

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт информатики, математики и электроники

ОСНОВЫ ТЕПЛООБМЕНА В КОСМИЧЕСКОМ ПРИБОРОСТРОЕНИИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств

САМАРА
Издательство Самарского университета
2018

УДК 629.78(075)
ББК 39.6я7
Ц172

Авторы: *С.В. Цаплин, С.В. Тюлевин, С.А. Болычев, А.Е. Романов*

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. В. Б и р ю к,
д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. З а г и д у л л и н

Цаплин, Сергей Васильевич

Ц172 **Основы теплообмена в космическом приборостроении:** учеб. пособие/
С.В. Цаплин [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. –
300 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1349-8

Учебное пособие соответствует федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования «Конструирование и технология электронных средств» в рамках курса лекций «Радиоэлектронная аппаратура для космических исследований».

В учебном пособии последовательно изложены основы теплопереноса (теплопроводность, конвекция, лучистый теплообмен), термоупругости, радиационного баланса, системы обеспечения теплового режима оптико-электронных телескопических систем КА и МКА. Методический материал позволяет определить тепловые потоки, воздействующие на конструктивные элементы космического аппарата, находящегося на теневой и солнечной сторонах в зависимости от углов крена, тангажа и рыскания в любой точке орбиты. Подробно рассматривается практическое применение основ теплообмена для решения внешней и внутренней задач теплообмена в пакете ANSYS.

Методическое совмещение знаний всех разделов учебного пособия позволит студенту, инженеру, аспиранту, специализирующимся в области космического приборостроения, решать практически любые задачи внутреннего и внешнего теплообмена бортовой аппаратуры КА.

Предназначено для студентов старших курсов технических и естественных факультетов вузов, магистрантов и аспирантов профильных научных специальностей (квалификация (степень) «бакалавр», «магистр»). Написано при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

УДК 629.78(075)
ББК 39.6я7

ISBN 978-5-7883-1349-8

© Самарский университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
Библиографический список к введению.....	18
1 МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛА.....	19
1.1 О механизмах теплопроводности твёрдых тел.....	20
Библиографический список к главе 1.....	26
2 ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ.....	27
2.1 Механизм теплопроводности.....	27
2.2 Уравнение теплопроводности, краевые условия.....	30
2.3 Стационарная теплопроводность. Граничные условия первого рода.....	33
2.4 Стационарная теплопроводность. Граничные условия третьего рода (пластина).....	36
2.5 Стационарная теплопроводность. Граничные условия второго и третьего рода.....	38
2.6 Стационарная теплопроводность. Граничные условия третьего рода (цилиндрическая стенка).....	39
2.7 Теплопроводность шаровой стенки.....	42
2.8 Нестационарный перенос тепла.....	43
2.9 Регулярный режим охлаждения.....	51
2.10 Темп охлаждения.....	53
2.11 Экспериментальное определение теплофизических свойств тела.....	56
2.12 Обратная задача. Определение коэффициента теплообмена.....	57
2.13 Обратная задача. Определение коэффициента теплопроводности.....	60
2.14 Нагрев и охлаждение тонкой пластины.....	63
Библиографический список к главе 2.....	65
3 КОНВЕКЦИЯ.....	67
3.1 Конвективный перенос теплоты.....	67
3.2 Теплоотдача при вынужденной конвекции в трубах.....	70
3.3 Свойства жидкости.....	74
3.4 Постановка краевых задач конвективного теплообмена.....	76
3.5 Гидродинамический и тепловой пограничные слои.....	80
3.6 Плоский нестационарный пограничный слой.....	97
3.7 Пограничный слой полубесконечной пластины.....	100
3.8 Турбулентный перенос теплоты.....	105

3.9 Гидродинамика и теплообмен при течении жидкости в трубах	110
3.10 Вязкостный и вязкостно-гравитационный режимы теплоотдачи	112
3.11 Теплообмен при течении жидкости в трубе	115
3.12 Случай вязкого течения	117
3.13 Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением	120
3.14 Метод определения коэффициента теплоотдачи при гидродинамически и термически стабилизированном течении жидкости в прямой круглой трубе	124
Библиографический список к главе 3	130
4 ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН	132
4.1 Виды лучистых потоков. Основные характеристики лучистых потоков.....	135
4.2 Законы теплового излучения	139
4.3 Закон Стефана–Больцмана.....	142
4.4 Закон Кирхгофа	143
4.5 Закон Ламберта.....	144
4.6 Излучение реальных тел	147
4.7 Распределение излучения реальных тел.....	148
4.8 Законы излучения для реальных тел	149
4.9 Угловые коэффициенты излучения.....	150
4.10 Свойства потоков излучения	157
4.11 Теплообмен между двумя произвольными поверхностями.....	158
4.12 Теплообмен в экранно-вакуумной теплоизоляции.....	161
4.13 Методы определения коэффициента излучения твёрдых тел..	165
Библиографический список к главе 4	171
5 ТЕРМОУПРУГОСТЬ	173
5.1 Термомеханические свойства оптических материалов	178
5.2 Феноменологическая модель термомеханических явлений.....	182
5.3 Термодинамика термоупругого деформирования	184
5.4 Нелинейные начально-краевые задачи термоупругости	188
5.5 Линеаризация задач термоупругости с граничными условиями сложного теплообмена	191
5.6 Пространственная модель диффузного рассеяния тепла	194
5.7 Применение метода конечных интегральных преобразований к решению одномерной задачи термоупругости	203
Библиографический список к главе 5	212

6 РАДИАЦИОННЫЙ БАЛАНС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА.....	217
6.1 Конструкция телескопической системы	218
6.2 Конструкции и материалы для изготовления зеркал.....	220
6.3 Лучистый теплообмен КА с поверхностью Земли и Солнцем	226
6.4 Формирование теплового потока внешними тепловыми источниками	230
6.5 Геометрооптические условия образования тепловых потоков.....	237
6.6 Критические условия воздействия тепловых потоков от Солнца и Земли на телескопическую систему	239
6.7 Плотность теплового потока от поверхности Земли в интегральном виде.....	240
6.8 Распределение плотности теплового потока на наружной поверхности корпуса КА	242
6.9 Распределение плотности теплового потока внутри телескопа при открытой крышке входного зрачка телескопа	248
Задачи для самостоятельного решения	254
Библиографический список к главе 6	255
7 ОСНОВЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ	257
7.1 Внешняя задача теплообмена в космосе	258
Задачи для самостоятельного решения	272
7.2 Внутренняя задача теплообмена в космосе	273
Задачи для самостоятельного решения	288
Библиографический список к главе 7.....	289
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	291
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	292
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	297

ВВЕДЕНИЕ

Одними из наиболее важных вопросов, возникающих при создании космических приборов нового поколения, имеющих тенденцию к усложнению конструкции (уменьшение размеров компонентов, повышение степени интеграции и быстродействия, совершенствование технологии и т.д.), являются взаимное согласование и взаимный учет решений, принимаемых на отдельных этапах для получения оптимального конечного результата, и прогнозирование работы в условиях эксплуатации при воздействии внешних механических и тепловых факторов.

Основными факторами, влияющими на надежность космических приборов, являются электрические и тепловые процессы, неразрывно связанные с функционированием электронных схем. Поэтому для обеспечения и прогнозирования надежности при создании космических приборов кроме параметров электрического режима необходимо знать особенности температурных полей изделия. Усложнение функций, уменьшение габаритов, увеличение степени интеграции, плотности компоновки, рост быстродействия элементной базы и самих устройств вызывают резкое повышение удельной теплонагруженности и соответственное усиление влияния тепловых воздействий. Таким образом, при проектировании космических приборов на первый план выходит проблема отвода тепла, а налагаемые ограничения являются одним из основных факторов, сдерживающих увеличение степени интеграции и быстродействия, что вызывает повышенный интерес к вопросам моделирования и оптимизации тепловых процессов в космическом приборостроении. Следовательно, с целью оптимизации конструкций космических приборов и сокращения времени их проектирования необходимо проводить численное моделирование тепловых режимов приборов на всех этапах разработки аппаратуры, начиная с разработки печатных плат и заканчивая модульными блоками и системами.

Одной из задач космического приборостроения является проектирование оптических телескопов, надёжно функционирующих в различных спектральных диапазонах: 450-800 нм – панхроматическом режиме; 450-510; 510-580; 655-690; 780-920 нм (синий, зелёный, красный, ближний ИК) – мультиспектральном режиме с разрешением на местности (надир, номинально) 0,41 м (панхроматический), 1,65 м (мультиспектральный) и шириной полосы захвата порядка

15,2 км. Масса спутника составляет 1955 кг. Срок активного существования 7–15 лет. Здесь приведены данные спутника GeoEye-1 [1]. Надёжность оптического телескопа для обеспечения решения задач дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) определяется различными внешними факторами, воздействующими на поверхность спутника, которые зависят от условий эксплуатации на орбите. Здесь будет рассмотрено влияние тепловых факторов, обусловленных внешним воздействием космического пространства и внутренним тепловыделением приборов бортовой аппаратуры на работоспособность оптического телескопа.

В пособии рассматриваются основы тепломассопереноса (теплопроводность, конвекция, лучистый теплообмен), термоупругости, радиационного баланса космического аппарата, системы обеспечения теплового режима оптико-электронных телескопических систем КА и МКА, которые необходимы для решения теплофизических задач, возникающих при проектировании оптико-электронных телескопических комплексов космических аппаратов для студентов, аспирантов, специализирующихся в области космического приборостроения.

Оптико-электронные телескопические комплексы (ОЭТК) предназначены для получения высокодетальных космических снимков земной поверхности. Современные ОЭТК с разрешением на местности 0,5 м и менее отличаются внушительными размерами (габариты могут достигать нескольких метров, масса – более тонны) и колоссальной стоимостью в десятки миллионов долларов [1,2].

Однако реалии сегодняшнего дня диктуют новые требования к ОЭТК: наряду с качеством изображения важное значение приобретает такой фактор, как время получения снимка заданной территории по запросу. Военные тактические операции, природные и техногенные катастрофы – это те ситуации, в которых актуальность полученной информации составляет от нескольких минут до нескольких часов. У традиционных ОЭТК время получения снимка по требованию составит сутки и более, кроме того, ввиду малого количества таких спутников на орбите обработать все чрезвычайные ситуации не представляется возможным [1,2].

Выходом из данной ситуации является группировка микроспутников (космических аппаратов с габаритами не более 1 метра и весом не более 50 кг) с ОЭТК. Численность такой группировки будет составлять до 25 микроспутников со сроком активного существования

60–90 суток на низкой околоземной орбите до 200 км. Группировка сможет обслуживать территории местного и регионального значения с разрешением на местности до 1,5 м, при этом время получения снимка по запросу составит не более 90 минут [2,3].

В США уже приступили к реализации этой идеи – программа SeeMe фирмы DARPA. Для недопущения технического отставания и сохранения конкурентоспособности в космической отрасли необходима реализация аналогичного проекта в России [1–3].

По данным СМИ в ближайшие десятилетия рынок систем космического дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) радикально изменится. По мнению экспертов NASA, к 2020 г. на орбиту будут ежегодно выводиться около 150 небольших космических аппаратов. По качеству съемки малые спутники не могут состязаться со спутниками, которые имеют оптические системы с зеркалами диаметром более 2 м, однако у них есть другое, гораздо более важное свойство – высокая частота съемки.

Концепция развития российской космической системы дистанционного зондирования Земли на период до 2025 г., принятая Роскосмосом, четко определяет, какие частота и разрешение съемки необходимы для тех или иных задач. Так, съемка с разрешением от 1 до 10 м и обновлением один раз в период от 1 до 10 часов в большей степени подходит для гидрометеорологии, контроля чрезвычайных ситуаций и в меньшей – для лесного хозяйства и экологического мониторинга. Съемка более высокого разрешения (менее 1 м), но с более редким обновлением (раз в 50 часов и реже), нужна для сельского и водного хозяйства, землеустройства, строительства, картографии и геологии.

В последние несколько лет в качестве платформы для систем ДЗЗ стали всерьез рассматривать наноспутники, которые ранее использовались только для выполнения специальных военных, научных или учебных задач. Примером является успех американской компании PlanetLabs, которая в феврале с борта МКС запустила два первых наноспутника Dove размером 30x10x10 см. Это лишь часть будущей группировки спутников, массой 4,5 кг, способных вести ДЗЗ с разрешением 3-5 м [3]. По заявлению представителя компании PlanetLabs Аванта Манкара (Avanti Mankar), в 2015 г. на орбите будет находиться группировка из более чем 130 наноспутников, которая сможет обновлять глобальную 10-терапиксельную карту не реже, чем один раз в сутки. Однако учитывая, что каждый наноспутник в

сутки совершает 16 оборотов вокруг Земли, существует возможность снимать каждую точку поверхности планеты не реже, чем один раз в 1,5-4 часа, что очень близко к реальному времени.

По мнению российских разработчиков малых космических аппаратов, основное конкурентное преимущество микроспутников – возможность создания низкобюджетных многофункциональных спутниковых группировок, оснащенных различными полезными нагрузками, что позволит получить высокодетальный мониторинг в оптическом диапазоне в режиме близком к реальному времени, комплексную, многоуровневую картину того, что происходит на конкретных территориях.

Растущая популярность небольших спутников объясняется их доступностью. Сегодня стоимость запуска беспилотной ракеты-носителя составляет около \$30 млн для конверсионных ракет и до \$90 млн для тяжелых ракет-носителей. Понятно, что оплатить запуск ракеты могут немногие компании или государства. Например, спутники D33 WorldView 1 (2500 кг, запуск в 2007 г.) и GeoEye (1955 кг, запуск в 2008 г.) стоили около \$500 млн каждый, и их постройка и запуск стали возможны лишь благодаря поддержке военного ведомства США.

Современные микроспутники, оснащенные камерами высокого разрешения, стоят намного дешевле. Так, один из самых совершенных на данный момент микроспутников D33 компании Skybox стоит менее \$50 млн, включая стоимость запуска. Он весит менее 120 кг, имеет габариты 60x60x95 см и может вести мультиспектральную и панхроматическую съемку с разрешением выше 1 м.

В то же время вместо одного микроспутника можно вывести в космос целое созвездие наноспутников массой до 10 кг. Кубсаты (спутники весом менее 1,3 кг, стандартный размер 10 x10x10 см) стоят еще дешевле: менее \$50 тыс. за сборку, а Phonesat (спутник, ядром которого является смартфон) обойдется в \$3,5 тыс [3]. Наноспутники и кубсаты могут запускаться в качестве попутной или основной нагрузки – сразу кластерами, в том числе и с помощью конверсионных ракет-носителей, созданных на основе боевых ракет, снятых с дежурства. В качестве примера можно привести российско-украинскую ракету «Днепр» или американскую Minotaur I, которые за раз выводят на орбиту по 20-30 небольших космических аппаратов. Таким образом, теоретически заказчик может за \$100-150 тыс. в

течение 6-12 месяцев получить собственный спутник, хоть и небольшой.

В настоящее время некоторые компании ведут разработку сверхкомпактных двигательных установок, которые продлят срок службы наноспутников и кубсатов до 5 лет и более, а также позволят им подниматься вплоть до геосинхронной орбиты.

В будущем стоимость запуска наноспутников снизится еще больше, а оперативность, наоборот, вырастет. Например, компания Generation Orbit Launch Services разрабатывает технологию запуска наноспутников с помощью бизнес-джета и двухступенчатой ракеты. Ракета сбрасывается с самолета на высоте 12 км, включает двигатель, разгоняет полезную нагрузку по суборбитальной траектории или выводит ее на низкую околоземную орбиту высотой до 640 км.

На сегодняшний день в России проектная проработка предлагаемой универсальной платформы может обеспечить базу для создания разнообразных типов МКА. Группировка МКА на низкой орбите имеет ряд коммерческих преимуществ:

- время жизни нано- и пикоспутника на низкой орбите может составить до трех месяцев, что намного меньше 25 лет, регламентированных международными соглашениями о космическом мусоре;
- низкая орбита позволяет обеспечить высокую скорость передачи данных в связи с уменьшением дистанции между спутником и наземной станцией; сбор информации от группировки МКА обеспечивает широкую полосу захвата;
- низкая орбита позволяет спутникам летать ниже радиационного пояса Земли, что для спутников стандарта CubeSat является большим преимуществом, поскольку в них возможно использование обычных коммерческих электронных компонентов, которые не сертифицированы для работы в условиях высокого радиационного воздействия;
- полет группировки МКА на орбите высотой менее 330 км (орбита МКС поддерживается в пределах 335-400 км) гарантирует предотвращение столкновения спутников с МКС и другими КА;
- ограниченный срок эксплуатации МКА на орбите и низкая стоимость запуска позволяют решать локальные (специальные, кратковременные, сезонные) задачи.

Благодаря малым космическим аппаратам впервые станет возможным оперативный визуальный мониторинг движения железнодо-

рожного, автомобильного транспорта, воздушных и морских судов. В случае катастрофы можно будет быстро найти место крушения и в считанные часы направить помощь пострадавшим. Кроме того, микро- и наноспутники могут снимать HD-видео, которое лучше воспринимается обычными пользователями.

При проектировании телескопов малых космических аппаратов (МКА): нано-, микро- и милиспутников с космического базирования большое значение имеет обоснованное построение тепломеханической схемы и системы обеспечения теплового режима (СОТР), которые совместно должны обеспечивать сохранение высокого качества изображения в реальных условиях эксплуатации. Поэтому важная роль отводится расчетам тепловых режимов и термоаббераций в предполагаемых условиях функционирования. К настоящему времени накоплен значительный опыт в тепловом проектировании телескопов, отраженный в большом количестве публикаций [1-2]. Вместе с тем назрела необходимость в разработке аналитических, численных методов расчета тепловых режимов и термоаббераций космических телескопов, направленных на решение наиболее насущных задач теплового проектирования, а именно: при выборе параметров эффективной тепловой схемы и СОТР, а также способов тепловой защиты телескопа на начальных стадиях проектирования, когда выбор базовой схемы определяет направление дальнейших работ. При этом с самого начала должны быть учтены все факторы, проявляющиеся во всех предполагаемых режимах функционирования данного телескопа.

1. Тепломеханическая схема (ТС) телескопа объединяет в себе оптическую систему с конкретными геометрическими параметрами и конструктивную основу, построенную с учетом требований к свойствам материалов, способов соединений элементов друг с другом, совместно обеспечивающих такое термоупругое наведенное искажение конструкции в предполагаемых условиях эксплуатации, при котором реализуются минимальные термоабберации телескопа [1,2].

2. СОТР телескопа – дополнительное устройство, поддерживающее заданные номинальные температуры конкретных элементов телескопа [1,2].

3. Тепловая защита телескопа – комплекс мер и реализующих их устройств, минимизирующих последствия влияния внешних тепловых воздействий на тепловой режим телескопа с целью сохранения его термостабильности [2].

Для конкретизации предмета и объекта исследований необходимо дать определение основным понятиям, связанным с принципами обеспечения термостабильности телескопов.

До конца XVIII в. теплоту считали материальной субстанцией, полагая, что температура тела определяется количеством содержащейся в нем «калорической жидкости», или «теплорода». Позднее Б. Румфорд, Дж. Джоуль [4,5] и другие физики того времени путем остроумных опытов и рассуждений опровергли «калорическую» теорию, доказав, что теплота невесома и ее можно получать в любых количествах просто за счет механического движения. Теплота сама по себе не является веществом – это всего лишь энергия движения его атомов или молекул [5,6].

Понятие теплоты на молекулярном уровне тесно связано с понятием вещества как вида материи [4,5]. Как вид материи вещество в отличие от физического поля обладает массой покоя. Вещество состоит из элементарных частиц – электронов, протонов, нейтронов.

В классической физике вещество и физическое поле абсолютно противопоставлялись друг другу долгое время как два вида материи, у первого из которых структура дискретна, а у второго – непрерывна. Квантовая физика, которая ввела идею двойственности корпускулярной волновой природы любого микрообъекта, привела к нивелированию этого противопоставления. Вещество в земных условиях встречается в четырёх состояниях: газ, жидкость, твёрдое тело, плазма [8,9].

На основании опытных данных различных исследователей при изучении тепловых процессов в природе было установлено [4–6,8], что:

- кинетическая часть внутренней энергии вещества есть хаотическое движение молекул и атомов, из которых состоит вещество, и представляет собой теплоту;
- мерой интенсивности движения молекул является температура $T = \text{const}$;
- тепло, полученное телом, передаётся от одного тела к другому благодаря соприкосновению тел посредством теплового контакта, причём горячее тело передаёт тепло холодному;
- тепло, полученное телом, передаётся от одной более нагретой части к более холодной;
- тепло, полученное твердым телом, передаётся в плотную окружающую среду (жидкость, газ);

- тепло, полученное телом, передаётся от нагретого тела в разреженной среде (разреженный газ);
- тепло может выделяться или поглощаться при соединении разных веществ (химическое взаимодействие);
- тепло выделяется при трении тел;
- процесс передачи тепла прекращается при наступлении равновесия между телами, т.е. когда температура устанавливается одинаковой для всех окружающих тел между собой.

Таким образом, тела, участвующие в процессе, обмениваются между собой энергией. Энергия одних тел увеличивается, других – уменьшается. Передача энергии от одного тела к другому происходит двумя способами:

Первый способ передачи энергии при непосредственном контакте соприкасающихся тел, имеющих различную температуру, путем обмена кинетической энергии между молекулами соприкасающихся тел, т.е. путём теплопроводности и одновременно путём излучения при помощи электромагнитных волн. Мерой передаваемого таким способом движения является теплота. Теплота есть форма передачи энергии путём неупорядоченного движения молекул. Энергия передается от более нагретого тела к менее нагретому телу. Энергия кинетического движения молекул называется тепловой, поэтому такой способ передачи энергии называется передача энергии в форме теплоты. Обычное обозначение теплоты Q , размерность Дж. В практических расчетах большое значение приобретает отношение теплоты к массе – удельная теплота обозначается q , размерность Дж/кг.

Второй способ передачи энергии связан с наличием силовых полей или внешнего давления. Для передачи энергии этим способом тело должно либо передвигаться в силовом поле, либо изменять свой объем под действием внешнего давления. При этом учувствуют различные формы перехода движения, общей чертой которых является перемещение масс, охватывающих очень большие числа молекул (т.е. макроскопических масс), под действием каких-либо сил. Этот способ называется передачей энергии в форме работы. Если в качестве примера тела рассматривать газ в сосуде с поршнем, то в случае приложения внешней силы к поршню происходит сжатие газа – работа совершается над телом, а в случае расширения газа в сосуде работу, перемещение поршня, совершает само тело (газ). Количество энергии, полученное телом, в форме работы называется совершенной над телом работой, а отданная – затраченная телом работа. Количе-

ство энергии в форме работы обычно обозначается L , размерность Дж. Удельная работа – отношение работы к массе тела обозначается l , размерность – Дж/кг.

Теплота и работа характеризуют качественно и количественно две различные формы передачи энергии движения от данной части материального мира к другой её части. Теплота и работа не могут содержаться в теле. Теплота и работа возникают только тогда, когда возникает процесс, и характеризуют только процесс. В статических условиях теплота и работа не существуют. Различие между теплотой и работой, принимаемое термодинамикой как исходное положение, и противопоставление теплоты работе имеет смысл только для тел, состоящих из множества молекул, т.к. для одной молекулы или для совокупности немногих молекул понятия теплоты и работы теряют смысл. Поэтому термодинамика рассматривает лишь тела, состоящие из большого числа молекул, т.е. так называемые макроскопические системы.

Из опытных данных следует, что количество теплоты или теплота – это энергия, переходящая от одного тела к другому в процессе [4-6].

Поясним понятие теплопередачи.

Теплопередача – физический процесс передачи тепловой энергии от более горячего тела к более холодному либо непосредственно (при контакте), либо через разделяющую тела или среды перегородку из какого-либо материала. Теплопередача возникает, когда физические тела одной системы имеют разную температуру, и происходит до момента наступления термодинамического равновесия. Самопроизвольная передача тепла всегда происходит от более горячего тела к более холодному, что является следствием второго закона термодинамики [5-8].

Теплота – это кинетическая часть внутренней энергии вещества, определяемая интенсивным хаотическим движением молекул и атомов, из которых это вещество состоит. Мерой интенсивности движения молекул является температура.

Количество теплоты является одной из основных термодинамических величин, определяющих баланс тепла при теплопередаче. Количество теплоты является функцией процесса, а не функцией состояния, т.е. количество теплоты, полученное системой, зависит от способа, которым она была приведена в текущее состояние. Теплота представляет собой одну из форм энергии, а поэтому должна изме-

ряться в единицах энергии. В системе СИ единицей измерения теплоты является джоуль.

Количество теплоты, которым обладает тело при данной температуре T , зависит от его массы, удельной теплоёмкости вещества. Например, при одной и той же температуре в большой чашке с водой (маслом) заключается больше теплоты, чем в маленькой, а в ведре (масле) с холодной водой (маслом) его может быть больше, чем в чашке с горячей водой (маслом) (хотя температура воды (масла) в ведре и ниже). Известно, что теплоёмкость единичной массы вещества разная для различных веществ. В этом примере теплоёмкость чистой воды $4,182 \text{ кДж}/(\text{кг } ^\circ\text{C})$, а минерального масла $1,67 \dots 2,01 \text{ кДж}/(\text{кг } ^\circ\text{C})$. Из этого примера следует, что количество теплоты Q есть

$$Q \propto mcT,$$

где c – удельная теплоёмкость вещества, из которого состоит тело [$\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$], m – масса вещества [кг], ΔT – изменение температуры [K], $T(\text{K}) = t_c + 273,15$ – абсолютная температура [K], t_c – температура по шкале Цельсия [$^\circ\text{C}$].

С другой стороны, в соответствии с первым началом термодинамики, если работа A не совершается системой, то изменение внутренней энергии ΔU системы равно количеству теплоты Q (изохорный процесс). Тогда количество теплоты можно определить следующим образом:

$$Q = \Delta U.$$

В этом случае средняя энергия беспорядочного поступательного движения молекул пропорциональна абсолютной температуре. Изменение внутренней энергии тела равно алгебраической сумме изменений энергии всех атомов или молекул, число которых пропорционально массе тела, поэтому изменение внутренней энергии и, следовательно, количество теплоты пропорционально массе и изменению температуры:

$$Q = c m \Delta T,$$

где $m = n \cdot M$, n – количество молей, M – масса одного моля.

Для малых изменений температуры от T до $T + dT$ системы подведённое малое количество теплоты δQ пропорционально dT [7,9]:

$$\delta Q = \alpha dT$$

или

$$\delta Q = m \cdot c(T) \cdot dT = n \cdot C(T) \cdot dT.$$

Здесь δQ – малое количество теплоты (не является дифференциалом), которое не является параметром состояния, $C(T)$ – молярная теплоёмкость.

Если тело однородно, а теплоемкость считают независимой от температуры, то количество теплоты (ΔQ), которое получает тело при увеличении его температуры на величину $\Delta T = T_2 - T_1$, можно вычислить как:

$$\Delta Q = c m \Delta T ,$$

где T_1 , T_2 – температура тела до нагрева и после, ΔT – изменение температуры [К]. При нахождении разности (ΔT) в расчетах можно подставлять температуры тела как в градусах Цельсия, так и в кельвинах.

Из формулы следует: при нагревании тела $T_2 > T_1$ и, следовательно, $Q > 0$; при охлаждении тела $T_2 < T_1$ и, следовательно, $Q < 0$.

Следовательно, количество теплоты, необходимое для нагревания тела или выделяющееся при его охлаждении, прямо пропорционально массе, теплоёмкости тела и изменению его температуры.

Теплота играет важную роль в жизни человека, в том числе и в функционировании его организма. Часть химической энергии, содержащейся в пище, превращается в теплоту, благодаря чему температура тела поддерживается вблизи $36,6^\circ\text{C}$. Тепловой баланс тела человека зависит также от температуры окружающей среды. В частности, живая природа на Земле существует благодаря тепловому балансу с окружающей средой [9,10]. Земная поверхность, поглощая солнечную радиацию и нагреваясь, сама становится источником излучения тепла в атмосферу и через нее в мировое пространство. Чем выше температура поверхности, тем выше излучение.

Внешняя поверхность космического аппарата, находящегося на околоземной орбите, постоянно подвергается тепловому воздействию солнечной радиации, что может привести к изменению теплового баланса бортовой аппаратуры КА. Для поддержания номинального режима работы бортовой аппаратуры применяется система обеспечения теплового режима (СОТР) [1-3]. При проектировании оптического телескопа для выполнения задач дистанционного зондирования Земли необходимо учитывать: отражённое солнечное излучение от верхних слоёв атмосферы Земли, тепловое излучение поверхности Земли в зависимости от времён года [1].

Особенно важно учитывать влияние теплового фактора солнечной радиации в случае пилотируемого КА. Для нормального суще-

ствования человека в замкнутом объеме обитаемого отсека КА газовая среда должна иметь температуру $18\div 26^{\circ}\text{C}$ при относительной влажности $30\div 70\%$, а поверхности, окружающие человека, температуру, отличающуюся от температуры газа не более чем на $3\div 4^{\circ}\text{C}$ (при большей разности температур человек ощущает дискомфорт) [11].

В объеме, где находится экипаж, скорость движения газа должна быть $0,1\div 0,3$ м/с с возможностью ее изменения непосредственно членами экипажа по субъективным ощущениям.

Наличие влаги в атмосфере обитаемого отсека требует, чтобы температура всех элементов, за исключением специально предназначенных для сбора влаги, были выше точки росы во избежание конденсации на них влаги. Поэтому наружные поверхности обитаемых отсеков тщательно изолируют для сведения к минимуму нерегулируемого теплообмена с космическим пространством, который может привести к нежелательному понижению температуры. При проектировании пилотируемых отсеков обеспечению жизнедеятельности экипажа, поддержанию теплового баланса, необходимой влажности, циркуляции воздуха уделяется большое внимание [1].

Изложенные основы теплообмена знакомят читателя с минимальным уровнем знаний для решения задач проектирования бортовой аппаратуры КА.

Коллектив авторов благодарит редакцию издательства Самарского университета за подготовку к изданию учебного пособия.

Библиографический список к введению

1. Цаплин С. В., Большечев С.А., Романов А.Е. Теплообмен в космосе: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. 92 с.
2. Цаплин С.В., Большечев С.А. Моделирование теплового режима оптико-электронного телескопического комплекса микро-спутника // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2018. №5. Т. 6. С. 430-437.
3. Цаплин С.В., Большечев С.А. Моделирование термоупругого состояния объектива наноспутника: сб. материалов // XXII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ 2018). 24-31 мая 2018, г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2018. С. 517-519.
4. Вавилов С.И. Развитие идеи вещества: собр. соч. М., 1956. Т. 3. С. 41–62. Структура и формы материи: сб. ст. М., 1967.
5. Ломоносов М.В. *Meditationes decaloriset frigoris causaauctore Michaelae Lomonosow* Размышления о причине теплоты и холода Михайла Ломоносова / Пер. Б.Н. Меншуткина // Полное собрание сочинений. М.; Л.: АН СССР, 1950-1983. Т. 2: Труды по физике и химии, 1747-1752 гг. М.; Л.: АН СССР, 1951.
6. Макс Лауэ. История физики. М.: Государственное изд-во технико-теоретической физики, 1956. 150 с.
7. Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Т. II. 544 с.
8. Мякишев Г.Я. Теплота. Струнино-Тихорецк-М.: Советская энциклопедия, 1976. (Большая советская энциклопедия: [в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров; 1969–1978. Т. 25).
9. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991. 376 с.
10. Монин А.С. Введение в теорию климата. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 247 с.
11. Воронин Г.И., Поливода А.И. Жизнеобеспечение экипажей космических кораблей. М.: Машиностроение, 1967. 212 с.

1 МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛА

Известно, что передача тепла происходит за счет трех механизмов: теплопроводности, конвекции и излучения [1,2].

Теплопроводность – перенос энергии, определяемый взаимодействием микрочастиц поверхностей соприкасающихся тел.

Конвекция – перенос энергии, обусловленный пространственным перемещением вещества от нагретого тела в жидкостях, газах.

Излучение – перенос энергии в виде электромагнитных волн.

В табл. 1 представлены коэффициенты теплопроводности некоторых веществ и материалов. Из таблицы видно, что одни металлы проводят тепло гораздо лучше других, но все они являются значительно лучшими проводниками тепла, чем воздух и пористые материалы.

Таблица 1.1. Теплопроводность веществ и материалов

Теплопроводность некоторых веществ и материалов	
Вещества и материалы	Теплопроводность, Вт/(м К)
Металлы	
Алюминий	205
Бронза	105
Висмут	8,4
Вольфрам	159
Железо	67
Золото	287
Кадмий	96
Магний	155
Медь	389
Мышьяк	188
Никель	58
Платина	70
Ртуть	7
Свинец	35
Цинк	113
Другие материалы	
Асбест	0,08
Воздух	0,024
Гагачий пух (неплотный)	0,008
Магнезия (MgO)	0,10
Резина (губчатая)	0,038
Слюда	0,42
Стекло	0,75
Углерод (графит)	15,6

1.1 О механизмах теплопроводности твёрдых тел

Теория тепловых волн в кристаллической решетке была разработана в 1912 году Дебаем [1–4]. В ее основе лежит представление о квантовании энергии. Согласно этим представлениям энергия решетки, в которой распространяется волна с частотой ν (энергия упругой волны), может принимать только дискретные значения:

$$E_\nu = \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \tilde{h}\nu,$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – квантовое число; $\tilde{h} = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $\varepsilon = \tilde{h}\nu$ – энергия перехода. Квант энергии тепловых колебаний решетки называется фононом.

В зависимости от степени возбуждения n решетки она может испускать или поглощать число фононов. Среднее число фононов с одинаковой энергией перехода при температуре T равно

$$N(\varepsilon) = \left(\exp \left[\frac{\varepsilon}{kT} \right] - 1 \right)^{-1}. \quad (1.1)$$

Из формулы (1.1) следует, что при температуре $T = 0$ в кристалле нет фононов, а с ростом температуры их число увеличивается. В кристалле может одновременно распространяться много слабо связанных между собой волн с различными частотами $n\nu$, которым соответствуют разного сорта фононы. Среднее число фононов других сортов можно определить следующим образом:

$$N(\varepsilon) = \left(\exp \left[\frac{n\tilde{h}\nu}{kT} \right] - 1 \right)^{-1}.$$

Введение понятия фононов позволяет рассматривать термически возбужденное твердое тело как сосуд, наполненный газом фононов, свободно перемещающихся внутри него со скоростью звука в различных направлениях. Преимущественное направление обусловлено структурой и связано с дефектами кристаллической решетки и градиентом температуры. Подобно классическому определению теплопроводности фононный газ будет скапливаться в той части тела, где температура выше и плотность будет большей относительно части тела, где температура ниже и плотность фононов соответственно будет низкой. При различной симметрии кристаллической решетки у различных материалов будет различная теплопроводность в различных плоскостях кристалла, причем различие будет проявляться су-

ущественнее, если градиент температуры совпадает с симметрией кристалла. Принцип переноса тепла в данном процессе определяется движением фононов от более нагретого участка тепла к менее нагретому.

Однако фононы отличаются от обычных частиц тем, что они не могут существовать в вакууме – для фононов нужна среда и этой средой является кристалл. Такие частицы называются квазичастицами. Скорость движения фононов равна скорости звука в данном кристалле (≈ 1 км/с). Быстрого распространения тепла в эксперименте не наблюдается, поскольку при движении фононы сталкиваются (частота собственных колебаний фононов порядка 10 ТГц) и меняют своё направление подобно движению молекул в газе, в результате чего средняя длина свободного пробега фонона мала. Кроме того, фононы рассеиваются на дефектах и примесях, содержащихся в кристалле. Такой механизм передачи энергии объясняет теплопроводность диэлектриков. Но в металлах теплопроводность выше, т.к. в механизме переноса тепла участвуют не только фононы, но и валентные электроны.

Известно, что электромагнитная энергия фотона эффективно поглощается заряженными частицами [6,7]. Рассмотрим механизм передачи энергии от электронов к решётке (ионам) твёрдого тела в представлении двух слабо взаимодействующих подсистем электронного газа и решётки твёрдого тела. Причём частота релаксации для электронного газа ν_{ee} и ионов (кристаллической решётки) ν_{ii} существенно больше частоты релаксации для обмена энергии между ними ν_{ei} . В этом случае электронный газ и решётку твёрдого тела можно характеризовать в отдельности электронной T_e и решетчатой T_i температурами. Следовательно, при поглощении энергии кванта электромагнитной волны (например, лазерного излучения) электронами проводимости приводит к увеличению кинетической энергии электронов:

$$\tilde{h\nu} = \frac{m_e w^2}{2},$$

где m_e – масса электрона, w – скорость электрона.

Это означает, что фотон электромагнитной волны полностью теряет энергию («гибнет»), а электрон приобретает эту энергию. За время $t > \nu_{ee}^{-1} \approx 10^{-14}$ с происходит обмен энергией между электронами в результате их столкновений. Если электрон находится в элек-

трическом поле, то он на длине свободного пробега набирает энергию от поля. Далее в модельном одноэлектронном приближении твёрдого тела валентные электроны подобны идеальному атомарному газу, быстро перемещаются по кристаллу и многократно способны передавать энергию узлам кристаллической решётки в результате столкновения [6–8]. Эффективность передачи энергии валентного электрона (иону) кристаллической решётке определяется соотношением масс:

$$\delta = \frac{2m_e}{M}, \quad (1.2)$$

где m_e , M – масса электрона и иона соответственно, а также числом валентных электронов, участвующих в процессе переноса тепловой энергии. Передача энергии от электрона к кристаллической решётке происходит многократно порциями, причём один электрон может участвовать многократно в процессе передачи энергии. Поскольку в процессе передачи энергии электрона решётке участвует порядка 10^{15} фотонов, то за время $t > \nu_{ee}^{-1}$ (частота релаксации электронного газа) порядка 10^{-14} с быстро осуществляется распространение тепла в решётке твёрдого тела.

В результате возникают фоновые колебания решётки твёрдого тела, при этом частота колебаний будет порядка $\nu_{ii} \approx 10^{13}\text{с}^{-1}$. Решётка в этом случае нагревается до температуры T_i . Таким образом, равновесие в электронной системе наступает при $t > \nu_{ei}^{-1} \approx 10^{-14}\text{с}$, а равновесие в решётке наступает при $t > \nu_{ii}^{-1} \approx 10^{-13}\text{с}$. В дальнейшем, по мере передачи энергии от электронов к решётке (ионам) твёрдого тела, решётка нагревается, стремясь к выравниванию температур электронного газа T_e и решётки T_i .

Полное равновесие наступает, начиная со времени $t > 10^2 \cdot \nu_{ei}^{-1} \approx 10^{-9}\text{с}$. С этого момента времени можно говорить, что твёрдое тело имеет температуру $T_e = T_i = T$.

Экспериментально установлено, что в чистых металлах электронная часть теплопроводности существенно больше, чем решетчатая. В сплавах из-за наличия дефектов и структурной неоднородности металла теплопроводность решетчатая, и она становится близкой к электронной теплопроводности.

Теплопроводность металлов обусловлена фоновыми колебаниями кристаллической решетки и движением большого числа свободных электронов. Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью

стью. Видеман и Франц установили в 1853 г. эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре. Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Поскольку теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков, то из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а электронами. Рассматривая электроны как одноатомный газ, для коэффициента теплопроводности можно заимствовать выражение кинетической теории газа [8]:

$$\lambda_T = \frac{1}{3} \rho \cdot v_{cp} \lambda_{св} c_V,$$

где $\rho = n \cdot m_e$ – плотность электронного газа, $\lambda_{св}$ – длина свободного пробега электрона, v_{cp} – средняя тепловая скорость электронов. Здесь n – концентрация электронов. Удельная теплоемкость одноатомного газа равна [8]

$$c_V = \frac{c_{VM}}{\mu} = \frac{iR}{2\mu} = \frac{3R}{2\mu} = \frac{3kN_A}{2\mu} = \frac{3k}{2m}. \quad (1.3)$$

Учитывая (1.3), запишем коэффициент теплопроводности в виде

$$\lambda_T = \frac{1}{2} n \cdot k \cdot v_{cp} \lambda_{св}.$$

Известно, что в соответствии с законом Джоуля–Ленца на основании теории Друде–Лоренца к концу свободного пробега электрон приобретает кинетическую энергию

$$\varepsilon_{cp} = \frac{mv_{cp}^2}{2} + \frac{mv_{cp}^2}{2},$$

где $u_{cp} = 0$ – средняя скорость теплового движения. В присутствии электрического поля с напряжённостью E электрон приобретает дополнительную энергию на длине свободного пробега от поля (ускоряется), которую запишем:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \lambda_{св}}{2mu^2} E^2.$$

Столкнувшись с ионом, электрон передаст часть энергии (1.2) кристаллической решётке. Электрон многократно участвует в процессе передачи энергии ионам кристаллической решётки. Эта энергия идёт на увеличение внутренней энергии решётки, т.е. к возник-

новению фоновых колебаний решётки и, как следствие, к нагреванию материала. Каждый электрон за секунду участвует $\nu = 1/\tau = u/\lambda_{св}$ столкновений. Следовательно, в единице объёма за единицу времени выделится тепло [7]:

$$w = n\nu\varepsilon_{cp} = n \frac{e^2 \lambda_{св}}{2m u^2} E^2.$$

Здесь

$$\sigma = n \frac{e^2 \lambda_{св}}{2m u^2}$$

проводимость. Запишем закон Джоуля–Ленца в компактной форме [7,8]:

$$w = \sigma \cdot E^2.$$

Определим отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{2nk\lambda_{св}u^2m}{2ne^2\lambda_{св}} = \frac{kmu^2}{e^2} = \frac{3k^2T}{e^2}, \quad (1.4)$$

где $3k^2/e^2 = 6,7 \cdot 10^{-6}$ (Дж·Ом/с·К). Отношение (1.4) выражает закон Видемана–Франца, который хорошо согласуется с экспериментальными данными. Лоренц уточнил расчёты в законе Видемана–Франца с помощью кинетической теории и учёл распределение электронов по скоростям. В результате Лоренц получил

$$\frac{\lambda_r}{\sigma} = 2 \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^2 T.$$

Это отношение уменьшило расхождение теории с экспериментом.

Тепловое и электрическое сопротивление многих веществ резко уменьшается при понижении температуры ниже температуры жидкого гелия ($\approx 1,8$ К). Это явление, называемое сверхпроводимостью, используется для повышения эффективности работы многих устройств – от приборов микроэлектроники до линий электропередачи и больших электромагнитов.

Примеси значительно снижают коэффициент теплопроводности, так как структурные неоднородности сильно рассеивают электроны. Например, у чистой меди $\lambda_r \approx 395$ Вт/(м·К), а у меди с примесями мышьяка $\lambda_r \approx 142$ Вт/(м·К). Для сплавов, в отличие от чистых металлов, коэффициент теплопроводности увеличивается с ростом температуры. В целом коэффициент теплопроводности убывает с умень-

пением плотности. Наибольшим коэффициентом теплопроводности обладают чистые металлы серебро и медь $\lambda_T \approx 400$ Вт/(м·К), затем идут золото $\lambda_T \approx 300$ Вт/(м·К) и алюминий $\lambda_T \approx 210$ Вт/(м·К). В среднем коэффициент теплопроводности металлов лежит в диапазоне $\lambda_T \approx 20 \div 400$ Вт/(м·К).

В неметаллических твердых телах коэффициент теплопроводности растет с увеличением температуры, а также с ростом плотности вещества. Здесь на величину коэффициента теплопроводности оказывают влияние структура, пористость и влажность материала. Многие строительные материалы являются пористыми, а применение закона Фурье к пористым материалам условно. Его следует понимать следующим образом: такой коэффициент теплопроводности имело бы сплошное тело таких же форм и размеров, а также температурах на границе при прохождении через него такого же количества тепла. Для порошкообразных и пористых тел коэффициент теплопроводности сильно зависит от их объемной плотности – растет с ее увеличением, так как теплопроводность заполняющего поры воздуха существенно меньше теплопроводности твердых компонентов пористого материала. С ростом влажности коэффициент теплопроводности пористых материалов увеличивается в первую очередь за счет конвективного переноса тепла из-за капиллярного движения воды. Для неметаллических твердых материалов коэффициент теплопроводности обычно ниже 10 Вт/(м·К), для строительных и теплоизоляционных материалов составляет $0,02 \div 3$ Вт/(м·К).

Перенос тепла теплопроводностью в газах при обычных давлениях и температурах определяется переносом кинетической энергии теплового движения в результате хаотического движения и столкновения отдельных молекул газа [8]. С изменением давления коэффициент теплопроводности меняется незначительно, а с ростом температуры он увеличивается. Исключением является водяной пар, теплопроводность которого падает с ростом температуры и для которого, к тому же, проявляется значительная зависимость от давления. Для смесей газов правило аддитивности не действует и коэффициент теплопроводности определяется опытным путем. Для газов значение коэффициента теплопроводности лежит в диапазоне $0,005 \div 0,5$ Вт/(м·К). Самые высокие значения коэффициента теплопроводности имеют водород и гелий.

Библиографический список к главе 1

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. 5-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 544 с.
2. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991. 376 с.
3. Лыков А.В. Теплообмен: справочник. М.: Энергия, 1972. 560 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
6. Курочкин В.И. Тепловое воздействие лазерного излучения на материалы. Куйбышев: Куйбышевский государственный университет, 1990. 63 с.
7. Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы: курс лекций. М.: Атомиздат, 1977. 384 с.
8. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972. 400 с.

2 ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Теплопроводность – способность материальных тел проводить энергию (теплоту) от более нагретых частей тела к менее нагретым частям тела, осуществляемому хаотически движущимися частицами тела (атомами, молекулами, электронами и т.п.). Количественно способность вещества проводить тепло характеризуется коэффициентом теплопроводности. Эта характеристика равна количеству теплоты, проходящему через однородный образец материала единичной длины и единичной площади за единицу времени при единичной разнице температур (1 К). В Международной системе единиц (СИ) единицей измерения коэффициента теплопроводности является Вт/(м·К). При достаточно высоких температурах в твердых телах теплопроводность можно наблюдать визуально. Так, при нагревании стального стержня с одного конца в пламени газовой горелки тепловая энергия передается по стержню и на некоторое расстояние от нагреваемого конца распространяется свечение (с удалением от места нагрева все менее интенсивное) [1].

2.1 Механизм теплопроводности

Под механизмом теплопередачи тепловой энергии от одной части тела к другой будем понимать количество теплоты, переданной от горячей части тела с температурой T_1 к его холодной части (T_2). Этот процесс теплопередачи запишем в виде

$$Q = cm \cdot (T_1 - T_2).$$

Рассмотрим основы теплопроводности в одномерном приближении для неограниченной среды, в которой распространяется поток тепла в направлении оси x . Через боковую поверхность цилиндра тепло не поступает [1].

Пусть свойства среды меняются в направлении x и времени t , поэтому плотность потока тепла q есть функция координаты и времени $q(x, t)$. В бесконечной среде мысленно выделим цилиндр с образующей осью x и рассмотрим бесконечно малый участок длиной dx (рис. 2.1) и площадью поперечного сечения S .

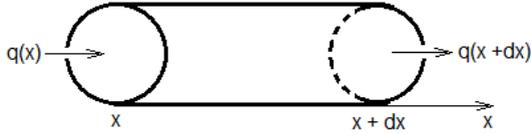


Рис. 2.1. Поток тепла в бесконечном цилиндре

Количество тепла, поступающее в направлении x через поперечное сечение цилиндра S за время dt , будет $q(x)Sdt$. Количество тепла, уходящее за время dt через противоположное основание цилиндра, будет $q(x+dx) \cdot Sdt$. Тогда полное количество тепла, проходящее за время dt , на участке цилиндра будет dx , равно

$$[q(x) - q(x + dx)] \cdot Sdt = -\frac{\partial q}{\partial x} Sdxdt.$$

С другой стороны, это тепло можно записать в виде $c_v dT dm$, здесь $dm = \rho S dx$ – масса цилиндра, c_v – удельная теплоёмкость [Дж/(кг·К)], dT – изменение температуры, ρ – плотность материала [кг/м³]. Приравняв оба выражения для тепла и проводя преобразования, получим

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим случай распространения тепла для бесконечной однородной пластины толщиной d . На одной стороне пластины поддерживается температура T_1 , а на другой – температура T_2 , причём $T_1 > T_2$. Из опыта следует, что поток тепла пропорционален разности температур $\Delta T = T_1 - T_2$ и обратно пропорционален толщине пластины d . Тогда для данного случая можно записать поток тепла в виде

$$q = \lambda_t \frac{\Delta T}{d},$$

где λ_t – коэффициент пропорциональности, который зависит от материала пластины и имеет физический смысл коэффициента теплопроводности.

Интенсивность теплопередачи за счет теплопроводности зависит от градиента температуры, т.е. отношения $\Delta T/\Delta x$ разности температур на концах цилиндрического стержня к расстоянию между ними. Она зависит также от площади поперечного сечения S стержня [м²] и коэффициента теплопроводности материала λ .

Коэффициент теплопроводности, характеризующий способность вещества проводить тепло, в общем случае зависит от структуры, плотности, влажности, давления и температуры.

Допустим, что пластина бесконечно тонкая, ось x направлена в сторону понижения температуры, тогда $d = dx$, $T_1 = T(x)$, $T_2 = T(x+dx)$,

$$\frac{T_2 - T_1}{d} = \frac{T(x+dx) - T(x)}{dx} = \frac{\partial T(x)}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Тогда формула (2.2) перейдет в запись вида

$$q = -\lambda_T \frac{\Delta T}{d}. \quad (2.3)$$

Формула (2.3) будет верной, если ось x направлена в сторону повышения температуры. Соотношение (2.3) называется законом теплопроводности Фурье; знак «минус» в нем указывает на то, что теплота передается в направлении, обратном градиенту температуры.

В случае постоянных ρ , c_V , λ_T уравнение (2.1) примет вид

$$\rho \cdot c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Например, из (2.4) следует, что для поддержания в помещении нужной температуры здания в зимних условиях при постоянных теплофизических величинах здания необходимо уменьшать теплопроводность стен, т.е. улучшать их теплоизоляцию, а также увеличить оптимально толщину стен.

Обозначим $a = \lambda_T/(\rho c_V)$ – коэффициент температуропроводности [$\text{м}^2/\text{с}^2$]. Тогда (2.4) запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Для неоднородного тела при $\lambda_T = \lambda_T(x)$ уравнение (2.4) записывается в виде

$$\rho \cdot c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Оно называется уравнением теплопроводности.

2.2 Уравнение теплопроводности, краевые условия

Решение задач распространения тепла в средах связано с решением уравнения параболического типа [2,3]. Для выделения единственности решения уравнения параболического уравнения в конечной области D , ограниченной поверхностью S , необходимо задать начальные и граничные условия с учётом:

1) геометрических условий, характеризующих форму и размеры тела, в котором протекает процесс;

2) физических условий, характеризующих физические свойства вещества/тела: теплопроводности, теплоемкости, плотности, их зависимости от температуры, а также изменения в пространстве и во времени мощности внутренних источников теплоты;

3) начального условия, устанавливающего распределение температуры внутри тела $T(x,y,z)$ в начальный момент времени;

4) граничных условий, характеризующих процесс теплообмена между поверхностью тела и окружающей его средой.

Начальные и граничные условия определяются физической постановкой задачи.

Начальное условие ставится следующим образом:

$$T(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = T(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор точки.

Граничные условия могут быть различными в зависимости от температурного режима на границах. Рассмотрим четыре основных режима граничных условий [3].

1. Граничное условие первого рода ставится в случае, когда на границе тела задана температура поверхности:

$$T|_{z=0} = T_n.$$

Далее $T = T(x, y, z, t)$, а $T_n = T_n(x, y, t)$.

2. Граничное условие второго рода ставится в случае, когда на границе тела задан тепловой поток:

$$-\lambda_r \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = f(x, y, t).$$

Если **граница теплоизолированная**, то граничное условие второго рода записывается в виде

$$-\lambda_r \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

3. Граничное условие третьего рода ставится в случае, если на границе тела существует интенсивный теплообмен со средой:

$$-\lambda_r \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha \cdot [T - T_{cp}] \Big|_{z=0},$$

где T_{cp} – температура среды, α – коэффициент теплоотдачи.

В случае лучистого теплообмена граничное условие третьего рода нелинейное:

$$-\lambda_r \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varepsilon [T^4 - T_{cp}^4] \Big|_{z=0},$$

где ε – излучательная способность материала, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана.

4. Граничные условия четвертого рода ставятся на границе раздела двухслойного материала. При этом в каждом слое записывается свое уравнение температуропроводности:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \Delta T_1,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \Delta T_2,$$

где T_1, T_2 – функции от (x, y, z, t) , а на границе раздела ставятся условия:

$$-\lambda_{r1} \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=l} = -\lambda_{r2} \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=l},$$

$$T_1 \Big|_{z=l} = T_2 \Big|_{z=l},$$

где l – граница раздела.

В случае идеальности контакта на границе раздела или **при наличии фазовых переходов** граничные условия усложняются [3]. В случае фазового перехода граница раздела $S(z, t) = vt$ не будет постоянной величиной, т.к. она будет перемещаться, например, со скоростью v . Тогда граничное условие примет вид

$$-\lambda_{r1} \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=S(t)} = -\lambda_{r2} \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=S(t)} \pm \rho L_\phi \frac{\partial S}{\partial t},$$

$$T_1 \Big|_{z=S(t)} = T_2 \Big|_{z=S(t)} = T_\phi,$$

где $\rho_l = \rho$, L_ϕ , T_ϕ – плотность, удельная теплота фазового перехода, температура фазового перехода соответственно. В общем случае

скорость движения границы фазового перехода не является постоянной. Знак \pm показывает, что во время фазового перехода возможно как выделение тепла, так и поглощение. В случае неидеальности контакта на границе граничные условия усложняются.

При воздействии лазерного излучения на полубесконечное тело на его границе ставится граничное условие второго рода в форме

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = A \cdot I(x, y, t),$$

где $I(x, y, t)$ – интенсивность лазерного излучения, падающего на поверхность, и прошедшая внутри мишени; $A = I - R$ – коэффициент поглощения лазерного излучения мишенью, R – коэффициент отражения. В большинстве задач прохождение излучения внутри мишени не рассматривается, что связано с особенностью металлической мишени. В случае стекла или полупрозрачного материала для лазерного излучения прохождение излучения учитывается посредством закона Бугера–Ламберта:

$$I(x, y, z, t) = I_0(x, y, t) \cdot \exp(-\alpha_\omega z),$$

где $I_0(x, y, t)$ – интенсивность лазерного излучения, падающего на поверхность мишени; α_ω – показатель поглощения, который определяется оптическими свойствами материала мишени для данной частоты лазерного излучения. Многократное отражение учитывается в виде [3]

$$I = I_0 \exp(-\alpha_\omega z) (1 - R)^2 \exp(-\alpha_\omega z) (1 + R^2 e^{-2\alpha_\omega z} + R^4 e^{-4\alpha_\omega z} + \dots).$$

Здесь $I = I(x, y, z, t)$, $I_0 = I_0(x, y, t)$.

В случае, когда источник излучения сосредоточен на поверхности материала, граничное условие можно записать в форме:

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = A \cdot I_G(x, y, t),$$

где интенсивность излучения $I_G(x, y, t)$ определяется константой $I_{G0}(x, y, t)$ либо гауссовым источником в форме:

$$I_G(x, y, t) = I_{G0}(x, y, t) \exp(-k_{\text{лаз}} r^2),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $k_{\text{лаз}}$ – коэффициент сосредоточенности излучения.

2.3 Стационарная теплопроводность. Граничные условия первого рода

При стационарном тепловом режиме температурное поле тела не зависит от времени. Рассмотрим изотропную плоскую пластину толщиной h в одномерном приближении с коэффициентом теплопроводности λ_t (рис. 2.2). На левой части пластины поддерживается температура T_1 , а на правой T_2 , причём $T_1 > T_2$. Уравнение теплопроводности (2.5) в этом случае примет вид [4,5]

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

В соответствии с постановкой задачи запишем граничные условия: на левой стороне пластины

$$T|_{x=0} = T_1,$$

на правой стороне пластины

$$T|_{x=h} = T_2.$$

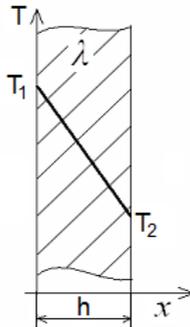


Рис. 2.2. Однородная изотропная пластина

Интегрируя (2.6) дважды с учётом граничных условий, запишем:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1. \quad (2.7)$$

$$T = C_1 x + C_2, \quad (2.8)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые могут быть определены из граничных условий. В частности, при $x = 0$ из (2.8) следует $T = C_2 = T_1$, а при $x = h$ из (2.8) следует $T = C_1 h + T_1 = T_2$. В результате получим общее решение (2.7) в виде

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{h} \cdot x.$$

В соответствии с законом Фурье

$$q = -\lambda_{\tau} \frac{\partial T}{\partial x}$$

тепловой поток в направлении оси Ox определим следующим образом:

$$T = -\lambda_{\tau} \cdot \frac{T_1 - T_2}{h}.$$

Он пропорционален коэффициенту теплопроводности и перепаду температур. Отношение λ/h называют тепловой проводимостью, а обратная величина называется термическим сопротивлением пластины. Ограничивая геометрические размеры пластины (ширину, длину) поверхностью и время τ передачи тепла через пластину, запишем тепловой поток через поверхность пластины:

$$Q = qS\tau = \frac{\lambda_{\tau}}{h} (T_1 - T_2) \cdot S\tau. \quad (2.9)$$

Применяя технику обезразмеривания, введём обозначения:

$\delta T = T - T_2$ – текущий температурный напор;

$\Delta T = T_1 - T_2$ – полный температурный напор.

Запишем в безразмерном виде решение (2.9):

$$\delta T = \Delta T - \frac{\Delta T}{h} \cdot x. \quad (2.10)$$

В теплотехнике часто используют запись (2.10) в виде

$$\frac{\delta T}{\Delta T} = 1 - \frac{x}{h}. \quad (2.11)$$

Вводя обозначения безразмерного температурного напора $\Theta = \delta T/\Delta T$ и безразмерной координаты $X = x/h$, запишем последнее выражение (2.11) в виде

$$\Theta = 1 - X. \quad (2.12)$$

В результате получили уравнение прямой, которое соответствует постановке задачи. Однако эта зависимость (2.12) нарушается, если коэффициент теплопроводности будет зависеть от температуры.

Рассмотрим случай многослойной пластины (рис. 2.3), состоящей из n однородных слоёв с известными толщинами h_1, h_2, \dots, h_n и значениями температур на границах слоя T_1, T_2, \dots, T_{n+1} [4].

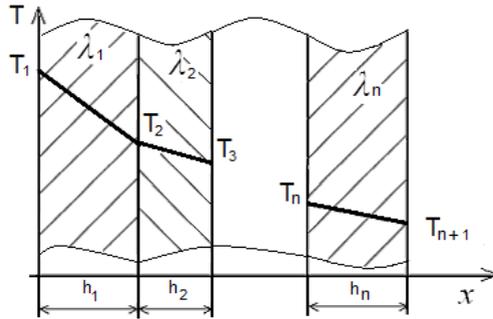


Рис. 2.3. Многослойная пластина

Учитывая, что тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной пластины с заданными коэффициентами теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, один и тот же ($\partial q / \partial x$), то в соответствии с (2.9), запишем температурные напоры в каждом слое соответственно:

$$T_1 - T_2 = q \frac{h_1}{\lambda_1},$$

$$T_2 - T_3 = q \frac{h_2}{\lambda_2},$$

.....

$$T_n - T_{n+1} = q \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

В результате сложения уравнений получим

$$T_n - T_{n+1} = q \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{h_n}{\lambda_n} \right) \quad (2.13)$$

или

$$T_n - T_{n+1} = q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_i}.$$

В каждом слое температурная зависимость линейна, но эта зависимость будет определяться отношениями h_i / λ_i , которые различны для каждого слоя пластины. В результате получим ломанную кривую для многослойной пластины, угол наклона кривой к оси Ox будет различным, и он будет определяться $\text{tg}(h_i / \lambda_i)$. Величина $\sum_{i=1}^n h_i / \lambda_i$ по

аналогии с одной пластиной называется термическим сопротивлением многослойной пластины.

Введём понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности для многослойной пластины. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной пластины толщиной $H = \sum_{i=1}^n h_i / \lambda_i$, а тепловое сопротивление соответствует сопротивлению многослойной пластины и удовлетворяет уравнению вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_{\text{экс}}} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_i}$$

и соответствует следующей записи:

$$\lambda_{\text{экс}} = \sum_{i=1}^n h_i / \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_i}.$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности хорошо описывает свойства многослойного материала.

2.4 Стационарная теплопроводность. Граничные условия третьего рода (пластина)

При стационарном тепловом режиме температурное поле тела не зависит от времени. В соответствии с [4,5] рассмотрим (рис. 2.4) изотропную плоскую пластину толщиной h в одномерном приближении с коэффициентом теплопроводности λ_t , помещённую в неподвижную среду с температурами окружающей среды T_{cp1} и T_{cp2} соответственно по отношению к обеим сторонам пластины. Между пластиной и окружающей средой осуществляется теплообмен с разными коэффициентами конвективного теплообмена α_1 и α_2 . Причём на левой части пластины поддерживается температура T_1 , а на правой T_2 ($T_1 > T_2$) (рис. 2.4). Уравнение теплопроводности в этом случае примет вид (2.6).

В соответствии с законом сохранения удельный тепловой поток для обеих сторон пластины будет постоянным и равным удельному тепловому потоку q в соответствии с законом Ньютона–Рихмана. При этом граничные условия для уравнения (2.6) примут вид [4]: на левой стороне пластины

$$-\lambda_t \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x=0} = q = \alpha \cdot [T_{cp1} - T_1]_{x=0},$$

на правой стороне пластины

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} = q = \alpha_2 \cdot [T_2 - T_{cp2}] \Big|_{x=h} .$$

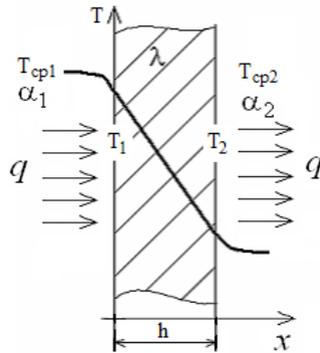


Рис. 2.4. Теплообмен нагретой пластины со средой (граничные условия третьего рода)

В результате решения задачи теплопроводности прошедший тепловой поток через пластину толщиной h будет иметь вид

$$q = \frac{\lambda_r}{h} \cdot (T_1 - T_2) .$$

А в случае многослойной пластины определим температурный напор с обеих сторон пластины и с учётом (2.13) запишем следующим образом:

$$T_{cp1} - T_{cp2} = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{h_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{h_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2} \right) . \quad (2.14)$$

Вводя обозначения термического сопротивления пластины $r_{nl} = \sum_{i=1}^n h_i / \lambda_i$, термическое сопротивление теплоотдачи от поверхности левой $r_{лев} = 1/\alpha_1$ и правой $r_{прав} = 1/\alpha_2$ пластин соответственно, (2.14) примет вид

$$T_{cp1} - T_{cp2} = q (r_{лев} + r_{nl} + r_{прав})$$

или

$$T_{cp1} - T_{cp2} = qR ,$$

где $R = r_{лев} + r_{np} + r_{прав}$ – полное термическое сопротивление теплоотдачи многослойной пластины.

Определим удельный тепловой поток, проходящий через многослойную пластину. Поскольку

$$q = \frac{T_{cp1} - T_{cp2}}{R} = \alpha \cdot (T_{cp1} - T_{cp2}),$$

где α – коэффициент теплоотдачи многослойной пластины, то полный тепловой поток Q , проходящий через поверхность площадью S пластины, можно будет записать

$$Q = qS = \alpha \cdot \Delta T \cdot S.$$

Запишем температуру в многослойной пластине:

$$T_{(n+1)} = T_{cp1} - q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\lambda_i} \right).$$

Тогда для однородной пластины температура левой и правой сторон пластины будут соответственно:

$$T_1 = T_{cp1} - \frac{q}{\alpha_1},$$

$$T_2 = T_{cp1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{h}{\lambda_r} \right) = T_{cp2} + \frac{q}{\alpha_2}.$$

2.5 Стационарная теплопроводность. Граничные условия второго и третьего рода

Рассмотрим изотропную плоскую пластину [4,5] толщиной h в одномерном приближении с коэффициентом теплопроводности λ , помещённую в неподвижную среду с заданными температурами T_{cp1} и T_{cp2} соответственно по отношению к обеим сторонам пластины. Пусть с одной стороны пластины подводится постоянный поток q , а с другой пластины с заданным коэффициентом конвективного теплообмена α_2 отводится тепловой поток в соответствии с законом Ньютона–Рихмана. По истечении длительного времени с одной стороны пластины устанавливается температура T_1 , а с другой T_2 ($T_1 > T_2$). Процесс теплообмена представлен на рис. 2.5. Тогда на левой стороне пластины запишем граничное условие второго рода:

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q,$$

на правой стороне пластины граничные условия третьего рода с коэффициентом теплоотдачи α_2 :

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x=h} = q = \alpha_2 (T_2 - T_{cp2}).$$

Таким образом, передача тепла в пластине свелась к стационарной задаче, для определения температуры T_1, T_2 поверхностей стенок пластины составим систему уравнений:

$$q = \frac{\lambda_r}{h} \cdot (T_1 - T_2),$$

$$q = \alpha_2 (T_1 - T_{cp2}).$$

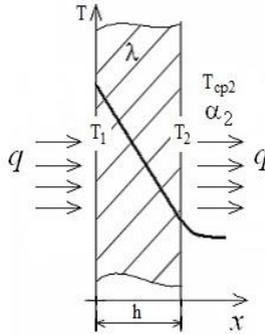


Рис. 2.5. Теплообмен нагретой пластины со средой (граничные условия второго и третьего рода)

Из нее определим:

$$T_1 = T_2 + q \cdot \frac{h}{\lambda_r} = T_{cp2} + q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{h}{\lambda_r} \right),$$

$$T_2 = T_{cp2} + q \frac{1}{\alpha_2}.$$

2.6 Стационарная теплопроводность. Граничные условия третьего рода (цилиндрическая стенка)

Цилиндрическая стенка. Рассмотрим бесконечный однородный цилиндр [4] длиной l ($l \gg d_n$) с температурой T_1, T_2 ($T_1 > T_2$) и диаметром d_n, d_e наружной и внутренней поверхностей стенки толщиной h соответственно. В этом случае действуют те же закономерности переноса тепла, что и в случае плоской стенки, но площадь стенки S для каждого слоя по толщине h будет различна $S = \pi l (d_e + 2x)$.

Найдём для элементарного слоя dx , исходя из уравнения Фурье, количество тепла

$$Q = -S \lambda_r \frac{\partial T}{\partial x},$$

интегрируя, получим перепад температур на поверхностях стенок цилиндра:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \int_0^h \frac{Q}{\lambda_r \cdot S} dx = \frac{Q}{2\pi l} \cdot \int_0^h \frac{dx}{d_e + 2x} = \frac{Q}{2\pi l \lambda_r} \cdot \ln \left(\frac{d_n}{d_e} \right).$$

Отсюда определим поток:

$$Q = 2\pi l \lambda_r \cdot \left[\ln \left(\frac{d_n}{d_e} \right) \right]^{-1} \cdot \Delta T = \frac{\Delta T}{R_{\text{ц}}}, \quad (2.15)$$

где $R_{\text{ц}}$ – термическое сопротивление стенки цилиндра.

Из уравнения (2.15) следует, что количество теплоты, проходящее через цилиндрическую стенку в единицу времени, полностью определяется заданными граничными условиями и не зависит от радиуса. Изменение температуры по толщине цилиндрической стенки:

$$T = T_1 - \Delta T \cdot \left[\ln \left(\frac{d_n}{d_e} \right) \cdot \ln \left(\frac{x}{d_e} \right) \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

Полученное выражение (2.16) представляет собой логарифмическую кривую. Распределение температуры в цилиндрической стенке является криволинейным, это можно объяснить следующим. В цилиндрической стенке плотность теплового потока через любую изотермическую поверхность будет величиной переменной, так как величина поверхности зависит от радиуса.

Удельная плотность теплового потока

$$q = \frac{Q}{l} = 2\pi \lambda_r \cdot \left[\ln \left(\frac{d_n}{d_e} \right) \right]^{-1} \cdot \Delta T. \quad (2.17)$$

Тепловой поток, отнесённый к единице длины цилиндра, имеет размерность [Вт/м] и называется линейной плотностью теплового потока. Из уравнения (2.17) следует, что при неизменном отношении диаметров линейная плотность теплового потока не зависит от поверхности цилиндрической стенки. Причём плотности теплового потока через внутреннюю и внешнюю стенки неодинаковы: у первой больше, чем у второй.

Рассмотрим теплопроводность многослойной цилиндрической стенки длиной l ($l \gg d_{n+1}$), состоящей из n однородных слоёв с идеальным контактом между слоями (рис. 2.6) [4,5].

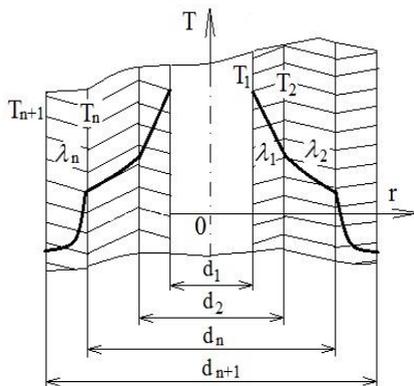


Рис. 2.6. Многослойная цилиндрическая стенка

Пусть заданы температуры на внутренней и внешней поверхностях стенок, толщина и соответствующие коэффициенты теплопроводности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ для каждого слоя:

$$\frac{\partial q}{\partial r} = 0.$$

Методика решения задачи по определению распределения температурного поля в многослойной цилиндрической стенке подобна задаче плоской многослойной пластины. При стационарном тепловом режиме линейная плотность теплового потока не меняется по толщине стенки.

Составим систему линейных уравнений плотностей теплового потока для каждого слоя. Определим температурные напоры, сложим уравнения, получим [4,5]

$$T_1 - T_{n+1} = \frac{q}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \dots + \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n} \right).$$

Из последнего определим:

$$q = \frac{\pi \cdot (T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}.$$

Для многослойной цилиндрической стенки

$$q_1 = \frac{Q}{l} = \frac{\pi l \cdot \Delta T}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}.$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$$

термическое сопротивление всех слоёв и является полным термическим сопротивлением многослойной цилиндрической стенки. Определим температуру:

$$T_{n+1} = T_n - \frac{q}{\pi} \cdot \frac{1}{2\lambda_n} \ln \frac{d_{n+1}}{d_n}.$$

Введём понятие об эквивалентном коэффициенте теплопроводности для цилиндрической стенки по аналогии с плоской стенкой. Для этого приравняем термическое сопротивление с эквивалентным коэффициентом теплопроводности к термическому сопротивлению всех слоёв многослойной цилиндрической стенки:

$$\frac{1}{2\lambda_{\text{эКВ}}} \ln \frac{d_{n+1}}{d_1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}.$$

Из этого равенства определим:

$$\lambda_{\text{эКВ}} = \ln \frac{d_{n+1}}{d_1} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right]^{-1}.$$

Следовательно, эквивалентный коэффициент теплопроводности для многослойной цилиндрической стенки зависит не только от физических свойств, но и от всей толщины стенки.

2.7 Теплопроводность шаровой стенки

Рассмотрим полый шар [4], состоящий из однородного материала с коэффициентом теплопроводности λ_r , с внутренним радиусом r_1 и внешним r_2 . Пусть на внутренней и внешней поверхности полого шара поддерживаются температуры T_1 и T_2 соответственно, причём $T_1 > T_2$.

