неравенство следствия 1.7.1 (неравенство Минковского) при $r = 2$ будет выглядеть следующим образом:

$$[(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2]^{1/2} < (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{1/2}$$

или

$$\|x+y\| < \|x\|+\|y\|.$$

Это не что иное, как неравенство треугольника. Так как неравенство Минковского справедливо для любого $r \geq 1$, то именно это неравенство позволяет ввести нормы в пространствах последовательностей l_r, $r \geq 1$.

1.12. Неравенство Чебышева

Пафнутий Львович Чебышёв (1821 - 1894) — русский математик, основатель Петербургской математической школы.

Вспомним неравенство Минковского (см. теорему 1.7.1):

$$\text{если} \quad r > 1, \text{ то} \quad \mu_r(a+b) < \mu_r(a)+\mu_r(b);$$
$$\text{если} \quad r < 1, \text{ то} \quad \mu_r(a+b) > \mu_r(a)+\mu_r(b).$$

Чебышева интересовал вопрос о сравнимости чисел $\mu_r(ab)$ и $\mu_r(a)\mu_r(b)$.

Определение 1.12.1. *Две последовательности (a) и (b) одинаково упорядочены, если*

$$\forall \mu,\nu : (a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geq 0.$$

Две последовательности (a) и (b) обратно упорядочены, если

$$\forall \mu,\nu : (a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \leq 0.$$

Лемма 1.12.1. *Последовательности* (a) *и* (b) *одинаково упорядочены тогда и только тогда, когда существует перестановка индексов* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *такая, что обе последовательности* $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ *и* $b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_n}$ *одновременно неубывающие.*

Последовательности (a) *и* (b) *обратно упорядочены* $\Leftrightarrow$ *существует перестановка индексов* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$*: одна последовательность невозрастающая, другая - неубывающая.*

Доказательство. Пусть (a) и (b) одинаково упорядочены. Возьмем числа $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ и переставим их так, чтобы последовательность (a) была неубывающей,

$$a_{\nu_1} \leq a_{\nu_2} \leq \ldots \leq a_{\nu_n}.$$

Возьмем ν_k и ν_{k+1}, тогда $a_{\nu_k} \leq \nu_{k+1}$ и, в силу определения, $b_{\nu_k} \leq b_{\nu_{k+1}}$, то есть

$$b_{\nu_1} \leq b_{\nu_2} \leq \ldots \leq b_{\nu_n}.$$

Аналогично доказывается достаточность.

Теорема 1.12.1. *Пусть* $r > 0$. *Если* (a) *и* (b) *одинаково упорядочены, то*

$$\mu_r(a)\mu_r(b) \leq \mu_r(a\,b).$$

Равенство будет, если все (a) *равны между собой.*

Если (a) *и* (b) *обратно упорядочены, то*

$$\mu_r(a)\mu_r(b) \geq \mu_r(a\,b).$$

Доказательство. Мы будем рассматривать только частный случай, так как общий доказывается аналогично.

Для $r = 1$, $n = 2$ рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
&\mu_r(ab) - \mu_r(a)\mu_r(b) = \\
&= (q_1a_1b_1 + q_2a_2b_2) - (q_1a_1 + q_2a_2)(q_1b_1 + q_2b_2) = \\
&= (q_1 + q_2)(q_1a_1b_1 + q_2a_2b_2) - (q_1a_1 + q_2a_2)(q_1b_1 + q_2b_2) = \\
&= (q_1^2a_1b_1 + + q_2q_1a_1b_1 + q_1q_2a_2b_2 + q_2^2a_2b_2) - \\
&-q_1^2a_1b_1 - q_2q_1a_2b_1 - q_1q_2a_1b_2 - q_2^2a_2b_2 = \\
&= q_2q_1b_1(a_1 - a_2) + q_1q_2b_2(a_2 - a_1) = \\
&= q_1q_2(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Откуда следует $a_1 \geq a_2$, $b_1 \geq b_2$ или $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$. Для общего случая

$$\mu_1(ab) - \mu_1(a)\mu_1(b) = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu} q_\mu q_\nu (a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu).$$

Пусть $r > 0$, тогда

$$\mu_r(a) = [\mu_1(a^r)]^{1/r}.$$

Неравенство $\mu_r(a)\mu_r(b) < \mu_r(ab)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$[\mu_1(a^r)]^{1/r}[\mu_1(b^r)]^{1/r} < [\mu_1(a^r b^r)]^{1/r},$$

откуда будет следовать, что $\mu_1(a^r)\mu_1(b^r) < \mu_1(a^r b^r)$, то есть (a^r) и (b^r) одинаково упорядочены. Так как $r > 0$, то (a) и (b) одинаково упорядочены.

Доказательство окончено.

1.13. Неравенство Кларксона-Хаусдорфа-Юнга

Джеймс Кларксон (? - ?) — американский математик.

Феликс Хаусдорф (1868 - 1942) — немецкий математик.

Уильям Юнг (1863 - 1942) — английский математик.

Еще одним важным общим методом доказательства неравенств является теория интерполяции операторов. Проиллюстрируем этот метод доказательством неравенства Кларксона-Хаусдорфа-Юнга.

Теорема 1.13.1. *Пусть p и p' сопряженные показатели, причем $p \geq 2$, а $a, b \in C$, тогда*

$$\left(|a+b|^p + |a-b|^p\right)^{1/p} \leq 2^{1/p}\left(|a|^{p'} + |b|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Если $1 < p \leq 2$, то верно обратное неравенство.

