МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

О.В. ВИДИЛИНА, Н.В. ВОРОПАЕВА, В.А. СОБОЛЕВ

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

САМАРА

Издательство Самарского университета
2023

УДК 517.97(075)
ББК В161.8я7
В421

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. О.В. Осипов;
д-р физ.-мат. наук, проф. С.Я. Новиков

Видилина, Ольга Викторовна
В421 **Основы вариационного исчисления**: учебное пособие / *О.В. Видилина, Н.В. Воропаева, В.А. Соболев.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 64 с.

ISBN 978-5-7883-1904-9

Учебное пособие охватывает основные разделы курса «Вариационное исчисление и методы оптимизации», а также ряд междисциплинарных вопросов математического и функционального анализа. Создано на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий.

Предназначено для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Пособие будет полезным для сопровождения лекционного курса при любой форме обучения, а также может быть использовано для самостоятельного изучения.

УДК 517.97(075)
ББК В161.8я7

ISBN 978-5-7883-1904-9

Учебное издание

Видилина Ольга Викторовна,
Воропаева Наталия Владимировна,
Соболев Владимир Андреевич

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка издательства Самарского университета

Подписано в печать 23.05.2023. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,0. Тираж 27 экз. Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что проблемы оптимизации возникают при решении задач их различных областей естествознания и техники, социальных наук и экономики.

Настоящее учебное пособие посвящено изучению основ вариационного исчисления – раздела математики, в котором рассматриваются задачи отыскания минимума (максимума) функционалов, и определения функций (кривых), на которых достигаются эти минимумы (максимумы).

Вариационное исчисление является естественным развитием области математического анализа, посвященной отысканию экстремумов функций.

Постановки задач, приводящих к поиску максимума или минимума некоторого функционала можно встретить еще в древней истории. Примером такой задачи является известная задача Дидоны, которая может быть формализована следующим образом: "Найти такую кривую заданной длины, которая ограничивает на плоскости фигуру наибольшей площади".

Можно привести множество примеров физических задач, приводящих к необходимости отыскания экстремумов функционалов (задача о преломлении света, задача о минимальной поверхности вращения, задача о геодезических линиях и др.) см., например, [1] - [6].

Рождение вариационного исчисления связывают с публикацией И. Бернулли в 1669 году задачи о брахистохроне: Из всех линий, соединяющих две данные точки A и B, не лежащие на одной вертикали, требуется найти ту кривую, по которой материальная точка переместится из точки A в точку B под действием силы тяжести за кратчайшее время. Решения этой задачи были предложены видными математиками того времени Я. Бернулли, И. Ньютоном, Г. Лопиталем. Искомой кривой оказалась циклоида.

Значительный вклад в формирование вариационного исчисления как раздела математики в XVIII веке внесли Л. Эйлер и Ж. Лагранж. Они впервые предложили общий метод решения различных типов вариационных задач.

Вариационное исчисление тесно связано с различными проблемами механики и физики. Со второй половины XIX века начали развиваться вариационные принципы в механике сплошных сред, в квантовой механике, электродинамике и т.д.

В XIX веке к проблемам вариационного исчисления обращались А.М. Лежандр, О.Л. Коши, К.Г.Я. Якоби, К.Ф. Гаусс, С.Д. Пуассон, М.В. Остроградский и др. Наиболее полное решение основных задач вариационного исчисления были предложено К. Вейерштрассом и Д. Гильбертом.

Со временем появились новые классы задач, превративших вариационное исчисление в одну из наиболее объемных и динамично развивающихся областей современной математики, включающей в себя с одной стороны абстрактные разделы на стыке топологии и функционального анализа, а с другой стороны методы решения прикладных задач из различных областей науки, техники, экономики.

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий. Оно охватывает основные разделы курса «Вариационное исчисление и методы оптимизации», а также ряд междисциплинарных вопросов математического и функционального анализа. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и направления подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

Учебное пособие состоит из трех глав.

В первой главе излагаются базовые понятия функционального анализа, связанные с дифференциальным исчислением в нормированных функциональных пространствах, вводятся ключевые понятия и приводятся основные леммы вариационного исчисления.

Во второй главе прежде всего рассмотрена простейшая задача вариационного исчисления, состоящая в отыскании экстремума интегрального функционала, действующего на пространстве достаточно гладких функций с фиксированными значениями на концах рассматриваемого промежутка. Выводятся необходимые условия экстремума функционала, которые сводятся к решению краевой задачи для уравнения Эйлера. Рассматриваются частные случаи, в которых уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах. Обсуждаются достаточные условия экстремума интегрального функционала. Полученные результаты распространяются на естественные обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.

В третьей главе подход, изложенный во второй главе, распространяется на задачи отыскания экстремума функционала с подвижными границами, действующего на пространстве достаточно гладких функций, значения которых на концах рассматриваемого промежутка не фиксированы.

Понятия, определения и подробные доказательства иллюстрируются многочисленными примерами. Для более глубокого изучения и закрепления материала предложены задачи.

Учебное пособие может быть полезным для сопровождения курса лекций как в очном так и в дистанционном форматах, а также для самостоятельного изучения.

Материал учебного пособия также может быть полезен магистрам, аспирантам и специалистам в области математического моделирования, математики и механики.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Нормированные и метрические пространства

Определение 1 *Линейное пространство X называется нормированным, если на X задана скалярная функция $\|.\| : X \to \mathbf{R}$, называемая нормой, удовлетворяющая аксиомам:*

1. $\|x\| \geq 0$ *для любого* $x \in X$ *и* $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *для дюбых* $x \in X, \alpha \in \mathbf{R}$;
3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ *для дюбых* $x_1, x_2 \in X$.

Определение 2 *Пространство Y называется метрическим, если для любых $x_1, x_2 \in Y$ задана скалярная функция $\rho(x_1, x_2)$, называемая метрикой (расстоянием), удовлетворяющая аксиомам:*

1. $\rho(x_1, x_2) \geq 0$ *для любых* $x_1, x_2 \in Y$ *и*
   $\rho(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$;
2. $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ *для любых* $x_1, x_2 \in Y$;
3. $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)$ *для любых* $x_1, x_2, x_3 \in Y$.

Линейное нормированное пространство X является метрическим с метрикой $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$.

Определение 3 *Полное относительно указанной метрики линейное нормированное пространство называется банаховым.*

Пример 1 Пространство $\mathbf{R}^n$ векторов $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ с нормой

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2}$$

является банаховым.

Пример 2 Пространство $C[a, b]$ функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|f\|_C = \max_{[a,b]} |f(x)|$$

является банаховым.

Пример 3 Пространство $C^1[a, b]$ функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, с нормой

$$\|f\|_{C^1} = \max_{[a,b]} \{|f(x)| + |f'(x)|\}$$

является банаховым.

1.2 Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $U \subset X$ – некоторая окрестность точки $x \in X$, отображение $F : U \to Y$.

Определение 4 *Если для любого $h \in X$ существует предел*

$$\delta F(x,h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{F(x+\alpha h) - F(x)}{\alpha},$$

то отображение $\delta F(x,h)$ называется первой вариацией Лагранжа отображения F в точке x.

Определение 5 *Если отображение F имеет в точке x первую вариацию Лагранжа и существует линейный непрерывный оператор $\Lambda : X \to Y$ такой, что $\delta F(x,h) = \Lambda h$, то оператор Λ называется производной Гато (слабой производной) отображения F в точке x и обозначается $F'_\Gamma(x)$.*

Определение 6 *Отображение F называется дифференцируемым по Фреше в точке x, если в окрестности точки x можно записать соотношение*

$$F(x+h) = F(x) + \Lambda h + o(\|h\|),$$

или

$$F(x+h) = F(x) + \Lambda h + \alpha(h)\|h\|, \qquad \lim_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = 0.$$

Оператор Λ называется производной Фреше (сильной производной) отображения F в точке x и обозначается $F'(x)$.

Производная Фреше (Гато) по определению есть линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y. Результат действия этого оператора на элемент $h \in X$ называется дифференциалом Фреше (Гато) отображения F в точке x и обозначается $F'(x)[h]$.

Из приведенных определений вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 1 Если отображение F сильно дифференцируемо в точке x, то оно непрерывно в этой точке.

Теорема 2 Между определениями 4 – 6 действуют соотношения: $6 \Rightarrow 5, \quad 5 \Rightarrow 4$.

Можно привести контрпримеры, иллюстрирующие тот факт, что ни одно из утверждений теоремы 2 не может быть обращено [1].

1.3 Функционалы и их вариации

Определение 7 *Функционалом называется отображение* $J : V \to \mathbf{R}$*, действующее из некоторого пространства* V *в множество действительных чисел.*

Нас будут интересовать случай, когда областью определения функционала является некоторое множество функций V(*множество допустимых функций*). Допустимые функции будем в дальнейшем называть точками.

Рассмотрим примеры функционалов.

Пример 4 Пусть V – произвольное множество функций $y(x)$, определенных на промежутке $[0,1]$. Функционал $J[y]$ можно задать формулой $J[y] = y(0)$.

Пример 5 Интеграл

$$J[y] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

задающий длину кривой, представляет собой функционал, заданный на множестве $V = C^1[a, b]$.

Замечание 1 Для упрощения записи, как и в примере 5, будем в дальнейшем опускать аргумент у подынтегральной функции.

Область определения V функционала может иметь различную структуру. Будем предполагать в дальнейшем, что V – линейное нормированное пространство.

Определение 8 *Если функционал $J[y]$ представляет собой линейную форму, т.е. для любых $y_1, y_2 \in V$ и произвольных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ выполнено соотношение*

$$J[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 J[y_1] + \alpha_2 J[y_2],$$

то он называется линейным функционалом.

