МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра информатики и вычислительной математики

А.А.Мартынов

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И МЕНЕДЖЕРОВ

Учебное пособие

Издательство "Самарский университет"
2000

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

ББК 22.11
М 294

Мартынов А.А. Основы высшей математики для экономистов и менеджеров: Учебное пособие. - Самара: Изд-во «Самарский университет», 2000. - 68с.

ISBN 5-230-06237-1

Учебное пособие содержит основы математических знаний и предназначено для *самостоятельного* изучения студентами экономического и управленческого профилей всех форм обучения. В пособии представлен широкий спектр основных математических понятий, определений и обозначений, широко используемых в современной экономической литературе. Может использоваться как первичный и самодостаточный материал для освоения математического аппарата в объеме, необходимом для работы с современной литературой по экономическому анализу. Для чтения достаточно знаний в объеме средней школы. Может быть рекомендован студентам младших курсов при освоении курса математики, студентам старших курсов при написании курсовых и дипломных работ, а также для самостоятельного чтения.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.С.Луканов

$$\text{М}\,\frac{1602000000-027}{6\text{К}\,4(03)-2000}\ \text{без объявл}\,.$$

ISBN 5-230-06237-1

Введение

Данное учебное пособие по математике предназначено для *самостоятельного* изучения студентами всех форм обучения, обучающимися по специальностям экономического и управленческого профилей. Основная задача, которая ставилась при составлении пособия, – помочь студенту самостоятельно освоить систему основных математических понятий, определений и обозначений, широко используемую в современной экономической литературе, которая в значительной мере математизирована; дать основные формулировки и представления о таких разделах математики, которые постоянно используются в экономических исследованиях, но которые либо слабо освещены, либо вовсе не упоминаются в математических учебниках для студентов гуманитарных специальностей вузов. Для усвоения материала пособия вполне достаточно математических знаний в объеме средней школы. Пособие может быть рекомендовано студентам младших курсов при освоении курса математики, студентам старших курсов при написании курсовых и дипломных работ, а также просто с целью усвоения математического аппарата для того, чтобы начать работу с первоисточниками по экономическому анализу. Это издание *не* рассматривается как пособие по *всему* курсу высшей математики для указанных специальностей; скорее, это дополнение к тем немногим современным учебникам по математическим дисциплинам, которые используются при изучении курса. Пособие *не* содержит разделов математики, ясное изложение которых можно найти в большинстве математических учебников (например, матричную алгебру), равно как и разделов, используемых при изучении курса "Эконометрика" (теория вероятностей и математическая статистика).

В пособии затронут достаточно широкий спектр математических понятий. Материал дается по возможности строго (и одновременно облегченно), с пояснениями, примерами и комментариями, без доказательств и без дополнительных непринципиальных подробностей, однако и без излишних упрощений, обычно допускаемых в математических учебниках для гуманитарных специальностей.

Пособие включает в себя пять разделов. В первом разделе вводятся основные понятия и обозначения, которые большинству читателей уже знакомы. В остальных четырех разделах излагается материал, связанный с понятием евклидова пространства, различными свойствами функций, квадратичными функциями и функциями специального вида (вогнутые и квази-вогнутые функции). По ходу изложения приводятся различные примеры. В конце пособия приведены задачи для самопроверки.

1. Базовые понятия и обозначения

1.1. Множества

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно принадлежит к так называемым первичным, неопределяемым понятиям. В качестве синонимов слову *множество* часто используются слова *семейство*, *совокупность*, *система*, *набор*, *класс*. Множество может содержать конечное или бесконечное число произвольных объектов. Например, множество присутствующих в аудитории студентов, совокупность живущих сегодня на Земле людей, все выпущенные Волжским автозаводом в прошлом году автомобили, система трех уравнений с тремя неизвестными, множество всех вещественных чисел, семейство звезд в созвездии, все положительные целые числа, – все это может служить примерами множеств.

Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами** (или **точками**). Если x является элементом множества S, то это записывается как $x \in S$ (x принадлежит S), где "$\in$" – символ принадлежности к множеству. Если x не принадлежит множеству S, то это записывается так: $x \notin S$ (x не принадлежит S). Множество может быть представлено при помощи фигурных скобок {} перечислением его элементов. Например, множество, состоящее из трех целых чисел 3, 8 и 42, может быть записано как {3, 8, 42}. Описание множества также может выглядеть следующим образом:

$$\{x : P(x)\} \text{ или } \{x \mid P(x)\},$$

где двоеточие или вертикальная черта разделяют два описания: первое представляет элемент x множества, а второе, $P(x)$, представляет свойства, которым должен удовлетворять каждый элемент множества для того, чтобы ему принадлежать. (Для определенности дальше в качестве разделителя будет использоваться двоеточие.) Представление любого множества в такой форме иногда называют **аксиомой спецификации**. В этом пособии *множество всех вещественных чисел* обозначается через R. Таким образом:

$$R \equiv \{x : x \text{ – вещественное число}\}.$$

Множество точек, принадлежащих окружности единичного радиуса на двумерной плоскости может быть представлено как

$$\{(x, y) : x \in R, y \in R, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Когда число элементов множества конечно, оно называется **конечным множеством**. В противном случае множество называется **бесконечным**, или **континуумом**.

Пусть даны два множества A и B. Если каждый элемент из A является элементом B, говорят, что A является множеством в B, или A есть **подмножество** B; это записывается так:

$$A \subset B.$$

Отметим, что $A \subset A$. Говорят, что два множества A и B равны, если они состоят из одинаковых элементов; это записывается как $A = B$ либо $B = A$ (что часто называют **аксиомой расширения**). Заметим, что утверждение $A \subset B$, где А является подмножеством В, не исключает возможности, что $A = B$. Действительно, если $A = B$, то верно и $A \subset B$, и $B \subset A$. Верно и обратное утверждение: если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется **собственным подмножеством** B.

Пусть даны два множества A и B. Совокупность всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B, называется пересечением множеств A и B и обозначается как $A \cap B$:

$$A \cap B \equiv \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Возможна ситуация, когда два множества A и B не имеют общих элементов, в этом случае в множестве $A \cap B$ нет элементов. Для этого случая вводится специальное понятие "множества, не имеющего элементов", которое называется **пустым множеством** и обозначается как $\varnothing$. Когда $A \cap B$ не имеют общих элементов, т.е. $A \cap B = \varnothing$, множества A и B называются **непересекающимися**. **Разностью** двух множеств A и B (обозначается как $A \setminus B$) называется множество, определяемое как

$$A \setminus B \equiv \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

В этом случае $A \setminus B$ также может быть пустым множеством.

Пусть даны два множества A и B. Совокупность всех элементов, принадлежащих либо множеству A, либо множеству B, образует множество, которое называется **объединением** множеств A и B и обозначается как $A \cup B$:

$$A \cup B \equiv \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Для любого множества A и пустого множества справедливо:

$$A \cap \varnothing = \varnothing \text{ и } A \cup \varnothing = A.$$

Если S является подмножеством множества X, то множество элементов, принадлежащих множеству X, но не принадлежащих множеству S, называется **дополнением** S и обозначается как S^c:

$$S^c \equiv \{x : x \in X, x \notin S\}.$$

Операция объединения (или пересечения) может быть произведена над конечной или бесконечной совокупностью множеств. Например, если $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots,$ – множества, можно рассмотреть выражения:

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i.$$

В действительности, индекс i не обязательно должен быть целым. Например, обозначая через T множество всех вещественных чисел, лежащих в интервале от 0 до 1 (включая границы), можно рассмотреть объединение

$$\bigcup_{t \in T} S_t.$$

Если, например, S_t представляет множество всех людей, живших на Земле в момент времени t, то

$$\bigcup_{t \in T} S_t$$

представляет множество всех людей, живших на планете в течение периода T. Аналогичным образом можно понять следующие выражения:

$$\bigcap_{i=1}^{k} S_i, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i, \ \bigcap_{t \in T} S_t.$$

Пусть даны два множества X и Y. Рассмотрим *упорядоченную пару* (x, y), где $x \in X, y \in Y$. Совокупность всевозможных таких упорядоченных пар называется **прямым произведением** множеств X и Y и обозначается как $X \times Y$. Обычная двумерная плоскость может быть представлена как $R \times R$, что записывается как R^2. Аналогично, R^n обозначает множество:

$$R^n \equiv \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

В общем случае, допустим, что $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ описывает совокупность множеств с изменяющимся от 1 до n индексом и пусть

$$X \equiv X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n.$$

Прямым произведением этой индексированной совокупности множеств, обозначаемым

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \quad \text{или} \quad \mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i,$$

является множество всевозможных упорядоченных последовательностей (x_1, x_2, …, x_n) элементов таких, что $x_i \in X_i$ для каждого i, то есть