Доказательство. Рассмотрим оператор [9]

$$T = T(a, b) = (a + b, a - b)$$

и заметим, что $T : l_1^{(2)} \to l_\infty^{(2)}$ имеет норму

$$\|T\|_{1,\infty} = \sup_{|a|+|b|\le 1} \max\left(|a + b|, |a - b|\right) = 1, \tag{1.13.1}$$

и, по равенству параллелограмма, $T : l_2^{(2)} \to l_2^{(2)}$ имеет норму

$$\|T\|_{2,2} = \sup_{|a|^2+|b|^2\le 1} \sqrt{|a + b|^2 + |a - b|^2} = \sqrt{2}. \tag{1.13.2}$$

Используя (1.13.1) и (1.13.2), а также теорему Рисса-Торина [7]: если $p_0 \ne p_1$, $q_0 \ne q_1$ и $T : L_{p_0}(U, d\mu) \to L_{q_0}(V, d\nu)$ с нормой M_0 (если T - линейное и ограниченное отображение, то величина $\|T\| = \sup\limits_{f\ne 0} \frac{\|Tf\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}$ называется нормой отображения T) и $T : L_{p_1}(U, d\mu) \to L_{q_1}(V, d\nu)$ с нормой M_1, то $T : L_p(U, d\mu) \to L_q(V, d\nu)$ с нормой M, удовлетворяющей соотношениям $M \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, $0 < \theta < 1$, и для чисел p и q таких, что

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}; \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

мы найдем, что для $1 \le p \le 2$ оператор $T : l_p^{(2)} \to l_{p'}^{(2)}$ с нормой

$$\|T\|_{p,p'} \le \left(\|T\|_{1,\infty}\right)^{1-2/p'} \left(\|T\|_{2,2}\right)^{2/p'} = (\sqrt{2})^{2/p'} = 2^{1/p'},$$

то есть

$$\left(|a + b|^{p'} + |a - b|^{p'}\right)^{1/p'} \le 2^{1/p'} \left(|a|^p + |b|^p\right)^{1/p},$$

что и требовалось доказать.

2. Неравенство Карлемана

2.1. Вводные замечания

Таге Карлеман (1892-1949) — шведский математик.

Основная цель данной главы состоит в доказательстве следующего утверждения:

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — положительные числа и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Оно играет важную роль в вопросах, касающихся сходимости числовых рядов и при решении проблем моментов [10]. Его справедливость становится очевидной после доказательства следующей леммы.

Лемма 2.1.1. (Неравенство Карлемана) . *Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — положительные числа, тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.1.1}$$

Ниже будут приведены два доказательства неравенства Карлемана.

2.2. Доказательство неравенства Карлемана с помощью неравенства Харди

Годфри Харди (1877-1947) — английский математик. Рассмотрим следующую теорему [1, 6].

Теорема 2.2.1. (неравенство Харди) . *Пусть $p > 1$, $a_n \geq 0$ и $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{2.2.1}$$

кроме того случая, когда все a равны нулю. Константа $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ является наилучшей.

При доказательстве этой теоремы мы можем предположить, что

$$a_1 > 0.$$

Если $a_1 = 0$, то заменим a_{n+1} на b_n и перепишем (2.2.1)в следующем виде:

$$\left(\frac{b_1}{2}\right)^p + \left(\frac{b_1+b_2}{3}\right)^p + \cdots < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (b_1^p + b_2^p + \cdots);$$

но это неравенство слабее неравенства (2.2.1). Положим теперь

$$\frac{A_n}{n} = \alpha_n$$

и условимся, что любое число с индексом нуль равно нулю. Тогда, учитывая,что $n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1} = (a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$, мы имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\left(n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}\right)\alpha_n^{p-1} = \\
&= \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \le \\
&\le \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{n-1}{p-1}\left\{(p-1)\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p\right\} = \\
&= \frac{1}{p-1}\left\{(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right\}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{2.2.2}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{p-1}a_n \le -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \le 0,$$

а, следовательно, по неравенству Гёльдера, мы получим

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^p \le \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{p-1}a_n \le \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1} N\alpha_n^p\right)^{1/p'}. \tag{2.2.3}$$

Разделив неравенство на последний множитель в правой части (который обязательно положителен) и возведя затем обе части в степень p, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p. \tag{2.2.4}$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, мы получаем (2.2.1) со знаком " $\leq$ " вместо " $<$ ". В частности, доказано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p$ сходится. Возвращаясь к (2.2.3) и заменяя N бесконечностью, мы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{p-1} a_n \leq \frac{p}{p-1} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p)(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p)^{1/p'}. \tag{2.2.5}$$

Во втором случае знак равенства имеет место только тогда, когда (a_n^p) и (α_n^p) пропорциональны, то есть когда $a_n = C\alpha_n$, где C не зависит от n; но тогда $C = 1$ (так как $a_1 = \alpha_1 > 0$), то есть $A_n = na_n$ для всех n. Это возможно в том случае, когда все a равны; но тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ не может быть сходящимся. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p < \frac{p}{p-1} (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p)^{1/p'}. \tag{2.2.6}$$

Отсюда получаем строгое неравенство (2.2.1) тем же путем, как (2.2.4) было получено из (2.2.3). Остается доказать, что константа не может быть улучшена. Положим

$$a_n = \begin{cases} (\frac{1}{n})^{1/p}, & \text{если } n \leq N, \\ 0, & \text{если } n > N, \end{cases}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

$$A_n = \sum_{1}^{n} \nu^{-\frac{1}{p}} > \int_{1}^{n} x^{-\frac{1}{p}}\, dx = \frac{p}{p-1} \left\{ n^{\frac{p-1}{p}} - 1 \right\}, \quad n \leq N,$$

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1-\varepsilon_n}{n}, \quad n \leq N, \quad \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\eta_N)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$
где $\eta_N \to 0$ при $N \to \infty$. Это показывает, что неравенство
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$
будет неверно для только что рассмотренных значений a_n и достаточно большого N. Соответствующей теоремой для интегралов будет

Теорема 2.2.2. *Пусть $p > 1$, $f(x) \geq 0$ и*
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
Тогда
$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p\,dx, \tag{2.2.7}$$
кроме того случая, когда $f \equiv 0$. Константа является наилучшей.