Определение 9 *Функционал $J[y]$, определенный на линейном нормированном пространстве V, называется непрерывным в точке $y_0 \in V$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой точки y, принадлежащей $\delta-$окрестности точки y_0, т.е. удовлетворяющей условию $\|y - y_0\| < \delta$, справедливо неравенство $|J[y] - J[y_0]| < \varepsilon$.*

Определение 10 *Выберем некоторую функцию $y_0(x) \in V$. Пусть $z(x)$ – произвольная функция из V. Вариацией функции $y_0(x)$ будем называть разность $\delta y_0(x) = z(x) - y_0(x)$.*

Замечание 2 Подчеркнем отличие понятия вариации от приращения функции в точке. Приращение функции в точке x_0 есть число, равное разности двух значений функции, а вариация - это функция, равная разности двух функций.

Для заданного функционала $J[y]$ с областью определения V и выбранной функции $y(x) \in V$ будем называть вариацию δy *допустимой вариацией*, если $y + \delta y \in V$.

Замечание 3 Для дифференцируемых функций следует различать производную вариации $\delta y' = (\delta y)'$ и вариацию производной $\delta(y')$.

Рассмотрим приращение функционала $J[y]$, определенного на линейном нормированном пространстве V, в точке y, соответствующее вариации δy

$$\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]. \tag{1.1}$$

Если это приращение можно представить в виде суммы

$$\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y] = J_1[y, \delta y] + o(\delta y), \tag{1.2}$$

где $J_1[y, \delta y]$ - функционал, линейный относительно δy, а

$$\frac{|o(\delta y)|}{\|\delta y\|} \to 0$$

при $\|\delta y\| \to 0$, то функционал $J[y]$ называют *дифференцируемым* в точке y, а линейный функционал $J_1[y, \delta y]$ – *сильным дифференциалом (дифференциалом Фреше).*

Определение 11 *Первой вариацией $\delta J[y, \delta y]$ функционала J в точке y называют функционал*

$$\delta J[y, \delta y] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J[y + \alpha\delta y] - J[y]}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] \Big|_{\alpha=0}, \tag{1.3}$$

который каждой вариации δy ставит в соответствие число. Если этот функционал линеен по δy, то его называют слабым дифференциалом (дифференциалом Гато) в точке y.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3 Если функционал $J[y]$ дифференцируем в точке y, то его дифференциал Гато в точке y существует и совпадает с дифференциалом Фреше.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Возьмем произвольную допустимую вариацию δy в точке y и вычислим первую вариацию функционала $J[y]$

$$\delta J[y, \delta y] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J[y + \alpha \delta y] - J[y]}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J_1[y, \alpha \delta y] + o(\alpha \delta y)}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha J_1[y, \delta y]}{\alpha} = J_1[y, \delta y]. \tag{1.4}$$

При этом учтена дифференцируемость функционала $J[y]$, линейность функционала $J_1[y, \delta y]$ относительно δy и следующий предельный переход

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{|o(\alpha \delta y)|}{\alpha} = \|\delta y\| \lim_{\alpha \to 0} \frac{|o(\alpha \delta y)|}{\|\alpha \delta y\|} = \|\delta y\| \cdot 0 = 0,$$

т. к. $\|\alpha \delta y\| = |\alpha| \|\delta y\| \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Доказанное равенство (1.4) показывает, что первая вариация $\delta J[y, \delta y]$ дифференцируемого функционала представляет собой функционал, линейный по δy, а значит, по определению, этот функционал и есть дифференциал Гато, который совпал с дифференциалом Фреше.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 3, не верно: дифференциал Гато может существовать у недифференцируемого функционала [1].

В вариационном исчислении чаще всего встречаются функционалы, заданные с помощью интегралов, например

$$\int_a^b f(x, y, y') dx, \quad \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx,$$

$$\int\int_D f(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy.$$

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие вычисление вариаций функционалов.

Пример 6 Рассмотрим фенкционал $J[y] = \int\limits_a^b y dx$.
Вычислим приращение этого функционала

$$\Delta J = \int\limits_a^b (y + \delta y) dx - \int\limits_a^b y dx = \int\limits_a^b \delta y dx.$$

Функционал ΔJ линеен относительно δy. Следовательно $\delta J[y, \delta y] = \int\limits_a^b \delta y dx$.

Пример 7 Рассмотрим функционал $J[y] = \int\limits_a^b y^2 dx$.
Вычислим приращение этого функционала

$$\Delta J = \int\limits_a^b (y + \delta y)^2 dx - \int\limits_a^b y^2 dx = \int\limits_a^b 2y\delta y dx + \int\limits_a^b (\delta y)^2 dx.$$

Первый интеграл в правой части линеен относительно δy, для второго интеграла справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b (\delta y)^2 dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |\delta y|^2 \int\limits_a^b dx = (b - a)\|\delta y\|^2.$$

Учитывая, что $\|\delta y\|^2 = o(\|\delta y\|)$, имеем $\delta J[y, \delta y] = 2\int\limits_a^b y\delta y dx$.

Рассмотрим теперь интегральный функционал общего вида

$$J[y] = \int\limits_a^b f(x, y, y') dx, \tag{1.5}$$

заданный на линейном нормированном пространстве $C^1[a, b]$ с нормой $\|.\|_{C^1}$.

Предположим, что подынтегральная функция f – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных на ограниченном замкнутом множестве G в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Вычислим приращение этого функционала

$$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int\limits_a^b f(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx -$$

$$-\int\limits_a^b f(x,y,y')dx = \int\limits_a^b (f(x,y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y'))dx.$$

Применим к подынтегральной функции формулу Тейлора

$$f(x,y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y') = f'_y(x,y,y')\delta y + \\ +f'_{y'}(x,y,y')\delta y' + R(x,y,y',\delta y,\delta y'). \tag{1.6}$$

Здесь $R(x,y,y',\delta y,\delta y')$ – остаточный член в формуле Тейлора

$$R(x,y,y',\delta y,\delta y') = \frac{1}{2}f''_{yy}(x,y+\theta\delta y, y'+\theta\delta y')(\delta y)^2 + \\ +f''_{yy'}(x,y+\theta\delta y, y'+\theta\delta y')\delta y\delta y' + \\ +\frac{1}{2}f''_{y'y'}(x,y+\theta\delta y, y'+\theta\delta y')(\delta y')^2,$$

где $\theta \in (0,1)$, вообще говоря, зависит от переменной x.

Первые два слагаемых в правой части (1.6) представляют собой непрерывную функцию переменной x, а значит, $R(x,y,y',\delta y,\delta y')$ – также непрерывная, а значит, интегрируемая функция.

Оценим соответствующий интеграл, учитывая, что функция f и ее частные производные второго порядка непрерывны на ограниченном замкнутом множестве G в пространстве $\mathbf{R}^3$, а значит, ограничены.

$$|\int\limits_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')dx| \le$$

$$\leq \frac{N}{2}\int\limits_a^b(|\delta y|^2+2|\delta y||\delta y'|+|\delta y'|^2)dx \leq \frac{N}{2}(b-a)\|\delta y\|^2_{C^1}.$$

Здесь $N=\max\limits_G\{|f''_{yy}|,|f''_{yy'}|,|f''_{y'y'}|\}$. Следовательно

$$|\int\limits_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')dx| = o(\|\delta y\|_{C^1}).$$

А значит

$$\Delta J = \int\limits_a^b (f'_y(x,y,y')\delta y + f'_{y'}(x,y,y')\delta y')dx + o(\|\delta y\|_{C^1}). \qquad (1.7)$$

Проанализируем теперь второе слагаемое в (1.7). Так как $\delta y' dx = (\delta y)' dx = d(\delta y)$, то, интегрируя по частям

$$\int\limits_a^b f'_{y'}(x,y,y')\delta y' dx = \int\limits_a^b f'_{y'}(x,y,y')d(\delta y) =$$

$$= f'_{y'}(x,y,y')\delta y\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{dx}(f'_{y'}(x,y,y'))\delta y dx,$$

получаем следующее представление для приращения функционала

$$\Delta J = \int\limits_a^b (f'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}(f'_{y'}(x,y,y'))\delta y dx +$$

$$+ f'_{y'}(x,y,y')\delta y\,\Big|_a^b + o(\|\delta y\|_{C^1}). \qquad (1.8)$$

Первые два слагаемых представляют собой функционал, линейный относительно δy, а последнее слагаемое есть бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем δy

при $\delta y \to 0$. Следовательно, рассматриваемый функционал является дифференцируемым, а его дифференциал Фреше можно представить в виде

$$J_1[y, \delta y] = \int_a^b (f'_y(x, y, y')\delta y + f'_{y'}(x, y, y')\delta y')dx, \qquad (1.9)$$

т.к. первые два слагаемых в (1.8) получены из (1.9) интегрированием по частям.

Пример 8 Рассмотрим функционал $J[y] = \int\limits_0^\pi y' \sin y dx$.
В данном случае $f(x, y, y') = y' \sin y$, $\quad f'_y = y' \cos y$, $\quad f'_{y'} = \sin y$, а значит

$$J_1[y, \delta y] = \int_0^\pi (y' \cos y \delta y + \sin y \delta y')dx.$$

Для существования дифференциала Гато достаточными условиями являются более слабые условия непрерывности функции f и ее частных производных f'_y и $f'_{y'}$. Для вычисления первой вариации можно воспользоваться дифференцированием интеграла по параметру.

$$\delta J[y, \delta y] = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y'))dx\right)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y')dx.$$

Для обоснованности дифференцирования интеграла по параметру достаточно непрерывности подынтегральной функции и ее частной производной по параметру. Полученная первая вариация является линейным функционалом относительно δy, т.е. представляет собой дифференциал Гато.