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i.$$

x_i называется i-ой **координатой** точки x. Множество индексов {1, 2, …, n} представляет собой **индексное множество**. Индексное множество не обязательно должно быть конечным. Оно может быть бесконечным множеством {1, 2, …, n, …∞}, или континуумом (например, T = [0, 1], T = [0, ∞] и т.д.). В этом случае прямое произведение может быть записано как

$$\mathop{\times}_{i=1}^{\infty} X_i \quad \text{или} \quad \mathop{\times}_{t \in T} X_t.$$

Если заданы две точки a и b в R, причем $a < b$, то запись (a, b), выражающая

$$(a, b) \equiv \{x : x \in R, a < x < b\},$$

обозначает **открытый интервал**. (Различие между введенным обозначением и упорядоченной парой a и b должно следовать из контекста.) Аналогично, множество [a, b], определенное соотношением

$$[a, b] \equiv \{x : x \in R, a \le x \le b\},$$

называется **закрытым интервалом**. Можно также определить

$$(a, b] \equiv \{x : x \in R, a < x \le b\}, [a, b) \equiv \{x : x \in R, a \le x < b\}.$$

Похожим образом определяются множества (a, ∞) и [a, ∞):

$$(a, \infty) \equiv \{x : x \in R, x > a\}, [a, \infty) \equiv \{x : x \in R, x \ge a\}.$$

Примеры

$$[0, 3] \cap (2, 3) = (2, 3), \quad (1, 2) \cap (2, 3) = \varnothing,$$

$$[0, 3] \cup (2, 3) = [0, 3], \quad [1, 2] \cup [2, 3] = [1, 3],$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (0, 1/i) = \varnothing, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} (-1/i,\ 1/i) = \{0\}.$$

1.2. Логические высказывания

Пусть P и Q – два высказывания (утверждения), каждое из которых может быть либо истинным, либо ложным. Тогда высказывание типа "если P, то Q" утверждает, что если высказывание P истинно, то Q тоже истинно, и *это все, что означает это высказывание*. Заметим, что если P ложно, то Q может быть истинным или ложным. В бытовом понимании истолкование высказывания "если P, то Q" может быть неоднозначным. Рассмотрим в качестве примера высказывание: "Если на экзамене по этому предмету студент получит неудовлетворительную оценку, то ему придется пересдавать экзамен". В контексте этого высказывания студент понимает, что если он получит оценку выше неудовлетворительной, ему не нужно будет пересдавать экзамен. Иными словами, в этом примере "если P, то Q" трактуется не только как "если P истинно, то Q истинно", но и как "если P не выполняется (ложно), то Q также не выполняется (ложно)". Однако в математике последняя трактовка считается запрещенной.

В качестве сокращенной записи выражения "если P, то Q" используется следующая форма:

$$P \Rightarrow Q,$$

Которая читается как "из P следует Q" либо как "P логически влечет (или просто влечет) Q". Теперь вышеприведенное обсуждение может быть сформулировано в виде:

$(P \Rightarrow Q)$ не обязательно влечет $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$.

(Здесь значок $\neg$ читается как "не" и выражает операцию логического отрицания.)

Если число может быть представлено в виде отношения двух целых чисел, оно называется **рациональным числом**. Следовательно, высказывание "если x – положительное целое число, то x есть рациональное число" является корректным. Однако утверждение "если x – не положительное целое число, то x не есть рациональное число" *неправильно* (рассмотрим в качестве примера $x = -1$, ½ и т.д.). В высказывании $(P \Rightarrow Q)$ P называется **гипотезой**, а Q – **заключением**, или **выводом**.

Если задано высказывание $(P \Rightarrow Q)$, то высказывание $(Q \Rightarrow P)$ называется **обратным** высказыванию $(P \Rightarrow Q)$. Даже если $(P \Rightarrow Q)$ истинно, обратное высказывание не обязательно должно быть истинным. Например, высказывание, обратное "если x – положительное целое число, то x есть рациональное число", т.е. "если x – рациональное число, то x есть положительное целое число", неверно.

Если высказывание ($P \Rightarrow Q$) истинно, то P называется **достаточным условием** для Q, а Q называется **необходимым условием** для P. Если оба утверждения ($P \Rightarrow Q$) и ($Q \Rightarrow P$) истинны, то P называют **необходимым и достаточным условием** для Q, а Q называют **необходимым и достаточным условием** для P. В этом случае относительно высказываний P и Q говорят, что они **(логически) эквивалентны**. Записывается это как:

$P \Leftrightarrow Q$ (или $Q \Leftrightarrow P$).

Если задано высказывание ($P \Rightarrow Q$), то высказывание ($\neg Q \Rightarrow \neg P$) называется **антитезой** высказывания ($P \Rightarrow Q$). Например, антитезой утверждения "если x – положительное целое число, то x есть рациональное число" является высказывание "если x не является рациональным числом, то x не является положительным целым числом". Если ($P \Rightarrow Q$) истинно, его антитеза ($\neg Q \Rightarrow \neg P$) также истинна. Обратно, если высказывание ($\neg Q \Rightarrow \neg P$) истинно, его антитеза ($P \Rightarrow Q$) также истинна. Таким образом, высказывание и его антитеза – это две возможности сказать одно и то же, они логически эквивалентны, т.е.:

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Этот факт часто используется при различных доказательствах. Чтобы доказать утверждение ($P \Rightarrow Q$), можно доказать эквивалентное ($\neg Q \Rightarrow \neg P$). Подробнее, предположим, что Q не выполняется (ложно). Тогда, предполагая, что P выполняется (истинно), получим противоречие в том и только в том случае, если утверждение ($P \Rightarrow Q$) верно. Такой метод доказательства от противного называется **аргументом антитезы** и часто оказывается полезным при доказательстве "интуитивно очевидных" утверждений.

Для того, чтобы применить аргумент антитезы, необходимо знать, как образуется высказывание (такое, как "не P"), которое называется **отрицанием** P. В большинстве случаев это не вызывает особых затруднений. Однако затруднения могут возникнуть, когда P является утверждением, содержащим фразы "для всех" или "для некоторых". Эти фразы могут быть заменены выражениями, соответственно, "для любого" и "для, по крайней мере, одного". Указанные фразы называются **логическими квантификаторами**, или **кванторами** (для первого квантора (всеобщности) используется специальный значок $\forall$, для второго квантора (существования) – значок $\exists$). Отрицание высказывания "P выполняется для *всех* x в X" выглядит как "P не выполняется для, *по крайней мере, одного* x в X". Отрицание высказывания "P выполняется для, *по крайней мере, одного* x в X" выглядит как "P не выполняется для *всех* x в X".

1.3. Функции

Пусть даны два множества X и Y. Если каждому элементу из X можно определенным образом поставить в соответствие элемент из Y, то говорят, что f есть **отображение** (или **функция**) из X в Y:

$$f : X \to Y,$$

а правило сопоставления элементов из Y элементам из X обозначают как $f(x)$. Вот несколько хорошо известных примеров функций:

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = \sin x.$$

Если $Y \subset R$, функция называется **вещественной**. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y (или что отображение f отображает число x в число y), и пишут $y = f(x)$. Число y называется **значением** функции f в точке x. Переменную y называют **зависимой** переменной, а переменную x - **независимой** переменной (или аргументом). Если задана функция $f : X \to Y$, то множество X называется **областью определения** (или существования) функции, а множество $f(X)$:

$$f(X) \equiv \{ f(x) : x \in X\},$$

- множеством значений функции (или **областью изменения** функции) f, где $f(x)$ еще называется **образом** числа x при отображении f. Например, область изменения функции e^x есть $(0,\infty)$, а множество значений функции sin x есть [-1, 1]. Термины **отображение**, **преобразование**, **оператор**, **функция** часто используются в качестве синонимов. Таким образом, "f: $X \to Y$" может читаться как "f есть отображение из X в Y ", "f отображает X в Y" и т.д.

Кроме буквы f для обозначения функции используют и другие буквы, например: $y = g(x)$, $y = F(x)$, $s = h(t)$, $v = \varphi(s)$.

Если каждому x в X отображение f ставит в соответствие больше, чем один элемент в Y, то функция f называется **многозначной функцией**. В случае, когда каждому элементу из X соответствует только один элемент из множества Y, функция называется **однозначной функцией**, или просто **функцией**. В данном пособии термин "функция" отождествляется с понятием однозначной функции. Даже в случае однозначной функции возможна ситуация, когда более одного элемента из X связывается функцией f с одним значением из Y. В качестве простого примера можно привести функцию

$f : R \to R$, $f(x) = a$ (= константа) для всех x в R, которая называется **постоянной функцией**. Другим примером может служит функция $f(x) = \sin x$, если только область определения функции не ограничивать, скажем, интервалом $[0, \pi/2]$.

Пусть задана функция $f : X \to Y$. Тогда множество

$$\{(x, y) : (x, y) \in X \times f(X), y = f(x)\}$$

называется **графиком** функции f. График функции может представлять собой некоторую "сплошную" линию (например, $y = a$, $y = x^3$, $y = \log(x)$), а может состоять из отдельных точек, например, график функции $y = n!$.