Доказательство. Если $0 < \xi < X$, то, интегрируя по частям, получим:
$$\int_{\xi}^{X}\left(\frac{F}{x}\right)^p dx = -\frac{1}{p-1}\int_{\xi}^{X} F^p \frac{d}{dx}(x^{1-p})\,dx = \frac{\xi^{1-p}F^p(\xi)}{p-1} -$$
$$-\frac{X^{1-p}F^p(X)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_{\xi}^{X} x^{1-p}F^{p-1}f\,dx.$$

Известна теорема о том, что если $p > 1$, $f \in L^p(0,a)$ и $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, то
$$F(x) = o(x^{1/p'})$$
для малых x; кроме того, если f^p интегрируема, то $\xi^{1-p}F^p(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. Следовательно,
$$\int_0^X \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\int_0^X \left(\frac{F}{x}\right)^{p-1} f\,dx \leq$$
$$\leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^X \left(\frac{F}{x}\right)^p dx\right\}^{1/p'} \left\{\int_0^X f^p\,dx\right\}^{1/p}. \tag{2.2.8}$$

Если $f \not\equiv 0$ в интервале $(0, X)$, то левая часть предыдущего неравенства положительна, а отсюда следует

$$\int_0^X \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^X f^p\, dx. \tag{2.2.9}$$

Переходя к пределу при $X \to \infty$, мы получаем (2.2.7) с " $\leq$ " вместо " $<$ ". В частности, интеграл в левой части (2.2.7) конечен. Отсюда следует, что все интегралы в (2.2.8) остаются конечными при замене X бесконечностью, и что

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1} \int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^{p-1} f\, dx \leq$$
$$\leq \frac{p}{p-1} \left\{\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx\right\}^{1/p'} \left\{\int_0^\infty f^p\, dx\right\}^{1/p}.$$

Во втором случае знак равенства имеет место только тогда, когда $\left(\frac{F}{x}\right)^p$ и f^p пропорциональны, но отсюда следовало бы, что f является степенью x и тогда $\int f^p\, dx$ был бы расходящимся. Следовательно,

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx < \frac{p}{p-1} \left\{\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx\right\}^{1/p'} \left\{\int_0^\infty f^p\, dx\right\}^{1/p}, \tag{2.2.10}$$

кроме того случая, когда $f \equiv 0$. Так как интеграл в левой части положителен и конечен, то (2.2.7) следует теперь из (2.2.10) таким же образом, как (2.2.9) следовало из (2.2.8). Доказательство того, что константа является наилучшей, ведется так же, как и в случае, приведенном выше: полагаем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ x^{-(1/p)-\varepsilon}, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$$

и т. д. Таким образом, теорема доказана.

2.3. Неравенство Карлемана

Заменяя в неравенстве Харди a_n на $a_n^{1/p}$, мы получаем [6]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1^{1/p}+a_2^{1/p}+\cdots+a_n^{1/p}}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \qquad (2.3.1)$$

Переходя к пределу при $p\to\infty$, мы находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}\leq e\sum_{n=1}^{\infty}a_n;$$

в действительности имеет место строгое неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

если $(a)\neq(0)$. Константа является наилучшей.

Можно попытаться доказать это неравенство с помощью неравенства о среднем арифметическом и средним геометрическим:

$$\sum_n(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}\leq\sum_n\frac{1}{n}\sum_{m\leq n}a_m=\sum_m a_m\sum_{n\geq m}\frac{1}{n},$$

но сумма в правой части всегда расходится. Этот метод не ведет к доказательству, и непосредственного применения данного утверждения к левой части (2.3.1) недостаточно. Поэтому применим это утверждение не к $a_1,a_2,\ldots,a_n$, а к c_1a_1, c_2a_2, $\ldots$, c_na_n и выберем c так, что когда $\sum a_n$ близка к границе сходимости, числа c_na_n «примерно равны». Для этого c_n должны быть порядка n. Эта идея ведет к следующему доказательству. Мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1\,a_2\ldots a_n)^{1/n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_1a_1\,c_2a_2\ldots c_na_n}{c_1\,c_2\ldots c_n}\right)^{1/n}\leq$$
$$\leq\sum_n(c_1\,c_2\ldots c_n)^{-1/n}\frac{1}{n}\sum_{m\leq n}c_ma_m=$$
$$=\sum_m c_ma_m\sum_{n\geq m}\frac{1}{n}(c_1\,c_2\ldots c_n)^{-1/n}.$$

Для более удобного вычисления внутренней суммы положим

$$(c_1 c_2 \ldots c_n)^{1/n} = n + 1,$$

то есть

$$c_m = \frac{(m+1)^m}{m^{m-1}},$$

тогда

$$\sum_{n \geq m} \frac{1}{n}(c_1 c_2 \ldots c_n)^{-1/n} = \sum_{n \geq m} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{m},$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m c_m}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e \sum_{m=1}^{\infty} a_m,$$

кроме случая, когда (a)- нулевая последовательность.

2.4. Еще одно доказательство неравенства Карлемана

Как мы видели в предыдущем параграфе, неравенство Карлемана все-таки удается доказать с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Приведем еще один способ такого доказательства, заимствованный из [5].

Нам нужно показать, что

$$\sum_{n=1}^{k} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{k} a_n; \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.4.1}$$

Обозначим

$$b_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = \frac{n(n+1)^n}{n^n} = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n = \overline{1, k}.$$

Возрастающая последовательность чисел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$, имеет предел, равный e, поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \qquad b_n \leq n\, e.$$

Учитывая теорему 1.3.1 и соотношение $b_1 b_2 \dots b_n = (n+1)^n$, мы имеем:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{n+1}\sqrt[n]{(a_1 b_1)(a_2 b_2)\dots(a_n b_n)} \le$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Далее

$$\sum_{n=1}^{k} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le \sum_{n=1}^{k}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(a_i b_i \sum_{n=i}^{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i b_i}{i} \le e\sum_{i=1}^{k} a_i,$$

так как $b_i \le ie$.