Пример 9 Рассмотрим функционал $J[y] = \int\limits_a^b (x + y^2 + (y')^2)dx$.

$$\delta J[y, \delta y] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_a^b (x + (y + \alpha \delta y)^2 + (y' + \alpha \delta y')^2)dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b (2(y + \alpha \delta y)\delta y + 2(y' + \alpha \delta y')\delta y')dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= 2 \int\limits_a^b (y \delta y + y' \delta y')dx.$$

Рассмотрим отображение $F : V^2 \to \mathbf{R}$, которое каждой паре элементов y, $z \in V$ ставит в соответствие число $F[y, z]$.

Определение 12 *Отображение F называют билинейной формой (билинейным функционалом), если это отображение линейно по каждому из аргументов, т.е. для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ выполнены соотношения*

$$F[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, z] = \alpha_1 F[y_1, z] + \alpha_2 F[y_2, z],$$
$$F[y, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2] = \alpha_1 F[y, z_1] + \alpha_2 F[y, z_2].$$

Определение 13 *Отображение $G[y] = F[y, y]$ называют квадратичной формой (квадратичным функционалом).*

Определение 14 *Квадратичный функционал называют положительно определенным, если $G[y] \geq 0$ для любого y и $G[y] = 0 \iff y = 0$.*

Определение 15 *Квадратичный функционал $G[y]$ называют сильно положительным, если существует такая константа $M > 0$, что для любого y выполняется неравенство $G[y] \geq M\|y\|^2$.*

В конечномерном случае сильная положительность квадратичного функционала эквивалентна положительной определенности.

Определение 16 *Функционал $J[y]$ дважды дифференцируем в точке y, если его приращение $\Delta J[y] = J[y+\delta y] - J[y]$ представимо в виде*

$$\Delta J[y] = J_1[y, \delta y] + \delta^2 J[y, \delta y] + o(\|\delta y\|^2),$$

где $\delta^2 J[y, \delta y]$ – квадратичный функционал по переменной δy.

Квадратичный функционал $\delta^2 J[y, \delta y]$ называется второй вариацией функционала $J[y]$.

Пример 10 Найдем вторую вариацию функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 (xy^2 + y'^3)dx.$$

Приращение функционала может быть представлено в виде

$$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int\limits_0^1 (x(y+\delta y)^2 + (y'+\delta y')^3 -$$

$$-(xy^2 + y'^3))dx = \int\limits_0^1 (2xy\delta y + 3y'^2\delta y')dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 (x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2)dx + \int\limits_0^1 (\delta y')^3 dx.$$

Первое слагаемое в правой части является линейным функционалом относительно δy, $\delta y'$, второе слагаемое – квадратичным, третье слагаемое удовлетворяет неравенству

$$|\int\limits_0^1 (\delta y')^3 dx| \leq \|\delta y\|^2 \int\limits_0^1 |\delta y'| dx.$$

Значит, третье слагаемое является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\|\delta y\|^2$ при $\delta y \to 0$. Следовательно

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int\limits_0^1 (x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2) dx.$$

Вычислим теперь вторую вариацию интегрального функционала общего вида (1.5), заданного на линейном нормированном пространстве функций $C^1[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Предполагается, что подынтегральная функция f – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных. Вариации функций в данном случае будут удовлетворять однородным краевым условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Приращение этого функционала, с учетом формулы Тейлора, может быть записано в виде

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int\limits_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx -$$

$$- \int\limits_a^b f(x, y, y') dx = \int\limits_a^b (f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')) dx =$$

$$= \int\limits_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b (f''_{yy}(\delta y)^2 + 2f''_{yy'}\delta y\delta y' + f''_{y'y'}(\delta y')^2)dx + o(\|\delta y\|^2_{C^1})$$

Следовательно,

$$\delta^2 J[y,\delta y] = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (f''_{yy}(\delta y)^2 + 2f''_{yy'}\delta y\delta y' + f''_{y'y'}(\delta y')^2)dx.$$

Используя формулу интегрирования по частям и однородные краевые условия для вариации δy, получаем

$$2\int\limits_a^b f''_{yy'}\delta y\delta y' dx = \int\limits_a^b f''_{yy'} d((\delta y)^2) =$$

$$= (f''_{yy'}(\delta y)^2)\Big|_a^b - \int\limits_a^b (\frac{d}{dx}f''_{yy'})(\delta y)^2 dx =$$

$$= -\int\limits_a^b (\frac{d}{dx}f''_{yy'})(\delta y)^2 dx.$$

Следовательно, вторую вариацию можно представить в виде

$$\delta^2 J[y,\delta y] = \int\limits_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2)dx, \tag{1.10}$$

$$Q = \frac{1}{2}(f''_{yy} - \frac{d}{dx}f''_{yy'}), \quad P = \frac{1}{2}f''_{y'y'}.$$

1.4 Экстремумы функционалов

Пусть ε – положительное число.

Определение 17 *Сильной ε-окрестностью функции $y_0(x) \in C^1[a,b]$ назовем множество функций $y(x) \in C^1[a,b]$, для которых* $\|y - y_0\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$.

Определение 18 *Слабой ε-окрестностью функции $y_0(x) \in C^1[a,b]$ назовем множество функций $y(x) \in C^1[a,b]$, для которых*

$$\|y - y_0\|_{C^1} = \max_{x\in[a,b]} \{|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)|\} < \varepsilon.$$

Очевидно, что функция $y(x)$, принадлежащая слабой ε-окрестности функции $y_0(x)$, принадлежит и сильной ε-окрестности этой же функции, т.е. слабая ε-окрестность содержится в сильной ε-окрестности.

Определение 19 *Говорят, что функционал $J[y]$, определенный на пространстве $C^1[a,b]$, достигает сильного (слабого) минимума на функции (в точке) $y^*(x) \in C^1[a,b]$, если найдется такая сильная (слабая) ε-окрестность функции $y^*(x)$, что для любой функции $y(x)$ из этой окрестности выполняется неравенство $J[y] \geq J[y^*]$.*

Если для любой функции из этой окрестности, отличной от $y^*(x)$, указанное неравенство является строгим, то такой минимум называется строгим.

Сильный (слабый) максимум вводится аналогичным образом. Сильные (слабые) максимумы и минимумы объединяются общим названием - сильный (слабый) экстремум. Функцию $y^*(x)$, доставляющую сильный (слабый) экстремум функционалу $J[y]$, называют точкой сильного (слабого) экстремума функционала.

Так как всякая функция, принадлежащая слабой ε-окрестности функции $y^*(x)$, автоматически входит в сильную ε-окрестность, то всякий сильный экстремум одновременно является и слабым. Однако слабый экстремум функционала не обязательно является его сильным экстремумом. Это объясняется тем, что функции, близкие по своим значениям (попадающие в сильную ε-окрестность), могут иметь существенные расхождения в производных, что может повлиять на значение функционала. Как правило, нахождение слабых экстремумов функционала является более простой задачей по сравнению с нахождением сильных экстремумов.

Замечание 4 Из изложенного выше следует, что необходимое условие слабого экстремума является одновременно необходимым условием сильного экстремума, а любое достаточное условие сильного экстремума является одновременно достаточным условием и слабого экстремума.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4 *(необходимое условие экстремума функционала)* Если функционал $J[y]$ имеет слабый экстремум во внутренней точке $y^*(x)$ своей области определения, причем в этой точке существует дифференциал Гато, то этот дифференциал (первая вариация) обращается в ноль в точке $y^*(x)$

$$\delta J[y^*, \delta y] = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство.

Пусть, для определенности, функционал $J[y]$ на функции $y^*(x)$ достигает слабого минимума. Рассмотрим функцию $\phi(\alpha) = J[y^* + \alpha\delta y]$, при фиксированной вариации δy.

Из условий теоремы следует, что функция $\phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$. Действительно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что в слабой ε-окрестности точки $y^*(x)$ справедливо неравенство $J[y] \geq J[y^*]$. Если $y = y^* + \alpha\delta y$, то при $|\alpha| < \varepsilon/\|\delta y\|_{C^1}$ функция $y(x)$ попадает в слабую ε- окрестность функции $y^*(x)$. Действительно $\|y - y^*\|_{C^1} = \|\alpha\delta y\|_{C^1} = |\alpha|\|\delta y\|_{C^1} < \varepsilon$. А значит, $J[y] \geq J[y^*]$, или $\phi(\alpha) \geq \phi(0)$.

Докажем, что из существования дифференциала Гато функционала $J[y]$ в точке $y^*(x)$ следует дифференцируемость функции $\phi(\alpha)$ при $\alpha = 0$.

Вычислим производную функции $\phi(\alpha)$ при $\alpha = 0$

$$\phi'\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{J[y^* + \alpha\delta y] - J[y^*]}{\alpha} = \delta J[y^*, \delta y].$$

Так как $\phi(\alpha)$ имеет минимум в точке $\alpha = 0$ и дифференцируема в этой точке, то, в силу необходимого условия локального экстремума функции одной переменной, $\phi'(0) = 0$, что равносильно соотношению $\delta J[y^*, \delta y] = 0$. Так как вариация δy выбрана произвольно, отсюда следует, что дифференциал Гато равен нулю в точке y^*.

Теорема 5 *(необходимое условие минимума (максимума) функционала)* Если функционал (1.5) в точке $y^*(x)$ дважды дифференцируем и имеет минимум(максимум), то $\delta^2 J[y^*, \delta y] \geq 0$ ($\delta^2 J[y^*, \delta y] \leq 0$) при любом δy.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Если функция $y^*(x)$ является точкой минимума функционала $J[y]$, то, в соответствии с необходимым условием экстремума, $\delta J[y^*, \delta y] = 0$. Следовательно $\Delta J[y^*] = \delta^2 J[y*, \delta y] + o(\|\delta y\|^2) \geq 0$. Зафиксируем δy и рассмотрим приращение функционала, соответствующее вариации $\alpha\delta y$, $\alpha > 0$. Справедливо неравенство

$$\delta^2 J[y*, \alpha\delta y] + o(\|\alpha\delta y\|^2) = \alpha^2\delta^2 J[y*, \delta y] + o(\alpha^2\|\delta y\|^2) \geq 0$$

или

$$\frac{\delta^2 J[y*, \delta y]}{\|\delta y\|^2} + \frac{o(\alpha^2 \|\delta y\|^2)}{\|\alpha \delta y\|^2} \geq 0.$$

Первое слагаемое не зависит от α, а второе может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора α. Отсюда следует, что $\delta^2 J[y*, \delta y]/\|\delta y\|^2 \geq 0$, а значит $\delta^2 J[y*, \delta y] \geq 0$.