Пусть задана функция $f : X \to Y$, где $y = f(x)$. Определим функцию f^{-1}:

$$f^{-1} : Y \to X, \text{ где } x \in f^{-1}(y) \text{ в том и только в том случае, если } y = f(x).$$

Функция f^{-1} называется **обратной** функцией f. Заметим, что определенная таким образом функция f^{-1} может быть как однозначной, так и многозначной (даже при сделанном предположении об однозначности функции f). Например, пусть $f : R \to R, f(x) = x^2 + 1$. Тогда $f^{-1}(2) = \{-1, 1\}$.

В случае, если обе функции f и f^{-1} однозначны, функция f называется **инъективной**, или **инъекцией** (а функции f и f^{-1} – взаимно обратными). Если при этом выполняется еще и дополнительное условие $f(X) = Y$, функция f называется **биективной**, или **биекцией**. Биективное отображение устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между элементами множеств X и Y.

Пусть задана функция $f : X \to Y$ и задано A – подмножество X. Тогда множество $f(A)$, определенное соотношением

$$f(A) \equiv \{y : y = f(x), x \in A\},$$

называется **образом** A при отображении f. С другой стороны, если B – подмножество Y, множество $f^{-1}(B)$, определяемое как

$$f^{-1}(B) \equiv \{ x : x \in X, f(x) \in B\},$$

называется **обратным образом** B при отображении f (или образом B при обратном отображении f^{-1}).

Заметим, что равенства

$$f^{-1}[f(A)] = A \quad \text{и} \quad f[f^{-1}(B)] = B$$

выполняются *не* всегда. Например, рассмотрим функцию f:

$$f : R \to R, f(x) = x^2 + 1.$$

Для этой функции:

$f^{-1}(f([0, 1])) = f^{-1}([1, 2]) = [-1, 1] \neq [0, 1].$

$f(f^{-1}([0, 2])) = f([-1, 1]) = [1, 2] \neq [0, 2].$

Пусть даны функции f и g :

$f : X \to Y$, g: $f(X) \to Z$, где $f(X) \subset Y$.

Определим функцию h:

$h : X \to Z$, $h(x) \equiv g[f(x)]$.

Функция h получена путем применения вначале функции f, а затем функции g. Такая функция h называется **сложной функцией** от f и g и записывается как $h \equiv g\circ f$. Например, пусть f и g определены как

$f : R \to R$, где $f(x) = x^2 + 1$,

$g : R \to R$, где $g(x) = 2x$.

Тогда сложная функция $h(x) = (g\circ f)(x) = 2(x^2 + 1)$. Отметим различие между полученным результатом и $(f \circ g)(x) = (2x)^2 + 1$.

1.4. Вещественные числа

Рассмотрим множество R всех вещественных чисел. Пусть S - подмножество в R. Если существует вещественное число b, такое, что $x \leq b$ для всех x в S, то говорят, что множество S **ограничено сверху**, а b называется **верхней гранью** множества S. В общем случае, S может не иметь верхней грани, однако если S – ограниченное сверху множество, то оно имеет бесконечно много верхних граней. Например, интервал $(0, \infty)$ не имеет верхней грани, тогда как в интервале $(0, 1)$ число 1 является верхней гранью (а любое $x \geq 1$ также является верхней гранью множества $(0, 1)$).

Пусть S - подмножество в R, ограниченное сверху. Наименьшая из верхних граней ограниченного сверху множества S называется **точной верхней гранью** множества S или **супремумом** (supremum (лат.) – наивысшее) и обозначается символом $\sup S$. Фундаментальное свойство системы вещественных чисел состоит в том, что каждое непустое подмножество в множестве вещественных чисел, обладающее верхней гранью, имеет супремум.

Аналогично, говорят, что множество S в R **ограничено снизу**, если существует вещественное число a, такое, что $a \leq x$ для всех $x \in S$. Такое число a называется **нижней гранью** S. (Если S ограничено и сверху, и снизу, оно называется просто **ограниченным**.) Наибольшая из нижних граней ограниченного снизу множества S называется **точной нижней гранью** этого множества или **инфимумом** (infimum (лат.) – наинизшее) и обозначается символом inf S. Каждое непустое подмножество в множестве вещественных чисел, обладающее нижней гранью, имеет инфимум.

Заметим, что sup S (равно как и inf S) может быть, а может и не быть элементом множества S. Например, пусть S - открытый интервал (0, 1). Тогда $\inf S = 0$, $\sup S = 1$, так что ни inf S, ни sup S не входят в множество S.

Пусть дано произвольное множество $S \subset R$. Если sup S существует и если $\sup S \in S$, то sup S называется **максимальным элементом** в множестве S и обозначается символом max S. Аналогично, если существует inf S и если $\inf S \in S$, то inf S называется **минимальным элементом** в множестве S и обозначается символом min S. Итак, запись

$\alpha = \min S$ означает, что $\alpha \in S$ и $\alpha \leq x$ для всех x в S,
$\beta = \max S$ означает, что $\beta \in S$ и $x \leq \beta$ для всех x в S.

2. Евклидово пространство

Пусть R – множество всех вещественных (действительных) чисел. Тогда упорядоченная последовательность из n вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **вектором**. Число n называется **размерностью** x. Как отмечалось раньше, R^n обозначает множество всевозможных (упорядоченных) последовательностей из n вещественных чисел: $R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$, где i-й элемент x_i вектора $x \in R^n$ называется ***i*-й координатой** вектора x. Очевидно, если $n = 1$, то x представляет собой вещественное число (которое называется **скаляром**). **Сумма** двух n-мерных векторов определяется их покоординатным сложением:

$$x + y \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Очевидно, что $x + y \in R^n$. Умножение вектора $x \in R^n$ на произвольный скаляр $\alpha \in R$ производится покоординатным умножением:

$$\alpha x \equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

причем αx может быть также записано как $x\alpha$. Из того, что $x \in R^n$ и $\alpha \in R$ следует, что $\alpha x \in R^n$. **Разность** двух векторов x и y определяется как $x + (-1)y$. Т.е., применяя две определенные выше операции, получим:

$$x - y \equiv (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n).$$

Отметим, что $x + y$ и $x - y$ определены только в том случае, если векторы x и y имеют одинаковую размерность. Для случая $n = 2$ понятия координаты вектора, суммы и разности векторов, произведение скаляра и вектора проиллюстрировано на Рис.1. Здесь, кстати, видно, что (x_1, x_2) – это не то же самое, что (x_2, x_1). Поэтому R^n определяется как множество всевозможных *упорядоченных* последовательностей из n вещественных чисел.

Используя определенные ранее операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр в пространстве R^n, запишем теперь восемь свойств, которые справедливы для любых элементов x , y и z в R^n, а также для скалярных величин α , $\beta \in R$:

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения),

(2) Существует элемент, называемый 0, такой, что $x + 0 = 0 + x$,

(3) Для каждого x существует элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = 0$,

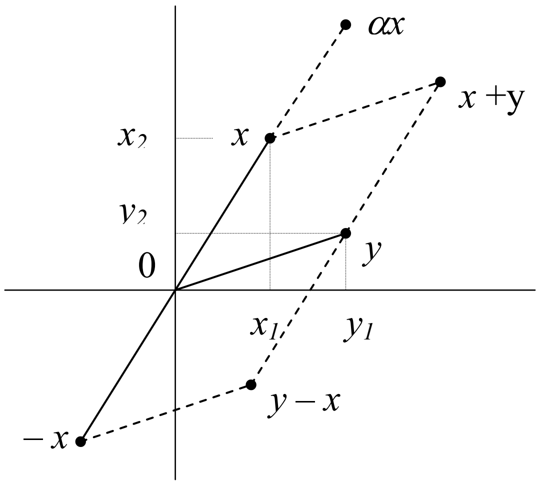

Рис.1. Сложение векторов и умножение вектора на скаляр

(4) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения),

(5) $\alpha\,(\beta\, x) = (\alpha\, \beta)\, x$ (ассоциативность умножения),

(6) $1\, x = x$,

(7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность относительно числового множителя),

(8) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность относительно векторного множителя).

Замечание относительно символа 0: этот символ может обозначать либо скаляр нуль, либо последовательность из n нулей. В последнем случае символ называется **нулевым вектором** (или **нуль-вектором**). (Начало координат на рис.1 есть нулевой вектор.)

Если задано произвольное множество X (не обязательно R^n), если для него определены операции сложения и умножения на скаляр и если выполнены свойства (1) – (8), то X называется (вещественным) **линейным пространством** либо (вещественным) **векторным пространством**, а элемент множества X называется **вектором**. Ясно, что множество R^n с определенными выше правилами сложения векторов и умножения вектора на скаляр является одним из примеров линейного пространства. Однако можно привести много других примеров линейных пространств. Вот один из них.

Пример. Рассмотрим множество S всех вещественных функций, определенных на интервале [0, 1]. Определим "сложение" $f + g$ для всех f и g в S как $f(x) + g(x)$ для каждого x из [0, 1], определим также "умножение на скаляр" $\alpha f(x)$ для каждого x из [0, 1]. Тогда множество S представляет собой линейное пространство.