Выделим внутри стенки шаровой слой радиусом r и толщиной dr . В соответствии с законом Фурье запишем тепловой поток, проходящий через слой:

$$Q = -\lambda_r S \frac{\partial T}{\partial r} = -4\pi\lambda_r r^2 \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Откуда следует

$$dT = -\frac{Q}{4\pi\lambda_r r^2} dr. \quad (2.18)$$

В результате интегрирования (2.18) получим

$$T = \frac{Q}{4\pi\lambda_r r} + const. \quad (2.19)$$

Учитывая условия задачи на границах поверхностей полого шара $T|_{r=r_1} = T_1$ и $T|_{r=r_2} = T_2$ и подставляя их в (2.19), найдём константу интегрирования. В результате получим

$$Q = 4\pi\lambda_r \cdot (T_1 - T_2) \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]^{-1} = 4\pi\lambda_r \cdot \Delta T \frac{d_1 d_2}{\delta}, \quad (2.20)$$

где $\delta = 0,5(d_1 - d_2)$ – толщина стенки; $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$.

Из (2.20) определим профиль температуры внутри однородного шарового слоя:

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d} \right].$$

Поскольку изотермическая поверхность пропорциональна $1/d$, то зависимость температуры будет гиперболическая. Температурный профиль внутри шарового слоя будет иметь гиперболический характер.

2.8 Нестационарный перенос тепла

Рассмотрим перенос тепла [3,4] при отсутствии внутренних источников тепла, когда температура меняется в пространстве координат и времени. При решении задачи такого типа обычно приводят к безразмерному виду. Введём избыточную температуру. Пусть T_0 – температура тела в начальный момент времени, T – текущая температура тела в произвольный момент времени, T_{cp} температура окружающей среды, под избыточной температурой будем понимать $\vartheta = T - T_{cp}$, если $T > T_{cp}$ или $T < T_{cp}$. При этом начальный температурный напор $\vartheta_0 = T - T_{cp}$ или $\vartheta = T_{cp} - T_0$ должен быть максимален, так чтобы текущая температура уменьшалась от максимального до нулевого значения при достижении теплового равновесия. Тогда безразмерная избыточная температурного

напора будет определена отношением избыточной температуры к максимальному значению температурного напора как

$$\theta = \vartheta / \vartheta_0.$$

В соответствии с этой формулой безразмерная избыточная температура уменьшается от единицы до нуля как в процессе нагрева, так и в процессе охлаждения тела. Для описания теплообмена тела с окружающей средой в безразмерных значениях используют критериальное число Био. Критериальное число Био равно отношению термического сопротивления теплопроводности в твёрдом теле к термическому сопротивлению теплоотдачи между его поверхностью и охлаждающей средой. Запишем это отношение:

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_{\tau}}.$$

Введём безразмерное время с помощью критерия Фурье:

$$Fo = \frac{a t}{l^2} = \frac{t}{l^2 / a}.$$

В качестве примера рассмотрим решение задачи по определению температурного поля в плоской пластине. Пусть задана пластина бесконечной длины и конечной толщиной $2h$. В начальный момент температура в пластине распределена равномерно и равна T_0 . Помещают нагретую пластину в среду с постоянной температурой равной T_{cp} .

На обеих поверхностях пластины будет теплообмен с окружающей средой, α – коэффициент теплоотдачи, известен. Запишем избыточную температуру $\vartheta_0 = T - T_{cp}$. Ограничимся рассмотрением температурного поля поперёк пластины вдоль в направлении оси Ox , одномерная постановка задачи примет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (2.21)$$

Зададим начально-краевые условия.

Начальное условие

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0. \quad (2.22)$$

Граничные условия:

$$-\lambda_{\tau} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.23)$$

$$-\lambda_{\tau} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \Big|_{x=h} = \alpha \cdot \mathcal{G} \Big|_{x=h}. \quad (2.24)$$

Решение задачи (2.21) – (2.24) будем искать в виде $\mathcal{G} = \phi(x)\varphi(t)$. Подставив в (2.21) и разделив переменные, получим

$$\phi''(x) + k^2 \phi(x) = 0, \quad (2.25)$$

$$\varphi'(t) + k^2 \varphi(t) = 0. \quad (2.26)$$

Интегрируя (2.25) и (2.26), получим

$$\varphi(t) = C_1 \exp(-ak^2 t),$$

$$\phi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx).$$

Запишем общее решение уравнения (2.21):

$$\mathcal{G}(x, t) = C_1 \exp(-ak^2 t) \cdot [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)]. \quad (2.27)$$

Константы интегрирования решения (2.21) определим из начального (2.22) и граничного условий (2.23) и (2.24). Подставляя (2.27) в (2.23), находим:

$$-\lambda_{\tau} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -C_1 \exp(-ak^2 t) \cdot [C_2 k \sin(kx) + C_3 k \cos(kx)] \Big|_{x=0} = 0.$$

Откуда следует $C_2 = 0$, обозначим $C_1 C_3 = A$, тогда (2.27) примет вид

$$\mathcal{G}(x, t) = A \exp(-ak^2 t) \cdot \cos(kx). \quad (2.28)$$

Далее, подставив в граничное условие (2.24) выражение (2.28), запишем:

$$\lambda_{\tau} A \exp(-ak^2 t) \cdot k \cdot \sin(kx) = \alpha \cdot A \exp(-ak^2 t) \cos(kx). \quad (2.29)$$

Из (2.29) следует

$$ctg(kh) = \frac{k \cdot h}{\alpha \cdot h} \cdot \lambda_{\tau} = \frac{k}{Bi} \quad \text{или} \quad ctg(\mu) = \frac{\mu}{Bi}, \quad (2.30)$$

где $\mu = k h$.

Получим систему уравнений

$$\mathcal{G}_n(x, t) = A_n \exp\left(-\mu_n^2 \frac{at}{h^2}\right) \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right).$$

Корни характеристического уравнения (2.30) определяются методами алгебры. Тогда общее решение примет вид бесконечного ряда:

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\mu_n^2 \frac{at}{h^2}\right) \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right). \quad (2.31)$$

Из начального условия (2.22) определим постоянную интегрирования A_n в решении (2.31). Подставив начальное условие в (2.22), получим

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right). \quad (2.32)$$

Применяя разложение чётной функции в ряд Фурье с заданными корнями μ_n и учитывая условие ортогональности функции

$$\int_{-h}^h \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \cdot \cos \left(\mu_m \frac{x}{h} \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m, \end{cases} \quad (2.33)$$

можно однозначно определить коэффициенты A_n . Для этого умножим левую и правую части уравнения (2.32) на функцию $\cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right)$

и проинтегрируем по толщине пластины h . В результате получим

$$\int_{-h}^h \mathcal{G}(x) \cdot \cos \left(\mu_m \frac{x}{h} \right) dx = A_n \cdot \int_{-h}^h \cos^2 \left(\mu_m \frac{x}{h} \right) dx, \quad (2.34)$$

поскольку остальные слагаемые согласно (2.33) будут равны нулю. Интегрируя правую часть (2.34), получим

$$\int_{-h}^h \mathcal{G}(x) \cos \left(\mu_m \frac{x}{h} \right) dx = A_n \delta \left[1 + \frac{1}{2\mu_n} \sin(2\mu_n) \right].$$

Отсюда

$$A_n = \frac{\mu_n}{\delta \left[\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n) \right]} \cdot \int_{-h}^h \mathcal{G}(x) \cos \left(\mu_m \frac{x}{h} \right) dx. \quad (2.35)$$

Таким образом, A_n является функцией только корня характеристического уравнения и начального распределения температуры. Запишем общее решение с учётом (2.35) для температурного поля однородной пластины [4]:

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\mu_n}{\delta \left[\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n) \right]} \cdot \int_{-h}^h \mathcal{G}(x) \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \cdot \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \cdot \exp \left(-\mu_n^2 \frac{at}{h^2} \right) dx \right\}. \quad (2.36)$$

Выполняя подстановку начального условия (2.22) в (2.36), запишем

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{G}_0 \mu_n \exp \left(-\mu_n^2 \frac{at}{h^2} \right)}{\delta \left[\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n) \right]} \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \int_{-h}^h \cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) dx.$$

Интегрируя последнее, запишем решение задачи в виде

$$\vartheta(x, t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta_0 \sin(\mu_n) \cdot \exp\left(-\mu_n^2 \frac{at}{h^2}\right)}{\delta [\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)]} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right). \quad (2.37)$$

Перейдём к безразмерной записи, для этого обозначим $x/h = \tilde{x}$ и, используя обозначение безразмерной температуры, запишем [2,4]

$$\theta(\tilde{x}, Fo) = \frac{T - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(\mu_n) \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)} \cos(\mu_n \tilde{x}). \quad (2.38)$$

Таким образом, задача свелась к решению характеристического уравнения для определения корней μ_n . Корни характеристического уравнения представляют собой ряд возрастающих чисел, поэтому чем больше μ , тем меньше вклад последующего члена ряда по сравнению с предыдущим в решение. Поскольку безразмерное время Fo входит экспоненциально в решение, то, очевидно, с увеличением Fo члены ряда (2.38) будут быстро убывать. Если число Fo достигает значения 0,3, то ряд быстро сходится и достаточно ограничиться первым членом ряда:

$$\theta(\tilde{x}, Fo) = \frac{2 \cdot \sin(\mu_1) \cdot \exp(-\mu_1^2 Fo)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cos(\mu_1)} \cdot \cos(\mu_1 \tilde{x}).$$

Введём обозначение

$$Bi(\mu_1) = \frac{2 \cdot \sin(\mu_1)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cos(\mu_1)}. \quad (2.39)$$

Эта функция является функцией числа Bi , которая может быть вычислена и табулирована. Функция $\cos(\mu_1 \tilde{x})$ зависит от \tilde{x} и числа Bi . Решение (2.39) имеет симметричную кривую с максимумом на оси пластины $\tilde{x} = 0$.

Исследуем случаи [4]:

1. Случай, когда $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$). При таком условии температура стремится к температуре окружающей среды. При $Bi \rightarrow \infty$ значение $\tilde{x} = 1/Bi = 0$, это означает, что точка пересечения касательных к температурным кривым находится на поверхности пластины. Такой режим реализуется при условии максимальной теплоотдачи пластины окружающей среде, т.е. $\alpha \rightarrow \infty$.

В этом случае коэффициент μ_n будет равен $\mu_n = (2n - 1) \pi/2$, тогда коэффициент ряда примет вид

$$B_n = \frac{2 \cdot \sin(\mu_n)}{\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)} = \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}. \quad (2.40)$$

Общее решение с учётом последней записи (2.40) запишем

$$\theta(\tilde{x}, Fo) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2 Fo\right] \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi \tilde{x}\right). \quad (2.41)$$

Оценим температуру на оси пластины ($\tilde{x} = 0$):

$$\theta(\tilde{x} = 0, Fo) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2 Fo\right].$$

Определим температуру на поверхности пластины. Из выражения (2.41) получим

$$\theta(\tilde{x} = 1, Fo) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp\left[\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2 Fo\right] \cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi \cdot 1\right) = 0,$$

в силу периодичности функции

$$\cos\left(\frac{2n-1}{2} \rho \cdot 1\right) = 0.$$

Оценим распределение температуры в пластине при значении $Fo > 0$. В частности, при значении $Fo > 0,3$ ряд (2.41) быстро сходится. Оставим первый член ряда (с ошибкой 1%). Тогда распределение температуры на оси пластины будет

$$\theta(\tilde{x} = 0, Fo) = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4} \pi^2 Fo\right). \quad (2.42)$$

Из записи (2.42) определим время, необходимое для прогрева пластины до заданной температуры. Для этого прологарифмируем (2.42) относительно Fo , получим

$$Fo = \frac{4}{\pi^2} \cdot \ln \left[\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta(\tilde{x} = 0)} \right].$$

Откуда время прогрева середины пластины будет

$$\tau = \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2 \frac{1}{a} \cdot \ln \left[\frac{4}{\pi} \frac{1}{\bar{\theta}(\tilde{x} = 0)} \right].$$

2. Случай, когда число Био стремится к нулю ($Bi < 0,1$). В этом случае все коэффициенты членов ряда $B_n \rightarrow 0$. При этом $\mu_n = \pi(n-1)$. Тогда константа будет равна [4]

$$B_n = \frac{2 \sin(\mu_1)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cdot \cos(\mu_1)} \approx \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_1} = 1.$$

Из выражения для числа Био видно, что такой режим реализуется при малых размерах ширины пластины и при больших значениях коэффициента теплопроводности λ и малых значениях μ_1 . Следовательно, функцию $\operatorname{tg}(\mu_1)$ и $\sin(\mu_1)$ можно приближённо заменить значением аргумента этой функции $\operatorname{ctg}(\mu_1) \approx \mu_1$, $\sin(\mu_1) \approx \mu_1$. Тогда характеристическое уравнение запишем в виде

$$\operatorname{ctg}(\mu) \approx \frac{1}{\mu} = \frac{\mu_1}{Bi}.$$

Корни характеристического уравнения можно найти с помощью численных методов [6–8]. В этом случае решение (2.38) примет вид

$$\theta(\tilde{x}, Fo) = \exp(-\mu_1^2 Fo) \cos(\mu_1 \tilde{x}) = \exp(-Bi \cdot Fo) \cos(\sqrt{Bi} \cdot \tilde{x}).$$

Найдём температуру на оси и на поверхности пластины:

$$\theta(\tilde{x} = 0, Fo) = \exp(-Bi \cdot Fo),$$

$$\theta(\tilde{x} = 1, Fo) = \exp(-Bi \cdot Fo) \cdot \cos(\sqrt{Bi}).$$

Определим отношение этих температур:

$$\frac{\theta(\tilde{x} = 0, Fo)}{\theta(\tilde{x} = 1, Fo)} = \frac{\exp(-Bi \cdot Fo)}{\exp(-Bi \cdot Fo) \cdot \cos(\sqrt{Bi})} \rightarrow 1.$$

Откуда видно, что при малых Bi температура на поверхности пластины мало чем отличается от температуры на её оси, т.е. температура внутри пластины равномерно распределена и нет существенного отличия температуры на границах для любого момента времени. Касательные к температурным кривым в точках пересечения с осью абсцисс в бесконечности при значении $Bi \rightarrow 0$ и $\tilde{x}_0 = 1/Bi \rightarrow \infty$.

3. Случай $0,1 \leq Bi < 100$. В этом случае μ_n есть функция числа Bi , т.е. есть зависимость от толщины пластины [4,5].

Определим количество теплоты, отданного пластиной в процессе охлаждения (нагрева). Обозначим количество теплоты $Q_{\text{отд}}$ [Дж], которое отдаёт или воспринимает пластина с обеих сторон за период полного охлаждения (нагрева) от времени $t = 0$ до $t = \infty$:

$$Q_{\text{отд}} = 2h\rho g_0(x) \cdot c \cdot (T_0 - T_{\text{ср}}).$$

Тогда количество теплоты за промежуток времени от $t = 0$ до t_1 изменится на

$$Q = Q_{om0} - Q_1 = 2h\rho g_0(x) \cdot c \cdot (T_0 - T_{cp}) \cdot \left(1 - \frac{\bar{T}_1 - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}} \right),$$

или

$$Q = Q_{om0} \cdot (1 - \theta),$$

где

$$\theta = \frac{\bar{T}_1 - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}}.$$

Таким образом, задача свелась к вычислению интеграла

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\tilde{x}} \cdot \int_0^{\tilde{x}} \theta \, d\tilde{x}. \quad (2.43)$$

Учитывая выражение (2.38) в виде

$$\theta(\tilde{x}, Fo) = \frac{T - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(\mu_n) \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)} \cdot \cos(\mu_n \tilde{x}), \quad (2.44)$$

подставим (2.44) в подынтегральное выражение (2.43) и, интегрируя в пределах от 0 до 1, получим

$$\bar{\theta}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(\mu_n) \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)}. \quad (2.45)$$

В случае $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$) уравнение (2.45) примет вид

$$\bar{\theta}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp \left[- \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2 \cdot \pi^2 Fo \right].$$

При значении числа Био $Bi \rightarrow 0$ ($Bi > 0,1$) выражение (2.45) примет вид

$$\bar{\theta}(Fo) = \exp(-Bi \cdot Fo).$$

При значении $Fo > 0,3$ можно ограничиться первым членом ряда (2.45), тогда

$$\bar{\theta}(Fo) = \frac{2 \cdot \sin(\mu_1) \cdot \exp(-\mu_1^2 Fo)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cdot \cos(\mu_1)}. \quad (2.46)$$

Обозначая

$$C(Bi) = \frac{2 \sin(\mu_1)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cdot \cos(\mu_1)},$$

запишем (2.46) в виде

$$\bar{\theta}(Fo) = C(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo).$$

В итоге определена средняя температура. Аналогичным образом можно найти решение нестационарного уравнения для сплошного цилиндра и шара [2,4,9].

Подробно методики решения задач теплопроводности с применением интегральных преобразований Фурье и Лапласа для бесконечных, полубесконечных тел приведены в методическом пособии [3], интерполяцию результатов решения можно выполнить с применением программ в [10].

2.9 Регулярный режим охлаждения

Возвращаясь к решению нестационарного уравнения теплопроводности (2.37), запишем общее решение

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\mu_n^2 \frac{at}{h^2}\right) \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right),$$

где

$$A_n = \frac{2 \cdot \vartheta_0 \sin(\mu_n) \cdot}{\delta [\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)]}$$

Коэффициент A_n определяется из начального условия. Обозначим

$$D(x) = \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right).$$

Временная зависимость температуры определяется величиной, пропорциональной коэффициенту $m_n = \mu_n^2 a / h^2$. Причём этот коэффициент будет изменяться в зависимости от μ_n в последовательности $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Избыточную температуру пластины запишем:

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot D_n \cdot \exp(-m_n t). \quad (2.47)$$

Для других геометрических форм будет справедлива запись (2.47), если при значении $t > \tau$ начальные условия не оказывают влияния на вид избыточной температуры. Поведение температурного поля тела во времени $t > \tau$ будет определяться условиями на границе тела и среды, физическими свойствами тела и его геометрической формой и размерами [2,4,11].

В этом случае температурное поле будет описываться первым членом ряда (2.47), т.е.

$$\vartheta(\tau) = A \cdot D \cdot \exp(-m\tau). \quad (2.48)$$

Логарифмируя последнее (2.48), получим

$$\ln \vartheta = \ln(A \cdot D) - m\tau$$

или

$$\ln \vartheta = \text{const}(x) - m\tau. \quad (2.49)$$

Отсюда следует, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону [4].

А при длительном охлаждении тела $\tau \rightarrow \infty$ все точки тела примут температуру среды, наступит стационарное состояние. Разделим процесс охлаждения тела на три стадии (рис. 2.7) [5].

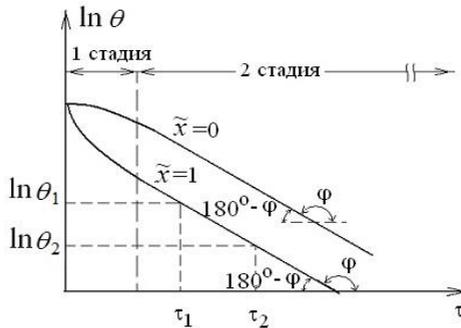


Рис. 2.7. Темп охлаждения

На первой стадии неупорядоченного режима влияние начального распределения температуры велико.

На второй стадии охлаждения регулярный режим описывается выражением (2.47) и имеет автомодельный характер по времени.

На третьей стадии охлаждения имеет место стационарный режим, когда температура во всех точках тела равна температуре окружающей среды.

2.10 Темп охлаждения

Дифференцируя (2.49), получим

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial \tau} = m_g = \text{const} \quad [1/\text{с}],$$

где m_g – темп охлаждения. Темп охлаждения определяет относительную скорость охлаждения тела и не зависит от координат, времени, а зависит только от физических свойств тела, процесса охлаждения на его поверхности, геометрической формы и размера тела.

Измерение темпа регулярного охлаждения проводят в следующей последовательности. Тело помещают в термостат, в котором достигается установленная температура нагрева и поддерживается длительное время для установления однородной температуры всего тела. По результатам измерений избыточной температуры от времени строится зависимость в полулогарифмических координатах, далее по графику определяется линейный участок зависимости логарифма избыточной температуры от времени, из наклона прямой определяется тангенс угла, который связан с темпом охлаждения в виде

$$\text{tg}(\pi - \varphi) = -\text{tg}(\varphi) = \frac{\lg(\mathcal{G}_1) - \lg(\mathcal{G}_2)}{\tau_2 - \tau_1} = m_g.$$

Этот метод применим для тел с низкой теплопроводностью ($\lambda_m < 0,5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$) и $Bi \geq 100$, при этом в термостате коэффициент теплопроводности не превышает $200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а размер тела 25 мм. Это ограничивает применение данного метода. В соответствии с [4,14] определим темп охлаждения из анализа уравнения теплового баланса. Изменение внутренней энергии (энтальпии) тела

$$dQ = -cV\rho \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_V}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.50)$$

где V – объём тела [м^3]; $\bar{\mathcal{G}}_V$ – средняя по объёму избыточная температура; τ – время [с].

С другой стороны, за тот же промежуток времени всё тепло должно отводиться с поверхности тела в окружающую среду за счёт теплоотдачи:

$$dQ = \bar{\alpha} \bar{\mathcal{G}}_s S d\tau, \quad (2.51)$$

где $\bar{\alpha}$ – среднее значение коэффициента теплоотдачи [$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$];

$\bar{\vartheta}_s = S^{-1} \int_S \vartheta_s dS$ – среднее интегральное значение избыточной температуры; S – площадь поверхности тела [м²].

Приравняв выражения (2.50) и (2.51), получим

$$-cV\rho \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} d\tau = \bar{\alpha} \bar{\vartheta}_s S d\tau.$$

Отсюда выразим производную

$$-\frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} = \bar{\alpha} \frac{1}{cV\rho} \cdot \bar{\vartheta}_s S$$

и множим последнее уравнение на функцию ϑ_V .

В результате получим

$$-\frac{1}{\bar{\vartheta}_s} \frac{\partial \bar{\vartheta}_V}{\partial \tau} = \bar{\alpha} \cdot S \frac{1}{cV\rho} \cdot \frac{\bar{\vartheta}_s}{\bar{\vartheta}_V}.$$

Обозначим теплоёмкость $C = \rho c V$ и отношение средней температуры по поверхности к средней по объёму температуре $\Theta = \bar{\vartheta}_s / \bar{\vartheta}_V$.

Тогда темп охлаждения запишем в виде

$$m_g = \Theta \frac{\bar{\alpha} \cdot S}{C}.$$

Первая теорема Кондратьева [4,15]. В системе тел, охлаждающейся (нагревающейся) в термостатированной конвективной среде, как в однородном теле, с течением времени неизбежно происходит регуляризация температурного поля, т.е. скорость изменения логарифма избыточной температуры $\partial(\ln \vartheta_{\text{пер}}) / \partial \tau$ от времени остаётся одинаковой для всех точек системы. Доказательство этой теоремы очевидно для однородного изотропного тела.

Вторая теорема Кондратьева [4,15]. Относительная скорость охлаждения (температура) однородного и изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи α пропорциональна коэффициенту теплоотдачи на поверхности тела и обратно пропорциональна его теплоёмкости. Степень неравномерности распределения температуры в теле определяется выражением $\Theta = \bar{\vartheta}_s / \bar{\vartheta}_V$ и зависит от условий охлаждения тела. Степень неравномерности температуры тела зависит от числа Био [14,15]. Рассмотрим случаи.

Случай 1. $Bi \rightarrow 0$ ($Bi < 0,1$). Температуры по объёму и по поверхности тела равны $\Theta = 1$.

Случай 2. $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$). В этом случае внутренняя температура поверхности равна температуре окружающей среды, температурный напор на поверхности равен нулю, следовательно, $\Theta = 0$.

Третья теорема Кондратьева [4,13,14]. При коэффициенте теплоотдачи, стремящемся к бесконечности, темп охлаждения становится прямо пропорционален коэффициенту теплопроводности тела:

$$a = \tilde{k} \cdot m_{\infty}. \quad (2.52)$$

Здесь коэффициент пропорциональности \tilde{k} зависит от геометрической формы и размера тела.

Рассмотрим темп охлаждения для безграничной пластины толщиной h . Темп охлаждения

$$m_g = a \mu_n^2 / h^2,$$

откуда

$$\mu = h \cdot \sqrt{m_g / a}. \quad (2.53)$$

Решение характеристического уравнения $\text{ctg}(\mu) = \mu/Bi$ имеет предельные случаи: если $Bi \rightarrow \infty$, то $\mu_n = (\pi/2) (2n-1)$, предельное значение которого равно $\pi/2$; если $Bi \rightarrow 0$, то $\mu_n = \pi (n-1)$, предельное значение которого равно нулю. Таким образом, при значении $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$) предельное значение при охлаждении пластины можно принять $\mu = \pi/2$, и из уравнения (2.53) следует:

$$m_{\infty} = \left(\frac{\pi}{2h} \right)^2 a. \quad (2.54)$$

Определим коэффициент \tilde{k} из (2.52) с учётом (2.54), получим

$$\tilde{k} = (\pi / 2h)^{-2}.$$

Для других геометрических форм запишем [4,5]:
для шара

$$\tilde{k} = (\pi / r_0)^{-2},$$

для параллелепипеда

$$\tilde{k} = \left[(\pi / l_1)^2 + (\pi / l_2)^2 + (\pi / l_3)^2 \right]^{-1},$$

для цилиндра конечной длины

$$\tilde{k} = \left[(\pi / l)^2 + (2.405 / r_0)^2 \right]^{-1}.$$

2.11 Экспериментальное определение теплофизических свойств тела

На основании теории регулярного режима разработаны различные методики по определению теплофизических свойств различных материалов. В основе этих методик используется связь изменения регулярной температуры с темпом охлаждения на основе экспериментальных измерений. Например, для определения температуропроводности тела используют альфа-калориметр, имеющий форму цилиндра или шара [16-18]. Температура окружающей среды поддерживается постоянно $T_{cp} = \text{const}$ в экспериментальном исследовании. С помощью альфа-калориметра создаются условия охлаждения, близкие к значению $\alpha \rightarrow \infty$, измеряется избыточная температура, строится зависимость в полулогарифмических координатах и определяют темп охлаждения [11-13]:

$$m_g = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

С помощью формулы (2.52) находится коэффициент температуропроводности.

Для определения коэффициента теплопроводности используют лямбда-калориметр в виде шара. В этом экспериментальном исследовании создаются условия охлаждения, при которых коэффициент теплоотдачи остаётся постоянной конечной величиной. Температура окружающей среды $T_{cp} = \text{const}$. Как и в предыдущем случае, определяется темп охлаждения по результатам измерений избыточной температуры.

Коэффициент теплопроводности вычисляем из характеристического уравнения, используя численные методы [7,8]. Для шара радиусом r_0 и массой m с учётом [16,17] запишем тангенс угла, который связан с темпом охлаждения в виде

$$\text{tg}(\mu) = -\frac{\mu}{Bi - 1},$$

где

$$\mu = r_0 \sqrt{m/a}, \quad Bi - 1 = -r_0 \sqrt{m/a} \cdot \text{ctg}\left(r_0 \sqrt{m/a}\right).$$

Характерным размером для этого метода является радиус шара r_0 . Тогда запишем [9]:

$$\lambda_{\tau} = \frac{\bar{\alpha} \cdot r_0}{1 - r_0 \sqrt{m/a} \cdot \text{ctg}(r_0 \sqrt{m/a})}. \quad (2.55)$$

Неизвестная величина $\bar{\alpha}$ (2.55) определяется в эталонном калориметре, изготовленном из материала с известным коэффициентом теплопроводности.

В работе на основе экспериментальных данных о темпе охлаждения зонда-датчика рассчитывался коэффициент теплоотдачи для различных периодов охлаждения [12,13]. Температура окружающей среды (закалочная среда) $T_{cp} = 40 \pm 0,04^{\circ}\text{C}$ в течение всего эксперимента. Возможность такого расчета обосновывается наличием пренебрежимо малых температурных перепадов между поверхностью и центром зонда-датчика. Расчет проводится по формуле [12]

$$\bar{\alpha} = m_g \frac{M \cdot c}{\Delta T \cdot S},$$

где M – масса зонда-датчика, c – теплоемкость материала зонда-датчика, ΔT – перепад температур поверхности зонда-датчика и закалочной среды, S – площадь поверхности зонда-датчика. Результаты расчета зависимости коэффициента теплоотдачи от температуры для масла МЗМ-26, 15% водного раствора полимерной среды «Акваквенч» и дистиллированной воды представлены на рис. 2.8.

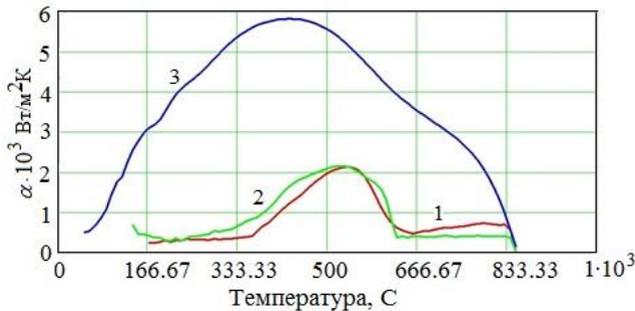


Рис. 2.8. Зависимости коэффициента теплоотдачи от температуры [12,13]:
1 – масло МЗМ-26; 2 – 15% водный раствор полимерной среды «Акваквенч»; 3 – дистиллированная вода.

2.12 Обратная задача. Определение коэффициента теплообмена

Коэффициент теплообмена можно определить из решения обратной задачи. Рассмотрим решение одномерной обратной задачи о теплообмене однородного цилиндра (пластины) бесконечной длины с

известным коэффициентом теплопроводности λ_r [3]. Нагретый однородный стержень до температуры $T_0 = \text{const}$ радиусом r помещается в жидкость, находящуюся в термостате при температуре $T_0 = \text{const}$. Между нагретым телом и жидкостью будет теплообмен. Нужно определить коэффициент теплообмена α .

Рассмотрим постановку задачи об остывании нагретой пластины:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < r, \quad t \geq 0, \quad (2.56)$$

начальное условие

$$T(x,t) = T_0 = \text{const}, \quad (2.57)$$

граничные условия:

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.58)$$

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=r} + \alpha \cdot [T(r,t) - T_{cp}] = 0. \quad (2.59)$$

Делая замену $\Theta(x,t) = T(x,t) - T_{cp}$, получим (2.56) – (2.59) в виде

$$\frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < r, \quad t \geq 0, \quad (2.60)$$

начальное условие

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 = \text{const}, \quad (2.61)$$

граничные условия:

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.62)$$

$$-\lambda_r \left. \frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=r} + \alpha \cdot \Theta(r,t) = 0. \quad (2.63)$$

Применим конечное интегральное преобразование [3]

$$W(t) = \int_0^r \rho_w \Theta(x,t) \cdot S(x) dx$$

к (2.60) – (2.63), учитывая, что для пластины $\rho_w = 1$. В результате получим задачу Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} + \mu^2 S(x,t) = 0, \quad 0 \leq x < r \quad (2.64)$$

с граничными условиями:

$$\left. \frac{dS(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (2.65)$$

$$\left. \frac{dS(x)}{dx} \right|_{x=r} + \alpha \cdot S(r) = 0. \quad (2.66)$$

Решение (2.64) ищем в виде

$$S(x) = \sin(\mu x + \varphi). \quad (2.67)$$

Дифференцируя (2.67), запишем:

$$\frac{dS(x)}{dx} = \mu \cdot \cos(\mu x + \varphi).$$

Из граничного условия (2.65) следует $\mu \cos(\varphi) = 0$, минимальный положительный корень которого $\varphi = \pi/2$. Следовательно,

$$S(x) = \cos(\mu x).$$

Дифференцируя последнее выражение в соответствии с граничным условием (2.66), получим

$$-\lambda_r \mu \sin(\mu r) + \alpha \cos(\mu r) = 0,$$

откуда определим коэффициент теплообмена

$$\alpha = \lambda_r \mu \cdot \operatorname{tg}(\mu r).$$

Применяя интегральное преобразование к (2.60) в терминах изображения, запишем его в виде [3]

$$\frac{dW(t)}{dt} + a\mu^2 W(t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.68)$$

При этом начальное условие (2.57) также преобразуем к виду

$$W(0) = \int_0^r T_0 \cos(\mu x) dx = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu r). \quad (2.69)$$

Решая (2.68) с учётом (2.69), получим

$$W(t) = W(0) \cdot \exp(-\mu^2 at) = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu r) \cdot \exp(-\mu^2 at).$$

Изображение температурного профиля находим в виде

$$W(t) = \int_0^r T_i \cos(\mu x) dx. \quad (2.70)$$

где $T_i = T(x_i, t)$ – массив экспериментальных точек. В частности, по четырём экспериментальным точкам интеграл (2.70) аппроксимируем полиномом Эйлера третьего порядка:

$$I = \int_0^r T_i \cos(\mu x) dx \approx \frac{h}{12} \cdot [G_2 - 7G(G_1 + G_N) + G_{N-1}] + h \cdot \sum_{i=1}^N G_i,$$

где $G_i = T_i \cos(\mu x_i)$. Положительное значение μ определяется как корень уравнения:

$$I = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu r) \cdot \exp(-\mu^2 a t).$$

Тогда искомое значение коэффициента теплообмена будет определено в виде

$$\alpha = \lambda_t \mu \cdot \operatorname{tg}(\mu r). \quad (2.71)$$

Таким образом, зная массив измеренных температур, коэффициент теплопроводности λ_t , можно определить по формуле (2.71) коэффициент теплообмена.

2.13 Обратная задача. Определение коэффициента теплопроводности

Рассмотрим лучистый теплообмен пластины конечной толщины, находящейся в термостате с температурой стенки $T_0 = \text{const}$. Пластина, имеющая начальную температуру $T_0 = \text{const}$, нагревается с одной стороны постоянным тепловым потоком q , причём лучистый теплообмен с этой поверхности будем считать незначительным и им можно пренебречь по сравнению с поступающим потоком на поверхность пластины. С другой стороны пластины тепло отводится только излучением. Излучением с боковых сторон пластины пренебрегаем из-за незначительной площади боковой поверхности. Излучательная способность тела и стенок термостата известны. Нужно найти коэффициент теплопроводности пластины [3].

Постановка задачи:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x < l, \quad t \geq 0, \quad (2.72)$$

начальное условие

$$T(x, t) = T_0 = \text{const}, \quad (2.73)$$

граничные условия:

$$-\lambda_{\tau} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2.74)$$

$$-\lambda_{\tau} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \varepsilon \sigma T^4(x,t) - \varepsilon_{cp} \sigma T_{cp}^4(x,t), \quad (2.75)$$

где индекс «ср» относится к окружающей среде (стенка камеры). В дальнейшем будем считать, что $\varepsilon_{cp} < \varepsilon$ и $T_{cp}(l,t)$ поддерживается при температуре 0°C. В дальнейшем функцией $\varepsilon_{cp} \sigma \cdot T_{cp}^4(l,t)$ можно будет пренебречь. Применим конечное интегральное преобразование [3]

$$W(t) = \int_0^l \rho_w T(x,t) \cdot S(x) dx,$$

учитывая весовой множитель $\rho_w = 1$ для пластины. Получим постановку задачи (2.72) – (2.75) в виде задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \mu^2 S(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

с граничными условиями:

$$-\lambda_{\tau} \frac{dS(x)}{dx} \Big|_{x=0} = q, \quad (2.76)$$

$$-\lambda_{\tau} \frac{dS(x)}{dx} \Big|_{x=l} + \varepsilon \sigma S^4(x) \Big|_{x=l} = 0. \quad (2.77)$$

Решение задачи Штурма-Лиувилля ищем в виде

$$S(x) = \exp(-\mu x + \varphi). \quad (2.78)$$

Найдем производную (2.76):

$$\frac{dS(x)}{dx} = -\mu \cdot \exp(\mu x + \varphi). \quad (2.79)$$

Из граничного условия (2.76) следует $\lambda_{\tau} \mu \exp(\varphi) = q$ и минимальный положительный корень $\varphi = \ln(q/\lambda_{\tau} \mu)$. Следовательно, (2.78) примет вид

$$S(x) = \frac{q}{\lambda_{\tau} \mu} \exp(-\mu x).$$

Из граничного условия (2.77) следует:

$$-\lambda_{\tau} \mu \frac{q}{\lambda_{\tau} \mu} \exp(-\mu l) + \varepsilon \sigma \left(\frac{q}{\lambda_{\tau} \mu} \right)^4 \exp(-4\mu l) = 0$$

или

$$\varepsilon\sigma \left(\frac{q}{\lambda_r \mu} \right)^4 \exp(-3\mu l) = q ,$$

откуда определим коэффициент теплопроводности

$$\lambda_r = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon\sigma}{\mu^4} \cdot q^3 \exp(-3\mu l)} .$$

Применяя интегральное преобразование, запишем задачу Штурма-Лиувилля в терминах изображения в виде:

$$\frac{dW(t)}{d\tau} + a\mu^2 \cdot W(t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.80)$$

При этом начальное условие также преобразуем к виду

$$W(0) = \int_0^l T_0 \frac{q}{\lambda_r \mu} \exp(-\mu x) dx = T_0 \frac{q}{\lambda_r \mu^2} [1 - \exp(-\mu l)] . \quad (2.81)$$

Запишем решение (2.80) с учётом (2.81) в виде

$$W(t) = W(0) \exp(-\mu^2 a t) = T_0 \frac{q}{\lambda_r \mu^2} [1 - \exp(-\mu l)] \cdot \exp(-\mu^2 a t) . \quad (2.82)$$

Для известных экспериментальных данных температуры T_i в различных точках i -й пластины запишем конечное интегральное преобразование температурного профиля в виде

$$W(t) = \frac{q}{\lambda_r \mu} \int_0^l T_i \exp(-\mu x) dx ,$$

где $T_i = T(x_i, t)$ – **массив экспериментальных точек**. В частности, в нашем случае, если в одной точке известна температура $T_{i=1} = T_1$, то

$$W(t) = \frac{q}{\lambda_r \mu} \int_0^l T_i \exp(-\mu x) dx = \frac{q}{\lambda_r \mu} T_1 \exp(-\mu l) . \quad (2.83)$$

Для определения положительного значения μ приравняем выражения (2.82) и (2.83), получим уравнение в виде

$$T_0 \frac{q}{\lambda_r \mu} [1 - \exp(-\mu l)] \exp(-\mu^2 a l) = \frac{q}{\lambda_r \mu^2} T_1 \exp(-\mu l) . \quad (2.84)$$

Решая трансцендентное уравнение (2.84) относительно неизвестной μ , получим

$$\mu^2 = \frac{1}{a \cdot t} \cdot \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right). \quad (2.85)$$

Тогда, подставляя (2.85) в выражение

$$\lambda_T = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon \sigma}{\mu^4} \cdot q^3 \exp(-3\mu l)},$$

получим искомое значение коэффициента теплопроводности в виде

$$\lambda_T = \left[\frac{a \cdot t}{\ln(T_0) - \ln(T_1)} \right]^{1/2} \cdot f(t),$$

где

$$f(t) = \sqrt[4]{\varepsilon \sigma q^3 \exp\left(-3 \cdot \left\{ [1 / (a \cdot t)] [\ln T_0 - \ln T_1] \right\}^{1/2} l\right)}.$$

Таким образом, по известному значению потока q , излучательной способности тела ε , температур излучаемой поверхности и стенок термостата можно будет определить коэффициент теплопроводности пластины. В общем виде для массива экспериментальных точек задача определения коэффициента теплопроводности решается численно.

В большинстве случаев часто приходится определять корни трансцендентных уравнений численно. В [6,7,8] подробно изложены методы определения корней трансцендентных уравнений.

2.14 Нагрев и охлаждение тонкой пластины

При нагревании или охлаждении различных материалов необходимо знать, за какое время материал пластины нагреется или остынет. Наиболее простым и достаточно распространённым является случай, когда удельное термическое сопротивление теплоотдачи $1/\alpha$ от рассматриваемой пластины к окружающей среде значительно больше удельного термического сопротивления теплопроводности внутри пластины от середины к поверхности δ/λ , т. е. когда

$$\alpha \ll \lambda / \delta, \quad (2.86)$$

где δ – половина толщины тела (пластины) или радиус (цилиндра и шара); для тел сложной формы δ – половина наибольшего линейного размера. При выполнении условия (2.86) тело называют термически тонким. В каждый момент времени температура внутри такого тела успевает выровняться за счёт интенсивного переноса теплоты тепло-

проводностью. Таким образом, значение температуры T зависит только от времени τ и не зависит от координат. Рассмотрим термически тонкое тело произвольной формы объёмом V , все точки которого охлаждаются за счёт теплоотдачи с одинаковой скоростью $dT/d\tau$. За время $d\tau$ тело отдаёт количество теплоты

$$\delta Q_\tau = -c\rho V \frac{dT}{d\tau} d\tau. \quad (2.87)$$

При этом за счёт теплообмена от поверхности S пластины с температурой T передаётся теплота окружающей среде, имеющей температуру $T_{жс}$, которую определим следующим образом:

$$\delta Q_\tau = \alpha(T - T_{жс}) S d\tau. \quad (2.88)$$

В соответствии с законом сохранения энергии приравняем (2.87) и (2.88), получим

$$-c\rho V dT = \alpha(T - T_{жс}) S d\tau. \quad (2.89)$$

Обозначим избыточную температуру $\theta = T - T_{жс}$, запишем (2.89) в виде

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\alpha S}{c\rho V} d\tau,$$

интегрируя уравнение, получим

$$\lg \theta = -\frac{\alpha S}{c\rho V} \tau + const.$$

Определим начальные условия, пусть

$$\theta|_{\tau=0} = \theta_0,$$

тогда $const = \lg \theta_0$.

Следовательно, решение запишем в виде

$$\lg \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{\alpha S}{c\rho V} \tau$$

или

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = \exp\left(-\frac{\alpha S}{c\rho V} \tau\right). \quad (2.90)$$

Из (2.86) следует, что избыточная температура термически тонкого тела с течением времени уменьшается экспоненциально от начальной температуры θ_0 при $\tau = 0$ до нуля при $\tau \rightarrow \infty$, и тем самым охлаждение определяется отношением $\alpha S/c\rho V$, чем больше это отношение, тем быстрее охлаждается пластина.

Библиографический список к главе 2

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. 5-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 544 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с
3. Цаплин С.В. Теплопроводность: Интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2011. 190 с.
4. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
5. Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Тепломассообмен» / М.С. Лобасова [и др.]. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2009. 295 с.
6. Цаплин С.В., Большчев С.А., Кузнецов В.П. Численные методы и программирование. Ч. I. Алгебра. Практический курс: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета путей сообщения, 2011. 118 с.
7. Цаплин С.В., Большчев С.А. Основы численных методов и программирование в Mathcad. Ч. I. Алгебра. Практический курс: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2012. 142 с.
8. Цаплин С.В., Большчев С.А., Кузнецов В.П. Численные методы и программирование. Ч. II. Нелинейные уравнения. Практический курс: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета путей сообщения, 2012. 130 с.
9. Лыков А.В. Тепломассообмен: справочник. М.: Энергия, 1972. 560 с.
10. Цаплин С.В., Большчев С.А., Кузнецов В.П. Численные методы и программирование. Ч. III. Интерполяция. Практический курс: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета путей сообщения, 2012. 161 с.
11. Цаплин С.В., Большчев С.А., Романов А.Е. Тепломассоперенос: лабораторный практикум. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2005. 67 с.
12. Информационно-измерительная система исследования охлаждающей способности закалочных сред / Цаплин С.В.

- [и др.] // *Материаловедение и термическая обработка металлов*. 2014. №5 (707). С. 25-29.
13. Data processing and measuring system for studying the cooling capacity of quenchants / Tsaplin S.V., Bolychev S.A., Shemanaev D.V., Mishagin B.S. // *Springer New York Consultants Bureau*. 2014. № 5-6. P. 253-257 с.
 14. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалёв С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Изд-во МЭИ, 2003. 470 с.
 15. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 486 с.
 16. Люты В. Закалочные среды: справочник. Челябинск: Металлургия, 1990. 190 с.
 17. Петраш Л.В. Закалочные среды. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1959. 113 с.
 18. Алёшин В.И., Долотова Н.А., Анисимов В.С. Модельное исследование охлаждения изолированной металлической сферы в водных средах (закалка) // *ЖТФ*. 2001. Т. 71. Вып. 12. С. 71-78.

3 КОНВЕКЦИЯ

Конвективный перенос – перенос теплоты при перемещении массы жидкости или газа с различными температурами и теплопроводностью одновременно. Условно конвективный перенос разделяют на естественную и вынужденную конвекцию. Естественная конвекция возникает под действием массовых сил, связанных с неоднородностью жидкости (архимедова сила). Вынужденная конвекция возникает при действии внешних сил на границе системы твёрдое тело – жидкость (перепад давления в трубопроводе), либо сообщении потоку кинетической энергии от источника. Конвективный теплообмен между жидкостью и поверхностью твёрдого тела характеризуется теплоотдачей.

Примером конвективного теплообмена является процесс, где более нагретые части среды, имеющие меньшую плотность, поднимаются вверх, а более холодные – опускаются вниз. Молекулы в разных слоях обладают различной средней кинетической энергией, зависящей от температуры слоя. Двигаясь поступательно, молекулы могут непрерывно перелетать из слоя в слой, перенося с собой энергию, присущую покидаемому слою. Вместе с переносом вещества происходит перенос энергии, что в сильной степени ускоряет процесс теплообмена. Понятно, что конвекция возможна только в жидкостях и в газах и существенна в том случае, если подогрев происходит снизу [1-4].

3.1 Конвективный перенос теплоты

Конвекция возможна только в текучей среде, в которой перенос теплоты связан с переносом самой среды. Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа неизбежно происходит соприкосновение отдельных частиц, имеющих различные температуры. Совместный перенос теплоты путем конвекции и теплопроводности называют **конвективным теплообменом**.

Теплоотдача – конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью (стенкой).

Если в единицу времени через единицу поверхности нормально к ней проходит масса жидкости $\rho \vec{w}$, кг/(м² с), где \vec{w} – скорость, ρ – плотность жидкости, то вместе с ней переносится энтальпия $p h$, Дж/(м² с):

$$\bar{q}_{\text{конв}} = \rho \bar{w} h.$$

Поскольку при движении жидкости или газа конвекция и теплопроводность связаны, то [3,4]

$$\bar{q} = \bar{q}_{\text{мен}} + \bar{q}_{\text{конв}} = -\lambda_t \nabla T + \rho \bar{w} h. \quad (3.1)$$

Количество теплоты, переданное в процессе теплоотдачи, определяется по **уравнению Ньютона–Рихмана** [1-3]:

для установившегося режима

$$q = \alpha S (T_{\text{ст}} - T_{\text{жс}}),$$

где α – коэффициент теплообмена, Вт/(м² К);

$T_{\text{ст}}, T_{\text{жс}}$ – температура стенки и жидкости соответственно, К;

S – поверхность стенки, м²;

q – тепловой поток (количество теплоты), Вт.

для неустановившегося режима

$$q(\tau) = \alpha S (T_{\text{ст}} - T_{\text{жс}}) \cdot \tau,$$

где τ – время, в секундах.

Силы, действующие на элемент жидкости, можно условно разделить на массовые и поверхностные [3-5]. Массовые силы действуют на частицы жидкости, природа которых связана с внешними силовыми полями (гравитационным, электрическим, магнитным). Поверхностные силы возникают при соприкосновении поверхности тела с жидкостью, природа этих сил обусловлена внешним давлением и силой трения.

Конвекция может быть как свободной, так и вынужденной [6,7]. Свободная конвекция возникает за счёт неоднородности массовых сил. Неоднородность возникает за счёт градиента температуры и, как следствие, неоднородное распределение плотности в поле земного тяготения может привести к свободному гравитационному движению.

Вынужденное движение объёма жидкости происходит под действием поверхностных сил, действующих на его границах, за счёт передаваемой кинетической энергии от источника (например, насоса, вентилятора, ветра).

Коэффициент теплоотдачи α – характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Коэффициент α показывает, какое количество тепла передается от единицы поверхности стенки к жидкости в единицу времени при разно-

сти температур между стенкой и жидкостью. Установлено, что коэффициент теплоотдачи зависит от многих факторов: вида и режима движения жидкости, ее физических свойств, размеров и формы стенки, шероховатости стенки. Определение α является основной задачей расчета теплообменных аппаратов. Обычно коэффициент теплоотдачи определяют из критериальных уравнений, полученных преобразованием дифференциальных уравнений гидродинамики и конвективного теплообмена методами теории подобия.

Согласно теории подобия [6,8] конвективный теплообмен без изменения агрегатного состояния вещества в стационарных условиях может быть описан критериальным уравнением вида

$$Nu = f(Re, Pr, Gr, \dots).$$

Здесь **критерий Нуссельта** [6] $Nu = q_w/q_\lambda = \alpha l/\lambda$ характеризует соотношение между интенсивностью теплообмена за счёт конвекции и интенсивностью теплообмена за счёт теплопроводности на границе между стенкой и потоком жидкости (в условиях неподвижной среды). Для течений жидкости в каналах можно показать, что для установившегося ламинарного течения $Nu = 4,36$ (при условии, что тепловой поток в стенку постоянен) и $Nu = 3,66$ (при условии, что постоянна температура стенки).

Свободная конвекция на вертикальной пластине

$$Nu = 0.68 + \frac{0.67 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + (0.492 / Pr)^{9/16}\right]^{4/9}}, \quad Ra_L \leq 10^9,$$

где $Ra_x = Gr_x Pr$ – число Релея.

Свободная конвекция на горизонтальной пластине

Для ориентированной вверх горячей поверхности в холодной среде или для ориентированной вниз холодной поверхности в горячей среде в соответствии с [8,9] запишем:

$$Nu = 0.54 \cdot Ra_L^{1/4}, \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^7,$$

$$Nu = 0.15 \cdot Ra_L^{1/3}, \quad 10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}.$$

Для ориентированной вниз горячей поверхности в холодной среде или для ориентированной вверх холодной поверхности в горячей среде:

$$Nu = 0.27 \cdot Ra_L^{1/4}, \quad 10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10}.$$

3.2 Теплоотдача при вынужденной конвекции в трубах

При вынужденном движении внутри трубы различают два режима течения: ламинарный и турбулентный. Ламинарный режим наблюдается при малых скоростях движения жидкости. При скоростях потока больших, чем некоторое критическое значение скорости, режим течения переходит в турбулентный. Для различных жидкостей и трубопроводов критическая скорость различна. Режим течения жидкости определяется по величине числа Рейнольдса, а при наличии теплообмена величиной Нуссельта [1,9]:

$$Nu_D = 0.023 \cdot Ra_L^{4/5} Pr^n$$

где Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля, $n = 0,4$ в условиях нагрева жидкости и $n = 0,3$ в условиях охлаждения жидкости.

Критерий Рейнольдса [6] – безразмерная величина, характеризующая отношение сил инерции к силе вязкого трения. Число Рейнольдса также считается критерием подобия течения вязкой жидкости. Число Рейнольдса определяется следующим соотношением:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu} = \frac{Q L}{\nu S},$$

где ρ – плотность среды, кг/м^3 ; v – характерная скорость, м/с ; l – характерный размер, м ; η – динамическая вязкость среды, Н с/м^2 ; $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость среды, $\text{м}^2/\text{с}$; Q – объёмная скорость потока, $\text{м}^3/\text{с}$; S – площадь сечения трубы, м^2 .

Для каждого вида течения существует критическое число Рейнольдса. Принято считать, что $Re_{кр}$ определяет переход от ламинарного к турбулентному течению. При числе $Re < Re_{кр}$ течение происходит в ламинарном режиме, а при числе $Re > Re_{кр}$ возможно возникновение турбулентности. Критическое значение числа Рейнольдса зависит от конкретного вида течения (течение в круглой трубе, обтекание шара и т. п.).

Различные возмущения оказывают влияние на характер течения. Например, для течения жидкости в прямой круглой трубе с очень гладкими стенками $Re_{кр} \sim 2300$. Для движения плёнки жидкости с относительно гладкой поверхностью раздела с газом при двухфазном потоке критическое значение числа Рейнольдса $Re_{кр} \sim 20 \div 120$ [9].

Значения Re выше критического и до определённого предела относятся к переходному (смешанному) режиму течения жидкости, когда турбулентное течение более вероятно, но ламинарное иногда

тоже наблюдается, т.е., неустойчивая турбулентность. Числу $Re_{кр} \sim 2300$ соответствует интервал 2300 – 10 000; для упомянутого примера с тонкими плёнками это 20 – 120 – 1600.

Число Рейнольдса как критерий перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения и обратно относительно хорошо действует для напорных потоков.

При переходе к безнапорным потокам течения переходная зона между ламинарным и турбулентным режимом возрастает. В этом случае использование числа Рейнольдса как критерия не всегда правомерно.

Например, в водохранилищах формально вычисленные значения числа Рейнольдса очень велики, хотя там наблюдается ламинарное течение. Напротив, возмущения потока могут значительно снижать величину $Re_{кр}$. Для газов критическое значение $Re_{кр}$ достигается при значительно больших скоростях, чем у жидкостей, поскольку у первых куда больше кинематическая вязкость (в 10–15 раз).

Число Прандтля (Pr) [6] – один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах, учитывает влияние физико-химических свойств теплоносителя на теплоотдачу и является мерой подобия температурных и скоростных полей в потоке:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda_T},$$

где a – коэффициент температуропроводности; ν – кинематическая вязкость; λ_T – коэффициент теплопроводности; c_p – удельная теплоёмкость среды при постоянном давлении. Число Прандтля Pr связано с другими критериями подобия – числом Пекле Pe и числом Рейнольдса Re – соотношением $Pr = Pe/Re$.

Число Грасгофа (Gr) [6] – критерий подобия, определяющий процесс теплообмена при свободном движении в поле гравитации и являющийся мерой соотношения архимедовой (подъёмной) силы, вызванной неравномерным распределением плотности в неоднородном поле температур, и силами межмолекулярного трения. Критерий Грасгофа описывает режим свободного движения теплоносителя:

$$Gr = \frac{gL^3\beta}{\nu}(T_{нов} - T_{нос}),$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного пробег; L – определяющий линейный размер поверхности теплообмена, м; $T_{нов}$ – температура поверхности теплообмена, °C; $T_{нос}$ – температура теплоносителя, °C;

ν – коэффициент кинематической вязкости, м²/с; $\beta = (273 + t_0)^{-1}$ – температурный коэффициент объёмного расширения теплоносителя для газов К⁻¹.

Коэффициент теплообмена α можно определить с помощью критерия Нуссельта по формуле

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_T}{L}.$$

Для расчета числа критерия Нуссельта при вынужденном движении потока в прямых трубах или каналах можно использовать:

а) для ламинарного режима движения теплоносителя, $Re \leq 2320$:

$$Nu = 0.15 Re^{0.33} Pr^{0.43} Gr^{0.1} \left(\frac{Pr}{Pr_{cm}} \right)^{0.25} \varepsilon_L.$$

Здесь Pr_{ct} – критерий Прандтля для теплоносителя при температуре стенки;

б) для переходного режима движения теплоносителя, $2320 \leq Re \leq 10\,000$:

$$Nu = C Pr^{0.43} \left(\frac{Pr}{Pr_{cm}} \right)^{0.25} \cdot \varepsilon_L.$$

Значение коэффициента C определяется из табл. 3.1 в зависимости от величины критерия Рейнольдса.

Таблица 3.1. Значение коэффициента C [8]

$Re \cdot 10^{-3}$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4	5	6	8	10
C	1,9	2,2	3,3	3,8	4,4	6,0	10,3	15,5	19,5	27,0	33,0

Для приближенных расчетов при свободной конвекции можно использовать:

$$Nu = 0,008 Re^{0.9} Pr^{0.43};$$

в) для турбулентного режима движения теплоносителя, $Re \geq 10\,000$:

$$Nu = 0,021 Re^{0.8} Pr^{0.43} \left(\frac{Pr}{Pr_{ct}} \right)^{0.25} \varepsilon_L.$$

Определяющим размером является эквивалентный диаметр сечения потока:

$$d_{\text{эkv}} = \frac{4 S}{\Pi},$$

где S – площадь сечения потока жидкости, м^2 ; Π – смоченный периметр, м .

Величина коэффициента ε_L , входящая в формулы Nu , определяется из табл. (3.1), (3.2) и (3.3).

Таблица 3.2. Значение коэффициента ε_L , при $Re < 10\,000$ [8]

$L/d_{\text{эkv}}$	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_L	1,9	1,7	1,44	1,26	1,18	1,13	1,05	1,02	1

L – длина трубы, м .

Таблица 3.3. Значение коэффициента ε_L при $Re > 10000$ [8]

Re	Отношение $L/d_{\text{эkv}}$				
	10	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,23	1,13	1,07	1,03	1,0
$2 \cdot 10^4$	1,18	1,10	1,05	1,02	1,0
$5 \cdot 10^4$	1,13	1,08	1,04	1,02	1,0
$1 \cdot 10^5$	1,10	1,06	1,03	1,02	1,0
$1 \cdot 10^6$	1,05	1,03	1,02	1,01	1,0

При свободном движении теплоносителя (естественная конвекция):

$$Nu = C (Gr Pr)^n \cdot \left(\frac{Pr}{Pr_{cm}} \right)^{0.25}.$$

Значение коэффициента C и показатель степени n зависят от режима и определяются из табл. 3.4.

Таблица 3.4. Значение коэффициента C и показателя степени n [8]

Режим	$Gr \cdot Pr$	C	n
Ламинарный	$1 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^2$	1,18	0,125
Переходный	$5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	0,54	0,25
Турбулентный	$2 \cdot 10^7 \div 1 \cdot 10^{12}$	0,185	0,33

Определяющим геометрическим размером является высота вертикальной поверхности теплообмена, для горизонтальных труб – их диаметр. Определяющая температура – средняя температура теплоносителя.

Передача тепла конвекцией заключается в переносе тепла путем перемещения самих частиц газа или жидкости, что сопровождается

также теплопроводностью, т.е. передачей тепла от одной частицы к другой – соседней. Тепло передается конвекцией от жидкостей и газов к твердым телам, и наоборот. При этом частицы газа или жидкости, соприкасающиеся с твердой поверхностью, отдают ей свое тепло (или нагреваются от нее). После теплообмена подвижные частицы удаляются, а на их место приходят новые. Количество тепла, передаваемое путем конвекции стенке, можно определить по закону Ньютона–Рихмана:

$$Q = \alpha \cdot S \cdot (T_{жс} - T_{см}),$$

где α – коэффициент теплообмена, Вт/(м²К); S – поверхность стенки, м²; $T_{см}$ – температура поверхности стенки, К; $T_{жс}$ – температура жидкости. В случае пограничного слоя

$$Q = \alpha \cdot S \cdot (T_{см} - T_{жс}).$$

Коэффициент теплоотдачи [9] соответствует количеству тепла, которое передается на 1 м² поверхности нагрева за 1 ч при разности температур в 1° и зависит от характера потока газа (ламинарного или турбулентного), скорости его движения, расположения и формы поверхности нагрева и физических свойств среды. Коэффициент теплоотдачи конвекцией больше при турбулентном движении и больших скоростях потока газа, так как при этом в единицу времени большее количество частиц газа будет соприкасаться с нагреваемой поверхностью. Коэффициент теплоотдачи увеличивается также при шероховатой поверхности и форме, способствующей завихрению потока газа.

Значения коэффициента теплоотдачи конвекцией определяются для различных случаев экспериментальным путем. Для газов при естественной конвекции коэффициент теплоотдачи лежит в пределах (6÷35) Вт/м² град или (5÷30) Вт/м² град, а при турбулентном движении в трубах или между ними – (12÷115) Вт/м² град или (10÷100) Вт/м² град.

3.3 Свойства жидкости

В зависимости от теплофизических свойств жидкостей, газов [6,8] процесс теплообмена может протекать различно. Теплофизические свойства жидкостей, газов [9] при исследовании теплопроводности, конвективного теплообмена в основном определяются следующими коэффициентами: теплопроводности $\lambda(T,p)$, теплоёмкости $c(T,p)$, плотности $\rho(T,p)$, теплообмена $\alpha(T,p)$ и вязкости $\mu(T,p)$. Физические свойства жидкостей, газов существенно изменяются в критической области температур и давления, а также в области низких температур (например, фазового перехода).

В реальной жидкости между частицами или слоями, движущимися с различными скоростями, возникает сила внутреннего трения, которая действует в любой точке потока в плоскости, ориентированной по течению, пропорциональна изменению скорости в направлении нормали к этой плоскости:

$$f = \mu \frac{d w}{d n} ,$$

где f – сила трения, Н с/м².

В гидродинамике динамический коэффициент вязкости или чаще коэффициент вязкости обозначают μ , а кинематический коэффициент вязкости – $\nu = \mu/\rho$, м²/с, который зависит от температуры и давления.

У капельных жидкостей коэффициент вязкости слабо зависит от давления, значительно уменьшается при повышении температуры, кинематическая вязкость уменьшается при повышении температуры в силу слабой зависимости плотности от температуры

У газов μ увеличивается при повышении температуры и слабо при повышении давления, а кинематическая вязкость при увеличении температуры быстро повышается в основном из-за уменьшения плотности.

При течении жидкости или газа из-за внутреннего трения возникает диссипация энергии. В этом случае часть энергии переходит в тепло и нагревает жидкость. Если вязкость жидкости или её скорость незначительна, то нагрев будет несущественным и ею можно будет пренебречь.

Жидкость как газ может сжиматься, что приводит к изменению теплоотдачи. Однако степень их сжимаемости различна.

Характеристикой изотермической $T = \text{const}$ сжимаемости является величина

$$\eta = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T .$$

Она определяет относительное изменение плотности жидкости при изменении давления.

Для капельных жидкостей изотермическая сжимаемость очень мала (например, для воды $\eta = 5 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹), которой можно пренебречь, а для газов (например, для воздуха $\eta = 5 \cdot 10^{-5}$ Па⁻¹) является значимой величиной. Если при движении газа возникает перепад давления, незначительный по сравнению с его абсолютным давлением, то изменения объёма будут малыми и потоки газа можно считать

в первом приближении несжимаемыми. Если скорость газа является четвертой частью от скорости звука, то к таким газам допустимо применение законов движения и теплоотдачи для несжимаемой жидкости.

Тепловое расширение жидкости может повлиять на характер теплообмена. Характеристикой теплового расширения является величина

$$\beta = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

при постоянном давлении. Температурный коэффициент объёмного расширения β , K^{-1} определяет относительное изменение объёма при изменении температуры на один градус при постоянном давлении $p = \text{const}$.

Для жидкостей температурный коэффициент объёмного расширения [8,9] является малой величиной, за исключением области вблизи термодинамической критической точки (например, для воды при температуре $T < 4^\circ\text{C}$, коэффициент β может иметь отрицательное значение). В случае идеального газа $\beta = 1/T$, где T – абсолютная температура.

В неравномерно нагретой жидкости вследствие теплового расширения возникает неоднородное поле плотности, что приводит к свободному движению.

3.4 Постановка краевых задач конвективного теплообмена

В соответствии с (3.1) тепловой поток в любой точке жидкости в любой момент времени однозначно определяется, если известны: температура, энтальпия и скорость [8,9]:

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{мен}} + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda_r \nabla T + \rho \vec{w} h.$$

Для реальной жидкости удельная энтальпия является функцией температуры T , давления p , т.е. $h = h(T, p)$, запишем полный дифференциал для этой функции:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp. \quad (3.2)$$

Из (3.2) найдём:

$$h = \int_T c_p dT + \int_p \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp.$$

В соответствии с термодинамикой и температурным коэффициентом объёмного расширения следует:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \frac{h}{p} \cdot \left[1 + \frac{T}{p} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p\right] = \frac{1}{p} \cdot (1 - \beta T)_p.$$

В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$,

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0,$$

тогда $dh = c_p dT$ или $h = \int_T c_p dT$.

Уравнение энергии

В гидродинамике для описания температурного поля в движущейся среде необходимо использовать уравнение энергии.

Пусть для однородного, изотропного неподвижного элемента жидкости относительно декартовой координатной системы переносится теплота за счёт механизмов теплопроводности и конвекции. Источник тепла находится внутри объёма элемента жидкости. Будем считать, что параметры жидкости постоянны, энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии. Тогда уравнение энергии примет вид [6]

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\text{div } \bar{q} + q_v, \quad (3.3)$$

учитывая тепловые потоки

$$q_x = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_x h,$$

$$q_y = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w_y h,$$

$$q_z = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} + \rho w_z h,$$

проходящие через грани элемента жидкости и энтальпию $h = \int_T c_p dT$.

Ограничиваясь случаем несжимаемой жидкости, когда $\rho = \text{const}$, $\text{div } \bar{w} = 0$, запишем уравнение энергии (3.3) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{w} \nabla T = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c_p}. \quad (3.4)$$

Здесь производная $\partial T / \partial t$ характеризует изменение температуры во времени в любой точке жидкости, т.е. является локальным изменением температуры, а $\bar{w} \nabla T$ характеризует изменение температуры при

переходе от точки к точке и является конвективным изменением температуры.

В случае, когда конвекция отсутствует, то $\bar{w} = 0$, следовательно, уравнение (3.4) перейдёт в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c_p}$$

с объёмным источником тепла.

Для определения температурного поля (3.4) необходимо знать поле скоростей и краевые условия, т.е. система уравнений (3.4) должна быть полной. Температурное поле в (3.4) зависит от компонентов скорости w движущейся жидкости, которые могут быть постоянными величинами (числами), известными функциями (из эксперимента) или определены из решения уравнения движения [6-9].

Уравнения движения

Рассмотрим в потоке вязкой жидкости элементарный объём. Для определения поля скоростей ограничимся одномерным движением жидкости только в направлении оси Oy . Пусть закон движения жидкости произволен. Движение элементарного объёма жидкости описывается вторым законом Ньютона. Известно [3-5, 9], что силы, действующие на элемент жидкости, подразделяются на массовые (объёмные) и поверхностные. Массовая сила определяется отношением силы, действующей на частицу, к массе этой частицы, обозначим её вектором \bar{F} , m^2/c . Ограничиваясь силой тяжести, $\bar{F} = \bar{g}$, где \bar{g} – ускорение свободного падения. Под поверхностной силой понимается отношение силы, действующей на элемент поверхности, к площади этого элемента. К поверхностным силам можно отнести силу трения, силу давления. В результате на элементарный объём будут действовать три силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и сил трения.

Найдём проекции сил на ось Ox [6]. Сила тяжести df_1 , приложенная к центру тяжести элемента, равна

$$df_1 = \rho g_x dv$$

в соответствии с законом Ньютона.

Известно [4,5], что равнодействующая сила давления определяется силой давления p , действующего на площадь $dydz$ верхней грани ($p dydz$) и на нижнюю грань

$$-\left(p + \frac{dp}{dx}\right) dydz$$

элемента жидкости (знак минус указывает на то, что сила действует против направления движения). Суммируя эти силы, получим результирующую силу:

$$df_2 = -\frac{dp}{dx} dv.$$

Равнодействующая сила трения возникает на боковых гранях элемента жидкости [6,9]. Около левой грани скорость движения жидкости меньше, чем внутри элемента, поэтому в сечении y сила трения направлена против движения и равна

$$\mu \cdot \left(\frac{dw_x}{dy}\right) dx dz.$$

Соотношение скоростей около правой грани будет противоположным по отношению к левой грани. Сила трения будет направлена в сторону движения и в сечении $y + dy$ будет равна

$$\mu \cdot \left[\left(\frac{dw_x}{dy}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{dw_x}{dy}\right)\right] dx dz.$$

Результирующей этих сил будет сумма

$$df_3 = \mu \cdot \left[\left(\frac{dw_x}{dy}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{dw_x}{dy}\right)\right] dx dz - \mu \cdot \left(\frac{dw_x}{dy}\right) dx dz.$$

Определим равнодействующую всех сил на ось Ox :

$$df = \left(\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \frac{d^2 w_x}{dy^2}\right) dv. \quad (3.5)$$

С другой стороны, в соответствии с законом Ньютона эта сила равна

$$df = \rho \cdot \frac{dw_x}{dt} dv. \quad (3.6)$$

Приравнивая правые части уравнений (3.5) и (3.6), получим

$$\rho \cdot \frac{dw_x}{dt} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \cdot \frac{d^2 w_x}{dy^2}.$$

Аналогично можно получить для других осей. В случае трёхмерного движения запишем векторное уравнение Навье – Стокса:

$$\rho \cdot \frac{d \vec{w}}{dt} = \rho \cdot \vec{g} - \nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{w} .$$

Здесь плотность и вязкость не зависят от температуры. Известно [5,6], что свободное движение определяется разностью плотностей нагретых и холодных частей жидкости.

Возвращаясь к полноте системы уравнений (3.4), определим граничные условия.

Граничные условия

Краевые условия определяются, прежде всего, из физического понимания процесса движения жидкости и экспериментальных данных, если они известны. Определяют их, не только фиксируя температуру в начальный момент времени, но и скорость движения жидкости. Граничные условия определяются значениями переменных или их производных. Подробно граничные условия обсуждаются в [7,6-9].

3.5 Гидродинамический и тепловой пограничные слои

Понятие пограничного слоя

Под пограничным слоем понимают тонкую при известных условиях (см. далее) в поперечном направлении к потоку область течения, где, в отличие от окружающего её безвихревого потока, движение является вихревым и характеризуется сосредоточенными в этой области резкими изменениями скорости (гидродинамический пограничный слой), температуры (тепловой пограничный слой), концентрации примеси (концентрационный, или диффузионный, пограничный слой) [7].

Различают ламинарные и турбулентные пограничные слои в зависимости от ламинарного или турбулентного режима течения в них.

Основным условием образования скоростных ламинарных пограничных слоев является малая вязкость жидкости, точнее, большое значение рейнольдсова числа потока Re , не достигающее, однако, той критической величины, при которой режим течения в пограничном слое становится турбулентным. Аналогично для температурных слоев подобным условием становится достижение больших значений числа Пекле Pe , для концентрационных слоев – больших значений Pe_d (диффузионного числа Пекле).

Физическая картина образования пограничных слоев на твердых поверхностях состоит в следующем [7,9]. Однородный безвихревой поток, достигнув поверхности твердого тела, «прилипает» к нему

частицами, непосредственно соприкасающимися с поверхностью тела, в то время как соседние слои продолжают двигаться с резко увеличивающимися по мере удаления от поверхности скоростями, что приводит к завихренности потока. Образовавшиеся вблизи поверхности вихри, с одной стороны, сносятся набегающим потоком, участвуя в конвекции, а с другой – диффундируют в окружающую тело жидкость. Если конвекция велика по сравнению с диффузией (а это, как далее показывается, соответствует большим числам Рейнольдса), на поверхности сохраняется весьма тонкий слой заметно завихренной жидкости – так называемый пристенный пограничный слой. Аналогично, имея некоторую начальную завихренность, возникшую при выходе из резервуара или сходе с поверхности обтекаемого тела, образуются «свободные» пограничные слои: «затопленные струи» и «следы» за кормой тела.

Создающийся в процессе течения в области пограничного слоя баланс конвекции и диффузии, а в случае нестационарного пограничного слоя еще и локального изменения завихренности количественно определяется уравнениями Гельмгольца. Этот баланс может дать количественную оценку порядка «толщины» пограничного слоя при больших значениях числа Рейнольдса $Re = w_{\infty} l / \nu$, составленного по скорости набегающего на тело потока w_{∞} , линейному размеру тела l и кинематическому коэффициенту вязкости жидкости ν .

Увеличение числа Рейнольдса означает возрастание роли конвективного ускорения, а тем самым, как это следует из вывода уравнения Гельмгольца, и конвекции завихренности. Повышение роли этого процесса приводит к двум следствиям:

- а) уменьшению с ростом числа Рейнольдса поперечного к потоку размера области завихренности;
- б) благодаря балансу между процессами конвекции и диффузии, сосредоточению их в этой тонкой области.