Так как δy произвольно, отсюда следует, что квадратичный функционал $\delta^2 J[y*, \delta y]$ неотрицательно определен.

Замечание 5 Неотрицательная определенность второй вариации является необходимым, но не достаточным условием экстремума.

1.5 Основные леммы вариационного исчисления

Лемма 1 *(лемма Лагранжа)*

Если функция $f(x) \in C[a,b]$ и для любой функции $\eta(x) \in C^\infty[a,b]$, такой что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, выполняется равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$ на промежутке $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Будем проводить доказательство "от противного". Пусть найдется точка $x_0 \in [a,b]$, в которой $f(x_0) \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$, можно найти окрестность $(c,d) \subset [a,b]$ точки x_0, в которой $f(x) > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \quad x > 0; \\ 0 & , \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в любой точке.

Введем в рассмотрение функцию $\eta(x) = \varphi(x - c)\varphi(d - x)$. Очевидно, что эта функция $\eta(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в любой точке и отлична от нуля только в интервале (c, d). Ввиду того, что подынтегральная функция непрерывна и положительна, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = \int\limits_c^d f(x)\eta(x)dx > 0,$$

что противоречит условию леммы. Следовательно, предположение не верно, и $f(x) \equiv 0$.

Замечание 6 Доказанная лемма может быть обобщена на случай функций нескольких переменных. Например, в двумерном случае, если функция $f(x_1, x_2) \in C^1_D$, где D – ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, и для любой функции $\eta(x_1, x_2) \in C^\infty_D$, непрерывной на $\bar{D} = D \cup \partial D$ и равной нулю на границе ∂D области D, верно равенство

$$\iint\limits_D f(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 0,$$

то $f(x_1, x_2) \equiv 0$.

Для доказательства этого факта можно, например, в качестве пробной функции взять функцию $\eta(x_1, x_2) = \varphi(r^2 - x_1^2 - x_2^2)$, обращающуюся в ноль вне круга радиуса r с центром в начале координат.

Лемма 2 *(лемма Дюбуа-Реймона)*

Если функции $f(x), g(x) \in C[a, b]$ и для любой функции $\eta(x) \in C^\infty[a, b]$, такой что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, выполняется равенство

$$\int_a^b (f(x)\eta'(x) + g(x)\eta(x))dx = 0, \tag{1.12}$$

то функция $f(x) \in C^1[a,b]$ и

$$f'(x) - g(x) \equiv 0 \tag{1.13}$$

на промежутке $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Можно показать, что существует такая первообразная $G(x)$ функции $g(x)$, что

$$\int_a^b (f(x) - G(x))dx = 0. \tag{1.14}$$

Действительно, если $G_0(x)$– некоторая фиксированная первообразная функции $g(x)$, то любую первообразную $G(x)$ можно представить в виде $G(x) = G_0(x) + C$. Подставляя это выражение в соотношение (1.14), получим

$$C = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x) - G_0(x))dx.$$

Тогда для любой пробной функции $\eta(x) \in C^\infty[a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, имеем

$$\int_a^b g(x)\eta(x)dx = \int_a^b g(x)\eta(x)dx = G(x)\eta(x)\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b G(x)\eta'(x)dx = -\int_a^b G(x)\eta'(x)dx.$$

А значит, равенство (1.12) равносильно равенству

$$\int\limits_a^b (f(x) - G(x))\eta'(x)dx = 0. \tag{1.15}$$

Рассмотрим произвольную пробную функцию $\eta(x)$, удовлетворяющую условиям леммы. Пусть

$$C_\eta = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \eta(x))dx.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\zeta(x) = \int\limits_a^x (\eta(s) - C_\eta)ds.$$

Очевидно, что $\zeta(x) \in C^\infty[a,b], \quad \zeta(a) = \zeta(b) = 0$. По условию леммы, для такой функции справедливо соотношение (1.12), а значит и (1.15), т.е.

$$\int\limits_a^b (f(x) - G(x))\zeta'(x)dx = 0.$$

Ввиду того, что $\zeta'(x) = \eta(x) - C_\eta$, имеем

$$\int\limits_a^b (f(x) - G(x))\eta(x)dx - C_\eta \int\limits_a^b (f(x) - G(x))dx = 0.$$

А значит, в силу (1.14)

$$\int\limits_a^b (f(x) - G(x))\eta(x)dx = 0.$$

Так как пробная функция $\eta(x)$ выбиралассь произвольным образом, то по лемме Лагранжа, получаем $f(x) - G(x) \equiv 0$.

Функция $G(x)$ дифференцируема, и $G'(x) = g(x)$, а значит $f(x)$ дифференцируема, и $f'(x) \equiv g(x)$. Так как $g(x)$ непрерывна, то $f(x)$ непрерывно дифференцируема.

Доказанные леммы обеспечивают достаточные условия интегрального типа, обеспечивающие обращение заданной функции в ноль. Они будут использоваться при решении вариационных задач. Подобные утверждения могут быть доказаны для других классов пробных функций.

Глава 2

Задачи с фиксированными концами

2.1 Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx, \tag{2.1}$$

определенного на функциях $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{2.2}$$

Предполагается, что подынтегральная функция $f(x, y, y')$ –дважды непрерывно дифференцируемая функция. Первая вариация функционала (2.1) в соответствии с формулой (1.9) имеет вид

$$\delta J[y,\delta y]=\int\limits_a^b (f'_y(x,y,y')\delta y+f'_{y'}(x,y,y')\delta y')dx. \qquad (2.3)$$

Здесь $\delta y\in C^1[a,b]$ – допустимая вариация, $\delta y'=(\delta y)'$, причем, в силу условия (2.1), должны выполняться соотношения $\delta y(a)=\delta y(b)=0$. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 6 *(необходимое условие экстремума)*

Для того чтобы функция $y^*(x)$ доставляла слабый экстремум функционалу (2.1), необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx}f'_{y'}-f'_y=0. \qquad (2.4)$$

Доказательство.

Используя необходимое условие экстремума функционала (теорема 4) получаем условие

$$\delta J[y,\delta y]=\int\limits_a^b (f'_y(x,y,y')\delta y+f'_{y'}(x,y,y')\delta y')dx=0.$$

Это условие справедливо для любой допустимой вариации. В частности, оно верно для любой бесконечно дифференцируемой функции, удовлетворяющей нулевым краевым условиям. Тогда из леммы Дюбуа-Реймона следует, что для любого $x\in[a,b]$ выполняется соотношение (2.4).

В соответствии с замечанием 4, уравнение (2.4) дает необходимое условие и для сильного экстремума функционала (2.1).

Гладкие решения уравнения Эйлера будем называются *экстремалями.*

Так как условие (2.4) является необходимым, точки экстремума функционала следует искать среди экстремалей. Если из смысла задачи вытекает, что задача имеет решение, а функционал имеет единственную экстремаль, удовлетворяющую краевым условиям, то эта экстремаль и будет решением задачи.

Предполагая, что функция $y(x)$ является дважды дифференцируемой, преобразуем перевое слагаемое в правой части уравнения (2.4)

$$\frac{d}{dx}f'_{y'} = f''_{y'x} + f''_{y'y}y' + f''_{y'y'}y''.$$

Тогда уравнение Эйлера (2.4) может быть переписано в виде

$$f''_{y'x} + f''_{y'y}y' + f''_{y'y'}y'' - f'_{y} = 0.$$

Если выполнено условие $f''_{y'y'} \neq 0$, то уравнение Эйлера представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Если же $f''_{y'y'} \equiv 0$, то уравнение Эйлера является либо дифференциальным уравнением первого порядка, либо алгебраическим уравнением.

Условие, что функция $y(x)$ является дважды дифференцируемой, обеспечивается следующей теоремой [1]:

Теорема 7 Пусть $y(x)$– решение уравнения (2.4). Если подынтегральная функция $f(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках плоскости xOy, в которых $f''_{y'y'} \neq 0$, функция $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

2.2 Частные случаи

Уравнение Эйлера не всегда интегрируется в квадратурах. Выделим характерные частные случаи, в которых уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах.

2.2.1 Подынтегральная функция не зависит от y'

В этом случае $f'_{y'} \equiv 0$ и уравнение Эйлера принимает вид $f'_{y}(x, y) = 0$, т. е. является алгебраическим уравнением. Решения этого уравнения (экстремали функционала) могут и не удовлетворять заданным краевым условиям.

Пример 11 Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 (x \sin y + \cos y) dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(0) = 0, \quad y(1) = \pi/4$. Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$x \cos y - \sin y = 0.$$

Отсюда $y = arctgx$. Эта экстремаль удовлетворяет заданным граничным условиям.

Пример 12 Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_1^e (xe^y - ye^x) dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(1) = 1, \quad y(e) = 1$. Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$xe^y - e^x = 0.$$

Отсюда $y = x - \ln x$. Полученная экстремаль не удовлетворяет заданным граничным условиям.

2.2.2 Подынтегральная функция линейно зависит от y'

В данном случае подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

Для таких функций $f''_{y'y'} \equiv 0$. Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{dQ}{dx} - P'_y - Q'_y y' = 0.$$

Используя формулу дифференцирования сложной функции, $\frac{dQ}{dx} = Q'_x + Q'_y y'$, можно переписать уравнение Эйлера в виде $Q'_x - P'_y = 0$. Это уравнение является алгебраическим. Его решения, как и в предыдущем случае, могут не удовлетворять краевым условиям.