Фундаментальную роль в теории линейных пространств играет понятие **базиса**. Из-за важности этого понятия приведем основные положения этой теории. Пусть X – произвольное линейное пространство. Если в X задано k векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$, то вектор z, определенный как

$$z \equiv \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j, \quad \alpha_j \in R, \quad j = 1,2,\ldots,k,$$

называется **линейной комбинацией** k векторов. Эти k векторов $x^1, x^2, \ldots, x^k$ в линейном пространств называются **линейно независимыми**, если для $\alpha_j \in R, j = 1, 2, \ldots, k$, из того, что:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j = 0,$$

следует, что $\alpha_j = 0$ для всякого j.

Произвольная (ограниченная либо неограниченная) совокупность векторов S линейно независима, если всякое ограниченное подмножество в S линейно независимо.

Совокупность векторов S называется **линейно зависимой**, если она не является линейно независимой; т.е. S линейно зависима в том и только в том случае, если существует линейная комбинация ограниченного числа векторов в S, например $x^1, x^2, \ldots, x^k$, такая, что

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x^j = 0,$$

для некоторых $\alpha_j \neq 0, j = 1, 2, \ldots, k$.

Рассмотрим понятия линейной независимости и линейной зависимости подробнее на примере R^3. Векторы $e^1 \equiv (1, 0, 0)$, $e^2 \equiv (0, 1, 0)$, $e^3 \equiv (0, 0, 1)$ являются линейно независимыми, поскольку, для любого $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, из

$\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 = 0$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Два вектора e^1 и e^2 также являются линейно независимыми в R^3, поскольку из

$\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 = 0$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

С другой стороны, три вектора $x^1 = (1, 1, 0)$, $x^2 = (0, 0, 1)$, $x^3 = (3, 3, 3)$ – линейно зависимы, т.к.

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = (\alpha_1 + 3\alpha_3,\ \alpha_1 + 3\alpha_3,\ \alpha_2 + 3\alpha_3) = 0,$$

если, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 1$.

Заметим, что любые три вектора x^1, x^2, и x^3 в R^3 являются линейно зависимыми, если какой-то из этих векторов (например, x^3) является нулевым: $x^3 = (0, 0, 0)$. В общем случае, k векторов ($k \le n$) $x^1, x^2, \ldots, x^k$ линейно зависимы в R^n, если какой-то из этих векторов является нулевым вектором. Из определения линейной зависимости следует, что k векторов линейно зависимы в том и только в том случае, если один из этих векторов может быть представлен в виде линейной комбинации оставшихся $k-1$ векторов. Отсюда, в частности, следует, что k векторов в R^n всегда линейно зависимы, если $k > n$.

Пусть X - линейное пространство. Линейно независимое множество S в X, обладающее тем свойством, что каждый вектор x в X может быть представлен линейной комбинацией векторов из S, называется **базисом** пространства X. Базис S может состоять как из ограниченного, так и неограниченного числа элементов. Если число элементов ограниченно, пространство X называется **конечномерным**, в противном случае оно называется **бесконечномерным**. Для заданного линейного пространства X возможно существование многих базисов. Однако можно показать, что любые два базиса заданного линейного пространства связаны между собой взаимно однозначным соответствием. Следовательно, число элементов в любом базисе *конечномерного* пространства то же самое, что и в других базисах. Это означает возможность определить число элементов базиса конечномерного пространства как **размерность** пространства.

Для R^n обычная декартова система координат, т.е n векторов $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, …, $(0, 0, \ldots, 1)$, каждый из которых состоит из n элементов, образуют *базис* в R^n, поскольку любой вектор в R^n может быть представлен в виде линейной комбинации этих n векторов. Следовательно, размерность R^n равна n.

Фундаментальным результатом теории базисов является доказываемое утверждение о том, что *каждое линейное пространство обладает базисом*.

Для упрощения дальнейшего изложения вернемся в R^n. Для любых двух точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в R^n определим правило умножения x и y следующим образом:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Это произведение называется **(евклидовым) внутренним произведением** или **скалярным произведением** x и y, где $x{\cdot}y$ есть вещественное число. Сформулированное правило определяет для произвольных точек x, y и z вещественную функцию со следующими свойствами:

$x \cdot y = y \cdot x$,

$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$, для любых $\alpha, \beta \in R$,

$x \cdot x \geq 0$, а $x \cdot x = 0$ в том и только в том случае, если $x = 0$.

В R^n скалярное произведение может быть использовано для определения хорошо известного геометрического понятия "расстояния". Для пары элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в R^n определим $d(x,y)$ следующим образом:

$$d(x, y) \equiv [(x - y) \cdot (x - y)]^{1/2} = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{1/2}.$$

Величина $d(x,y)$ называется **(евклидовым) расстоянием** между x и y. Для $n = 2$ определенная таким образом величина совпадает с обычным понятием расстояния, что и продемонстрировано на рис.2.

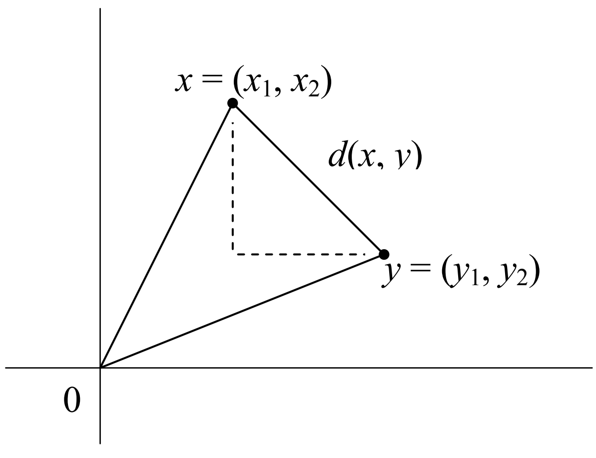

Рис.2. Иллюстрация (евклидова) расстояния

Евклидово расстояние представляет собой вещественную функцию, удовлетворяющую следующим свойствам для любых x и y:

$d(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$,

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (неравенство треугольника).

Из этих свойств, в свою очередь, следуют еще два:

$d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = d(y, x)$.

Если для произвольного множества X можно определить вещественную функцию с указанными свойствами для любых x и y в X, то X называется **метрическим пространством**, (а d называется **метрикой**). Упомянутые свойства являются *определяющими свойствами* метрического пространства. Множество R^n является только одним примером метрического пространства. Отметим, что метрическое пространство, определенное с помощью вышеуказанных свойств, *не* обязано представлять собой линейное пространство, поскольку в этих свойствах отсутствует векторное сложение и умножение вектора на скаляр. Следующий пример демонстрирует это.

Пример. Рассмотрим произвольное непустое множество X и определим $d(x, y)$ для любых x и y в X:

$d(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$.

Видно, что $d(x, y)$, определенное таким образом, удовлетворяет определяющим свойствам метрического пространства, следовательно, X представляет собой метрическое пространство. Конечно же, X не обязано являться линейным пространством.

Если задана точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в R^n, то евклидово расстояние между x и началом кординат, $d(x, 0)$, называется **(евклидовой) нормой** x и обозначается как $\|x\|$:

$$\|x\| \equiv d(x,0) = (x \cdot x)^{1/2} = [\sum_{i=1}^{n} x_i^2]^{1/2}.$$

Аналогичным образом, $d(x, y) = \|x - y\|$. Можно показать, что евклидова норма удовлетворяет следующим трем свойствам для всех x и y:

$\|x\| \geq 0$, а $\|x\| = 0$ в том и только в том случае, если $x = 0$.

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника),

$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для любых $\alpha \in R$.

Пусть дано произвольное *линейное пространство X*. Если определена вещественная функция, называемая **нормой**, удовлетворяющая перечисленным свойствам, то X называется **нормированным линейным пространством** (или **нормированным векторным пространством**).

Замечание. Указанные три свойства являются *определяющими свойствами* нормированного линейного пространства. Требование, чтобы X было линейным пространством (а не произвольным множеством), объясняется наличием в определяющих свойствах операций векторного сложения и умножения вектора на скаляр. Выбор нормы не является единственным. Например, R^n – нормированное линейное пространство с евклидовой нормой, но оно также может быть линейным пространством со следующей нормой:

$$\|x\| \equiv \max |x_i|,\ 1 \le i \le n, \text{ или}$$

$$\|x\| \equiv \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Итак, в R^n скалярное произведение порождает понятия расстояния и нормы (которое есть расстояние от точки до начала координат), т.е.:

$$\|x\| = (x \cdot x)^{1/2} = d(x, 0),$$

$$\|x - y\| = [(x - y)\cdot(x - y)]^{1/2} = d(x, y),$$

где $d(x, y)$ обозначает евклидово расстояние между x и y. Учитывая это и возвращаясь к двумерному случаю, вспомним из тригонометрии:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\|\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi \qquad (*)$$

Это соотношение иллюстрирует рис.3. Два вектора $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ на рисунке обозначены как OA и OB, где координаты точки A - (x_1, x_2). Расстояние OA представляется величиной $\|x\| = (x^2_1 + x^2_2)^{1/2}$, а OB – величиной $\|y\|$. Расстояние AB представляется величиной $\|x - y\|$, где $x - y = = (x_1 - y_{1,} x_2 - y_2)$. Вектор $x - y$ на рисунке обозначен как OC. Длина OC равна величине $\|x - y\|$, которая, в свою очередь, равна длине AB.