Что и требовалось доказать.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *Константа e в неравенстве Карлемана является наилучшей.*

Для доказательства данного утверждения достаточно взять последовательность $a_n = \frac{1}{n}$.

Задачи для самостоятельного решения [2].

(Решения и пояснения можно посмотреть в приложении 3.)

Доказать, что ряд сходится:

2.4.1.

$$\sum_{n} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^k}}, \quad \text{где} \quad k > 1.$$

2.4.2.

$$\sum_{n} \frac{1}{\sqrt[n]{2!\,3!\dots n!}}.$$

2.4.3.

$$\sum_{n} \frac{1}{\sqrt[n]{e^{(1+\sqrt[3]{2}+\dots+\sqrt[3]{n})}}}.$$

2.4.4.
$$\sum_n \frac{(n!)^{2/n}}{e^{(1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n})/n}}.$$
2.4.5.
$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)!\,n!}}.$$
2.4.6.
$$\sum_n \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{2^{(1+n)/2}}.$$
2.4.7.
$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{((2n-1)!!)^2}}.$$

3. Отношения мажорирования. Сравнения симметричных средних

3.1. Определение отношения мажорирования. Формулировка теоремы Мюрхеда

Определение 3.1.1. *Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ - набор положительных чисел; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - набор неотрицательных чисел; симметричным средним последовательности (a) называют число:*
$$[\alpha](a) \equiv [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n](a) = \frac{1}{n!}\sum! a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}.$$
Знак факториала после $\sum$ означает, что сумма берется по всем перестановкам из n чисел.

Пример 3.1.1. *Пусть $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ - любые положительные числа, тогда*
$$[1, 0, \dots, 0](a) = \frac{1}{n!}\sum! a = \frac{(n-1)!}{n!}(a_1 + \dots + a_n) = A(a) = \mu_1(\left\{\frac{1}{n}\right\}, a).$$

Пример 3.1.2. *Если* $\alpha = \left[\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right]$, *то*

$$\left[\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right](a) = \frac{n!}{n!} a_1^{1/n} a_2^{1/n} \ldots a_n^{1/n} = G(a).$$

Определение 3.1.2. *Пусть* (α') *и* (α) *- наборы положительных чисел:* $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *Будем говорить, что один набор мажорирует другой (обозначение* $(\alpha') \prec (\alpha)$*), если существует перестановка индексов такая, что выполняются следующие условия: 1)* $\alpha_1' + \cdots + \alpha_n' = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$;

2) $\alpha_1' \geq \alpha_2' \geq \ldots \geq \alpha_n'$ *и* $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$;

3) $\forall r = \overline{1, n}$, $\alpha_1' + \cdots + \alpha_r' \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$.

Пример 3.1.3.

$$\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0\right) \prec$$

$$\prec \ldots \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Проверим выполнение трех условий: первое условие выполняется, так как сумма всех наборов равна единице. Также очевидно выполнение остальных условий из определения 3.1.2.

В 1903 году шотландский математик Р.Ф. Мюрхед (1860 - 1941) доказал теорему, которая стала основой теории мажоризации.

Теорема 3.1.1. *Пусть по каждому из наборов* (α) *и* (α') *построены симметричные средние:* $[\alpha'](a)$ *и* $[\alpha](a)$, $(a) > 0$. *Для того чтобы эти средние были сравнимы между собой, необходимо и достаточно, чтобы между* (α) *и* (α') *существовало отношение мажорирования. Причем, если* $(\alpha') \prec (\alpha)$, *то* $[\alpha'](a) < [\alpha](a)$.

Равенство возможно тогда и только тогда, когда $(\alpha') = (\alpha)$ *или все* (a) *равны между собой.*

Доказательство [4]. Необходимость. Нам дано $[\alpha'] \leq [\alpha]$ для любых положительных a. Так как от перестановки α ничего не зависит, будем считать, что $\alpha_1' \geq \ldots \geq \alpha_n'$ и $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$.

Проверим условия из определения 3.1.2.

1) Возьмем $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = x > 0$. Построим для этого набора симметричное среднее

$$[\alpha'] = x^{\sum \alpha'} \le x^{\sum \alpha} = [\alpha], \forall x > 0.$$

Это неравенство получено в силу условия:

$$[\alpha'] = \frac{1}{n!}\sum ! a_1^{\alpha_1'} \ldots a_n^{\alpha_n'} = \frac{1}{n!} n! x^{\alpha_1' + \cdots + \alpha_n'} \le$$
$$\le x^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \forall x > 0.$$

Рассмотрим два случая:

а) пусть $x > 1$, тогда получим $\alpha_1' + \cdots + \alpha_n'; \le \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$;

б) если $0 < x < 1$, то $\alpha_1' + \cdots + \alpha_n' \ge \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

В итоге получаем $\sum \alpha' = \sum \alpha$. Второе условие выполняется автоматически. Осталось проверить, что сумма самых больших чисел первого набора меньше либо равна аналогичной сумме второго набора.

Зафиксируем $1 \le r < n$ и возьмем

$$a_1 = \ldots = a_r = x;$$

$$a_{r+1} = \ldots = a_n = 1.$$

Построим симметричные средние:

$$[\alpha'](a) = C\, x^{\alpha_1' + \cdots + \alpha_r'} + \cdots,$$
$$[\alpha](a) = C\, x^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r} + \cdots,$$

где $\alpha_1' + \cdots + \alpha_r'$ и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ будут самыми большими показателями степени, C - некоторая константа. При достаточно большом x из условия следует, что $C\, x^{\sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k'} \le C\, x^{\sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k}$, что, в свою очередь, влечет неравенство

$$\alpha_1' + \cdots + \alpha_r' \le \alpha_1 + \cdots + \alpha_r.$$

Таким образом, выполнены все три условия, и мы получаем, что

$$(\alpha') \prec (\alpha).$$

Достаточность будет доказана в следующем параграфе .