Первое из этих следствий служит объяснением существования при больших числах Рейнольдса пограничного слоя, второе говорит о повышенной интенсивности диффузии в области пограничного слоя и об определяющем значении в нем диффузии завихренности в поперечном к поверхности тела направлении.

Прежде чем перейти к анализу движения вязкой жидкости в области пограничного слоя, остановимся на некоторых соображениях, позволяющих дать количественную оценку закона убывания толщины пограничного слоя в зависимости от возрастания числа Рейнольдса потока.

Удовольствуемся сначала случаем плоского стационарного движения, когда уравнение баланса между процессами конвекции и диффузии завихренности может быть записано в простейшей форме [7]:

$$w\nabla\Omega = \nu \nabla^2\Omega.$$

Для оценки порядка изменения с ростом числа Рейнольдса величин, стоящих в левой (конвекция завихренности) и правой (диффузия завихренности) частях этого уравнения, применим прием, использованный для вывода условий подобия двух потоков вязкой жидкости и заключающийся в выражении входящих в уравнения переменных величин, выраженных в частях характерных для них постоянных масштабов. При рассмотрении процессов конвекции и диффузии завихренности в области пограничного слоя условимся отличать масштабы продольных длин и скоростей l и w_0 от соответствующих масштабов поперечных длин и скоростей δ и w_0 . Введем также масштаб Ω_0 для завихренности.

Что касается первых двух масштабов, то их конкретизация не нуждается в особых разъяснениях. За величину l можно взять, например, диаметр обтекаемого жидкостью кругового контура, хорду или максимальную толщину крылового профиля, внутренний радиус трубы, на входе в которую образовался пограничный слой, и т.д. За масштаб продольных скоростей w_0 естественно выбрать скорость w_∞ набегающего на тело потока или скорость на входе в трубу. Масштаб завихренности Ω_0 из дальнейшего рассуждения выпадает, и нет необходимости его конкретизировать.

Особого разъяснения заслуживает вопрос о выборе поперечного масштаба длин δ . Этот масштаб естественно связать с характерным расстоянием, на которое распространяется диффузия завихренности в направлении, поперечном к поверхности обтекаемого тела, представляющей источник завихренности. Такого, конечного по величине, расстояния в задачах динамики вязкой жидкости, изложенных в предыдущих главах, не существовало.

Вспомним, например, задачу Стокса об обтекании вязкой жидкостью сферы, или расчет диффузии завихренности, образованной вихревой нитью. Во всех этих случаях влияние вязкости распространялось мгновенно, а в безграничных потоках на бесконечно большие расстояния. Этот принципиальный факт является прямым следствием обобщенного закона Ньютона, выражающего линейную связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций, и

обуславливает эллиптический характер дифференциальных уравнений Навье-Стокса.

Дальнейшее изложение основывается на этих концепциях: бесконечной скорости диффузии завихрённости и безграничной области ее распространения в неограниченном потоке вязкой жидкости.

Согласно положенному в основу всей динамики вязкой жидкости обобщенному закону Ньютона, для которого, как уже ранее указывалось, характерна бесконечная скорость распространения возмущений, изменение величины скорости соответствовало бы асимптотическому стремлению их к своим предельным значениям. Таковую асимптотическую постановку обычно сохраняют при составлении граничных условий для дифференциальных уравнений пограничного слоя на внешней его границе и символизируют выражением $y \rightarrow \infty$, где y – расстояние данной точки от поверхности тела [7].

Известно [10-15], что для получения заданных свойств материала используется термообработка материала, в частности закалка. Процесс закалки осуществляется при вынужденной и естественной конвекции. Рассмотрим механизмы вынужденной и естественной конвекции.

Механизмы и процессы в закалочной среде

Закалка представляет собой сложный неравновесный процесс, который протекает в три стадии на поверхности, граничащей с твёрдым телом и охлаждаемой жидкостью в определённой области температур. В литературе [9,10] эти стадии известны: плёночного, пузырькового кипения и конвективного теплообмена. При погружении нагретого твёрдого тела в закалочную среду на поверхности контакта возникает большой градиент температуры и соответствующий тепловой поток. При достижении первой критической величины теплового потока возникает фазовый переход, наступает интенсивное испарение закалочной среды, приводящее к тому, что пар в пограничном слое покрывает плотным, тонким слоем всю поверхность охлаждаемого тела.

По истечении определённого времени происходит образование паровой плёнки. В этом случае плотность теплового потока с большой скоростью уменьшается из-за уменьшения теплообмена в этом пограничном слое газообразной среды. Толщина пограничного слоя определяется динамическим балансом равновесия потоков между количеством пара, конденсирующегося на поверхности твёрдого тела, и вновь образованного тепловым потоком. Таким образом, баланс

между приходящим тепловым потоком, связанный с конденсацией пара на поверхность, и уходящим с поверхности твёрдого тела будет определять интенсивность теплообмена, который носит название – процесс охлаждения. Эта стадия в литературе определена как стадия плёночного кипения [9,10].

С уменьшением градиента температуры на поверхности охлаждаемого твёрдого тела толщина паровой плёнки уменьшается, плёнка становится неустойчивой и разрушается под действием гидростатического давления. В этом случае происходит фазовый переход, образование этой фазы определяется вторым критическим тепловым потоком. Известно [10], что второй критический тепловой поток определяет свойства закалочной среды и не зависит от параметров охлаждаемого твёрдого тела.

Стадия пузырькового кипения [10,11] сопровождается значительным количеством поглощения тепла, при этом скорость охлаждения возрастает. Образовавшиеся пузырьки на поверхности твёрдого тела в соответствии с гидростатическим, гравитационным законами отрываются от поверхности и поднимаются вверх. Процесс теплообмена интенсивно протекает между закалочной средой и поверхностью твёрдого тел, при этом температура твёрдого тела быстро уменьшается.

Приближаясь к температуре кипения закалочной среды, процесс отделения пузырьков от поверхности твёрдого тела замедляется. Нагретые слои закалочной среды перемещаются, унося тепло по конвективному механизму теплообмена. Это фаза конвективного теплообмена, в этой фазе плотность теплового потока уменьшается в несколько раз.

Известно [10–14], что теплообмен между жидкостью и твёрдым телом определяет состояние поверхности твёрдого тела, а присутствие оксидных плёнок на ней приводит к зарождению пузырьков пара при пузырьковом кипении. Толстые слои оксида создают дополнительно термосопротивление и препятствуют теплообмену, в результате чего интенсивность охлаждения падает. На оксидных поверхностях процесс пузырькового и плёночного кипения очень неустойчив, что приводит к колебаниям скорости охлаждения. На практике при исследовании свойств закалочных сред перед началом эксперимента необходимо очистить датчик-зонд от оксидной плёнки, подробно методика удаления изложена в [11].

Кроме того, для исследования свойств закалочных сред важно знать, с какой скоростью твёрдое тело охлаждается в интервале температур 600–500° и 300–200°С. В области температур 600–500°С устойчивость аустенита очень мала, особенно у углеродистой стали. Поэтому необходимо проводить охлаждение твёрдого тела с высокой скоростью, так чтобы охлаждающая способность среды была большей – превышала критическую скорость закалки стали, в противном случае будет получена структура мартенсита. Следовательно, наиболее важной характеристикой охлаждающей среды является ее закаливающая способность в интервале температур 600–500°С [10,11].

Другой важной характеристикой среды является ее охлаждающая способность в интервале температур 300–200°С, так как при указанных температурах в углеродистой стали начинается превращение аустенита в мартенсит. Если аустенит не распался до температуры 300–200°С, то он перейдет в мартенсит при медленном охлаждении. Таким образом, необходимо, чтобы скорость охлаждения твёрдого тела при температурах ниже 300°С была замедленной [10,11].

Таким образом, важная информация о свойствах закалочной среды содержится, начиная с момента фазового перехода, связанного со вторым критическим потоком в измерении температуры, определении потока тепла, скорости охлаждения. При этом нужно контролировать охлаждающую способность в интервале температур 600–500°С, 300–200°С [10,11].

Для увеличения скорости закалки применяется вынужденный механизм конвекции в процессе закалки материала, который создаётся путём прокачки насосом охлаждаемой жидкости или вращением крыльчатки с помощью верхнеприводной мешалки.

Рассмотрим особенности течения и перенос теплоты в пограничном слое жидкости.

Условия «прилипания» [5-7]. В соответствии с этим условием скорость жидкости на поверхности тела равна нулю или скорости движения тела, если оно движется. Этот слой является бесконечно тонким.

В газе этот слой соответствует порядка трём длинам свободного пробега. Кроме того, условие «прилипания» справедливо, если газ можно считать сплошной средой. С увеличением разрежения в газе взаимодействие со стенкой материала уменьшается. Степень разрежения определяется значением числа Кнудсена [5,7,16]:

$$Kn = \frac{\lambda_{св}}{L},$$

где $\lambda_{св}$ – длина свободного пробега молекул газа; L – характерный размер тела (длина тела, диаметр трубы).

В случае значений числа Кнудсена больше 0,001 газ (разреженный) нельзя считать сплошной средой [16], то условие прилипания будет не применимо. Если число Кнудсена больше 10, газ можно рассматривать как свободный молекулярный поток [16]. Взаимодействие газа с поверхностью тела описывается кинетической теорией газов [16]. В диапазоне $0,001 < Kn < 10$ числа Кнудсена газ не может рассматриваться ни как полностью сплошной, ни как полностью свободномолекулярной средой.

Уравнение теплоотдачи. Поскольку у поверхности твёрдого тела имеется тонкий слой неподвижной жидкости, из уравнения (3.1) следует, что удельный тепловой поток на стенке (теплоотдача) будет

$$q_{см} = -\lambda_t \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0}, \quad (3.7)$$

где n – нормаль к поверхности тела.

С другой стороны температуру стенки можно определить по закону Ньютона – Рихмана:

$$q_{см} = \alpha \cdot (T_{см} - T_{ж}). \quad (3.8)$$

Сравнивая левые и правые части (3.7) и (3.8), определим коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = -\frac{\lambda_t}{(T_{см} - T_{ж})} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{n=0}.$$

Это уравнение принято называть уравнением теплоотдачи.

Гидродинамический пограничный слой [7,8]. Рассмотрим продольное обтекание плоской поверхности тела безграничным потоком жидкости. Пусть скорость и температура набегающего потока постоянны и равны соответственно w_0 и T_0 . На поверхности пластины молекулы «прилипают» к ней. В результате действия сил вязкости в области около пластины образуется пограничный слой, скорость в котором изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущённого потока.

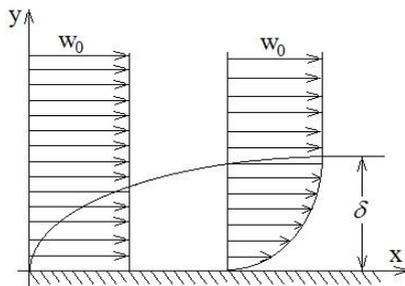


Рис. 3.1. Гидродинамический пограничный слой на пластине

Этот слой жидкости называется гидродинамическим пограничным слоем, введённый Прандтлем. С увеличением расстояния от передней кромки пластины пограничный слой толще, а влияние вязкости по мере движения жидкости вдоль пластины увеличивается и уходит в область невозмущённого потока. Картина движения жидкости вблизи поверхности пластины представлена на рис. 3.1. Для течения жидкости внутри пограничного слоя справедливо условие $(\partial w_x / \partial y) \neq 0$, вне пограничного слоя и на его внешней границе

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \text{ и } w_x = w_0. \quad (3.9)$$

Понятие «толщины пограничного слоя» δ и «внешней границы пограничного слоя» условны. Скорость в пограничном слое с увеличением y асимптотически стремится к w_0 . При обтекании тела жидкостью во внешнем потоке преобладают силы инерции, а вязкостные силы незначительны. В пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы. Рассмотрим постановку стационарной задачи при обтекании плоской пластины и бесконечной в направлении оси Oz. Запишем уравнения движения [5,7,8]:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.10)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.11)$$

Дополним систему уравнений уравнением сплошности:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (3.12)$$

Рассмотрим случай малой толщины пограничного слоя, тогда давление, действующее поперёк пограничного слоя, будет постоянной величиной $p = const$, а его градиент равен нулю $(\partial p / \partial y) = 0$. При обтекании поверхности плоской пластины неограниченным потоком с постоянной скоростью w_0 во внешней области течения вблизи пластины давление будет постоянно и его можно будет записать в виде закона Бернулли:

$$p + \frac{\rho w_0^2}{2} = const.$$

Таким образом, закон (уравнение) Бернулли является следствием закона сохранения энергии для стационарного потока идеальной (то есть без внутреннего трения) несжимаемой жидкости.

Если выполняются условия: для пограничного слоя $(\partial p / \partial y) = 0$ и для внешнего слоя $(\partial p / \partial x) = 0$ при течении жидкости или газа, то такое течение можно отнести к «безградиентному течению» в области пограничного слоя.

Скорость w_x изменяется от нуля до значения w_0 в пограничном слое, оценим величину w_x . Введём для продольной координаты масштаб l . Оценим производную в соответствии с методикой, изложенной в [6]:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = o\left(\frac{w_0}{l}\right),$$

где o – порядок данной величины.

Тогда и производная

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = o\left(\frac{w_0}{\delta}\right)$$

или с учётом δ порядка поперечной координаты y для пограничного слоя запишем

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} = o\left(w_0 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\delta}\right).$$

Величину w_y можно оценить следующим образом:

$$w_y = o\left(w_0 \frac{\delta}{l}\right).$$

Оценим члены конвективной и вязкостной частей уравнения движения (3.9), в соответствии с [6] запишем:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} = o\left(\frac{w_0^2}{l}\right); \quad w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = o\left(w_0 \frac{\delta}{l} w_0 \frac{1}{\delta}\right) = o\left(\frac{w_0^2}{l}\right);$$

$$v \cdot \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) = v \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = o \left(v \frac{w_0}{l^2} \right) + o \left(v \frac{w_0}{\delta^2} \right).$$

Откуда следует, что порядок конвективных слагаемых одинаков и равен w_0^2/l , отношение вязкостных членов

$$\frac{\partial^2 w_x / \partial x^2}{\partial^2 w_y / \partial y^2} = o \left(\frac{w_0 / l^2}{w_0 / \delta^2} \right) = o \left(\frac{\delta^2}{l^2} \right).$$

Для пограничного слоя $\delta \ll l$ следует:

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

Пренебрегая последним слагаемым вязкостного члена (3.10), а также учитывая $(\partial p / \partial x) = 0$, запишем уравнение движения в форме

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = v \cdot \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (3.13)$$

Оценим левую и правую части уравнения движения (3.13). Левая часть уравнения – величина порядка $o \left(\frac{w_0^2}{l} \right)$, а правая – $o \left(v \frac{w_0}{\delta^2} \right)$.

Приравнявая оценки левой и правой частей уравнения (3.13), получим

$$o \left(\frac{w_0^2}{l} \right) = o \left(v \frac{w_0}{\delta^2} \right).$$

Тогда

$$\frac{\delta^2}{l^2} = \frac{v}{w_0}.$$

Преобразуя это равенство, запишем:

$$\frac{\delta}{l} = o \left(\sqrt{\frac{v}{w_0 l}} \right) = o \left(\sqrt{\frac{w_0 l}{v}} \right)^{-1} = o \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \right). \quad (3.14)$$

Здесь число $\text{Re} = w_0 l / v$ – число Рейнольдса, коэффициент определяет соотношение сил инерции и сил вязкости.

Если $\text{Re} \ll 1$, то $\delta \gg l$. В этом случае всё пространство вблизи поверхности тела охвачено действием сил вязкости и нет разделения потока на две области.

Если $Re \gg 1$, то $\delta \ll l$. У поверхности тела образуется тонкий слой подторможенной жидкости.

Исследуем уравнение движения (3.11) для пограничного слоя в проекциях на ось Oy . Поскольку $\partial p / \partial y = 0$, то уравнение движения (3.11) запишем:

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.15)$$

Аналогичным образом оценим порядок величин, слагаемых, входящих в уравнение движения (3.15).

Слагаемые

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}, \quad w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}, \quad \nu \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$$

имеют величину порядка

$$o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l} \right) = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{1}{\sqrt{Re}} \right),$$

а

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{1}{Re \sqrt{Re}} \right).$$

Из сравнения порядков этих величин следует, что слагаемые уравнения (3.15) в проекциях на ось Oy будут малы по сравнению с членами уравнения (3.10). Задача о гидродинамическом пограничном слое на пластине свелась к решению задачи плоского безградиентного стационарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности. В результате получим

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (3.17)$$

Рассмотрим случай, когда $p \neq const$. Оценим член $(1/\rho) (\partial p / \partial x)$ уравнения (3.10) исходя из соображения, что на внешней границе пограничного слоя при установившемся течении справедлив закон Бернулли:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = o \left(\frac{w_0^2}{l} \right). \quad (3.18)$$

Учитывая оценки слагаемых

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l} \right), \quad w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l} \right),$$

$$\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = o \left(\frac{w_0}{l^2} \frac{\delta}{l} \right), \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = o \left(\frac{w_0}{l \delta} \right)$$

и то, что $\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}$ является малой величиной по отношению к производной, $\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$ в дальнейшем можно будет пренебречь.

Из оценки слагаемого

$$v \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l} \right)$$

и уравнения (3.11) следует, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l} \right). \quad (3.19)$$

Из сравнения (3.18) с (3.19) следует, что в пограничном слое

$$o \left(\frac{w_0^2}{l} \right) = o \left(\frac{w_0^2}{l} \frac{\delta}{l} \right).$$

Таким образом, давление по оси y меняется медленнее, чем по оси x , поэтому уравнение (3.11) можно заменить уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad p = p(x). \quad (3.20)$$

Это означает, что давление поперёк пограничного слоя не меняется. Для данного случая запишем систему уравнений в виде [6,7]

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial x} = v \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (3.22)$$

В соответствии с (3.20) давление через пограничный слой по нормали передаётся без изменения. Следовательно, вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной, давление можно определить из решения уравнения идеальной жидкости. Поскольку пограничный слой малой толщины, можно считать, что во всём пограничном слое зависимость давления $p(x)$ такая же, как в идеальной жидкости. Таким образом, уравнение движения (3.21) и уравнение сплошности (3.22) представляют систему уравнений пограничного слоя для функций w_x и w_y , причём $\partial p/\partial x$ – известная функция, найденная из решения задачи обтекания тела потоком идеальной жидкости. Для установившегося течения, вне пограничного слоя справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (3.23)$$

Если $u = u_\infty$ – скорость на внешней границе пограничного слоя, с учетом (3.23) запишем уравнения пограничного слоя в виде

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial x} = u_\infty \cdot \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (3.25)$$

На границе $y = 0$:

$$-u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

а поскольку $\partial p/\partial x$ не меняется поперёк пограничного слоя, то в качестве u_∞ может быть взято решение уравнений идеальной жидкости.

Дополним уравнения (3.24), (3.25) граничными условиями:

1) на теле при $0 \leq x \leq 1$ (условие прилипания)

$$w_x \Big|_{y=0} = 0, \quad w_y \Big|_{y=0} = 0; \quad (3.26)$$

2) на внешней границе пограничного слоя

$$w_x = (1 - \varepsilon) \cdot u(x), \quad (3.27)$$

где ε – малая величина.

В граничном условии (3.26) содержится $\delta(x)$ неизвестная, т.к. $w_x = w_x(x, \delta(x))$ является функционалом.

Решение уравнений (3.24), (3.25) можно найти, во-первых, только при заданном значении скорости w_x на границе $x = 0$, во-вторых, условие на пограничном слое заменяют условием $y \rightarrow \infty$. Внутри пограничного слоя w_x быстро стремится к предельным значениям при удалении от тела. На основании приведённых рассуждений запишем граничные условия:

на границе $y = 0$ при $0 \leq x \leq 1$:

$$w_x|_{y=0} = 0, \quad w_y|_{y=0} = 0,$$

на границе $x = 0$:

$$w_x|_{x=0, y>0} = u(0),$$

на границе $y \rightarrow \infty$ при $0 \leq x \leq 1$:

$$w_x|_{y \rightarrow \infty} = u(x).$$

Тепловой пограничный слой [6,7]. Тепловой пограничный слой – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения, равного жидкости вдали от тела. Внутри пограничного условия выполняется условие $\partial T / \partial y \neq 0$, на внешней границе и вне его $\partial T / \partial y = 0$ и $T = T_0$ (рис. 3.2).

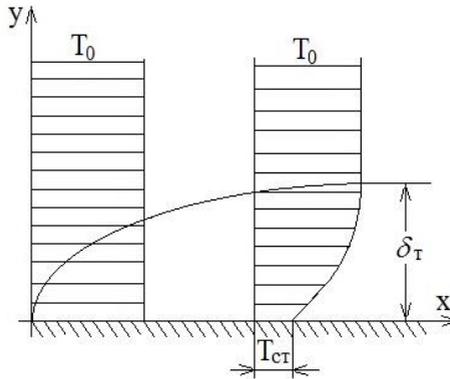


Рис. 3.2. Тепловой пограничный слой на пластине

Рассмотрим теплоотдачу при обтекании поверхности пластины неограниченным потоком жидкости в тонком приповерхностном слое $\delta_T \ll 1$ (δ_T – толщина теплового пограничного слоя). Толщина

теплого слоя и гидродинамического слоя в общем случае не совпадают – это зависит от рода жидкости, процесса течения и теплообмена. Пусть их толщины одного порядка. Из-за малости толщины теплового пограничного слоя можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты, что позволяет записать

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

поскольку

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

при выполнении $\delta_T^2 \ll l^2$.

В этом случае уравнение энергии примет вид

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Поскольку

$$q_y = -\lambda_t \frac{\partial T}{\partial y},$$

следовательно

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\partial q_y}{\partial y},$$

правую часть уравнения (3.18) запишем в виде

$$\frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial q_y}{\partial y}.$$

Для решения задачи (3.18) необходимо добавить уравнение движения (3.16) и уравнение сплошности (3.17). Будем для простоты рассматриваемой задачи считать, что свойства жидкости не меняются, внутренние источники тепла в жидкости отсутствуют, тепло не выделяется в результате трения. При таких условиях поле скоростей не зависит от поля температур.

Такой подход и постановка задачи будет справедлива для свободного течения жидкости (рис. 3.3) [7,8].

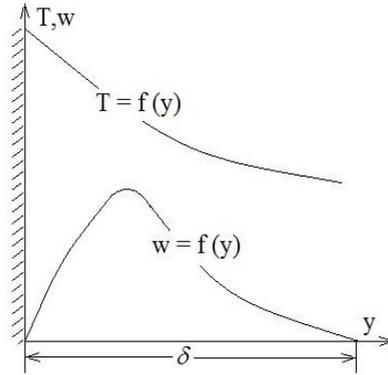


Рис. 3.3. Гидродинамический и тепловой пограничный слой при свободном движении жидкости

При этом будем считать, что скорость вдали от тела при свободном движении жидкости равна нулю. В случае свободного теплового движения $w_0 = 0$, а уравнение движения примет вид

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - g \cdot \beta \cdot (T - T_{жс}).$$

Толщина пограничного слоя [5–8]

Под толщиной пограничного слоя как некоторой конечной величины δ подразумевают расстояние от поверхности обтекаемого тела в потоке ($y = \delta$). Практически с заданной степенью приближения можно принять продольную скорость в пограничном слое равной ее значению в той же точке внешнего безвихревого потока. Геометрическое место таких точек дает приближенное, «конечное», представление о внешней границе пограничного слоя.

Наличие только что указанных обстоятельств оправдывает исторически сложившееся представление о конечной толщине пограничного слоя; однако имеющийся в таком определении произвол в величине допускаемой погрешности делает это определение расплывчатым. В дальнейшем оказалось предпочтительным иметь дело с менее наглядными, но более однозначными определениями толщины пограничного слоя, основанными на интегральных характеристиках распределений продольных скоростей в нормальных к поверхности тела сечениях пограничного слоя.

Каждая из них, являясь переменной вдоль поверхности тела величиной, может служить местным масштабом для нормального к потоку

ку сечения пограничного слоя. Введенный ранее масштаб поперечных длин в потоке δ будем трактовать как общий для всех сечений порядок толщины пограничного слоя. Под относительной толщиной пограничного слоя будем понимать полученное равенство (3.14) оно выражает общий для всех плоских, стационарных ламинарных пограничных слоев закон изменения их относительных толщин обратно пропорционально корню квадратному из коэффициента Рейнольдса

$$\frac{\delta}{l} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right).$$

Это – первое основное свойство ламинарного пограничного слоя.

Подчеркнем еще раз, что здесь идет речь об изменении порядка толщин пограничного слоя в результате общего для всех сечений пограничного слоя изменения рейнольдсова числа потока, а не изменения их вдоль поверхности тела при фиксированном рейнольдсовом числе Re .

Наряду с только что рассмотренным скоростным, или вихревым, пограничным слоем, приходится иметь дело и с другими по физическим свойствам переносимой субстанции пограничными слоями, как, например, температурным и диффузионным (концентрационным). Они представляют собой также тонкие в поперечном к поверхности тела направлении области, в которых сосредоточена интенсивная диффузия тепла (температуры) или вещества (концентрации). Тонкость этих областей обусловлена большими значениями числа Рейнольдса, числа Пекле (Pe) и диффузионного числа Пекле (Pe_D) [4].

Нет необходимости вновь повторять все рассуждения, проведенные только что для скоростного пограничного слоя, применительно к этим двум слоям. Заметим лишь, что в случае плоского стационарного распространения тепла и вещества уравнения баланса конвекции и диффузии могут быть представлены в форме равенств:

$$\mathbf{w} \cdot \nabla T = a \cdot \nabla^2 T, \quad \mathbf{w} \cdot \nabla C = D \cdot \nabla^2 C,$$

совпадающих с ранее указанным уравнением для завихрённости Ω , если в нем заменить Ω на T или C , а ν на a или D .

Оценивая порядки входящих в последнее уравнение величин и вводя для этого наряду с прежними масштабами еще дополнительные: δ_T и δ_D соответственно для поперечных длин в температурном и в диффузионном (концентрационном) слоях. В результате получим выражения для этих масштабов и выпишем их вместе с ранее полу-

ченным соотношением для порядка толщины скоростного пограничного слоя [6,9]:

$$\frac{\delta}{l} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right), \quad \frac{\delta}{l} = o\left(\frac{1}{\sqrt{Pe}}\right), \quad \frac{\delta}{l} = o\left(\frac{1}{\sqrt{Pe_D}}\right).$$

Вводя еще число Прандтля и число Шмидта (диффузионное число Прандтля)

$$\text{Pr} = \frac{Pe_D}{\text{Re}}, \quad \text{Sc} = \text{Pr}_D = \frac{Pe_D}{\text{Re}},$$

получим соотношения между порядками толщин пограничных слоев:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = o(\sqrt{\text{Pr}}), \quad \text{или} \quad \frac{\delta}{\delta_T} = o(\sqrt{\text{Sc}_0}) = o(\sqrt{\text{Pr}_D}),$$

выражающие тот факт, что при больших значениях чисел Pr , Sc и Pe_D температурные и концентрационные пограничные слои значительно тоньше скоростных, а при малых значениях чисел Pr , Sc и Pe_D , наоборот, значительно толще [6,7].

3.6 Плоский нестационарный пограничный слой

Во многих процессах конвекции возникают изменения температуры, скорости и, возможно, концентрации химических компонентов по времени. Подобные изменения часто наблюдаются как в процессах, происходящих в окружающей среде, так и в целом ряде технологических и промышленных приложений.

Многие циркуляционные течения, возникающие в атмосфере, естественных бассейнах или океане, представляют собой нестационарные течения различной периодичности, создающиеся в результате суперпозиции многочисленных внутренних процессов. В технологии нестационарные процессы практически всегда возникают при запуске и прекращении работы промышленных установок. В ходе таких процессов могут создаваться опасные режимы работы, и с этой важной проблемой следует считаться.

Характерным примером может служить рабочий объем ядерного реактора, в котором забросы температуры при переходных процессах могут стать критическими для элементов конструкции. Те же соображения важны и для электрического оборудования и электронных приборов, охлаждаемых естественной конвекцией.

Нестационарные свободноконвективные течения подразделяют на два общих класса – внутренние и внешние течения. Внутренние течения создаются в объеме жидкости, частично или полностью ограниченном

твердыми стенками. Стационарные внешние течения в неограниченной среде, в которых происходит изменение параметров по времени, рассматриваются ниже. Движущим потенциалом подобных течений является изменение температурных или энергетических условий, или местные неравномерности плотности, обусловленные градиентами концентрации химических компонентов. Внешние нестационарные течения классифицируются по геометрии задачи и по движущему механизму конвекции.

К настоящему времени проведены аналитические, численные и экспериментальные исследования конвекции для ряда конфигураций, включая плоские вертикальные поверхности, вертикальные и горизонтальные цилиндры, проволоки и факелы. Для всех указанных конфигураций могут существовать самые разнообразные течения в зависимости от движущего механизма, условий в окружающей среде и граничных условий. Прежде всего рассматривается течение около вертикальной поверхности, поскольку этот случай исследован наиболее подробно и достигнуто наиболее глубокое понимание его закономерностей.

Когда плоская вертикальная поверхность, помещенная в неограниченную покоящуюся среду, внезапно нагревается, причем тепловой поток в дальнейшем становится постоянным, начинается нестационарный перенос, продолжающийся до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное состояние. Этот переходный процесс часто распадается на отчетливо различающиеся стадии в зависимости от особенностей нагрева и от свойств окружающей жидкости. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии после использования приближений пограничного слоя и Буссинеска записываются следующим образом [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.30)$$

Если первоначально жидкость в каждой точке неподвижна, то применяются следующие граничные и начальные условия:

н.у.:

$$u = v = T - T_{\infty} = 0, \quad t \leq 0; \quad (3.31)$$

г.у. при $y = 0$:

$$u = v = 0, \quad \text{для всех } t; \quad (3.32)$$

г.у. при $y \rightarrow \infty$:

$$u \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow t_{\infty} \quad \text{при всех } t. \quad (3.33)$$

При $t > 0$ на стенке возникает тепловой поток или разность температур и в жидкости создается выталкивающая сила. Условие (3.31) означает, что в начальный момент окружающая среда покоится и имеет постоянную температуру.

Условие отсутствия скольжения и непроницаемости стенки ведет к соотношению (3.32), а соотношение (3.33) показывает, что вдали от стенки окружающая среда неподвижна и стратификация отсутствует. Движущий механизм этого процесса определяется законом нагрева стенки. Возможно изменение температуры стенки по времени $T_0 - T_{\infty} = F(t)$ или изменение плотности теплового потока на поверхности $q'' = G(t)$, или какое-либо иное воздействие.

Отличительной особенностью этих уравнений по сравнению с уравнениями стационарного переноса является наличие трех независимых переменных: x , y и t . Возможны автомодельные решения при некоторых специальных законах изменения температуры стенки типов $1/(x + at)$ и $(x + a)/(1 - bt)^2$, где a и b – постоянные. Если не проводить численного интегрирования полной системы уравнений в нестационарной форме, а применять другие методы, то необходимо вводить некоторые упрощающие предположения, чтобы получить сравнительно простые решения для рассматриваемого класса задач переноса при типичных для практики граничных условиях.

На первых стадиях переходного процесса тепло передается от поверхности к окружающей ее жидкости с помощью механизма одномерной теплопроводности, аналогичного кондуктивному переносу в полубесконечную теплопроводную среду. В таком случае все производные в направлении течения равны нулю, тогда можно легко получить решения уравнений (3.29) и (3.31) для этого малого промежутка времени. Хотя движение возникает, конвекция не оказывает влияния на этот одномерный перенос тепла.

Одним из первых исследований такого переходного процесса является работа, в которой рассматривались участки вдоль нагреваемой

поверхности, которых еще не достигало «влияния передней кромки», т. е. где наличие передней кромки нагреваемой поверхности еще не влияло на характеристики переноса.

Эта стадия эквивалентна переносу в среде, примыкающей к бесконечной вертикальной поверхности, т.е. одномерному переносу. Предполагалось, что окружающая среда неподвижна и имеет равномерную температуру. Переходный процесс начинался со ступенчатого изменения температуры стенки. Фактически предполагалось, что температура стенки мгновенно и равномерно изменялась, принимая некоторое другое значение T_0 , которое затем оставалось постоянным.

Если влияние кромки отсутствует, то параметры не зависят от x , и уравнения неустановившегося пограничного слоя (3.28) – (3.30) были решены после того, как в них были приравнены нулю все производные по x , т. е. использовалось приближение параллельного течения. Следовательно, перенос тепла осуществляется только теплопроводностью [6,7].

Причина сравнительной сложности решения задач нестационарного пограничного слоя заключается, во-первых, в наличии в его уравнениях наряду с членами, выражающими конвективное ускорение, еще дополнительного члена – локального ускорения и, во-вторых, в появлении наряду с граничными еще начальных условий.

Известно, что соотношение между величинами локального и конвективного ускорений характеризуется порядком величины числа Струхала, равного частному от деления характерной для данного движения длины на произведение характерных скорости и времени. Существенные особенности нестационарных движений проявляются с достаточной отчетливостью при сравнительно больших значениях числа Струхала. При малых значениях этого параметра достаточно пользоваться квазистационарными приемами, т.е. рассматривать нестационарное явление в каждый момент так, как будто оно стационарно, но имеет в качестве определяющих параметров их мгновенные значения [6,7].

3.7 Пограничный слой полубесконечной пластины

Рассмотрим полубесконечную пластину $0 \leq x \leq \infty$, обтекаемую потоком с постоянной скоростью $u = \text{const}$ в направлении оси x . Динамику начальной стадии течения не будем рассматривать. Рассмотрим стационарное течение. Будем считать, что $p(x) = p_\infty = \text{const}$, т.е. вдоль пластины отсутствует возмущение. Для стационарного про-

цесса в соответствии с теорией пограничного слоя запишем уравнения движения (3.24) и сплошности (3.25) в виде [6,9]

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (3.35)$$

Дополним уравнения граничными условиями (раздел 3.5) в виде

$$w_x|_{y=0} = 0, \quad w_y|_{y=0} = 0, \quad (3.36)$$

$$w_x|_{x=0, y>0} = u,$$

$$w_x|_{y \rightarrow \infty, 0 \leq x \leq 1} = u.$$

Из первого уравнения (3.34) выразим w_y

$$w_y = \left(v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^{-1} \quad (3.37)$$

и подставим во второе уравнение (3.35), получим

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^{-1} = 0. \quad (3.38)$$

Это уравнение третьего порядка. Для его интегрирования определим граничные условия. Поскольку из граничного условия (3.36) следует

$$w_y|_{y=0} = 0,$$

то из (3.37) следует, что числитель дроби должен быть равным нулю. Это означает, что

$$\left. \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0.$$

Решение уравнения (3.38) будем искать при следующих граничных условиях:

$$w_x|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0,$$

$$w_x|_{x=0, y>0} = u,$$

$$w_x|_{y \rightarrow \infty, 0 \leq x \leq 1} = u.$$

В соответствии с теорией Прандтля решение уравнения (3.38) будем искать в виде

$$w_x = f\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}}\right), \quad (3.39)$$

обозначим аргумент функции (3.39) через $\xi = \left(1/\sqrt{2\nu}\right) \cdot (y/\sqrt{x})$ и выполним преобразование производных уравнения (3.38):

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = f'(\xi) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{y}{\sqrt{x}}\right),$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = f'(\xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = f''(\xi) \cdot \frac{1}{2\nu} \frac{1}{x}.$$

Подставив в (3.38) производные для функции $f(\xi)$, запишем:

$$f' \cdot f''' - (f'')^2 + f \cdot f'^2 = 0 \quad (3.40)$$

Таким образом, задача для нахождения скорости w_x свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с условиями

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f(\infty) = u. \quad (3.41)$$

Эту задачу можно свести к решению задачи Коши для функции $\varphi(\xi)$. Не приводя подробных выкладок решения задачи Коши, изложим идею метода дальнейшего решения, ограничимся функцией, имеющий конечный предел на бесконечности $\varphi(\xi) = n = \text{const}$. Тогда функция вида $\varphi(\xi) = m^2 \varphi(\xi)$ должна будет удовлетворять уравнению (3.40). В этом случае будем иметь семейство решений уравнения (3.40). Для определённости m учтём, что функция $f(\xi)$ на бесконечности должна удовлетворять условию $f(\infty) = u$, тогда запишем равенство

$$f(\xi = \infty) = m^2 \varphi(\xi = \infty) = u, \quad (3.42)$$

подставим в (3.42) функцию $f(\infty) = n$, получим $m^2 \cdot n = u$.

Откуда выразим

$$m = \sqrt{\frac{u}{n}}.$$

Следовательно,

$$w_x = \frac{u}{n} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{u}{n}} \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right). \quad (3.43)$$

Есть решение задачи. В нём функция ϕ и константа n известны.

Решение уравнения (3.40) с недостающим условием для производной первого порядка $f'(\xi)$ можно найти методом «стрельбы» численно, а затем решить уравнение (3.40) с условиями (3.41), дополнив условием первой производной. $f'(\xi)$. Подробно об методе «стрельбы» изложено в [17,18].

На практике возникает задача определения сопротивления R_x в направлении оси Ox пластины конечной длины l и ширины b . Воспользуемся формулой, приведённой в [6], и запишем:

$$R_x = 2 \int_0^b dz \int_0^l \tau_{yx} dx = 2b \int_0^l \tau_{yx} \Big|_{y=0} dx,$$

(коэффициент 2 учитывает две стороны пластины), поскольку

$$\tau_{yx} \Big|_{y=0} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (3.44)$$

Учитывая (3.41) и (3.43), запишем (3.44) в виде

$$\begin{aligned} \tau_{yx} \Big|_{y=0} &= \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \left[\frac{u}{n} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{u}{n}} \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) \right] \Big|_{y=0} = \\ &= \mu \left(\frac{u}{n} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2v}} \phi'(0) \right) = \mu \left(\frac{u}{n} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2vx}}. \end{aligned}$$

В результате найдём сопротивление

$$R_x = 2b\mu \cdot \left(\frac{u}{n} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2v}} \cdot \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{u}{n} \right)^{3/2} \cdot \rho \cdot \sqrt{v} \cdot b \cdot \sqrt{l},$$

здесь $\mu = \rho v$.

Вычислим коэффициент сопротивления C_x по формуле [3,4]

$$C_x = R_x \frac{2}{\rho u^2 S}, \quad (3.45)$$

где $S = bl$.

Подставим в (3.45) R_x , получим

$$C_x = \frac{4\sqrt{2}}{n^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u} l} = 4 \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re}}.$$

Поскольку $4\sqrt{2}(1/n)^{3/2} \approx 1,328$ [3,4], то $C_x = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}$.

Эта формула хорошо описывает экспериментальные результаты для чисел Рейнольдса $Re \leq 3 \cdot 10^5$. Определим толщину пограничного слоя $\delta(x)$. Для этого возьмём в качестве малой величины параметр $\varepsilon = 0,005$, входящий в формулу скорости (3.27) $w_x = (1 - \varepsilon) u(x)$ и учитывая формулу (3.43), запишем:

$$\frac{u}{n} \cdot \phi \left(\sqrt{\frac{u}{n}} \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{\delta(x)}{\sqrt{x}} \right) = (1 - 0.005)u.$$

Отсюда найдём толщину пограничного слоя $\delta(x) = 5.6 \sqrt{\frac{v \cdot x}{u}}$.

Толщина пограничного слоя растёт с увеличением x , при больших значениях x нарушается теория пограничного слоя. Формула хорошо согласуется с экспериментальными данными при ламинарном течении в пограничном слое пластины. Под пограничным слоем в аэродинамике понимают тонкий слой, образующийся на поверхности обтекаемого тела, в котором проявляется эффект вязкости.

Пограничный слой характеризуется градиентом скорости потока, скорость которого меняется от нулевого значения на поверхности обтекаемого тела до скорости потока вне пограничного слоя [7,8].

Одной из важных проблем аэродинамики является определение положения точки перехода от ламинарного к турбулентному течению. Турбулентный пограничный слой намного толще ламинарного, и их толщины зависят от числа Рейнольдса Re , определяемого как произведение величины v на расстояние от передней кромки x . Толщина пограничного слоя δ дается следующими соотношениями [7]:

$$\delta_{лам}(x) = \frac{5,2x}{\sqrt{Re}}, \quad \delta_{турб}(x) = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re}}.$$

Величиной, характеризующей поперечный масштаб пограничного слоя, является так называемая толщина вытеснения δ^* , определяемая формулой [7,8]

$$\delta^* = \int \left(1 - \frac{w_x}{u} \right) dy .$$

Смысл этого определения связан с тем, что вследствие трения о стенку продольная компонента скорости в пределах пограничного слоя уменьшается, а это, в свою очередь, вызывает искажение линий тока, которое проявляется как оттеснение наружу набегающего потока. Поскольку расход жидкости через любое сечение трубки тока должен быть одинаковым, а u – компонента скорости уменьшается тем сильнее, чем больше расстояние от края пластины, сечение трубки тока должно расти с ростом x . Вытеснение приводит к тому, что картина линий тока становится искаженной и вне пограничного слоя. Таким образом, пограничный слой оказывает влияние на внешний поток.

3.8 Турбулентный перенос теплоты

При увеличении скорости течения жидкости или газа в среде самопроизвольно образуются многочисленные нелинейные фрактальные волны и обычные, линейные различных размеров, без наличия внешних, случайных, возмущающих среду сил и/или при их присутствии. Для расчёта подобных течений созданы различные модели турбулентности [3,4,9]. Волны появляются случайно. То есть их размер и амплитуда меняются хаотически в некотором интервале. Они возникают чаще всего либо на границе, у стенки, и/или при разрушении или опрокидывании волны. Они могут образоваться на струях. Турбулентность экспериментально открыта английским инженером Рейнольдсом в 1883 году при изучении течения несжимаемой жидкости (воды) в трубах.

Благодаря большой интенсивности турбулентного перемешивания турбулентные течения обладают повышенной способностью к передаче количества движения (и потому к повышенному силовому воздействию на обтекаемые твёрдые тела), передаче теплоты, ускоренному распространению химических реакций (в частности, горения), способностью нести взвешенные частицы, рассеивать звуковые и электромагнитные волны и создавать флуктуации их амплитуд и фаз, а в электропроводящей жидкости – генерировать флуктуирующее магнитное поле и т. д.

Обычно турбулентность наступает при превышении некоторого критического параметра, например числа Рейнольдса или Рэлея (в

частном случае скорости потока при постоянной плотности и диаметре трубы и/или температуры на внешней границе среды).

Одной из характеристик турбулентного течения является число Рейнольдса. По экспериментальным данным, в прямых круглых трубах при наибольшей возможной степени возмущённости течения у входа в трубу $Re_{кр} \gg 2300$.

Английский учёный Дж. У. Рэлей, исследуя причины возникновения конвекции, потери устойчивости распределения плотности жидкости в поле тяжести, установил, что критерий возникновения конвекции в слое жидкости толщиной h между двумя плоскостями с разностью температур ΔT имеет вид [8,9]

$$Ra = \frac{g\beta \cdot \Delta T \cdot l^3}{\nu a},$$

где g – ускорение свободного падения, l – характерный размер области жидкости, ΔT – перепад температур между стенками жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости, a – температуропроводность жидкости, β – коэффициент теплового расширения жидкости.

Критическое число Рэля $Ra \gg 1100 \div 1700$.

Турбулентное течение – течение жидкости или газа, при котором частицы жидкости совершают неупорядоченные, хаотические движения по сложным траекториям, при этом скорость, температура, давление и плотность среды испытывают хаотические флуктуации.

Из определения следует, что турбулентное движение состоит из регулярного течения мгновенной скорости w , описываемого осреднёнными значениями скоростей во времени \bar{w} , и из наложенного на него хаотического пульсационного течения w' [8]:

$$w = \bar{w} + w'. \quad (3.46)$$

При пульсации скорости происходит перенос механической энергии. Если в потоке есть перепад температуры, то пульсации скорости приводят к пульсации теплоты. Определим аналогичным образом температуру в неподвижной точке турбулентного потока следующим образом:

$$T = \bar{T} + T', \quad (3.47)$$

где \bar{T} – среднее во времени значение температуры, T' – пульсация температуры.

Причём интервал времени осреднения должен быть достаточно большим по сравнению с периодом пульсации, но достаточно малым по сравнению с каким-либо характерным для осреднённого движе-

ния интервалом времени, чтобы учесть возможные изменения средних скоростей и температуры во времени.

Пульсации скорости и температуры приводят к пульсации давления. Закон аддитивности конвективного теплообмена справедлив для отдельных струек пульсационного движения жидкости. Рассмотрим перенос энергии в турбулентном потоке жидкости.

Пусть в момент времени $t + dt$ скорость в фиксированной точке турбулентного потока имеет компоненты w_x и w_y , а температура в этой точке равна T . Далее через условную единичную поверхность за время dt проходит масса $\rho w_y dt$, кг/м², в направлении оси Oy переносится количество движения относительно оси Ox , равное $\rho w_y w_x dt$, кг/мс, и соответствующая этому процессу энтальпия $\rho w_y h dt \approx \rho c_p w_y T dt$. Тогда среднеинтегральное значение энтальпии q_y , Дж/(м³с), переносимое в направлении оси Oy за единицу времени через единичную поверхность, равно

$$q_y = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \rho c_p w_y T dt = \rho c_p \overline{w_y T}. \quad (3.48)$$

В (3.48) подставим (3.46) и (3.47) и, используя свойство среднеинтегрального осреднения, получим

$$q_y = \rho c_p \overline{w_y T} = \rho c_p \overline{(\bar{w}_y + w'_y) \cdot (T + T')} = \rho c_p (\bar{w}_y \bar{T} + \overline{w'_y T'}).$$

Аналогично определим среднеинтегральное значение количества движения относительно оси Ox в направлении оси Oy за единицу времени, через единицу поверхности, запишем:

$$j = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \rho w_y w_x dt = \overline{\rho w_y w_x} = \rho \cdot (\bar{w}_y \bar{w}_x + \overline{w'_y w'_x}).$$

В силу закона аддитивности можно получить для переноса количества движения относительно любых координат осей в направлении Ox , Oy и Oz . Таким образом, конвективный перенос жидкости или газа состоит из двух составляющих:

из осреднённого

$$q_{tr} = \rho c_p \overline{w'_y T'}$$

и из пульсационного

$$j_{tr} = - \overline{\rho w'_y w'_x}$$

переносов.

Рассмотрим течение вблизи стенки. Пусть осреднение скорости и температуры изменяется только в направлении оси Oy . Предполо-

жим, что за счёт пульсаций w' из слоя y в слой $y + dy$ переносится энтальпия $c_p \bar{T}'(y + dy)$. Плоскости y и $y + dy$ параллельны плоскости xz . Определим разность энтальпий $c_p [\bar{T}(y) - \bar{T}(y + dy)]$ на отрезке длиной пути смещения $(y + dy) - y = l'$. На длине l' пульсация не распадается, не диспергирует. В квазистационарном приближении распад пульсационного движения сопровождается изменением температуры в слое $(y + dy)$. В общем случае длина пути смещения l' не является постоянной величиной, а вероятностной характеристикой. Запишем

$$\begin{aligned} \bar{T}(y) - \bar{T}(y + dy) &= \bar{T}(y) - \bar{T} \cdot [(y + dy) + l'] = \\ &= -l' \cdot \frac{d\bar{T}}{dy} - \frac{l'^2}{2} \frac{d^2\bar{T}}{dy^2} - \dots \approx -l' \cdot \frac{d\bar{T}}{dy}. \end{aligned}$$

Тогда перенос теплоты и количества движения по оси y относительно оси Ox соответственно примет вид

$$q_{tr} = \rho c_p \overline{w'_y [\bar{T}(y) - \bar{T}(y + dy)]} = \rho c_p \overline{w'_y l'} \cdot \frac{d\bar{T}}{dy}, \quad (3.49)$$

$$j_{tr} = -\rho \overline{w'_y \cdot [\bar{w}_x(y) - \bar{w}_x(y + dy)]} = \rho \overline{w'_y l'} \cdot \frac{d\bar{w}_x}{dy}. \quad (3.50)$$

Отсюда следует, что энтальпия и количество движения j_T пропорциональны градиентам температур. С другой стороны, коэффициенты j_{T_p} и q_{T_p} равны [3,4,19]

$$q_{tr} = \rho c_p \varepsilon_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\lambda_{tr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y},$$

$$j_{tr} = -\rho \varepsilon_i \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \mu_{tr} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}.$$

Здесь λ_{tr} и μ_{tr} – соответственно коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения, а величины $\varepsilon_q = \lambda_{tr}/\rho c_p$, $\varepsilon_i = \mu_{tr}/\rho$ называют кинематическими коэффициентами переноса теплоты и количества движения, которые учитывают молекулярный механизм переноса.

В результате в направлении оси Oy теплота

$$q_{tr} = -(\lambda_{tr} + \lambda_{tr}) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y},$$

количество движения

$$j_{tr} = (\mu + \mu_{tr}) \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \quad (3.51)$$

Поскольку твёрдая стенка непроницаема для поперечных пульсаций w' , следовательно, на границе

$$w' \Big|_{y=0} = 0.$$

Тогда на стенке $\lambda_{tr} = 0$ и $\mu_{tr} = 0$. Вдали от стенки λ_{tr} и μ_{tr} во много раз превышают соответственно значения λ и μ , т.е. $\lambda_{tr} \gg \lambda$ и $\mu_{tr} \gg \mu$, тогда приближённо можно считать $\lambda_{tr} = 0$ и $\mu = 0$.

Возвращаясь к задаче о пограничном слое в направлении оси Oy , запишем уравнения энергии (3.18), движения (3.11) и сложности (3.12) с учётом турбулентного переноса теплоты и количества движения в осреднённой записи значений скорости и температуры в следующем виде:

$$\rho c_p \cdot \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_{tr} + \lambda_{tr}) \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (3.52)$$

$$\rho \cdot \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} (\mu + \mu_{tr}) \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} = 0. \quad (3.54)$$

Уравнения (3.52) – (3.54) справедливы для турбулентного переноса в направлении оси $Ox \ll$ оси Oy , для случая, когда гидродинамический пограничный слой $\delta \ll l$ и тепловой пограничный слой $\delta_{tr} \ll l$, где l – длина пластины. В общем случае λ_{tr} и μ_{tr} являются функциями координат и времени. Для полноты системы уравнений (3.52) – (3.54) необходимо определить вид λ_{tr} и μ_{tr} .

Возвращаясь к уравнениям (3.51) и (3.50) для турбулентного переноса

$$j_{tr} = \overline{\rho w'_y l'} \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y},$$

записываем:

$$w'_y = l' \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}.$$

Принимая во внимание, что

$$w'_x \cong l' \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y},$$

тогда

$$\overline{w'_x w'_y} = l'^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2.$$

Учитывая это, запишем уравнение переноса в виде

$$j_{tr} - \rho \cdot \overline{w'_x w'_y} = \rho \cdot l'^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2, \quad (3.55)$$

где $l \sim l'$ – масштаб турбулентности.

Преобразуем (3.49), для этого из (3.55) определим

$$\overline{w'_x w'_y} = l'^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2,$$

тогда получим

$$q_v = \rho c_p l'^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3.56)$$

где $l = \kappa \cdot y$, κ – коэффициент пропорциональности.

Формулы (3.55) и (3.56) получены Л. Прандтлем [9]. В частности, для области турбулентного течения, где молекулярным трением можно пренебречь, безразмерную величину κ можно считать равной 0,4.

Таким образом, в первом приближении значения λ_T и μ_T определены. Запишем формулы для этих величин:

$$\lambda_v = \mu_{tr} = l'^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right| = (\kappa y)^2 \left| \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right|. \quad (3.57)$$

Для описания турбулентного переноса теплоты и количества движения получили замкнутую систему, состоящую из уравнений (3.52) – (3.54), (3.57) [9].

3.9 Гидродинамика и теплообмен при течении жидкости в трубах

Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является сложным, поскольку стенки трубы оказывают влияние на характер течения. Влияние сил вязкости в поперечном сечении приводит к изменению профиля течения жидкости в трубе, температуры жидко-

сти как по сечению, так и по длине трубы и, как следствие, меняется теплоотдача.

Течение жидкости в трубах может быть ламинарным и турбулентным [7]. Режим течения жидкости в трубах определяется величиной числа Рейнольдса $Re = \bar{w}d/\nu$, где \bar{w} – средняя скорость течения жидкости, d – внутренний диаметр трубы. При Рейнольдсе $Re > 2300$ течение жидкости носит турбулентный характер. При движении вдоль трубы у стенок образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого постоянно нарастает, а на некотором расстоянии от входа в трубу l_n он сливается и в трубе устанавливается постоянное распределение скорости. Этот участок гидродинамической стабилизации и имеет место для обоих режимов течения жидкости в трубе. При достижении критической толщины пограничного слоя происходит смена режима течения ламинарного на турбулентный режим. При $Re > 5 \cdot 10^4$ быстро развивается турбулентный пограничный слой, течение в пограничной зоне неустойчиво. Если труба имеет острую кромку, то образуются турбулентные вихри, быстро разрушающие ламинарный пограничный слой [6,7].

Длина гидродинамического участка зависит от числа Рейнольдса: для ламинарного течения

$$l_n / d = 0,065 Re ,$$

для турбулентного

$$l_n / d = 1,45 Re^{1/4} .$$

Для стабилизированного потока, когда выполняется неравенство $l > l_n$, скорости по течению потока при изотермическом ламинарном движении распределяются по параболе (профиль Пуазейля) в виде

$$w = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] ,$$

где r_0 – радиус трубы, w_{\max} – максимальная скорость на оси трубы.

Средняя скорость равна $\bar{w} = 0,5 w_{\max}$. При ламинарном движении для больших чисел Рейнольдса толщина ламинарного пограничного слоя составляет малую величину по отношению к диаметру трубы, однако этот слой является основным термическим сопротивлением, через которое тепло передаётся теплопроводностью.

При стабилизированном турбулентном течении жидкости в трубах распределение скорости по поперечному сечению имеет вид усечённой параболы, с максимумом скорости на оси трубы. С увеличе-

нием числа Рейнольдса профиль распределения скорости у стенки сильно изменяется, переходя в пологий на оси трубы, что соответствует отношению скоростей $w/w_{\max} = 0,8 \div 0,9$. По мере движения жидкости вдоль трубы происходит нагрев или охлаждение слоёв жидкости вблизи стенки. При этом в начале трубы центральное ядро жидкости ещё имеет температуру, равную температуре жидкости на входе в трубу, и в теплообмене не участвует. В основном все изменение температуры сосредоточено в пристенных слоях. Следовательно, у поверхности трубы в её начальной части образуется тепловой пограничный слой, толщина которого при удалении от входа увеличивается. Причём на определённом расстоянии от входа, равном $l_{нТ}$, тепловые слои смыкаются, в дальнейшем вся жидкость участвует в теплообмене. Участок длиной $l_{нТ}$ называется участком тепловой стабилизации, который имеет место быть при ламинарном и турбулентном течении жидкости в трубе. За участком тепловой стабилизации изменяется средняя по сечению температура. Температура жидкости на оси трубы стремится к тепловому равновесию, при этом избыточная температура стремится к нулю $\vartheta \rightarrow 0$.

Длина участка тепловой стабилизации зависит от числа Прандтля. Если значение $Pr < 1$, то $l_{нТ} < l_n$, а для значения $Pr > 1$, то $l_{нТ} > l_n$.

При ламинарном режиме течения длину участка тепловой стабилизации можно определить следующим образом. Если температура стенки постоянна $T_{cr} = \text{const}$, то $l_{нТ}/d = 0,005 \text{ Re}_{\text{жид}}$, а если поток на стенке постоянен $q_{сТ} = \text{const}$, то $l_{нТ}/d = 0,07 \text{ Re}_{\text{жид}}$.

3.10 Вязкостный и вязкостно-гравитационный режимы теплоотдачи

При ламинарном течении жидкости в трубе может иметь место два режима неизотермического движения: вязкостный и вязкостно-гравитационный, для которых режимы теплоотдачи различны [7,8].

Вязкостный режим имеет место при преобладании сил вязкости над подъемными силами, т. е. ему соответствует течение вязких жидкостей при отсутствии влияния естественной конвекции. Вероятность вязкостного режима возрастает, если мал диаметр трубы, мал температурный напор, а вязкость велика.

Вязкостно-гравитационный режим имеет место в том случае, когда подъемные силы достаточно велики, при этом на вынужденное движение жидкости накладываются токи естественной конвекции.

При вязкостном неизотермическом режиме (рис. 3.4) профиль скорости отклоняется от параболического Пуазейлевского (1) из-за изменения вязкости и его форма зависит от процесса.

Если происходит нагревание, то уменьшается вязкость каплевидных жидкостей и скорость в пристеночных слоях повышается (2), при охлаждении – наоборот (3). Этот факт при расчете коэффициента теплоотдачи так же, как и при омывании плоской пластины, будет учитываться степенной зависимостью отношения чисел Прандтля, взятых при температуре жидкости и температуре стенки.

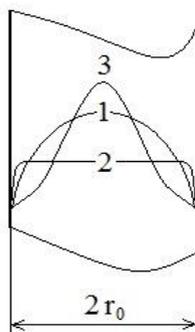


Рис. 3.4. Вязкостный неизотермический режим

В случае вязкостно-гравитационного режима на распределение скорости накладываются токи естественной конвекции. Если вынужденного движения нет, то профиль скорости свободного движения жидкости у стенки представлен на рис. 3.5. Скорость равна нулю как на стенке (условие «прилипания»), так и на внешней границе гидродинамического пограничного слоя (отсутствует вынужденное движение жидкости).

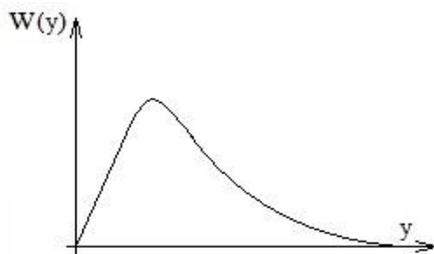


Рис. 3.5. Скорость свободного движения

В зависимости от взаимного направления свободного и вынужденного движения возможны три случая их совместного проявления.

Случай 1 [8]. Совпадение направлений (рис. 3.6) свободного (3) и вынужденного (2) движения соответствует течению жидкости в вертикальной трубе вверх и ее нагреванию или течению жидкости вниз и ее охлаждению.

В этом случае скорость у стенки возрастает (1), а эпюра скорости имеет два максимума.

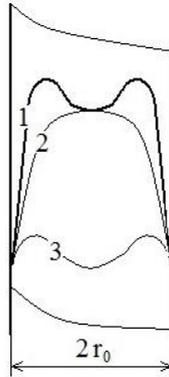


Рис. 3.6. Эпюра скорости

Случай 2 [8]. Перпендикулярное направление свободного и вынужденного движения соответствует течению жидкости в горизонтальной трубе.

В этом случае возникает поперечная циркуляция жидкости (рис. 3.7) с восходящими вдоль стенок потоками при нагревании (а) и с нисходящими – при охлаждении (б).

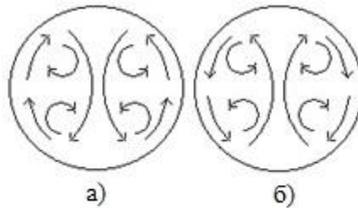


Рис. 3.7. Поперечная циркуляция жидкости

Теплоотдача увеличивается по сравнению с первым случаем за счет дополнительного перемешивания жидкости.

Случай 3 [8]. Противоположное направление (рис. 3.8) свободного (3) и вынужденного (2) движения соответствует течению жидкости в вертикальной трубе вверх и ее охлаждению или течению жидкости вниз и ее нагреванию.

В этом случае скорость у стенки убывает и даже могут возникнуть области с обратным движением жидкости (1). В этом случае достигается самое большое значение коэффициента теплоотдачи из-за еще большего перемешивания жидкости.

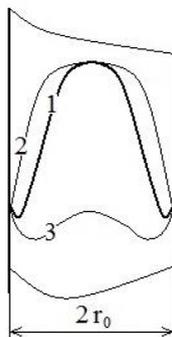


Рис. 3.8. Эпюра скорости с обратным потоком

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при неизотермическом течении ламинарного движения с параболическим распределением скоростей может не быть. Изменение течения находит свое отражение и в теплоотдаче.

3.11 Теплообмен при течении жидкости в трубе

Основные уравнения переноса [10,22]

Уравнения переноса массы, импульса и тепла при ламинарном и турбулентном течении однофазных жидкостей в трубе выводятся из основных законов: сохранения массы, импульса, энергии, вязкого трения Ньютона, теплопроводности Фурье. Уравнения неразрывности, движения и переноса тепла с учётом изменения свойств жидкости образуют систему для расчёта полей скоростей и температуры. Эта система замкнута для ламинарного режима течения. Для турбулентных режимов течения приходится использовать гипотезы или полуэмпирические модели, позволяющие замкнуть систему уравнений. Так, например, для течения двухфазного потока, в условиях кипения или конденсации, эмпирический подход широко используется.

Рассмотрим основные законы сохранения в дифференциальной форме [9].

Уравнение сохранения массы (сплошности или неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = j, \quad (3.58)$$

где j – источник притока массы, кг/(м³с).

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) при отсутствии источников и стоков массы

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0. \quad (3.59)$$

Уравнение динамики сплошной среды

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{Div} P - j(\mathbf{w} - \mathbf{w}_j), \quad (3.60)$$

где \mathbf{F} – вектор объёмных сил, \mathbf{w}_j – вектор скорости присоединяемой массы, \mathbf{P} – тензор напряжений.

В случае вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, когда закон трения Ньютона имеет вид $\tau = \mu (d\mathbf{w}/dn)$,

$$P = 2\mu \dot{S} - pE, \quad (3.61)$$

где E – единичный тензор, \dot{S} – тензор скоростей деформации.

Уравнением движения в этом случае является уравнение Навье–Стокса

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + (\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (3.62)$$

Уравнение баланса полной энергии сплошной среды

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) &= \rho \cdot \mathbf{F}\mathbf{w} + \operatorname{div} (P \cdot \mathbf{w}) + q_v - \\ &- j \cdot \left((u - u_j) + \frac{\mathbf{w}^2}{2} - \frac{\mathbf{w}_j^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.63)$$

где u – внутренняя энергия, Дж/кг, u_j – внутренняя энергия источников массы, q_v – удельная мощность тепловых источников, Вт/м³.

Уравнение баланса кинетической и внутренней энергии:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} \right) = \rho \cdot \mathbf{F}\mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \operatorname{div} P, \quad (3.64)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = q_v + P\dot{S}. \quad (3.65)$$

Уравнение переноса тепла

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } T \right) = \lambda_T \nabla^2 T + q_v. \quad (3.66)$$

В уравнениях (3.58) – (3.66) используются теплофизические параметры вида: q_v – объёмный источник, $c_p = \text{const}$, $u = \text{const}$, $\lambda_T = \text{const}$, $\rho = \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_0))$.

3.12 Случай вязкого течения

Запишем уравнения переноса для вязкого течения в трубах [9].

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{w}) = 0, \quad (3.67)$$

Уравнение движения

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \text{grad } p + \rho \frac{\nu}{3} \cdot \text{grad}(\text{div } \mathbf{w}) + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{w}, \quad (3.68)$$

где $(D/dt) = (\partial/\partial t) + \mathbf{w}(\text{grad } \mathbf{w})$.

Если плотность ρ и вязкость μ не зависят от давления и температуры, то применимы уравнения вида (3.62) – (3.65). При отсутствии массовых сил уравнение (3.62) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (3.69)$$

При течении жидкости с постоянными физическими свойствами в прямой трубе неизменного сечения можно пренебречь массовыми силами, уравнение движения можно записать:

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \nu \cdot \Delta \mathbf{w}, \quad (3.70)$$

Граничные и начальные условия. Для решения задачи необходимо уравнения дополнить краевыми условиями. В гидродинамических задачах на твёрдых стенках задаются условия прилипания $\mathbf{w}_\Gamma = 0$, во входном сечении задаётся профиль скорости $\mathbf{w}_{\text{вх}}$, в выходном сечении $\mathbf{w}_{\text{вых}}$ или $d\mathbf{w}_{\text{вых}}/dl = 0$. На границах двух сред применяется условие «сшивки» давления с учётом капиллярного эффекта. Например, для капли, пузыря радиусом r_0

$$p_1 = p_2 + \frac{2\sigma}{r_0},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, Па·м. Условие «сшивки» касательных напряжений

$$\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial n}.$$

В случае стационарного уравнения движения (3.70) приобретает стационарный вид

$$(\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{w}.$$

Условие $p = \text{const}$ по сечению выполняется для ламинарного стабилизированного движения жидкости в трубе:

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{w} = 0,$$

Уравнение распространения тепла. В случае тепловыделяющей среды с произвольной зависимостью теплофизических свойств от температуры и давления при учёте только переноса теплопроводностью и конвективного механизма уравнение распространения тепла можно записать:

$$\rho c_p \frac{DT}{dt} = \text{div}(\lambda_{\tau} \cdot \text{grad } T) + q_{\Gamma} + \beta T \frac{DT}{dt} + \mu \cdot \Phi, \quad (3.71)$$

где $\mu\Phi$ – диссипативная функция.

В случае, когда теплофизические свойства постоянны и при равенстве теплоёмкостей $c_p = c_v$, $\mu\Phi = 0$, уравнение (3.71) запишем:

$$\rho c_p \frac{DT}{dt} = \text{div}(\lambda_{\tau} \cdot \text{grad } T) + q_{\Gamma}.$$

Для решения тепловых задач необходимо для выполнения условия полноты задачи добавить начальные и граничные условия.

Например, начальное условие

$$T|_{t=0} = T_0,$$

граничное условие

$$T|_n = T_w$$

или

$$-\lambda_{\tau 1} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_n = q.$$

На границах разных сред необходимо ещё задать условие «сшивки»

$$-\lambda_{r1} \frac{\partial T_{w1}}{\partial n} \Big|_n = -\lambda_{r2} \frac{\partial T_{w2}}{\partial n} \Big|_n,$$

$$T_{w1} \Big|_n = T_{w2} \Big|_n.$$

В случае условия симметрии или теплоизоляции граничное условие запишем:

$$-\lambda_{r2} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_n = 0.$$

На границе теплообмена (закон Ньютона) стенки с жидкостью граничное условие можно записать:

$$-\lambda_{r1} \frac{\partial T_w}{\partial n} \Big|_{n=0} = \alpha(T_w - T_{cp}) = -\lambda_{cp} \frac{\partial T_{cp}}{\partial n} \Big|_{n=0},$$

где T_{cp} – средняя температура жидкости в канале, α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²К).

При наличии фазового перехода (кипение, конденсация) на границе сред граничное условие записывается с учётом действия источника или стока тепла

$$-\lambda_{r1} \frac{\partial T_w}{\partial n} \Big|_{n=0} = \pm (\rho w) q_{\phi} - \lambda_{cp} \frac{\partial T_{cp}}{\partial n} \Big|_{n=0},$$

где ρw – массовая скорость, кг/(м²с), q_{ϕ} – удельная теплота фазового перехода, Дж/кг.

На изотермической поверхности жидкости действует касательное напряжение, связанное зависимостью поверхностного напряжения от температуры:

$$\sigma = \sigma_0 [1 + \beta_{\sigma}(T - T_0)],$$

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \sigma_0 \beta_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n} (T - T_0),$$

где ξ – касательная к поверхности.

При течении в трубе часто возникает необходимость использовать уравнение теплопроводности для твёрдого тела. В этом случае задача будет сопряжённой. Запишем уравнение теплопроводности для твёрдого тела:

$$\rho c_p \frac{DT}{dt} = \text{div}(\lambda_r \cdot \text{grad } T) + q_v.$$

Решение задачи переноса тепла часто решают в безразмерном виде, введём масштаб длины l , скорости w_0 , давления ρw_0^2 , температуры ΔT , времени l/w_0 , запишем безразмерные переменные в виде $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{y} = y/l$, $\tilde{z} = z/l$, $\tilde{r} = r/l$, $\tilde{w}_x = w_x/w_0$, $\tilde{w}_y = w_y/w_0$, $\tilde{w}_z = w_z/w_0$, $\rho = \rho/\rho w_0^2$, $\theta = (T - T_0)/\Delta T$, $\tilde{t} = t \cdot w_0/l$. Тогда уравнения переноса в случае течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами записываются следующим образом (опускаем знак тильда) [8,9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w_x, \\ \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w_y - Fr + \text{Ar} \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^2 \theta + q, \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

3.13 Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением

Эта задача известна в литературе [20,26] как «начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности в круге». В соответствии с [20] рассмотрим задачу о горизонтальной цилиндрической трубе радиусом r_0 , погружённой в покоящуюся жидкость, пусть внутри в момент времени $t = 0$ возникает постоянный продольный градиент давления $-\partial p/\partial z = \gamma = \text{const}$, который постоянен в последующие моменты времени. Далее пусть ось z совпадает с осью трубы, а вдоль оси скорость $w_z \neq 0$, $w_x = w_y = 0$, и $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$. Пренебрегая действием сил тяжести из уравнения Навье–Стокса (3.62), с учётом условий:

$$\text{div } \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_r, \quad r \in \delta D, \quad t \geq t_0,$$

где δD – непроницаемая граница области D ,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0(x, y, z), \quad r \in \delta D \cup D, \quad t = t_0,$$

и ограничения решения внутри замкнутой области D

$$|\mathbf{w}| = \infty, \quad r \in D.$$

Запишем начально-краевую задачу в круге D с границей δD в виде

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma, \quad |w_z| < \infty, \quad (x, y) \in D, \quad (3.72)$$

с начальным условием

$$w_z(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (3.73)$$

с граничным условием

$$w_z(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \delta D, \quad t \geq 0. \quad (3.74)$$

В соответствии с методикой решения [20] перейдём к полярной системе координат (r, φ) и введём новую неизвестную функцию:

$$u(r, \varphi, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - w_z(r, \varphi, t).$$

Тогда (3.72) – (3.74) запишем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3.75)$$

начальное условие

$$u(r, \varphi, 0) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (3.76)$$

граничное условие

$$u(a, \varphi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.77)$$

Найдём частное решение уравнений (3.75) – (3.77) методом разделения переменных (при $r = a$):

$$u(r, \varphi, t) = \bar{u}(r, \varphi) \cdot T(t).$$

Тогда получим

$$\frac{\bar{u}_t}{\nu T} = \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \right) \cdot \frac{1}{\bar{u}} = -\frac{b}{a^2},$$

где b – произвольная константа. Задача [22] свелась к задаче Штурма – Лиувилля для оператора Лапласа в круге:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \right) = -\frac{b}{a^2} \bar{u}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3.78)$$

граничное условие

$$\bar{u}(a, \varphi) = 0, \quad |\bar{u}| < \infty. \quad (3.79)$$

Решение (3.78) ищем в виде $\bar{u}(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$, подставим в (3.79) и преобразуем к виду

$$\frac{1}{R} \cdot \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{k}{a^2 r} r^2 R \right) = -\Phi'' \frac{1}{\Phi} = k,$$

где k – произвольная константа.