Из равенства (*) легко получить следующее соотношение:

$$x \cdot y = \|x\|\,\|y\|\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

где θ – угол между двумя векторами x и y.

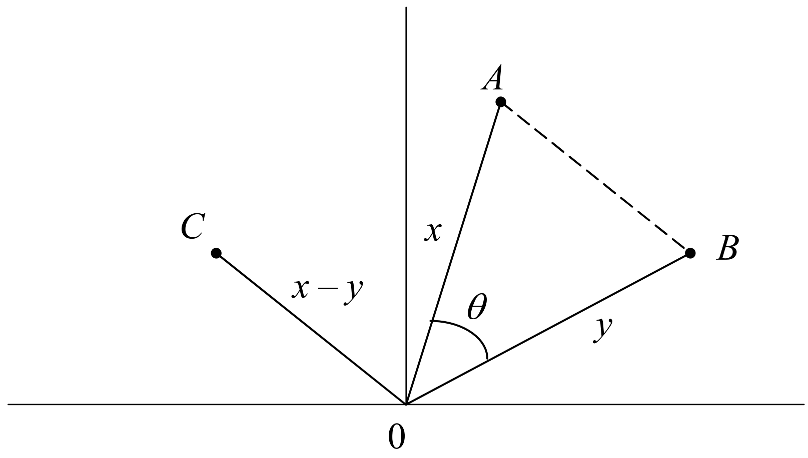

Рис. 3. Иллюстрация соотношения (*)

Последние два равенства получены для двумерного случая. Для n-мерного случая справедливо соотношение:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \cdot y), \quad \text{для } x, y \in R^n .$$

Определим **угол** θ между x и y в R^n при помощи вышеприведенного равенства:

$$\cos\theta \equiv (x \cdot y)/(\|x\|\,\|y\|), \text{ или}$$

$$\theta \equiv \arccos\,[(x \cdot y)/(\|x\|\,\|y\|)] \;\; (\theta \equiv \cos^{-1}\,[(x \cdot y)/(\|x\|\,\|y\|)]).$$

Здесь теорема для двумерного случая использована как определение для n-мерного случая. Поскольку $\cos\theta$ изменяется в пределах от -1 до 1, необходимо показать, что

$$(x \cdot y)^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2 \text{ для всех } x, y \in R^n .$$

Это неравенство известно как **неравенство Коши – Шварца**. Чтобы доказать его, используем произвольное вещественное число α и рассмотрим

$$\|x-\alpha y\|^2 = \|x\|^2 - 2\alpha\,(x \cdot y) + \alpha^2 \|y\|^2 .$$

Поскольку при $\|y\| = 0$ неравенство Коши-Шварца выполняется с очевидностью, предположим, что $\|y\| \neq 0$. Тогда, полагая $\alpha = (x \cdot y)\,/\,\|y\|^2$ и подставляя это значение в правую часть последнего равенства, получим:

$$0 \le \|x-\alpha y\|^2 = [\,\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2]\,/\,\|y\|^2,$$

откуда сразу же получаем неравенство Коши-Шварца.

В двумерном случае векторы x и y имеют очевидное геометрическое представление. Для этого случая можно утверждать, что:

(а) $x \cdot y > 0$, если угол между x и y – острый (т.е. меньше 90°),

(б) $x \cdot y = 0$, если $\theta = \pi/2$, т.е. если x и y ортогональны,

(в) $x \cdot y < 0$, если угол между x и y – тупой (т.е. между 90° и 180°).

В общем случае говорят, что два вектора x и y **ортогональны**, если $x \cdot y = 0$. Приведем примеры ортогональности двух векторов в пространстве R^3:

а) x = (1, 0, 0), y = (0, 1, 0);

б) x = (1, 2, 3), y = (5, 2, -3).

В R^n любые два вектора из n векторов (1, 0, …, 0), (0, 1, …, 0), …, (0, 0, …, 1) ортогональны. Вспомним, что эти n векторов образуют базис для R^n. Если любая пара векторов, образующих базис, ортогональна, то такой базис называется **ортогональным базисом**.

Понятие скалярного произведения достаточно часто используется в экономической теории. Например, в теории потребительского выбора предполагается, что потребитель стремится максимизировать степень своего удовлетворения (функцию полезности) при бюджетном ограничении. Пусть p – заданный потребителю вектор цены, а x – вектор потребления (потребительский набор), где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, а $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, обозначая через Y располагаемый доход потребителя, запишем бюджетное ограничение в виде $p \cdot x \leq Y$, где $p \cdot x$ обозначает скалярное произведение p и x ($\Sigma p_i x_i$). Предполагая, что потребитель тратит весь свой доход на потребление, можно записать: $p \cdot x = Y$. Фиксируя x на конкретном потребительском наборе $x°$, полагая $p \cdot x° = Y$ и выбирая другой потребительский набор x, удовлетворяющий равенству $p \cdot x = Y$, получим, что вектор $(x - x°)$ ортогонален ценовому вектору p, поскольку $p \cdot (x - x°) = 0$.

Итак, в этом разделе введено несколько важных понятий, относящихся к R^n, множеству всевозможных n-последовательностей вещественных чисел. Введены: понятие линейного пространства с помощью правил сложения и умножения на скаляр, понятие евклидова внутреннего произведения (скалярного произведения), понятие метрического пространства (с помощью евклидова расстояния), понятие нормированного пространства (с помощью евклидовой нормы). После определения всех этих понятий в R^n назовем это пространство **евклидовым пространством**. Поскольку евклидово пространство является линейным пространством, в нем стандартным образом могут быть определены такие понятия, как линейная независимость (или зависимость) векторов, базисы, размерность.

3. Элементы топологии

3.1. Сходимость

Пусть S – подмножество в R^n. **Последовательность** в множестве S – функция, определенная на множестве всех положительных целых (натуральных) чисел, входящих в S, множество значений которой занумеровано натуральными числами 1, 2, …, q, … и которая записывается как

$$x^1, x^2, \ldots, x^q, \ldots, \text{ или } \{x^q\},$$

где $x^1, x^2, \ldots, x^q, \ldots$ – образы функции (называемые **значениями** или **членами** последовательности). Если задана точка x° в R^n и подмножество S в R^n (x° не обязательно принадлежит S), то последовательность $\{x^q\}$ называется **сходящейся** к x° и записывается

$$x^q \to x^\circ \text{ (при } q \to \infty\text{), или}$$

$$\lim_{q\to\infty} x^q = x^\circ,$$

если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует положительное целое q^* такое, что

$$d(x^q, x^\circ) < \varepsilon \text{ (или } \| x^q - x^\circ \| < \varepsilon\text{) для всех } q \geq q^*,$$

где $d(x^q, x^\circ)$ – евклидово расстояние между x^q и x°, а $\| x^q - x^\circ \|$ обозначает евклидову норму ($x^q - x^\circ$). x° называется **пределом** $\{x^q\}$, а сама такая последовательность называется **сходящейся последовательностью**. Вновь отметим, что x° не обязательно находится в S. Например, пусть S, – интервал (0, 1), – подмножество R. Последовательность $\{1/q\}$, где q – положительные целые числа, – последовательность, чьи значения находятся в S. Точка 0 является пределом этой последовательности, но она не находится в S.

Произвольная последовательность в S, $\{x^q\}$, может иметь, а может и не иметь предела (в этом случае $\{x^q\}$ называется **несходящейся последовательностью**). Однако если предел существует, то доказывается, что он *единственный*. Для предела последовательности (или последовательностей) можно легко доказать следующие соотношения:

из $x^q \to x^\circ$ следует $\alpha x^q \to \alpha x^\circ$ для любых $\alpha \in R$,

из $x^q \to x^\circ$ и $y^q \to y^\circ$ следует $x^q + y^q \to x^\circ + y^\circ$,

из $x^q \to x^\circ$ следует $\| x^q \| \to \| x^\circ \|$,

из $x^q \to x^\circ$ и $y^q \to y^\circ$ следует $(x^q, y^q) \to (x^\circ, y^\circ)$.

Пусть $\{x^q\}$ – последовательность в $S \subset R^n$. Рассмотрим последовательность $\{x^q{}_s\}$, где $q_1 < q_2 < \ldots < q_s < \ldots$. Тогда последовательность $\{x^q{}_s\}$ называется **подпоследовательностью** $\{x^q\}$. Последовательность может содержать бесконечное число подпоследовательностей. Примерами подпоследовательностей последовательности $\{1, 2, 3, \ldots, q, \ldots\}$ могут быть:

$\{1, 3, 5, 6,\ldots\}$, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $\{ 1, 5, 7, 9, \ldots\}$.