3.2. Определение трансформации или T - преобразования

Предположим, что в наборе (α) есть два неравных числа $\alpha_k > \alpha_l$. Определим числа

$$\rho = \frac{\alpha_k + \alpha_l}{2}, \ \tau = \frac{\alpha_k - \alpha_l}{2}.$$

Заметим, что выполняется неравенство $0 < \tau \leq \rho$, и $\tau = \rho$, если $\alpha_l = 0$. Из определений следует, что

$$\alpha_k = \rho + \tau,$$
$$\alpha_l = \rho - \tau.$$

Определение 3.2.1. *Пусть $\sigma \in [0, \tau)$. Трансформацией или T - преобразованием называется такое преобразование, которое набор чисел (α) переводит в набор чисел (α'), причем*

$$\alpha'_k = \rho + \sigma = \frac{\tau + \sigma}{2\tau}\alpha_k + \frac{\tau - \sigma}{2\tau}\alpha_l,$$
$$\alpha'_l = \rho - \sigma = \frac{\tau - \sigma}{2\tau}\alpha_k + \frac{\tau + \sigma}{2\tau}\alpha_l,$$
$$\alpha'_r = \alpha_r, \ r \neq k, \ r \neq l.$$

Таким образом, это преобразование меняет только две координаты. Для каждого σ будет свое T - преобразование.

Лемма 3.2.1. *Если $\alpha' = T\alpha$, то*

$$[\alpha'](a) \leq [\alpha](a)$$

для любого набора (a) неотрицательных чисел.

Равенство будет, если все числа из (a) равны между собой.

Доказательство. Так как перестановки не изменяют симметричное среднее, можем считать $k = 1, l = 2$. Рассмотрим случай $n = 2$. Покажем, что

$$[\alpha](a) - [\alpha'](a) \geq 0 \qquad \text{для } (a) > 0.$$

Для этого рассмотрим

$$[\alpha](a) - [\alpha'](a) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[a_1^{\rho+\tau}a_2^{\rho-\tau} + a_1^{\rho-\tau}a_2^{\rho+\tau}\right] - \frac{1}{2}\left[a_1^{\rho+\sigma}a_2^{\rho-\sigma} + a_1^{\rho-\sigma}a_2^{\rho+\sigma}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(a_1a_2)^{\rho-\tau}\left[a_1^{\rho+\tau-\rho+\tau} + a_2^{2\tau} - a_1^{\rho+\sigma-\rho+\tau}a_2^{\rho-\sigma-\rho+\tau} - a_1^{\rho-\sigma-\rho+\tau}a_2^{\rho+\sigma-\rho-\tau}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(a_1a_2)^{\rho-\tau}\left[a_1^{2\tau} + a_2^{2\tau} - a_1^{\sigma+\tau}a_2^{\tau-\sigma} - a_1^{\tau-\sigma}a_2^{\tau+\sigma}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(a_1a_2)^{\rho-\tau}\left[\left(a_1^{\tau-\sigma} - a_2^{\tau-\sigma}\right)\left(a_1^{\sigma+\tau} - a_2^{\sigma+\tau}\right)\right] \geq 0,$$

так как $\tau > \sigma$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.2. *Если $(\alpha') \prec (\alpha)$ и $(\alpha') \not\equiv (\alpha)$, то (α') можно получить из (α) последовательным применением конечного числа трансформаций.*

Доказательство. Будем сразу считать, что

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$$

и

$$\alpha_1' \geq \alpha_2' \geq \ldots \geq \alpha_n'.$$

Обозначим через $\Delta(\alpha, \alpha')$ - количество ненулевых разностей $\alpha_r - \alpha_r'$, то есть

$$\Delta(\alpha, \alpha') = \alpha_r - \alpha_r'.$$

По условию, $\Delta(\alpha, \alpha') \geq 1$.

Доказательство будем проводить с помощью математической индукции по Δ. Пусть сначала $\Delta(\alpha, \alpha') = 1$, тогда, по определению отношения мажоризации,

$$\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r - \alpha_r') = 0, \tag{3.2.1}$$

и равенство $\Delta = 1$ невозможно. Пусть теперь $\Delta = 2$.

Из условия (3.2.1) следует, что одна разность будет строго больше нуля, а вторая - меньше нуля. Таким образом, $\exists k : \alpha_k > \alpha_k^{'}$ и $\exists l : \alpha_l < \alpha_l^{'}$, по определению мажоризации должно быть $k < l$. Введем в рассмотрение следующие числа:

$$\alpha_k = \rho + \tau, \alpha_l = \rho - \tau,$$

как в лемме 3.2.1, положим

$$\sigma = \max\left(|\alpha_k^{'} - \rho|, |\alpha_l^{'} - \rho|\right),$$

$\tau = \frac{\alpha_k - \alpha_l}{2}$; $\tau > 0$, так как $\alpha_k > \alpha_k^{'} \geq \alpha_l^{'} > \alpha_l$ (эти неравенства верны, так как последовательности убывающие). Нужно проверить, что

$$\tau \leq \rho = \frac{\alpha_k + \alpha_l}{2} \Leftrightarrow \alpha_k - \alpha_l \leq \alpha_k + \alpha_l \Leftrightarrow \alpha_l \geq 0.$$

Это неравенство выполняется, так как α_i - неотрицательные числа, а равенство будет, если $\alpha_l = 0$. Можно проверить, что $\sigma < \tau$, то есть $0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$. Могут представиться только следующие два случая: либо $\alpha_l^{'} - \rho = -\sigma$, либо $\alpha_k^{'} - \rho = \sigma$. Для каждого из этих случаев будут выполняться требования определения трансформации, например:

$$\alpha_k^{'} = \rho - \sigma,$$
$$\alpha_l^{'} = \rho + \sigma,$$
$$\alpha_r^{'} = \alpha_r \; \forall r \neq k, r \neq l;$$

и $(\alpha^{'})$ получается из (α) с помощью трансформации. Таким образом, лемма доказана.