Заметим, что если выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, то уравнение $Q'_x - P'_y = 0$ является тождеством относительно x и y. В данном случае любая функция $y(x) \in C^1[a, b]$ является решением уравнения $Q'_x - P'_y = 0$, и, следовательно, экстремалью.

Пример 13 Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b ((xy' + 1)e^y + x^2 - y^2 y')dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$. В данном случае $P(x, y) = e^y + x^2, \quad Q(x, y) = xe^y - y^2$ и выполняется тождество $Q'_x \equiv P'_y$.

Следовательно, выражение $(e^y + x^2)dx + (xe^y - y^2)dy$ представляет собой полный дифференциал. Любая функция $y(x)$ является экстремалью. Но для всех экстремалей, удовлетворяющих заданным краевым условиям, значения функционала одинаковы

$$J[y] = \int\limits_a^b ((xy' + 1)e^y + x^2 - y^2 y')dx =$$

$$= \int\limits_{(a;\alpha)}^{(b;\beta)} (e^y + x^2)dx + (xe^y - y^2)dy =$$

$$= \int\limits_{(a;\alpha)}^{(b;\beta)} d(xe^y - y^3/3 + x^3/3) =$$

$$= be^\beta - ae^\alpha + (\beta^3 - \alpha^3)/3 + (a^3 - b^3)/3.$$

2.2.3 Подынтегральная функция зависит только от y'

В данном случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = 0.$$

Это уравнение допускает понижение порядка $f'_{y'} = C$. Относительно y' имеем алгебраическое уравнение. Все его решения могут быть представлены в виде $y' = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Следовательно, все экстремали можно представить в виде $y = C_1 x + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 14 Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + y' + 1) dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(0) = 1, \quad y(1) = 2$.

Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид $2y'' = 0$. Отсюда $y = C_1 x + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Найдем значения постоянных из краевых условий $C_2 = 1, \quad C_1 + C_2 = 2$, т. е. $C_1 = C_2 = 1$. Таким образом искомая экстремаль – это прямая $y = x + 1$.

2.2.4 Подынтегральная функция не зависит от y

В данном случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} = 0.$$

Уравнение допускает понижение порядка $f'_{y'} = C$. Это дифференциальное уравнение первого порядка или алгебраическое уравнение, как в предыдущем случае.

Пример 15 Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_1^e (xy'^2 - 2y')dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям $y(1) = 1, \quad y(e) = 2$.
Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx}(2xy' - 2) = 0.$$

Оно допускает понижение порядка $2xy' - 2 = C_1$, или $y' = \frac{C_1+2}{2x}$.

Интегрируя, получаем $y = \frac{1}{2}(C_1+2)\ln x + C_2$. Найдем значения постоянных из краевых условий $C_2 = 1, \quad \frac{1}{2}C_1 + C_2 + 1 = 2$, т. е. $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Таким образом искомая экстремаль – это кривая $y = \ln x + 1$.

2.2.5 Подынтегральная функция не зависит явно от x

В данном случае уравнение Эйлера принимает вид

$$f''_{y'y}y' + f''_{y'y'}y'' - f'_y = 0.$$

Если умножить обе части уравнения на y', его можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dx}(y'f'_{y'} - f) = 0.$$

Уравнение Эйлера допускает понижение порядка

$$y'f'_{y'} - f = C.$$

Пример 16 *(Задача о наименьшей площади поверхности вращения)*

Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образуют поверхность наименьшей площади.

Площадь поверхности вращения является функционалом

$$J[y] = 2\pi \int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx,$$

определенным на функциях из пространства $C^1[x_0, x_1]$, удовлетворяющих краевым условиям $y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$. Уравнение Эйлера в данном случае допускает понижение порядка

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

или $y = C_1\sqrt{1+y'^2}$. Решим это уравнение методом введения параметра. Введем параметр $p = y'$. Тогда

$$dy = pdx, \quad y = C_1\sqrt{1+p^2}, \quad dy = C_1\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad dx = C_1\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Следовательно $x = C_1 \ln|p+\sqrt{1+p^2}|+C_2 = C_1 arsh(p)+C_2$. Отсюда имеем

$$p = sh(\frac{x-C_2}{C_1}), \quad y = C_1 \operatorname{ch}(\frac{x-C_2}{C_1}).$$

Найдем значения постоянных из краевых условий

$$C_1 \operatorname{ch}(\frac{x_0-C_2}{C_1}) = y_0, \quad C_1 \operatorname{ch}(\frac{x_1-C_2}{C_1}) = y_1,$$

Таким образом искомая экстремаль – это цепная линия (линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить или цепь с закреплёнными концами в однородном гравитационном поле).

Пример 17 *(Задача о брахистохроне)*

Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(0,0)$ и $B(b,y_b)$, найти ту, по которой материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести из точки A без начальной скорости, достигнет точки B за кратчайшее время.

Проведем через точки A и B вертикальную плоскость и возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, удовлетворяющую краевым условиям $y(0) = 0$, $y(b) = y_b$.

Для произвольной точки $M(x,y)$ на основании закона сохранения энергии получим $mv^2/2 - mgy = 0$, где m – масса точки, а v – ее скорость. Отсюда $v = \sqrt{2gy}$. С другой стороны $v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{dt}$, $(dl$ –дифференциал длины дуги). Отсюда

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx,$$

т. е. минимизируемый функционал имеет вид

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx. \qquad (2.5)$$

Уравнение Эйлера в данном случае допускает понижение порядка

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C,$$

или

$$y = \frac{1}{C^2(1+y'^2)}.$$

Решим это уравнение методом введения параметра. Введем параметр $y' = ctg\frac{p}{2}$. Тогда

$$y = C_1(1-\cos p), \quad C_1 = \frac{1}{2C^2} > 0,$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \sin p dp}{ctg \frac{p}{2}} = 2C_1 \sin^2 \frac{p}{2} dp =$$
$$= C_1(1 - \cos p)dp.$$

Следовательно

$$x = C_1(p - \sin p) + C_2.$$

Отсюда получаем параметрическое уравнение циклоиды

$$\begin{cases} x = C_1(p - \sin p) + C_2, \\ y = C_1(1 - \cos p). \end{cases} \tag{2.6}$$

Так как $x = 0$ при $p = 0$, постоянная $C_2 = 0$, а постоянная C_1 определяется из условия, что кривая проходит через точку $B(b, y_b)$.

$$\begin{cases} b = C_1(p - \sin p), \\ y_b = C_1(1 - \cos p). \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе

$$\frac{p - \sin p}{1 - \cos p} = \frac{b}{y_b} = A > 0. \tag{2.7}$$

Отметим, что для циклоид рассматриваемого семейства, точки, соответствующие значениям параметра $p = 2\pi n$, являются точками возврата. Но экстремали не должны содержать точек возврата. Поэтому параметр p должен принадлежать интервалу $(0, 2\pi)$. Можно показать, что на этом интервале функция $\varphi(p) = \frac{p - \sin p}{1 - \cos p}$ неограниченно монотонно возрастает. Следовательно, уравнение (2.7) на этом интервале имеет единственное решение p_b. Найденное значение параметра позволяет найти значение постоянной $C_1 = \frac{y_b}{1 - \cos p_b}$.

Таким образом линией наискорейшего ската является циклоида (траектория фиксированной точки производящей окружности, катящейся без скольжения по прямой).

2.3 Функционалы от нескольких функций

Пусть подынтегральная функция зависит от двух функций переменной x, т.е. функционал имеет вид

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_a^b f(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx, \tag{2.8}$$

где f – дважды непрерывно дифференцируемая функция пяти переменных. В качестве допустимых функций будем рассматривать пары функций $y_1(x), y_2(x) \in C^1[a,b]$, удовлетворяющие краевым условиям

$$y_1(a) = y_{11},\ y_1(b) = y_{12},\ y_2(a) = y_{21},\ y_2(b) = y_{22}. \tag{2.9}$$

Допустимые вариации $\delta y_1, \delta y_2$ для функций y_1, y_2 должны принадлежать классу функций $C^1[a,b]$ и удовлетворять нулевым краевым условиям

$$\delta y_1(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(a) = \delta y_2(b) = 0,$$

так как допустимые функции $y_1(x), y_2(x)$ имеют фиксированные значения на концах промежутка $[a,b]$.

Для произвольных допустимых вариаций $\delta y_1, \delta y_2$ рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = J[y_1 + \alpha_1 \delta y_1, y_2 + \alpha_2 \delta y_2].$$

Очевидно, что если пара функций y_1, y_2 доставляет экстремум функционалу $J[y_1, y_2]$, то функция $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет экстремум в точке $(0,0)$. Следовательно, должны выполняться необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0.$$

Используя формулу дифференцирования по параметру, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int\limits_a^b (f'_{y_1}\delta y_1 + f'_{y_1'}\delta y_1')dx,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b (f'_{y_2}\delta y_2 + f'_{y'_2}\delta y'_2)dx.$$

Эти соотношения выполняются для произвольных бесконечно дифференцируемых функций $\delta y_1, \delta y_2$, а значит и для функций с нулевыми значениями на концах промежутка $[a,b]$. Используя лемму Дюбуа-Реймона, получаем необходимые условия экстремума функционала

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}f'_{y'_1} - f'_{y_1} = 0, \\ \frac{d}{dx}f'_{y'_2} - f'_{y_2} = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Используя аналогичные рассуждения можно получить необходимые условия экстремума в случае, когда подынтегральная функция зависит от n функций.