Для определения $\Phi(\varphi)$ задача сводится к задаче Штурма-Лиувилля на отрезке с условием периодичности $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$:

$$\Phi'' + \eta \cdot \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Решение этой задачи в соответствии с [19] примет вид

$$\eta_n = n^2, \quad \Phi(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для каждого значения $\eta_n = n^2$ имеем задачу Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя:

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{b}{a^2} r^2 - n^2 \right) \cdot R &= 0, \\ 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq r < a, \\ R(a) = 0, \quad |R| < \infty. \end{aligned}$$

Решение этой задачи в соответствии с [22]:

$$R_n(r) = J_n \left(\frac{\sqrt{b_\kappa^n}}{a} r \right),$$

где J_n – функция Бесселя n -го порядка, b_κ^n – κ -й корень уравнения $J_n(\sqrt{b^n}) = 0$, а $\kappa = 1, 2, 3, \dots$. Возвращаясь к уравнению (3.78), запишем:

$$T_t + \frac{v \cdot b_\kappa^n}{a^2} T = 0,$$

общее решение этого уравнения можно записать:

$$T_{n\kappa}(t) = A \cdot \exp \left(\frac{v \cdot b_\kappa^n}{a^2} t \right).$$

Решение (3.75) – (3.77) будем искать в виде ряда

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_n \left(\frac{\sqrt{b_\kappa^n}}{a} r \right) \cdot (A_{n\kappa} \cos(n\varphi) + B_{n\kappa} \sin(n\varphi)) \cdot \exp \left(\frac{v \cdot b_\kappa^n}{a^2} t \right).$$

Учитывая начальное условие (3.76), запишем:

$$u(r, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{0\kappa} J_0 \left(\frac{\sqrt{b_\kappa^0}}{a} r \right) \cdot \exp \left(\frac{v \cdot b_\kappa^0}{a^2} t \right). \quad (3.80)$$

Для определения коэффициентов разложения (3.80) воспользуемся свойством ортогональности собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя [21]:

$$\int_0^a r \cdot J_n \left(\frac{\sqrt{b_\kappa^0}}{a} r \right) \cdot J_n \left(\frac{\sqrt{b_{\kappa'}^0}}{a} r \right) dr = \frac{a^2}{2} J_n'^2 \left(\sqrt{b_\kappa^0} \right) \cdot \delta_{\kappa\kappa'},$$

где $\delta_{\kappa\kappa'}$ – символ Кронекера. Коэффициенты $A_{0\kappa}$ определяются путём подстановки решения (3.80) в начальное условие (3.76):

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{0\kappa} J_0 \left(\frac{\sqrt{b_\kappa^0}}{a} r \right) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2).$$

Умножим обе части последнего выражения на $r \cdot J_0 \left(\frac{\sqrt{b_\kappa^0}}{a} r \right)$, ин-

тегрируем по переменной r от 0 до ∞ и, учитывая условие ортогональности для функции Бесселя [22], получим равенство

$$A_{0\kappa'} \frac{a^2}{2} J_1^2 \left(\sqrt{b_{\kappa'}^0} \right) = \frac{\gamma}{4\mu} \int_0^a r \cdot (a^2 - r^2) \cdot J_0 \left(\frac{\sqrt{b_{\kappa'}^0}}{a} r \right) dr.$$

Из последнего найдём

$$A_{0\kappa'} = \frac{2a^2\gamma}{\mu \cdot (b_{\kappa'}^0)^{3/2} J_1 \left(\sqrt{b_{\kappa'}^0} \right)}.$$

В итоге получим решение (3.72) – (3.74) в виде

$$w_z(r, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - \frac{2a^2\gamma}{\mu} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\sqrt{b_\kappa^0} \frac{r}{a} \right)}{(b_\kappa^0)^{3/2} J_1 \left(\sqrt{b_\kappa^0} \right)} \cdot \exp \left(\frac{v \cdot b_\kappa^0}{a^2} t \right), \quad (3.81)$$

где b_κ^0 – корни уравнения $J_0 \left(\sqrt{b^0} \right) = 0$. При значении $t \rightarrow \infty$ из (3.81) получим распределение Пуазеля [6]

$$w_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2).$$

3.14 Метод определения коэффициента теплоотдачи при гидродинамически и термически стабилизированном течении жидкости в прямой круглой трубе

Будем полагать, что жидкость несжимаемая, ее физические параметры постоянны, теплотой трения можно пренебречь. Уравнение энергии для осесимметричного стационарного потока, записанного в цилиндрических координатах, приобретает следующий вид [26]:

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \lambda_r \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right).$$

Рассмотрим случай осесимметричного прямолинейного ламинарного движения жидкости в трубе. В этом случае скорость можно будет приравнять к нулю, т.е. $w_r = 0$. Далее полагая, что перенос тепла в радиальном направлении много больше, чем в осевом, членом $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ в уравнении можно будет пренебречь, следовательно, уравнение переноса тепла примет вид [23,24]

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_r \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Если перенос осуществляется теплопроводностью и турбулентностью, тогда

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda_r + \lambda_{tr}) r \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

где λ_{tr} – турбулентный коэффициент теплопроводности.

Примем, что поток на стенке $q_{ст} = \text{const}$, тогда из уравнения теплового баланса

$$G \cdot c_p d\bar{T}_{жид} = q_{ст} dS_{цил},$$

где $\bar{T}_{жид}$ – осреднённая температура жидкости по энтальпии в сечении трубы.

Учтём, что площадь поверхности цилиндра $S_{цил} = 2\pi r_0 x$, где r_0 – радиус трубы; а расход жидкости $G = \rho \bar{w}_x S$, где $S = \pi r_0^2$ – площадь сечения трубы, тогда предыдущую формулу запишем [8]:

$$\frac{d\bar{T}_{жид}}{dx} = \frac{2 q_{ст}}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \frac{2\alpha (T_{ст} - \bar{T}_{жид})}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \text{const}, \quad (3.82)$$

где \bar{w}_x – средняя скорость в сечении в жидкости,

В рассматриваемых условиях средняя температура жидкости будет линейной функцией по x , т. к. при постоянном значении коэффициента теплоотдачи $\alpha = \text{const}$ (стабилизированное течение) по линейному закону изменяется не только $\bar{T}_{\text{жид}}$, но и температура стенки:

$$T_{\text{ст}} - \bar{T}_{\text{жид}} = \frac{q_{\text{ст}}}{\alpha} = \text{const}.$$

Подставив (3.82) в (3.58), получим

$$\rho c_p w_x \frac{2 q_{\text{ст}}}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda_{\text{т}} + \lambda_{\text{тр}}) r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.83)$$

Обезразмерим последнее уравнение, обозначим $\tilde{w}_x = w_x/\bar{w}_x$ и $\tilde{r} = r/r_0$, опуская значок тильда, запишем (3.83) в виде [19]

$$2 q_{\text{ст}} w_x r \cdot r_0 = \frac{\partial}{\partial r} \left((\lambda_{\text{т}} + \lambda_{\text{тр}}) r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.84)$$

Применяя метод разделения переменных и интегрируя в пределах от 0 до r_0 и от 0 до 1, уравнение (3.84) приведем к виду

$$2 q_{\text{ст}} r_0 \cdot \int_0^r w_x r dr = (\lambda_{\text{т}} + \lambda_{\text{тр}}) r \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Откуда следует:

$$dT = \left(\frac{2 q_{\text{ст}} r_0}{(\lambda_{\text{т}} + \lambda_{\text{тр}}) \cdot r} \cdot \int_0^r w_x r dr \right) dr. \quad (3.85)$$

Определим среднекалориметрическую (осреднённая по энтальпии) температуру жидкости при постоянных теплоемкости и плотности следующим образом:

$$\bar{T}_{\text{жид}} = \frac{1}{S_0 \bar{w}_x} \int_0^{S_0} w_x T dS,$$

где $S = \pi r^2$, дифференцируя $dS = 2\pi r dr$, в переменных r запишем

$$\bar{T}_{\text{жид}} = \frac{1}{r_0^2 \bar{w}_x} \int_0^{r_0} w_x T r dr. \quad (3.86)$$

Интегрируя (3.86) по частям, получим

$$\bar{T}_{\text{жид}} = T_{\text{ст}} - 2 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^r w_x r dr \right) dT. \quad (3.87)$$

Подставим в (3.87) выражение dT из (3.85), в результате (3.87) примет вид [26]

$$\bar{T}_{\text{жид}} = T_{\text{ст}} - 2 \cdot \int_0^r w_x r dr \cdot \left(\frac{2q_c r_0}{(\lambda_r + \lambda_r)} \frac{1}{r} \cdot \left(\int_0^r w_x r dr \right) dr \right)$$

или

$$\bar{T}_{\text{жид}} = T_{\text{ст}} - \frac{4q_{\text{ст}} r_0}{\lambda} \cdot \int_0^1 \left(1 + \frac{\lambda_r}{\lambda_r} \right)^{-1} \frac{1}{r} \cdot \left(\int_0^r w_x T r dr \right)^2 dr,$$

откуда следует

$$\frac{(T_{\text{ст}} - \bar{T}_{\text{жид}}) \lambda_r}{2q_{\text{ст}} r_0} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^1 \left(1 + \frac{\lambda_r}{\lambda_r} \right)^{-1} \frac{1}{r} \cdot \left(\int_0^r w_x T r dr \right)^2 dr.$$

По определению

$$\frac{(T_{\text{ст}} - \bar{T}_{\text{жид}}) \cdot \lambda_r}{2q_{\text{ст}} \cdot r_0} = \frac{\lambda_r}{\alpha d} = \frac{1}{Nu_d},$$

тогда

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \cdot \int_0^1 \left(1 + \frac{\lambda_r}{\lambda_r} \right)^{-1} \frac{1}{r} \cdot \left(\int_0^r w_x T r dr \right)^2 dr, \quad (3.88)$$

где d – диаметр трубы.

Уравнение (3.88) было получено Лайоном [3], оно универсально, поскольку оно применимо как для ламинарного, так и для турбулентного течения. Если известно распределение скорости, то можно рассчитать коэффициент теплоотдачи.

Из формулы (3.88) следует, что теплоотдача при ламинарном движении жидкости в трубе определяется критерием Нуссельта $Nu_d = da/\lambda$. Для ламинарного течения интеграл Лайона запишем:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{r} \cdot \left(\int_0^{r_0} w_x r dr \right)^2 dr. \quad (3.89)$$

При гидродинамическом стабилизированном течении профиль скорости $w = w_{\text{max}} \cdot (1 - (r/r_0)^2)$ или в безразмерном виде $w_x = 2(1 - r_0^2)$. Подставим его в (3.89), тогда

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{r} \cdot \left(\int_0^r 2 \cdot (1 - r^2) r dr \right) dr = \frac{11}{48} \approx 1,36. \quad (3.90)$$

Следовательно, при стабилизированной теплоотдаче критерий Нуссельта постоянен. При постоянной температуре стенки значение Нуссельта для параболического распределения скорости будет $Nu_d = 3,66$. Такое распределение будет иметь место при исчезающе малых температурных напорах или при неизменных параметрах жидкости. Поэтому расхождение полученного результата с опытными данными может быть очень велико.

В настоящее время практические расчеты ведутся по эмпирическим формулам. На рис. 3.9 [9] представлены результаты зависимости критерия Нуссельта Nu от переменной $Pe(d/x)$ при ламинарном течении для разных случаев. В частности, для трубы минимальное значение Нуссельта равно 3,66.

Повышенное значение коэффициента теплоотдачи во входном участке объясняется тем, что температурное поле формируется постепенно на некотором расстоянии от места начала обогрева. При этом градиент температуры вблизи стенки трубы меняется от бесконечности в начальном сечении, где теоретически температура по всему сечению постоянна. На стенке имеет место скачок температуры от температуры $T_{ст}$ до T , соответствующего уже стабилизированному температурному полю.

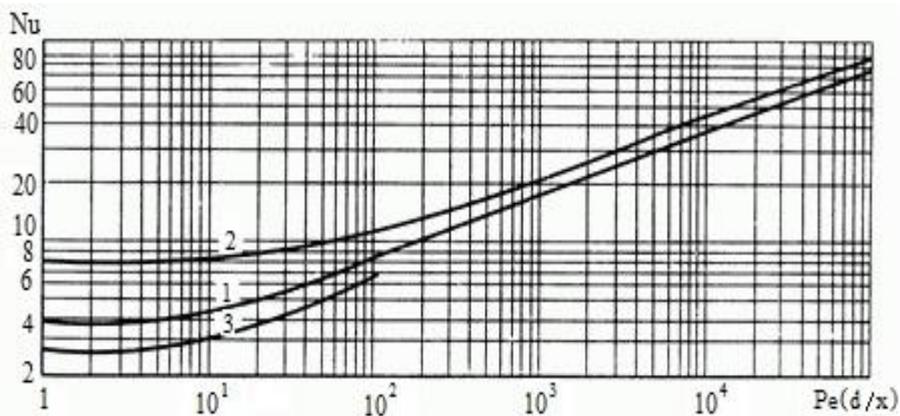


Рис. 3.9. Зависимость критерия Нуссельта Nu от $Pe(d/x)$ при ламинарном течении (α отнесено к среднелогарифмической разности температур):
1 – труба; 2 – плоская стенка; 3 – равносторонний треугольник

При задании условия постоянства плотности теплового потока на стенке трубы ($q = \text{const}$) значение среднего коэффициента теплоотда-

чи оказывается несколько более высоким, чем при температуре $T_{ст} = \text{const}$. На рис. 3.9 результаты исследований аппроксимированы [27]. Формулы аппроксимации приведены в табл. 3.5.

В работе [27] представлены результаты экспериментальных исследований теплоотдачи различных жидкостей при ламинарном течении в трубах (рис. 3.10).

Таблица 3.5. Формулы для расчёта теплоотдачи для ламинарного движения жидкости с различной формой сечения [27]

Профиль канала	Эквивалентный диаметр	Область чисел Pe $d_{экр} / l$	Число Нуссельта
Круглая труба диаметром d	$d_{экр} = d$	>12 <12	$Nu = 1,61(Pe d/l)$ $Nu = 3,66$
Плоская щель шириной δ	$d_{экр} = 2 \delta$	>70 <70	$Nu = 1,85(Pe d_{экр}/l)^{1/3}$ $Nu = 7,50$
Равносторонний треугольник, длина стороны h	$d_{экр} = 0,58 h$	>7 <7	$Nu = 1,50(Pe d_{экр}/l)^{1/3}$ $Nu = 2,70$

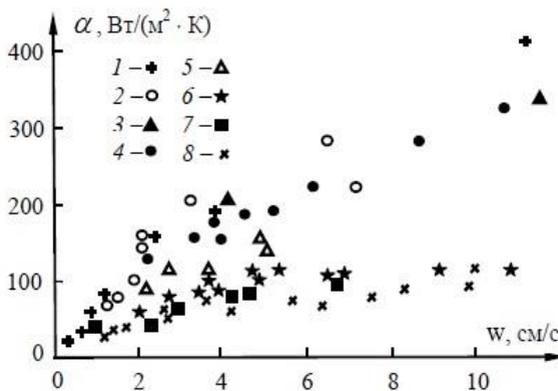


Рис. 3.10. Зависимости коэффициентов теплоотдачи от скорости жидкости в трубе (точки 1–5 – опыты с водой, диаметр труб 2,5; 6; 13 мм), (точки 6–8 – опыты с керосином, диаметр трубы 13 мм при различных условиях) [27]:

1 – температура воды на входе в мзеевик – 54,4°C/ интервал значений температуры на выходе (24,3 – 45,0) °C, средняя температура воды в баке 28,1 °C;

2 – 31,2 (29,0 – 33,0), 27,9; 3 – 59,3/(28,3 – 53,3), 26,6; 4 – 39,9/(28,0 – 37,0), 28,4;

5 – 35,4/(15,0 – 33,0), 23,1

Авторами работы [27] были рассчитаны коэффициенты теплоотдачи от наружной поверхности трубы, находящейся в большом объёме, проверены известные зависимости, изложенные различными авторами [27]. Установлено хорошее совпадение результатов экспериментов с аппроксимированной формулой В.П. Исаченко [25,26] (рис. 3.11).

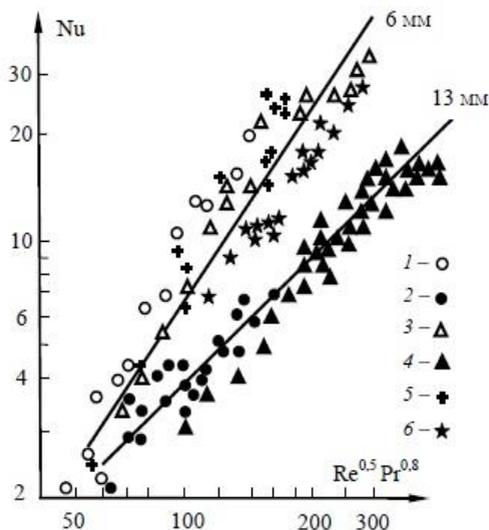


Рис. 3.11. Экспериментальные данные по теплообмену при ламинарном течении различных жидкостей в трубах различного диаметра в безразмерных координатах [27]. Линии соответствуют диаметрам труб

Авторами работы в качестве обобщающей формулы предлагается зависимость, учитывающая режимы течения, теплофизические свойства жидкостей и влияние параметра d/l [27]:

$$Nu = 0,4 \cdot Re(d/l)^{0,88}, \quad (3.91)$$

где $Re = w(d/a)$; a – коэффициент температуропроводности жидкости, m^2/c ; d – внутренний диаметр трубы, m .

Погрешность расчётов по формуле (3.91) составляет $\pm 20\%$.

На основе сравнения многочисленных экспериментальных данных по исследованию теплоотдачи различных жидкостей при ламинарном течении в трубах авторы работы [27] рекомендуют использование формулы (3.91).

Библиографический список к главе 3

1. Кэйс В.М. Конвективный тепло- и массообмен. М.: Энергия, 1972. 448 с.
2. Себеси Т. Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987. 590 с.
3. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов [и др.]. М.: Изд-во МЭИ, 2003. 470 с.
4. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике: учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 296 с.
5. Курочкин В.И., Цаплин С.В. Механика сплошных сред: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 1998. 135 с.
6. Механика жидкости и газа: учеб. пособие / Швыдкий В. [и др.] М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. 464 с.
7. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Гебхарт Б. [и др.]. М.: Мир, 1991. Кн. 1. 678 с. Кн. 2. 528 с.
8. Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Тепломассообмен»: курс лекций / Лобасова М.С. [и др.]. Красноярск: Изд-во Сибирского федерального университета, 2009. 295 с.
9. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник // под общей ред. А.В. Клименко и В.М. Зорина. М.: Изд-во МЭИ, 2001. 561 с.
10. Информационно-измерительная система исследования охлаждающей способности закалочных сред / Цаплин С.В. [и др.] // Материаловедение и термическая обработка металлов. 2014. №5(707). С. 25-29.
11. Data processing and measuring system for studying the cooling capacity of quenchants / Tsaplin S.V., Bolychev S.A., Shemanaev D.V. [et al] // Springer New York Consultants Bureau. Т. 56. №5-6. 2014. P. 253-257.
12. Информационно-измерительная система исследования охлаждающей способности закалочных сред / Цаплин С.В. [и др.] // Международная научно-практическая конференция «Перспективные информационные технологии». 28-30 апреля 2015 г. Самара, 2015. Т1. С. 129-133.
13. Люты В. Закалочные среды: справочник. Челябинск: Металлургия, 1990. 190 с.

- 14.Петраш Л.В. Закалочные среды. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1959. 113 с.
- 15.Алѣшин В.И., Долотова Н.А., Анисимов В.С. Модельное исследование охлаждения изолированной металлической сферы в водных средах (закалка) // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 12. С. 71-78.
- 16.Курочкин В.И., Цаплин С.В. Физическая кинетика: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2001. 140 с.
- 17.Цаплин С.В., Болычев С.А. Основы численных методов и программирование в Mathcad. Ч. I. Алгебра. Практический курс: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2012. 142 с.
- 18.Цаплин С.В., Болычев С.А., Кузнецов В.П. Численные методы и программирование. Ч. II. Нелинейные уравнения, практический курс: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета путей сообщения, 2012. 130 С.
- 19.Цаплин С.В. Теплопроводность: Интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2011. 190 с.
- 20.Давыдова М.А. Лекции по гидродинамике. М.: Физматлит, 2011. 216 с.
- 21.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1999. 798 с.
- 22.Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
- 23.Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- 24.Лыков А.В. Тепломассообмен: справочник. М.: Энергия, 1972. 560 с.
- 25.Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
- 26.Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975.
- 27.Ковалѣв О.П, Ильин А.К., Ильин Р.А. Исследование теплоотдачи при ламинарном течении жидкостей в трубе //Вестник АГТУ. Сер.: Морская техника и технологии, 2011. №3. С. 121-125.

4 ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Третий вид теплопередачи – лучистый теплообмен – отличается от теплопроводности и конвекции тем, что теплота в этом случае может передаваться через вакуум. Примером теплового излучения является свет свечи, костра, лампы накаливания, нагретого тела. Мощность теплового излучения определяется по критерию абсолютно чёрного тела. Под абсолютно чёрным телом понимается физическая идеализация, применяемая в термодинамике, тело, поглощающее всё падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах и ничего не отражающее. Несмотря на название, абсолютно чёрное тело само может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально иметь цвет.

Спектр излучения абсолютно чёрного тела определяется только его температурой [1,2]. Под чёрным телом понимаются реальные вещества, например сажа, поглощают до 99 % падающего излучения (то есть имеют альбедо, равное 0,01) в видимом диапазоне длин волн, однако инфракрасное излучение поглощается ими значительно хуже. Среди тел Солнечной системы свойствами абсолютно чёрного тела в наибольшей степени обладает Солнце.

Абсолютно чёрных тел в природе не существует, поэтому в физике для экспериментов используется модель. Она представляет собой замкнутую полость с небольшим отверстием. Свет, попадающий внутрь сквозь это отверстие, после многократных отражений будет полностью поглощён и отверстие снаружи будет выглядеть совершенно чёрным. Но при нагревании этой полости у неё появится собственное видимое излучение. Поскольку излучение, испущенное внутренними стенками полости, прежде чем выйдет (ведь отверстие очень мало), в подавляющей доле случаев претерпит огромное количество новых поглощений и излучений, то можно с уверенностью сказать, что излучение внутри полости находится в термодинамическом равновесии со стенками. (На самом деле отверстие для этой модели вообще не важно, оно нужно только чтобы подчеркнуть принципиальную наблюдаемость излучения, находящегося внутри; отверстие можно, например, совсем закрыть и быстро приоткрыть только тогда, когда равновесие уже установилось и проводится измерение). На рис. 4.1 представлена зависимость энергии теплового (инфракрасного) излучения от длины волны. Тепловое излучение может сопровождаться испусканием видимого света, но его энергия мала по сравнению с энергией излучения невидимой части спектра.

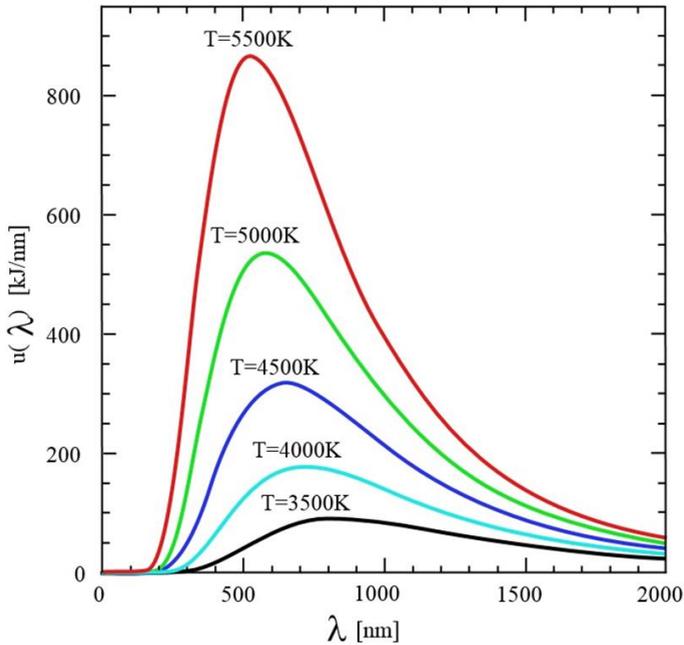


Рис. 4.1. Мощность излучения чёрного тела от длины волны

В соответствии с международным стандартом ISO инфракрасный диапазон излучения подразделяется на поддиапазоны. В табл. 4.1 приведено деление инфракрасного диапазона.

Таблица 4.1. Инфракрасный диапазон

Инфракрасное излучение	Аббревиатура	Длина волны
Ближний	NIR	0,78÷3 мкм
Средний	MIR	3÷50 мкм
Дальний	FIR	50÷1000 мкм

Сходство же его с другими способами передачи тепла в том, что он тоже обусловлен разностью температур. Тепловое излучение – это один из видов электромагнитного излучения. Другие его виды – радиоволновое, ультрафиолетовое и гамма-излучения – возникают в отсутствие разности температур.

Таким образом, излучение всех тел в инфракрасном диапазоне электромагнитных волн зависит от температуры. Причём с увеличением температуры излучение увеличивается, так как увеличивается

внутренняя энергия тела. Изменение температуры тела вызывает не только изменение абсолютной величины интенсивности излучения, но сопровождается еще изменением спектрального состава или «цвета» излучения. С повышением температуры повышается интенсивность коротковолнового излучения и уменьшается интенсивность длинноволновой части спектра. Зависимость излучения от температуры более значительная, чем процессов теплопроводности и конвекции. Поэтому при низких температурах преобладающую роль может играть теплообмен за счет конвекции и теплопроводности, а при высоких – основным видом переноса тепла может быть тепловое излучение.

Равновесное излучение создается источником при постоянной его температуре. Например, тело находится внутри оболочки с непрозрачными стенками, температура которых равна температуре тела. Неравновесное излучение происходит, когда источник излучения нагревают. Например, в лампах накаливания в энергию электромагнитных волн преобразуется часть тепла, выделяющаяся при протекании электрического тока.

Интенсивность теплового излучения определяется законом Стефана – Больцмана, в соответствии с которым мощность излучения абсолютно чёрного тела (интегральная мощность спектра излучения), приходящаяся на единицу площади поверхности, прямо пропорциональна четвёртой степени температуры тела:

$$J = \sigma T^4,$$

где J – мощность излучающей поверхности на единицу площади; $\sigma = 5,670400 \cdot 10^{-8} \text{Вт}/(\text{м}^2\text{К}^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана.

Представленный закон теплового излучения справедлив лишь для идеального излучателя – так называемого абсолютно черного тела. Ни одно реальное тело таковым не является, хотя плоская черная поверхность по своим свойствам приближается к абсолютно черному телу. Светлые же поверхности излучают сравнительно слабо. Чтобы учесть отклонение от идеальности многочисленных «серых» тел, в правую часть выражения, описывающего закон Стефана–Больцмана, вводят коэффициент меньше единицы, называемый излучательной способностью. Для плоской черной поверхности этот коэффициент может достигать 0,98, а для полированного металлического зеркала не превышает 0,05. Соответственно лучепоглощательная способность высока для черного тела и низка для зеркального.

Жилые и офисные помещения часто обогревают небольшими электрическими теплоизлучателями; красноватое свечение их спира-

лей – это видимое тепловое излучение, близкое к границе инфракрасной части спектра. Помещение же обогревается теплотой, которую несет в основном невидимая, инфракрасная часть излучения. В приборах ночного видения применяются источник теплового излучения и приемник, чувствительный к инфракрасному излучению, позволяющий видеть в темноте.

Мощным излучателем тепловой энергии является Солнце; оно нагревает Землю даже на расстоянии 150 млн. км. Интенсивность солнечного излучения, регистрируемая год за годом станциями, расположенными во многих точках земного шара, составляет примерно 1,37 Вт/м². Солнечная энергия – источник жизни на Земле. Ведутся поиски способов наиболее эффективного ее использования. Созданы солнечные батареи, позволяющие обогревать дома и получать электроэнергию для бытовых нужд.

Для нечёрного (серого) тела

$$J = \varepsilon \sigma T^4,$$

где ε – степень черноты (для любых веществ $\varepsilon < 1$, для абсолютного чёрного тела $\varepsilon = 1$).

Интенсивность теплопередачи путем теплопроводности и конвекции пропорциональна температуре, а лучистый тепловой поток абсолютно чёрного тела пропорционален четвертой степени температуры и подчиняется закону Стефана – Больцмана:

$$q = \varepsilon \sigma S \cdot (T_1^4 - T_2^4),$$

где, как и ранее, q – тепловой поток (в джоулях в секунду, т.е. в Вт), S – площадь поверхности излучающего тела (в м²), а T_1 и T_2 – температуры (в кельвинах) излучающего тела и окружения, поглощающего это излучение.

4.1 Виды лучистых потоков. Основные характеристики лучистых потоков

Тело излучает энергию при данной температуре в виде спектра. Энергия излучения в единицу времени, относящаяся к узкому интервалу изменений длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, называется потоком монохроматического, спектрального или однородного излучения Q_λ . Суммарное излучение с поверхности тела по всем длинам волн спектра называется интегральным или полным лучистым потоком Q .

Интегральный или полный лучистый поток, излучаемый с единицы поверхности тела по всем направлениям полусферического про-

странства, называется плотностью потока интегрального излучения, или излучательной способностью ($\text{Вт}/\text{м}^2$) [1–3]:

$$E = \frac{dQ}{dS},$$

где dQ – лучистый тепловой поток (Вт), испускаемый элементом поверхности dS (м^2). Лучистый поток всей поверхности есть

$$Q = \int_S E dS,$$

Здесь S – поверхность тела, м^2 .

Различают понятия сферического и полусферического излучения, определяемые как интегральные величины от яркости излучения соответственно по сферическому и полусферическому телесным углам.

Часть падающей энергии излучения, поглощенной данным телом, называется поглощенным излучением. При поглощении лучистая энергия вновь превращается во внутреннюю энергию. Плотность поглощенной энергии равна

$$E_{\text{пог}} = A \cdot E_{\text{пад}},$$

где A – коэффициент поглощения.

Для абсолютно черных тел $A = 1$. Тело, поглощающее все падающие на него лучи, воспринимается зрением как черное тело. Если поверхность поглощает все лучи, кроме видимых лучей (световых), она не кажется черной, хотя по лучистым свойствам она близка к абсолютно черному телу, поскольку имеет высокую поглощающую способность (например, для льда и снега $A = 0,95 \div 0,98$).

Тела, для которых коэффициент A_λ для монохроматического излучения не зависит от длины волны, называются серыми телами. Для серых тел $A_\lambda = \text{const} \leq 1$, так как серые тела поглощают не всю падающую на них лучистую энергию. Часть падающей энергии будет отражаться или пропускаться через объем этих тел. Плотность отраженного излучения

$$E_{\text{отр}} = R \cdot E_{\text{пад}},$$

где R – коэффициент отражения.

Если $R = 1$ и процессы отражения от поверхности подчиняются законам геометрической оптики, то поверхность тела называют зеркальной; при диффузном отражении поверхность называют абсолютно белой.

Часть падающей энергии излучения, проходящая сквозь тело, называется пропускательным излучением:

$$E_{\text{проп}} = \Pi \cdot E_{\text{пад}} ,$$

где Π – коэффициент пропускания.

Тела, у которых $\Pi = 1$, называются проницаемыми, прозрачными или диатермичными телами (тонкие слои сухого воздуха, одноатомных газов). Для твердых и жидких тел принимается $\Pi = 0$, так как практически вследствие значительной поглощательной способности они поглощают лучистую энергию в тонком поверхностном слое.

Совокупные процессы взаимного испускания, поглощения, отражения и пропускания энергии излучения в системах различных тел называются лучистым теплообменом, причем тела, входящие в данную излучающую систему, могут иметь одинаковую температуру. Для тела, участвующего в лучистом теплообмене с другими телами, согласно закону сохранения энергии, можно составить следующие уравнения теплового баланса.

Для плотности падающего излучения

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{пог}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}} .$$

Поделив левую и правую части уравнения на лучистый поток $E_{\text{пад}}$, получим для коэффициентов соотношение

$$A + R + \Pi = 1 .$$

Сумма собственного излучения и отраженного излучения, испускаемого поверхностью данного тела, называется эффективным излучением. Плотность потока эффективного излучения выражается зависимостью

$$E_{\text{эфф}} = E + R \cdot E_{\text{пад}} .$$

Эффективное излучение зависит не только от физических свойств и температуры данного тела, но и от физических свойств и температуры других окружающих его тел. Кроме того, оно зависит от формы, размеров и относительного расположения тел в пространстве.

Результирующее излучение представляет собой разность между лучистым потоком, получаемым данным телом, и лучистым потоком, который оно посылает в окружающее его пространство. Результирующее излучение может быть определено двумя способами. Относительно условной поверхности, находящейся вблизи тела:

$$q_{\text{рез}} = E - E_{\text{пог}} = E - A \cdot E_{\text{пад}} .$$

Второй способ определения плотности результирующего потока приводит к соотношению

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эфф}} - E_{\text{пад}} \cdot \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует:

$$E_{\text{эфф}} = q_{\text{рез}} + E_{\text{пад}},$$

а падающее излучение:

$$E_{\text{пад}} = \frac{E - q_{\text{рез}}}{A}.$$

Заменяя $E_{\text{пад}}$ в первой зависимости второй, получим

$$E_{\text{эфф}} = q_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{E}{A}.$$

Для черного тела $A = 1$ и $E_{\text{эфф}} = E_0$.

Из изложенного следует, что все виды полусферического излучения, кроме собственного излучения, являются линейными функциями падающего излучения. Собственное излучение объединяется и увязывается с другими видами излучения через эффективное излучение.

Обозначим спектральную интенсивность излучения $J_\lambda = dE/d\lambda$ – отношение плотности лучистого потока, испускаемого в бесконечно малом интервале длин волн, к величине этого интервала длин волн. В этом случае имеет место излучение энергии одного цвета с единицы поверхности по всем направлениям полусферического пространства, т. е. интенсивность излучения изменяется с длиной волны.

Угловая интенсивность или яркость излучения – количество энергии, испускаемое в определенном направлении единицей площади, расположенной перпендикулярно направлению излучения, отнесенное к единице элементарного телесного угла: спектральная $B_\lambda = dJ_\lambda/d\omega$ или интегральная $B = dJ/d\omega$.

Величина яркости, как и интенсивности излучения, в общем случае может изменяться в зависимости от места расположения элементарной излучающей площадки, а также по различным направлениям излучения. Для направленного излучения плотности лучистых потоков должны быть отнесены к проекции элементарной площадки на плоскость, ортогональную к направлению излучения [1,2] (рис. 4.2), и тогда для направленного излучения указанные зависимости примут

следующий вид (ψ – угол, составленный нормалью к площадке и направлением излучения):

для спектрального – $B_{\lambda,\psi} = dJ_{\lambda,\psi}/d\omega = (dJ_{\lambda}/d\omega) \cdot \cos\psi$,
интегрального $B_{\psi} = dE_{\psi}/d\omega = (dE/d\omega) \cdot \cos\psi$.

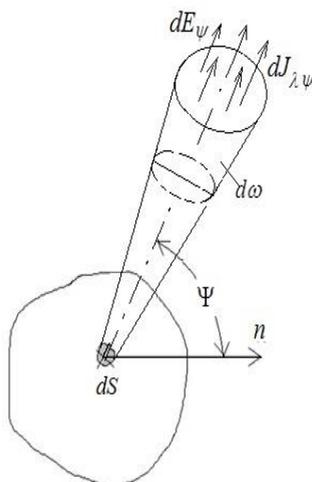


Рис. 4.2. Излучение элементарной площадки

4.2 Законы теплового излучения

Рассмотрим абсолютно чёрное тело, находящееся в термодинамическом равновесии. При равновесном излучении все тела, входящие в данную замкнутую излучающую систему, принимают одинаковую температуру. Известно [1–4], что собственное излучение – количество энергии E_1 , излучаемой единицей поверхности тела в единицу времени в интервале длин волн от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. Спектральной характеристикой является величина E_{λ} , которая представляет собой отношение плотности потока излучения, испускаемого в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, отнесённая к интервалу длин волн:

$$E_{\lambda} = dE / d\lambda$$

и называется спектральной плотностью потока излучения.

Закон Планка является одним из основных законов излучения. Он устанавливает зависимость спектральной плотности потока излучения от температуры и длины волны для абсолютно чёрного тела:

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \left(\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right)^{-1}. \quad (4.2)$$

Здесь $C_1 = 0,374 \cdot 10^{-15}$ Вт·м² – первая постоянная Планка; $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ м·К – вторая постоянная Планка; λ – длина волны, м; T – абсолютная температура, К.

Согласно (4.2) каждой длине волны соответствует свое значение интенсивности излучения. Поскольку закон Планка получен для идеального тела, для реальных тел он выражает максимально возможную интенсивность излучения. Закон Планка представлен графически на рис. 4.3.

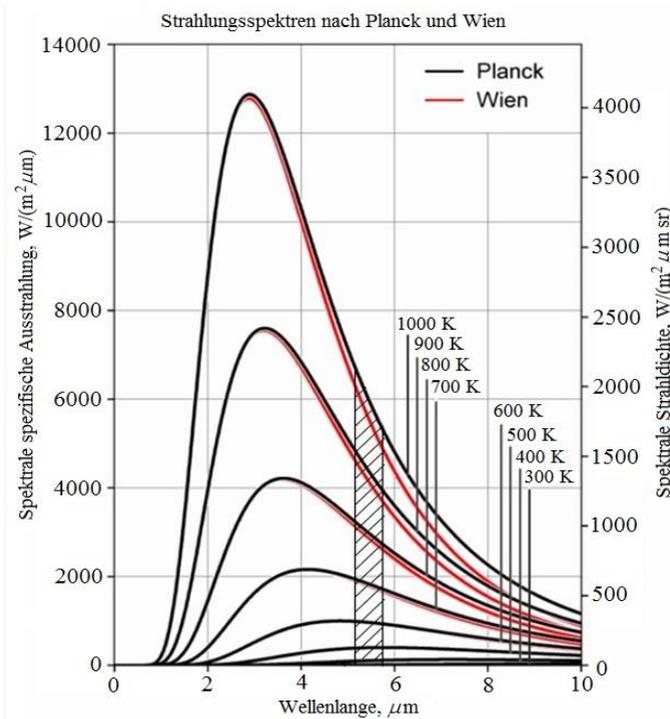


Рис. 4.3. Вид спектральных кривых, задаваемых законами излучения Планка и Вина при различных температурах. Видно, что различие между кривыми возрастает в длинноволновой области

Из рис. 4.3 видно, что при длине волны $\lambda \rightarrow 0$ плотность потока излучения стремится к нулю. С увеличением длины волны растёт плотность потока излучения $E_{0\lambda}$ и при некотором значении λ_{\max} достигает своего максимального значения, затем убывает, а при некотором значении

$\lambda \rightarrow \infty$ снова стремится к нулю. С увеличением температуры максимум плотности потока излучения смещается в сторону более коротких волн. Площадь ограничена кривой $T = \text{const}$, осью абсцисс и ординатами λ и $\lambda + d\lambda$ (на рисунке площадь заштрихована), даёт количество энергии dE_0 , излучаемое участком длин волн $d\lambda$, следовательно, $dE_0 = E_{0\lambda}d\lambda$.

Полное количество лучистой энергии можно определить путём интегрирования по всему спектру длин волн представленной на графике:

$$E = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} d\lambda .$$

Учитывая, что $\lambda = c_{\text{св}}/nv$. Здесь $c_{\text{св}}$, n , ν – скорость света, показатель преломления среды для излучения с данной частотой, частота излучения соответственно. Запишем (4.2) в виде

$$E(T) = \int_0^{\infty} \frac{2\pi \cdot h\nu^3 n^2 d\nu}{c_{\text{св}} \cdot \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)} = n^2 \sigma T^4 .$$

В результате интегрирования плотности излучения Планка получился частный случай закон Стефана–Больцмана.

Рассмотрим предельные случаи закона Планка.

Случай 1. Пусть энергия кванта очень мала по сравнению с энергией теплового движения, т.е. $h\nu \ll kT$, что соответствует $\lambda T \gg C_2$, тогда экспоненту в формуле (4.2) разложим в ряд и оставим два члена разложения:

$$\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) \approx 1 + \frac{C_2}{\lambda T} ,$$

тогда закон Планка примет вид

$$J_{\lambda} = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4} ,$$

который носит название закон Релея–Джинса.

Случай 2. Если $h\nu \gg kT$ или $\lambda T \ll C_2$, то формула Планка примет вид

$$J_{\lambda} = \frac{C_1 T}{\lambda^5} \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right),$$

что соответствует записи закона Вина.

Определим зависимость λ_{\max} от температуры. Исследуем функцию J_{λ} (4.2) на экстремум, дифференцируя её, получим

$$\frac{\partial J_{\lambda}}{d\lambda} = \frac{-5 C_1 \cdot \left(\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1\right) + C_1 \cdot \frac{C_2}{\lambda T} \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}{\lambda^6 \cdot \left(\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1\right)^2} = 0.$$

Введём обозначение $x = C_2/\lambda T$, получим трансцендентное уравнение:

$$-5 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x = 0.$$

Решая его относительно x , получим $x = 4,965$ и, следовательно, закон смещения Вина запишем в виде

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м}\cdot\text{К}.$$

4.3 Закон Стефана – Больцмана

Закон Стефана-Больцмана устанавливает зависимость плотности интегрального полусферического излучения от температуры [1–4]:

$$E_0 = \sigma T^4.$$

Согласно этому закону количество тепла Q , излучаемого в единицу времени, пропорционально поверхности излучающего тела S и четвертой степени его абсолютной температуры T . Для технических расчетов этот закон можно записать в следующем виде:

$$Q = C \cdot S \left(\frac{T}{100}\right)^4,$$

где C – коэффициент пропорциональности, называется коэффициентом лучеиспускания, размерностью Вт/(м² К⁴). Наибольшее значение коэффициент лучеиспускания имеет для абсолютно черного тела:

$$C = 5,67 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}.$$

Запишем для удобства практических расчётов

$$E_0 = 5,67 \left(\frac{T}{100}\right)^4.$$

В случае серых тел излучательная способность меньше, а собственное излучение тела пропорционально T^4 , следовательно

$$E = \varepsilon E_0,$$

где ε – степень черноты серого тела.

4.4 Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа описывает свойство тела, находящегося в термодинамическом равновесии с излучением. Он устанавливает связь между лучеиспускательной и поглощательной способностью тела. Согласно этому закону поглощательная способность и степень черноты будут равны между собой. Это условие распространяется на излучение в любом элементарном спектральном диапазоне. Из условия термодинамического равновесия отношение спектральной интенсивности испускаемого потока излучения к спектральной поглощательной способности тела является одинаковым для всех тел и равным спектральной интенсивности потока излучения абсолютно чёрного тела при той же температуре [1–4]:

$$\frac{J_\lambda}{A_\lambda} = J(\lambda, T).$$

Формула является математической записью закона Кирхгофа. Интегральная запись этого закона есть

$$\frac{E}{A} = E_0(T).$$

Из закона Кирхгофа следует, что лучеиспускательная способность тела тем выше, чем больше его поглощательная способность. Этим и объясняется наивысшая лучеиспускательная способность абсолютно черного тела, так как для него $A = 1$, а, следовательно, и $E = 1$. Наоборот, тела, хорошо отражающие лучистую энергию, сами излучают мало, а для абсолютно белого и абсолютно прозрачного тел лучеиспускательная способность равна нулю. Закон Кирхгофа справедлив не только для всего спектра в целом, но и для излучения определенной длины волны (монохроматического излучения). Из закона Кирхгофа вытекает следствие:

1. Из всех тел в природе наибольшей излучательной способностью обладает абсолютно чёрное тело.

2. В случае термодинамического равновесия излучения коэффициент поглощения равен степени черноты чёрного тела $A = \varepsilon$.
3. Если тело в каком-то интервале длин волн не поглощает энергию излучения, то оно в этом интервале длин волн и не излучает её.

4.5 Закон Ламберта

Закон Стефана – Больцмана определяет количество энергии, излучаемого телом по всем направлениям. Закон Ламберта определяет угловое распределение равновесного излучения для поверхности абсолютно чёрного тела, находящегося в состоянии равновесия, излучаемое телом по всем направлениям [1–4]. Каждое направление определяется углом φ , который образует с нормалью к поверхности. Здесь

$\varphi = s/r$, а r – радиус круга, центр которого лежит на вершине угла; а S – дуга, на которую опирается этот угол. В соответствии с законом количество энергии, излучаемое элементом поверхности dS_1 в направлении dS_2 , пропорционально количеству энергии, излучаемой по нормали $E_n dS_1$, умноженному на величину элементарного телесного угла $d\Omega$ и $\cos \varphi$, т.е.

$$d^2 Q_\varphi = E_n \cos \varphi \cdot dE_1. \quad (4.3)$$

Излучение элемента поверхности dS_1 в направлении dS_2 представлено на рис. 4.4. Под телесным углом $\Omega = \Delta s/r^2$ понимается участок на поверхности сферы с радиусом r , имеющий площадь Δs , а $d\Omega = \Delta s/r^2$.

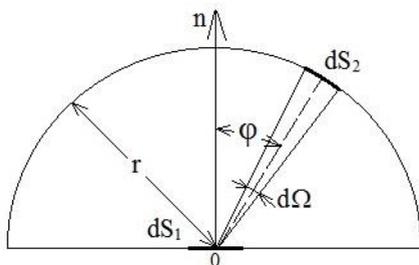


Рис. 4.4. Излучение элемента поверхности dS_1 в направлении dS_2 на плоскости

Следовательно, наибольшее количество энергии поверхностью излучается в направлении нормали при значении $\varphi = 0$, с увеличением угла φ количество излучаемой энергии уменьшается, и при угле

$\varphi = 90^\circ$ оно становится равным нулю. В уравнении (4.3) неизвестной величиной является E_n .

Для его определения проинтегрируем уравнение (4.3) по поверхности полусферы, лежащей над плоскостью dS_1 , и полученное выражение сопоставим с уравнением

$$E = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4.$$

Для определения $d\Omega$ рассмотрим сферическую систему координат r, θ, φ (рис. 4.5).

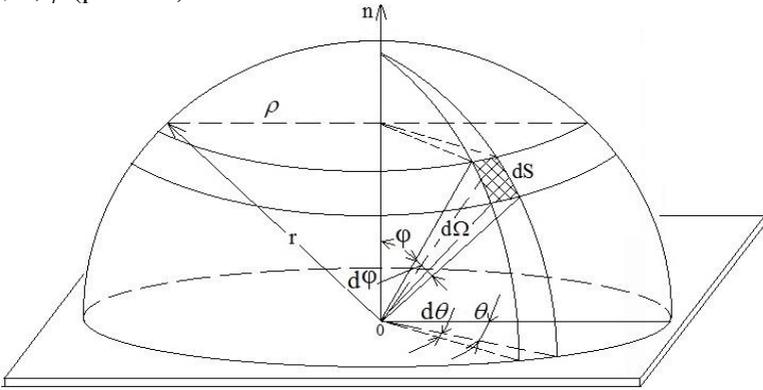


Рис. 4.5. Пространственный телесный угол в сферической системе координат

Направления $\theta, \theta + d\theta$ и $\varphi, \varphi + d\varphi$ определяют бесконечно малый угол $d\Omega$, который на сфере радиусом r вырезает сферический четырёхугольник со сторонами $rd\varphi$ и $\rho d\theta = r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$, площадь которого равна $\Delta s = rd\varphi r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$. В соответствии с определением дифференциального телесного угла $d\Omega = \Delta s/r^2$ получим $d\Omega = \sin\varphi d\varphi \cdot d\theta$. Подставляя $d\Omega$ в (4.3) и интегрируя по углам φ и θ , получим

$$\begin{aligned} dQ &= E_n dS_1 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \\ &= E_n dS_1 2\pi \cdot \left[-\sin^2\varphi / 2 \right]_0^{\pi/2} = \pi E_n dS_1 = \pi \cdot dQ_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В соответствии с (4.3) энергия, излучаемая элементом поверхности dS_1 в полупространство, равна:

$$dQ = E dS_1 = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 dS_1 = \varepsilon \cdot c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 dS_1. \quad (4.5)$$

Приравнивая (4.4) и (4.5), определим E_n :

$$E_n = \frac{E}{\pi} = \frac{1}{\pi} c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 = \frac{\varepsilon}{\pi} c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4.$$

Откуда следует, что плотность потока излучения в направлении нормали в π раз меньше полной плотности потока излучения тела. Подставляя (4.5) в (4.3), получим

$$d^2 Q_\varphi = \frac{\varepsilon}{\pi} c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 d\Omega \cdot \cos \varphi \cdot dS_1. \quad (4.6)$$

Это уравнение используется для расчёта лучистого теплообмена между поверхностями конечных размеров.

Закон Ламберта справедлив для абсолютно чёрного тела. Для шероховатых тел этот закон подтверждается экспериментально для области $\varphi = 0 \div 60^\circ$. Отклонение от закона Ламберта наблюдается для полированных металлов (рис. 4.6).

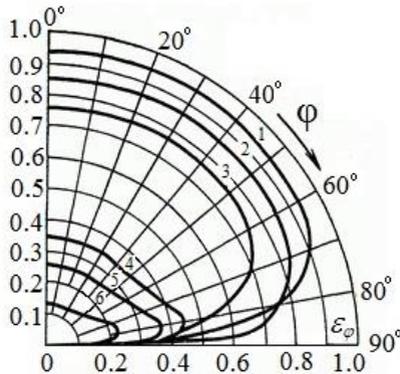


Рис. 4.6. Излучательная способность в зависимости от φ

Максимальный поток излучения по нормали к излучающей поверхности называют яркостью излучения:

$$B = \frac{1}{\pi} \cdot E.$$

В соответствии с законом Ламберта интенсивность пропорциональна косинусу угла между направлением излучения и нормали к поверхности тела:

$$E = B \cdot \cos \varphi.$$

Кеплер установил, обличительная способность e точечного источника с энергией W обратно пропорциональна квадрату расстояния:

$$e = W / 4\pi \cdot r^2.$$

Рассмотрим точечный источник (рис. 4.7) в центре сферической полости, излучающий равномерно по всем направлениям энергию W .

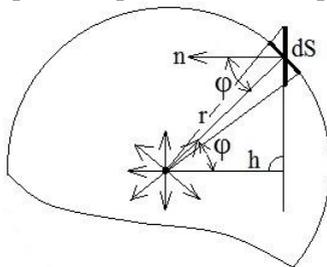


Рис. 4.7. Точечный источник

На границе сферической полости на расстоянии r от источника расположена перпендикулярно облучаемая площадка dS , тогда количество энергии, падающей на площадку dS , равно:

$$dQ = e \cdot \cos \varphi dS = \frac{W}{4\pi r^2} \cdot \cos \varphi dS.$$

4.6 Излучение реальных тел

Законы Планка и Ламберта описывают спектральные и угловые распределения излучения чёрного тела. Излучение реальных тел [3] отличается от излучения чёрного тела и зависит от состояния поверхности, микроструктуры, шероховатости, толщины слоя и т.д. Дело в том, что в реальном теле распределение излучения по возбуждённым уровням отличается от распределения Больцмана. Для описания излучения реальных тел используются три подхода.

Первый – квантово-аналитический, в основе которого используются законы квантовой механики излучения отдельных молекул, статистической физики, которая объединяет излучающие молекулы в статистический ансамбль, и совокупное определение излучения суммарного конгломерата на базе уравнений переноса излучения с учётом геометрической структуры молекул. Для твёрдых тел этот подход неприменим.

Второй – феноменологический. Он описывает радиационные свойства по отношению к эталону чёрного тела и используется для описания экспериментов. Из-за различия состояния поверхности, сплошности и других различий веществ этот метод является приближённым.

Третий подход – модельный. Он основан на физическом модельном описании радиационных свойств вещества и точном знании физических констант в уравнении переноса излучения. Он хорошо описывает излучение металлов и дисперсных систем. Такой моделью является модель серого тела. В этой модели сохраняются спектральные и угловые распределения излучения, такие же, как у чёрного тела.

Излучения реальных тел характеризуется двумя распределениями, отличными от чёрного тела: спектральным и угловым. Отличие характеризуется степенью серости тела. Тела, у которых угловое распределение излучения отлично от углового распределения по закону Ламберта, называются анизотропными или неламбертными.

4.7 Распределение излучения реальных тел

Спектральная излучательная и поглощательная способности

Абсолютно чёрное тело характеризуется двумя свойствами. Первое – все спектральные радиационные характеристики определяются температурой и не зависят от других параметров состояния системы. Второе – все спектральные распределения для абсолютно чёрного тела соответствуют максимально возможному тепловому излучению тел при заданной температуре. Излучательная способность реальных тел при этом определяется как доля излучения абсолютно чёрного тела при заданной температуре в любом спектральном интервале. Спектральная излучательная способность тела ε_λ – это отношение плотности потока энергии, испускаемой данным телом в бесконечно малом интервале, к плотности потока энергии чёрного тела, испускаемого в том же интервале и при той же температуре. В соответствии с законом Кирхгофа спектральная излучательная и поглощательная способности совпадают в условии термодинамического равновесия:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_{\lambda \text{ соб}}}{E_{0 \lambda}} = \frac{E_{\lambda \text{ пог}}}{E_{0, \lambda \text{ над}}} = a_\lambda, \quad T_\varepsilon = T_a = T_0,$$

т.к. поглощение определяется не только температурой, но и спектром падающего излучения. В случае произвольного спектрального состава

ва падающего излучения, отличающего от распределения Планка, поглощательная способность не будет равна излучательной

$$a = \frac{\int_0^{\infty} a_{\lambda} f(\lambda, T) \cdot I_0(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^{\infty} f(\lambda, T) \cdot I_0(\lambda, T) d\lambda},$$

где $f(\lambda, T)$ – спектральная функция источника излучения.

4.8 Законы излучения для реальных тел

Закон Клаузиуса

При распространении излучения средой на границе перехода из среды менее плотной в более плотную оптическую среду его интенсивность увеличивается в n^2 раз [1,3]:

$$I_{\lambda, np} = n_{\lambda}^2 \cdot I_{\lambda, пад},$$

что соответствует закону сохранения энергии Клаузиуса при пересечении границы раздела двух сред. При распространении излучения изменяется объёмная плотность энергии за счёт концентрации той же энергии в меньшем телесном угле. На границе согласно закону отражения от тела распространяется отражённое излучение, которое можно определить в виде произведения коэффициента отражения r на интенсивность падающего излучения $r \cdot I_{\lambda, пад}$:

$$I_{\lambda, np} = [1 - r_{\lambda}(\theta, n)] \cdot n_{\lambda}^2 \cdot I_{\lambda, пад},$$

но

$$E_{\lambda, np} = [1 - r_{\lambda}] \cdot n_{\lambda}^2 \cdot E_{\lambda, пад}.$$

В случае нормального падения и прозрачной среды коэффициент отражения можно записать в виде

$$r_{\lambda}(\theta, n) = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

А в случае произвольного угла падения излучения θ и поглощающей среды величина определяется формулами Френеля. Уравнение переноса излучения в среде запишем в виде [1]

$$\frac{1}{c} n_{\lambda} \frac{\partial I_{\lambda}(s)}{\partial t} + \frac{\partial I_{\lambda}(s)}{\partial s} = \alpha_{\lambda} n_{\lambda}^2 \frac{E_{0\lambda}}{\pi} - (\alpha_{\lambda} + \sigma_{\lambda}) \cdot I_{\lambda}(s) + \frac{\sigma_{\lambda}}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} I_{\lambda}(s') \cdot \gamma(s', s) d\omega,$$

где I_λ – интенсивность излучения, s – расстояние, на которое излучение переносится, α_λ – объёмный коэффициент поглощения, σ_λ – объёмный коэффициент рассеяния, $\gamma(s',s)$ – индикатриса рассеяния.

Локальное термодинамическое равновесие

Термодинамическое равновесие в газе определяется максвелловским распределением скоростей частиц и планковским распределением спектральной интенсивности излучения при равновесной температуре. Степень возбуждения атомов и молекул и их ионизация соответствуют состоянию термодинамического равновесия и описываются распределением Больцмана и формулой Саха. В системе при наличии теплообмена излучением состояние термодинамического равновесия нет. Значение собственного излучения определяется законом Кирхгофа и Планка, в этих условиях должно быть отличие от реальной величины.

4.9 Угловые коэффициенты излучения

В случае если излучающая система состоит из нескольких тел, произвольно расположенных в пространстве, то только часть потока излучения от одного тела попадает на другое. Доля потока излучения одного тела, попадающая на другое, зависит от формы, размеров тел, их взаимного расположения, расстояния между ними и т.д. Для учета той части потока излучения от поверхности одного тела, которая попадает на поверхность другого тела, используется понятие углового коэффициента излучения. Когда рассматривается поток излучения от элементарной площадки, находящейся на поверхности одного тела, на всю поверхность другого тела, угловой коэффициент излучения называется локальным, а когда – от всей поверхности одного тела на всю поверхность другого, угловой коэффициент излучения называется средним. Угловые коэффициенты излучения характеризуют только геометрические особенности излучающей системы, т.е. ими учитывается только «прямое» попадание энергии излучения от одного тела на другое, а попадание посредством отражения от других тел никак не учитывается. Поэтому далее при выводе выражений для угловых коэффициентов излучения для простоты будем полагать, что тела, которые участвуют в теплообмене излучением, являются абсолютно черными.

Рассмотрим излучающую систему [1,3,4], которая состоит из двух поверхностей тел, имеющих очень большие размеры по сравнению с расстоянием между ними. Если на тело извне не падает ника-

ких потоков, то с единицы поверхности тела отводится лучистый поток энергии E_1 , Вт/м². Он полностью определяется температурой и физическими свойствами тела. Это собственное излучение. Если на тело падает лучистая энергия в количестве E_2 , это падающее излучение. Часть падающего излучения в количестве $A_1 E_2$ поглощается телом – это поглощённое излучение; остальное отражается в количестве $(1 - A_1) \cdot E_2$, это излучение отражается – отражённое излучение (рис. 4.8).

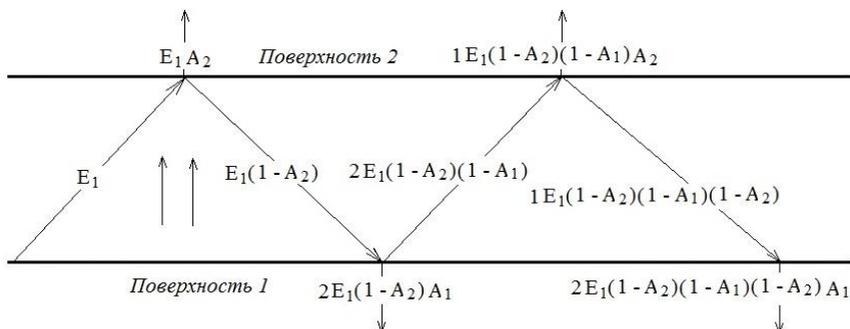


Рис. 4.8. Многократные отражения от поверхностей

Температура, коэффициент поглощения и излучательная способность поверхностей этих тел соответственно равны T_1, A_1, E_1 и T_2, A_2, E_2 . Пусть $T_1 > T_2$. Путь прохождения излучения представлен на рис. 4.8. Рассмотрим путь прохождения излучения подробно. Лучистой поток энергии, испускаемой поверхностью тела – E_1 , поглощается поверхностью 2 – $E_1 A_2$ и отражается от этой поверхности $E_1 \cdot (1 - A_2)$, затем поглощается поверхностью 1 – $E_1 \cdot (1 - A_2) \cdot A_1$ и отражается от этой поверхностью $2 E_1 \cdot (1 - A_2) \cdot (1 - A_1)$. Далее процесс поглощения поверхностью 2 и отражения от неё происходит в следующей последовательности $2 E_1 \cdot (1 - A_2) \cdot (1 - A_1) A_2$, $2 E_1 \cdot (1 - A_2) \cdot (1 - A_1) (1 - A_2)$ соответственно и т.д.

Определим результирующий тепловой поток, который может быть представлен как разность собственного излучения поверхностью 1 и поглощенного излучения поверхностью 2:

$$q_{\text{рез}} = E - E_{\text{пог}} = E - A \cdot E_{\text{пог}}.$$

Если величина $q_{\text{рез}} < 0$, это значит, что тело в процессе лучистого теплообмена получает энергию. Определим количество энергии, по-

глощённое поверхностью 1 излучения, для этого просуммируем в соответствии с рисунком выражения, в результате получим

$$E_1 (1 + \Pi + \Pi^2 + \dots) \cdot (1 - A_2) A_1 = E_1 (1 / (1 - \Pi)) \cdot (1 - A_2) A_1,$$

где $\Pi = (1 - A_2) \cdot (1 - A_1)$. Аналогичным образом определим поглощённую энергию поверхностью 2:

$$E_2 (1 + \Pi + \Pi^2 + \dots) A_1 = E_2 A_1 / (1 - \Pi),$$

следовательно

$$q_{\text{рез}} = E_1 - E_1 (1 - A_2) A_1 / (1 - \Pi) - E_2 A_1 / (1 - \Pi).$$

Преобразуем выражение $(1 - \Pi) = 1 - (1 - A_2) \cdot (1 - A_1) = A_1 + A_2 + A_1 \cdot A_2$, в результате получим для результирующего потока, который получает поверхность 1:

$$q_{\text{рез}} = q_{1,2} = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}, \quad \frac{Bm}{m^2}.$$

В случае термодинамического равновесия поверхностей тел и излучения и учитывая, что излучательная способность описывается законом Стефана–Больцмана, то можно приближённо считать $\varepsilon = A$, тогда

$$E_1 = c_0 \varepsilon_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 = c_0 A_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4; \quad (4.7)$$

$$E_2 = c_0 \varepsilon_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 = c_0 A_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4, \quad (4.8)$$

где c_0 – коэффициент излучения абсолютно чёрного тела:

$$c_0 = \sigma \cdot 10^8 = 5,67, \quad Bm / (m^2 K^4).$$

Здесь $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана. В этом случае результирующий поток можно будет записать в виде

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 \right)^{-1} = \\ &= c_0 \cdot A_{\text{прив}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

или

$$q_{1,2} = c_{\text{прив}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad Bm / m^2. \quad (4.9)$$

Здесь приведённые коэффициенты поглощения и излучения соответственно:

$$A_{\text{прив}} = \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1 \right)^{-1},$$

$$c_{\text{прив}} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right)^{-1}, \text{ Вт} / (\text{м}^2 \text{К}^4).$$

Определим результирующий поток энергии излучения методом сальдо.

Собственное излучение поверхности тела в сумме с отражённым называется эффективным излучением поверхности тела, $E_{\text{эф}} = E_1 + (1 - A_1) \cdot E_2$. Это фактическое излучение поверхности тела, которое ощущаем или измеряем приборами, оно больше собственного на величину $(1 - A_1) \cdot E_2$.

Эффективное излучение $E_{\text{эф}}$ зависит от физических свойств и температуры не только данного излучающего тела, но и от других окружающих его тел, а также от формы, размеров и относительного расположения тел в пространстве. Падающее излучение E_2 определяется температурой и свойствами окружающих тел, физические качества собственного и отражённого излучения неодинаковы, их спектры различны. Возвращаясь к формуле результирующего потока $q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}$, определим лучистый поток первой поверхности тела:

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}1} - E_{\text{эф}2}, \quad (4.10)$$

где $E_{\text{пад}2} = E_{\text{эф}2}$ для второй поверхности тела. Тогда эффективное излучение каждой поверхности тел:

$$E_{\text{эф}1} = q_{1,2} \cdot \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1},$$

$$E_{\text{эф}2} = q_{2,1} \cdot \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{E_2}{A_2}.$$

В случае установившегося режима $q_{1,2} = -q_{2,1}$, в соответствии с (4.10) получим

$$q_{\text{рез}} = q_{1,2} \cdot \left(1 - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{E_1}{A_1} + q_{1,2} \cdot \left(1 - \frac{1}{A_2} \right) - \frac{E_2}{A_2},$$

тогда результирующий поток на поверхности 1 запишем в виде

$$q_{рез} = q_{1,2} = q_{1,2} \cdot \left(1 - \frac{1}{A_1}\right) + \frac{E_1}{A_1} + q_{1,2} \cdot \left(1 - \frac{1}{A_2}\right) - \frac{E_2}{A_2}.$$

В результате получим

$$q_{1,2} = \left(\frac{E_1}{A_1} - \frac{E_2}{A_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1\right)^{-1}.$$

Учитывая (4.9), определим полный результирующий поток:

$$Q_{1,2} = q_{1,2} \cdot S = c_{прив} \cdot S_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right], \text{ Вт}.$$

Если коэффициент $c_2 \approx c_0$, то приведённый коэффициент излучения равен коэффициенту излучения поверхности 1 тела:

$$c_{прив} = c_1.$$

Для различных тел коэффициент излучения c различен. Его значение определяется природой тела, состоянием поверхности и температурой. Величина c всегда меньше c_0 и может изменяться в пределах от 0 до 5,67.

Важной характеристикой тела является степень черноты ε , которая определяется отношением потока собственного излучения тела к плотности потока излучения абсолютно чёрного тела:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{c}{c_0}.$$

Значение ε изменяется от 0 до 1. В инфракрасном диапазоне спектра излучения используется спектральная степень черноты и определяется:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{0\lambda}}.$$

При фиксированной температуре тела величина ε_λ в общем случае зависит от длины волны λ и может меняться от 0 до 1.

Рассмотрим лучистый теплообмен между двумя серыми элементами поверхности dS_1 и dS_2 (рис. 4.9), температуры, плотности потоков излучения и поглощательные способности равны T_1 , A_1 , E_1 и T_2 , A_2 , E_2 соответственно.

Элементы поверхности расположены на расстоянии r , а углы между линией, соединяющей их центральные точки с нормальными n_1 и

n_2 , равны φ_1 и φ_2 . Согласно закону Ламберта (4.6) количество энергии, излучаемой элементом dS_1 в направлении dS_2 , равно:

$$d^2 Q_1 = \frac{1}{\pi} E_1 \cos \varphi_1 d\Omega_1 dS_1, \quad (4.11)$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

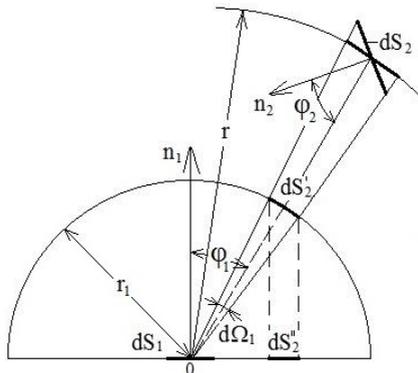


Рис. 4.9. Лучистый теплообмен между двумя элементами поверхностями серого тела

Из рисунка следует $d\Omega_1 = dS_2 \cdot (1/r^2) \cdot \cos \varphi_2$.

Тогда

$$d^2 Q_1 = \frac{1}{\pi} E_1 \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_1 dS_2. \quad (4.12)$$

Определим количество поглощаемой энергии элементом dS_2 :

$$d^2 Q_1 = A_2 d^2 Q_1 = \frac{1}{\pi} A_2 E_1 \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_1 dS_2.$$

Так как для большинства технических материалов поглощательная способность велика ($0,8 \div 0,9$), то можно ограничиться однократным поглощением. Определим аналогичным образом количество энергии, излучаемой элементом поверхности dS_2 и поглощаемой dS_1 :

$$d^2 Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{\pi} A_2 E_1 \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_1 dS_2.$$

Вычитая из уравнения (4.12) уравнение (4.11), получим энергию, переданную в результате лучистого теплообмена первым элементом второму:

$$d^2 Q = \frac{1}{\pi} \cdot (A_2 E_1 - A_1 E_2) \cdot \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_1 dS_2.$$

Учитывая (4.7), (4.8) и подставляя в уравнение (4.11), получим

$$d^2Q = \frac{1}{\pi} c_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_1 dS_2. \quad (4.13)$$

Интегрируя (4.13) по S_1 и S_2 , запишем:

$$Q = \frac{1}{\pi} c_0 \varepsilon_{\Pi} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_1 dS_2, \quad (4.14)$$

где $\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ – приведённая степень черноты. Запишем (4.14) в виде

$$Q = \frac{1}{\pi} c_0 \varepsilon_{\Pi} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot S_{12}.$$

Здесь S_{12} , m^2 называется поверхностью излучения. Этот геометрический параметр определяется размерами и расстоянием между элементами поверхностями dS_1 и dS_2 тел:

$$S_{12} = \int_{S_1} dS_1 \int_{S_2} \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_2 = \int_{S_1} \varphi' dS_1 = \bar{\varphi}_{12} S_1. \quad (4.15)$$

Здесь величины φ' и φ_{12} – локальный и средний угловые коэффициенты. Численное значение φ' показывает, какая доля энергии, излучаемой элементом dS_1 по всему полупространству, попадает на поверхность S_2 . Значение φ_{12} является осреднённым значением φ' по всей поверхности S_1 . В некоторых случаях значение φ' можно определить графически. Подробно об этом методе изложено в [3]. Из (4.15) следует:

$$\bar{\varphi}_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \cdot \int_{S_1} dS_1 \int_{S_2} \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_2. \quad (4.16)$$

Если излучающее тело образовано вогнутой поверхностью, то такая поверхность принимает излучение данного тела на себя. Для описания такого процесса вводятся угловые коэффициенты самооблучения. Тогда (4.16) примет вид

$$\bar{\varphi}_{11} = \frac{1}{\pi S_1} \cdot \int_{S_1} dS_1 \int_{S_1} \frac{1}{r^2} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 dS_2.$$

Введём понятие взаимной поверхности излучения как отношение потока $Q_{1 \rightarrow 2}$ к плотности потока E_1 , посылаемого телом 1 в окружающее пространство, и запишем:

$$H_{12} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{E_1}.$$

Это понятие было введено Г.Л. Поляковым. Взаимные поверхности свяжем с угловыми коэффициентами излучения:

$$d^2 H(S_1, S_2) = d\varphi(S_1, S_2) \cdot dS_1; \quad (4.17)$$

$$dH(S_1, S_2) = \varphi(S_1, S_2) \cdot dS_1; \quad (4.17a)$$

$$H_{12} = \varphi_{12} \cdot dS_1; \quad (4.17б)$$

$$H_{11} = \varphi_{11} \cdot dS_1. \quad (4.17в)$$

Здесь (4.17) – (4.17в) называются геометрическими инвариантами излучения. Если плотность собственного излучения соответствует чёрному телу $E_1 = 1$, то $Q_{1 \rightarrow 2} = H_{12}$.

4.10 Свойства потоков излучения

1. **Свойство существования.** Множество лучей, исходящих с поверхности 1 и падающих на поверхность 2, существует, если она составлена из непрерывных прямых. В ином случае, если на пути лучей помещается «непрозрачное тело», единичный лучистый поток равен нулю:

$$H_{12} = 0 \text{ и } \varphi_{12} = 0.$$

В случае плоского и выпуклого тела самооблучённость отсутствует, поэтому

$$H_{11} = 0 \text{ и } \varphi_{11} = 0.$$

2. **Свойство аддитивности** [3]. Множество геометрических лучей, посылаемых поверхностью 1 на поверхности тел $j = 2, 3, 4, \dots$ и получаемых ею от этих тел, взаимно независимы и суммируются в следующей последовательности:

$$H_{1j} = H_{12} + H_{13} + H_{14} + \dots,$$

$$\varphi_{1j} = \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{14} + \dots$$

3. **Свойство замкнутости** [3]. В соответствии с законом сохранения энергии меры множества лучей для замкнутой излучающей системы следует, что мера несчётного множества геометрических лучей, исходящих с поверхности 1 и пересекающих замыкающую поверхность системы окружающих тел, равна мере несчётного множества точек поверхности 1, испускающей эти лучи:

$$\sum H_{1j} = S_1, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.18)$$

$$\sum \varphi_{1j} = 1, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.19)$$

В случае вогнутого тела

$$\sum_{j=1}^n H_{1j} = S_1 - H_{11} = H_1,$$

где $H_1 = S_1 \cdot (1 - \varphi_{11})$ – эффективная поверхность вогнутого тела.

4. **Свойство взаимности** [3]. Меры множеств однонаправленных геометрических лучей, пересекающих контуры 1 и j двух произвольным образом расположенных тел, инвариантны. Взаимные поверхности пары тел 1 и j обладают свойством взаимной симметрии:

$$H_{1j} = H_{j1}.$$

Это условие следует из условия термодинамического равновесия излучения абсолютно чёрных тел $Q_{1j} = Q_{j1}$.