В предыдущем пункте была доказана необходимость теоремы Мюрхеда, теперь мы можем доказать достаточность.

Доказательство достаточности теоремы Мюрхеда [4].

Пусть $(\alpha^{'}) \prec (\alpha)$, нам нужно показать, что $[\alpha^{'}](a) \leq [\alpha](a)$. Так как $(\alpha^{'}) \prec (\alpha)$, то $(\alpha^{'})$ получается из (α) последовательным применением конечного числа трансформаций (см. лемму 3.2.2). По лемме 3.2.1 получаем, что $[\alpha^{'}](a) \leq [\alpha](a)$, $\forall (a) \geq 0$.

Доказательство закончено.

Посмотрим, как теорема Мюрхеда (см. предыдущий пункт) применяется на практике для доказательства различных числовых неравенств.

Пример 3.2.1. *Доказать неравенство* $\forall a, b, c$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2\, b\, c + b^2\, a\, c + c^2\, a\, b.$$

Решение. Очевидно, что правая часть данного неравенства является симметричным средним, построенным по набору чисел (4,0,0), а левая часть - по набору (2,1,1). Для доказательства построим следующую мажоризацию:

$$(4,0,0) \prec (3,1,0) \prec (2,2,0) \prec (2,1,1).$$

Она является верной, так как выполняются все условия определения 3.1.2. Построим по данным наборам симметричные средние, и тогда, по теореме Мюрхеда и свойствам неравенств, будет следовать истинность исходного неравенства.

Задачи для самостоятельного решения.

(Решения и пояснения смотреть в приложении 2.)

Для произвольных неотрицательных x, y, z доказать неравенства:

3.2.1 $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3x\, y\, z$.

3.2.2 $x^3\, y^3 + y^3\, z^3 + x^3\, z^3 \geq 3x^2\, y^2\, z^2$.

3.2.3 $x^{13} + y^{13} + z^{13} \geq 2x^5\, y^5\, z^3 + 2y^5\, z^5\, x^3 + 2z^5\, x^5\, y^3$.

3.2.4 $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2\, y^2\, z + x^2\, z^2\, y + y^2\, z^2\, x$.

3.3. Мажорирование и преобразование бистохастическими матрицами

Определение 3.3.1. *Матрица* $P = (p_{\mu\nu})$ *размера* $n \times n$ *называется бистохастической, если она удовлетворяет трем условиям:*

1) $p_{\mu\nu} \geq 0$,

2) $\sum\limits_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1$,

3) $\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1$.

Пример 3.3.1. $P = I_d$.

Пример 3.3.2. $P = T$, *где* T *- произвольная трансформация (см. предыдущий параграф).*

Запишем матрицу трансформации. Пусть $\alpha' = P\alpha$, тогда

$$\alpha'_\mu = p_{\mu 1}\alpha_1 + p_{\mu 2}\alpha_2 + \dots + p_{\mu n}\alpha_n,\ \mu = \overline{1,n};$$

с другой стороны, по определению трансформации,

$$\begin{aligned}
\alpha'_k &= \rho + \sigma = \frac{\tau+\sigma}{2\tau}\alpha_k + \frac{\tau-\sigma}{2\tau}\alpha_l,\\
\alpha'_l &= \rho - \sigma = \frac{\tau-\sigma}{2\tau}\alpha_k + \frac{\tau+\sigma}{2\tau}\alpha_l,\\
\alpha'_r &= \alpha_r,\ r \neq k,\ r \neq l.
\end{aligned}$$

Здесь $\rho = \frac{\alpha_k+\alpha_l}{2}$, $\tau = \frac{\alpha_k-\alpha_l}{2}$, $\sigma \in [0, \tau)$. Таким образом, матрица трансформации устроена так:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{\tau+\sigma}{2\tau} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\tau-\sigma}{2\tau} & 0\\
 & & & \cdots & & & \\
0 & \frac{\tau-\sigma}{2\tau} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\tau+\sigma}{2\tau} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

и она является бистохастической.

Теорема 3.3.1. *Пусть нам даны наборы неотрицательных чисел* (α) *и* (α'). *Тогда*

$$(\alpha') \prec (\alpha) \Leftrightarrow \exists P : \alpha' = P\alpha,$$

где P - бистохастическая матрица.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\alpha') \prec (\alpha)$, тогда, по лемме 3.2.2, получаем, что $\alpha' = T_1 T_2 \dots T_k\, \alpha$, где $T_1 T_2 \dots T_k$ - композиция трансформаций, T_i - бистохастическая матрица, а композиция бистохастических матриц тоже является бистохастической. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\alpha'_\mu = p_{\mu 1}\alpha_1 + p_{\mu 1}\alpha_2 + \dots + p_{\mu n}\alpha_n$, $\mu = \overline{1,n}$, тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{n} \alpha'_\mu = \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu 1}\right)\alpha_1 + &+ \dots + \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu n}\right)\alpha_n =\\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.
\end{aligned}$$

Последнее было получено в силу определения бистохастической матрицы. Зафиксируем $1 \le m \le n$, и пусть $k_\nu = p_{1\nu} + \dots + p_{m\nu}$, $\nu = \overline{1,n}$ - это сумма первых m элементов ν-го столбца. Тогда $0 \le k_\nu \le 1$ и

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (p_{1\nu} + p_{2\nu} + \dots + p_{m\nu}) = m.$$