Теорема 8 Если функционал

$$J[y_1,\ldots,y_n] = \int_a^b f(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)dx, \tag{2.11}$$

где f – дважды непрерывно дифференцируемая функция по всем переменным, достигает экстремума на системе функций $y_1(x),\ldots,y_n(x) \in C^1[a,b]$, то эта система функций является решением системы уравнений

$$\frac{d}{dx}f'_{y'_i} - f'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.12}$$

Гладкие решения системы (2.12) будем называть экстремалями.

Пример 18 Найдем экстремали функционала

$$J[y_1,y_2] = \int_0^\pi (y_1'^2 - 2y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2'^2)dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi) = y_2(\pi) = 1.$$

Система уравнений Эйлера для данного функционала имеет вид

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 - y_2 = 0, \\ \quad y_2'' + y_1 = 0. \end{cases}$$

Исключая переменную y_1, получим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y_2^{(4)} + 2y_2'' + y_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ имеет комплексно сопряженную пару корней $\lambda = \pm i$ кратности 2. Общее решение представимо в форме

$$y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

Тогда для функции y_1 получаем

$$y_1 = (C_1 - 2C_4) \cos x + (C_2 + 2C_3) \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

Из краевых условий имеем $C_1 = C_4 = 0$, $C_3 = -1/\pi$, постоянная C_2 произвольна. Следовательно, имеем семейство экстремалей

$$y_1 = (C_2 - \frac{2}{\pi}) \sin x - \frac{2}{\pi} x \cos x, \quad y_2 = C_2 \sin x - \frac{1}{\pi} x \cos x.$$

Заметим, что, например, для краевых условий

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 1, \quad y_2(\pi) = -1$$

значения констант найти не удается, а следовательно, экстремалей, удовлетворяющих краевым условиям, не существует.

2.4 Функционалы с производными высших порядков

Рассмотрим функционал

$$J[y]=\int\limits_a^b f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})dx, \qquad (2.13)$$

где f – $n+2$ раза непрерывно дифференцируемая функция по всем переменным на множестве функций $y(x)\in C^n[a,b]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{cases} y(a)=y_{10},\ y'(a)=y_{11},\ \ldots y^{(n-1)}(a)=y_{1,n-1}, \\ y(b)=y_{20},\ y'(b)=y_{21},\ \ldots y^{(n-1)}(b)=y_{2,n-1}, \end{cases} \qquad (2.14)$$

В данном случае допустимой вариацией будет любая функция $\delta y\in C^n[a,b]$, удовлетворяющая нулевым краевым условиям

$$\begin{cases} \delta y(a)=\delta y'(a)=\ldots=\delta y^{(n-1)}(a)=0, \\ \delta y(b)=\delta y'(b)=\ldots=\delta y^{(n-1)}(b)=0. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Предположим, что функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу (2.13). Зафиксируем произвольную допустимую вариацию δy и рассмотрим функцию

$$\phi(\alpha)=J[y+\alpha\delta y]=\int\limits_a^b f(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\ldots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx,$$

где $\delta y^{(k)}=(\delta y)^{(k)}$.

Функция $\phi(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha=0$, дифференцируема в этой точке и, в силу необходимого условия экстремума функции одной переменной, $\phi'(0)=0$.

Вычислим $\phi'(0)$. Используя формулу дифференцирования интеграла по параметру, имеем

$$\phi'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b f(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',\ldots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)})dx,$$

а значит справедливо равенство

$$\phi'(0) = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y' + \ldots + f'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx, \qquad (2.16)$$

где частные производные функции f вычислены в точке $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

Если $y \in C^{2n}[a, b]$, то, используя формулу интегрирования по частям и однородные краевые условия, имеем

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'_{y'} \delta y' dx &= -\int_a^b \frac{d}{dx}(f'_{y'}) \delta y dx, \\
\int_a^b f'_{y''} \delta y'' dx &= \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}(f'_{y''}) \delta y dx, \\
\ldots \quad &\ldots \quad \ldots \\
\int_a^b f'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx &= (-1)^{(n)} \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}(f'_{y^{(n)}}) \delta y dx.
\end{aligned}$$

Тогда из (2.16) получаем

$$\int_a^b (f'_y - \frac{d}{dx}(f'_{y'}) + \ldots + (-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^n}(f'_{y^{(n)}})) \delta y dx = 0.$$

Так как последнее равенство, в частности, справедливо для любой бесконечно дифференцируемой функции $\delta y(x)$ с нулевыми краевыми условиями, то, используя лемму Лагранжа, получаем необходимые условия экстремума функционала (2.13)

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^n} f'_{y^{(n)}} + (-1)^{(n-1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f'_{y^{(n-1)}} + \ldots + \\
&+(-1) \frac{d}{dx} f'_{y'} + f'_y = 0. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Уравнение (2.17) называют уравнением Эйлера-Пуассона, а его гладкие решения – экстремалями.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 9 Если функционал (2.13), определенный на множестве функций из пространства $C^n[a,b]$, удовлетворяющих краевым условиям (2.14), достигает экстремума на некоторой функции $y(x) \in C^{2n}[a,b]$, то эта функция является экстремалью функционала.

Пример 19 Найдем экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} (16y^2 - y''^2 + x^2)dx,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 1.$$

Уравнение Эйлера-Пуассона в данном случае имеет вид

$$32y + (-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0,$$

или $y^{(4)} - 16y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 16 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2, \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i$. Общее решение представимо в форме $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. Из краевых условий получаем $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1/2$. Следовательно, искомая экстремаль имеет вид $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

2.5 Функционалы от функций нескольких переменных

Рассмотрим функционал

$$J[z] = \int\limits_D\int f(x, y, z, z'_x, z'_y)dxdy. \tag{2.18}$$

Здесь $z : G \to \mathbf{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, G – некоторая область в $\mathbf{R^2}$, D– некоторая область, удовлетворяюшая условию $D \cup \partial D \subset G$, f – дважды непрерывно дифференцируемая функция. В качестве множества допустимых функций будем рассматривать функции, удовлетворяющие условию

$$z(x,y)\Big|_{\partial D} = \varphi(x,y), \tag{2.19}$$

где $\varphi(x,y)$– заданная функция.

Допустимыми вариациями будут функции $\delta z(x,y) \in C^1(G)$, обращаюшиеся в ноль на границе ∂D области D.

Необходимое условие экстремума можно записать в форме

$$\delta J[z, \delta z] = 0. \tag{2.20}$$

Первая вариация функционала имеет вид

$$\delta J[z, \delta z] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[z + \alpha \delta z]\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \int\limits_D\int (f'_z \delta z + f'_p \delta p + f'_q \delta q) dxdy,$$

где $p = z'_x$, $q = z'_y$, $\delta p = (\delta z)'_x$, $\delta q = (\delta z)'_y$.

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(f'_p \delta z) = \frac{\partial f'_p}{\partial x}\delta z + f'_p \delta p,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(f'_q \delta z) = \frac{\partial f'_q}{\partial y}\delta z + f'_q \delta q,$$

получаем

$$\int\limits_D\int (f'_p \delta p + f'_q \delta q) dxdy =$$
$$= \int\limits_D\int \left(\frac{\partial}{\partial x}(f'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y}(f'_q \delta z)\right) dxdy -$$
$$- \int\limits_D\int \left(\frac{\partial f'_p}{\partial x} + \frac{\partial f'_q}{\partial y}\right) \delta z dxdy.$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части последнего равенства с использованием формулы Грина

$$\int\limits_{\partial D}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{D}\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

Используя тот факт, что $\delta z=0$ на границе области D, получаем

$$\int\limits_{D}\int(\frac{\partial}{\partial x}(f'_p\delta z)+\frac{\partial}{\partial y}(f'_q\delta z))dxdy=\int\limits_{\partial D}\delta z(f'_pdy-f'_qdx)=0.$$

Следовательно

$$\int\limits_{D}\int(f'_p\delta p+f'_q\delta q)dxdy=-\int\limits_{D}\int(\frac{\partial f'_p}{\partial x}+\frac{\partial f'_q}{\partial y})\delta zdxdy,$$

и необходимое условие экстремума принимает вид

$$\int\limits_{D}\int(f'_z-\frac{\partial f'_p}{\partial x}-\frac{\partial f'_q}{\partial y})\delta zdxdy=0.$$

Так как первый сомножитель в подынтегральной функции непрерывен, а вариация δz произвольна, то в силу обобщения леммы Лагранжа, функция $z(x,y)$ является решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial f'_p}{\partial x}+\frac{\partial f'_q}{\partial y}-f'_z=0. \tag{2.21}$$

Это уравнение называется уравнением Остроградского, а гладкие решения этого уравнения – экстремалями функционала.

Пример 20 Выпишем уравнение Остроградского для функционала Дирихле

$$J[z]=\int\limits_{D}\int((z'_x)^2+(z'_y)^2)dxdy.$$

В данном случае

$$f = (z'_x)^2 + (z'_y)^2, \quad f'_p = 2p = 2z'_x, \quad f'_q = 2q = 2z'_y, \quad f'_z = 0.$$

Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Это известное уравнение Лапласа и его решениями являются гармонические в области D функции.

2.6 О достаточных условия экстремума

В предыдущих разделах было показано, что необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю первой вариации функционала.

Если обратиться к теории функций нескольких переменных, то достаточные условия экстремума связаны с поведением второго дифференциала. В вариационном исчислении достаточные условия связаны с поведением второй вариации.

Справедливы следующие теоремы, обеспечивающие достаточные условия экстремума функционала [1]:

Теорема 10 Если у дважды дифференцируемого функционала $J[y]$, определенного на линейном нормированном пространстве, первая вариация в точке y^* равна нулю, а вторая представляет собой сильно положительный квадратичный функционал, то функционал $J[y]$ имеет в точке y^* минимум.