Как отмечалось ранее, произвольная последовательность $\{x^q\}$ в S может не сходиться. Но, если сходится, то обладает единственным пределом. В этом случае каждая подпоследовательность этой последовательности является сходящейся и имеет тот же самый предел, что и исходная последовательность. Когда последовательность не имеет предела, ее подпоследовательности могут либо иметь, либо не иметь предела. Например, последовательность $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$ не имеет предела, но ее подпоследовательности $\{0, 0, 0, \ldots\}$ и $\{1, 1, 1, \ldots\}$ имеют пределы 0 и 1 соответственно. В то же время данная последовательность имеет множество несходящихся подпоследовательностей, таких, например, как $\{0, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots\}$.

Понятие предела последовательности часто путают с понятием "граничной точки".

Определение 1. Пусть $S \subset R^n$. Тогда точка x° в R^n называется **граничной точкой** S, если существует последовательность $\{x^q\}$ в $S \setminus \{ x^\circ\}$ такая, что $x^q \to x^\circ$ при $q \to \infty$.

Замечание. Отметим, что x° в этом определении не обязана принадлежать множеству S и что последовательность $\{x^q\}$ выбирается из множества $S \setminus \{ x^\circ\}$, т.е. множества, получаемого из S удалением точки x° (в случае, если x° находится в S). В рассмотренном ранее примере, где в качестве S выбирался открытый интервал (0, 1), точка 0 является граничной точкой множества S при $x^q = 1/q$. С другой стороны, $x^q \to x^\circ$ для $\{x^q\}$, находящейся в S, вовсе не означает, что x° является граничной точкой множества S. Например, пусть S – множество, содержащее единственную точку 1; тогда последовательность $\{1, 1, 1, ..\}$ является сходящейся последовательностью, чьи значения находятся в S, с пределом, равным 1. Но точка 1 *не* является граничной точкой множества S. Поскольку S состоит из единственной точки, оно не может иметь никаких граничных точек. Принципиальным различием между граничной точкой и пределом является то, что первое понятие привязано к понятию множества, тогда как второе связано с понятием *функции*, определенной на множестве натуральных чисел $\{q = 1, 2, \ldots\}$, со значениями в множестве (т.е. $x^q \in S$).

Последовательность $\{x^q\}$ называется **ограниченной**, если существует (неотрицательное) вещественное число α такое, что $\| x^q \| \leq \alpha$ для всех q. Если последовательность $\{x^q\}$ сходится, то она ограничена. Однако обратное неверно. Последовательность может быть ограниченной, но несходящейся.

Когда $n = 1$, т.е. $S \subset R$, $\{x^q\}$ (последовательность на множестве вещественных чисел) называется **числовой последовательностью**. Такая последовательность сходится, если она ограничена *и* если либо $x^1 \leq x^2 \leq x^3 \leq \ldots \leq x^q \leq \ldots$, либо $x^1 \geq x^2 \geq x^3 \geq \ldots \geq x^q \geq \ldots$. Пусть $\{x^q\}$ – ограниченная последовательность вещественных чисел и пусть α^1 – её точная верхняя грань (супремум). Рассмотрим последовательность $x^2, x^3, \ldots$, которая получится из $\{x^q\}$ после удаления x^1. Ограниченность получившейся последовательности следует из ограниченности исходной последовательности $\{x^q\}$. Обозначим её точную верхнюю грань через α^2. Далее рассмотрим последовательность $x^q, x^{q+1}, \ldots$, обозначив ее супремум как α^q, и т.д. Ясно, что $\alpha^1 \geq \alpha^2 \geq \ldots \geq \alpha^q \geq \ldots$. Поскольку последовательность $\{\alpha^q\}$ ограничена, то она сходится. Обозначим ее предел через $\alpha°$. В этом случае $\alpha°$ называется **верхним пределом** последовательности $\{x^q\}$ и записывается как $\lim\sup x^q$.

Аналогично, пусть β^q – точная нижняя грань (инфимум) числовой последовательности $\{x^q\}$. Тогда:

$$\beta^1 \leq \beta^2 \leq \beta^3 \leq \ldots \leq \beta^q \leq \ldots .$$

Очевидно, что последовательность β^q также ограничена, следовательно, она сходится. Обозначим ее предел через $\beta°$. Это число называется **нижним пределом** последовательности $\{x^q\}$ и обозначается как $\lim\inf x^q$.

Пусть теперь $\{x^q\}$– последовательность в R^n. Можно показать, что последовательность $\{x^q\}$ сходится в том и только в том случае, если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует такое q^*, что

$\| x^q - x^r \| < \varepsilon$ для всех $q, r \geq q^*$, или, проще говоря,

$\lim \| x^q - x^r \| = 0$ при $q, r \to \infty$.

Сформулированное условие носит название **условия Коши** (саму последовательность иногда называют **последовательностью Коши**).

Для заданной последовательности $\{x^q\}$ в R^n бесконечная сумма вида $x^1 + x^2 + \ldots + x^q + \ldots$ носит название **ряда**. Сумма конечного числа членов ряда $s^q = x^1 + x^2 + \ldots + x^q$ называется **частичной суммой** ряда.

Ряд $x^1 + x^2 + \ldots + x^q + \ldots$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частичных сумм $\{s^q\}$. Предел этой последовательности сумм называется **суммой** ряда.

Используя условие Коши, можно показать, что если ряд

$$\| x^1 \| + \| x^2 \| + \ldots + \| x^q \| + \ldots$$

для данной последовательности $\{x^q\}$ сходится, то ряд $(x^1 + x^2 + \ldots + x^q + \ldots)$ также сходится. Обратное, вообще говоря, неверно. Ряд $(x^1 + x^2 + \ldots + x^q + \ldots)$ называется **абсолютно сходящимся**, если ряд $(\| x^1 \| + \| x^2 \| + \ldots + \| x^q \| +\ldots)$ сходится.

3.2. Непрерывность

Важным понятием, непосредственно связанным с понятием сходимости последовательности, является понятие непрерывности. Прежде, чем перейти к изучению этого понятия, рассмотрим понятие "предел функции".

Определение 2. Пусть $f : X \to R^m$, где $X \subset R^n$, и пусть x° – граничная точка множества X. Говорят, что $f(x)$ **сходится** к y° в R^m при $x \to x^\circ$ и записывается

$$f(x) \to y^\circ \text{ (при } x \to x^\circ) \text{ или}$$

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = y^\circ,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(x, x^\circ) < \delta$ вытекает $d[f(x), y^\circ] < \varepsilon$, где $d(x, x^\circ)$ – евклидово расстояние между x и x°.

Замечание. Отметим, что в сделанном определении x° не обязательно должно находиться в X. С другой стороны, даже если $x^\circ \in X$, возможно

$$\lim_{x \to x^0} f(x) \neq f(x^\circ).$$

Замечание. Можно показать, что сделанное определение может быть переформулировано в терминах пределов последовательностей, а именно:

$f(x) \to y^\circ$ при $x \to x^\circ$ в том и только в том случае, если $f(x^q) \to y^\circ$ при $x^q \to x^\circ$ для любой последовательности $\{x^q\}$ из множества $X \setminus \{ x^\circ\}$.

Теперь перейдем к понятию непрерывности.

Определение 3. Пусть $f : X \to R^m$, где $X \subset R^n$, и пусть x° - точка в множестве X. Функция f называется **непрерывной** в точке x°, если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует такое вещественное $\delta > 0$, что из неравенства $d(x, x^\circ) < \delta$ следует $d[f(x), f(x^\circ)] < \varepsilon$.

Если это условие не выполняется, функция называется **разрывной** в точке x°, а точка x° называется **точкой разрыва**. Функция f называется **непрерывной функцией в *X***, если она непрерывна в каждой точке X. Если f имеет разрыв хотя бы в одной точке из X, она называется **разрывной функцией**.

Замечание. Можно легко показать, что что данное определение непрерывности (в точке x°) эквивалентно следующему утверждению:

$x^q \to x^\circ$ (при $q \to \infty$) влечет $f(x^q) \to f(x^\circ)$ (при $q \to \infty$).

То есть функция f непрерывна в точке x°, если при стремлении x к x° $f(x)$ стремится к $f(x^\circ)$. (Иными словами, непрерывность сохраняет свойство сходимости.)

Например, очевидно, что функция $f : R \to R$, определенная как $f(x) = \alpha$ (постоянная), непрерывна в R. Используя определение непрерывности, легко можно показать (предлагается в качестве упражнения), что функция $f : R \to R$, определенная как $f(x) = x^2$, непрерывна в R.

Интуитивно, непрерывность функции в точке x° может восприниматься в виде графика функции $f(x)$, который в точке x° не имеет "дырки". Однако, такая интерпретация может ввести в заблуждение. На Рис.4 демонстрируются три вида разрывов (в точке x°), где $f : R \to R$.