Свойство конгруэнтности или совмещаемости [3]. Мера множества лучей, исходящих с поверхности тела 1 и падающих на тело j , не зависит от конфигурации последнего при условии, что поверхность j -го тела вписывается в систему прямых (наружных и внутренних), охватывающих эти тела. На основании (4.18), (4.19) запишем:

$$H_{1j} = H_{11} = H_{12} = H_{13} = S_1 - H_{11},$$

$$\varphi_{1j} = \varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = 1 - \varphi_{11}.$$

4.11 Теплообмен между двумя произвольными поверхностями

Вернёмся к рассмотрению теплообмена между двумя чёрными поверхностями S_1 и S_2 конечных размеров, и соответственно заданными температурами T_1, T_2 на этих поверхностях, изображёнными на рис. 4.9.

На практике для увеличения лучистой энергии при теплообмене необходимо увеличить температуру и степень черноты. В некоторых задачах температуру изменить нельзя, для снижения лучистого теплообмена обычно применяют экраны [3,4].

Для простоты дальнейших рассуждений и решения задачи лучистого теплообмена между этими поверхностями будем считать, что поверхности плоские и параллельны между собой, между ними помещён тонкостенный экран, причём степень черноты экрана и поверхности одинакова. Тогда упрощённую модель задачи можно представить в виде схемы (рис. 4.10). В этом случае угловые коэффициенты излучения при определении потоков между поверхностями равны единице.

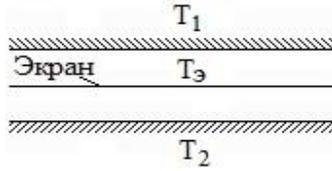


Рис. 4.10. Лучистый теплообмен между двумя поверхностями и тонкостенным экраном

Известно [1–4], что при отсутствии экрана теплообмен между поверхностями 1 и 2 определяется уравнением

$$q_{1,2} = \varepsilon_n c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (4.20)$$

Очевидно, при наличии экрана интенсивность лучистого теплообмена изменится между поверхностями 1 и 2. При стационарном процессе потоки излучения, передаваемые от первой поверхности к экрану и от экрана ко второй поверхности, будут одинаковы. Следовательно,

$$q_{\text{экр}} = \varepsilon_n c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right] = \varepsilon_n c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Откуда следует уравнение для определения неизвестной температуры экрана

$$\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

В результате плотность потока результирующего излучения экрана

$$q_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_n c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

Следовательно,

$$q_3 = \frac{1}{2} q_{12}.$$

Из которого следует, что при наличии одного экрана количество передаваемой энергии уменьшится в 2 раз, а при наличии n экранов – в $(n + 1)$ раз. Существенно эффект снижения получается, если применяются экраны с малой степенью черноты.

При применении n экранов со степенью черноты ε_3 между двумя плоскими поверхностями со степенью черноты

$$\frac{q_3}{q_{12}} = \left(1 + n \frac{2 - \varepsilon_3}{2 - \varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \right)^{-1}.$$

Например, один экран со степенью черноты $\varepsilon_3 = 0,1$ между поверхностями с излучательной способностью $\varepsilon = 0,8$ даёт снижение лучистого теплообмена в 14 раз. Применение экрана из алюминиевой фольги позволяет использовать в качестве тепловой изоляции воздушные прослойки.

Применение экранно-вакуумной теплоизоляции (ЭВТИ), состоящей из набора перфорированных плёнок из диэлектрического (полиэтилентерефталатного) материала, покрытого (с обеих сторон) слоем напыленного алюминия толщиной менее одного микрона, позволяет создать пассивную систему терморегулирования космического аппарата от внешних тепловых воздействий.

Высокое термическое сопротивление создаётся за счёт разреженной прослойки между слоями плёнки ЭВТИ. Экранно-вакуумная теплоизоляция включает пакет экранов, разделенных прокладками из стекловуали, размещенный между наружным и внутренними облицовочными слоями. Наружный облицовочный слой поверхности космического аппарата выполнен из диэлектрического тканого материала с плотностью плетения $0,34 - 0,7$ г/см² с вплетенными в продольном и поперечном направлениях металлизированными нитями. Применены пять разделенных прокладок из стекловуали экранов, каждый из которых выполнен из полиимидной пленки. При этом дополнительный пакет размещен между наружным облицовочным слоем и экранами, выполненными из полиэтилентерефталатной пленки, первый, второй и третий экраны дополнительного пакета металлизированы алюминием со стороны, противоположной наружному облицовочному слою, а четвертый и пятый металлизированы с двух сторон.

При этом экраны, выполненные из полиэтилентерефталатных пленок, металлизированы алюминием с двух сторон (А.с. № 1839976, МПК В64G 1/58, опубл. 20.06.2006 г.).

Кроме того, создана экранно-вакуумная теплоизоляция космического аппарата со стойким к эффектам электризации наружным облицовочным слоем, обеспечивающим пониженное значение поверх-

ностного электрического потенциала с сохранением теплофизических характеристик ЭВТИ.

Таким образом, ЭВТИ является одним из наиболее распространенных и надежных средств пассивного терморегулирования в системе обеспечения теплового режима КА. Применение ЭВТИ обеспечивает возможность существенно снизить интенсивность теплообмена элементов конструкции и оборудования КА с окружающей средой, то есть уменьшить тепловой поток, поступающий к элементам конструкции и оборудованию КА от солнца.

4.12 Теплообмен в экранно-вакуумной теплоизоляции

Материалы, применяемые для изготовления слоев ЭВТИ, могут быть самыми различными и выбираются в зависимости от уровня рабочих температур. Задаваясь интервалом рабочих температур от 4 до 423 К (-269–150°C), рассмотрим ЭВТИ марки ЭВТИ-Б1, в которой в качестве экранов используется полиэтилентерефталатная пленка с односторонним напылением алюминия (толщина пленки 12 мкм, толщина алюминиевого слоя 0,05 мкм), с рифленой поверхностью. Данная марка ЭВТИ собирается без прокладок, плотность укладки составляет от 10 до 50 слоев на 1 см.

Рассмотрим плоский фрагмент оболочки космического аппарата, укрытого пакетом ЭВТИ при воздействии внешнего теплового потока [5] (рис. 4.11). Экраны ориентированы металлизированной стороной внутрь.

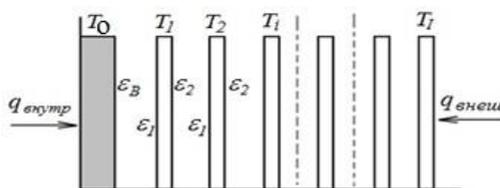


Рис. 4.11. Расчетная схема пакета ЭВТИ. Плёнка с $\epsilon_2 = 0,1$, $\epsilon_2 = 0,05$; плёнка полиэтилентерефталатовая $\epsilon_2 = 0,9$; углепластик толщиной 2 см. 30 слоёв ЭВТИ. $q_{\text{внеш}} = 1400 \text{ Вт/м}^2$

Полагая массу пакета ЭВТИ сосредоточенной в слоях пленки и принимая температуру оболочки и пленки постоянными вдоль пространственных осей координат, запишем дифференциальные уравнения изменения температуры оболочки и каждого слоя пакета ЭВТИ с учетом переноса тепла только излучением [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_o \rho_o h_o \frac{dT_o}{dt} = q_{\text{внутр}} + \varepsilon_{np}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \cdot \sigma \Delta T_{1,0}, \\ c_f \rho_f h_f \frac{dT_1}{dt} = \varepsilon_{np}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \cdot \sigma \Delta T_{1,0} + \varepsilon_{np}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \sigma \Delta T_{2,1}, \\ c_f \rho_f h_f \frac{dT_i}{dt} = \varepsilon_{np}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \sigma \Delta T_{i-1,i} + \varepsilon_{np}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \sigma \Delta T_{i+1,i}, \\ c_f \rho_f h_f \frac{dT_I}{dt} = A_{S2} q_{\text{внеш}} - \varepsilon_2 \sigma T_I^4 + \varepsilon_{np}(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \cdot \sigma \Delta T_{I-1,I}, \end{array} \right. \quad (4.21)$$

где $\Delta T_{1,0} = T_1^4 - T_0^4$, $\Delta T_{0,1} = T_0^4 - T_1^4$, $\Delta T_{2,1} = T_2^4 - T_1^4$, $\Delta T_{i-1,i} = T_{i-1}^4 - T_i^4$, $\Delta T_{i+1,i} = T_{i+1}^4 - T_i^4$, $\Delta T_{I-1,I} = T_{I-1}^4 - T_I^4$, I – число экранов, T_0 – температура тела, T_i – температуры экранов, c – теплоемкость, ρ – плотность, h – толщина, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – степень черноты оболочки, алюминия, пленки соответственно, A_{S2} – коэффициент поглощения солнечного излучения для пленки, $\varepsilon_{np}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1)^{-1}$ – приведенная степень черноты для плоскопараллельной системы тел, $q_{\text{внеш}}$ – плотность внешнего теплового потока, падающего на наружный слой пакета ЭВТИ, $q_{\text{внутр}}$ – плотность внутреннего теплового потока, подводимого к внутренней поверхности оболочки. Индекс o относится к оболочке космического аппарата, f – к пленке ЭВТИ.

Ввиду нелинейности решение системы уравнений (4.21) может быть найдено только численно, однако для стационарного случая существует аналитическое решение [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma} \left[\frac{A_{S2} q_{\text{внеш}}}{\varepsilon_2} + \left(I \cdot (\varepsilon_{np}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) + \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \cdot q_{\text{внутр}} \right]} \\ T_i = \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma} \left[\frac{A_{S2} q_{\text{внеш}}}{\varepsilon_2} + \left(\frac{I-i+1}{\varepsilon_2} + \frac{I-i}{\varepsilon_1} - (I-i) \right) \cdot q_{\text{внутр}} \right]} \end{array} \right.$$

Данное решение может быть использовано для нахождения плотности теплового потока $q_{\text{внутр}}$, при которой температура оболочки T_0 будет оставаться постоянной.

Рассмотрим оболочку космического аппарата из углепластика толщиной 2 см, укрытую пакетом ЭВТИ-Б1. Теплофизические характеристики углепластика и полиэтилентерефталата приведены в табл. 4.2 (предполагаются не зависящими от температуры).

Таблица 4.2. Теплофизические свойства материалов

Параметры	Полиэтилентерефталат	Углепластик
Плотность, кг/м ³	1270	1500
Теплоемкость, Дж/кг·К	1100	1100
Теплопроводность, Вт/м·К	0,2	0,8

Для металлизированного слоя $\varepsilon_1 = 0,05$, для пленки $\varepsilon_2 = 0,9$, $A_{S2} = 0,1$. Полагая, что плотностью укладки ЭВТИ 30 слоев на 1 см и взяв 30 слоев, рассчитаем изменение температурного поля оболочки и экранов в зависимости от времени, при воздействии прямого солнечного излучения с плотностью потока $q_{\text{внеш}} = 1400 \text{ Вт/м}^2$. Расчет проводился методом Рунге-Кутты с адаптивным шагом по времени.

Изменение температурного поля оболочки и внешнего экрана при отсутствии внутреннего теплового потока за 12 часов приведено на рис. 4.12, 4.13 [5].

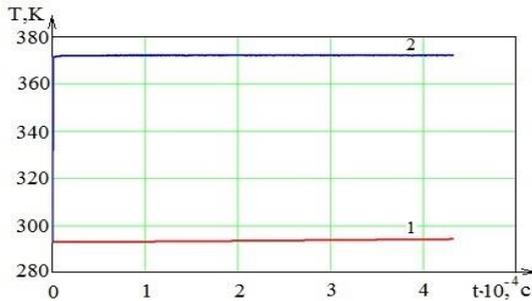


Рис. 4.12. Зависимость температуры оболочки и внешнего экрана от времени:
1 – оболочка, 2 – внешний экран ЭВТИ

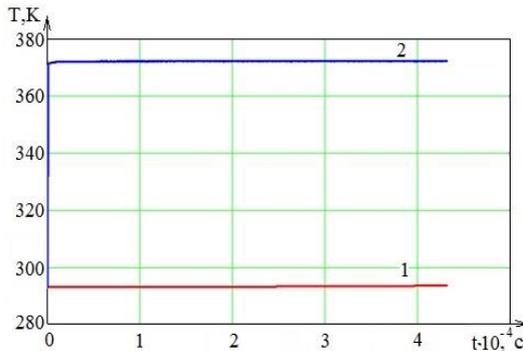


Рис. 4.13. Зависимость температуры оболочки и внешнего экрана от времени:
1 – оболочка, 2 – внешний экран ЭВТИ

Видно, что внешний экран за короткое время (около 1 минуты) достигает своей равновесной температуры 372 К (99°C), а температура оболочки за 12 часов поднимается на 1,2 К. Для того чтобы оболочка сохраняла свою температуру постоянной, к ней необходимо подводить поток с плотностью $q_{\text{внутр}}$, величина которого может быть найдена из решения стационарной задачи. Для данного случая $q_{\text{внутр}} = -1,11 \text{ Вт/м}^2$, при этом термическое сопротивление пакета ЭВТИ составляет $R = 67,85 \text{ м}^2\text{К/Вт}$, а эффективный коэффициент теплопроводности пакета ЭВТИ $\lambda_{\text{эфф}} = 22,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$, что соответствует данным отраслевого стандарта по ЭВТИ [5] с точностью 10%.

Изменение температурного поля оболочки и внешнего экрана для 50 слоев изоляции при отсутствии внутреннего теплового потока за 12 часов приведено на рис. 4.13. Результаты расчёта выполнены для следующих параметров: плёнка $A_{s2} = 0,1$; $\varepsilon_2 = 0,05$; плёнка полиэтилентерефталатовая $\varepsilon_2 = 0,9$; углепластик толщиной 2 см, 50 слоёв ЭВТИ при $q_{\text{внеш}} = 1400 \text{ Вт/м}^2$.

В этом случае равновесие наступает за время ≤ 1 мин и достигает $T = 372 \text{ К}$. За 12 часов изменение температуры составит $\Delta T = 0,48 \text{ К}$. Для того чтобы температура внутренней оболочки КА была постоянной ($T_{\text{внут}} = \text{const}$), нужно создать тепловой поток $q_{\text{внутр}} = -0,66 \text{ Вт/м}^2$, это возможно при термосопротивлении $R = 115,3 \text{ м}^2 \text{ К/Вт}$ или $\lambda_{\text{эфф}} = 21,7 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ пакета ЭВТИ.

В работе [5] были проведены исследования для теневой области $q_{\text{внеш}} = 0$. На рис. 4.14 представлены результаты исследований для следующих параметров: плёнка с $A_{s2} = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,05$; плёнка полиэтилентерефталатовая $\varepsilon_2 = 0,9$; углепластик толщиной 2 см; 30 слоёв ЭВТИ с плотностью укладки 20 слоёв на 1 см и термическое сопротивление $R = 67,85 \text{ м}^2 \text{ К/Вт}$.

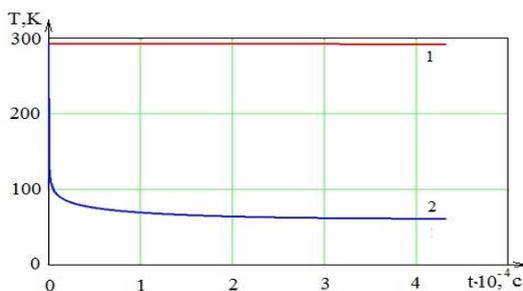


Рис. 4.14. Зависимость температуры оболочки и внешнего экрана от времени:
1 – оболочка, 2 – внешний экран ЭВТИ

Из данных рис. 4.14 видно: за 12 часов $\Delta T = 0,65$ К, температура внешнего экрана уменьшается до 61 К. Для обеспечения внутренней температуры оболочки $T_{\text{внут}} = \text{const}$ нужно создать тепловой поток $q_{\text{внутр}} = 0,7$ Вт/м².

На практике число экранов выбирается исходя из требуемых теплофизических характеристик ЭВТИ, а также минимизации массы тепловой изоляции.

Кроме того, необходимо учитывать, что при прошивке и перфорации материалов экранов теплофизические свойства ЭВТИ ухудшаются. Значения изменения коэффициента теплопроводности в зависимости от числа прошивок и от перфорации исходного материала экранов в готовой теплоизоляции приведены в [5].

При моделировании теплового режима [6,13] объектива оптического телескопа используются эффективные коэффициенты, которые соответствуют 30-слойному мату ЭВТИ с плотностью укладки 20 слоев на 1 см и термическим сопротивлением $R = 67,85$ м² К/Вт. Толщина такого мата составит 1,5 см, а плотность – $\rho_{\text{эфф}} = 33,36$ кг/м³, теплопроводность – $\lambda_{\text{эфф}} = 2,239 \cdot 10^{-4}$ Вт/мК.

Здесь также необходимо отметить, что число экранов выбирается исходя из требуемых теплофизических характеристик ЭВТИ, а также минимизации массы тепловой изоляции.

Таким образом, ЭВТИ является надежным средством тепловой защиты от внешних воздействий космического пространства, обеспечивая тепловой поток на уровне 1 Вт/м².

4.13 Методы определения коэффициента излучения твёрдых тел

Известно [14,16], что коэффициент излучения зависит не только от природы излучения, температуры, поверхности, степени окисления тела. Для полированных металлов коэффициент излучения является малой величиной порядка 0,1 при температуре 373 К. Металлы обладают высокой электропроводностью и отражательной способностью. При нормальном излучении степень черноты можно определить:

$$\varepsilon_{\text{н}} = 3,49 \cdot \sqrt{\rho_{\text{s}}} \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (4.22)$$

где ρ_{s} – удельное сопротивление (Ом·мм²/м) при температуре тела 373 К. Справедливость данной формулы (4.22) подтверждается экспериментами. Наличие оксидных плёнок на поверхности металлов степень чер-

ноты увеличивается и составляет порядка 0,5. Сплавы имеют более высокую степень черноты, степень черноты полупроводниковых материалов при температуре 373 К более 0,8. Тугоплавкие сплавы (карбиды, бориды, силициды) имеют степень черноты порядка 0,5 и выше. Коэффициенты излучения диэлектриков выше, чем у чистых металлов, и уменьшаются с увеличением температуры.

Радиационный метод

Радиационный метод является относительным методом [3,16]. Он основан на сравнении излучения исследуемого тела с излучением абсолютно чёрного тела или эталона. При измерении лучистой энергии применяется устройство, внутри которого помещается дифференциальная термопара. Один из спаев термопары воспринимает излучение, падающее с исследуемого тела, а другой – с поверхности эталонного тела. Результирующий поток излучения определяется по термоэдс дифференциальной термопары. Для простоты дальнейших рассуждений будем считать, исследуемое тело имеет вид плоской поверхности. Коэффициент излучения в данном случае запишем:

$$q_{12} = c \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = k_{np} \cdot \varphi,$$

где k_{np} – постоянная прибора.

Откуда

$$c = k_{np} \cdot \varphi \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]^{-1},$$

где c – коэффициент излучения, Вт/м²·К⁴.

Постоянную прибора k_{np} можно определить с помощью эталона и тарировки прибора. В соответствии с [16] определим:

$$k_{np} = \frac{c_3}{\varphi_3} \cdot \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]^{-1},$$

где φ , φ_3 – измеряемые величины исследуемого тела и эталона; T_1 , T_3 – абсолютные температуры; T_2 – абсолютная температура приёмника излучения.

Калориметрический метод

Калориметрический метод [2,3] является абсолютным методом измерения коэффициента излучения по формуле

$$c = q_{12} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]^{-1}.$$

Точность измерения коэффициента излучения определяется близостью с коэффициентом излучения абсолютного чёрного тела калориметра.

Метод регулярного теплового режима

Основой для определения коэффициента излучения является зависимость [2,3,14]

$$m = \phi \cdot \frac{\bar{\alpha} \cdot S}{C}, \quad \frac{1}{c}, \quad (4.23)$$

где m – темп охлаждения однородного изотропного тела; $\phi = (\bar{T}_S / \bar{T}_V)$ – коэффициент неравномерности распределения температуры, который определяется отношением средней температуры

$$\bar{T}_S = \frac{1}{S} \cdot \int_S T_S dS,$$

осреднённой по поверхности в данный момент времени, к средней по объёму избыточной температуре тела и зависит от условий охлаждения на поверхности тела; $C = c \cdot \rho \cdot V$ – полная теплоёмкость тела, Дж/К; $\bar{\alpha}$ – коэффициент теплоотдачи поверхности тела; S – поверхность тела. Темп охлаждения m при конечном значении коэффициента теплоотдачи α поверхности тела обратно пропорционален его теплоёмкости C (первая теорема Кондратьева).

В дальнейшем зависимость (4.23) для значения $Bi \ll 0,1$ и $Fo \geq 0,3 \div 0,5$ позволяет определить

$$\alpha = \frac{m \cdot C}{S}. \quad (4.24)$$

Если тело участвует только в лучистом теплообмене, то коэффициент теплоотдачи будет равен радиационному коэффициенту теплоотдачи, определяемому формулой

$$\alpha = \alpha_{\text{луч}} = \frac{q_{12}}{T_1 - T_2} = c \cdot fak.$$

Подставляя $\alpha_{\text{луч}}$ в (4.24), получим уравнение для определения коэффициента излучения:

$$c = m \cdot \frac{C}{S \cdot fak},$$

где fak – температурный фактор, K^3 , который равен

$$fak = \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot (T_1 - T_2)^{-1},$$

с учётом того, что q_{12} определяется из (4.20). Изложенный метод справедлив при постоянной температуре окружающей среды.

Замечание

Выясним характер зависимости коэффициента ϕ от числа Bi , учитывающего условия протекания процесса на поверхности. Рассмотрим два случая (рис. 4.15):

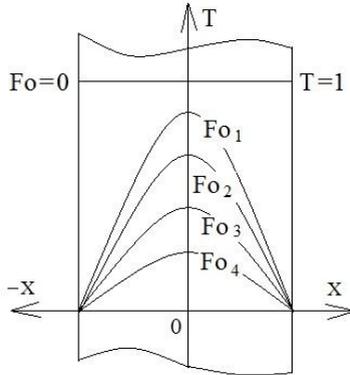


Рис. 4.15. Распределение температуры в плоской стенке при её охлаждении для $Bi \rightarrow \infty$, $Fo_1 < Fo_2 < Fo_3 < Fo_4$

А) Когда число $Bi \rightarrow 0$ ($Bi < 0,1$). В этом случае усреднение по поверхности и объёму температуры будет одинаково $\bar{T}_S = \bar{T}_V$, при этом коэффициент неравномерности распределения температуры в теле равен

$$\phi = \frac{\bar{T}_S}{\bar{T}_V} = 1.$$

Б) Когда число $Bi \rightarrow \infty$ ($Bi > 100$). При таком условии задача становится внутренней и процесс охлаждения определяется только размерами тела и его физическими свойствами.

В силу большой интенсивности теплообмена температура на поверхности тела принимает постоянное значение, равное температуре окружающей среды [3]. Коэффициент неравномерности распределения температуры определим следующим образом:

$$\phi = \frac{\bar{T}_s}{\bar{T}_v} = 0.$$

Следовательно, коэффициент ϕ неравномерности распределения температуры изменяется от нуля до единицы (рис. 4.16).

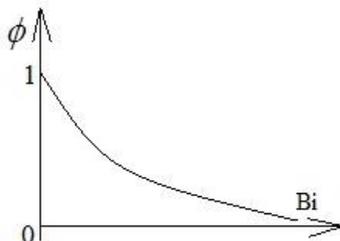


Рис. 4.16. Коэффициент неравномерности распределения температуры

При значении $Bi \rightarrow \infty$ или, что то же, $\alpha \rightarrow \infty$ темп охлаждения m прямо пропорционален коэффициенту температуропроводности тела a , m^2/c (вторая теорема Кондратьева):

$$a = K \cdot m_\infty.$$

Коэффициент пропорциональности K зависит только от геометрической формы и размеров тела.

Коэффициент пропорциональности $K = (2\pi/2h)^2$ для безграничной пластины. Здесь h – толщина пластины.

Для геометрических форм [1,3]:

шара

$$K = \left(\frac{\pi}{r_0} \right)^{-2},$$

где r_0 – радиус шара;

параллелепипеда

$$K = \left[\left(\frac{\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3} \right)^2 \right]^{-1},$$

где l_1, l_2, l_3 – стороны параллелепипеда;

цилиндра

$$K = \left[\left(\frac{2.405}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right]^{-1},$$

где r_0 – радиус основания цилиндра, l – образующая цилиндра.

Метод нагрева с постоянной скоростью

Метод относится к регулярному режиму [3,14,15]. В этом методе исследуется охлаждение тела с постоянной скоростью, при значении $Fo \geq 0,3 \div 0,5$. В качестве исследуемого тела используется пустотельный цилиндр, который помещается в кожух с толстыми стенками, причём внутренний размер полого цилиндра близок с размерами исследуемого тела. В небольшом зазоре между ними создаётся разрежение, в результате чего перенос теплоты за счёт теплопроводности и конвекции отсутствует. Система полой цилиндр и исследуемое тело нагревается с постоянной скоростью $\partial T / \partial t = \text{const}$.

Коэффициент излучения определим из уравнения

$$Q_{1,2} = q_{1,2} S = c_{1,2} S \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где T_1 и T_2 – температуры исследуемого тела и полого цилиндра.

Поток результирующего излучения определяется по массе M , удельной теплоёмкости c_p и скорости нагрева $\partial T / \partial t$ исследуемого тела:

$$Q_{1,2} = M c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Тогда приведённый коэффициент излучения можно определить для системы «тело – цилиндр»:

$$c_{1,2} = Q_{1,2} \cdot S_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]^{-1} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right)^{-1}, \quad (4.25)$$

из (4.25) определяется коэффициент излучения тела c_1 при известном значении c_2 .

Библиографический список к главе 4

1. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
2. Теплообмен излучением: справочник / Блох А.Г. [и др.] М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
3. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 344 с.
4. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 515 с.
5. Цаплин С.В., Большев С.А. Расчет экранно-вакуумной тепловой изоляции космического аппарата: сб. трудов // XXVIII Российская школа по проблемам науки и технологий, 24-26 июня 2008, г. Миасс. С. 125-132.
6. Экспериментальные исследования макета оптико-телескопического комплекса космического аппарата при воздействии тепловых факторов космического пространства в лабораторных условиях / С.В. Цаплин [и др.] // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2014. №7(118). Самара: Изд-во Самарского университета. С. 134-143.
7. Цаплин С.В., Большев С.А. Исследование тепловых режимов оптико-электронного телескопического комплекса микро-спутника при воздействии условий эксплуатации // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, №2. 135-144 с.
8. Цаплин С.В., Большев С.А. Оптико-электронный телескопический комплекс микро-спутника // Материалы IV Международной научной конференции «Региональные проблемы дистанционного зондирования Земли». г. Красноярск, 12-15 сентября 2017. Сибирский федеральный университет. С. 66-69.
9. Цаплин С.В., Большев С.А. Исследование тепловых режимов оптико-электронного телескопического комплекса микро-спутника в условиях эксплуатации на основе решения связанной термоупругой задачи // V Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» («V Козловские чтения»), 11-15 сентября 2017 года. С. 406-408.
10. Цаплин С.В., Большев С.А. Моделирование теплового режима оптико-электронного телескопического комплекса микро-

- спутника // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2018. №5. Т. 6. С. 430-436.
11. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование термоупругого состояния объектива наноспутника: сб. материалов // XXII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ 2018). 24-31 мая 2018, г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2018. С. 517-519.
 12. Цаплин С.В., Болычев С.А., Романов А.Е. Теплообмен в космосе: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2018. 92 с.
 13. Цаплин С. В., Болычев С. А. Исследование тепловых режимов оптико-электронного телескопического модуля наноспутника в условиях эксплуатации // IV Международная конференция «SPEXP-2018». Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках. 4-6 сентября 2018 г. С. 3.
 14. Цаплин С.В., Парахина Е.В., Зиятов И.З. Техника физического эксперимента: учеб. пособие. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 1998. 142 с.
 15. Цаплин С.В., Болычев С.А., Романов А.Е. Тепломассоперенос: лабораторный практикум. Самара: Изд-во Самарского государственного университета, 2005. 67 с.
 16. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975. 486 с.

5 ТЕРМОУПРУГОСТЬ

Обширные теоретические исследования по термоупругости были начаты Дюамелем в 1838 году [1,2]. Он рассматривал уравнения термоупругости в квазистатической постановке и впервые вывел уравнение для определения деформаций в упругом теле с температурными градиентами [3]. Позже такие же результаты были получены Нейманом. Начиная с 1851 года основы термоупругости формулируются лордом Рэлеем [73], определившим чуть позже связь между термоупругим состоянием оптических элементов и качеством изображения оптической системы в виде одноименного предела [5]: критерий Рэлея¹ Δ в контексте МДГТ связывает изменения поля перемещений \bar{u} оптической поверхности с качеством изображения на основании неравенства $\Delta(\bar{u}) \leq \lambda_{св}/4$, где $\lambda_{св}$ – длина световой волны.

Научная разработка задач оптической техники началась с конца XVII столетия благодаря трудам «универсальных» ученых того времени – Декарта, Ферма, Ньютона, Эйлера, Ломоносова и Гаусса. Оформление теории оптических приборов в самостоятельную дисциплину произошло только в последней четверти XIX века, когда начался быстрый рост оптической промышленности [6]. Планомерное создание отечественной оптической промышленности началось только после Великой Октябрьской революции. С этой целью создается мощная научная база, располагающая хорошо оснащенными лабораториями и высококвалифицированными научно-техническими кадрами, и широко используется зарубежный опыт. В 1918 году был создан Государственный оптический институт (ГОИ) имени академика С.И. Вавилова, в котором работали известные академики Д.С. Рождественский, С.А. Лебедев, И.В. Гребенщиков, В.П. Линник, а также член-корр АН СССР Н.Н. Качалов, член-корр АН СССР Д.Д. Максудов и член-корр АН СССР А.И. Тудоровский. Их усилиями уже в 1929 году развитие советской оптической промышленности достигло уровня развития передовых стран Европы. В этой связи огромный успех СССР принесло создание аппаратуры для фотографирования обратной стороны Луны, положившее начало новой отрасли оптического приборостроения и оптической техники – косми-

¹ Предел Рэлея заключается в том, что минимальный размер различимого объекта принципиально ограничен дифракцией излучения и является одной из иллюстраций принципа неопределенности Гейзенберга, согласно которому любая попытка повысить степень локализации положения источника света приводит к возрастанию неопределенности импульса фотонов.

ческим оптическим приборам для астронавигации, астрономическим наблюдениям, космической фотосъемки поверхности Земли и звездного неба.

ГОИ может считаться основоположником космической оптики в России [7]. В конце 50-х годов прошлого столетия генеральный конструктор ракетной техники С.П. Королев и академик М.В. Келдыш обратились в ГОИ с просьбой оценить возможности проведения фотографирования земной поверхности из космоса. Ответ был положительный. 6 апреля 1962 года искусственный спутник Земли «Космос-4» впервые осуществил космическую фотосъемку. Космическая оптика создавалась институтом как для космических комплексов видового наблюдения, так и для топографических комплексов, а по уровню получаемой информации могла быть детальной или обзорной [8]. Для этих целей также создавались новые оптические материалы, и это новое направление возглавил академик Г.Т. Петровский. В середине 50-х годов Д.С. Волосовым была разработана теория термобарических aberrаций [9], и на ее основе другими учеными сформулированы требования к основным оптическим свойствам материалов для крупногабаритных и высокоразрешающих космических объективов. Такие материалы обеспечили возможность создания принципиально новых по своим характеристикам объективов – термоустойчивых анастигматов-апохроматов. Были определены марки оптических стекол, которые удовлетворяли требованиям повышения светопропускания и оптической однородности с учетом увеличения диаметра оптики до $\varnothing 700$ мм. Увеличивать размер далее было нецелесообразно из-за потери жесткости конструкции. В связи с этим рассматривалась возможность использования киноформных оптических элементов [10]. В конце 80-х в ГОИ был испытан первый космический киноформный длиннофокусный объектив «Ионар-2», который отличался от аналогичных на 40% меньшей массой и существенно меньшей термомеханической расстраиваемостью². В целом, в оптическом приборостроении последних десятилетий наблюдались тенденции развития, направленные:

1) на повышение разрешающей силы оптической системы путем преодоления предела Рэлея;

2) улучшение качества изображения оптической системы светотехническими средствами;

² Под термомеханической расстраиваемостью будем понимать искажение качества изображения оптической системы, вызванное воздействием различных факторов тепловой и механической природы.

3) улучшение качества изображения путем комбинации рефракционных линз с нетрадиционными оптическими элементами, включая вариации форм комбинируемых оптических поверхностей.

Первая из них связана с тем, что долгое время велись разработки оптического микроскопа новой конструкции, разрешающая сила которого в несколько раз превышала бы ту, что считалась максимально возможной согласно закону Аббе [11,12]. В 2007 году немецким ученым удалось создать линзу с разрешением, превосходящим дифракционный предел: ученые из Института биофизической химии им. Макса Планка Штефан Хелль и Маркус Дюба опубликовали статьи в «Physical Review Letters» [13,14], в которых сообщили о наблюдении флуоресценции участка клеточной мембраны бактерии *Bacillus megaterium* протяженностью порядка 33-46 нм при длине волны излучения $\lambda_{в\epsilon}$ [745;760] нм. Работы в этом направлении ведутся [15] и в скором времени, скорее всего, затронут разработки диоптрических систем. В связи с этим перспективным путем является переход от рефракционных оптических элементов к комбинации с дифракционными элементами или с двояковогнутыми коническими [16]. В отличие от рефракционных линз, имеющих толщины и радиусы поперечного сечения одного порядка, дифракционные элементы, выполненные в форме линз Френеля [17], имеют меньшие толщины при тех же радиусах.

Вторая из них связана с тем, что качество изображения оптических систем может улучшаться различными техническими средствами [18,19], в том числе и светотехническими. Наряду с этим во избежание появления температурных деформаций оптических элементов необходимо обеспечение их термомеханической защиты, которая не должна ухудшать качество изображения. Выбор и осуществление такой защиты ставит перед изготовителями дилемму: либо тщательно разрабатывать многоплановые способы термомеханической защиты во время эксплуатации (термомеханическая корректировка), либо обойтись минимумом средств защиты и корректировать потери качества изображения при полетной и наземной обработке снимков (оптическая корректировка и восстановление изображения). «Золотую середину» между ними занимают способы улучшения качества изображения за счет светотехнических средств, разрабатываемых отдельно от оптической системы. Одним из вариантов решения проблемы, позволяющим не только сохранить, но и улучшить качество изображения, является использование светозащитных бленд, предназначен-

ных для повышения качества изображения за счет снижения уровня фоновой засветки фокальной плоскости [18]. В связи с этим оказался весьма эффективным предлагаемый в [20] вариант конструкции светозащитной бленды с коническими диафрагмами (это направление оптического приборостроения в настоящее время развито в работах [21-23]). Однако из-за высокой теплопроводности материала бленды (тонкий листовой металл) и малой массы (несколько килограмм) на борту КА эффективная светозащита сопровождается усилением термомеханических воздействий на термоупругое состояние диоптрической системы в процессе сложного теплообмена [24,25]. Это приводит еще к дополнительным потерям качества изображения, которые нельзя компенсировать каким-либо образом из-за вероятностного характера их поведения [26,27].

Третья из них связана с тем, что качество изображения диоптрической системы, имеющей оптические элементы с изотропными оптическими свойствами, может улучшаться путем использования специфических типов оптических элементов – асферических, градиентных и дифракционных. Так, асферический тип оптических элементов обычно используется в телескопических системах [28] и редко в диоптрических, дифракционный – в диоптрических системах в виде дифракционных линз для получения изображения очень удаленных объектов (звезды и др.). Градиентные элементы – граданы [29,30] – имеют неоднородное пространственное распределение показателя преломления за счет плавно меняющегося состава материала. Существуют также композиции градиентных оптических элементов с асферическими поверхностями [31] и дифракционных и градиентных элементов [32]. Использование осевого, радиального и сферического градиентов показателя преломления позволяет значительно улучшить качество получаемого изображения, повысить светопропускание и сократить количество элементов диоптрической системы [33]. Последнее также позволяет создавать системы с большим углом зрения, характеризующиеся компактностью, прочностью и механической простотой [34].

При решении задач термоупругости для открытых или полуоткрытых поверхностей отрицательной кривизны имеет место эффект самооблученности, обеспечивающий дифференциально-интегральную форму граничного условия [35]. Наиболее удобно в таких задачах использовать метод граничных элементов [36]. При этом самой большой трудностью при сложной геометрии задачи является вычисление функции

видимости, т.к. она задается булевыми условиями, непосредственно не связана с искомыми полями температур и перемещений, и к тому же требует специальных алгоритмов расчета. Для решения задач с такой особенностью могут быть использованы различные методы, в том числе и на разделении всего видимого пространства на совокупность телесных углов [37].

Среди численных методов решения нелинейных начально-краевых задач термоупругости наиболее распространены метод конечных элементов [38,39] и метод граничных элементов [40,41].

В методе конечных элементов система уравнений термомеханики деформируемого твердого тела приводится к системе алгебраических уравнений за счет пространственного деления области решения на конечные объемы простой формы – конечные элементы. Количество степеней свободы на один узел элемента определяется количеством решаемых для этой точки пространства уравнений и в общем случае равно 16 [42]. Физическая нелинейность задач здесь функционально ничем не ограничивается, но требует разработки специальных алгоритмов внедрения нелинейности в расчетные схемы.

В методе граничных элементов решение задачи термоупругости ищется таким образом, чтобы удовлетворялись на границе области решения. Здесь число степеней свободы сохраняется, но нет необходимости разбивать всю область решения на элементы – достаточно только поверхность раздела сред разбить на граничные элементы. Дискретизация граничных интегральных уравнений приводит к СЛАУ со значениями неизвестных, одинаковыми для всех точек в пределах граничного элемента. В ряде случаев возможно также и совместное использование метода конечных элементов с методом граничных элементов [43].

Численное решение задач термоупругости осуществляется также и на основе контроля допустимых отклонений искомым функций (температура, перемещения, деформации и др.) в ходе решения. Так, в работе [44] рассматривается численное решение нелинейных уравнений теплопереноса в закалочных процессах, включающих радиационный теплообмен. Указанные процессы подразумевают решение задач связанной термоупругости в металлах, которые в широком диапазоне температур характеризуются нелинейными термомеханическими свойствами и наличием в системе фазовых переходов. Для решения задачи используется подбор шага по кривизне линии температур таким образом, чтобы избежать осцилляций численного решения и обеспечить его быструю сходимость.

5.1 Термомеханические свойства оптических материалов

Оптическими являются материалы, прозрачные для оптического диапазона электромагнитных волн, используемые для изготовления оптических элементов (деталей), работающих в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях спектра. Такие материалы являются оптическими средами, к которым относят также оптические пленки, воздух, жидкости, газы, оптические клеи и прочие вещества, пропускающие оптическое излучение. Они подразделяются на оптические стекла, оптические ситаллы, оптические кристаллы и оптическую керамику. Оптические стекла, благодаря ряду положительных оптических, технологических и эксплуатационных свойств и характеристик, являются наиболее типичными и распространенными материалами, используемыми для изготовления оптических деталей.

Оптические стекла подразделяются на бесцветные (ГОСТ 3514-76, ГОСТ 13659-68, ГОСТ 13659-78), цветные (ГОСТ 9411-81), кварцевые (ГОСТ 15130-79, ГОСТ 15130-86), органические (ГОСТ 15809-70) с особыми свойствами. Материалы, используемые для изготовления линз, должны обладать рядом свойств, позволяющих получить высокую точность и чистоту рабочих (полированных) поверхностей, сохранять свои свойства и характеристики в течение длительного времени при возможном воздействии внешних факторов. По характеру преобразования светового пучка различают собирающие и рассеивающие линзы; по форме преломляющих поверхностей – сферические, асферические, цилиндрические, торические и др.; по форме боковой поверхности – круглые и некруглые.

В качестве материала для линз используется в основном оптическое стекло различных марок. Согласно ГОСТ 13659-68 линзы рассматриваются как оптически прозрачное деформируемое твердое тело и разделяются на группы в зависимости от свойств, представленных в табл. 5.1.

Таблица 5.1. Свойства оптических материалов

Свойства	Обозначения
Механические	α (коэффициент линейного теплового расширения), E (модуль упругости), ν (коэффициент Пуассона)
Физические	c (удельная теплоемкость), χ (теплопроводность), ε (степень черноты поверхности), ρ (плотность), μ (динамическая вязкость)

Термооптические	<p>Термооптические постоянные (n_λ, $\beta_{\lambda,t}$, $V_{t,\lambda}$, $W_{t,\lambda}$, $R_{t,\lambda}$) учитывают изменение показателя преломления оптического материала, вклад термических изменений геометрических размеров и фотоупругих напряжений при отклонении температуры на характеристики и aberrации оптических элементов.</p> <p>Приращение относительных значений показателя n_λ преломления при повышении температуры t на 1°C, определяемое формулой $\beta_{\lambda,t} = dn_\lambda/dt$;</p> <p>Термооптическая постоянная $V_{t,\lambda}$, равная $V_{t,\lambda} = \beta_{\lambda,t}/(n_\lambda - 1) - \bar{\alpha}_t$, которая учитывает изменение показателя преломления оптического материала при стационарной температуре t и используется обычно для расчета расфокусировки оптической системы при стационарном изменении температуры. Здесь n_λ – показатель преломления стекла для длины волны λ при $t = 20^\circ\text{C}$;</p> <p>Термооптическая постоянная $W_{t,\lambda}$ учитывает вклад термических изменений геометрических размеров на характеристики и aberrации оптических элементов при неравномерном распределении температуры, равная $W_{t,\lambda} = \bar{\beta}_{t,\lambda} + \bar{\alpha}_t (n_\lambda - 1)$, где $\bar{\beta}_{t,\lambda}$ – приращение абсолютного значения показателя преломления;</p> <p>Термооптическая постоянная $R_{t,\lambda} = \alpha_t \cdot (n_\lambda - 1) \cdot \mu - \bar{\alpha}_t \cdot E \cdot (C_1 + C_2)/2$ – характеризует волновые свойства, где μ – коэффициент поперечной деформации, C_1, C_2 – фотоупругие постоянные;</p> <p>Сумма термооптических постоянных ($W_{t,\lambda} + R_{t,\lambda}$) является критерием атермальности оптических материалов (стекол) и характеризует термоволновые aberrации также и в условиях неравномерного распределения температуры</p>
-----------------	---

Из свойств материала линз $\bar{\alpha}_t$ и $\bar{\beta}_t$ имеют несколько перекрывающихся диапазонов (от -60 до $+20^\circ\text{C}$ и от $+20$ до $+120^\circ\text{C}$) средних значений в зависимости от температуры. В связи с этим коэффициенты $k_t = (\bar{\alpha}_t, \bar{\beta}_t)$ при решении начально-краевых задач термоупругости определим функциями полиномиального вида

$$k_t(t) = \sum_{n=1}^N h_n t^{n-1}, \quad (5.1)$$

где h – коэффициент аппроксимирующего полинома степени N , равной количеству диапазонов средних значений абсолютных температур. В ГОСТ 13659-68 указано 4 интервала температур $\bar{\alpha}_t$ и 2 интервала температур β_t . Пусть для каждого диапазона C_n – табличные значения параметра, усредненные на этом интервале (будем считать их среднеинтегральными величинами). Тогда в представлении (5.1) для каждого интервала выполняется условие

$$C_n = \frac{1}{t_n^e - t_n^h} \cdot \int_{t_n^h}^{t_n^e} k_t(t) dt,$$

где t_n^e, t_n^h – соответственно верхняя и нижняя границы. Переноса свободный множитель в левую часть и интегрируя правую часть, получаем для каждого диапазона уравнение

$$\sum_{n=1}^N \frac{h_n (t_n^e - t_n^h)}{n+1} = C_n (t_n^e - t_n^h).$$

Объединение уравнений приводит к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов аппроксимирующего полинома (5.1). Решая систему, получаем коэффициенты h_n в (5.1).

Коэффициент линейного термического расширения учитывается при разработке конструкций крепления оптических деталей, определении возможности соединять оптические детали приклеиванием или оптическим контактом, осуществлять «остекловывание» металлических деталей. Он влияет на длительность «отстаивания» деталей при их обработке и ряд других свойств и характеристик проектируемых изделий.

В отношении плотности оптических материалов следует заметить, что она определяет массу заготовки и линзы, ее возможный прогиб под собственным весом, давление на опорные поверхности и т.п. Упругие свойства линз позволяют определять деформацию деталей при обработке, креплении, от воздействия внешних факторов и др. Наилучшими здесь считаются материалы, обладающие максимальными упругими характеристиками.

Динамическая вязкость материала в зависимости от температуры характеризует свойство материала сопротивляться перемещению одной из его частей относительно другой, когда он находится в жидком (газообразном) состоянии, а также необратимо поглощать энергию при пластическом деформировании твердых тел. Следует отметить,

что на стадии обработки и эксплуатации стекол вязкость имеет значение лишь как фактор, ограничивающий применение стекла при высоких температурах. Стекло переходит из твердого состояния в пластичное при вязкости 1×10^{12} Па·с. Вязкое течение связано с разрывом или переключением химических связей в стеклах, поэтому различные стекла имеют разный температурный ход вязкости [45].

Перечислим основные механические характеристики оптического стекла.

Прочность. Оптическое стекло, обладая сравнительно высокой прочностью на сжатие, имеет значения предельного напряжения на растяжение в 15-20 раз хуже, чем на сжатие [46]. Царапины, выколки и трещины приводят к появлению значительных напряжений в материале даже при относительно небольших нагрузках и могут вызвать разрушение или скол детали при ее обработке, закреплении и при эксплуатации. При механической обработке оптических материалов в поверхностном слое возникает трещиноватый слой (микротрещины Гриффита), который играет роль концентраторов напряжения. Поэтому обработка оптических деталей способом глубокого шлифования и полирования существенно повышает прочностные свойства оптических материалов.

Хрупкость. Оптическое стекло является хрупким материалом, практически не обладающим пластическими свойствами и плохо сопротивляющимся действию ударных и изгибающих сил.

Твердость. Высокая микротвердость оптического стекла сказывается отрицательно при шлифовке оптических деталей (увеличивает трудоемкость процесса) и положительно при их полировке, т.к. позволяет получить более точные поверхности. Твердость по сошлифовыванию определяется относительным значением твердости различных оптических материалов по сравнению с твердостью кварцевого стекла К8 (его твердость принимается равной 1) и равна отношению сошлифованного объема стекла марки К8 к объему данного материала, сошлифованного в тех же условиях. Наибольшей твердостью по сошлифовыванию обладает кварцевое стекло, а наименьшей – фосфатные кроны, тяжелые флинты.

Жесткость. Удельная жесткость позволяет оценить стабильность формы поверхностей оптических деталей при изготовлении и эксплуатации. Наилучшей удельной жесткостью обладают бериллий, карбид кремния, ситалл, плавленный кварц.

5.2 Феноменологическая модель термомеханических явлений

Для решения задач дистанционного зондирования применяются различные сочетания видов оптических систем фотографирования поверхности Земли и вспомогательных оптических систем, необходимых для ориентации и навигации КА. При этом сохраняются принципы их компоновки. Поскольку на борту КА эксплуатация оптических систем осуществляется в условиях невесомости и отсутствия относительных перемещений узлов оптической системы (за исключением режима автофокусировки) даже при наличии сложного теплообмена между оптическими элементами и внешними тепловыми источниками. Для получения снимков высокого качества изображения диоптрические системы должны быть высокоортоскопичными и иметь устраненными подавляющее большинство aberrаций [9,47]. Особое внимание должно быть уделено коррекции aberrаций дефокусировки и дисторсии. Волновая aberrация вдоль главного луча параксиального пучка, преломляющегося через несколько оптических поверхностей, выражается через их перемещения:

$$\Delta(t) = \sum_{i=1}^1 [n_{\lambda}(\mathbf{r}_i, t) - n_{a\lambda}] \cdot [u(\mathbf{r}_i, t) - u(\mathbf{r}_i, 0)], \quad (5.2)$$

где \mathbf{r}_i – радиус-вектор i -й оптической поверхности, n_{λ} – показатель преломления стекла линзы деформированной поверхности, $n_{a\lambda}$ – показатель преломления воздуха (вакуума). При наличии функциональной зависимости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(T)$ aberrация (5.2) относится к термооптическим. Исправление термооптических aberrаций возможно лишь для заданного интервала температур, причем в оптике наиболее распространен расчет aberrаций в предположении линейной зависимости радиуса кривизны R_{kp} оптической поверхности от температуры [9,19]:

$$R_{kp}(T) = R_{kp}(T_{ref}) \cdot [1 + u_r(T)], \quad (5.3)$$

где T_{ref} – референциальная температура, $u_r(T)$ – радиальное перемещение оптической поверхности, определяемое как

$$u_r(T) = \bar{\alpha}_T(T) \cdot (T - T_{ref}). \quad (5.4)$$

Соотношения (5.3) и (5.4) позволяют определять термооптические aberrации только в случае однородного распределения поля температур и в одномерном приближении, и потому искажают информацию при наличии локальных деформаций оптической поверх-

ности [49], т.к. u_r является, по сути, одномерным, а не пространственным перемещением.

Одновременно с изменением радиуса кривизны возникает изменение n в толще линз:

$$n_\lambda(T) = n_\lambda(T_{ref}) + \bar{\beta}_T(T, \lambda_{св}) \cdot (T - T_{ref}), \quad (5.5)$$

где термооптический показатель приращения относительного показателя преломления $\bar{\beta}_T$ соотносится с той длиной световой волны $\lambda_{св}$, для которой исправляются монохроматические аберрации объектива. Отсюда следует связь с градиентом поля температур

$$\nabla n_\lambda = \nabla \bar{\beta}_T (T - T_{ref}) + \bar{\beta}_T \nabla T = H \nabla T, \quad (5.6)$$

где

$$H(T) = \bar{\beta}_T(T) + \frac{\partial \bar{\beta}_T}{\partial T} \cdot (T - T_{ref}).$$

Соотношения (5.5) и (5.6) являются важнейшими из соотношений, определяющих термооптические аберрации и градиентные свойства термомодеформированных линз в одномерном приближении. Следует также отметить, что неоднородное распределение температурного поля в толще оптического элемента «приписывает» оптическим элементам градиентные свойства. В задачах термоупругости это эквивалентно зависимости термомеханических и оптических свойств оптических элементов от координат. Задачи термоупругости такого типа рассмотрены в [50,51].

Коррекция термооптических аберраций определяет задачу создания нерасстраивающегося объектива и в ряде случаев может быть решена выбором соответствующего материала и типа конструкции оправ и корпуса объектива, при которых компенсируется заранее рассчитанное смещение изображения в фокальной плоскости. Но это приводит к необходимости применять конструктивно сложные типы оправ, специально подобранные материалы корпуса объектива и его особой конструкции [18]. В связи с этим термооптические аберрации представляют собой «гордиев узел» эксплуатации оптических систем в переменных температурных полях, который в рамках диссертации [52] предложено «развязать» с применением полуаналитических методов решения начально-краевых задач термоупругости с нелинейными граничными условиями сложного теплообмена в форме Стефана–Больцмана и дать рекомендации по применению полученных

решений полей температур и перемещений к оценке качества изображения оптической системы.

В нерасстроенной оптической системе качество изображения считается наилучшим, и такое ее термоупругое состояние закладывается изготовителем как наиболее благоприятное в эксплуатации [53]. По определению оно является референциальным и характеризуется функционалом

$$\Xi_{ref} = \{T_0, \mathbf{u}_0, \varepsilon_0\},$$

где $T_0(\mathbf{r}, t) = T_{ref}$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$, $\varepsilon_0(\mathbf{r}, t) = 0$. Соответственно, любые изменения Ξ_0 ухудшают его, хотя в редких случаях может произойти и улучшение. Поэтому информация об отклонениях текущего термоупругого состояния (обозначим его $\Xi^{(e)}$) от Ξ_{ref} в условиях эксплуатации включает аварийные состояния.

5.3 Термодинамика термоупругого деформирования

При механических и тепловых воздействиях в упругом теле возникают поля перемещений, деформаций и напряжений, вызванные изменением температурного поля. Процесс термоупругого деформирования, сопровождающийся процессом теплопроводности при конечной скорости изменения деформаций, является необратимым [42].

Термодинамическая теория необратимого процесса термоупругого деформирования основана на предположении о локальном термодинамическом равновесии, при котором мгновенные значения термодинамических функций являются однозначными функциями своих параметров. Из этого вытекает, что основные уравнения классической термодинамики справедливы и для локально равновесных макроскопических частей термодинамической системы. Согласно первому закону термодинамики во всем объеме тела V скорость изменения во времени кинетической энергии и внутренней энергии U равна сумме работы, выполненной над телом внешними силами, и скорости подвода к нему тепла. Из этого следует, что скорость работы деформации равна

$$\int_V \hat{\tau}_{ij} \dot{\hat{\varepsilon}}_{ij} dV,$$

а скорость подвода тепла есть

$$\int_V (-\nabla \mathbf{q} + Q) dV.$$

В этом случае 1-й закон термодинамики примет вид

$$\int_V \dot{U} \cdot dV = \int_V \left(\hat{\tau}_{ij} \dot{\hat{\varepsilon}}_{ij} - \nabla \mathbf{q} + Q \right) dV.$$

В дифференциальной форме ему соответствует уравнение

$$\dot{U} = \hat{\tau}_{ij} \dot{\hat{\varepsilon}}_{ij} - \nabla \mathbf{q} + Q = \hat{\tau}_{ij} \dot{\hat{\varepsilon}}_{ij} + T \cdot \dot{S}_T. \quad (5.7)$$

Отсюда находим выражение полного дифференциала плотности внутренней энергии:

$$dU = T dS_T + \hat{\tau}_{ij} d\hat{\varepsilon}_{ij}.$$

Плотность свободной энергии равна

$$F_T = U - TS_T,$$

а ее полный дифференциал

$$dF_T = \hat{\tau}_{ij} d\hat{\varepsilon}_{ij} = S_T dT.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{\partial F_T}{\partial \hat{\varepsilon}_{ij}}, \quad S_T = -\frac{\partial F_T}{\partial T}. \quad (5.8)$$

Первое уравнение (5.8) устанавливает соотношение между напряжениями и деформациями термодформируемого тела, а второе определяет плотность энтропии.

Для вывода соотношений между напряжениями и деформациями составим выражение для плотности свободной энергии как функции компонентов тензора деформации и температуры. Приращение избыточной температуры $\Theta = T - T_{ref}$ вызывает чисто тепловое расширение

$$\Delta V = \int_0^{\Theta} \alpha \cdot d\Theta,$$

которое имеет тот же порядок малости, что и $\hat{\varepsilon}_{ij}$. Это предположение не противоречит основному положению линейной теории упругости о малости деформаций и позволяет отказаться от ограничения $\Theta T^{-1} \ll 1$. Вместе с тем оно требует учета параметра связанности полей температур и перемещений.

Предполагая, что Θ не является малой величиной по сравнению с T_0 , разложим свободную энергию в ряд Тейлора по степеням $\hat{\varepsilon}_{ij}$ с коэффициентами, зависящими только от T . Выбирая в качестве неза-

висимых термодинамических параметров вместо компонентов $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ первые два его инварианта

$$I_1 = \widehat{\varepsilon}_{kk}, \quad I_2 = \widehat{\varepsilon}_{ij} \widehat{\varepsilon}_{ji},$$

и ограничиваясь в разложении свободной энергии членами не выше 2-го порядка малости, получаем

$$F_T = F_T(0, 0, T) + \frac{\partial F_T(0, 0, T)}{\partial I_1} I_1 + \frac{\partial F_T(0, 0, T)}{\partial I_2} I_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_T(0, 0, T)}{\partial I_1^2} I_1^2 + \dots \quad (5.9)$$

Функция $F_T(0, 0, T)$ выражается через теплоемкость при отсутствии деформации:

$$c_{\varepsilon=0} = -T \frac{\partial^2 F_T(0, 0, T)}{\partial T^2}, \quad \dim[c_{\varepsilon=0}] = \dim[\rho c].$$

Отсюда получаем

$$F_T(0, 0, T) = - \int_{T_{ref}}^T \int_{T_{ref}}^T \frac{c_{\varepsilon=0}}{T} dT.$$

Здесь при определении постоянных интегрирования предполагалось, что $S_T = 0$, $F_T = 0$ при отсутствии деформации и температуре тела, равной начальной. Введем обозначения:

$$\lambda_e = \frac{\partial^2 F_T(0, 0, T)}{\partial I_1^2}, \quad \mu_e = \frac{\partial F_T(0, 0, T)}{\partial I_2}.$$

Приведенные соотношения есть коэффициенты Лямэ. Они связаны с механическими свойствами – модулем Юнга и коэффициентом Пуассона, – соотношениями

$$\lambda_e = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu_e = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.10)$$

При свободном тепловом расширении дилатация (или относительное изменение единицы объема) равна

$$I_1 = \widehat{\varepsilon}_{kk} = - \frac{3}{3\lambda_e + 2\mu_e} \frac{\partial F_T(0, 0, T)}{\partial I_1} = 3 \cdot \int_0^\Theta \alpha d\Theta.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial F_T(0, 0, T)}{\partial I_1} = (3\lambda_e + 2\mu_e) \cdot \alpha \Theta.$$

При этом предполагается, что на интервале $[0, \Theta]$ имеем истинный коэффициент линейного теплового расширения

$$\alpha = \frac{1}{|\Theta|} \cdot \int_0^{\Theta} \alpha(T_{ref} + \Theta) d\Theta.$$

В итоге окончательное выражение для плотности свободной энергии (5.9) есть

$$F_T = - \int_{T_{ref}}^T \int_{T_{ref}}^T \frac{c_{\varepsilon=0}}{T} dT - (3\lambda_e + 2\mu_e) \cdot \alpha \Theta \hat{\varepsilon}_{kk} + \mu_e \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ji} + \frac{1}{2} \lambda_e \hat{\varepsilon}_{kk}^2. \quad (5.11)$$

По закону Дюамеля-Неймана связь между напряжениями и деформациями устанавливается соотношением

$$\hat{\tau}_{ij} = 2\mu_e \varepsilon_{ij} + [\lambda_e \hat{\varepsilon}_{kk} - [3\lambda_e + 2\mu_e] \cdot \alpha \Theta] \delta_{ij}. \quad (5.12)$$

Объемное расширение тела под действием внешних сил определяется при $i = j = k$ как

$$\hat{\varepsilon}_{kk} = \frac{\hat{\tau}_{kk}}{3\lambda_e + 2\mu_e} + 3\alpha \Theta.$$

Используя (5.10), получаем в I_2 соотношение между напряжениями и деформациями:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \hat{\tau}_{ij} - \nu \frac{\hat{\tau}_{ij}}{E} \delta_{ij} + \alpha \Theta \delta_{ij}. \quad (5.13)$$

Первые два слагаемых характеризуют деформации, возникающие как от действия внешних сил, так и от действия тех напряжений, которые необходимо приложить для обеспечения сплошности тела при его неравномерном нагреве. Эта деформация связана с напряжением соотношением, вытекающим из обобщенного закона Гука. Третье слагаемое характеризует деформации, отвечающие свободному тепловому расширению тела.

Далее обозначим:

$$G_T = F_T - \hat{\tau}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} \quad (5.14)$$

– плотность термодинамического потенциала Гиббса. В явном виде G_T образуется подстановкой в (5.14) выражений (5.11), (5.12) и (5.13); ее полный дифференциал равен

$$dG_T = -\hat{\varepsilon}_{ij} d\hat{\tau}_{ij} = -S_T dT.$$

Отсюда

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\partial G_T}{\partial \hat{\tau}_{ij}}, S_T = -\frac{\partial G_T}{\partial T}. \quad (5.15)$$

На основе (5.15) запишем связь $c_{\tau=0}$ и $c_{\varepsilon=0}$:

$$c_{\tau=0} = \frac{3}{2} T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[\frac{E}{1-\nu} \alpha^2 \Theta^2 \right] + c_{\varepsilon=0}.$$

Вернемся теперь к выражению (5.7). Запишем плотность энтропии как производную от свободной энергии. Тогда

$$S_T = \int_{T_{ref}}^T \frac{c_{\varepsilon=0}}{T} dT + \frac{\partial}{\partial T} \left[(3\lambda_e + 2\mu_e) \hat{\varepsilon}_{kk} \right] - \frac{\partial \mu_e}{\partial T} \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ji} - \frac{\partial \lambda_e}{\partial T} \hat{\varepsilon}_{kk}^2.$$

Теперь линейность постановки задач термоупругости для уравнения теплопроводности всецело зависит от линейности комплекса:

$$T \dot{S}_T = \left[T \frac{\partial S_T}{\partial T} \right] \cdot \dot{T} = R(T) \cdot \dot{T}.$$

В линейных нестационарных задачах термоупругости функция $R(T)$ может быть только постоянной, а в стационарных – произвольной непрерывной функцией температуры.

5.4 Нелинейные начально-краевые задачи термоупругости

Волновая аберрация (5.2) определяется перемещениями и температурой. Поэтому уравнения движения начально-краевой задачи термоупругости составим в перемещениях. Классы связанных и несвязанных задач термоупругости и соответствующие уравнения движения и теплопроводности для канонических областей рассмотрены в [46,54,55 и др.]. Поэтому постановка начально-краевой задачи в перемещениях \mathbf{u} для одиночной линзы с вектором нормали \mathbf{N} к поверхностям линзы (F_j – оптические ($j=1,2$), Σ – цилиндрическая) в общем случае имеет вид

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \cdot \nabla (\nabla \mathbf{u}) - \gamma_T(T) \cdot \nabla T = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (5.16)$$

$$\dot{T} = a \nabla^2 T - \frac{1}{\lambda_T} \gamma_T(T) \cdot T_{ref} \nabla \dot{\mathbf{u}}, \quad (5.17)$$

$$\text{н. у.: } T(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = T_0(\mathbf{r}), \quad (5.18)$$

г. у. на оптических поверхностях

$$\mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^* \right] \Big|_{F_j} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \left[\lambda (\nabla \mathbf{u}) - \gamma_T(T) (T - T_{ref}) \right] \Big|_{F_j} = 0, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = 0, \quad (5.20)$$

$$\lambda \mathbf{N} \nabla T|_{F_j} = \Psi_j \left[\sigma_T T^4 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_T \right] \Big|_{F_j} + \beta_a (T - T_a) \Big|_{F_j}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{N} \cdot \nabla T|_{\Sigma} = 0, \quad (5.22)$$

где σ_T – постоянная Стефана–Больцмана, λ , μ – изотермические коэффициенты Лямэ, a – коэффициент температуропроводности, Ψ – коэффициент облученности, β_a – коэффициент конвективного теплообмена, T_a – температура конвективного потока воздуха. Если поверхность линзы вогнута, т.е. вектор \mathbf{N} в каждой точке поверхности направлен к оптической оси, то плотность теплового потока \mathbf{q}_T находится из решения интегрального уравнения [56,57], в котором искомая функция $q_{\epsilon} \sim T^4$ описывает рассеяние тепла. В противном случае граничное условие имеет дифференциальный вид закона Фурье [26].

Термомеханическая постоянная

$$\gamma_T(T) = (3\lambda + 2\mu) \cdot \alpha_T(T), \quad (5.23)$$

определяется через коэффициент линейного теплового расширения в виде (5.1), который в рамках задачи является чувствительным к изменению температуры свойством оптических материалов.

Граничное условие (5.19) получено из соотношения между тензорами напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\hat{\epsilon}_{ij}$ [42]:

$$\hat{\sigma}_{ij} = 2\mu\hat{\epsilon}_{ij} + \left[\lambda \cdot \hat{\epsilon}_{kk} - \gamma_T (T - T_{ref}) \right] \delta_{ij}, \quad (5.24)$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера. Выражение (5.24) соответствует записи граничного условия в напряжениях

$$\hat{\sigma}_{ij} \mathbf{N}_j = f_i^{(u)}(\mathbf{r}_k). \quad (5.25)$$

Как было указано выше, воздействие внешних сил на оптическую поверхность отсутствует, т.е. $f^{(u)} = 0$. Поэтому при подстановке (5.24) в (5.25) и переходе к векторной форме записи получаем граничное условие (5.19).

Из приведенной системы уравнений видно, что уравнение движения (5.16), уравнение теплопроводности (5.17), и граничное условие (5.19) нелинейны относительно температуры вследствие наличия функциональной зависимости (5.23). Граничные условия (5.21) нелинейны для уравнения теплопроводности (5.17) с начальным условием (5.18) на каждой оптической поверхности учитывают теплообмен в форме Стефана–Больцмана. Цилиндрическая поверхность Σ не участвует в распространении света, т.к. условие (5.20) определяет зону жесткого контакта линзы с оправой объектива, а (5.22) – теплоизоляцию поверхности контакта в оправе объектива.

Представленная система уравнений описывает нелинейную связанную динамическую задачу термоупругости. Поскольку эксплуатация оптических систем осуществляется в условиях невесомости и при отсутствии ударных нагрузок, то инерционным слагаемым в (5.16) можно пренебречь. Коэффициент связанности

$$\frac{a\gamma_T(T_{ref}) \cdot T_{ref}}{\chi(\lambda + 2\mu)}$$

полей температур и перемещений [58,59] для оптических стекол в состоянии Ξ_{ref} имеет порядок 10^{-4} , т.е. много меньше единицы. Поэтому слагаемым в уравнении теплопроводности, содержащим дилатацию, также можно пренебречь. В итоге преобразованная система уравнений термоупругости (5.16)–(5.22) определяет постановку несвязанной квазистатической задачи термоупругости.

Постановка несвязанных задач термоупругости для $k = \overline{1, K}$ оптических элементов объективов с $i = \overline{1, 2K}$ поверхностями принимает следующий вид:

$$\mu_k \nabla^2 \mathbf{u}_k + (\lambda_k + \mu_k) \cdot \nabla (\nabla \mathbf{u}_k) - \gamma_T(T_k) \cdot \nabla T_k = 0, \quad (5.26)$$

$$\dot{T}_k = a_k \nabla^2 T_k, \quad (5.27)$$

$$\text{н. у.: } T(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = T_0(\mathbf{r}), \quad (5.28)$$

г. у. на оптических поверхностях

$$\begin{aligned} & \mu_{k(i)} \left[\nabla \mathbf{u}_{k(i)} + (\nabla \mathbf{u}_{k(i)})^* \right] \Big|_{F_i} \cdot \mathbf{N} + \\ & + \mathbf{N} \left[\lambda_{k(i)} (\nabla \mathbf{u}_{k(i)}) - \gamma_T(T_{k(i)}) (T_{k(i)} - T_{ref}) \right] \Big|_{F_i} = 0, \quad (5.29) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_k} = 0, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{N} \cdot \nabla T|_{\Sigma_k} = 0. \quad (5.31)$$

Для первой оптической поверхности

$$q_T = q_n + q_b,$$

где q_n , q_b – плотность соответственно первичных (Земля, Солнце) и вторичных (светозащитная бленда) источников тепла с учетом рассеяния тепла. На четной поверхности последней линзы

$$\lambda_{T_{k(i)}} \mathbf{N} \nabla T_k \Big|_{F_{2K}} = \Psi_{2K} \sigma_T \left[T_K^4 - T_{ref}^4 \right] \Big|_{F_{2K}},$$

для остальных выпуклых поверхностей

$$\lambda_{rk(i)} \mathbf{N} \nabla T_{k(i)} \Big|_{F_i} = \Psi_{2i} \sigma_T \left[T_{K(i)}^4 - T_{k(i)\pm 1}^4 \right] \Big|_{F_i}, \quad (5.32)$$

для вогнутых поверхностей имеет место рассеяние тепла

$$\begin{aligned} \chi_{k(i)} \mathbf{N} \cdot \nabla T_{k(i)} \Big|_{F_i} &= \Psi_{2i} \sigma_T \left[T_{k(i)}^4 - T_{k(i)\pm 1}^4 \right] \Big|_{F_i} - \\ &- \int_{F_i} H(1 - \varepsilon_T) \sigma_T T_{k(i)}^4 dG, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где

$$H(\varepsilon_T) = J_H \varepsilon_T \frac{\mathbf{N} \mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \frac{\mathbf{N} \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \cdot \upsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{t}) \quad (5.34)$$

– интегральное ядро, υ – бинарная функция видимости, J_H – геометрический фактор, G – граница области пространства, занимаемая неизотермическими поверхностями бленды или оптических элементов.

5.5 Линеаризация задач термоупругости с граничными условиями сложного теплообмена

При определенных условиях систему уравнений термоупругости для светозащищенных диоптрических систем можно линеаризовать. Соответствие этапов возникновения и развития термомеханических явлений феноменологической модели, развернутой во времени на срок активного существования оптических систем, является основным требованием к выбору методов решения уравнений термоупругости в линеаризованном виде.

Как можно было видеть из предыдущего параграфа, нелинейность условий задач термоупругости для диоптрических систем на борту КА обусловлена четырьмя факторами:

- 1) 4-я степень абсолютной температуры в граничных условиях уравнения теплопроводности;
- 2) нелинейный интегродифференциальный вид плотности теплового потока q_T для вогнутых неизотермических поверхностей;
- 3) нелинейность распределения плотности первичных и вторичных источников тепла по координатам и времени;
- 4) существование функциональной зависимости термомеханической постоянной от температуры.

Как было показано в обзоре, чаще всего для линеаризации используется преобразование к граничному условию конвективного теплообмена в форме Ньютона [60], а также осуществляется поиск асимптотических решений [51,61] или оценок решений на основе

теоремы сравнения [62]. Поэтому здесь при линеаризации имеется выбор среди двух определяющих факторов:

1) предел изменений функции $f(T) \sim T^4$ и $\gamma_T(T) \cdot T \sim T^N$ по температуре за время активного существования оптической системы $t \in [t, t_s]$;

2) промежутки времени между достижением локальных экстремумов плотности теплового потока q_T .

В первом случае из построения зависимости $f(T) \sim T^3$ и $\gamma_T(T) \cdot T \sim T^N$ в пределах 10%-х изменений относительно $T_{ref} = 293$ К следует, что относительная погрешность $f(T)$ наибольшая и составляет порядка 16%, что является неприемлемым, т.к. при априори заданной меньшей погрешности необходимо решать задачу термоупругости таким образом, чтобы контролировать эту погрешность на основании результатов расчета поля температур в промежуточные моменты времени.

Второй случай по своей природе характеризует независимость функции от термоупругого состояния оптической системы, и потому может быть взят за основу линеаризации. Собственно, при малом значении диаметра разбиения Δt_0 он предоставляет возможность решения линеаризованной задачи термоупругости в квазистатической постановке. Учитывая малую теплопроводность бесцветного оптического стекла (ГОСТ 13659-68 $\chi \approx 1$ Вт/(м·К)), наиболее удобным представляется путь решения задачи на равных промежутках времени при постоянных $f(T) \sim T^3$ и $\gamma_T(T) \cdot T \sim T^N$ на этих промежутках.