Теорема 11 Если функционал $J[y]$ в простейшей задаче вариационного исчисления (2.1), (2.2) достигает на функции $y^*(x)$ минимума, то выполняется условие Лежандра

$$f''_{y'y'}(x, y^*(x), (y^*(x))') \geq 0.$$

После отыскания функций, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума, дальнейшее исследование функционалов связано с анализом их второй вариации (1.10)

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx, \tag{2.22}$$

$$Q = \frac{1}{2}(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{yy'}), \quad P = \frac{1}{2} f''_{y'y'}.$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx}(P\delta y') - Q\delta y = 0 \tag{2.23}$$

квадратичного функционала $\delta^2 J[y, \delta y]$ называют уравнением Якоби исходного функционала $J[y]$ задачи (2.1), (2.2).

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}(Ph') - Qh = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \tag{2.24}$$

Эта задача имеет тривиальное решение $h(x) \equiv 0$, но могут существовать и нетривиальные решения. Рассмотрим ненулевое решение $h(x)$ краевой задачи (2.24). Если точка $\tilde{x} \in (a, b]$ такова, что $h(\tilde{x}) = 0$, а $h(x) \neq 0$, при $a < x < \tilde{x}$, то точка $\tilde{x}$ называется сопряженной точке a. Точки a и b сопряженные, если краевая задача (2.24) имеет решение, не обращающееся в ноль на (a, b). Отсутствие на полуинтервале $(a, b]$ точек, сопряженных a, означает, что задача (2.24) не имеет ненулевых решений.

Точка $\tilde{x} \in (a, b)$ называется сопряженной точке a в смысле функционала $J[y]$, если эта точка является сопряженной в смысле квадратичного функционала $\delta^2 J[y, \delta y]$.

Теорема 12 *(достаточные условия слабого минимума)*

Функция $y^*(x) \in C^1[a, b]$ доставляет слабый минимум функционалу $J[y]$ в простейшей задаче вариационного исчисления (2.1), (2.2), если выполняются следующие условия:

1. Функция $y^*(x)$ является экстремалью функционала $J[y]$, удовлетворяющей краевым условиям (2.2);

2. Для этой функции выполняется усиленное условие Лежандра

$$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y^*(x), (y^*(x))') \geq 0, \quad x \in (a, b);$$

3. На интервале (a, b) нет точек, сопряженных точке a в смысле функционала $J[y]$ (усиленное условие Якоби).

Одним из типов достаточных условий экстремума являются достаточные условия Лежандра:

Если на экстремали $y^*(x)$ выполнено условие $f''_{y'y'}(x, y^*(x), (y^*(x))') > 0$ $(f''_{y'y'}(x, y^*(x), (y^*(x))') < 0)$, то функционал $J[y]$ достигает на $y^*(x)$ слабый минимум (слабый максимум).

Если $f''_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ $(f''_{y'y'}(x, y, y') \leq 0)$ в точках (x, y), близких к экстремали $y^*(x)$ и для произвольных значений y', то функционал $J[y]$ достигает на $y^*(x)$ сильный минимум (сильный максимум).

Пример 21 Иссдедуем на экстремум функционал (2.5) из известной задачи о брахистохроне (пример 17)

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \tag{2.25}$$

Его экстремалями являются циклоиды (2.6)

$$\begin{cases} x = C_1(p - \sin p) + C_2, \\ y = C_1(1 - \cos p). \end{cases} \tag{2.26}$$

Причем, каковы бы ни были значения b, y_b, через точку $(b,\ y_b)$ проходит единственная экстремаль. Это значит, что в области $D = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$ задано поле экстремалей, а любая экстремаль указанного семейства включена в это поле.

Проверим усиленное условие Лежандра:

$$f'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}, \quad f''_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{(1+y'^2)^3}} > 0.$$

Таким образом, единственная циклоида, которая удовлетворяет поставленным краевым условиям, доставляет сильный минимум рассматриваемому функционалу.

2.7 Задачи

1. В задачах минимизации функционала найти экстремали, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

1.1. $J[y] = \int\limits_1^e (xy'^2 - y)dx \to extr; \quad y(1) = 1,\ y(e) = 2.$

1.2. $J[y] = \int\limits_1^{\pi/2} (y'^2 + y^2)dx \to extr; \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$

1.3. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2y\sin x)dx \to extr;$
$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$

1.4.$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2ya\cos x)dx \to extr;$
$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$

1.5. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2y + 2y\sin^2 \frac{x}{2})dx \to extr;$
$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$

1.6. $J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + y^2)dx \to extr; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

1.7. $J[y] = \int\limits_0^{\sqrt{2}} (y'^2 + 2y^2 + 8yx^2 e^{x^2})dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(\sqrt{2}) = 1.$

1.8. $J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 4y^2 + 16yx^2)dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(1) = -4.$

1.9. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2xy + 4ye^x)dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = e^{\pi/2}.$

1.10. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2xy + 4ye^x)dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = e^{\pi/2}.$

1.11. $J[y] = \int\limits_0^2 (4y'^2 + 2x^3y - 48xy + y^2)dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(2) = 0.$

1.12. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/3} (y'^2 - y^2 + \frac{2y}{\cos^3 x})dx \to extr;$

$y(0) = 1/2,\ y(\pi/3) = 0.$

1.13. $J[y] = \int\limits_1^2 (y'^2 + 2y^2/x^2)dx \to extr; \quad y(1) = 1,\ y(2) = 2.$

1.14. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - 4y^2 + 2ye^{-2x})dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(\pi/4) = \frac{1}{8}e^{-\pi/2}.$

1.15. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 - xy)dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0.$

1.16. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 + 2y + 2y\sin^2 \frac{x}{2})dx \to extr;$

$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$

2. В задачах минимизации функционала найти экстремали, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

2.1. $J[y] = \int\limits_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1 y_2)dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = sh1,\ y_2(1) = -sh1.$

2.2. $J[y] = \int\limits_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1' y_2')dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = y_2(1) = sh1.$

2.3. $J[y] = \int\limits_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2)dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_1(1) = e, y_2(1) = 1/e$

2.4. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y_1' y_2' - y_1 y_2)dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(\pi/2) = 1, y_2(\pi/2) = -1.$

2.5. $J[y] = \int\limits_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2)dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = y_2(1) = 1.$

2.6. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2)dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(\pi/2) = 1, y_2(\pi/2) = -1.$

2.7. $J[y] = \int\limits_0^1 (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1' y_2')dx \to extr;$

$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = y_2(1) = sh1.$

3. В задачах минимизации функционала найти экстремали, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

3.1. $J[y] = \int\limits_0^1 (y''^2 + y'^2)dx \to extr;$

$y(0) = 0, y'(0) = 1,\ y(1) = sh1,\ y'(1) = ch1.$

3.2. $J[y] = \int\limits_1^e (xy''^2)dx \to extr;$

$y(1) = 0, y'(1) = 1,\ y(e) = e,\ y'(e) = 2.$

3.3. $J[y] = \int\limits_1^\pi (y''^2 - y^2)dx \to extr;$

$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = -1.$

3.4. $J[y] = \int\limits_0^1 (24xy - y''^2)dx \to extr;$

$y(0) = y(1) = y'(0) = 0, \quad y'(1) = -0,1.$

3.5. $J[y] = \int\limits_0^1 (y''^2 + y'^2)dx \to extr;$

$y(0) = 1, y(1) = ch1, \quad y'(0) = 0, y'(1) = sh1.$

3.6. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'''^2 - y''^2)dx \to extr;$

$y(0) = y'(0) = y''(\pi/2) = 0,$

$y(\pi/2) = y''(0) = y'(\pi/2) = 1.$

Глава 3

Задачи с подвижными границами

3.1 Задачи с подвижными концами

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx, \tag{3.1}$$

определенного на функциях $y(x) \in C^1[a, b]$. Предполагается, что подынтегральная функция f – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных. Эта задача отличается от рассмотренных в предыдущей главе тем, что на допустимые функции не наложены ограничения на концах промежутка. Геометрический смысл задачи состоит в том, что из всех кривых, являющихся графиками функций, концы которых расположены на вертикальных прямых $x = a$, $x = b$, необходимо выбрать ту, на которой достигается экстремум функционала.

Первая вариация функционала (3.1) может быть выписана в соответствии с формулой (1.9)

$$\delta J[y,\delta y] = \int\limits_a^b (f'_y(x,y,y')\delta y + f'_{y'}(x,y,y')\delta y')dx. \qquad (3.2)$$

Допустимой вариацией в рассматриваемой задаче является произвольная функция $\delta y(x) \in C^1[a,b]$, $\delta y' = (\delta y)'$.

Если функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, то, в соответствии с необходимым условием экстремума функционала (теорема 4), первая вариация функционала равна нулю для любой допустимой вариации. В частности, она равна нулю для любой функции $\delta y(x) \in C^\infty[a,b]$, обращающейся в ноль на концах промежутка. Тогда, в силу леммы Дюбуа-Реймона, функция $y(x)$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dx} f'_{y'} - f'_y = 0. \qquad (3.3)$$

Условие равенства нулю первой вариации позволяет получить дополнительное необходимое условие экстремума функционала.

Если $f''_{y'y'} \neq 0$, т.е. функционал $J[y]$ является невырожденным, то, в соответствии с теоремой 7, экстремаль является дважды непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\delta J[y,\delta y] = \int\limits_a^b (f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'})\delta y dx + f'_{y'}\delta y \Big|_a^b =$$

$$= \int\limits_a^b (f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'})\delta y dx + f'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - f'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a). \qquad (3.4)$$

Интеграл в правой части (3.4) обращается в ноль, следовательно, если функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, то одновременно с (3.3) должно выполняться условие

$$f'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - f'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a) = 0. \qquad (3.5)$$

Ввиду того, что вариации $\delta y(a)$, $\delta y(b)$ могут быть произвольными, равенство (3.5) эквивалентно двум равенствам

$$f'_{y'}\Big|_{x=b} = 0, \quad f'_{y'}\Big|_{x=a} = 0. \tag{3.6}$$

Условия (3.6) называются естественными краевыми условиями. Таким образом, необходимые условия в задаче с подвижными концами состоят их уравнения Эйлера (3.3) и естественных краевых условий (3.6).