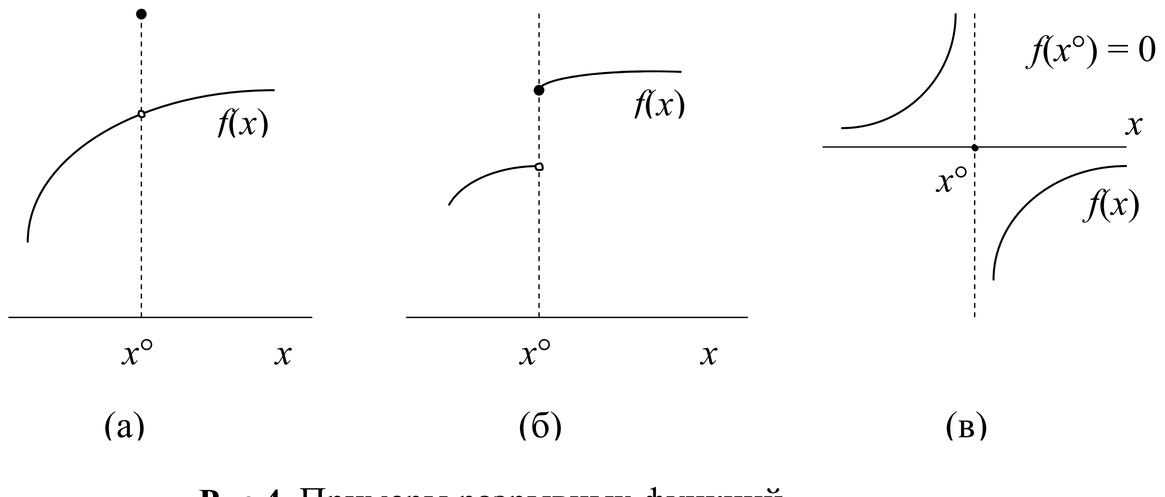

Рис.4. Примеры разрывных функций

На рис.4 (а) и (б) видно, что и $\lim f(x)$ при $x \to x^\circ$ для $x > x^\circ$, (называемый **односторонним пределом функции справа**), и $\lim f(x)$ при $x \to x^\circ$ для $x < x^\circ$, (называемый **односторонним пределом функции слева**), существуют и конечны, тогда как на рис.4(в) ни односторонний предел функции справа, ни односторонний предел функции слева не являются конечными. В первых двух случаях (существуют односторонние пределы функции справа и слева) точка разрыва x° называется **точкой разрыва 1-го рода**. Возможна такая функция, которая *нигде* не является непрерывной. Одним из примеров такой функции является **функция Дирихле**, – функция, равная единице в рациональных точках и нулю в иррациональных точках (напомним, что рациональное число определяется как отношение двух целых чисел).

Пусть f, g: $R^n \to R^m$; определим $f + g, f - g, \alpha f\,(\alpha \in R\,), f \cdot g$ (внутреннее произведение) как:

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), \alpha f(x), f(x) \cdot g(x).$$

Если $m = 1$, можно определить частное f / g: $f(x) / g(x)$, где $g(x) \neq 0$. Определим также $\| f \|$ и $f \circ g$ как:

$$\| f(x) \| \text{ и } f[g(x)].$$

Тогда из определения непрерывности выводится следующая теорема.

Теорема 1

(1) Если f и g непрерывны *в точке*, то их алгебраическая комбинация

$$f + g, f - g, \alpha f\,(\alpha \in R\,), f \cdot g \text{ и } f / g\ (g(x) \neq 0)$$

также непрерывна в этой точке.

(2) Если f и g непрерывны в точке, то $\| f \|$ и $f \circ g$ также непрерывны в этой точке.

Замечание. Из сформулированной теоремы следует утверждение о том, что если f и g непрерывны в S, подмножестве R^n, то

$$f + g, f - g, \alpha f, f \cdot g\ , f / g, \ \| f \| \text{ и } f \circ g$$

все непрерывны в S. Отметим, что непрерывность функции $f \circ g$ означает, что *непрерывная функция от непрерывной функции есть также непрерывная функция*.

Из теоремы 1 вытекают следующие утверждения:

(1) Норма $\| x \|$ есть непрерывная вещественная функция в R^n. Внутреннее произведение $f \cdot g$ и евклидово расстояние $d(x, y)$ – непрерывные вещественные функции.

(2) Пусть A – матрица $m\times n$; определим $f: R^n \to R^m$ как $f(x) = Ax$. Тогда $f(x)$ – непрерывная функция.

(3) Пусть $f_i: R^n \to R^m$ и $\alpha_i: R^n \to R$, i = 1, 2, …, k – непрерывные функции в R^n. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x) f_i(x)$$

также непрерывна в R^n.

(4) Любой полином есть непрерывная функция.

(5) "Функция Кобба-Дугласа" (производственная функция)

$$f(x) \equiv x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

есть непрерывная функция.

3.3. Некоторые сведения из топологии

Пусть S – подмножество в R^n. Рассмотрим последовательность x^q (не обязательно сходящуюся) в S. В случае, если последовательность сходится, она имеет единственный предел, который обозначим через x°. Точка x° находится в множестве R^n, но не обязательно в множестве S. Если же она принадлежит S, то S называют "замкнутым множеством".

Определение 4. Пусть S – подмножество в R^n и пусть x^q – последовательность в S. S называется **замкнутым множеством**, если из $x^q \to x^\circ$ (при $q \to \infty$) следует $x^\circ \in S$.

Замкнутое множество является множеством, в котором любая сходящаяся последовательность имеет предел, расположенный в этом множестве; иными словами, замкнутое множество – это *множество, которое замкнуто под предельной операцией*.

В качестве примера замкнутого множества можно привести отрезок, квадрат, куб и т.д. Каждый закрытый интервал $[a, b]$ – замкнутое множество в R. С другой стороны, открытый интервал (0, 1) не является примером замкнутого множества. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим последовательность $1/q$ (q – положительное целое). Это – последовательность, принадлежащая интервалу (0, 1), имеющая своим пределом 0, который *не* принадлежит данному множеству.

Отметим, что множество, состоящее только из одной точки x°, где $x^\circ \in R$, есть замкнутое множество. Множества R^n и $\varnothing$ (пустое множество) также замкнуты.

Из определения замкнутых множеств выводятся следующие важные свойства:

(1) Конечное либо бесконечное пересечение замкнутых множеств есть замкнутое множество; иными словами, если S_α замкнуто для $\alpha \in A$, то

$$\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$$

также замкнуто.

(2) Конечное объединение замкнутых множеств также замкнуто; то есть если S_i замкнуто для $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i$$

также замкнуто.

Поскольку множество, состоящее только из одной точки, является замкнутым множеством, множество, состоящее из ограниченного числа точек, $\{x^1, x^2, \ldots, x^k\}$, также замкнуто (в соответствии со 2-м свойством). Можно показать, что множество S замкнуто в том и только в том случае, если оно содержит все свои предельные точки.

Определим теперь открытое множество.

Определение 5. Пусть S – подмножество в R^n. S называется **открытым множеством**, если его дополнение есть замкнутое множество, то есть если множество S^c – замкнуто, где $S^c \equiv R^n \setminus S$.

Например, каждый открытый интервал (a, b) есть открытое множество в R, поскольку его дополнение $\{x : x \in R, x \leq a$ или $x \geq b\}$ – замкнутое множество (рекомендуется в качестве упражнения показать самостоятельно). Заметим попутно, что ни интервал $(0, 1]$, ни интервал $[0, 1)$ не являются ни замкнутыми, ни открытыми.

Теперь рассмотрим совокупность всех открытых множеств в R^n. Отметим, что само множество R^n, равно как и пустое множество $\varnothing$ являются открытыми множествами (и одновременно замкнутыми множествами). Обозначим совокупность открытых множеств в R^n через τ, а само R^n обозначим через X. Тогда, рассматривая свойства замкнутых множеств, можно видеть, что τ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) $X \in \tau, \varnothing \in \tau$,

(2) $S_i \in \tau$, $i = 1, 2, \ldots, k$, влечет

$$\bigcap_{i=1}^{k} S_i \in \tau,$$

(3) $S_\alpha \in \tau$, для всех $\alpha \in A$ влечет

$$\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \in \tau.$$

Свойство (2) утверждает, что любое конечное пересечение открытых множеств есть открытое множество, а свойство (3) говорит о том, что конечное либо бесконечное объединение открытых множеств также открыто. Отметим, что бесконечное пересечение открытых множеств не обязательно будет открытым. Например, если $\{q\}$ – множество положительных целых, то

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} (-1/q, 1/q) = \{0\},$$

то есть замкнутое множество.

Если для произвольного множества X (оно не обязано быть ни пространством R^n, ни линейным пространством, ни метрическим пространством), можно определить совокупность подмножеств τ, удовлетворяющих свойствам (1) – (3), то такое множество называется **топологическим пространством** с **топологией** τ, и обозначается как (X, τ). Элемент τ в таком абстрактном топологическом пространстве называется "открытым множеством", а "замкнутое множество" определяется как множество, чье дополнение есть открытое множество.