Пусть время активного существования оптической системы

$$t_S = \bigcup_{n=1}^N \{ \tau_n, \tau_{n+1} \}$$

есть совокупность промежутков $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, $\tau_n = \Delta t_0(n-1)$. Если записать коэффициент радиационного теплообмена как комбинацию функций из разложения правых частей соответствующих граничных условий в виде

$$\beta_k^{(n)} = \sigma_T \left[T_k^{(n)} + g_k^{(n)} \right] \cdot \left[\left(T_k^{(n)} \right)^2 + \left(g_k^{(n)} \right)^2 \right], \quad (5.35)$$

$$T_k^{(1)} \Big|_{t=0} = T_{ref}, \quad T_k^{(n)} \Big|_{t=\tau_n} = T_k^{(n-1)} \Big|_{t=\tau_n, n>1}, \quad (5.36 \text{ a})$$

$$g_k^{(n)} = 4 \sqrt{\frac{(N \cdot q_T)_k}{\sigma_T}} \Big|_{t=\tau_n}, \quad (5.36 \text{ б})$$

то объединение последовательности решений линеаризованной с помощью (5.35) задач термоупругости в квазистатической постановке на каждом из n промежутков ($\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$) позволяет представить решение в виде непрерывных во времени функций. Тогда уравнения термоупругости (5.26) – (5.31) принимают вид

$$\mu_k \nabla^2 \mathbf{u}_k^{(n)} + (\lambda_k + \mu_k) \cdot \nabla \left(\nabla \mathbf{u}_k^{(n)} \right) - \gamma_T (T_k^{(n)}) \cdot \nabla T_k^{(n)} = 0, \quad (5.37)$$

$$\dot{T}_k^{(n)} = a_k \nabla^2 T_k^{(n)}, \quad (5.38)$$

г.у.:

$$\mu_{k(i)} \left[\nabla \mathbf{u}_{k(i)}^{(n)} + \left(\nabla \mathbf{u}_{k(i)}^{(n)} \right)^* \right] \Big|_{F_j} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \left[\lambda_{k(i)} \left(\nabla \mathbf{u}_{k(i)}^{(n)} \right) - \gamma_T (T_{k(i)}^{(n)}) \left(T_{k(i)}^{(n)} - T_{k(i)}^{(n-1)} \right) \right] \Big|_{F_j} = 0, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{u} \Big|_{\Sigma_k} = 0, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{N} \cdot \nabla T \Big|_{\Sigma_k} = 0, \quad (5.41)$$

Граничные условия (5.32) – (5.33) для уравнения теплопроводности в виде (5.38) представляются аналогичным образом.

Решение линеаризованных начально-краевых задач термоупругости (5.37) ÷ (5.41) для k -й линзы представимо в виде непрерывных в пространстве и времени функций:

$$T_k(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N T_k^{(n)}(\mathbf{r}, t) \cdot M_n(t), \quad (5.42)$$

$$u_k(\mathbf{r}, t) = f \left[T_k^{(n)}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (5.43)$$

где $M_n(t) = \Theta(t - \tau_n) - \Theta(t - \tau_{n+1})$,

Θ – функция Хэвисайда (в рамках диссертации [52] она применялась лишь для объединения всех решений в одну непрерывную функцию и никакой смысловой нагрузки в смысле обобщенной функции [63] не несет).

В пользу удобства квазистатического приближения свидетельствуют также особенности функционирования светозащитной бленды [22]. Решение нелинейной задачи термоупругости (5.16)–(5.22) для светозащищенной диоптрической системы сопровождается необходимостью вычисления сложных многомерных интегралов и последующей их интерполяции во времени для уравнения теплопроводности.

С применением численных методов возникает необходимость одновременного решения всех уравнений термоупругости и связанных с этим всех этапов вычисления распределения плотности тепловых потоков q_T в пространстве и времени. В связи с этим следует отметить, что решение только одной задачи о температурном поле неизотермической бленды требует весьма большого объема оперативной памяти вычислительных средств, что означает фактическую несостоятельность численного решения динамической задачи термоупругости. Поэтому на любом этапе решения будет эффективным квазистатический подход.

5.6 Пространственная модель диффузного рассеяния тепла

Эксплуатация оптических систем на борту КА, как правило, не предусматривает прямого попадания солнечных тепловых потоков на поверхность первого оптического элемента оптической системы для съемки поверхности Земли (ТДС) или защитного стекла оптической системы для съемки звездного неба (ЗДС). Большую роль здесь играет оптический коэффициент отражения бленды, который для осуществления эффективной светозащиты должен быть величиной $\tilde{\rho}_\delta < 0,1$ [22]. При диффузном рассеянии между спектральным распределением степени черноты и коэффициента отражения идеальной диффузной поверхности имеется зависимость $\varepsilon_T = \pi^{-1}(1 - \tilde{\rho}_\lambda)$ [49], откуда при $\tilde{\rho}_\delta \rightarrow 1$ имеем $\varepsilon_T < 0,318$. Из этого следует, что доля тепла $q \sim (1 - \varepsilon_T)$ изменяет температурное поле бленды, и особенно сильно при воздействии прямого солнечного излучения. При известном спектре $\tilde{\rho}_\delta = \tilde{\rho}_\delta(\tilde{\lambda})$ степень черноты в задачах сложного теплообмена обычно представляют в интегральном виде [64]. Для расчета баланса тепловых потоков вторичных источников тепла в бленде воспользуемся фотометрическим подходом [65], т.е. когда диффузное отражение моделируется как проявление эффекта взаимной облученности диафрагм, корпуса бленды и сторонних неизотермических поверхностей, на которые воздействует тепловой поток q_\oplus , проходящий от Земли или от Солнца q_\square . Будем также иметь в виду, что рассматриваемое приближение диффузного рассеяния тепла характерно только для установившегося на некоторый момент времени поля температур, которое в общем случае является пространственно неоднородным. Соответственно, решение задачи рассеяния не требует инфор-

мации об изменениях температурного поля бленды, т.к. на интервале времени $[\tau_n, \tau_{n+t}]$ оно считается стационарным и определяется распределением поля температур в момент $t = \tau_n$, т.е. $T = T_{\sigma}(x, y, z, \tau_n)$. В связи с этим в определенных математических условиях интеграл

$$\frac{1}{S_k} \cdot \int_{S_k} \int_{S_j} \frac{q_{hj} \cos(\eta_j) \cdot \cos(\mu_h)}{\pi \cdot D_{hj}^2} dS_j dS_h \quad (5.44)$$

сводится к линейному соотношению относительно Ψ [56]:

$$Q_h = \sum_j \Psi_{hj} q_{hj} \cdot \quad (5.45)$$

Выражение (5.45) лежит в основе фотометрической модели диффузных отражений в светозащитной бленде [42], которую применительно к модели распределения теплового излучения внутри бленды условно можно разделить на три части:

- 1) модель самооблученности бленды;
- 2) модель облученности от сторонних источников тепла;
- 3) модель облученности неизотермических поверхностей.

В оптике освещенность или яркость в произвольной точке поверхности при наличии многократных диффузных отражений описывается соответственно интегральным уравнением локальной яркости или освещенности [56]. Аналогично в условиях сложного теплообмена такие уравнения имеют место соответственно для интенсивностей излученного и падающего теплового излучения [66]. Плотность вторичных источников тепла

$$q_{\sigma}(r_h, t) = q_n(r_h, t) + q_p(r_h, t) + \int_G H(\varepsilon_T, t) q_{\sigma}(r_j, t) dG, \quad (5.46)$$

где r_j, r_h – радиусы-векторы точек отражающей и излучающей поверхностей, G – граница области пространства, занимаемая отражающими поверхностями, H – интегральное ядро вида (5.34). Второе слагаемое правой части определяется рассеиваемыми тепловыми потоками от диафрагм и корпуса бленды:

$$q_{\sigma}(r_h, t) = \int_G H(1 - \varepsilon_T, t) q_{\sigma}(r_j, t) dG - q_{\sigma}(r_h, t). \quad (5.47)$$

Поскольку плотность $q_{\sigma} = \sigma_T \varepsilon_T T_{\sigma}^4$ находится из решения пространственной задачи теплопроводности бленды, то из [64] следует известная функция, непосредственно вычисляемая на любой момент $t = \tau_n$. Третье слагаемое представляет собой перераспределяемое на моменты времени $t > \tau_n$ тепло:

$$\int_G Hq_e dG = \sum_{i=1}^I \int_{G_i} (Hq_e)_i dG + \sum_{p=1}^P \int_{G_i} (Hq_e)_{I+p} dG. \quad (5.48)$$

В первой сумме (5.47) I – количество поверхностей диафрагм плюс поверхности корпуса бленды, во второй сумме P – количество сторонних неизотермических поверхностей,

$$G = \bigcup_{a=1}^{I+P} G_a.$$

В декартовой системе координат коническая поверхность диафрагм и корпуса бленды описывается уравнением

$$z(x, y) = \tilde{L} - ctg(\tilde{\gamma}) \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

где \tilde{L} – расстояние от входного зрачка бленды до вершины острровершинного конуса вдоль оси вращения, а интегрирование проводится в области

$$G(x, y, z) \in [-r_1, r_1] \cap [-r_2, r_2] \cup [-\xi_1, \xi_1].$$

Учитывая, что при интегрировании (5.46) на прямоугольную область накладываются булевы ограничения, в ряде случаев удобно использовать полярные координаты стереографической проекции диафрагм на плоскость входного зрачка: она становится прямоугольной

$$G(\rho, \phi, z) \in [-r_1, r_1] \cap [0, 2\pi] \cup [-\xi_1, \xi_1],$$

а проекции вектора нормали N на координатные плоскости

$$N_x = \frac{ctg^2(\tilde{\gamma})}{\sqrt{1 + ctg^4(\tilde{\gamma})}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad N_y = N_x tg(\tilde{\gamma}), \quad N_z = \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^4(\tilde{\gamma})}}$$

становятся зависимыми только от полярного угла.

При изменении пространственной ориентации КА первоначально облученные поверхности диафрагм «затеняются» либо облучаются под другим углом. Для того чтобы это учесть, представим координаты бленды через угол рысканья КА:

$$x_2 = \rho \cos(\phi - \tilde{\psi}), \quad x_1 = \rho \sin(\phi - \tilde{\psi}), \quad z_2 = z.$$

Поскольку оптическая ось бленды ЗДС согласно [26] образует тупой угол $\tilde{\varepsilon}$ с оптической осью ТДС, то

$$x_1 = x_2, \quad y_2 = y_1, \quad z_1 = z_2 \cos(\tilde{\varepsilon}).$$

Обозначим \mathbf{w} , \mathbf{s} – вектора направляющих косинусов распространения соответственно теплового излучения от поверхностей Земли (с учетом отраженного солнечного) и прямого от Солнца в системе ко-

ординат бленды. В геоэклиптической системе координат направляющие вектора оптической оси ТДС, теплового потока от поверхности Земли и теплового потока от Солнца соответственно есть

$$g_c = \frac{1}{\hat{D}_c} \{X_s - X_c; Y_s - Y_c; Z_s - Z_c\}, \quad (5.49)$$

$$g'_{\oplus} = \frac{1}{D} \{X_s - X; Y_s - Y; Z_s - Z\}, \quad g'_{\otimes} = \{-1; 0; 0\}, \quad (5.50)$$

где $\{X_c, Y_c, Z_c\}$ – координаты точки пересечения оптической оси ТДС с поверхностью Земли, \hat{D}_c – расстояние от указанной точки поверхности до центра масс КА. Поскольку вектора w и s направлены в сторону бленды, то

$$w' = g'_{\oplus} - g_c, \quad s' = g'_{\otimes} - g_c,$$

откуда согласно (5.49) и (5.50)

$$s' = \{-1 - g_c^x; g_c^y; -g_c^z\}, \quad (5.51)$$

$$w' = \{g_{\oplus}^x - g_c^x; g_{\oplus}^y - g_c^y; g_{\oplus}^z - g_c^z\}. \quad (5.52)$$

Обозначая нормы векторов (5.51) и (5.52) как $\|w'\|$ и $\|s'\|$, получим вектора направляющих косинусов:

$$g_{\oplus} = \frac{w'}{\|w'\|}, \quad g_{\otimes} = \frac{s'}{\|s'\|}.$$

Тогда в (5.44)

$$\cos(\mu) = \sum_{\xi} N_{\xi}^{(\mu)} g_{\oplus}^{(\xi)}, \quad \cos(\eta) = \sum_{\xi} N_{\xi}^{(\eta)} g_{\oplus}^{(\xi)}; \quad (5.53)$$

$$\cos(\mu) = \sum_{\xi} N_{\xi}^{(\mu)} g_{\otimes}^{(\xi)}, \quad \cos(\eta) = \sum_{\xi} N_{\xi}^{(\eta)} g_{\otimes}^{(\xi)}. \quad (5.54)$$

В фотометрическом приближении уравнение (5.46) представляет собой нестационарное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с положительно определенным разностным ядром:

$$H_{hj} = \frac{\rho_j}{S_h} \cdot \frac{\varepsilon_{T(j)} v_{hj} \cos(\mu_h) \cos(\eta_j)}{\pi D_{hj}^2 \sin(\tilde{\gamma}_h)}. \quad (5.55)$$

В целом аналитическое решение (5.46) с ядром (5.55) сопряжено с серьезными вычислительными трудностями [23]. Поэтому искать поле самооблученности численными методами предпочтительнее. В связи с этим рассмотрим синтез методов излучательности и трассировки на основе метода многократных зеркальных отражений при-

нительно к полю самооблученности бленды, исключив на данном этапе из рассмотрения влияние сторонних поверхностей, т.е.

$$G = \bigcup_{i=1}^I G_i .$$

Запишем поверхностный интеграл с помощью кубатур методом конечных сумм:

$$\int_G H q dG = \sum_{u=1}^U \sum_{v=1}^V \alpha_u \beta_v H_{uv} q_{uv} + o , \quad (5.56)$$

где весовые коэффициенты определяются нижеприведенной схемой численного интегрирования. Разделим G на элементарные поверхности, приняв и дополнив допущения метода излучательности:

1) все элементы имеют одинаковую площадь ΔS (особенно это важно при больших $\tilde{\gamma}$!);

2) значения q , q_n и H в пределах каждого элемента постоянны;

3) при нулевой толщине диафрагм (приближение конической поверхности) каждый элемент имеет двойную пространственную ориентацию, которая определяется по знаку z -направляющего косинуса.

Из них вытекает следующее:

4) элементы, имеющие после разбиения меньшую ΔS площадь, приобретают свойства п.1,2;

5) при большом количестве элементов погрешностью кубатурной формулы для каждого из них можно пренебречь.

Согласно алгоритму деления неизотермических поверхностей на элементы равной площади $\Delta S = \rho \Delta \rho \Delta \varphi$ по координатам центральных точек [23] для V секторов, имеем шаг интегрирования по радиусу:

$$\delta \rho(\rho) = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{V \Delta S \sin(\tilde{\gamma})}{\pi}} . \quad (5.57)$$

Вычисляя (5.57) от $\rho_1 = r_{2(1)}$ согласно рекуррентным соотношениям

$$\rho_{u+1} = \rho_u - \Delta \rho_u, \quad \Delta \rho_{u+1} = \delta \rho(\rho_{u+1}), \quad (5.58)$$

получаем множество пар $\{\rho, \Delta \rho\}$ и по ним координаты центральных точек:

$$\rho_{u+1/2} = \rho_u - \frac{\Delta\rho_u}{2}, \quad \phi_{u+1/2} = \left(v - \frac{1}{2} \right) \Delta\phi, \\ z_{u+1/2, v+1/2} = z(\rho_{u+1/2}, \phi_{v+1/2}). \quad (5.59)$$

Каждый из интегралов (5.48) в виде (5.56) с учетом (5.57)-(5.59) записывается по кубатурной формуле центральных прямоугольников с переменным шагом по радиальной координате. Вектора r_h и r_i идентифицируют расстояния между центральными точками элементов площадью ΔS , которая по построению равна произведению весовых коэффициентов и числителя первого множителя (5.55). Отсюда для каждого элемента $\sigma, w = \overline{1, W}$, $W = U \cdot V$ уравнение (5.46) запишется как

$$q_{\theta(w)} = q_{n(w)} + q_{p(w)} + \Delta S \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq w}}^W H_{\sigma} q_{\sigma}. \quad (5.60)$$

Ряд слагаемых в правой части будет тривиальным из-за наличия абсолютно необлученных зон от сторонних источников, а также из-за мнимой облученности некоторых элементов. Поскольку в (5.55) $S_w \Rightarrow \Delta S$, то ядра H_w приобретают смысл средних разрешающих коэффициентов облученности (см. (5.45)), а (5.60) принимает вид

$$q_{\theta(w)} = q_{n(w)} + q_{p(w)} + \Delta S \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq w}}^W \Psi_{\sigma} q_{\theta\sigma}. \quad (5.61)$$

Записав уравнения (5.61) в систему, при переносе суммы с неизвестными слагаемыми в левую часть получаем СЛАУ для плотности вторичных источников тепла, выраженных через плотность первичных источников тепла:

$$\begin{cases} q_{\theta(1)} - \Psi_2 q_{\theta(2)} - \dots & -\Psi_W q_{\theta(W)} = q_{n(1)} + q_{p(1)} \\ \dots & \dots \\ -\Psi_1 q_{\theta(1)} - \dots & -\Psi_{W-1} q_{\theta(W-1)} + q_{\theta(W)} = q_{n(W)} + q_{p(W)} \end{cases}, \quad (5.62)$$

решение которой есть совокупность значений средней плотности тепловых потоков вторичных источников каждого элемента, по которым может интерполироваться и/или аппроксимироваться поле внутри бленды.

При нулевой толщине диафрагм один набор координат (5.59) характеризует пару элементов с различающимися косинусами для Земли (5.53) и (5.54) для Солнца и применим в случае, когда нет необходимости учитывать излучение кромок диафрагм и формирование

ими ауральных контуров на близлежащей поверхности. Если последние включить в рассмотрение как неизотермические поверхности, то (5.62) будет содержать $W + L = W'$ уравнений, где L – количество элементов, на которые делятся все сторонние поверхности. Одновременно с этим имеется возможность учитывать свойства этих поверхностей путем индексации принадлежности степени черноты в ядре (5.55). Последнее справедливо и при отсутствии сторонних поверхностей, если диафрагмы или их участки имеют различающиеся коэффициенты черноты (например, в результате технологического дефекта изготовления).

Часто при ограниченных вычислительных ресурсах ЭВМ найти распределение тепловых потоков в первоначальном виде становится проблематичным: левая часть СЛАУ (5.62) содержит чрезвычайно большое количество элементов. При наличии осевой симметрии имеется возможность снижения объема и повышения эффективности всех вычислений в трех случаях. В первом частном случае сторонние неизотермические поверхности отсутствуют ($P=0$), во втором они присутствуют и имеют осевую симметрию относительно оптической оси бленды и в общем (третьем) случае наличие и расположение сторонних неизотермических поверхностей произвольно. Рассмотрим подробно первый случай.

При большом W в квадратичной пропорции увеличивается количество уравнений СЛАУ. Поэтому осевая симметрия диафрагм и корпуса бленды играют важную роль в процессе численного решения СЛАУ: при определенной организации вычислений ее наличие позволяет повысить эффективность и снизить объем однотипных вычислений за счет выявления повторяющихся массивов (матриц) и объединения их в кластеры. Под кластером здесь подразумевается массив, в котором можно выделить группы идентичных структур в виде подмассивов, а их расположение внутри массива подчиняется какому-либо закону (А-кластер), либо массив, элементами которого являются подмассивы разной или равной размерности (Б-кластер). В данном случае осевая симметрия позволяет последовательно повысить эффективность вычислений при любом $\Delta\varphi = \text{const}$ – в V раз, при нечетном V – в 2 раза и за счет диагонально-повторяющейся структуры итогового А-кластера – в V раз. В результате наибольший выигрыш за счет кластеризации составляет $\Delta = 2V^2$ раз и имеет ярко выраженную квадратичную зависимость (к примеру, при $\Delta\varphi = 0,5^\circ$ он превышает 6 порядков!).

Первоначально в процессе разбиения бленды на элементы образуются Б-кластеры из массивов значений координат центральных точек и порядковых номеров неизотермических поверхностей. Сформировав их в одномерные вектор-столбцы, вычисляются декартовы координаты центральных точек элементов разбиения. Фиксируя сектор $\nu=1$, вычисляются значения расстояний со всеми W' элементами, причем при нечетном V на основании симметрии разбиений относительно меридиональной плоскости вычисления производятся в пределах $0 < \varphi < 180^\circ$. Каждый из полученных массивов Ω_0 размера $U \times U$ значений расстояний объединяется в A -кластер A_1 , из которого затем формируется массив Ω_1 размера $[U \cdot (V + 1)/2] \times U$. Именно для него производятся все дальнейшие вычисления вплоть до коэффициентов облученности по ядрам (5.55).

Далее необходимо получить кластер $A_3 = A_1 \cup A_2$ и массив Ω_3 размера $W \times U$. Кластер A_2 формируется по принципу обратной нумерации элементов массива Ω_0 в кластере A_1 , т.е. если обозначить нумерацию как $s = 1, 2, \dots, 0,5 \cdot (V + 1)$, то в кластере A_2 она будет $s' = 0,5 \cdot (V + 1), 0,5 \cdot (V - 1), \dots, 2$.

После преобразований получаем массив Ω_2 размера $[U \cdot (V - 1)/2] \times U$, который в кластере A_3 образует массив размера Ω_3 . Для того чтобы получить матрицу $\{\Omega\}$ левой части СЛАУ размера $W \times W$, создадим два промежуточных массива Ω_4 и Ω_5 . В первом из них элементами являются номера $\nu = \overline{1, V}$ элементов кластера A_3 . Структура его

$$\{\Omega_4\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & V-1 & V \\ 2 & 3 & \dots & V & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V-1 & V & \dots & V-3 & V-2 \\ V & 1 & \dots & V-2 & V-1 \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

такова, что при нумерации столбцов $\nu' = \overline{1, V}$ формируется на основе булевых условий:

$$\{\Omega_4\}_{\nu\nu'} = \text{if} \{ \nu + \nu' - 1, \nu + \nu' - 1 \leq V, \nu + \nu' - 1 - V, \}.$$

В таком виде она не полностью отвечает требуемой структуре, т.к. $\text{tr}(\Omega_4) \neq V$. Поэтому структура второго массива

$$\{\Omega_5\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & V-1 & V \\ 2 & 1 & \dots & V-2 & V-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V-1 & 4 & \dots & 1 & 2 \\ V & 3 & \dots & V & 1 \end{pmatrix},$$

такова, что $tr(\Omega_5) = V$ и совпадают первые столбцы и первые строки, причем остальные элементы (5.63) получаются в результате преобразований индексов положения элементов в (5.63).

Таким образом, при размещении массивов из кластера A_3 в элементах, соответствующих индексам элементов массива Ω_5 , получаем A -кластер, который после преобразований становится матрицей $\{\Omega_q\}$. В результате кластеризация заменяет систему (5.61) матричным уравнением вида

$$\{\Omega_{ij}\} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_p \quad (5.64)$$

и создает вычислительные трудности лишь в контексте формирования $\{\Omega_q\}$ из большого числа массивов Ω_0 , число которых равно Δ .

Во втором случае имеет место переход от W к W' при условии деления сторонних поверхностей на элементы площади ΔS .

В общем же случае кластеризация имеет место только для бленды, причем расположение элементов матрицы будет подобно

$$\{\Omega'_q\} = \begin{pmatrix} \{\Omega_q\} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots \end{pmatrix},$$

где $\{\Omega_q\}$ имеет размер $W \times W$, а $\{\Omega'_{ij}\}$ – размер $W' \times W'$.

Каждый элемент матрицы $\{\Omega_q\}$ согласно временной зависимости в $q_n(t)$ является функционалом времени. В действительности при большом W получить аналитические зависимости невозможно из-за громоздкости выражений, связывающих все элементы решения друг с другом. Поэтому решение матричного уравнения (5.64), равно как и уравнения (5.62), характеризует теплообмен внутри бленды или дополнительно с неизотермическими поверхностями только в фиксированный момент времени.

5.7 Применение метода конечных интегральных преобразований к решению одномерной задачи термоупругости

Формулировка и решение начально-краевой задачи термоупругости для светозащищенных диоптрических систем в одномерном приближении допускается, если пространственное распределение первичных и вторичных источников тепла симметрично относительно оптической оси, а также если в линзах и защитном стекле отсутствуют радиальные градиенты температур [67]. Для определения возможности возникновения и развития термомеханической расстраиваемости, т.е. для оценок действия термомеханических эффектов упругого деформирования на состояние функционала $\Xi^{(\varepsilon)}$ трехмерную задачу термоупругости рассмотрим в одномерном приближении на линии оптической оси диоптрической системы, т.к. здесь качество изображения оптической системы считается наиболее важным. Моделью одиночной линзы является отрезок $z \in [0, L]$, L – толщина линзы вдоль оптической оси. Обозначим $\theta = T - T_{ref}$. Тогда постановка задачи термоупругости [68] за время активного существования светозащищенной диоптрической системы примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \dot{\theta}^{(n)} = a \frac{\partial^2 \theta^{(n)}}{\partial z^2}, \quad (5.65)$$

$$\text{г.у.: } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \theta \Big|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=L} = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \theta \Big|_{z=L}, \quad (5.66)$$

$$\lambda_T \left. \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi \beta^{(n)} \left[\theta^{(n)} - \mathcal{G}^{(n)} \right] \Big|_{z=0}, \quad (5.67)$$

$$-\chi \left. \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial z} \right|_{z=L} = \psi \beta^{(n)} \left[\theta^{(n)} - \mathcal{G}^{(n)} \right] \Big|_{z=L}, \quad (5.68)$$

$$\theta^{(1)} \Big|_{t=0} = 0, \quad \theta^{(n)} \Big|_{t=\tau_n} = \theta^{(n-1)} \Big|_{t=\tau_{n-1}}, \quad \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}. \quad (5.69)$$

Для проведения асимптотических оценок решения представленной системы одномерных уравнений термоупругости можно воспользоваться результатами работы [62], в которой предлагается определять погрешности линеаризации задачи по теореме сравнения верхних и нижних асимптотических оценок решения численным методом, а на основе полученных результатов получить возможный диапазон значений температуры. В работе [69] решение осуществляется с применением вариационного метода, основу которого составляют операторно связанные

интегральные уравнения для T и u , и также проводится сравнение с точным решением системы уравнений термоупругости заданного вида. При этом результаты сравнения численного и точного решений показывают завышенные результаты численных как для температур, так и для перемещений. Также следует обратить внимание на работу [70], в которой рассматривается задача термоупругости по теории Гуртина-Пипкина [71]. Ее постановка в общем виде аналогична рассматриваемой в [69]. Наряду с указанными работами особое внимание обратим на работу [61], в которой проводится решение нелинейной начально-краевой задачи, первоначальная постановка которой частично совпадает с (5.16) – (5.22), если указанные уравнения рассматривать в одномерном приближении. При решении проводится линеаризация по типу (5.35). Решение задачи термоупругости осуществляется сначала для уравнения теплопроводности на основе решения задачи о собственных значениях и последующего построения решения в виде ряда Фурье с нелинейными коэффициентами [72]. По сути, решение является асимптотическим, причем для нестационарного теплового воздействия внешних тепловых потоков на зеркало, обращенное оптической поверхностью в открытый космос, тепловой поток выбирается в виде линейной функции температуры. Это существенно упрощает решение уравнения движения в напряжениях, которые представляются в виде линейной зависимости от температуры и координаты. Таким образом, все указанные здесь подходы к решению одномерных задач апеллируют к полуаналитическим методам. В связи с этим рассмотрим решение одномерной системы уравнений термоупругости с применением метода конечных интегральных преобразований для одномерной линеаризованной задачи термоупругости.

Для произвольного за время активного существования диоптрической системы момента времени найдем решение одномерной задачи термоупругости (5.65) – (5.69) с помощью метода конечных интегральных преобразований Фурье для граничных условий 3-го рода с ядром [52]:

$$K_i(z) = \mu'_i \cos\left(\frac{\mu'_i z}{L}\right) + Bi_0 \sin\left(\frac{\mu'_i z}{L}\right), \quad (5.70)$$

где $Bi_0 = \frac{\beta_0 L}{\chi}$, $Bi_L = \frac{\beta_L L}{\chi}$

– критерии Био,

$$Fo(t) = \frac{at}{L^2}$$

– число Фурье, $\{\mu'_i\}$ – положительные корни спектрального уравнения

$$\operatorname{ctg}(\mu'_i) = \frac{1}{Bi_0 + Bi_L} \left(\mu'_i - \frac{Bi_0 Bi_L}{\mu'_i} \right). \quad (5.71)$$

Решение при $i > 1$ есть

$$\mu'_i = \pi(i-1) + \frac{Bi_0 + Bi_L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n}. \quad (5.72)$$

Здесь первое слагаемое является его асимптотическим решением, а второе позволяет аппроксимировать со 2-го по 4-й корни с точностью $< 0,012\%$ и корни с 5-го и более с точностью $< 10^{-8}\%$ (оно было найдено при анализе асимптотического поведения первого десятка собственных чисел, ограниченного только первым слагаемым.). При $i = 1$ корень уравнения приближенно (с точностью $< 0,07\%$) можно найти из разложения функции $\operatorname{tg}(\mu')$ в ряд Тэйлора, ограничиваясь первыми двумя слагаемыми. Подставляя их в (5.71), получаем биквадратное уравнение

$$\mu_1'^4 + (3 - Bi_0 Bi_L) \mu_1'^2 - 3(Bi_0 Bi_L + Bi_0 + Bi_L) = 0.$$

Его корни $\pm \mu_1'^2$. Поэтому, выбирая $+\mu_1'^2$ и извлекая из него квадратный корень, получаем

$$\mu_1' = \frac{1}{2} \left[Bi_0 Bi_L - 3 + \sqrt{(Bi_0 Bi_L)^2 + 6Bi_0 Bi_L + 12(Bi_0 + Bi_L) + 9} \right]. \quad (5.73)$$

Более точно все корни могут быть получены численными методами. Таким образом, совокупность (5.72) и (5.73) полностью определяет ядро (5.70). Соответствующее интегральное преобразование

$$\bar{\theta}_i(t) = \int_0^L \theta(z, t) K_i(z) dz \quad (5.74)$$

приводит уравнение теплопроводности к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial t} K_i dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \theta(z, t) K_i(z) dz = \frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial t}, \\ \int_0^L \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} K_i(z) dz &= \frac{Bi_0 (\mu_i^2 + Bi_0^2) \cdot \left[\Psi \mathcal{G}^{(r)} \right]_{z=L} \sin(\mu_i')}{L(Bi_0 + Bi_L)} + \\ &+ \frac{\mu_i' Bi_L \left[\Psi \mathcal{G}^{(r)} \right]_{z=0}}{L} - \left(\frac{\mu_i'}{L} \right)^2 \bar{\theta}_i. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Обозначим

$$A_i = \frac{\text{Bi}_0 (\mu_i^2 + \text{Bi}_0^2) \cdot [\Psi \mathcal{G}^{(r)}]_{z=L} \sin(\mu_i')}{L(\text{Bi}_0 + \text{Bi}_L)} + \frac{\mu_i' \text{Bi}_L [\Psi \mathcal{G}^{(r)}]_{z=0}}{L}. \quad (5.76)$$

Подставляя (5.76) в (5.75), получаем уравнение теплопроводности в Фурье-образах

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial t} = a \left[A_i - \left(\frac{\mu_i'}{L} \right)^2 \bar{\theta}_i \right]. \quad (5.77)$$

Поскольку начальное условие является нулевым, то

$$\bar{\theta}_{0(i)} = \int_0^L \theta_0(z) K_i(z) dz. \quad (5.78)$$

Система уравнений (5.77) и (5.78) представляет собой задачу Коши для трансформанты температуры. Ее общее решение есть

$$\bar{\theta}_i(t) = \left\{ a \int_0^L A_i e^{\mu_i'^2 Fo(\tau)} d\tau \right\} e^{\mu_i'^2 Fo(t)}. \quad (5.79)$$

Формула обращения преобразования (5.74) имеет вид

$$T(z, t) = T_{ref} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{\theta}_i(t) K_i(z), \quad (5.80)$$

где $C_i = \frac{L}{2} \left[\text{Bi}_0 + \text{Bi}_0^2 + \mu_i'^2 + \text{Bi}_L \frac{\mu_i'^2 + \text{Bi}_0^2}{\mu_i'^2 + \text{Bi}_L^2} \right]$.

Решение системы уравнений упругости по известному температурному полю (5.80), в котором время представляет собой параметр, получим в рамках краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка [73]. Обозначим $v = du/dz$. Тогда (5.65) и (5.66) примут вид

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \frac{d\theta}{dz}, \quad v(0) = \frac{\gamma_T \theta(0)}{\lambda + 2\mu}, \quad v(L) = \frac{\gamma_T \theta(L)}{\lambda + 2\mu}.$$

Очевидно, что общее решение есть

$$v(z, t) = \frac{\gamma_T \theta(z, t)}{\lambda + 2\mu} + \text{const}_1, \quad (5.81)$$

а из граничных условий следует, что константа интегрирования $\text{const}_1 = 0$. Тогда при интегрировании (5.81) получим

$$u(z, t) = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \int \theta(z, t) dz + \text{const}_2.$$

Используя (5.66), в рамках квазистатической задачи получаем $\text{const}_2 = 0$ и

$$u(z,t) = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \int \theta(z,t) dz.$$

При этом поле перемещений также представимо в виде, подобном (5.80), т.е.

$$u(z,t) = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{\theta}_i(t) O_i(z), \quad (5.82)$$

где

$$O_i(z) = \int K_i(z) dz = \frac{L}{\mu'_i} \left[\mu'_i \sin\left(\frac{\mu'_i z}{L}\right) - Bi_0 \cos\left(\frac{\mu'_i z}{L}\right) \right].$$

Таким образом, объединение решений для полей температур и перемещений согласно (5.42) и (5.43) определяет их непрерывное во времени распределение для одиночной линзы.

Для остальных линз оптической системы решение ищется аналогичным образом, причем плотность теплового потока q записывается в соответствии с законом Стефана–Больцмана, а для первой линзы согласно нелинейной зависимости в (5.19) от координат и времени в одномерном приближении имеет вид $q(t) = \psi_6 q_6(t)$, где правая часть определяется плотностью суммарной плотности теплового потока q_6 , излучаемого неизотермическими поверхностями диафрагм светозащитной бленды в телесный угол, определяющий видимость осевой точки первой поверхности линзы коэффициентом облученности ψ_6 .

Формирование поля температур (5.80) и перемещений (5.82) обусловлено изменением коэффициентов теплообмена $\beta^{(n)}$ на каждой из оптических поверхностей. Учитывая, что на промежутке времени $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ для каждой поверхности $\beta^{(n)} = \text{const}$, решение совокупности линеаризованных задач термоупругости получим на основе рекуррентных соотношений между трансформантами температур, а также раскрытия интегралов в (5.78) и (5.79).

На промежутке времени $t \in (\tau_n, \tau_{n+1}]$ трансформанта (5.79) имеет вид

$$\bar{\theta}_i^{(n)}(t) = \left\{ \bar{\theta}_{0(i)}^{(n)} + a \int_{\tau_n}^t A_i \exp(\mu_i'^2 Fo(\tau)) d\tau \right\} \exp(\mu_i'^2 Fo(t)).$$

Поскольку $A_i = \text{const}$, то, вычисляя интеграл, получаем

$$\bar{\theta}_i^{(n)}(t) = \left\{ \bar{\theta}_{0(i)}^{(n)} + \frac{A_i L^2}{\mu_i'^2} \left[e^{\mu_i'^2 Fo(t)} - e^{\mu_i'^2 Fo(\tau_n)} \right] \right\} e^{\mu_i'^2 Fo(t)}. \quad (5.83)$$

Величина $\bar{\theta}_{0(i)}^{(n)}$ определяется по формуле (5.78), в которой

$$\bar{\theta}_0^{(n)}(z) = \theta(z, t) \Big|_{t=\tau_n}.$$

В (5.83) также присутствует интеграл по координате. Обращая внимание на то, что в (5.80) зависимость обеспечена только ядром интегрального преобразования и не зависит от времени, выражение трансформанты от $\theta_0(z)$ есть

$$\bar{\theta}_{0(i)}^{(n)} = \int_0^L \theta^{(n-1)}(z, \tau_n) K_i(z) dz = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{\theta}_i^{(n)}(\tau_n) \int_0^L K_i^2(z) dz,$$

где

$$\int_0^L K_i^2(z) dz = \frac{L(\mu_i'^2 - Bi_0'^2)}{2} \left(\frac{\sin(2\mu_i')}{2\mu_i'} + 1 \right) + Bi_0' L \sin^2(2\mu_i') = P_i.$$

Тогда

$$\bar{\theta}_{0(i)}^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i P_i \bar{\theta}_i^{(n-1)}(\tau_n). \quad (5.84)$$

Подставляя (5.83) в (5.84), получаем

$$\bar{\theta}_i^{(n)}(t) = \frac{A_i L^2}{\mu_i'^2} \left[1 - e^{\mu_i'^2 Fo(\tau_n - t)} \right] + e^{-\mu_i'^2 Fo(t)} \sum_{i=1}^{\infty} C_i P_i \bar{\theta}_{0(i)}^{(n)}(\tau_n), \quad (5.85)$$

а при подстановке (5.85) в (5.80) для n – го шага по формуле

$$T(z, t) = T_{ref} + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{\theta}_i(t) K_i(z) M_n(t) \quad (5.86)$$

получаем искомое температурное поле в виде непрерывной в пространстве и времени функции. Перемещения оптической поверхности определяются согласно (5.82) и (5.86) в виде

$$u(z, t) = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{\theta}_i(t) O_i(z) M_n(t). \quad (5.87)$$

Очевидно, что решение нелинейной задачи термоупругости в виде совокупности последовательно решенных на малых промежутках времени линеаризованных задач термоупругости связано лишь с вычислением последовательности состояний трансформант на основе рекуррентного соотношения (5.85). Следует отметить, что коэффициенты A_i , C_i , P_i и собственные числа μ_i' связаны с квазистационарным состоянием температурного поля и изменяются на каждом промежутке времени $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ в зависимости от чисел Био, которые в свою очередь определены соотношениями (5.36) и (5.37). Таким образом, последовательность этапов решения задачи термоупругости

для одиночной линзы на $n - m$ временном шаге осуществляется согласно следующему алгоритму:

- 1) вычисляются эффективные температуры $\vartheta_k^{(m)}$ для каждой границы;
- 2) вычисляются коэффициенты теплообмена (5.36) для каждой границы;
- 3) вычисляются значения критериев Био;
- 4) вычисляются $A_i, C_i, K_i(z), O_i(z), P_i$ и собственные числа μ_i ;
- 5) вычисляется трансформанта начальных условий (5.84);
- 6) вычисляется трансформанта температурного поля (5.85);
- 7) вычисляются поля температур (5.86) и перемещений (5.87);
- 8) вычисляется поле температур на момент $t = \tau_{n+1}$ для $(n+1)$ -го шага.

Распространим теперь алгоритм как коллектив линз диоптрической системы.

В граничных условиях (5.67) и (5.68) эффективные температуры поверхности определены, исходя из формы записи Стефана–Больцмана.

В том случае, когда теплообмен происходит между двумя линзами, эффективные температуры по определению являются температурами оптических поверхностей, а при описании теплообмена в терминах тепловых потоков (первичные и вторичные источники тепла) эффективные температуры определяются согласно (5.36). Поэтому решение задачи термоупругости для коллектива линз обусловлено наличием парных взаимодействий четных и нечетных оптических поверхностей, что в некоторой мере упрощает решение системы одномерных задач.

В данном случае последовательность этапов решения полностью соответствует этапам вышеприведенного алгоритма, но требует дополнений по пункту 3.

В связи с этим для R – линзового объектива ТДС ($R > 2$) система критериев Био имеет следующий вид:

1-я линза

$$Bi_{0(n)}^{(1)} = \frac{\lambda_{\tau_1} \sigma_T}{L_1} \left[T_n^{(1)}(0, \tau_n) + \sqrt[4]{\frac{Q_n}{\sigma_T}} \right] \cdot \left[\left\{ T_n^{(1)}(0, \tau_n) \right\}^2 + \sqrt{\frac{Q_n}{\sigma_T}} \right], \quad (5.88)$$

$$Bi_{L(n)}^{(1)} = \frac{\lambda_{\tau_1} \sigma_T}{L_1} \left[T_n^{(1)}(L_1, \tau_n) + T_n^{(2)}(0, \tau_n) \right].$$

$$\cdot \left[\left\{ T_n^{(1)}(L_2, \tau_n) \right\}^2 + \left\{ T_n^{(2)}(0, \tau_n) \right\}^2 \right]; \quad (5.89)$$

2-я линза

$$Bi_{0(n)}^{(2)} = \frac{\lambda_{r2} L_1}{\lambda_{r1} L_2} Bi_{0(n)}^{(1)}, \quad (5.90)$$

$$Bi_{L(n)}^{(2)} = \frac{\lambda_{r2} \sigma_T}{L_2} \left[T_n^{(2)}(L_2, \tau_n) + T_n^{(3)}(0, \tau_n) \right] \cdot \left[\left\{ T_n^{(2)}(L_2, \tau_n) \right\}^2 + \left\{ T_n^{(3)}(0, \tau_n) \right\}^2 \right]; \quad (5.91)$$

R-я линза

$$Bi_{0(n)}^{(R)} = \frac{\lambda_{rR} L_{R-1}}{\lambda_{rR-1} L_R} Bi_{L(n)}^{(R-1)}, \quad (5.92)$$

$$Bi_{L(n)}^{(R)} = \frac{\lambda_{rR} \sigma_T}{L_R} \left[T_n^{(R)}(L_2, \tau_n) + T_n^{(R+1)}(0, \tau_n) \right] \cdot \left[\left\{ T_n^{(R)}(L_2, \tau_n) \right\}^2 + \left\{ T_n^{(R+1)}(0, \tau_n) \right\}^2 \right]; \quad (5.93)$$

защитное стекло (индекс «R + 1»)

$$Bi_{0(n)}^{(R+1)} = \frac{\lambda_{rR+1} L_R}{\lambda_{rR+1} L_{R+1}} Bi_{L(n)}^{(R)}, \quad (5.94)$$

$$Bi_{L(n)}^{(R+1)} = \frac{\lambda_{rR+1} \sigma_T}{L_{R+1}} \left[T_n^{(R+1)}(L_{R+1}, \tau_n) + 4 \sqrt{\frac{Q'_n}{\sigma_T}} \right] \cdot \left[\left\{ T_n^{(R+1)}(L_{R+1}, \tau_n) \right\}^2 + 4 \sqrt{\frac{Q'_n}{\sigma_T}} \right]. \quad (5.95)$$

Здесь $Bi_{0(n)}^{(1)}$ определяется суммарным тепловым потоком Q_n , а $Bi_{L(n)}^{(R+1)}$ – суммарным тепловым потоком Q'_n , от неизотермических поверхностей, взаимодействующих с внутренней стороной защитного стекла.

С учетом динамики изменения полей температур решение задачи термоупругости в одномерном квазистатическом приближении в рассматриваемой постановке при малом значении диаметра разбиения Δt_0 можно также решать как последовательность решений задач термоупругости для каждого оптического элемента, где граничные условия определяются для нечетной поверхности из решения задачи

термоупругости для предыдущего оптического элемента на момент τ_n , а для четной – из решения задачи термоупругости для последующего оптического элемента на момент τ_{n+1} . На основании этого решение системы уравнений термоупругости сводится к решению последовательности задач термоупругости для каждого оптического элемента на каждом n -м промежутке времени, где взаимосвязанность коэффициентов теплообмена через числа Био (5.88) – (5.95) устанавливается в порядке их следования, т.е. от источника (5.88) к (5.95), но не в обратном. Такое же правило будет справедливо и для пространственной задачи термоупругости. Поэтому одним из важных преимуществ квазистатического приближения применительно к светозащищенным диоптрическим системам является возможность решения задач термоупругости для каждого оптического элемента отдельно друга от друга на основе существующих между ними рекуррентных соотношений в начальных и краевых условиях.

Библиографический список к главе 5

1. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Т. 1. Малые деформации. М.: Наука, 1984. 600 с.
2. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Т. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. Duhamel M.C. Second memoire sur les phenomenes termo-mechaniques // Journal de l'Ecole Polytechnique, 1837, v. 15.
4. Rayleigh On the stresses in solid bodies due to unequale heating and on the double refraction resulting therefrom // Phil. Mag. I, 1901, ser. 6, 169 p.
5. Русинов М.М. Техническая оптика. М.: Машиностроение, 1979. 488 с.
6. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов. Л.: Машиностроение, 1966. 564 с.
7. Гоголев Ю.А., Ган М.А. Работы Государственного оптического института им. С.И. Вавилова в области создания космических объективов // Оптический журнал. 2007. Т. 74. №10. С. 3-6.
8. Гарбук С.В., Герешензон В.Е. Космические системы дистанционного зондирования Земли. М.: Изд-во А и Б, 1997. 296 с.
9. Волосов Г.С. Фотографическая оптика. М.: Искусство, 1971. 672 с.
10. Ган М.А. 50 лет киноформной оптики: Итоги и перспективы развития // Оптический журнал. 2006. Т. 73. №7. С. 9-16.
11. Couzin J. New optics strategies cut through diffraction barrier // Science. 2006, v. 313, №5788. P. 748-749.
12. Couzin J. New optics strategies cut through diffraction barrier // Science. 2006, v. 313, №5788. P. 748-749.
13. Bretschneider S., Eggeling Ch., Hell S.W. Breaking the Diffraction Barrier in Fluorescence Microscopy by Optical Shelving // Physical Review Letters. 2007, v. 98. P. 4.
14. Klar Th.A., Engel E., Hell S.W. Breaking Abbe's diffraction resolution limit in fluorescence microscopy with stimulated emission depletion beams of various shapes // Physical Review Letters. 2001, v. 64, №6. P. 9.
15. Liu Zhaowei, Lee Hyesog, Xiong Yi, Sun Cheng, Zhang Xiang Far-Field Optical Hyperlens Magnifying Sub-Diffraction-Limited Objects // Science. 2007, v.315, №5819. 1686 p.
16. Kono K., Irie M., Minemoto T. Generation of nearly diffraction-free beams using a new optical system // Optical Review. 1997, v. 4, №3. P. 423-428.

17. Smith W.J. Practical optical system layout. New York: McGraw-Hill, 1997. 202 p.
18. Панов В.А. Справочник конструктора оптико-механических приборов. Л.: Машиностроение, 1980. 742 с.
19. Welford W.T. Aberrations of optical systems. New York: IOP Publishing Ltd., 1989. 285 p.
20. Куклев И.К., Станиславов В.А., Романовский В.В. Светозащитная бленда для оптических приборов // Патент России №2073903 С1, 1997.
21. Романов А.Е., Исаева Е.В. Использование бленд с коническими диафрагмами в составе комплекса топографической аппаратуры // Оптический журнал. 2005. №6. Т. 72. С. 42-46.
22. Романов А.Е. Моделирование многократных отражений в блендах с коническими диафрагмами // Оптический журнал. 2007. Т. 74. №7. С. 42-46.
23. Романов А.Е. Диффузное отражение в светозащитных блендах // Оптический журнал. 2008. Т. 75. №8. С. 36-41.
24. Проектирование оптико-электронных приборов / под ред. Якушеникова Ю.Г. М.: Логос, 2000. 488 с.
25. Романов А.Е. Влияние температурного поля бленды на термомеханическую расстраиваемость оптической системы: сб.тр. // 2-я Международная конференция «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем». Пенза, 2007. С. 225-227.
26. Романов А.Е., Куклев И.К. Расчет точности привязки космофотоснимков КТА к планово-высотной основе карт // Геодезия и картография. 2002. № 11. С. 25-31.
27. Романов А.Е., Куклев И.К. Об ошибках привязки космофотоснимков к планово-высотной основе карт // Геодезия и картография. 2004. №8. С. 30-37.
28. Маламед Е.Р., Петров Ю.Н., Соколов И.М. Конструкции главных зеркал космических телескопов // Оптический журнал. 2002. Т. 69. №9. С. 26-30.
29. Герасимова Л.А. GRIN-оптика: оптические методы исследования // Оптический журнал. 2000. Т. 67. №4. С. 22-27.
30. Фадеев Е.А., Косяков В.И., Тухватулин А.Ш. Математическое моделирование технологии и свойств градиентных линз // Журнал технической физики. 1998. №10. Т. 68. С. 70-73.

31. Ежов Е.Г. Проектирование оптических систем с дифракционными элементами на асферических поверхностях // Компьютерная оптика. 2006. Т. 30. С. 9-15.
32. Грейсхух Г.И., Ежов Е.Г., Степанов С.А. Композиция и расчет высоко разрешающих оптических систем с градиентными и дифракционными элементами // Компьютерная оптика. 2000. Т. 20. С. 20-24.
33. Atkinson L.G. Design of a gradient-index photographic objective // Applied Optics, 1982, v. 21. P. 993-998.
34. Atkinson L.G. Gradient-index wide angle photographic objective design // Applied Optics. 1984, №11, v. 23. P. 1735-1741.
35. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
36. Bialecki R.A., Jurgas P., Kuhn G. Dual reciprocity BEM without matrix inversion for transient heat conduction // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2002, v. 26. P. 227-236.
37. Coelho P.J. Fundamentals of a new method for the solution of the radiative transfer equation // International Journal of Thermal Sciences. 2005, v. 44, №2. P. 809-821.
38. Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1984. 428 с.
39. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. 216 с.
40. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
41. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
42. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
43. Зарубин В.С. Прикладные задачи термopрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 292 с.
44. Li Huiping, Zhao Guoqun, He Lianfang, Mo Yue Solution of non-linear thermal transient problems by a new adaptive time-step method in quenching process // Applied Mathematical Modelling. 2007, v. 31, №11.
45. Безбородов М.А. Вязкость силикатных стекол. Минск: Наука и техника, 1975. 350 с.
46. Иванов А.В. Прочность оптических материалов. Л.: Машиностроение, 1989. 144 с.
47. Бегунов Б.Н., Заказов Н.П. Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1973. 488 с.

48. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н. Об оценке влияния местных деформаций волнового фронта на качество оптического изображения // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 46. №4. С. 792-797.
49. Саяпина В.И., Свет Д.Я., Попова О.Р. Влияние шероховатости поверхности на излучательную способность металлов // Теплофизика высоких температур. 1972. №3. Т. 10. С. 528-535.
50. Ootao Y., Tanigawa Y. Three-dimensional solution for transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to nonuniform heat supply // International Journal of Mechanical Sciences. 2005, v. 45. P. 1769-1788.
51. Popovych V.S., Harmatii H.Yu., Vovk O.M. Thermoelastic state of a thermosensitive hollow sphere under the conditions of convective-radiant heat exchange with the environment // Material Science. 2006, v. 42, №6. P. 756-770.
52. Романов А.Е. Нелинейные начально-краевые задачи термоупругости для светозащищенных диоптрических систем: дисс... канд. физ.-мат. наук. Самара: Самарский государственный университет, 2008. 146 с.
53. Слюсарев Г.Г. Расчет оптических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 640 с.
54. Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518 с.
55. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
56. Сапожников Р.А. Теоретическая фотометрия. М.: Наука, 1962. 262 с.
57. Bialecki R.A., Burczynski T., Dlugosz A., Kus W., Ostrowski Z. Evolutionary shape optimization of thermoelastic bodies exchanging heat by convection and radiation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005, v.194, №17. P. 1839-1859.
58. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
59. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 551 с.
60. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
61. Choudhury B.K. Transient temperature and elastic response of a space-based mirror in the radiation-conduction environment // Quarterly Of Applied Mathematics. 2006, v. 64. P. 201-228.

62. Даниэлян Ю.С., Аксенов Б.Г. Приближенное решение задачи теплопроводности с нелинейными граничными условиями // Теплофизика высоких температур. 1982. №5. Т. 20. С. 916-921.
63. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
64. Мاستрюков Б.С. Учет селективности излучения в расчетах радиационного теплообмена // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26. №3. С. 555-559.
65. Torrance K.E., Sparrow E.M. Theory for off-specular reflection from roughened surfaces // JOSA. 1967, v. 59, №9. P. 1105-1114.
66. Одисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.
67. Романов А.Е. О термомеханической расстраиваемости фотографической аппаратуры спутника: сб.тр. // 15-я зимняя школа по механике сплошных сред. УрО РАН, Пермь. 2007. Т. 3. С. 155-158.
68. Романов А.Е. Термомеханическая расстраиваемость светозащищенных диоптрических систем // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2008. Т. 65. №6. С. 290-308.
69. Sweilam N.H., Khader M.M. Variational iteration method for one-dimensional nonlinear thermoelasticity // Chaos, Solitons & Fractals, v.32, 2007. P. 145-149.
70. Qin Yuming, Rivera J.M. Blow-up of solutions to the Cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004, v. 292. P. 160–193.
71. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1968, v.31. P. 113–126.
72. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: ГИФМЛ, 1960. 392 с.
73. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

6 РАДИАЦИОННЫЙ БАЛАНС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Расчет тепловых потоков, действующих на КА при его орбитальном движении

Программы космического зондирования Земли в рамках глобальных и узкоспециальных задач требуют получения видеоинформации высокого качества [1]. И требования по качеству возрастают из года в год. Практика показывает, что на КА, использующих оптико-электронные методы съемки, качество получаемой информации зависит от работы его оптической системы. При этом в условиях космического полета на это особое влияние оказывает тепловой режим КА, который обеспечивается бортовой системой терморегулирования (СОТР). Во время съемки на борту КА на него оказывает влияние множество факторов естественной и искусственной природы. Их действие приводит к изменению физического состояния телескопа: возникают температурные деформации оптических элементов и термооптические аберрации, изменяются теплофизические, механические и оптические свойства материалов.

В рамках теоретического исследования влияния теплового режима на термомеханическое состояние элементов конструкции КА его моделируют в условиях, приближенных к реальным, на базе теории теплообмена. Здесь априори принимается, что в условиях полета теплопроводность и излучение – основные способы теплопередачи. Конвекция присутствует, но ее влияние на телескопическую систему незначительно. Регулирование режимов СОТР сводится к расчету теплового баланса между элементами КА. Как правило, элементы с большой площадью поверхности оказывают наибольшее влияние на баланс, т.к. обладают хорошо выраженными теплоинерционными свойствами.

Для постановки задачи теплообмена и ее решения необходимо знать начальные и граничные условия. Для уравнения теплопроводности начальным условием является распределение температурного поля тела в момент $t = 0$, граничными условиями – распределение температуры или плотности теплового потока на границе раздела тела с окружающей средой. В качестве граничных условий для телескопической системы на борту КА чаще всего используют плотность теплового потока $q = q(\mathbf{r}, t)$, линейно пропорциональную градиенту температурного поля.

В условиях орбитального движения КА наиболее значимыми инициаторами изменения физического состояния космического телескопа являются Земля, Солнце и СОТР. В связи с этим при создании космических телескопов предпринимается целый ряд мер для ограничения вредного влияния дестабилизирующих воздействий за счет снижения общей массы конструкции. В качестве конструкционных материалов применяются наиболее легкие, жесткие и термостабильные сплавы и композиты [2], а оболочка телескопа, выполненная в виде полого цилиндра и выполняющая одновременно роль светозащитной бленды, может быть облегчена, если выполнена из углепластика.

Температурное поле оболочки в процессе лучистого (радиационного) теплообмена оказывает влияние на термоупругое состояние зеркал телескопа и способствует тем самым возникновению термооптических аберраций. В связи с этим для обеспечения высокого качества изображения необходимо управлять температурными полями оболочки и зеркал с помощью прецизионной СОТР.

Масса всей СОТР зависит от потребности в обеспечении заданного теплового режима приборам и конструкциям КА. По отношению ко всей массе КА доля массы СОТР лежит в пределах от 1 до 4%. При этом нижнее значение более характерно для пассивных СОТР, а верхнее касается КА с большим тепловыделением и сложной системой терморегулирования с жидкостными контурами, радиаторами и т.п. В СОТР активного типа циркулирующий газ приборного отсека отводит тепловой поток на корпус или специальный радиатор. Если необходимо обеспечить большой удельный теплосъем ($>2 \text{ Вт/см}^2$), в качестве теплоносителя используется жидкость. Обязательным элементом воздушного контура является вентилятор, обеспечивающий циркуляцию газа и вынужденную конвекцию, поскольку свободная конвекция отсутствует в невесомости. В качестве управляющих элементов применяются дроссели расхода, работающие по командам от датчиков температуры.

6.1 Конструкция телескопической системы

Вычислению плотности тепловых потоков, приходящих от Земли и Солнца на поверхность КА, посвящено большое количество литературы. Среди книг известных авторов можно указать [3-5]. В них, как правило, моделью КА служит тело канонической формы (шар, цилиндр) или фрагмент плоскости, а большинство расчетных случаев

не учитывает внутренние конструкции КА, относящиеся к оптической аппаратуре. В частных случаях существующие модели уточняются за счет введения внутреннего тепловыделения приборов [6 и др.]. Поскольку телескопическая система (рис. 6.1) представляет собой сложную конструкцию, то задача вычисления распределения плотности тепловых потоков, влияющих на ее работу, с учетом функционирования СОТР и изменения орбитального положения КА представляет собой комплексную задачу. При этом внешняя задача теплообмена может быть решена изложенными в [4] методами, а внутренняя задача теплообмена может быть решена с применением современных пакетов программ конечно-элементного моделирования (ANSYS и др.), что позволит учесть конструктивные особенности телескопической системы и обслуживающих систем. Исходные теплофизические данные – распределенные и концентрированные тепловые нагрузки, – могут быть найдены с применением других программных пакетов.

В состав телескопической системы входят главное зеркало 1, вторичное зеркало 2, линзовый корректор 3, платформа главного зеркала 4, бленда 5, крышка светозащитного устройства 6, бленда главного зеркала 7 и бленда вторичного зеркала 8 (рис. 6.1).

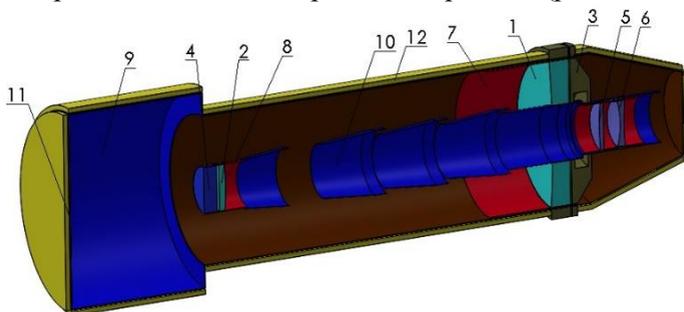


Рис. 6.1. Геометрическая модель оптико-телескопического комплекса (ОЭТК): 1–платформа главного зеркала (ГЗ), 2–ГЗ, 3–бленда ГЗ, 4–узел вторичного зеркала (ВЗ), 5–ВЗ, 6–бленда ВЗ, 7–линзовый корректор, 8–корпус ОЭТК, 9– задняя часть корпуса, 10–бленда ОЭТК, 11–крышка светозащитного устройства (СЗУ)

В системе зеркал телескопа и оболочки присутствуют эффекты самооблученности оболочки и «затененности» некоторых участков оболочки вторичным зеркалом. Тепловое воздействие, которое непосредственно оказывается на элементы телескопа в пределах конуса поля зрения телескопа и на оболочку телескопа в пределах конуса

поля обзора, ограничивается виньетированием главного зеркала вторичным зеркалом и спайдерами, соединяющими оболочку и вторичное зеркало в местах контакта с оболочкой. Состояние крышки б может быть открытым (во время съемки) или закрытым. В закрытом состоянии она считается материальным телом в форме круглого диска с присущими материалу крышки теплофизическими свойствами, а в открытом состоянии – фиктивной поверхностью, через которую осуществляется теплообмен с окружающим космическим пространством. В связи с этим для расчета плотности теплового потока ниже будет рассматриваться только вариант с открытой крышкой.

6.2 Конструкции и материалы для изготовления зеркал

Изготовление зеркал, предназначенных для работы в космосе, осуществляется в настоящее время на гидравлических и пневматических разгрузках [7]. Принцип действия и той, и другой разгрузки заключается в установке под зеркалом (с тыльной стороны) системы специальных опор, имеющих в своем составе эластичные элементы, вовнутрь которых под расчетным избыточным давлением подается либо воздух, либо жидкость. При изготовлении зеркал телескопа важен выбор материала, обладающего необходимыми оптическими и термомеханическими свойствами. Одним из перспективных считается карбид кремния, а наиболее широко в настоящее время используется ситалл.

К материалам для крупногабаритных зеркал предъявляются требования, обусловленные жесткими допусками (порядка 0,01 мкм) на соответствие поверхности зеркала расчетной форме и сохранение этой формы во времени:

- высокая сопротивляемость внешним воздействиям (комбинация физических свойств, обеспечивающая малые механические и температурные деформации);
- стабильность свойств и размеров во времени;
- высокое качество полированной поверхности, обеспечивающее достаточно высокий коэффициент отражения зеркального покрытия;
- малая плотность.

Одним из видов стеклокерамики, используемой в качестве заготовок, является «Церодур» (фирма «Шотт», Германия). Однако благодаря значительно меньшей стоимости (примерно на 40%) более популярен ситалл оптический СО-115М (фирма «ЛЗОС», Россия).

Ситалл – стеклокристаллический материал, состоящий из двух основных фаз – стекловидной связки и равномерно распределенных в ней кристаллов, образовавшихся в результате специальной термической обработки стекла определенного химического состава, с малым или близким к нулю коэффициентом теплового линейного расширения [8].

Конструирование зеркал телескопа может идти по нескольким направлениям. Первое – это создание адаптивных зеркал в виде сплошных тонких зеркал или в виде составных (синтезированных), т.е. когда зеркало представляет собой систему малых зеркал [7]. Второе направление – это жесткие пассивные зеркала, не требующие управления формой своей поверхности в процессе эксплуатации в составе крупногабаритного космического телескопа. К таким относятся облегченные зеркала. Некоторые схемы (а-г) облегченного главного зеркала приведены на рис. 6.2.

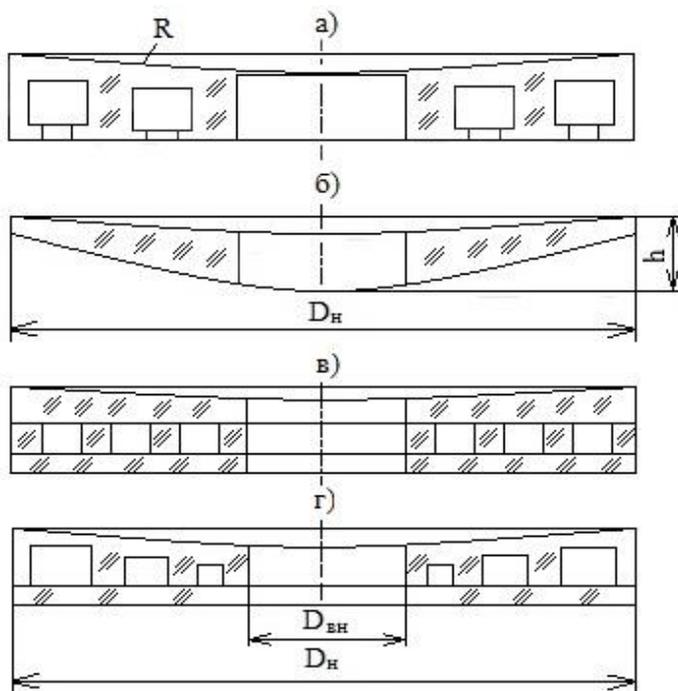


Рис. 6.2. Схемы облегчения главного зеркала телескопа:
 R – радиус кривизны, $d_{\text{вн}}$ $D_{\text{вн}}$ – внутренний и наружный диаметры, h – толщина

Коэффициент облегченности рассчитывается по формуле

$$k = \frac{M_c - M_o}{M_c},$$

где M_c , M_o – массы сплошного и облегченного зеркал соответственно.

Ситаллы имеют повышенные по сравнению со стеклом термостойкость, механическую прочность и твердость и относятся к хрупким материалам, разрушающимся под воздействием ударно-вибрирующих нагрузок. Наравне с этим они имеют высокую плотность (около 2500 кг/м^3). Поэтому наиболее эффективным способом устранения данного недостатка является изготовление зеркал облегченной конструкции.

На рис. 6.3–6.5 приведены различные варианты конструкций облегченных зеркал, изготавливаемых «ЛЗОС».

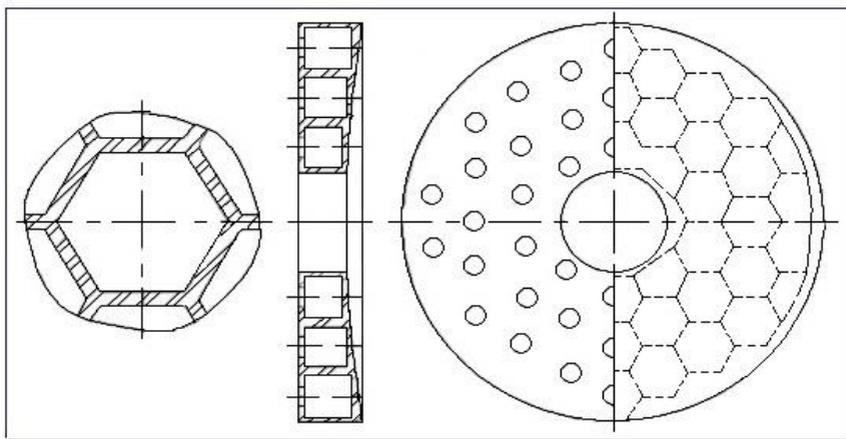


Рис. 6.3. Конструкция облегченного зеркала с перфорированной тыльной стороной

На рис. 6.3 показана конструкция монолитного зеркала, в которой для облегчения конструкции выполнены облегчающие полости с тыльной стороны зеркала. Недостатком данной конструкции является длительный цикл изготовления несимметричности конструкции, что уменьшает жесткость и стабильность формы зеркала.

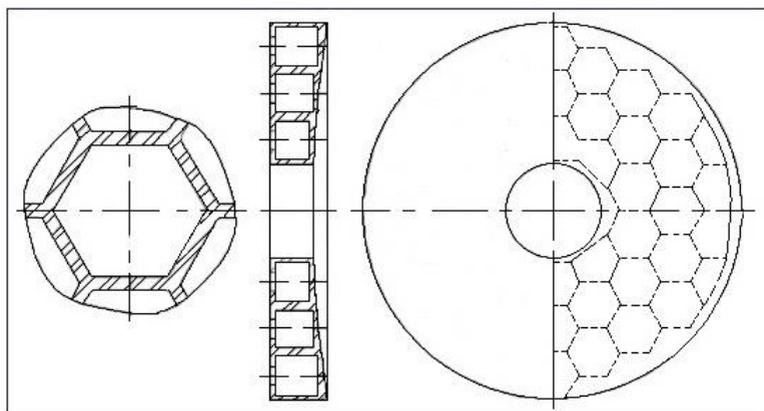


Рис. 6.4. Конструкция облегченного зеркала типа «сэндвич».

На рисунке 6.4 приведена конструкция зеркала, согласно которой части слоистого зеркала из оптического ситалла соединяют между собой электроадгезионным способом. Недостатком этой конструкции является длительный цикл изготовления шестигранных ячеек облегчения, а также то, что отсутствие принципов и критериев подбора соединяемых частей не обеспечивает стабильности оптической поверхности зеркала.

Наиболее перспективной с точки зрения технологичности изготовления, минимизации деформации и достижения степени облегчения представляется конструкция, изображенная на рис. 6.5.

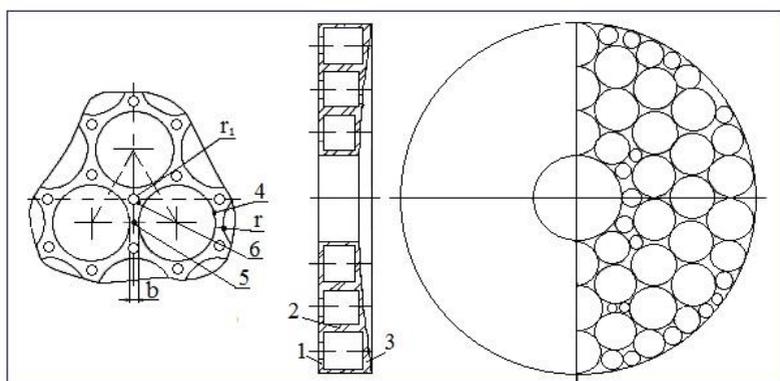


Рис. 6.5. Конструкция облегченного зеркала типа «сэндвич» с оптимальной структурой облегчения

Облегченное зеркало состоит из трех пластин (1, 2 и 3). В средней пластине 2 для облегчения выполнены цилиндрические отверстия 4 радиусом r и 5 радиусом r_0 и перемычки 6 толщиной b (между отверстиями). С целью увеличения степени облегчения, центры отверстий большего диаметра расположены в вершинах равносторонних треугольников, а отверстия меньшего диаметра в центре этих треугольников, при этом радиусы отверстий большего и меньшего диаметров r и r_0 соответственно связаны соотношением

$$r_0 = r \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{\sqrt{3}(2+b)^2}{\sqrt{3}r+b} - \frac{1}{2}}.$$

Результаты оценки степени облегчения конструкции с применением этой формулы показывают, что $k = 0,65$ для зеркала на рис. 6.4 и $k = 0,83$ для зеркала на рис. 6.5.

С целью повышения стабильности оптической поверхности зеркала составляющие пластины вырезают из монолитной заготовки и собирают, смещая слои относительно их положения в исходной заготовке как по вертикальной оси, так и по угловому расположению, что поясняет рис. 6.6.

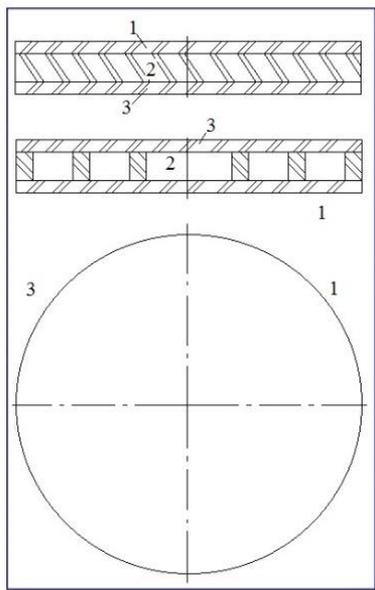


Рис. 6.6. Схема перемещения пластин

Соединение в единую конструкцию трех пластин осуществляется электроадгезионным способом. Смещением слоев относительно их исходного положения достигается усреднение физико-механических свойств подложки зеркала, что существенно повышает изотропность ситалла, а создание замкнутой конструкции зеркала позволяет значительно повысить жесткость конструкции заготовки при значительном снижении характеристик. На рис. 6.7 приведён вид облегченного зеркала $\varnothing 1500$ мм типа «Сандвич», изготовленного из стеклокерамик ситалл СО-115М.

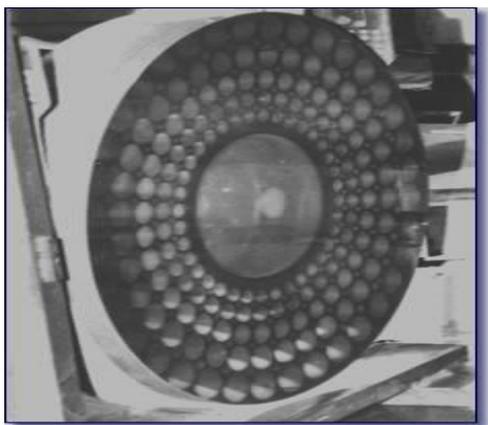


Рис. 6.7. Облегченное зеркало $\varnothing 1500$ мм в процессе сборки зеркала

Несмотря на множество достоинств облегченной конструкции зеркал имеется проблема в сочетании «масса-жесткость». Она заключается в том, что изготовление облегчающей структуры перераспределяет массу зеркал внутри начального объема и, как следствие, влияет на качество волнового фронта, ухудшая его по сравнению с необлегченной конструкцией. Для улучшения качества волнового фронта используются вспомогательные механические системы, позволяющие корректировать деформации и влияние температурных полей для элементов конструкции, для которых теплоперенос осуществляется посредством теплопроводности. Для элементов конструкции телескопа, удаленных от зеркал телескопа, но находящихся в зоне видимости, преобладает лучистый теплоперенос.