В предположении, что (α) и $(\alpha^{'})$ не возрастают, получаем:

$$\alpha_1^{'} + \dots + \alpha_m^{'} =$$

$$= (p_{11}\,\alpha_1 + \dots + p_{1n}\,\alpha_n) + \dots + (p_{m1}\,\alpha_1 + \dots + p_{mn}\,\alpha_n) =$$
$$= (p_{11} + \dots + p_{m1})\alpha_1 + \dots + (p_{1n} + \dots + p_{mn})\alpha_n =$$
$$= k_1\,\alpha_1 + \dots + k_n\,\alpha_n.$$

Так как $\alpha_m \ge \alpha_{m+1} \ge \ldots \ge \alpha_n \ge 0$, получаем:

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n \le k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + (k_m + \dots + k_n)\alpha_m =$$

$$(\text{так как } \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = m)$$

$$= k_1\,\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + (m - k_1 - \dots - k_{m-1})\alpha_m =$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_m)k_1 + (\alpha_2 - \alpha_m)k_2 + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m)k_{m-1} + m\alpha_m \le$$
$$\le (\alpha_1 - \alpha_m) + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) + m\alpha_m = \alpha_1 + \dots + \alpha_m.$$

Последнее неравенство было получено в силу того, что $k_\nu \le 1$, то есть мы показали, что $\alpha_1^{'} + \dots + \alpha_m^{'} \le \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, то есть $(\alpha^{'}) \prec (\alpha)$.

Что и требовалось доказать.

3.4. Возрастающие функции сохраняют традиционный порядок в суммах

Пусть (a) и $(a^{'})$ - два набора неотрицательных чисел. Предположим, что числа в наборах (a) и $(a^{'})$ убывают. Кроме того задана некоторая функция $\varphi : R_+ \to R$.

Теорема 3.4.1. *Неравенство*

$$\varphi(a_1^{'}) + \cdots + \varphi(a_n^{'}) \le \varphi(a_1) + \cdots + \varphi(a_n)$$

имеет место для любой непрерывной возрастающей функции φ *тогда и только тогда, когда* $a_\nu^{'} \le a_\nu$, $\forall \nu = \overline{1, n}$.

Доказательство. Необходимость будем доказывать методом от противного. Допустим, что $\exists\, \mu \,:\, a_\mu^{'} > a_\mu$. Возьмем $b \in (a_\mu, a_\mu^{'})$ и определим функцию

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi^*(a^{'}) = \varphi^*(a_1^{'}) + \cdots + \varphi^*(a_\mu^{'}) + \varphi^*(a_{\mu+1}^{'}) + \cdots + \varphi^*(a_n^{'}) \ge$$
$$\ge \mu > \mu - 1 \ge \sum \varphi^*(a) = \varphi^*(a_1) + \cdots + \varphi^*(a_n),$$

а это противоречит условию. Функция φ^* не является непрерывной, но для неё легко строится непрерывная аппроксимация.

Достаточность получается при сложении n неравенств.

3.5. Выпуклые функции сохраняют мажоризацию в суммах

Определение 3.5.1. *Функция* $\varphi \,:\, R_+ \to R$ *называется выпуклой вниз, если для любых* $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, *и для любого* $\alpha \in [0, 1]$ *выполняется неравенство*

$$\varphi(\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2) \le \alpha\varphi(a_1) + (1-\alpha)\varphi(a_2).$$

Теорема 3.5.1. *Неравенство*

$$\varphi(a_1^{'}) + \cdots + \varphi(a_n^{'}) \le \varphi(a_1) + \cdots + \varphi(a_n)$$

имеет место для любой непрерывной выпуклой вниз функции

$$\varphi : R_+ \to R \;\Leftrightarrow\; (a^{'}) \prec (a).$$

Доказательство. Необходимость. Возьмем $\varphi(x) = x$, тогда

$$a_1' + \cdots + a_n' \leq a_1 + \cdots + a_n.$$

Возьмем $\varphi(x) = -x$, тогда

$$-a_1' - \cdots - a_n' \leq -a_1 - \cdots - a_n,$$

то есть

$$a_1' + \cdots + a_n' \geq a_1 + \cdots + a_n.$$

Таким образом, мы получаем, что $a_1' + \cdots + a_n' = a_1 + \cdots + a_n$.

После этого зафиксируем $1 \leq \nu \leq n$ и положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_\nu; \\ x - a_\nu, & x > a_\nu. \end{cases}$$

Имеем $\varphi(x) \geq 0$, и $\varphi(x) \geq x - a_\nu$, $x \geq 0$,

функция $\varphi(x)$ непрерывна и выпукла.

Так как, по определению,

$$\varphi(a_\nu') \geq a_\nu' - a_\nu,$$

и $\varphi \geq 0$, то

$$a_1' + \cdots + a_\nu' - \nu\, a_\nu \leq \varphi(a_1') + \cdots + \varphi(a_\nu') + \cdots + \varphi(a_n') \leq$$
$$\leq \varphi(a_1) + \cdots + \varphi(a_n) = a_1 + \cdots + a_\nu - \nu\, a_\nu,$$

то есть, мы получили, что

$$a_1' + \cdots + a_\nu' \leq a_1 + \cdots + a_\nu.$$

Таким образом, $(a') \prec (a)$.

Достаточность. Пусть $(a') \prec (a)$, тогда для некоторой бистохастической матрицы P, $a' = Pa$, то есть

$$a_\mu' = p_{\mu 1} a_1 + \cdots + p_{\mu n} a_n,$$

где $p_{\mu\nu} \geq 0$, $\sum\limits_{\mu} p_{\mu\nu} = 1$, $\sum\limits_{\nu} p_{\mu\nu} = 1$.