Для функционала $J[y]$ может быть поставлена задача, в которой один конец фиксирован, а второй свободен. Так, например, если фиксирован левый конец (a, y_a), то к уравнению Эйлера добавляются краевые условия

$$y(a) = y_a, \quad f'_{y'}\Big|_{x=b} = 0. \tag{3.7}$$

В случае, когда фиксирован правый конец (b, y_b), а левый свободен, краевые условия имеют вид

$$f'_{y'}\Big|_{x=a} = 0, \quad y(b) = y_b. \tag{3.8}$$

Пример 22 Найдем в вертикальной плоскости xOy гладкую кривую, скатываясь по которой без трения, тяжелая точка достигает данной вертикальной прямой за кратчайшее время. Предположим, что начальной точкой является точка $A(0;0)$, а вертикальная прямая задана уравнением $x = b$. Эта задача является обобщением задачи о брахистохроне (см. пример 17).

Экстремалями рассматриваемого функционала (2.5)

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

является семейство циклоид (2.6)

$$\begin{cases} x = C_1(p - \sin p) + C_2, \\ y = C_1(1 - \cos p). \end{cases}$$

Так как $x = 0$ при $p = 0$, то постоянная $C_2 = 0$, а постоянная C_1 определяется из естественного краевого условия на правом конце

$$f'_{y'}\Big|_{x=b} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=b} = 0$$

Отсюда находим $y'(b) = 0$, т.е. искомая кривая должна пересекать вертикальную прямую $x = b$ под прямым углом. Воспользуемся формулой дифференцирования функции заданной параметрически

$$y' = \frac{y'_p}{x'_p} = \frac{\sin p}{(1-\cos p)} = 0.$$

Так как параметр $p \in (0, 2\pi)$, то $p = \pi$. Из условия $x(p) = b$ получаем $C_1 = b/\pi$.

Таким образом, единственная кривая, удовлетворяющая необходимым условиям экстремума, имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{b}{\pi}(p - \sin p), \\ y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos p). \end{cases}$$

3.2 Задачи с подвижными границами

Рассмотрим задачу об экстремуме функционала

$$J[y, a, b] = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx, \tag{3.9}$$

в случае, когда границы промежутка $[a, b]$ являются подвижными. Предполагается, что подынтегральная функция f – дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных. Функции $y(x)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Воспользуемся схемой получения необходимых условий экстремума функционала, применяемой в классической задаче вариационного исчисления.

Приращение функционала будет зависеть теперь не только от вариации функции δy, но и от вариаций подвижных границ δa, δb. Заметим, что если δy, δa, δb – набор допустимых вариаций, то при достаточно малых значениях параметра α набор вариаций $\alpha\delta y$, $\alpha\delta a$, $\alpha\delta b$ – также будет допустимым.

Следовательно, при фиксированных вариациях δy, δa, δb в окрестности точки $\alpha = 0$ можно определить функцию

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha\delta y, a + \alpha\delta a, b + \alpha\delta b].$$

Если функция $y(x)$ является точкой экстремума функционала $J[y, a, b]$, то функция $\varphi(\alpha)$ будет иметь экстремум при $\alpha = 0$. Если при этом функция $\varphi(\alpha)$ дифференцируема в точке $\alpha = 0$, то, в соответствии с необходимым условием экстремума скалярной функции, должно выполняться равенство $\varphi'(0) = 0$.

Пусть функция $y(x)$ с концевыми точками (a, y_a), (b, y_b) доставляет экстремум функционалу (3.9).

Вычислим производную $\varphi'(\alpha)$. В соответствии с формулой дифференцирования интеграла по параметру для случая, когда от параметра зависят и пределы интегрирования и подынтегральная функция

$$\varphi'(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha\delta a}^{b+\alpha\delta b} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx +$$

$$+ f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')\Big|_{x=b+\alpha\delta b}\delta b -$$

$$- f(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')\Big|_{x=a+\alpha\delta a}\delta a.$$

Тогда

$$\varphi'(0) = \int\limits_a^b (f'_y\delta y + f'_{y'}\delta y')dx +$$

$$+ f(x, y, y')\Big|_{x=b}\delta b - f(x, y, y')\Big|_{x=a}\delta a. \tag{3.10}$$

Преобразуем первое слагаемое в (3.10)

$$\int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y')dx = \int_a^b (f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'})\delta y dx + f'_{y'}\delta y \Big|_a^b .$$

Пусть $\delta y_b = \tilde{y}(b + \delta b) - y(b)$. Тогда, ограничиваясь линейными по δb членами, можно записать

$$\delta y_b = \tilde{y}(b + \delta b) - \tilde{y}(b) + \tilde{y}(b) - y(b) \approx y'(b)\delta b + \delta y(b).$$

Проведя аналогичные рассуждения для левого конца, из (3.10) получим

$$\varphi'(0) = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y')dx + f'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y_b + \tag{3.11}$$
$$+(f - f'_{y'} y')\Big|_{x=b} \delta b - f'_{y'}\Big|_{x=a} \delta y_a - (f - f'_{y'} y')\Big|_{x=a} \delta a = 0.$$

В формулу (3.10) вариации δy, δa, δy_a, δb, δy_b входят линейно. Назовем величину $\delta J[\delta y, \delta a, \delta y_a, \delta b, \delta y_b] = \varphi'(0)$ вариацией функционала $J[y, a, b]$.

Из формулы (3.11) при $\delta a = 0$, $\delta b = 0$ получаем формулу для первой вариации в задаче с подвижными концами, а при $\delta a = \delta y_a = \delta b = \delta y_b = 0$ – первую вариацию в простейшей задаче вариационного исчисления.

Если некоторая функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу $J[y]$, то она, в частности, является экстремумом среди функций, которые имеют с графиком функции $y(x)$ общие концевые точки. Значит, $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Поэтому в формуле (3.11) первое слагаемое равно нулю и необходимое условие экстремума принимает вид

$$f'_{y'}\Big|_{x=b} \delta y_b + (f - f'_{y'} y')\Big|_{x=b} \delta b - f'_{y'}\Big|_{x=a} \delta y_a -$$
$$-(f - f'_{y'} y')\Big|_{x=a} \delta a = 0. \tag{3.12}$$

Пусть теперь функционал $J[y]$ определен на гладких функциях, концы которых лежат на двух фиксированных гладких кривых $y = \psi(x),\ y = \chi(x)$.

Так как концы графиков допустимых функций лежат на фиксированных кривых, то

$$\delta y_a = \psi'(a)\delta a, \quad \delta y_b = \chi'(b)\delta b.$$

Тогда

$$\delta J[\delta y,\, \delta a,\, \delta b] = (f+(\chi'-y')f'_{y'})\Big|_{x=b}\delta b-(f+(\psi'-y')f'_{y'})\Big|_{x=a}\delta a = 0.$$

В силу независимости вариаций $\delta a, \delta b$ получаем краевые условия в рассматриваемой задаче.

$$(f + (\chi' - y')f'_{y'})\Big|_{x=b} = 0, \quad (f + (\psi' - y')f'_{y'})\Big|_{x=a} = 0. \qquad (3.13)$$

Краевые условия (3.13) называются условиями трансверсальности. Говорят, что кривая $y(x)$ трансверсальна кривым $y = \psi(x),\ y = \chi(x)$.

Пример 23 Выясним смысл условий трансверсальности для часто встречающегося в приложениях функционала

$$J[y] = \int\limits_a^b A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Пусть функционал $J[y]$ определен на гладких функциях, концы которых лежат на двух фиксированных гладких кривых $y = \psi(x),\ y = \chi(x)$. В данном случае

$$f(x, y, y') = A(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$
$$f'_{y'} = A(x, y)\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y' f}{1 + y'^2}.$$

Следовательно

$$f + (\psi' - y')f'_{y'} = f + \frac{y'f}{1 + y'^2}(\psi' - y') =$$
$$= f(1 + \frac{\psi' y' - y'^2}{1 + y'^2}) = \frac{f(1 + \psi' y')}{1 + y'^2}.$$

В данном случа условия трансверсальности имеют вид

$$y'(a) = -\frac{1}{\psi'(a)}, \quad y'(b) = -\frac{1}{\chi'(b)},$$

т.е. в данной задаче условие трансверсальности кривой $y(x)$ кривым $y = \psi(x)$, $y = \chi(x)$ есть условие ортогональности этим кривым.

3.3 Задачи

Найти функции, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума в задаче минимизации функционала с подвижными концами

1. $J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 - y)dx \to extr; \quad y(0) = 0.$
2. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2)dx \to extr; \quad y(0) = 1.$
3. $J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2 + 4y\cos x)dx \to extr; \quad y(0) = 0.$
4. $J[y] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (y^2 - y'^2 + 4y\sin x)dx \to extr; \quad y(\pi/2) = 0.$
5. $J[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + y^2)dx \to extr; \quad y(0) = 1.$
6. $J[y] = \int\limits_1^e (xy'^2 + 2x)dx \to extr; \quad y(1) = 0.$

Литература

[1] Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов / В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 488 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып XV).

[2] Васильева, А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева [и др.].– 2-е изд., испр.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.

[3] Карташев А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: Учебное пособие для вузов / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский.– М.: Наука, 1986.– 272 с.

[4] Колмогоров, В. М. Элементы теории функций и функционального анализа / В. М. Колмогоров, С. В. Фомин.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 572 с.

[5] Краснов, М. Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев.– М.: Наука, 1973.–190 с.

[6] Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальныеуравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц.–М.: Наука, 1969.– 424 с.