6.3 Лучистый теплообмен КА с поверхностью Земли и Солнцем

Корпус КА является силовой основой, на которой размещается все бортовое оборудование КА, включая оптическую систему. Корпус как несущий элемент КА может быть оболочковой или стержневой (в виде ферм или рам) конструкцией [9]. Оболочковые конструкции применяются в случае необходимости создания для бортового оборудования определенного микроклимата и защиты от окружающей среды (космический вакуум). Если бортовая аппаратура КА может нормально функционировать в глубоком вакууме, то корпус КА не имеет герметизации и может представлять собой стержневую конструкцию. Корпус должен быть достаточно прочным и жестким, чтобы выдерживать нагрузки, действующие на КА на всех этапах его жизненного цикла. Элементы конструкции корпуса выполняются из легких сплавов, а отдельные отсеки изготавливаются из жаропрочных и термостойких материалов.

Поверхности КА на околоземной орбите имеют среднюю температуру $\approx 300\text{K}$ (с колебаниями за виток $\approx 150\text{K}$), что обеспечивается подбором их оптических характеристик и отношением площадей, на которые падает солнечное излучение и с которых излучается тепловая энергия. Изменение теплового потока, падающего на рассматриваемый элемент КА, приводит к изменению температуры поверхности и в некоторых случаях, например при нарушениях герметизации корпуса, носит катастрофический характер. СОТР обеспечивает подвод к аппарату заданных внешних тепловых потоков. Для достижения этого КА определенным образом ориентируется относительно Солнца, используются покрытия с подобранными значениями коэффициентов поглощения A_s и степени черноты ε , экранно-вакуумная теплоизоляция, значительно уменьшающая интенсивность теплообмена. Иногда этого достаточно для обеспечения рабочего режима аппарата (пассивная система), при необходимости точного регулирования температуры (например, с точностью $\pm 2^\circ\text{C}$) применяются активные системы, организующие теплоотвод в соответствии с режимом аппаратуры. Граница использования систем первого и второго типа определяется максимальной мощностью бортового комплекса и допустимыми колебаниями температуры (обычно она лежит в пределах 20...40 Вт).

Уравнение теплового баланса КА с окружающей средой можно представить в виде

$$\rho cT = \sum_i Q_i^{(+)} - \sum_i Q_i^{(-)}, \quad (6.1)$$

где ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, $Q^{(+)}$, $Q^{(-)}$ – мощности теплового потока, приходящего (+) на корпус КА или уходящего с его поверхности (-). Мощности теплового потока представляют собой нестационарные функциональные зависимости, обусловленные изменениями орбитального положения КА относительно поверхности Земли и Солнца. С математической точки зрения задача СОТР состоит в регулярном контроле и обеспечении «выполнимости» уравнения (6.1) за счет подвода или отвода тепла от элементов конструкции КА или приборов.

По закону Кирхгофа

$$\varepsilon_\lambda = (A_s)_\lambda. \quad (6.2)$$

Если тело не является серым, то равенство (6.2) нарушается, а степень черноты становится функцией температуры в той части спектра, который имеет поток падающей лучистой энергии. Это свойство используется для пассивного регулирования температуры КА, находящегося в космическом пространстве [9]. На околоземной орбите основная доля излучения КА со средней температурой корпуса 300К приходится на область длин волн от 3 до 25 мк, для Солнца, имеющего температуру $\approx 6000\text{К}$, основная доля излучения приходится на диапазон 0,2...2,5 мк. Другими словами, излучение и поглощение приходится на различные области спектра. Таким образом, можно подобрать поверхности КА с определенным законом изменения $\varepsilon_\lambda = f(\lambda)$, т.е. можно получать различные из (6.2) различные неравенства, определяющие связь между коэффициентом поглощения солнечного излучения и относительной излучательной способностью тела при температурах корпуса КА.

В абсолютной прямоугольной системе координат с началом в центре масс Земли дифференциальные уравнения невозмущенного кеплерового движения [10]

$$\begin{cases} \ddot{X}_s = -\frac{\mu X_s}{r^3}, \\ \ddot{Y}_s = -\frac{\mu Y_s}{r^3}, \\ \ddot{Z}_s = -\frac{\mu Z_s}{r^3}, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2}$ – геоцентрическое расстояние, μ – постоянная тяготения, могут быть проинтегрированы в конечном виде. Система уравнений движения в КА в каноническом виде определяется системой шести уравнений через функцию Гамильтона. Вектором состояния системы в данном случае является шестимерный вектор координат и скоростей

$$\left[X_s \quad Y_s \quad Z_s \quad \dot{X}_s \quad \dot{Y}_s \quad \dot{Z}_s \right]^T.$$

Положение орбиты КА характеризуется долготой восходящего узла Ω , аргументом перицентра ω и наклоном орбиты i . На них накладываются естественные ограничения:

$$0 \leq \Omega \leq 2\pi, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi, \quad 0 \leq i \leq \pi.$$

Орбита КА может характеризоваться также и шестимерным вектором, составленным из оскулирующих параметров орбиты КА:

$$\left[a \quad e \quad M_0 \quad \omega \quad \Omega \quad i \right]^T,$$

где a – большая полуось орбиты КА, e – эксцентриситет, M_0 – средняя аномалия.

В абсолютной геоцентрической системе координат при равномерном круговом движении $e = 0$, $a = r = R_s + H$, H – высота орбиты КА, u – аргумент широты, T – период обращения КА, координаты спутника определяются системой

$$\begin{cases} X_s = r \cdot [\cos(u) \cos(\Omega) - \sin(u) \sin(\Omega) \cos(i)] \\ Y_s = r \cdot [\cos(u) \sin(\Omega) + \sin(u) \cos(\Omega) \cos(i)] \\ Z_s = r \cdot \sin(u) \sin(i) \end{cases}$$

Для синхронно-солнечной орбиты условия освещения поверхности Земли и самого КА сохраняются вне зависимости от времени года (рис. 6.8).

Вращение Земли происходит с угловой скоростью K . При этом КА обеспечивает съемку участков с сохранением высоты Солнца при следующем прохождении спутника над ними, если не принимать во внимание сезонные изменения высоты Солнца.

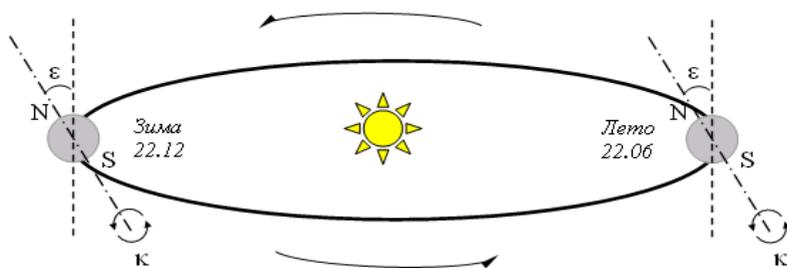


Рис. 6.8. Вращение Земли вокруг Солнца

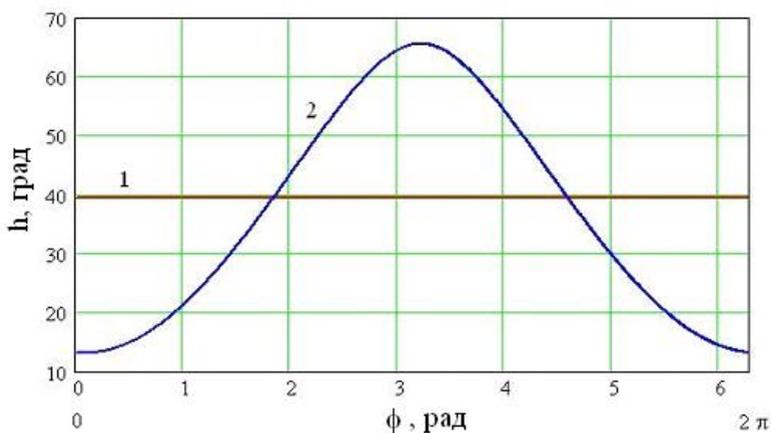


Рис. 6.9. Распределение углов Солнца по полю обзора:

1 – подспутниковая точка, 2 – по линии пересечения конуса поля обзора с поверхностью Земли (передняя точка поля обзора $\phi = 0$, задняя – $\phi = \pi$)

Солнечное отраженное излучение обладает интегрирующим свойством, т.к. зависит от положения точек поверхности S в пространстве. Следствием является зависимость от угла Солнца над уровнем местного горизонта h . На рис. 6.9 показан диапазон изменений угла Солнца в поле обзора КА, движущегося по круговой орбите на высоте 700 км, в момент времени, когда в подспутниковой точке $h \approx 40^\circ$.

6.4 Формирование теплового потока внешними тепловыми источниками

Коэффициент облученности входного зрачка при изотропном распределении собственного излучения от поверхности Земли есть

$$\Psi = \iint_S \frac{I(\Theta_1) \cos(\Theta_2)}{\Omega D^2} dS,$$

где Ω – эквивалентный телесный угол, D – дальность, S – площадь видимой части поверхности Земли с борта КА, I – индикатриса излучения поверхности Земли. Углы Θ_1 и Θ_2 показаны на рис. 6.10, где dS – элемент площади поверхности Земли, dF – элемент площади входного зрачка ОЭТК.

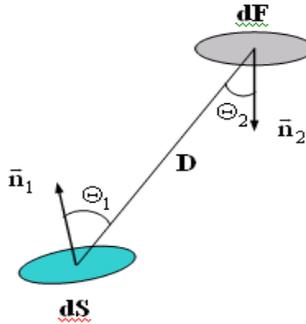


Рис. 6.10. Схема лучистого теплообмена

В частности, тепловой поток, формируемый собственным излучением Земли, в пределах поля обзора КА определяется как

$$Q_E(t) = \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} r q_C(r, \phi, t) d\phi dr$$

при локальной плотности теплового потока

$$q_C = \frac{q_{\oplus} \cos(\Theta_1) \cos(\Theta_2)}{\pi D^2},$$

где $q_{\oplus} = 225 \text{ Вт} / \text{м}^2$ – постоянная теплового излучения Земли.

Локальная плотность теплового потока в системе самооблучаемых поверхностей описывается интегральным уравнением [11]

$$q(\mathbf{r}_m, t) + \varepsilon_m \sigma T_m^4 = W(\mathbf{r}_m, V_{mm}, t) + \varepsilon_m \int_G K(\varepsilon_n, V_{mn}, t) \cdot \left[\sigma T_n^4 + \frac{1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} q(\mathbf{r}_n, t) \right] dG,$$

где $\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n$ – радиусы-векторы, $m = \overline{1, M}$ – порядковый номер элемента неизотермической поверхности телескопа, $n = \overline{1, N}$ – порядковый номер элемента поверхности Земли, G – граница области пространства, занимаемая неизотермическими поверхностями, исключая поверхность Земли, K – интегральное ядро, T_m – температура m -го элемента поверхности. Слагаемое W определяется суммой плотностей тепловых потоков от первичных источников тепла, т.е. от поверхности Земли, Солнца и источников внутри тел на борту КА, ограниченных неизотермическими поверхностями. Второе слагаемое правой части определяется суммой плотностей вторичных источников тепла, которые формируются за счет многократного лучистого теплопереноса и, собственно, создают тем самым эффект самооблученности.

Плотность тепловых потоков, приходящих на оптические элементы телескопической системы, определяется как суперпозиция прямого теплового излучения (от Земли, Солнца и конструкции КА) и вторичного, вызванного перераспределением первичного за счет эффекта самооблученности и неоднородности распределения температурного поля конструкции. В предположении, что прецизионная СОТР надежно теплоизолирована от воздействия тепла со стороны наружной оболочки КА, задача расчета распределения плотности тепловых потоков может быть решена с применением геометрикооптических методов, реализуемых, в частности, в программном пакете ANSYS. Поэтому для решения задачи теплопроводности достаточно найти исходные данные для такого расчета – распределение плотности первичного теплового излучения на внутренней поверхности телескопической системы в пространстве и времени. С этой целью в дальнейшем фрагментарно используется математическая модель экспонирования снимков неравнояркой поверхности Земли [12].

В указанной работе для расчета освещенности рассматривалась телескопическая система идентичного типа, имеющая светозащитную бленду, что свидетельствует о наличии геометрического подобия между телескопическими системами. Кроме того, имеет место и физическое подобие, поскольку размерность плотности тепловых потоков ($\text{Вт}/\text{м}^2$) идентична размерности освещенности ($\text{Вт}/\text{м}^2$).

Таким образом, предлагаемый ниже метод расчета поля плотности тепловых потоков

$$q = q(\mathbf{r}, t), \quad (6.3)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки на внутренней поверхности телескопа, t – время текущей геометрической модели телескопической системы в рамках расчета распределения плотности первичного теплового излучения с единственным ограничением, связанным с заменой ряда терминов оптики на термины теплофизики. В дальнейшем тепловое излучение выделяется соответствующим спектром излучения термином «калорическая яркость».

Плотность теплового потока на поверхности ГЗ в поле зрения формируется информационным световым потоком («inf»), и в остальной части поля обзора – сторонним световым потоком, ослабленным светозащитной блендой («bg»):

$$q = q_{\text{inf}} + q_{\text{bg}} = q_{\text{inf}} + (q_{\text{sp}} + q_{\text{dif}}). \quad (6.4)$$

Величина q находится как интеграл от произведения локальных калорической яркости B и геометрического фактора Ψ [ср/м²] по площади поверхности. Поэтому

$$q_{\text{inf}} = \int_{S_{\oplus}} B_{\oplus} \Psi \, dS, \quad q_{\text{dif}} = \hat{P}_{\text{dif}} [B_{\oplus}, B_{\otimes}],$$

$$q_{\text{sp}} = \hat{P}_{\text{sp}} [B_{\oplus}] + \hat{P}_{\text{sp}} [B_{\otimes}],$$

где B_{\otimes} , B_{\oplus} – внеатмосферные калорические яркости соответственно Солнца и поверхности Земли; S_{\oplus} – поверхность Земли в пределах поля зрения оптической системы на текущий момент времени. Оператор \hat{P}_{sp} образован конечной последовательностью однотипных алгоритмов трассирования зеркально отражаемых лучей [13], а оператор \hat{P}_{dif} образован из решения последовательности двух интегральных уравнений относительно освещенности [14].

Вычисление (6.4) при заданных эфемеридах орбиты КА сопряжено с необходимостью моделирования яркости множества упорядоченно ориентированных фрагментов поверхности Земли. Фрагментация поверхности S_{\oplus} и координатная привязка в геоэкваторальной системе координат (ГЭСК) базируется чаще всего на поиске границ области фрагментов как в поле обзора КА, так и по всей освещенной части поверхности Земли. С целью упрощения 3D-моделирования фрагментов и определения физических условий съемки в качестве системы координат введем «следящую геоэклиптическую систему

координат» (СГСК). В ГэСК уравнения невозмущенного движения КА, положение центра масс которого определяется радиусом-вектором $\mathbf{r} = (x_s, y_s, z_s)$, имеют традиционный вид, определяемый текущей высотой орбиты h и оскулирующими элементами. Радиус-вектор подспутниковой точки в СГСК обозначим как \mathbf{r}_1 , а преобразование $\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_1$ запишем с помощью матриц поворота

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

на углы Эйлера в виде

$$\mathbf{r}_1 = R_{\oplus} (R_{\oplus} + h)^{-1} M_1(\Omega_1) M_2(\varepsilon) \mathbf{r}_s.$$

Радиус-вектор \mathbf{r}_1 определяется последовательностью поворотов линии узлов СГСК на угол Ω_1 относительно линии узлов ГэСК и оси Oz на угол эклиптики ε до совмещения с направлением на Северный полюс мира:

$$\Omega_1(t) = \iota(t) \operatorname{sign} \left(\frac{dt}{dt} \right), \quad \iota(t) = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos[\omega_{\otimes}(t_0 + t - T_0])]},$$

где ι – угол между осью абсцисс СГСК и линией узлов ГэСК, ω_{\otimes} – угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца, T_0, t_0 – соответственно моменты наступления даты весеннего равноденствия и начала первого витка КА при отсчете времени от начала текущего календарного года.

Исходя из вышеизложенного, преимущества использования СГСК при вычислении (6.3) по сравнению с ГэСК заключаются в следующем:

1) положительные абсциссы всегда характеризуют дневную часть поверхности Земли, отрицательные – ночную, причем на восходящей части витка при пересечении плоскости эклиптики $z_1 = 0$, а при пересечении терминатора $x_1 = 0$;

2) прямые синхронно-солнечные орбиты имеют долготу восходящего угла

$$\Omega(t) = \Omega_1(t) - 2\pi G [-\Omega_1(t)];$$

3) высота Солнца определяется абсциссой

$$\sin(h_{\oplus}) = x_1 R_{\oplus}^{-1} G(x_1). \quad (6.6)$$

Здесь $G(x) = \Theta(x) \cdot |\text{sign}(x)|$, где Θ – функция Хевисайда (не в обобщенном смысле).

Пусть поверхность Земли имеет строго сферическую форму, видимая в поле обзора ее часть одновременно является частью шарового сегмента и частью шарового сектора, а основание сегмента – основанием круглого конуса, включенного в этот сектор (рис. 6.11). Осью симметрии указанных фрагментов сферы является местная вертикаль MO , проходящая через подспутниковую точку L и центр масс KA – точку M , точка N – точка пересечения оптической оси с поверхностью Земли, MN – оптическая ось, MR и MS – апофемы конуса поля обзора, дуга RLS – сегмент траассы KA .

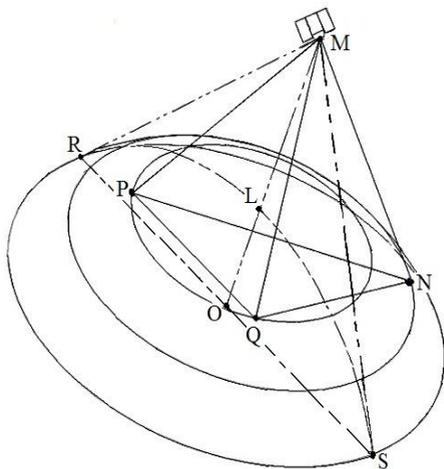


Рис. 6.11. Поле обзора КА

Из построения следует, что орбита КА всегда ортогональна основанию двух соосных конусов с общим основанием, но разными вершинами – в центрах масс Земли и КА. При непрерывном уменьшении угла раствора конусов радиус основания каждого из них непрерывно уменьшается, стягиваясь к точке L . В результате для конуса с вершиной в центре масс Земли (на рисунке не показан) поверхность в пределах поля обзора КА представима семейством параллельных неравноярких контуров ($B_{\oplus} \neq \text{const}$ вдоль контуров), являющих-

ся границей основания конусов с радиусом $\rho \leq OR$, углом раствора $\chi(\rho)$, высотой $c(\rho)$ и апофемой, равной геоцентрическому расстоянию R_{\oplus} . Координаты точек поверхности Земли в СГСК в соответствии с рис. 6.11 выразим через координаты стереографической проекции на основание конуса поля обзора КА. Такой подход исключает необходимость моделирования пространственных границ поля обзора на сферической поверхности Земли с применением булевых функций и позволяет вести интегрирование не в декартовых, а в полярных координатах. В результате получаем естественные ограничения по полярному радиусу $\rho \in [0, d]$ и полярному углу $\varphi \in [0, 2\pi]$, где $c(\rho) \in Oz$ и $d = OR = OS$. В зависимости от времени в пределах поля обзора КА получаем

$$\chi(\rho, t) = \arccos \left(\frac{c(\rho, t)}{R_{\oplus}} \right), \quad c(\rho, t) = \sqrt{\sum_{\xi} \Pi_{\xi}^2(\rho, t)},$$

$$\Pi(\rho, t) = \frac{1}{2} ([t + \tilde{t}(\rho, t)] + \xi [t - \tilde{t}(\rho, t)]), \quad (6.7)$$

где Π_{ξ} характеризует координаты центральной точки стереографической проекции ($\xi = x, y, z$). В (6.7) время

$$\tilde{t}(\rho, t) = \arcsin(\rho R_{\oplus}^{-1}) \cdot [\omega_s(t)]^{-1}$$

равно половине временной задержки между прохождением одной и той же точки трассы передней и задней точками поля обзора КА (точнее, точками R и S на рис. 6.11), ω_s – циклическая частота обращения КА вокруг Земли. Положение точки L определено как $\Pi_{\xi}(0, t)$, точки O – как $\Pi_{\xi}(d, t)$. Координаты других точек в поле обзора выразим следующим образом.

Запишем декартовы координаты конической поверхности, выраженные через полярные координаты стереографической проекции на плоскость основания:

$$x(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi), \quad y(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi), \quad z(\rho, \varphi, t) = \rho \operatorname{ctg} [\chi(\rho, t)]. \quad (6.8)$$

Совместим ось конуса с лучом Oz_1 ($z_1 \geq 0$), вершину поместим в начало координат СГСК и, фиксируя ρ , по точкам с координатами (6.8) проведем замкнутый контур. С помощью матриц поворота (6.5) на углы Крылова для точки L преобразование $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{L}$ есть

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_4 \cdot \mathbf{r}_1, \quad (6.9)$$

где при $\hat{M}_1 = [M_1]^T$ и $\hat{M}_2 = [M_2]^T$ имеем матрицу

$$M_4 = M_3(\sigma_y) \cdot \widehat{M}_2(\sigma_x) \cdot \widehat{M}_1(\sigma_z).$$

Она задает последовательность поворотов вокруг оси ординат на угол σ_y , вокруг оси абсцисс на угол σ_x плюс вращение на угол σ_z вокруг местной вертикали до совмещения точки конуса $\mathbf{r}'_1 = \{d, 0, c\}$ с передней точкой поля обзора (на трассе КА), а вектора $\mathbf{r}^*_1 = \{0, 0, R_\oplus\}$ – до совпадения с линией местной вертикали. Таким образом, для всех точек поля обзора преобразование (6.9) имеет вид $\mathbf{r}_\oplus = M_4 \mathbf{r}_0$, где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точек поверхности Земли в ГЭСК. Углы Крылова в (6.9) находятся из решения трех из шести уравнений, полученных для точки L в состояниях $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$ и $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^*_1$. Обозначим (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) – углы между местной вертикалью КА и соответствующими осями координат СГСК. В (6.9) выражения углов, полученные аналитически, имеют следующий вид:

$$\sigma_x = \phi_y - \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_y = \arccos \left[\frac{\cos(\phi_z)}{\cos(\sigma_x)} \right] \cdot \text{sign}[\cos(\phi_x)], \quad (6.10)$$

$$\sigma_z = \text{arcctg} \left[\frac{k_z \sin(\sigma_y) - k_x \cos(\sigma_y)}{k_x \sin(\sigma_y) - k_z \cos(\sigma_y)} \sin(\sigma_x) \right] + \pi G(-\eta_y).$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_x(t) &= x_1 \cdot [t + \tilde{t}(d, t)] - c [d, t + \tilde{t}(d, t)] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\sigma_x(t)) \sin(\sigma_y(t)), \\ k_y(t) &= y_1 \cdot [t + \tilde{t}(d, t)] - c [d, t + \tilde{t}(d, t)] \cdot \sin(\sigma_x(t)), \\ \eta_y(t) &= y_1 \cdot [t + \tilde{t}(d, t)] - y_1 [t - \tilde{t}(d, t)], \\ k_z(t) &= z_1 \cdot [t + \tilde{t}(d, t)] - c [d, t + \tilde{t}(d, t)] \cdot \\ &\quad \cdot \cos(\sigma_x(t)) \sin(\sigma_y(t)). \end{aligned}$$

При учете вращения Земли вокруг своей оси неравнояркость поверхности Земли заметное влияние оказывает на поле альbedo α_\oplus . Координатная привязка альbedo к поверхности Земли обеспечивается при переходе от ГЭСК к гринвичской системе координат для точки L через истинное время в Гринвиче $t_g = t_g(t)$ преобразованием

$$\mathbf{r}_2 = M_1(t_g) \widehat{M}_3 \mathbf{L} = [M_1(\Omega_1) M_2(\varepsilon)]^{-1}. \quad (6.11)$$

Отсюда географические координаты поля альbedo на регулярной сетке долгот и широт есть

$$\lambda = \arctg\left(\frac{y_2}{x_2}\right) - \frac{\pi}{2} [1 - \text{sign}(x_2)] \text{sign}(x_2)\text{sign}(y_2),$$

$$\theta = \arcsin(z_2 R_{\oplus}^{-1}).$$

Фрагмент координатной сетки, ограничивающий поле обзора КА, образуется при замене вектора \mathbf{L} в (6.11) на вектор \mathbf{r}_{\oplus} с условием, что долгота $\lambda < 0$ соответствует западному полушарию, а широта $\theta < 0$ – южному полушарию.

Ввиду зависимости локальной яркости поверхности Земли от координат в пределах поля обзора КА яркость поверхности Земли вдоль внешней нормали имеет вид

$$B = B_{\otimes} \alpha_{\oplus}(\mathbf{r}_2) \sin[h_{\otimes}(\mathbf{r}_{\oplus})]. \quad (6.12)$$

Коэффициент пропускания атмосферы без учета рефракции равен

$$\tau_a = \tau_{a0} \exp\left(-\|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_{\oplus}\| / \sqrt{\|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_{\oplus}\|^2 - \rho^2}\right), \quad (6.13)$$

где τ_{a0} – коэффициент прозрачности атмосферы вдоль местной вертикали, $\tilde{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки на поверхности ГЗ или поверхности диафрагмы бленды. Отсюда внеатмосферная яркость поверхности Земли равна

$$B_{\otimes} = B \tau_a. \quad (6.14)$$

Выражения (6.12) – (6.14) определяют физические условия и могут уточняться по различным причинам, но в целом сохраняют представленную зависимость от координат и времени.

6.5 Геометрооптические условия образования тепловых потоков

Пусть центр проектирования оптической системы и начало системы координат бленды (СКБ) удалены друг от друга на некоторое расстояние вдоль совпадающих друг с другом оптических осей, а начала координат фотограмметрической системы координат КА и СКБ совмещены и находятся в точке пересечения оптической оси с плоскостью входного зрачка бленды. Вектор $\tilde{\mathbf{N}}$ внутренней нормали к сечению входного зрачка бленды параллелен оптической оси и совпадает с направлением оси аппликат СКБ. В СГСК вектор $\tilde{\mathbf{N}}$ и направляющие векторы внеатмосферных световых потоков от по-

верхности Земли (без учета атмосферной рефракции) и Солнца соответственно есть

$$\mathbf{g}_e = \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e}{\|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e\|}, \quad \mathbf{g}_\oplus = \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_\oplus}{\|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_\oplus\|}, \quad \mathbf{g}_\otimes = \{-1; 0; 0\}, \quad (6.15)$$

где \mathbf{r}_e – радиус-вектор точки пересечения оптической оси с поверхностью Земли. На основе (6.15) геометрический фактор для излучающей поверхности Земли, определяющий геометрооптические условия съемки, принимает вид

$$\Psi = \frac{(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{N}_\oplus)(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_\oplus)}{\pi \|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_\oplus\|^2} G[(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_\oplus)], \quad (6.16)$$

$$(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{N}_\oplus) = R_\oplus^{-1} \left[R_\oplus + h - \sqrt{\|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_\oplus\|^2 - \rho^2} \right] + \|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_\oplus\|^{-1} \sqrt{\|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_\oplus\|^2 - \rho^2},$$

где \mathbf{N}_\oplus – орт внешней нормали к поверхности Земли, а последний множитель (6.16) определяет видимость точек поверхностей с радиусами-векторами $\tilde{\mathbf{r}}$ и \mathbf{r}_\oplus . Скалярное произведение $(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_\oplus)$ в (6.16) справедливо в представлении плоской поверхности ГЗ, обращенной к бленде. При другой форме поверхности вектор \mathbf{g}_e заменяется соответствующим вектором нормали.

Для перехода из СГСК в СКБ воспользуемся выражениями (6.10) и (6.11). Заметим, что геометрооптические преобразования удобнее производить безотносительно к углу рысканья Ψ КА и учитывать его только в координатах $\tilde{\mathbf{r}}$:

$$\tilde{x} = \tilde{\rho} \cos(\tilde{\varphi} - \Psi), \quad \tilde{y} = \tilde{\rho} \sin(\tilde{\varphi} - \Psi), \quad \tilde{z} = f(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Производя замену $\varphi_\xi = \arccos(\mathbf{g}_e \xi)$, с помощью (6.10) получаем искомого преобразование

$$\tilde{\mathbf{N}} = M_6 \mathbf{g}_e, \quad M_6 = \left[M_3(\sigma_y) \hat{M}_2(\sigma_x) \right]^{-1}.$$

Для дальнейших рассуждений обозначения проекций точек сферы на плоскость снабдим штрихами. Отсюда $M' = L' = O$, $\rho = P'O = Q'O$, а угол φ отсчитывается от OS в направлении против часовой стрелки. Найдем угол $\angle NMO$, связанный со скалярным произведением $(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e)$. У тетраэдра MNPQ длина стороны MP неизвестна, но

$$MN = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\|, \quad MN = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\|, \quad N'O = \rho_e = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\| \sqrt{1 - (\mathbf{r} \mathbf{r})^2}.$$

Тогда по теореме косинусов

$$N'O' = \sqrt{\rho^2 + \rho_e^2 - 2\rho\rho_e \cos(\varphi - \varphi_e)},$$

где для $\angle N'OS$, определяющего положение проекции оптической оси через углы тангажа β и крена γ КА, имеем угол

$$\varphi_e = \arctg\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + \pi \left\{ 1 - G \left[1 - \text{sign}^2(\beta) - \text{sign}^2(\gamma) \right] \right\} + \\ + \frac{\pi}{2} \left\{ \text{sign}(\gamma) + \text{sign}(\beta) \left[1 - \text{sign}^2(\gamma) \right] \right\},$$

в точке P' по построению $\varphi - \varphi_e = \pi$. В СГСК

$$(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e) = \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\|^2 + \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\oplus\|^2 - \left[(N'Q')^2 + \delta h^2 \right]}{2 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\| \cdot \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\oplus\|}, \quad (6.17)$$

где разность высот точек L и N вдоль местной вертикали равна

$$\delta h = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\| \cdot (\mathbf{r}_e \mathbf{r}) - \sqrt{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\oplus\|^2 - \rho^2}.$$

Подставляя (6.17) в (6.16), получаем Ψ как функцию координат и времени.

6.6 Критические условия воздействия тепловых потоков от Солнца и Земли на телескопическую систему

Существование критических условий связано с возникновением геометрической тени в системе «КА-Солнце» и обусловлено оптической непрозрачностью толщи Земли и поглощением света атмосферой. Решение подобной задачи в подсистеме «КА-Солнце» получено в [15], исходя из различных вариантов построения эфемерид орбиты КА. Искомыми являлись моменты времени наступления критической освещенности и их длительность. Другой подход использовался в [16], где ограничение по длительности осуществлялось по нескольким отсчетным моментам времени (прохождения терминатора и др.) с помощью функции $\text{sign}(x)$. Однако при возмущенном движении КА и изменении его ориентации возникает необходимость производить многочисленные поправки, которые вносят погрешность в определение критических условий освещенности в обоих подходах. С целью минимизации погрешности рассмотрим модель определения критических условий освещенности. В ее основу положим суперпозицию условий видимости. В условиях видимости в подсистеме «КА-Солнце» освещенность корпуса КА до их захода в тень Земли в СГСК определим с помощью (6.6) как

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{\oplus} &= B_{\oplus} G \left[(R_{\oplus} + h) R_{\oplus}^{-1} x_1 + x(h) \right], \\ x(h) &= \sqrt{(R_{\oplus} + h)^2 - (R_{\oplus} + h_r)^2},\end{aligned}\quad (6.18)$$

где q_{\otimes} – солнечная постоянная, h_r – высота, начиная с которой $\tau_{a0} \rightarrow 1$ и пренебрежимо мала атмосферная рефракция. Окончательно получаем векторы поля калорической яркости направлении КА, учитывая наступление и окончание критических условий освещенности, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{\oplus} &= B_{\oplus} G [\cos(\xi_1)] M_4 \cdot g_{\oplus}, \\ \tilde{B}_{\oplus} &= B_{\oplus} M_4 \cdot g_{\oplus}.\end{aligned}$$

6.7 Плотность теплового потока от поверхности Земли в интегральном виде

Произведение $B_{\oplus} \Psi$ не представимо в аналитическом виде относительно координат. Поэтому найдем q_{inf} , а также плотность теплового потока в пределах всего поля обзора КА площадью S_{\oplus} , пользуясь принципом декомпозиции. Для этого поверхность Земли разобьем на макроплощадки, размер которых обеспечивает одновременно:

- а) применимость параксиального приближения к каждому сходящемуся к входному зрачку бленды пучку лучей;
- б) однородность поля калорической яркости в пределах каждой макроплощадки.

Одной макроплощадке (или их комбинации) при вычислении q_{inf} сопоставим ту часть поля зрения, которая проецируется в какой-либо фрагмент изображения, а при вычислении q_{bg} – в элемент площади видимой с Земли отражающей поверхности диафрагмы бленды. Осуществляя разбиение и переходя от интеграла к конечной сумме, получаем в кубатурах

$$\int_{S_{\oplus}} B_{\oplus} \Psi dS = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \rho_0 \phi_0 \Xi_{ij} + o, \quad (6.19)$$

где ρ_0 , ϕ_0 – весовые коэффициенты, o – погрешность кубатурной формулы.

Предполагая I и J достаточно большими, чтобы обеспечить $o \rightarrow 0$, в правой части (6.19)

$$\Xi_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{8} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} [B_{\oplus} \Psi]_{ij}, \quad \rho_0 = \frac{d}{I-1}, \quad \phi_0 = \frac{2\pi}{J-1}. \quad (6.20)$$

Суммирование в (6.20) организуем так, чтобы каждая макроплощадка образовывалась четырьмя граничными точками, образующими граничный элемент площадью ΔS . При разбиении на равные площади коэффициент ρ_0 становится переменным и находится из соотношения $\forall i \Delta S = \text{const}$ по рекуррентной формуле

$$\rho_{i+1} = \sqrt{\rho_i^2 - \left(\frac{\Delta S}{\phi_0 R_\oplus} \right)^2 + \frac{2\Delta S \sqrt{R_\oplus^2 - \rho_i^2}}{\phi_0 R_\oplus}},$$

$$\rho_1 = R_\oplus \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Delta S}{2\pi R_\oplus^2} \right)^2}. \quad (6.21)$$

При этом изменения по углу определены как $\phi_j = \phi_0(j-1)$, а общее количество макроплощадок равно $I, J+1$ (включая центральную, содержащую точку L). Подставляя (6.21) в (6.20), а найденные выражения – в (6.19), получаем освещенность в пределах всего поля обзора КА.

Пусть U – стереографическая проекция поверхности площадью s_\oplus , $s_\oplus \in S_\oplus$. При перспективной съемке ей соответствует овал, симметричный относительно проекции ON' и сжатый в направлении к O . Не обращаясь к вопросу построения опорной функции овала, воспользуемся тем, что поле зрения занимает диапазон углов $0 \leq (\mathbf{g}_e \mathbf{g}_\oplus) \leq \cos(\zeta)$. Для этого в (6.16) для E_{inf} достаточно произвести замену скалярного произведения

$$(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e) \rightarrow (\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e) G[(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e) - \cos(\zeta)]. \quad (6.22)$$

Аналогично в поле обзора за пределами поля зрения ($s_\oplus \notin S_\oplus$) получаем

$$(\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e) \rightarrow (\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e) G[\cos(\zeta) - (\mathbf{g}_\oplus \mathbf{g}_e)]. \quad (6.23)$$

При вычислении (6.22) и (6.23) возможны две ситуации – $L \in s_\oplus$ и $L \notin s_\oplus$. Идентификация конкретного случая осуществляется для гомотопии семейства апофем конуса поля зрения по координатам точек, лежащих на линиях ближайших параллелей и меридианов, касающихся границы поля зрения по поверхности Земли. Точка L в таком случае является локальным полюсом. Поэтому для дальнейших преобразований достаточно вычислить координаты четырех точек пересечения соответствующих апофем с параллелями и меридианами.

Обозначим длину стереографической проекции линии визирования при ее отклонении на угол κ от местной вертикали как

$$\rho'(\kappa) = \left[(R_{\oplus} + h) \cos(\kappa) - \sqrt{R_{\oplus}^2 - [(R_{\oplus} + h) \sin(\kappa)]^2} \right] \cdot \sin(\kappa).$$

Для оптической оси

$$\rho_e = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\| \sin(\kappa_e),$$

а искомые координаты точек касания определяются как

$$\{\rho'(\kappa_e \pm \zeta), \varphi_e \pm \phi'\},$$

где угол ϕ' , исходя из геометрии рис. 6.11, равен

$$\phi' = \rho_e^{-1} \int_0^{\rho'} \sqrt{1 + (df' / dq)^2} dq.$$

В плоскости стереографической проекции

$$f'(q) = \sqrt{\rho_e^2 - (q - 0.5\rho')^2} - \sqrt{\rho_e^2 - (0.5\rho')^2}$$

– уравнение окружности, проходящей через конец вектора \mathbf{r}_e , и

$$\rho' = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\| \sqrt{2 [1 - \cos(\zeta)]}$$

– расстояние между точками указанной окружности с полярными углами ϕ_e и $\phi_e \pm \phi'$. Если $\rho'(\kappa_e - \zeta) > 0$, то $L \notin s_{\oplus}$ и в (6.20), (6.21) производятся следующие преобразования:

$$\rho_0 \rightarrow \frac{\rho'(\kappa_e + \zeta)}{\operatorname{tg}(\kappa_e + \zeta)} - \frac{\rho'(\kappa_e - \zeta)}{\operatorname{tg}(\kappa_e - \zeta)}, \quad \phi_0 \rightarrow 2\phi', \quad (6.24)$$

$$\rho_1 = \rho'(\kappa_e - \zeta), \quad \phi_j = \varphi_e - \phi' + \phi_0(j - 1).$$

В противном случае, т.е. если выполняется неравенство $\rho'(\kappa_e - \zeta) < 0$, то $L \in s_{\oplus}$, весовые коэффициенты в (6.20), (6.21) сохраняются, но делается замена $d \rightarrow \rho'(\kappa_e + \zeta)$, необходимая при вычислении ρ_{i+1} в (6.20), (6.21). Максимальное увеличение объема вычислений наблюдается, если L проецируется на границу ∂U (случай $O \in \partial U$). В этом случае доля неиспользуемых фиктивных макроплощадок составляет 75%. Поэтому особую значимость весовые коэффициенты (6.24) приобретают при малых апертурах поля зрения, при которых возможно существенное сокращение количества граничных точек на S_{\oplus} .

6.8 Распределение плотности теплового потока на наружной поверхности корпуса КА

В простейшем случае корпус КА представим в виде сплошного цилиндра, где входной зрачок является нижним торцом, противопо-

ложная ему поверхность – верхним торцом, а боковая поверхность – образующей цилиндра. При расчетах в пределах сектора конечной угловой меры можно пренебречь неоднородностью распределения плотности теплового потока. Нормальным вектором к боковой поверхности сектора считается вектор, восставленный на линии пересечения диаметральной плоскости с образующей цилиндра. Порядковый номер сектора возрастает с возрастанием угла рысканья Ψ . Приходящий от поверхности Земли тепловой поток условно можно разделить на 3 компонента:

- 1) собственное тепловое излучение Земли с плотностью q_1 ;
- 2) отраженное от поверхности Земли солнечное излучение с плотностью q_2 ;
- 3) прямое солнечное излучение с плотностью q_3 .

Прямое солнечное излучение принималось равным солнечной постоянной $q_{\odot} = 1378 \text{ Вт} / \text{м}^2$ и воздействовало на поверхность цилиндра с учетом эффекта затененности КА. При вычислении распределения плотности теплового потока учитывалось неравномерное распределение альбедо по данным [4], а также то, что через определенные моменты времени КА заходит в тень Земли [16], где остается неизменным только собственное излучение Земли.

Ниже на рис. 6.12 – 6.20 представлены графики распределения плотности теплового потока по компонентам и суммарно.

При вычислении q_1 полагалось, что в (6.10)

$$B = q_{\oplus}$$

при вычислении q_2 формула (6.10) использовалась в приведенном виде, а при вычислении q_3 использовалась формула (6.18). Суммарный тепловой поток определялся суммой компонентов

$$q_{\Sigma}(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t). \quad (6.25)$$

Расчетное время взято равным времени движения КА за время одного витка на высоте 600 км. Угол наклона орбиты КА равен $I = 95^\circ$, время обращения КА $T = 5791\text{с}$, значения углов ориентации ограничены максимальными значениями $\beta_{\max} = 30^\circ$, $\gamma_{\max} = 40^\circ$ и $\Psi_{\max} = 20^\circ$. Распределение альбедо взято на начало сентября.

На рис. 6.12 представлено распределение плотности теплового потока на входной зрачок телескопа по компонентам за время одного витка. Из рисунка видно, что воздействие теплового излучения Земли практически постоянно и слабо зависит от ориентации КА (кривая 1).

Воздействие отраженного солнечного излучения спадает по мере удаления от экватора и отсутствует на теневой стороне Земли (кривая 2). Воздействие прямого солнечного излучения происходит скачкообразно, поскольку входной зрачок не всегда засвечивается (кривая 3).

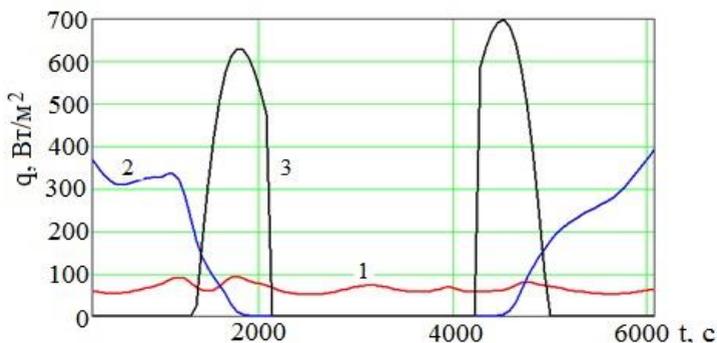


Рис. 6.12. Распределение плотности теплового потока на входной зрачок телескопа по компонентам

На рис. 6.13 представлено распределение суммарной плотности теплового потока на входной зрачок телескопа за время одного витка. Из рис. 6.13 видно, что тепловое воздействие в зоне входного зрачка всегда существует. Отсюда следует, что СОТР должна обеспечивать тепловой режим телескопа вне зависимости от положения КА на орбите с учетом динамики теплового воздействия от внешних источников.

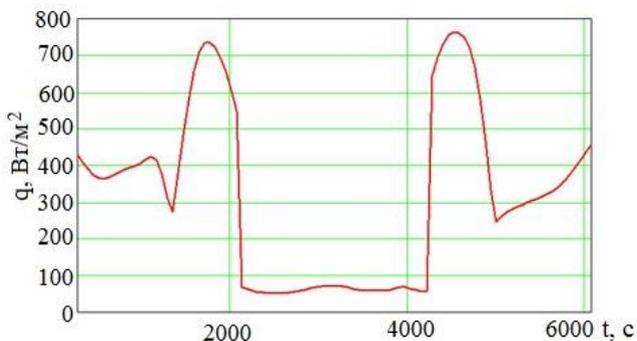


Рис. 6.13. Распределение суммарной плотности теплового потока на входной зрачок телескопа

На рис. 6.14 представлено распределение плотности теплового потока на задний торец КА телескопа за время одного витка.

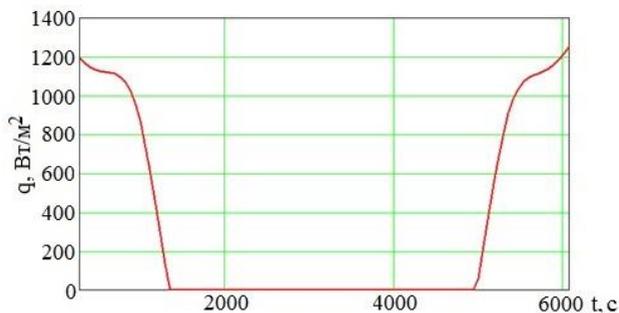


Рис. 6.14. Распределение плотности теплового потока на задний торец КА

Из рис. 6.14 видно, что тепловое воздействие максимально в экваториальной зоне, уменьшается по мере приближения КА к терминатору и отсутствует в тени Земли.

На рис. 6.15 представлено распределение плотности собственного теплового потока Земли на одиночный сектор (всего 30 секторов, текущий занимает диапазон $\{36^\circ, 48^\circ\}$) на наружной боковой поверхности КА за время одного витка. За это время плотность теплового потока на сектор изменяется от 71 до 127 Вт/м².

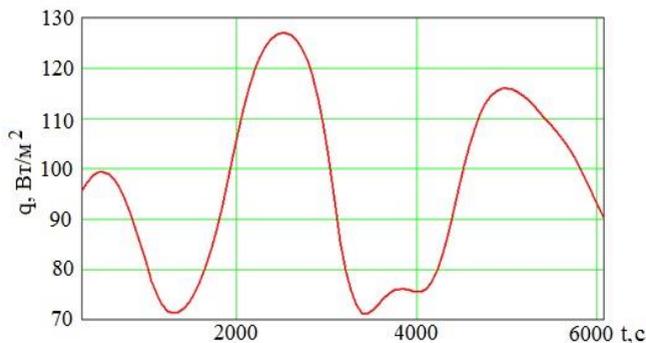


Рис. 6.15. Распределение плотности теплового потока q_1 в пределах одного сектора на наружной боковой поверхности КА

На рис. 6.16 представлено распределение плотности собственного теплового потока Земли на наружной боковой поверхности КА в момент пересечения линии экватора (кривая 1) и через 17 минут после этого события (кривая 2).

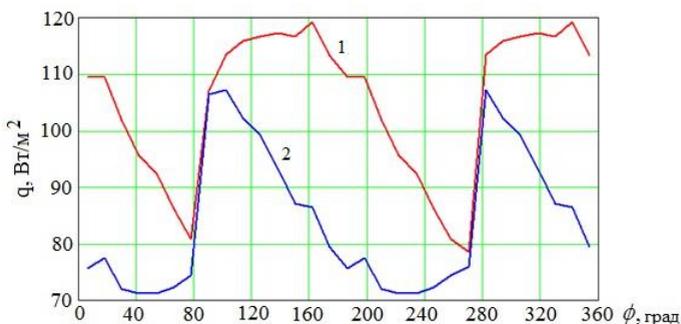


Рис. 6.16. Распределение плотности теплового потока q_1 по всем секторам на наружной боковой поверхности КА

На рис. 6.17 представлено распределение плотности теплового потока, отраженного от поверхности Земли, на одиночный сектор на наружной боковой поверхности КА за время одного витка. Кривая 1 определяет плотность теплового потока для сектора $\{0^\circ, 12^\circ\}$, кривая 2 для сектора $\{204^\circ, 216^\circ\}$. За это время плотность теплового потока на сектор изменяется от 0 до 700 Вт/м^2 .

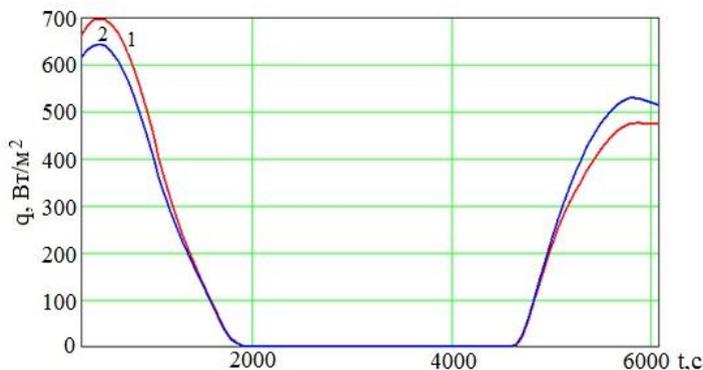


Рис. 6.17. Распределение плотности теплового потока q_2 в пределах одного сектора на наружной боковой поверхности КА

На рис. 6.18 представлено распределение плотности теплового потока, отраженного от поверхности Земли, на наружной боковой поверхности КА в момент пересечения линии экватора (кривая 1) и через 17 минут после этого события (кривая 2). Из рисунка видно, что на боковую поверхность КА также постоянно, как и на входной зрачок телескопа, воздействуют внешние тепловые источники.

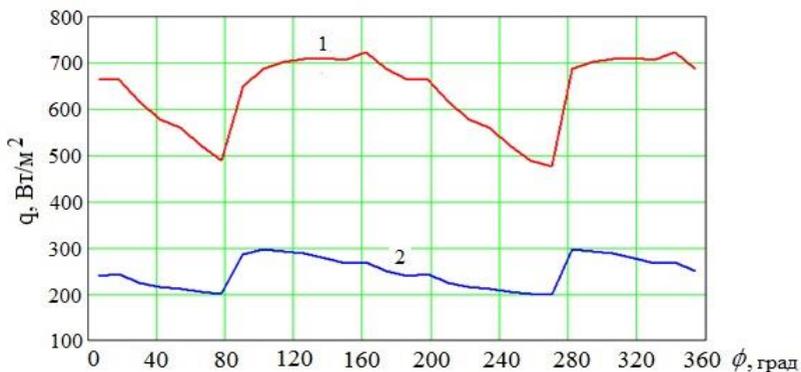


Рис. 6.18. Распределение плотности теплового потока q_2 по всем секторам на наружной боковой поверхности КА

На рис. 6.19 представлено распределение плотности теплового потока непосредственно от Солнца на наружной боковой поверхности КА. Кривая 1 определяет плотность теплового потока для сектора $\{0^\circ, 12^\circ\}$, кривая 2 для сектора $\{204^\circ, 216^\circ\}$.

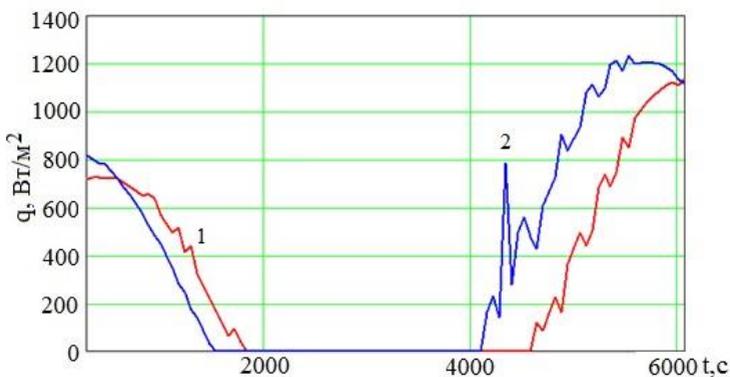


Рис. 6.19. Распределение плотности теплового потока q_3 в пределах сектора на наружной боковой поверхности КА

Распределение суммарной плотности теплового потока для секторов $\{0^\circ, 12^\circ\}$ и $\{204^\circ, 216^\circ\}$, вычисленной по формуле плотности теплового потока (6.25), представлено на рис. 6.20.

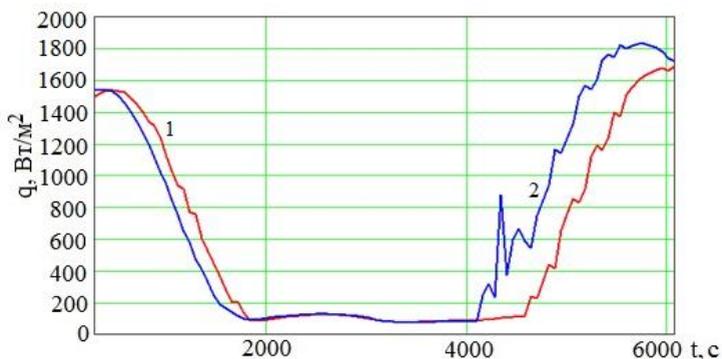


Рис. 6.20. Распределение плотности теплового потока q_{τ} в пределах сектора на наружной боковой поверхности КА

Полученное распределение плотности теплового потока используется для нахождения температурного поля ГЗ и ВЗ телескопа в процессе сложного теплообмена при закрытой крышке входного зрачка ОЭТК. При открытой крышке (во время съемки) допустимо вычислить распределение плотности теплового потока на поверхности, обращенные к поверхности Земли. Для двухзеркальных телескопических систем типа Ричи–Кретьена к таким поверхностям относятся ГЗ и внутренняя поверхность оболочки телескопа.

6.9 Распределение плотности теплового потока внутри телескопа при открытой крышке входного зрачка телескопа

Рассмотрим телескопическую схему Ричи–Кретьена, где $\varnothing_{ГЗ}=1000$ мм, $\varnothing_{ВЗ}=400$ мм, а центральные точки оптических поверхностей ГЗ и ВЗ находятся от входного зрачка на расстоянии 4000 мм и 1000 мм соответственно. На рис. 6.21 и 6.22 показано распределение плотности теплового потока на внутренней поверхности оболочки телескопической системы по углу для фиксированных значений расстояния от входного зрачка и по расстоянию от входного зрачка для фиксированных значений полярного угла.

На рис. 6.21 кривые 1-6 соответствуют следующим расстояниям от входного зрачка: 123, 504, 676, 848, 1020 и 1191 мм. Из рисунка видно, что величина плотности теплового потока имеет синусоидальную форму с нулевой отрицательной частью. При удалении от входного зрачка максимальные значения плавно уменьшаются.

На рис. 6.22 кривые 1-4 соответствуют следующим значениям полярного угла: 0° , 12° , 24° и 48° .

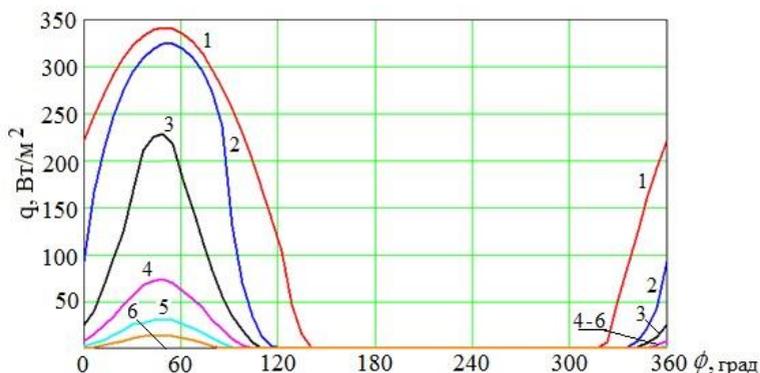


Рис. 6.21. Распределение плотности теплового потока на внутренней поверхности оболочки по полярному углу

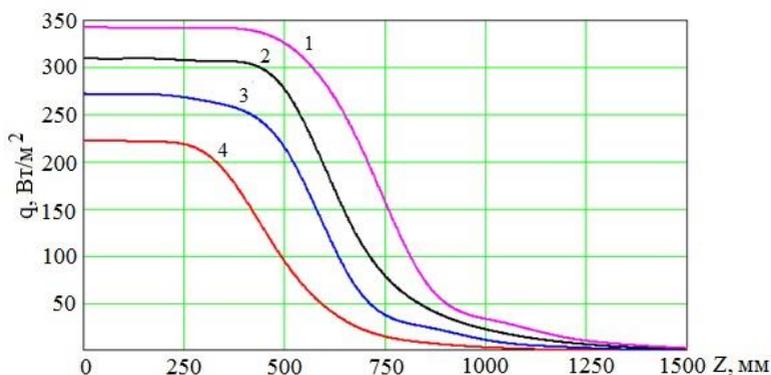


Рис. 6.22. Распределение плотности теплового потока на внутренней поверхности оболочки по расстоянию от входного зрачка

Из рис. 6.22 видно, что плотность теплового потока сохраняет почти постоянное значение на некотором расстоянии от входного зрачка, а затем плавно уменьшается практически до нуля, что соответствует пренебрежимо малым значениям. Зависимость от угла в данном случае показывает, что распределение плотности теплового потока внутри тубуса телескопической системы зависит от ориентации КА и факторов неравнояркости поверхности Земли. По этой причине для двухзеркальных телескопических систем типа Ричи-Кретьена большая длина тубуса позволяет уменьшить тепловую нагрузку на ГЗ и снизить затраты на обеспечение теплового режима ОЭТК в целом.

Примеры решения задач к главе VI

Пример 1. *Определить количество тепла Q , приходящее от Солнца за время $\tau=20$ с на наружную боковую поверхность КА цилиндрической формы при плановой съемке с высоты 550 км в момент прохождения терминатора Земли.*

Решение: При плановой съемке углы тангажа, крена и рысканья КА равны нулю. Это означает, что во время орбитального движения КА все время сохраняет одно и то же положение, при котором оптическая ось телескопа «нацелена» на центр Земли. При прохождении терминатора, разделяющего теньевую и освещенную части поверхности Земли, к Солнцу обращена ровно половина наружной поверхности КА. Учитывая, что Солнце в направлении КА формирует однородный световой пучок, распределение плотности теплового потока, падающего на поверхность, можно записать в виде

$$q(z, \theta) = B_{\otimes} \cos(\theta), \quad (\text{П6.1})$$

где Z – координата вдоль оси цилиндра, θ – полярный угол, а B_{\otimes} вычисляется по формуле (6.18). Тогда суммарное количество тепла Q_t , приходящее на поверхность КА за 1 с, запишется в виде двойного интеграла

$$Q_t = \int_{-90^0}^{90^0} \int_0^L r q(z, \theta) dz d\theta, \quad (\text{П6.2})$$

где r – полярный радиус. Подставляя (П6.1) в (П6.2), получаем

$$Q_t = B_{\otimes} rL [\sin(\theta)]_{-90^0}^{90^0} = 2B_{\otimes} rL. \quad (\text{П6.3})$$

При радиусе r , равном радиусу R корпуса КА, за время τ получаем

$$Q = Q_t \tau = 2B_{\otimes} RL \tau. \quad (\text{П6.4})$$

Для высоты $h = 550$ км согласно (6.18) получаем

$$x(h) = 2558 \text{ км}, \quad x_1 = 0,$$

$$G \left[(R_{\oplus} + h) R_{\oplus}^{-1} x_1 + x(h) \right] = G [x(h)] = 1,$$

откуда

$$B_{\otimes} = q_{\otimes} \cdot 1 = q_{\otimes}. \quad (\text{П6.5})$$

В результате формула (П6.4) запишется в виде

$$Q = 2q_{\otimes} RL \tau. \quad (\text{П6.6})$$

Так, при длине корпуса КА $L = 5$ м и наружном радиусе КА

$R = 2,5$ м количество тепла, приходящее за 20 секунд, согласно (П6.6) равно

$$Q = 2 \cdot 1378 \cdot 2.5 \cdot 5 \cdot 20 = 689 \text{ кДж.}$$

Пример 2. *Определить наземное расстояние от подспутниковой точки КА с высотой орбиты 600 км до точки пересечения оптической оси телескопа при отвороте от местной вертикали на угол 25° .*

Решение: Наземное расстояние является кратчайшим по сферической поверхности Земли и представляет собой длину дуги от точки местной вертикали до точки пересечения оптической оси телескопа с поверхностью Земли. На рис. 6.11 оно соответствует расстоянию LN по поверхности Земли и может быть найдено через дальность $D = MN$ (рис. П6.1).

$$\begin{aligned} \text{km} &:= 1000 \text{ m} \\ h &:= 600 \cdot \text{km} & R_z &:= 6371.21 \cdot \text{km} \\ D(\phi) &:= (R_z + h) \cdot \cos(\phi) - \sqrt{R_z^2 - [(R_z + h) \cdot \sin(\phi)]^2} \\ \text{LN}(\phi) &:= \int_0^{D(\phi) \cdot \sin(\phi)} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \sqrt{R_z^2 - x^2} \right)^2} dx \\ \text{LN} \left(25 \cdot \frac{\pi}{180} \right) \cdot \text{km}^{-1} &= 282.804 \text{ km} \end{aligned}$$

Рис. П6.1. Листинг MathCAD: Определение наземного расстояния

Пример 3. *Определить угол раствора конуса поля обзора КА с высотой орбиты 700 км.*

Решение: Угол раствора конуса поля обзора представляет собой угол между местной вертикалью и касательной к поверхности Земли. На рис. 6.11 он соответствует углу LMN (рис. П6.2).

$$\begin{aligned} \text{km} &:= 1000 \text{ m} \\ h &:= 700 \cdot \text{km} \quad R_z := 6371.21 \cdot \text{km} \\ \text{LMN} &:= \text{asin}\left(\frac{R_z}{R_z + h}\right) \quad \text{LMN} \cdot \frac{180}{\pi} = 64.291 \quad \text{grad} \end{aligned}$$

Рис. П6.2. Листинг MathCAD: Определение угла раствора конуса поля обзора

Пример 4. Найти радиус-вектор КА с высотой орбиты КА 1000 км на начало 75-го дня полета.

Решение: Радиус-вектор КА определяет его положение на орбите в заданной системе координат на заданный момент времени и имеет 3 компонента (по числу координатных осей). На рис. 6.11 это координаты точки М в СГСК (рис. П6.3).

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &\equiv 1 \quad \text{km} := 1000 \text{ m} \\ \text{Day} &:= 86400 \text{ sec} \quad \text{Year} := 365.24 \cdot \text{Day} \\ M &:= 5.976 \cdot 10^{24} \quad \text{- масса Земли, кг} \\ \Gamma &:= 6.67259 \cdot 10^{-11} \quad \text{- универсальная гравитационная постоянная} \\ h &:= 1000 \cdot \text{km} \quad \text{- высота орбита КА, м} \\ R_z &:= 6371.21 \cdot \text{km} \quad \text{- радиус Земли на уровне моря, м} \\ W_s &:= \sqrt{\frac{M \cdot \Gamma}{R_z + h}} \quad \text{- путевая скорость КА, м/с} \\ i &:= 95 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- наклонение орбиты КА, град} \\ \Omega_0 &:= 75 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{- долгота восходящего узла орбиты КА, град} \\ M1(\psi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M2(\theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ u(t) &:= \frac{W_s}{R_z + h} \cdot t \quad \varepsilon := 23.45 \cdot \frac{\pi}{180} \\ X_s(t) &:= (R_z + h) \cdot (\cos(u(t)) \cdot \cos(\Omega_0) - \sin(u(t)) \cdot \sin(\Omega_0) \cdot \cos(i)) \\ Y_s(t) &:= (R_z + h) \cdot (\cos(u(t)) \cdot \sin(\Omega_0) + \sin(u(t)) \cdot \cos(\Omega_0) \cdot \cos(i)) \\ Z_s(t) &:= (R_z + h) \cdot (\sin(u(t)) \cdot \sin(i)) \end{aligned}$$

Рис. П6.3. Листинг MathCAD: Определение радиуса-вектора КА

$$\omega_S := \frac{2\pi}{\text{Year}} \quad \text{- угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца}$$

$$T_0 := (31 + 28 + 20) \cdot \text{Day} \quad \varphi_m := \omega_S \cdot T_0 \quad \tau_0 := 75 \cdot \text{Day}$$

$$u(t) := \sqrt{\frac{1 - \cos[\omega_S \cdot (t + \tau_0) - \varphi_m]}{2}} \quad \text{d}u(t) := \frac{\omega_S \cdot \sin[\omega_S \cdot (t + \tau_0) - \varphi_m]}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot u(t)}$$

$$\Omega_1(t) := \arccos(u(t)) \cdot \text{sign}(du(t)) \quad \eta_1(t) := M_1(\Omega_1(t)) \cdot M_2(\varepsilon)$$

$$\text{Rot1}(t) := \eta_1(t) \cdot (X_s(t) \ Y_s(t) \ Z_s(t))^T$$

$$\text{rad_vec} := \begin{pmatrix} \text{Rot1}(\tau_0)_1 \\ \text{Rot1}(\tau_0)_2 \\ \text{Rot1}(\tau_0)_3 \end{pmatrix} \quad \frac{\text{rad_vec}}{\text{km}} = \begin{pmatrix} 6956.601 \\ 2422.951 \\ -264.101 \end{pmatrix}$$

Рис. Пб.3. Листинг MathCAD: Определение радиуса-вектора КА (окончание)

Пример 5. *Определить долготу восходящего узла прямой синхронно-солнечной орбиты КА, находящегося на высоте 900 км, на начало 200-го дня полета.*

Решение: Искомая долгота всегда имеет положительное значение и находится по формуле (6.9) (рис. Пб.4).

$$\underline{\text{km}} := 1000 \text{ m}$$

$$\text{Day} := 86400 \quad \text{Year} := 365.24 \cdot \text{Day} \quad \omega_S := \frac{2\pi}{\text{Year}}$$

$$h := 900 \cdot \text{km} \quad R_z := 6371.21 \cdot \text{km}$$

$$T_0 := (31 + 28 + 20) \cdot \text{Day} \quad \varphi_m := \omega_S \cdot T_0 \quad \tau_0 := 200 \cdot \text{Day}$$

$$u(t) := \sqrt{\frac{1 - \cos[\omega_S \cdot (t + \tau_0) - \varphi_m]}{2}}$$

$$\text{d}u(t) := \frac{\omega_S \cdot \sin[\omega_S \cdot (t + \tau_0) - \varphi_m]}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot u(t)}$$

$$\Omega_1(t) := \arccos(u(t)) \cdot \text{sign}(du(t)) \quad \underline{G}(x) := \Phi(x) \cdot |\text{sign}(x)|$$

$$\underline{\Omega}(t) := \Omega_1(t) - 2 \cdot \pi \cdot \underline{G}(-\Omega_1(t))$$

$$\frac{\Omega(\tau_0)}{2\pi} = -1.189 \quad \text{floor}\left(\frac{\Omega(\tau_0)}{2\pi}\right) = -2$$

$$\left(2 \cdot \pi \cdot \left|\text{floor}\left(\frac{\Omega(\tau_0)}{2\pi}\right)\right| + \Omega(\tau_0)\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 291.803 \quad \text{grad}$$

Рис. Пб.4. Листинг MathCAD: Определение долготы восходящего узла

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить количество тепла Q , поглощенного корпусом КА, если на наружную поверхность КА цилиндрической формы в момент прохождения точки зенита Земли приходит излучение от Солнца в течение $\tau = 5$ с, а коэффициент поглощения излучения равен $0,1$.

Задача 2. Определить количество тепла Q , приходящее от Солнца за время $\tau = 10$ с на наружную поверхность КА сферической формы в момент прохождения точки зенита Земли.

Задача 3. Найдите равновесную температуру цилиндрического корпуса КА диаметром 3 м и длиной 8 м в момент прохождения терминатора при плановой съемке.

Задача 4. Определить количество уходящего за счет собственного теплового излучения Земли тепла в поле обзора КА с высотой орбиты 350 км.

Задача 5. Определить угол поля зрения телескопа, если при плановой съемке с высоты 700 км поле зрения захватывает площадь поверхности Земли, равную 1000 км².

Задача 6. Определить высоту орбиты КА, если при отклонении от местной вертикали на 30° наземное расстояние от подспутниковой точки КА до точки пересечения оптической оси телескопа с поверхностью Земли равно 500 км.

Задача 7. Найти радиус-вектор КА с высотой орбиты КА 400 км на начало 125-го дня полета (прим.: при решении воспользоваться недостающими исходными данными из Примера 4).

Задача 8. Определить момент времени, при котором долгота восходящего узла синхронно-солнечной орбиты КА, находящегося на орбите высотой 350 км, будет равна 0 (прим.: при решении воспользоваться недостающими исходными данными из Примера 5).

Задача 9. Определить коэффициент пропускания атмосферы, если КА имеет орбиту высотой 600 км, а тепловое излучение распространяется до КА с расстояния 800 км от поверхности Земли.

Задача 10. Найдите соотношение между коэффициентами облученности поверхности Земли в поле обзора КА на орбите высотой 600 км и входного зрачка телескопа диаметром $1,5$ м, если КА осуществляет плановую съемку.

Библиографический список к главе 6

1. Гарбук С. В., Гершензон В.Е. Космические системы дистанционного зондирования Земли. М.: Изд-во А и В, 1997.
2. Служебные системы космических телескопов / Данилов В.А. [и др.] // Оптический журнал. 2002. Т. 69. №9. С. 36-38.
3. Фаворский О.Н., Кандер Я.С. Вопросы теплообмена в космосе. М.: Высшая школа, 1967. 240 с.
4. Внешний теплообмен космических объектов / Кобранов Г.П., Цветков А.П., Белов А.И. [и др.]. М.: Машиностроение, 1977. 104 с.
5. Козлов Л.В., Нусинов М.Д., Акишин А.И. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды. М.: Машиностроение, 1971. 380 с.
6. Голиковская К.Ф. Математическое моделирование тепловых потоков космического аппарата // Вестн. Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2005. № 3. С. 116-119.
7. Маламед Е.Р., Петров Ю.Н., Соколов И.М. Конструкции главных зеркал космических телескопов // Оптический журнал. 2002. Т. 69. №9. С. 26-30.
8. Панов В. А., Кругер М. А. Справочник конструктора оптико-механических приборов. Л.: Машиностроение, 1980. 742 с.
9. Гуцин В.Н. Основы устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2003. 272 с.
10. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
11. Bialecki R.A., Burczynski T., Dlugosz A., Kus W., Ostrowski Z. Evolutionary shape optimization of thermoelastic bodies exchanging heat by convection and radiation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005, v.194, №17. P. 1839-1859.
12. Романов А.Е. Математическая модель экспонирования снимков неравнояркой поверхности Земли // Исследование Земли из космоса. 2012. №6. С. 34-61.
13. Романов А.Е. Моделирование многократных отражений в блендах с коническими диафрагмами // Оптический журнал. 2007. Т.74. №7. С.42-46.
14. Романов А.Е. Диффузное отражение в светозащитных блендах // Оптический журнал. 2008. Т.75. №8. С. 36-41.

15. Ибрагимов И.Д., Скребушевский Б.С. Определение интервалов и дат наступления критических условий освещенности бортовых приборов космических аппаратов // Космические исследования. 1985. Т. 25. №1. С. 141-147.
16. Романов А.Е. Термомеханическая расстраиваемость светозащищенных диоптрических систем // Вестн. СамГУ. 2008. Т.65. №6. С.290-308.

7 ОСНОВЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Создание ракетно-космической техники, обладающей высокими эксплуатационными характеристиками, энергоэффективностью и длительным сроком активного существования, на современном этапе немислимо без применения средств физико-математического моделирования. Еще на этапе проектирования физико-математическое моделирование позволяет найти оптимальный вариант решения поставленной задачи, что в конечном итоге ведет к ускорению и снижению трудозатрат процесса проектирования.

В полной мере вышесказанное относится к разработке систем обеспечения теплового режима, важнейшего узла космического аппарата, предназначенного для поддержания оптимальных температурных условий как отдельных компонентов КА, так и всей конструкции в целом. Современные средства физико-математического моделирования позволяют на основе геометрической 3D модели космического аппарата создать полную 3D модель теплообмена КА, включающую все три механизма теплопередачи, учитывающую влияние как внешних тепловых факторов космического пространства, так и внутренние тепловыделения.

Одной из лучших программ математического моделирования является программный комплекс ANSYS – передовой комплекс средств компьютерного инженерного моделирования, использующий метод конечных элементов. Инструменты ANSYS позволяют решать всевозможные задачи из различных областей физики: конструкционные, тепловые, гидрогазодинамические, электромагнитные, а также междисциплинарные (с сопряжением различных областей физики). Совокупность модулей ANSYS позволяет решать любые сложные задачи, с которыми может столкнуться современный разработчик. Ведущие российские и зарубежные компании аэрокосмической отрасли используют программный комплекс ANSYS в своей работе.

В НОЦ «Теплофизика и информационно-измерительные технологии» СамГУ наработан большой опыт применения программного пакета ANSYS для решения задач определения термостабильности конструктивных элементов КА [1, 2], расчета тепловых режимов линзовых [3] и зеркально-линзовых объективов [4-7], разработки и моделирования СОТР ОЭТК [8-10].

В данном пособии приводятся примеры использования программного пакета ANSYS решения для физико-математического моделирования тепловых режимов оптико-электронных телескопических систем космических аппаратов.