В силу выпуклости функции φ получим

$$\varphi(a'_\mu) \le \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}\varphi(a_\nu)).$$

Откуда следует

$$\sum_{\mu=1}^{n} \varphi(a'_\mu) \le \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}\varphi(a_\nu) = \sum_{\nu}\sum_{\mu} p_{\mu\nu}\varphi(a_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu}\varphi(a_\nu)\sum_{\mu} p_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{n}\varphi(a_\nu).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.5.1. *Неравенство* $\varphi(a'_1)+\dots+\varphi(a'_n) \ge \varphi(a_1)+\dots+\varphi(a_n)$ *верно для любой непрерывной выпуклой вверх функции*

$$\varphi : R_+ \to R \ \Leftrightarrow\ (a') \prec (a).$$

Следствие 3.5.2. *Пусть* $\varphi''(x) > 0\ \forall x > 0$; $P = (p_{\mu\nu}) : p_{\mu\nu} > 0$ *и* P *- бистохастическая матрица,* $a'_\mu = \sum_\nu p_{\mu\nu}a_\nu$, *тогда* $\sum\varphi(a') < \sum\varphi(a)$, *если среди* (a) *и* (a') *есть неравные числа.*

Приложение 1
Неравенства между средними

1.3.1. 4) Перенести правую часть неравенства в левую и получившуюся разность разложить на множители.

1.3.2. Конечно, эти неравенства несложно доказать непосредственно. Но стоит отметить, что они следуют из теоремы 1.5.1.

1.3.3. 1) Применить формулу бинома Ньютона.

2) Перенести правую часть неравенства в левую и получившуюся разность разложить на множители.

3) Метод математической индукции.

1.3.5. 4) Для доказательства данного неравенства достаточно применить теорему 1.3.1 к числам $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \overset{A>G}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{a\,b\,c}{b\,c\,a}}=3.$$

1.3.6.

2) Разделим обе части неравенства на 3 и применим теорему 1.3.1 к числам a^3, b^3, c^3.

3) К каждому из двух множителей левой части применим теорему 1.3.1 и перемножим получившиеся неравенства.

5) Подобрать замены переменных и свести к 1.3.6.1).

1.3.7.

1) Приводится к виду

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n.$$

2) Для $n = 3$ неравенство справедливо. Затем сравнить отношения вида x_{n+1}/x_n для левой и правой частей неравенства.

1.3.8.

1) Слагаемые в левой части неравенства монотонно убывают.

2) Бином Ньютона.

3) Метод математической индукции.

4) Выражение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

разложить по формуле бинома Ньютона.

1.3.9. 3)

Используя теорему 1.3.1 и формулу суммы арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)}{2}n,$$

получим

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{n(n-1)\ldots 2\cdot 1} \overset{A>G}{<} \frac{n+(n-1)+\cdots+1}{n}=\frac{(n+1)n}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

Левую часть неравенства можно доказать методом математической индукции. Предположим, что $n! \geq n^{n/2}$ доказано. Докажем, что

$$(n+1)! \geq (n+1)^{(n+1)/2}.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$(n+1) \cdot n^{n/2} \geq (n+1)^{(n+1)/2}.$$

Последнее неравенство эквивалентными преобразованиями приводится к виду

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n+1,$$

справедливость которого очевидна.

1.3.10, 11. Использовать соотношения между средними, полученные в основном тексте пособия.

1.3.12. Перемножить очевидные неравенства

$$1 + a_k \geq 2\sqrt{a_k}, \quad k = 1, 2, \dots n.$$

1.3.13, 14, 15. Использовать соотношения между средними, полученные в основном тексте пособия.

Приложение 2
Отношение мажорирования

3.2.1. Построим следующую мажоризацию: $(3,0,0) \prec (2,1,0) \prec (1,1,1)$ и, используя теорему Мюрхеда, получим исходное неравенство.

3.2.2. Для доказательства нужно использовать следующую мажоризацию: $(3,3,0) \prec (3,2,1) \prec (2,2,2)$.

3.2.3. Для доказательства нужно использовать следующую мажоризацию: $(13,0,0) \prec (8,5,0) \prec (5,5,3)$.

3.2.4. Для доказательства нужно использовать следующую мажоризацию: $(5,0,0) \prec (3,2,0) \prec (2,2,1)$.

Приложение 3
Неравенство Карлемана

В этом приложении приводятся пояснения к решениям задач из п. 2.4.

Для доказательства сходимости предложенных рядов достаточно применить лемму 2.1.1 к рядам с указанными ниже общими членами, откуда по признаку сравнения и будет следовать сходимость.

2.4.1

$$a_n = \frac{1}{n^k},$$

где $k > 1$.

2.4.2

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

2.4.3

$$a_n = e^{-\sqrt[3]{n}}.$$

2.4.4

$$a_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

2.4.5

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

2.4.6

$$a_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

2.4.7

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Приложение 4
Образец титульного листа дипломной работы

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра функционального анализа и теории функции

Дипломная работа

Студентки 5-го курса дневного отделения
Матвеевой Анастасии Викторовны

Мажорирование R^n в доказательствах аналитических неравенств

Допускается к защите
"____" ____________________2001г.
Зав. кафедрой
____
Оценка ____________________
Председатель ГАК
____
"____" ____________________2001г.

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, доц.
С.Я.Новиков

Самара, 2001 год

Библиографический список

[1] Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.

[2] Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1977.

[3] Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1984.

[4] Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983.

[5] Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.

[6] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ГИИЛ, 1948.

[7] Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.

[8] Maligranda L. A simple Proof of Hölder and Minkowski Inequality. American Math. Monthly, 1995, Vol. 102, N 3. P. 256 - 259.

[9] Maligranda L., Persson L. E. On Clarkson's Inequalities and Interpolation. Math. Nachr., 1992, Vol. 155. P. 187 - 197.

[10] Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

[11] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

Сергей Яковлевич Новиков

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Учебное пособие

Редактор Т.И.Кузнецова
Компьютерная верстка, макет А.В.Матвеева

Л.Р. № 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 14.04.2001. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,2., уч.- изд. л.4,5. Тираж 150 экз. Заказ № 614
Издательство «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1
УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.