7.1 Внешняя задача теплообмена в космосе

Рассмотрим задачу определения температурного поля спутника при его орбитальном движении вокруг Земли. Для простоты положим, что спутник представляет собой тонкостенный куб с длиной ребра 400 мм и толщиной стенки 20 мм, изготовленный из углепластика (теплофизические свойства углепластика приведены в Приложении 1). В качестве орбиты спутника выберем круговую орбиту высотой 700 км, наклонением $i = 98^\circ$ и углом $\gamma = 50^\circ$ между плоскостью орбиты и проекцией направления на Солнце на плоскость орбиты. В этом случае продолжительность витка вокруг Земли составит 99 минут. Пронумеруем грани куба в соответствии с рис. 7.1 причем ориентация спутника такова, что нормаль к грани 4 всегда совпадает с направлением на Землю, а нормаль к грани 2 совпадает с вектором скорости спутника.

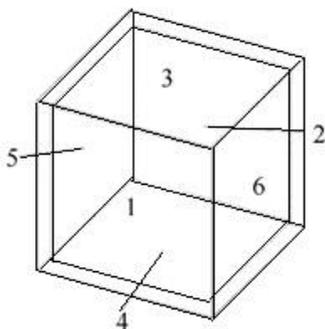


Рис. 7.1. Нумерация граней куба

Степень черноты поверхностей спутника зададим следующим образом: для поверхностей 1, 2, 4 – $\varepsilon = 0,1$ (поверхность с высокой отражающей способностью), для поверхностей 3, 5, 6 – $\varepsilon = 0,9$ (солнечные батареи). Тепловые потоки на каждую грань спутника вычисляются в соответствии с главой 6 и для данной задачи приведены в Приложении 2. Внутренне тепловыделение спутника постоянно на всем протяжении витка и составляет 80 Вт. Температуру космического пространства примем равной 4 К. Необходимо определить

температурное поле спутника на протяжении одного витка вокруг Земли.

Задачу решаем в следующем порядке:

1. Запуск ANSYS.

Запускаем **ANSYS Mechanical APDL Product Launcher**, на вкладке **File Management** указываем рабочую папку и имя задачи. Для запуска ANSYS нажимаем кнопку **Run** (рис. 7.2).

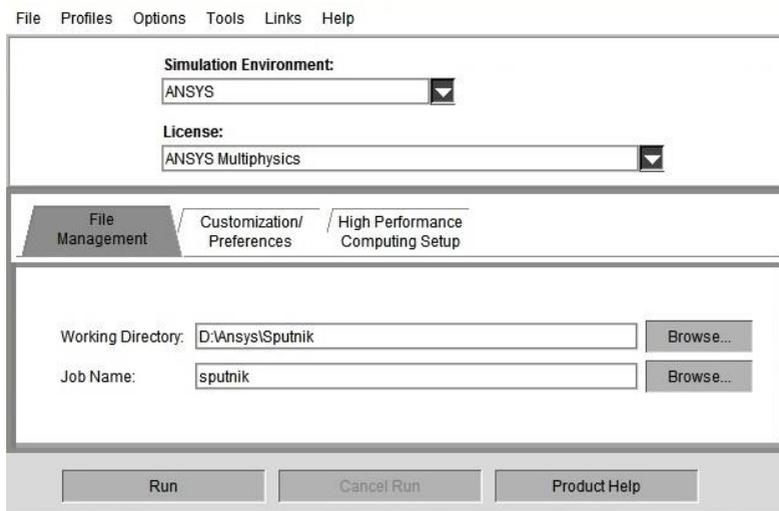


Рис. 7.2. Меню запуска ANSYS

2. Поскольку мы решаем чисто тепловую задачу, имеет смысл отфильтровать меню, так чтобы в дальнейшем выводились только те пункты, меню, которые относятся только к тепловым расчетам.

D Main Menu > Preferences^ dsltkztv vsim. geyrn Thermal b pfntv OK (hbc/ 7/3)/

3. Создание геометрии.

Создаем первый куб: в **Main Menu > Preprocessor > Modeling>Create > Volumes > Block > By 2 Corners & Z**, задаем размеры куба в соответствующих полях (рис. 7.4). После нажатия кнопки ОК на экране появится изображение куба. Для того чтобы рассмотреть его с разных сторон, нужно воспользоваться кнопками навигационного меню.

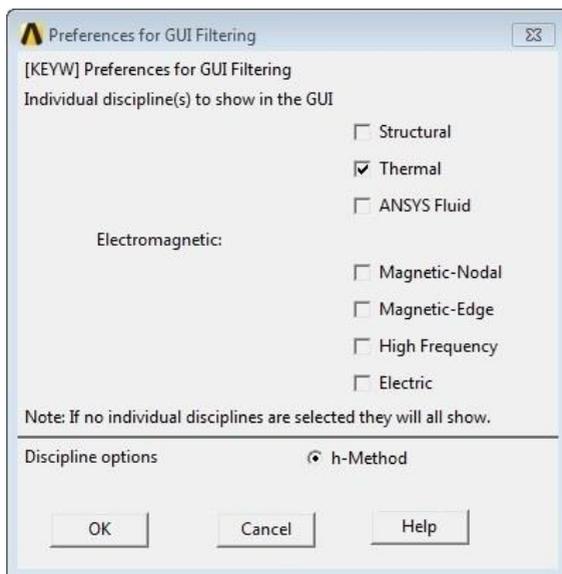


Рис. 7.3. Меню ANSYS

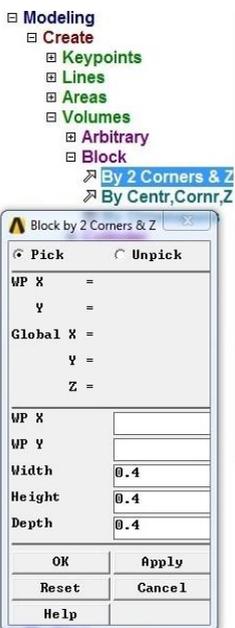


Рис. 7.4. Создание первого куба

4. Создаем второй куб. Второй куб создается той же командой, что и первый, однако для того чтобы второй куб оказался точно внутри первого, необходимо сдвинуть **Рабочую плоскость** по координате **z** на толщину стенки спутника.

Выберем: в **Utility Menu > WorkPlane > WP settings**: Отметить мышью **Enable Snap** и задать значение **Snap Incr** равное 0,02, **Utility Menu > WorkPlane > Offset WP by Increments**: Далее нажать кнопку **Z+**.

При построении второго куба необходимо также указать координаты его начального угла (рис. 7.5).

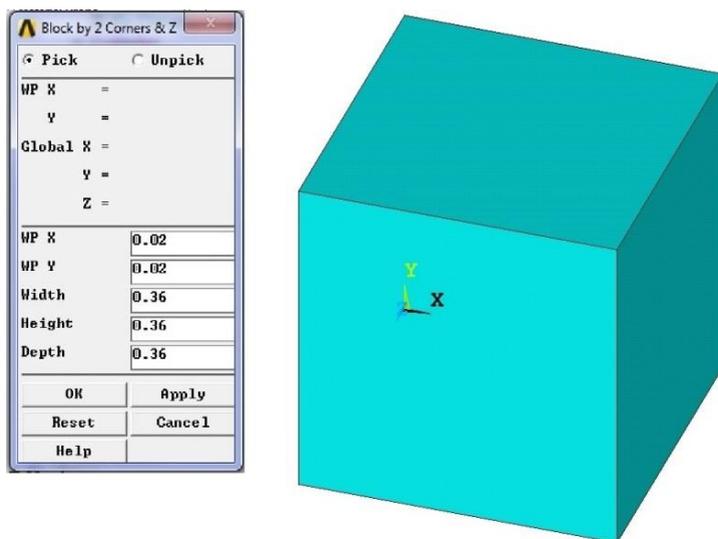


Рис. 7.5. Построение второго куба

5. Чтобы получить тонкостенную фигуру, необходимо вычесть из большого куба малый.

Выберем: в **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Volumes**: выбираем объем №1, нажимаем **Apply**, далее выбираем объем №2 и нажимаем **OK**. В результате этой команды объемы №1 и 2 будут удалены и будет создан объем №3 – тонкостенный полый куб. В результате должна получиться фигура, как на рис. 7.6 (чтобы изображение было построено линиями, нужно выполнить команду **Utility Menu > Plot > Lines**).

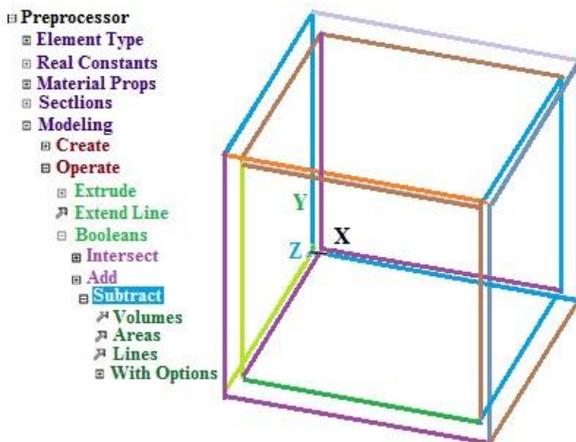


Рис. 7.6. Геометрическая модель

6. Для того чтобы между номерами геометрических объектов не было пропусков, выполним команду сжатия номеров.

Выберем: в **Main Menu > Preprocessor > Numbering Ctrl's > Compress Numbers**: в раскрывающемся меню выбираем **All** и нажимаем **OK**. Теперь единственный объем модели имеет номер 1.

7. Сохраняем созданную геометрическую модель.

В **Toolbar > SAVE_DB**.

8. Задаем свойства материалов.

Для этого выберем: в **Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models**: в окне справа выбираем **Thermal** и заполняем **Conductivity** (теплопроводность), **Specific Heat** (теплоемкость) **Density** (плотность). Поскольку в модели присутствуют поверхности с разной степенью черноты, необходимо создать еще один материал с такими же свойствами (**Material > New Model**) (рис. 7.7).

9. Задаем тип конечных элементов модели.

Выберем последовательно в **Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete**. Далее нажимаем кнопку **Add** и в левом столбце выбираем в **Thermal Mass Solid**, а в правом **Brick 8 node 70**. Поскольку в задаче присутствует тепловое излучение, необходимо кроме твердотельных элементов, которыми будет разбита модель спутника, задать поверхностные элементы, которыми будут разбиты излучающие поверхности и специальный тип элемента, ответственный за перенос излучения.

Далее нажимаем кнопку **Add** и в левом столбце выбираем в **Thermal Mass Shell**, а в правом **3D 8 node 132**. Затем для этого элемента нажимаем **Options** и выбираем в **Temp variation through layer** – **No variation**, **Number of layers** – **1**. Далее нажимаем кнопку **Add** и в левом столбце выбираем **Superelement**, а в правом **Superelement 50**. Затем для этого элемента нажимаем **Options** и выбираем **Element behavior** – **Radiation substr** (рис. 7.8).

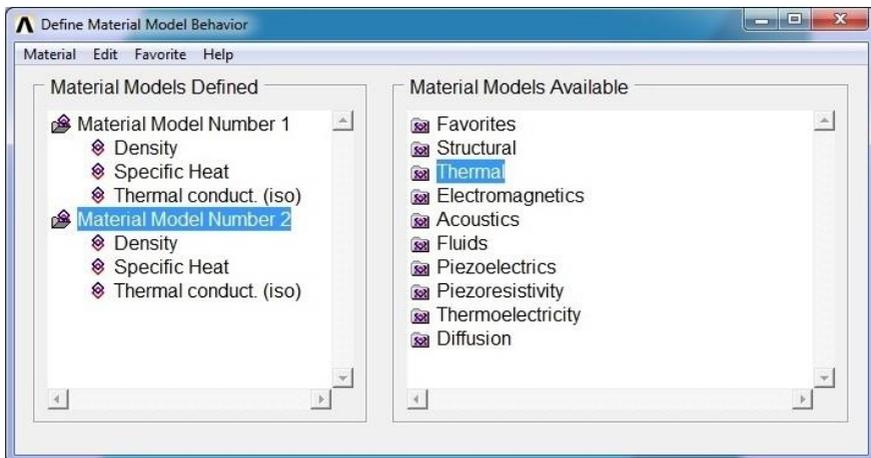


Рис. 7.7. Модели материалов

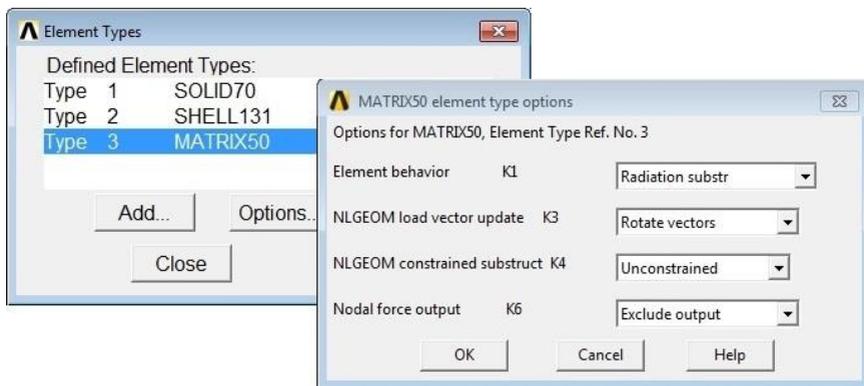


Рис. 7.8. Типы конечных элементов

10. Задание числа разбиений на линиях.

Последовательно выберем: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrl > ManualSize > Lines > Picked Lines**: Далее мышью выделяем все длинные линии, нажимаем **OK** и задаем **NDIV – 20**. Аналогично для всех коротких линий задаем **NDIV – 18**.

11. Разбиваем модель сеткой конечных элементов.

Выберем в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Volumes > Free**. В результате должна получиться сетка, как на рис. 7.9.

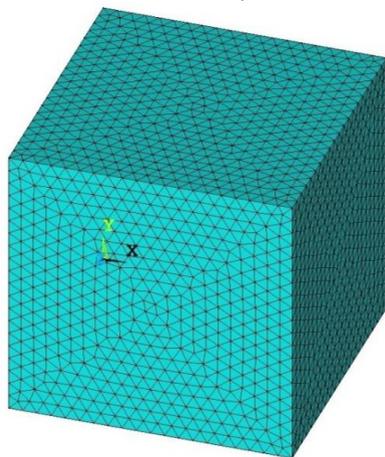


Рис. 7.9. Конечно-элементная модель

12. Разбиваем излучающие поверхности.

Выделяем поверхности, имитирующие «блестящие» поверхности: в **Utility Menu > Select > Entities**, далее в верхнем поле выбираем **Areas** и нажимаем **OK**, с помощью мыши выделяем переднюю, заднюю и нижнюю поверхности куба и нажимаем **OK**.

Выделяем узлы, принадлежащие этим поверхностям: в **Utility Menu > Select > Entities**, далее в верхнем поле выбираем **Nodes**, в нижнем **Attached to**, еще ниже выбираем **Areas all** и нажимаем **OK**.

Затем указываем соответствующий материал и тип элемента: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attribs**, выбираем **Element type number – 2, Material number – 1**. И наконец, создаем на этих поверхностях излучающие элементы: в **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Elements > Surf / Contact > Surf Effect > Generl Surface > No extra Node**: нужно вы-

брать **Pick All**. Аналогично разбиваем поверхности, имитирующие солнечные батареи, только указываем **Material number – 2**.

13. Создание внешнего узла.

Поскольку данная система является незамкнутой, то необходимо задать дополнительный узел, который будет собирать на себя все уходящее излучение и, таким образом, имитировать окружающее пространство.

Выберем последовательно в **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Nodes > On Working Plane**. Далее указателем мыши выделим в любом месте рабочей области за пределами модели, в результате в этом месте будет создан дополнительный узел.

14. Создание матрицы излучения.

Для создания матрицы излучения необходимо выделить все узлы, элементы, принадлежащие излучающим поверхностям в следующей последовательности:

В **Utility Menu>Select > Entities**, далее в верхнем поле выбираем **Elements**, в нижнем **By Attributes**, ниже указываем **Elem type num – 2** и нажимаем **Apply**. Далее в верхнем поле выбираем **Nodes**, в нижнем **Attached to**, ниже указываем **Elements** и нажимаем **OK**.

Далее задаем степени черноты обоих материалов:

В **Main Menu > Radiation Opt > Matrix Method > Emissivities**: для материала 1 ставим 0,1 и нажимаем **Apply**, для материала 2 – 0,9 и нажимаем **OK**.

Задаем остальные свойства матрицы излучений:

В **Main Menu > Radiation Opt > Matrix Method > Other settings**: Постоянная Стефана-Больцмана – $5,67 \cdot 10^{-8}$, тип геометрии – 3D, номер внешнего узла – в данном случае 4847.

Запись матрицы излучений в файл в **Main Menu>Radiation Opt > Matrix Method > Write matrix**: задаем **Type of procedure – Hidden**, **Name of matrix file – Matrix** и нажимаем **OK**, файл с данным именем появится в рабочей папке.

15. Создание таблиц с граничными условиями.

Поскольку в данной задаче граничные условия нестационарные, необходимо создать специальные таблицы, содержащие изменение внешних тепловых потоков для каждой поверхности.

В **Utility Menu > Parameters > Array Parameters > Define/Edit**: Далее нажимаем **Add** и задаем параметры таблицы для поверхности 1: **Parameter name – q1**, **Parameter type – Table**, **I – 133**, **Row varia-**

ble – time. Аналогично задаем остальные таблицы для поверхностей 2–6.

Далее, выделив таблицу **q1**, нажимаем **Edit** и заполняем таблицу в соответствии с Приложением 2. Аналогично заполняем остальные таблицы (рис. 7.10).

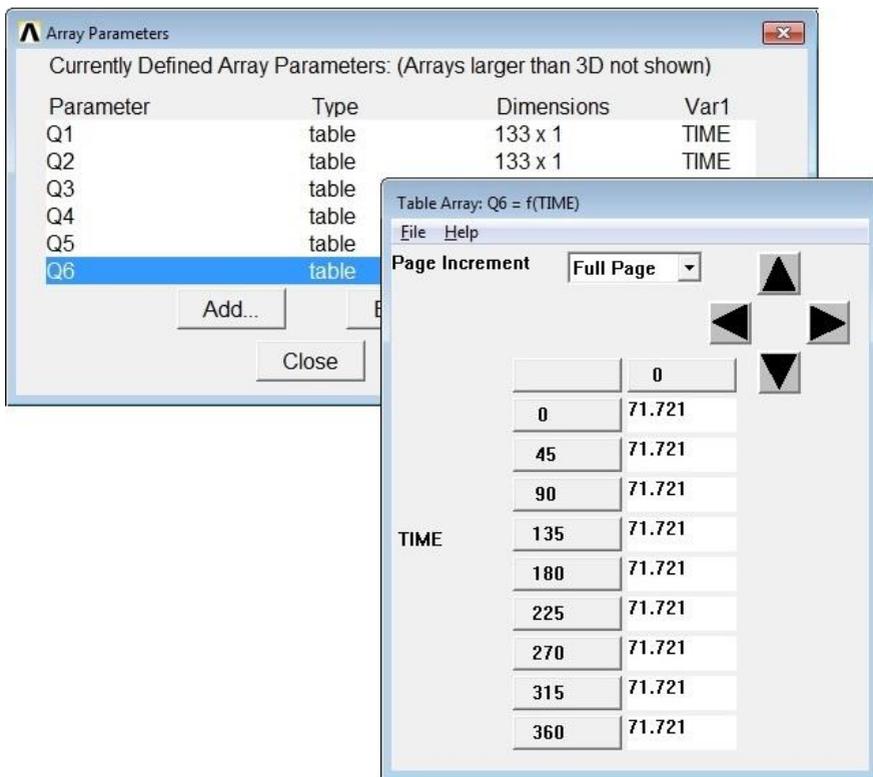


Рис. 7.10. Таблицы данных с нестационарными граничными условиями

Поскольку каждая поверхность поглощает внешний поток в соответствии со своей степенью черноты, необходимо все значения в таблицах q1, q2, q4 умножить на 0,1, а в таблицах q3, q5, q6 умножить на 0,9. Это делается с помощью команды операция с вектором:

В Utility Menu > Parameters > Array Operations > Vector Operations: и указать следующие параметры **Result array parameter – q1, 1st input array parameter – q1, Operation – Multiply *, 2nd input array parameter – 0.1.** Аналогично обработать остальные таблицы.

16. Считывание матрицы излучений из файла.

Для этого выполним последовательно:

В Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attribs, выбираем **Element type number – 3**.

В Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create>Elements>Superelem > From .SUB File: в поле **Jobname of matrix file** указываем имя файла **Matrix**.

17. Задаем свойства решения.

Выполним последовательно:

В Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis: задаем **Transient** (нестационарный анализ).

В Main Menu>Solution>Define Loads > Settings > Uniform Temp: задаем начальную однородную температуру для всей модели **Uniform temperature – 293**.

В Main Menu>Solution > Load Step Opts > Time/Frequenc > Time – Time Step: задаем расчетное время и шаг по времени: **Time at the end of load step – 5940, Time step size – 60, Stepped or ramped b.c. – Stepped**.

18. Задаем граничные условия.

На внешние поверхности спутника. **В Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Thermal > Heat Flux > On Areas**. Далее выделяем поверхность 1, нажимаем **Apply** и указываем следующие параметры: **Apply HFLUX on areas as – Existing Table, Load HFLUX Value – q1**. Аналогично задаем граничные условия для поверхностей 2–6.

На внутренние поверхности спутника: **в Main Menu > Solution>Define Loads > Apply > Thermal > Heat Flux > On Areas**. Далее выделяем все внутренние поверхности, нажимаем **Apply** и указываем следующие параметры: **Apply HFLUX on areas as – Constant Value, Load HFLUX Value – 102,5** (удельный тепловой поток на внутреннюю поверхность спутника равен внутреннему тепловыделению (80 Вт), деленному на площадь внутренней поверхности спутника 0,778 м²).

На внешний узел: **в Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Thermal > Temperature > On Nodes:** Далее выделяем внешний узел и указываем следующие параметры **DOF to be constrained – TEMP, Load Temp Value – 4**.

19. Сохраняем созданную конечно-элементную модель.

Зададим **в Toolbar > SAVE_DB**.

20. Запуск на решение.

Перед решением необходимо удалить все поверхностные элементы типа 2:

В **Utility Menu > Select > Entities**, далее в верхнем поле выбираем **Elements**, в нижнем **By Attributes**, ниже указываем **Elem type num – 2** и нажимаем **Apply** – выделяем элементы типа 2.

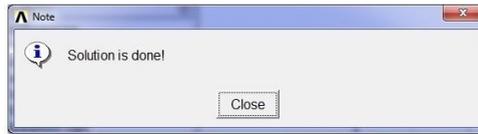
В **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Delete > Elements:** Нажимаем **Pick All** – удаляем эти элементы.

В **Utility Menu > Select > Everything** – выделяем оставшуюся модель;

В **Main Menu > Solution > Solve > Current LS:** Запускаем задачу на решение.

21. Выполнение решения.

В процессе вычислений программа выводит график процесса сходимости решения (рис. 7.11). После окончания расчета появляется окно **Solution is done**.



Time = 5940

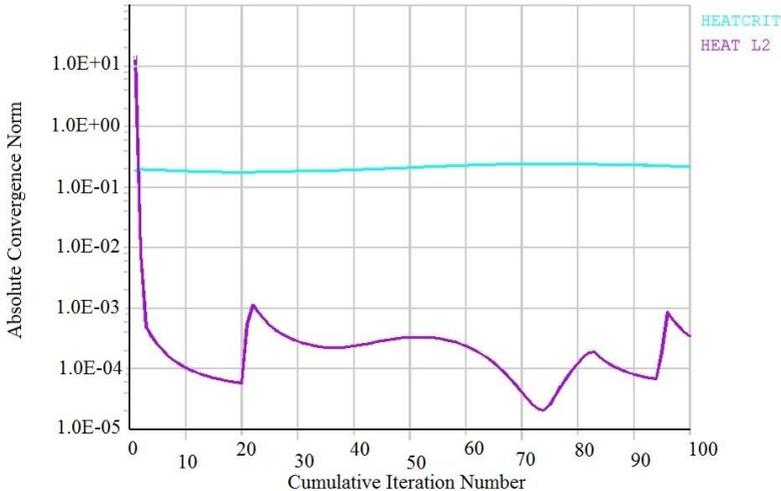


Рис. 7.11. Процесс вычислений

22. Просмотр полученного решения.

Просмотр температурного поля в заданный момент времени выполним следующим образом:

В **Main Menu > General PostProc > Read Results > Last set**: Считывание результатов для последнего момента времени.

Последовательно: в **Main Menu > General Postproc > Plot Results > Contour Plot > Nodal Solu.** Далее выберем в **DOF Solution > Nodal Temperature** – построение распределения температуры для заданного момента времени (рис. 7.12).

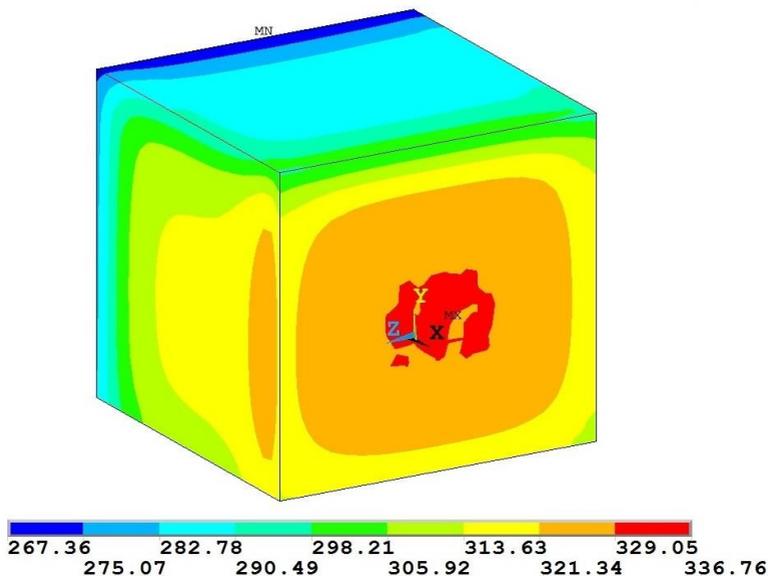


Рис.7.12. Температурное поле спутника в конечный момент времени

Как видно из приведенных результатов (рис. 7.12) в каждый момент времени каждая грань куба имеет свою температуру, отличную от других граней и обусловленную тепловым потоком, падающим на нее. На финальный момент расчетного времени – 5940 секунд, грань №6 имеет максимальную температуру, а противоположная ей грань №5 – минимальную. На данный момент времени перепад температур на кубе составляет 69,4 К. На ребрах куба наблюдаются переходные зоны между температурами разных граней, обусловленные теплопроводностью.

Просмотр зависимости температуры в точке от времени:

В **Main Menu > Time HistPostPro**. В результате вызывается обозреватель заданных переменных, по умолчанию в нем присутствует только одна переменная – время, остальные задаются пользователем. Нажимаем **Add Data**, выбираем в **Nodal Solution > DOF Solution > Nodal Temperature** и нажимаем **OK** (рис. 7.13). Далее выбираем в графическом окне интересующий нас узел и нажимаем **OK**, в окне обозревателя появится новая переменная. Выделив ее и нажав кнопку **Graph Data**, получим графическую зависимость температуры в заданной точке от времени.

Аналогично можно выделить несколько переменных и построить их на одном графике, так на рис. 7.14 приведены зависимости температуры от времени для всех 6 поверхностей спутника.

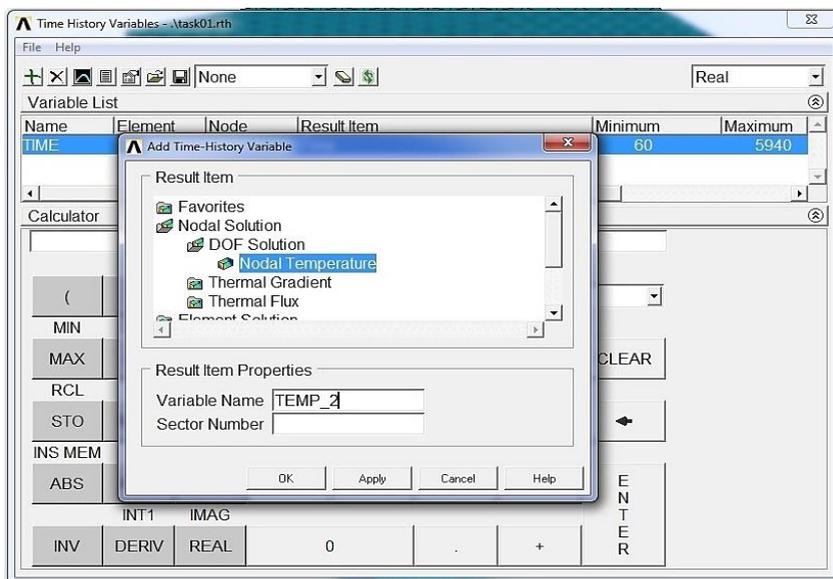


Рис. 7.13. Задание температуры в точке для построения временной зависимости

Как видно из приведенных результатов (рис. 7.14) с течением времени каждая грань имеет свою температуру отличную от других.

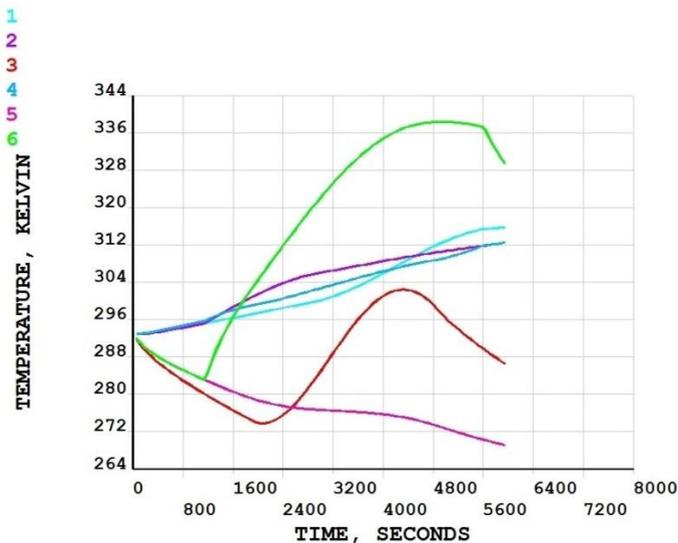


Рис. 7.14. Зависимости температур поверхностей спутника от времени

У граней 1, 2, 4 с низкой степенью черноты изменение температуры за расчетное время имеет монотонный характер и составляет порядка 20 К, у граней 3, 5, 6 с высокой степенью черноты изменение температуры может быть как положительным, так и отрицательным и достигает 45 К, что объясняется более высокими радиационными потоками, поглощаемыми и излучаемыми этими поверхностями, а также ориентацией куба относительно внешних тепловых источников.

Таким образом, решена задача внешнего теплообмена спутника в трехмерной постановке при его орбитальном движении с учетом внешних тепловых потоков, воздействующих на спутник со стороны Солнца и Земли, а также внутреннего тепловыделения самого спутника. В результате расчета получена динамика температурного поля спутника при его орбитальном движении. Приведено поле температуры спутника для заданного момента времени, а также временные зависимости температур каждой грани спутника.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. *Определить температурное поле спутника цилиндрической формы, совершающего орбитальное движение вокруг Земли. Внешний диаметр спутника 400 мм, длина 600 мм, толщина стенки 5 мм. Спутник изготовлен из углепластика, степень черноты всех наружных поверхностей принять 0,9. Боковую поверхность цилиндра разбить на четыре части. Параметры орбиты и тепловые потоки, соответствующие орбите, взять из базового примера.*

Задача 2. *Определить максимальную температуру спутника кубической формы при его движении на освещенной части орбиты. Внутреннее тепловыделение спутника отсутствует. Остальные параметры задачи взять из базового примера.*

Задача 3. *Определить температурное поле микроспутника, совершающего орбитальное движение вокруг Земли в течение одного витка. Микроспутник имеет форму тонкостенного параллелепипеда с размерами 100×100×300 мм, толщина стенки 2 мм. Спутник изготовлен из углепластика, степень черноты всех наружных поверхностей принять 0,5. Параметры орбиты и тепловые потоки, соответствующие орбите, взять из базового примера*

Задача 4. *Определить минимальную температуру спутника кубической формы при его движении на теневой части орбиты. Внутреннее тепловыделение спутника принять равным 100 Вт. Остальные параметры задачи взять из базового примера*

Задача 5. *Для спутника кубической формы, совершающего орбитальное движение вокруг Земли в течение одного витка, определить температурное поле спутника, найти максимальную и минимальную температуры. Предполагается, что спутник изготовлен из алюминия. Остальные параметры задачи взять из базового примера. Сравнить полученные результаты с результатами базового примера.*

7.2 Внутренняя задача теплообмена в космосе

Рассмотрим задачу определения температурного поля объектива, предназначенного для дистанционного зондирования Земли, при воздействии условий эксплуатации. Для простоты положим, что объектив состоит из корпуса, крышки и единственного оптического элемента – главного зеркала (рис. 7.15).

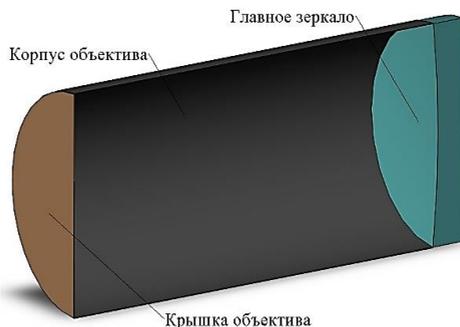


Рис. 7.15. Модель объектива

Размеры главного зеркала – световой диаметр – 1500 мм, радиус кривизны оптической поверхности – 7000 мм, толщина – 250 мм, длина корпусной части объектива – 3000 мм. Полагаем, что зеркало изготовлено из ситалла, корпус и крышка из углепластика, теплофизические свойства материалов приведены в Приложении 3. Степени черноты внутренних поверхностей объектива положим для зеркала 0,2, для корпуса и крышки 0,9. Номинальная температура объектива равна 293 К. Предположим, что температура на корпусе меняется по синусоидальному закону относительно номинальной температуры: $T_{\text{корп}} = T_{\text{ном}} + A \cdot \sin(2\pi t/T_{\text{виток}})$, где $A = 3\text{К}$ – амплитуда колебаний температуры, $T_{\text{виток}} = 1,5$ часа – продолжительность обращения объектива вокруг Земли. Задняя и боковая поверхности зеркала теплоизолированы. Температура крышки в закрытом состоянии равна номинальной.

Необходимо найти температурное поле объектива за расчетное время 45 минут, с учетом того, что первые 25 минут крышка объектива закрыта, а затем открывается на 20 минут. Тепловой поток, падающий на входной зрачок объектива при открытой крышке принимается равным 225 Вт/м^2 .

Задачу решаем в следующем порядке.

1. Запуск ANSYS:

Запускаем **ANSYS Mechanical APDL Product Launcher**, на вкладке **File Management** указываем рабочую папку и имя задачи. Для запуска ANSYS нажимаем кнопку **Run** (рис. 7.16).

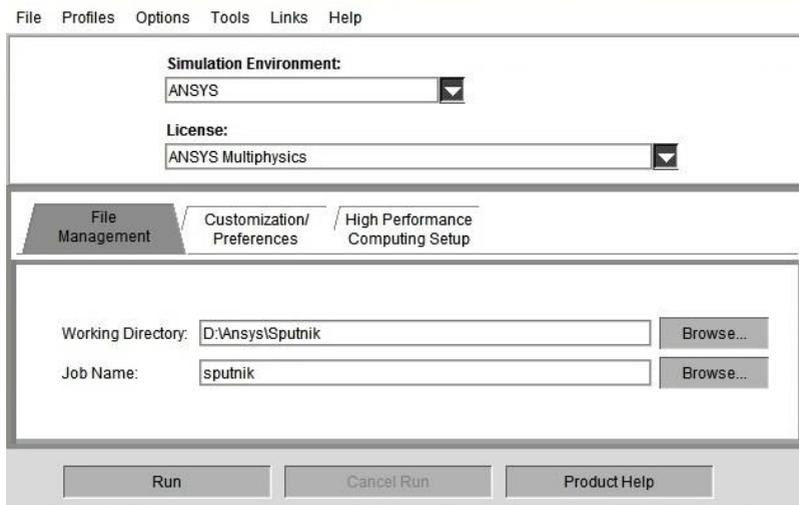


Рис. 7.16. Меню запуска ANSYS

2. Поскольку мы решаем чисто тепловую задачу, имеет смысл отфильтровать меню, так чтобы в дальнейшем выводились только те пункты меню, которые относятся только к тепловым расчетам:

В **Main Menu > Preferences**. Выделяем мышью пункт **Thermal** и затем **ОК** (рис. 7.17).

3. Создание геометрии.

Пусть данная задача является осесимметричной и, следовательно, допускает решение в двумерной постановке. Необходимо помнить, что в ANSYS осью симметрии для тепловых задач всегда является ось OY , и строить модель в соответствии с этим правилом.

Поскольку температуры корпуса и крышки известны из условия, то искать нужно только температуру главного зеркала: в двумерной постановке главное зеркало описывается поверхностью, а корпус и крышку представим в виде линий. Такую модель удобно строить снизу-вверх, т.е. ключевые точки > линии > поверхности. Соответственно необходимо заранее рассчитать координаты ключевых точек модели.

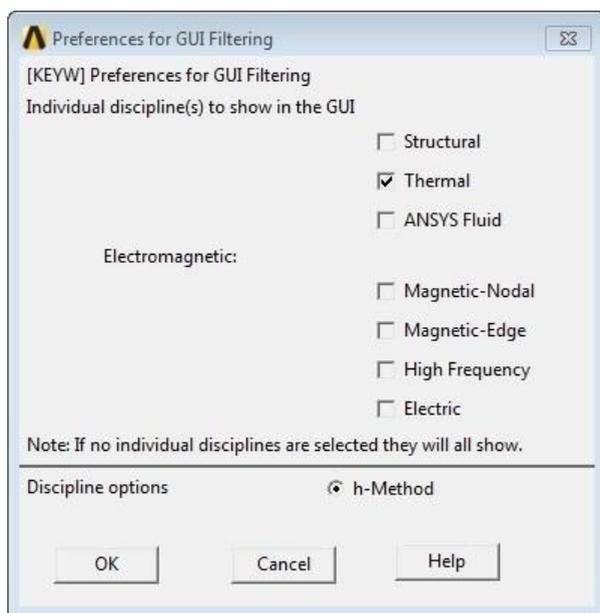


Рис. 7.17. Меню ANSYS

4. Построение ключевых точек:

В **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create>Keypoints > In Active CS** задаем координаты X и Y для каждой ключевой точки и нажимаем **Apply**, номер точки вводить не обязательно, он будет предоставлен автоматически:

– для зеркала – точка 1 (0;0), точка 2 (0,75;-0,04), точка 3 (0,75;0,21), точка 4 (0;0,21);

– для корпуса – точка 5 (0,75;-0,04), точка 6 (0,75;-3,04), для крышки – точка 7 (0,75;-3,04), точка 8 (0;-3,04).

Точки, находящиеся на стыках разных элементов модели, а именно 2 и 5, а также 6 и 7 имеют одинаковые координаты, это необходимо для того чтобы в этих местах не было теплового контакта зеркало–корпус и корпус–крышка и теплообмен между ними осуществлялся только излучением (рис. 7.18).

5. Создание линий.

Для создания линий нужно выполнить: в **Main Menu > Preprocessor> Modeling > Create > Lines > Arcs > By End KPs & Rad.** В результате создаем дугу между точками 1 и 2 (рис. 7.19).



Рис. 7.18. Ключевые точки модели

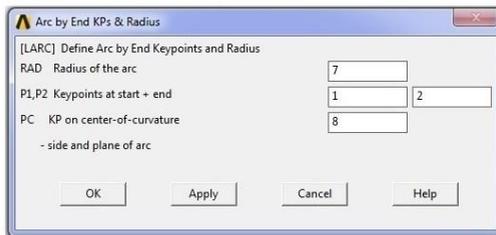
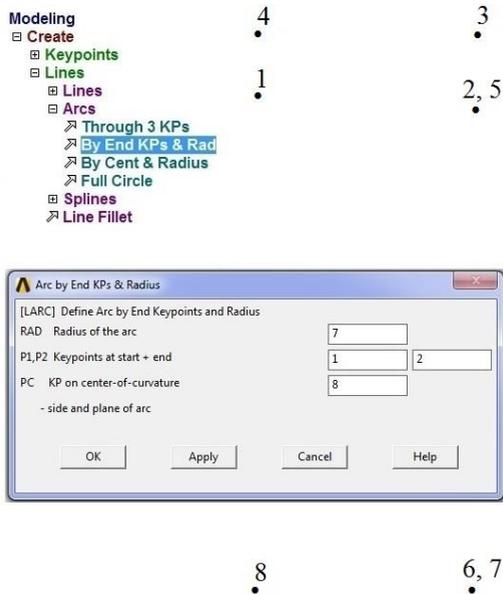


Рис. 7.19. Построение дуги

В **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Lines > Lines > Straight Line** зададим, остальные точки соединяем прямыми линиями в следующем порядке: 2–3, 3–4, 4–1, 6–5, 8–7 (рис. 7.20).



Рис. 7.20. Линии модели

6. Создание поверхностей.

Для создания поверхностей нужно выполнить: в **Main Menu > Preprocessor>Modeling > Create > Areas > Arbitrary > By Lines**, в результате создаем поверхность, образованную линиями 1, 2, 3, 4 (рис. 7.21)

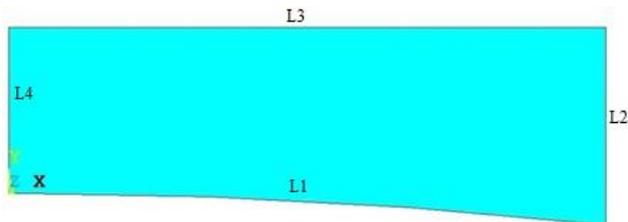


Рис. 7.21. Геометрическая модель зеркала

7. Сохраняем созданную геометрическую модель.

В **Toolbar > SAVE_DB**.

8. Задаем свойства материалов.

Задаем свойства материалов следующим образом: в **Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models**, в результате в окне справа выбираем **Thermal** и заполняем **Conductivity** (теплопроводность), **Specific Heat** (теплоемкость) **Density** (плотность) для ситалла. Аналогично задаем второй материал – углепластик. Дополни-

тельно необходимо задать третий материал, соответствующий крышке в открытом состоянии, например, тот же углепластик.

9. Задаем тип конечных элементов модели.

Задаем тип конечных элементов: в **Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add / Edit / Delete**. Далее нажимаем кнопку **Add** и в левом столбце выбираем в **Thermal Mass Solid**, а в правом **Quad 4 node 55** и нажимаем **OK**. В списке элементов появится элемент **PLANE55**, выделяем его и, нажав кнопку **Options**, указываем осесимметричность задачи: в **Element behavior – Axisymmetric**.

Кроме твердотельных 2D элементов, которыми будет разбита модель зеркала, необходимо задать линейные элементы, которыми будут разбиты корпус и крышка. Далее нажимаем кнопку **Add** и в левом столбце выбираем в **Thermal Mass Link**, а в правом **3D conduction 33**.

Также необходимо задать специальный тип элемента, ответственный за перенос излучения. Нажимаем кнопку **Add** и в левом столбце выбираем **Superelement**, а в правом **Superelement 50**. Затем для этого элемента нажимаем **Options** и выбираем в **Element behavior – Radiation substr**.

10. Задание размера элемента сетки.

Задание размера элемента сетки нужно выполнить в следующей последовательности: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > ManualSize > Global > Size**, в результате задаем размер конечного элемента для всей модели: в **Element edge length – 0.02**.

11. Разбиваем модель сеткой конечных элементов.

Для разбиения зеркала нужно выполнить: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas > Mapped > 3 or 4 sided**: мышью указываем на поверхность, представляющую зеркало, и нажимаем **OK**.

Разбиение корпуса: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attribs**, выбираем **Element type number – 2, Material number – 2**.

В **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Lines** отметим, мышью выделяем линию, представляющую корпус, и нажимаем **OK**.

Разбиение крышки: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Lines**: мышью выделяем линию, представляющую крышку, и нажимаем **OK**.

В результате полученная сетка должна выглядеть, как на рис. 7.22.



Рис. 7.22. Сетка конечных элементов

12. Дополнительно нужно разбить излучающую поверхность зеркала.

Разбить излучающую поверхность зеркала нужно выбрать: в **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attribs**; в **Element type number – 2, Material number – 1**; в **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Elements > Surf / Contact>Surf Effect > Generl Surface > No extra Node**.

Выбрать узлы, образующие переднюю поверхность зеркала (рис. 7.23), и нажать **ОК**.

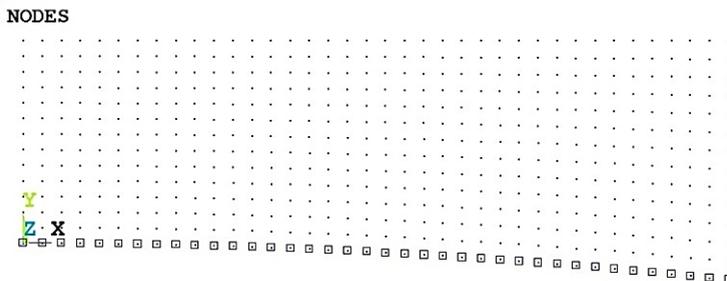


Рис. 7.23. Построение элементов излучения на оптической поверхности зеркала

13. Создание матрицы излучения.

В данной задаче необходимо создать две матрицы излучения: для закрытой и открытой крышки.

Выделяем узлы и элементы, принадлежащие излучающим поверхностям:

В **Utility Menu > Select > Entities**, далее в верхнем поле выбираем **Elements**, в нижнем **By Attributes**, ниже указываем **Elem type num – 2** и нажимаем **Apply**. Далее в верхнем поле выбираем **Nodes**, в нижнем **Attached to**, ниже указываем **Elements** и нажимаем **OK**. Результат показан на рис. 7.24.



Рис. 7.24. Элементы излучения модели

Далее задаем степени черноты материалов:

В **Main Menu > Radiation Opt > Matrix Method > Emissivities**: для материала 1 ставим 0,2 и нажимаем **Apply**, для материала 2 – 0,9 и нажимаем **OK**.

Задаем остальные свойства матрицы излучений:

В **Main Menu > Radiation Opt > Matrix Method > Other settings**: Постоянная Стефана-Больцмана – $5,67 \cdot 10^{-8}$, тип геометрии – 2D, **No of division** – 90.

Запись матрицы излучений в файл в **Main Menu > Radiation Opt > Matrix Method > Write matrix**: задаем **Type of procedure** – **Hidden**, **Number of sampling zones** – 500, **Name of matrix file** – Matrix_close и нажимаем **OK**, файл с данным именем появится в рабочей папке.

Далее меняем материал элементов крышки со 2 на 3: в **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Move / Modify > Elements >**

Modify Attrib: Мышью выделяем элементы, образующие крышку, и нажимаем **ОК**. Далее указываем следующие параметры: **Attribute to change** – **Material**, **New attribute number** – 3.

Далее аналогично строим еще одну матрицу, указывая для крышки степень черноты равную 1 и имя матрицы **Matrix_open**.

14. Создание таблиц с граничными условиями.

Поскольку в данной задаче на корпусе заданы нестационарные граничные условия, необходимо создать специальную таблицу, содержащую изменение температуры корпуса от времени.

В **Utility Menu > Parameters > Array Parameters > Define / Edit:** Далее нажимаем **Add** и задаем параметры таблицы корпуса: **Parameter name** – **Temp_body**, **Parameter type** – **Table**, **I** – 45, **Row variable** – **time**.

Далее, выделив таблицу **Temp_body**, нажимаем **Edit** и заполняем таблицу в соответствии с Приложением 3 (рис. 7.25).

15. Считывание матрицы излучений из файла.

Для считывания матрицы излучений нужно выполнить:

В **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attribs**, выбираем **Element type number** – 3.

В **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Elements > Superelem > From .SUB File:** в поле **Jobname of matrix file** указываем имя файла **Matrix_close**.

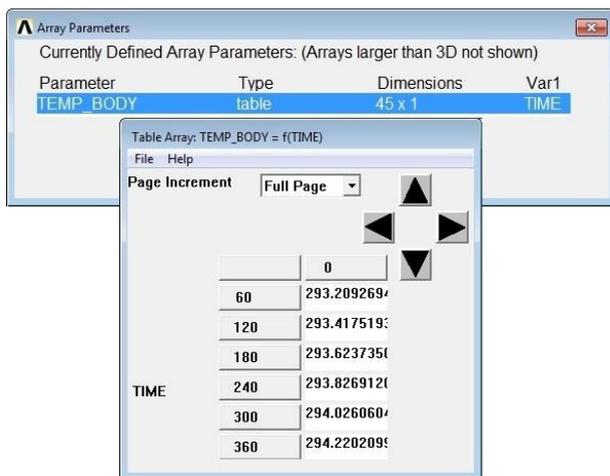


Рис. 7.25. Создание таблицы данных, содержащей нестационарные граничные условия

16. Задаем свойства решения.

Задаем свойства решения следующим образом:

В **Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis**: задаем **Transient** (нестационарный анализ).

В **Main Menu > Solution > Define Loads > Settings > Uniform Temp**: задаем начальную однородную температуру для всей модели **Uniform temperature – 293**.

В **Main Menu > Solution > Load Step Opts > Time/Frequenc > Time – Time Step**: задаем расчетное время и шаг по времени: **Time at the end of load step – 1500, Time step size – 60, Stepped or ramped b.c. – Stepped**.

17. Задаем граничные условия.

На корпусе объектива.

В **Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Thermal > Temperature > On Lines**. Далее выделяем линию 5, нажимаем **Apply** и указываем следующие параметры: **DOF to be constrained – TEMP, Apply as – Existing Table, Load TEMP Value – Temp_body**.

На крышке объектива.

В **Main Menu>Solution > Define Loads > Apply > Thermal > Temperature > On Lines**: Далее выделяем линию 6, нажимаем **Apply** и указываем следующие параметры: **DOF to be constrained – TEMP, Apply as – Constant value, Load TEMP Value – 293**.

18. Сохраняем созданную конечно-элементную модель:

В **Toolbar > SAVE_DB**.

19. Запуск на решение.

Перед решением необходимо удалить все поверхностные элементы типа 2:

В **Utility Menu > Select > Entities**, далее в верхнем поле выбираем **Elements**, в нижнем **By Attributes**, ниже указываем **Elem type num – 2** и нажимаем **Apply** – выделяем элементы типа 2.

В **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Delete > Elements**: Нажимаем **Pick All** – удаляем эти элементы.

В **Utility Menu > Select > Everything** – выделяем оставшуюся модель.

В **Main Menu > Solution > Solve > Current LS**: Запускаем задачу на решение.

После окончания расчета появляется окно **Solution is done**.

20. Меняем матрицу излучения, соответствующую закрытой крышке объектива, на матрицу, соответствующую открытой крышке.

Следующим образом: в **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Delete > Elements**: в окне вводим номер элемента – 721 (рис. 7.26) и нажимаем **ОК**.

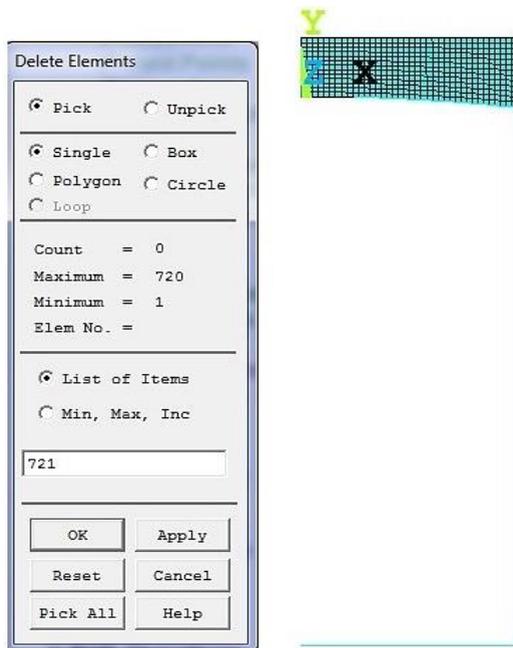


Рис. 7.26. Удаление матрицы излучения

Считываем другую матрицу излучения:

В **Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attribs**, выбираем **Element type number – 3**.

В **Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Elements > Superelem > From .SUB File**: в поле **Jobname of matrix file** указываем имя файла **Matrix_open**.

В **Main Menu > Preprocessor > Numbering Ctrl's > Compress Numbers**: сжимаем нумерацию объектов – в раскрывающемся меню выбираем **All** и нажимаем **ОК**.

21. Задаем свойства нового решения.

Последовательно:

В **Main Menu > Solution > Analysis Type > Restart**: задаем продолжение решения **Load Step Number – 1, Sub Step Number – 25** и нажимаем **ОК**.

В **Main Menu > Solution > Load Step Opts > Time/Frequenc > Time – Time Step**: задаем расчетное время и шаг по времени: **Time at the end of load step – 2700, Time step size – 60, Stepped or ramped b.c. – Stepped.**

22. Задаем новые граничные условия на крышку.

Для этого выполним: в **Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Thermal > Temperature > On Lines**: Далее выделяем линию 6, нажимаем **Apply** и указываем следующие параметры: **DOF to be constrained – TEMP, Apply as – Constant value, Load TEMP Value – 251** (данная температура соответствует тепловому потоку, падающему на входной зрачок объектива при открытой крышке).

23. Запускаем продолжение решения.

Далее аналогично запускаем решение и ждем окончания счета.

24. Просмотр полученного решения.

Просмотр температурного поля в заданный момент времени:

В **Main Menu > General PostProc > Read Results>Last set**: Считывание результатов для последнего момента времени.

В **Main Menu > General Postproc > Plot Results > Contour Plot > Nodal Solu**: Далее выбрать **DOF Solution > Nodal Temperature** – построение распределения температуры для заданного момента времени (рис. 7.27).

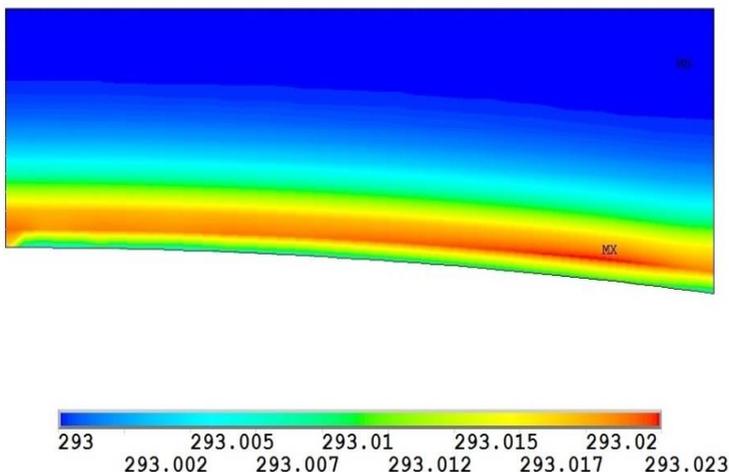


Рис. 7.27. Температурное поле зеркала в последний момент времени

Из приведенных результатов (рис. 7.27) видно, что для конечного момента времени изменение температуры главного зеркала относительно начальной температуры составляет 0,023 К, причем температура задней поверхности зеркала остается постоянной, поскольку она теплоизолирована по условию задачи. Такое малое изменение температуры объясняется низкой степенью черноты оптической поверхности главного зеркала. Данное изменение температуры зеркала связано в основном с осевым перепадом температуры, а радиальный перепад стремится к нулю.

Для просмотра зависимости температуры в точке от времени выполним: в **Main Menu > Time HistPostPro**. Далее нажимаем **Add Data**, выбираем **Nodal Solution > DOF Solution > Nodal Temperature** и нажимаем **OK**. Далее выбираем в графическом окне узел, соответствующий центру оптической поверхности зеркала и нажимаем **OK**, в окне обозревателя появится новая переменная. Выделив ее и нажав кнопку **Graph Data**, получим графическую зависимость температуры центра оптической поверхности зеркала от времени (рис. 7.28).

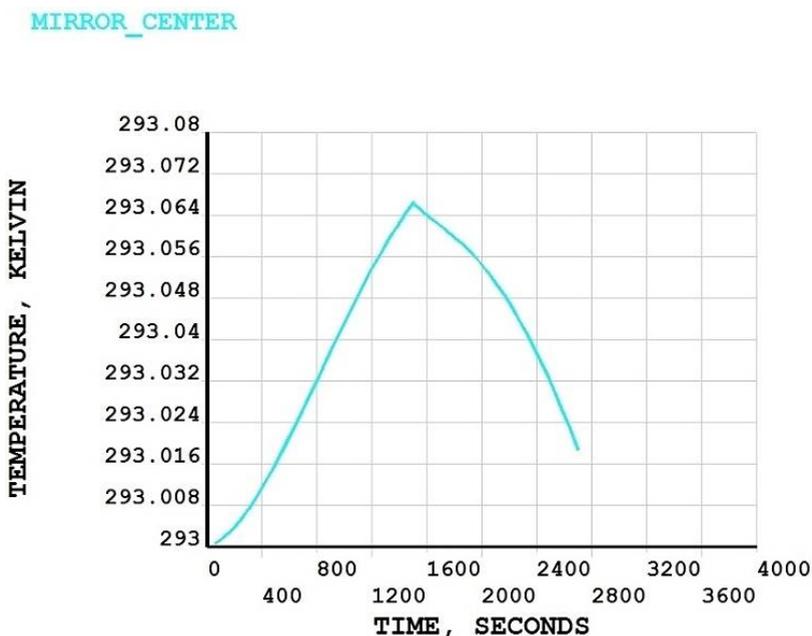


Рис. 7.28. Зависимость температуры центра оптической поверхности зеркала от времени

Как видно из приведенных результатов (рис. 7.28), температура центра оптической поверхности главного зеркала сначала возрастает до 293,067 К, а затем с момента времени 1500 секунд начинает убывать, что связано с моментом открытия крышки объектива. За 20 минут с открытой крышкой температура центра оптической поверхности главного зеркала снижается до 293,019 К, что объясняется отрицательным энергетическим балансом главного зеркала – при открытой крышке объектива главное зеркало излучает больше, чем поглощает.

Аналогично можно выделить несколько переменных и построить их на одном графике, так на рис. 7.29 приведены зависимости температуры от времени для корпуса и крышки.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 7.29, соответствуют граничным условиям для корпуса и крышки объектива и приведены для самопроверки.

BODY
COVER

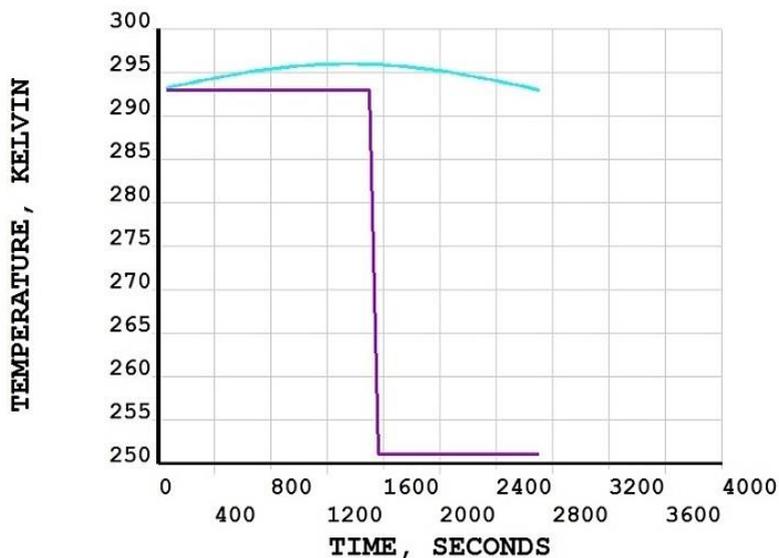


Рис. 7.29. Зависимости температур корпуса и крышки от времени

Таким образом, решена задача внутреннего теплообмена объектива спутника в двумерной постановке с учетом тепловых воздействий условий эксплуатации. В результате расчета получена динамика температурного поля главного зеркала объектива при воздействии условий эксплуатации, в частности при открытии крышки объектива. Приведено поле температуры главного зеркала для заданного момента времени, а также временные зависимости температур элементов объектива – главного зеркала, корпуса объектива и крышки объектива.

Комбинируя приведенные здесь подходы, можно решать задачи практически любой сложности, совмещающие внутренний и внешний теплообмен.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. *Определить температурное поле главного зеркала объектива с длиной корпусной части 5000 мм. Принять, что температура на корпусе меняется по синусоидальному закону. Все параметры задачи взять из базового примера.*

Задача 2. *Определить минимальную температуру главного зеркала при постоянно открытой крышке. Параметры задачи взять из базового примера.*

Задача 3. *Определить температурное поле главного зеркала объектива и найти его минимальную температуру, с учетом того, что температура на корпусе постоянна и равна 292 К. Остальные параметры задачи взять из базового примера.*

Задача 4. *Определить температурное поле главного зеркала объектива микроспутника со следующими размерами: световой диаметр главного зеркала 100 мм, кривизна оптической поверхности 500 мм, толщина главного зеркала 15 мм, длина корпусной части 300 мм. Остальные параметры задачи взять из базового примера.*

Задача 5. *Определить температурное поле главного зеркала объектива и найти его максимальную и минимальную температуры при условии, что крышка постоянно закрыта, а температура на корпусе меняется по синусоидальному закону с амплитудой 5К. Остальные параметры задачи взять из базового примера.*

Библиографический список к главе 7

1. Цаплин С.В., Болычев С.А., Парахина Е.В. Расчет теплового режима термостабилизированной платформы чувствительных элементов космического аппарата // V Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях. (NPNJ-2004), 5-8 июля 2004, Самара.
2. Болычев С.А., Цаплин С.В. Исследование терморасстраиваемости платформы чувствительных элементов космического аппарата под действием внешних и внутренних источников тепла // XXVII Российская школа, посвященная 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра «КБ им. академика В.П. Макеева», 26-28 июня 2007, Миасс.
3. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование влияния тепловых факторов космического пространства на оптические характеристики линзового телескопа космического аппарата // Вестник СамГУ. 2013. №3. С. 97-106.
4. Болычев С.А., Цаплин С.В. Разработка программно-методического обеспечения по исследованию влияния условий эксплуатации космической телескопической системы на разрешающую способность // XXVII Российская школа, посвященная 150-летию К.Э. Циолковского, 100-летию С.П. Королева и 60-летию Государственного ракетного центра «КБ им. академика В.П. Макеева», 26-28 июня 2007, Миасс.
5. Болычев С.А., Цаплин С.В. Математическое моделирование температурных полей оптической системы «Карат» космического аппарата: сб. тр. // Международная конференция «Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках», 2-5 сентября 2008, г. Самара. С. 56-67.
6. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование температурного поля оптико-электронного телескопического комплекса космического аппарата: сб. материалов // Всероссийская научно-техническая конференция, посвящ. 50-летию образования ЦСКБ и 90-летию со дня рождения Д.И. Козлова. 28 сентября–3 октября 2009, ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ–Прогресс». Самара, 2009. С. 125-130.

7. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование температурных полей телескопа при воздействии условий эксплуатации КА // Международная конференция «Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках», 27-30 июня 2011, г. Самара.
8. Цаплин С.В., Болычев С.А. Моделирование прецизионной системы управления температурными полями оптико-электронного телескопического комплекса космического аппарата: сб. тр. // II Всероссийская научно-практическая конференция «Системы обеспечения тепловых режимов преобразователей энергии и системы транспортировки теплоты». 8-10 декабря 2010, г. Махачкала.
9. Цаплин С.В., Болычев С.А. Система обеспечения теплового режима экспериментальной модели оптико-телескопического комплекса космического аппарата // Всероссийская конференция «Актуальные проблемы математики и механики», посвящ. 75-летию Г.И. Быковцева, Самара, 18-21 апреля 2013 г.
10. Цаплин С.В., Болычев С.А. Исследование теплового режима линзового телескопа космического аппарата // Восемнадцатая Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013), Алушта, 22-31 мая 2013 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теплофизические свойства материалов

Свойства материала	Материал	
	Ситалл СО-115М	Углепластик КМУ-4Л
Плотность, кг/м ³	2460	1500
Теплоемкость, Дж/кг·К	920	850
Теплопроводность, Вт/м·К	1,18	0,8

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Тепловые потоки на внешние поверхности спутника

Время	Номер поверхности					
	1	2	3	4	5	6
0	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
45	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
90	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
135	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
180	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
225	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
270	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
315	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
360	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
405	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
450	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
495	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
540	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
585	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
630	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
675	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
720	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
765	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
810	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
855	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
900	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
945	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
990	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
1035	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
1080	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
1125	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69

1170	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
1215	79,69	1046	0	750,6	79,69	923,9
1260	79,69	1069	0	722	79,69	922,4
1305	79,69	1091	0	692,1	79,69	921
1350	79,69	1110	0	661	79,71	919,8
1395	79,69	1127	0	628,9	79,74	918,6
1440	79,69	1142	0	595,8	79,81	917,6
1485	79,69	1154	0	561,7	79,92	916,6
1530	79,7	1164	0	526,9	80,12	915,8
1575	79,71	1172	0	491,3	80,42	915
1620	79,75	1177	0	455,2	80,88	914,3
1665	79,8	1179	0	418,5	81,55	913,7
1710	79,91	1179	0	381,5	82,51	913,2
1755	80,08	1176	0	344,4	83,85	912,8
1800	80,37	1171	0	307,4	85,69	912,4
1845	80,86	1164	0	270,9	88,12	912,2
1890	81,63	1154	0	235,3	91,19	912,3
1935	82,76	1143	0	200,6	94,68	912,7
1980	84,3	1129	37,39	205,8	98,56	913,5
2025	86,24	1113	76,23	213,6	102,8	914,8
2070	88,75	1095	114,9	222,5	107,2	916,7
2115	91,79	1075	153,3	232,1	111,7	919,2
2160	95,26	1053	191,3	242	116,3	922,2
2205	99,06	1029	228,9	252,2	120,9	925,6
2250	103,1	1003	266	262,4	125,4	929,1
2295	107,3	975,4	302,5	272,6	129,9	932,8
2340	111,5	945,4	338,3	282,7	134,2	936,6
2385	115,8	913,3	373,3	292,6	138,5	940,3
2430	120,1	879,2	407,5	302,3	142,7	944
2475	124,3	843,1	440,7	311,8	146,8	947,5

Продолжение прил. 2

2520	128,5	805,2	473	321	150,7	950,8
2565	132,6	765,4	504,1	329,9	154,5	954
2610	136,5	723,9	534,1	338,5	158,2	957
2655	140,4	680,7	562,9	346,7	161,7	959,8
2700	144,1	635,9	590,4	354,6	165,1	962,2
2745	147,6	589,6	616,6	362	168,3	964,5
2790	151	542	641,3	369,1	171,3	966,4
2835	154,2	493,1	664,6	375,8	174,2	968,1
2880	157,3	443,1	686,3	382	176,9	969,4
2925	160,2	392,1	706,5	387,8	179,4	970,4
2970	162,8	340,1	725,1	393,1	181,7	971,1
3015	214	287,3	742	397,9	183,7	971,5
3060	272,1	234	757,3	402,3	185,6	971,5
3105	330	180	770,8	406,2	187,3	971,1
3150	387,6	171,6	782,5	409,5	188,8	970,4
3195	444,8	173,3	792,4	412,4	190	969,3
3240	501,4	174,8	800,6	414,7	191	967,8
3285	557,3	176	806,9	416,5	191,8	965,9
3330	612,4	177	811,4	417,8	192,4	963,6
3375	666,4	177,8	814	418,5	192,7	961
3420	719,3	178,4	814,8	418,8	192,8	957,9
3465	771	178,8	813,7	418,4	192,7	954,4
3510	821,3	178,9	810,7	417,6	192,4	950,5
3555	870,1	178,8	805,9	416,2	191,8	946,2
3600	917,3	178,4	799,2	414,3	191	941,6
3645	962,7	177,9	790,8	411,9	190	936,5
3690	1006	177,1	780,5	408,9	188,8	931
3735	1048	176,1	768,4	405,5	187,4	925,1
3780	1087	174,8	754,6	401,5	185,7	918,8
3825	1125	173,4	739,1	397,1	183,8	912,1

Продолжение прил. 2

3870	1160	171,7	721,8	392,2	181,7	905
3915	1193	169,8	702,9	386,8	179,5	897,6
3960	1223	167,7	682,5	380,9	177	889,8
4005	1251	165,4	660,4	374,6	174,3	881,6
4050	1276	163	636,9	367,9	171,5	873,1
4095	1298	160,3	611,9	360,7	168,4	864,3
4140	1318	157,4	585,5	353,1	165,2	855,1
4185	1335	154,4	557,7	345,2	161,9	845,6
4230	1349	151,1	528,7	336,9	158,3	835,8
4275	1360	147,8	498,5	328,3	154,7	825,7
4320	1369	144,2	467,1	319,3	150,9	815,4
4365	1374	140,5	434,7	310	146,9	804,8
4410	1376	136,7	401,3	300,5	142,8	794
4455	1376	132,8	366,9	290,8	138,7	783
4500	1372	128,7	331,7	280,8	134,4	771,9
4545	1365	124,5	295,8	270,7	130	760,7
4590	1356	120,3	259,2	260,5	125,6	749,6
4635	1343	116	222	250,3	121	738,4
4680	1328	111,7	184,3	240,2	116,5	727,5
4725	1310	107,4	146,2	230,3	111,8	716,8
4770	1289	103,2	107,7	220,8	107,3	706,5
4815	1265	99,22	68,97	212,1	102,8	696,8
4860	1239	95,52	30,1	204,5	98,46	687,6
4905	1211	92,17	0	207	94,49	678,7
4950	1180	89,2	0	241,9	90,91	670,2
4995	1147	86,65	0	277,7	87,83	662
5040	1112	84,65	0	314,4	85,42	654
5085	1075	83,13	0	351,4	83,62	646,1
5130	1037	82,03	0	388,6	82,33	638,2
5175	995,7	81,24	0	425,5	81,41	630,4

Окончание прил. 2

5220	952,9	80,68	0	462,1	80,78	622,7
5265	908,1	80,3	0	498,2	80,35	614,9
5310	861,3	80,05	0	533,7	80,07	607,2
5355	812,8	79,89	0	568,4	79,9	599,6
5400	762,4	79,79	0	602,3	79,79	592,1
5445	710,5	79,73	0	635,3	79,73	584,6
5490	656,9	79,7	0	667,2	79,7	577,1
5535	601,9	79,69	0	698,1	79,69	569,8
5580	545,6	79,69	0	727,8	79,69	562,5
5625	488	79,69	0	756,2	79,69	555,3
5670	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
5715	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
5760	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
5805	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
5850	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
5895	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69
5940	79,69	79,69	0	185,6	79,69	79,69

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Температура корпуса объектива

Время	Температура
0	293
60	293,20927
120	293,41752
180	293,62374
240	293,82691
300	294,02606
360	294,22021
420	294,40841
480	294,58976
540	294,76336
600	294,92836
660	295,08398
720	295,22943
780	295,36403
840	295,48711
900	295,59808
960	295,69638
1020	295,78155
1080	295,85317
1140	295,91089
1200	295,95442
1260	295,98357
1320	295,99817
1380	295,99817
1440	295,98357
1500	295,95442
1560	295,91089
1620	295,85317

1680	295,78155
1740	295,69638
1800	295,59808
1860	295,48711
1920	295,36403
1980	295,22943
2040	295,08398
2100	294,92836
2160	294,76336
2220	294,58976
2280	294,40841
2340	294,22021
2400	294,02606
2460	293,82691
2520	293,62374
2580	293,41752
2640	293,20927
2700	293

Учебное издание

*Цаплин Сергей Васильевич,
Тюлевин Сергей Викторович,
Большачев Станислав Александрович,
Романов Алексей Евгеньевич*

**ОСНОВЫ ТЕПЛООБМЕНА
В КОСМИЧЕСКОМ ПРИБОРОСТРОЕНИИ**

Учебное пособие

Редактор Т.К. Кретинина
Компьютерная вёрстка И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 10.01.2019. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 18,75.

Тираж 80 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