Ранее множество определялось как открытое, если его дополнением было замкнутое множество, а замкнутое определялось как множество, замкнутое под предельной операцией в R^n. На основе характеристик таких открытых множеств были получены аксиомы (1) – (3) для топологического пространства, и стало возможным определение открытого множества на основе этих аксиом. Очевидно, что открытые множества, определенные ранее через понятия замкнутых множеств (в свою очередь, определенные через сходимость в R^n), удовлетворяют этим аксиомам. Однако много *других* множеств также могло бы удовлетворять этим аксиомам и, следовательно, являться топологическими пространствами. Отметим, что эти аксиомы вовсе не требуют, чтобы множество было в R^n, равно как не требуется и его сходимости. Однако для большинства экономических приложений вполне достаточно ограничиться пространством R^n вместе с определенными через сходимость понятиями открытого и замкнутого множеств.

Пусть задана точка x° в R^n. Определим множество N, которое также может быть записано как $N(x)$:

$$N \equiv \{x : x \in R^n, d(x, x^\circ) < \varepsilon\},$$

где d - евклидово расстояние между x и x°. Множество N называется **открытой окрестностью** (или **сферой**) вокруг x° с радиусом ε, или просто **окрестностью** точки x°. Термин "окрестность" трактуется достаточно свободно: N может представлять все пространство R^n (т.е $\varepsilon \to \infty$) либо N может быть достаточно малым (т.е. ε – мало). Легко показать, что любая окрестность представляет собой открытое множество. В действительности "окрестность" точки x° в пространстве R^n иногда определяется как любое открытое множество, содержащее точку x°.

Пусть задано произвольное множество S в R^n. Точка x° называется **внутренней** точкой множества S, если существует окрестность точки x°, содержащаяся в S. Можно показать, что *если любая точка в S является внутренней, то S есть открытое множество*. Более того, можно показать, что *каждая точка открытого множества есть его внутренняя точка*. Совокупность всех внутренних точек S называется **внутренностью** S.

Множество всех предельных точек в S называется **производным множеством** множества S. Объединение S и его производного множества образуют **замыкание** множества S. Если точка относится к замыканию, но не принадлежит к внутренности S, она называется **граничной точкой** S. Совокупность всех граничных точек S называется **границей** множества S. Например, если $S = (0, 1)$, то производное множество – это $[0, 1]$; оно же является замыканием S. Граница S есть $\{0, 1\}$. Если $S = (0, 1) \cup \{2\}$, то производное множество S есть [0, 1], поскольку множество, состоящее из одного элемента, не имеет предельных точек. Замыкание S есть $[0, 1] \cup \{2\}$, а граница S – $\{0, 1, 2\}$.

Используя понятия открытого и замкнутого множеств, можно получить важные характеристики непрерывных функций. Пусть X и Y – подмножества соответственно R^n и R^m; рассмотрим функцию $f: X \to Y$ с $f(x) = y$. Пусть B – подмножество в Y. Обратный образ B, обозначаемый как $f^1(B)$: $f^{-1}(B) \equiv \{x : x \in X, f(x) \in B\}$. Очевидно, $f^{-1}(B)$ является подмножеством X.

Следующие свойства непрерывных функций являются основными.

(1) Функция f непрерывна в X в том и только в том случае, если множество $f^{-1}(B)$ открыто в X всякий раз, когда B открыто в R^m.

(2) Функция f непрерывна в X в том и только в том случае, если $f^{-1}(B)$ замкнуто в X всякий раз, когда B замкнуто в R^m.

Замечание. Отметим, что эти свойства отражают *глобальные* характеристики непрерывных функций в противоположность непрерывности функции в точке, и это достигнуто введением топологических понятий открытого и замкнутого множеств.

Рассмотрим теперь другое фундаментальное топологическое понятие – "компактное множество". Вначале определим ограниченное множество. Подмножество S в R^n называется **ограниченным**, если существует такое число M, что $d(x^1, x^2) \leq M$ для любой пары (x^1, x^2) точек в S.

Теперь определим компактное множество.

Определение 6. Подмножество S множества R^n называется **компактным** (или **компактом**), если S замкнуто и ограничено.

Например, закрытый интервал [0, 1] – компакт в R, тогда как (0, 1), (0, 1] и $[0, \infty)$ – нет.

Некоторые важные свойства компактных множеств собраны в следующей теореме.

Теорема 2.

(1) Множество S в R^n компактно в том и только в том случае, если любая последовательность из S обладает сходящейся подпоследовательностью, чей предел находится в S.

(2) Непрерывный образ компактного множества в R^n также является компактом. То есть, если $f : S \to R^m$ есть непрерывная функция в S, компактном подмножестве R^n, то $f(S)$ также компакт в R^m.

(3) (**Теорема Вейерштрасса**): Непрерывная вещественная функция на компактном множестве S достигает минимума и максимума в S. То есть, если $f : S \to R$ есть непрерывная функция и если S есть компактное множество в R^n, то существуют a и b в S такие, что:

$f(x) \geq f(a)$ для всех x в S , и $f(x) \leq f(b)$ для всех x в S.

Замечание. Для иллюстрации (1) теоремы 2 рассмотрим множество S, состоящее из двух точек в R, 0 и 1, т.е. $S \equiv \{0, 1\}$. Очевидно, что S замкнуто и ограничено, следовательно, оно компактно. Рассмотрим бесконечную последовательность $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$ в S. Ясно, что эта последовательность не сходится, но она имеет сходящиеся подпоследовательности такие, как $\{0, 0, \ldots\}$ или $\{1, 1, \ldots\}$. Это свойство компактных множеств полезно для доказательств многих важных результатов в R^n.

Замечание. Утверждение (3) теоремы 2 (теорема Вейерштрасса) играет важную роль в определении *существования* максимума и минимума при решении экономических оптимизационных задач с ограничениями. (В качестве упражнения предлагается проверить, что непрерывность f, равно как замкнутость и ограниченность S, являются необходимыми для получения заключения о существовании максимума или минимума.)

4. Квадратичные формы

Пусть $A \equiv [a_{ij}]$ – вещественная $n \times n$ матрица, не обязательно симметричная, и пусть $x \in R^n$ – вектор-столбец. Рассмотрим вещественную функцию $Q(x)$, определенную в R^n:

$$Q(x) \equiv x'A\, x$$

$$(= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j),$$

где x обозначает вектор-столбец, а x' – транспонированную матрицу, – вектор-строку. Функция $Q(x)$ называется **квадратичной формой**. Например, если A – матрица 2×2, то $Q(x)$ может быть записана:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1.$$

Если, в частности, $a_{12} = a_{21}$, то формула приобретает вид:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

Заметим, что a_{ij} и a_{ji} в определении $Q(x)$ являются коэффициентами при произведении x_ix_j, а поскольку $x_ix_j = x_jx_i$, то коэффициент при x_ix_j – это $(a_{ij} + a_{ji})$, где $i \neq j$. Если $a_{ij} \neq a_{ji}$ (т.е. если матрица A несимметрична), то можно определить новые коэффициенты:

$$b_{ij} = (a_{ij} + a_{ji}) / 2, \text{ для всех i и j},$$

так что $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$, а $B \equiv [b_{ij}]$ – симметричная матрица. Более того,

$$Q(x) = x'A\, x = x'B\, x, \text{ для всех } x.$$

Это переопределение коэффициентов не изменяет значения Q для любого x. Следовательно, можно рассматривать теорию квадратичных форм в предположении, что матрица A, ассоциированная с квадратичной формой $Q(x) = x'A\, x$, *симметрична*.

Следующее определение является основополагающим в теории квадратичных форм.

Определение 7. Пусть $Q(x) = x'A\,x$ – квадратичная форма.

(1) $Q(x)$ называется **положительно определенной**, если $Q(x) > 0$ для любого x, за исключением $x = 0$, и $Q(x)$ называется **отрицательно определенной**, если $Q(x) < 0$ для всех x, за исключением $x = 0$. Матрица A называется **положительно определенной** (соответственно **определенной отрицательно**), если $Q(x)$ положительно определена (соответственно, определена отрицательно).

(2) $Q(x)$ называется **положительно полуопределенной**, если $Q(x) \geq 0$ для любого x, и $Q(x)$ называется **отрицательно полуопределенной**, если $Q(x) \leq 0$ для всех x. Матрица A называется **положительно полуопределенной** (соответственно **отрицательно полуопределенной**), если $Q(x)$ положительно полуопределена (соответственно, отрицательно полуопределена).

Ясно, что, если $Q(x)$ положительно (отрицательно) определена, то она всегда положительно (отрицательно) полуопределена. Обратное неверно. Также ясно, что нулевая матрица является как положительно, так и отрицательно полуопределенной.

Примеры

(а) Если $x' = (x_1, x_2)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $Q(x) = x'A\,x = x_1^2 + x_2^2$. Следовательно, $Q(x) > 0$ для всех $x \neq 0$.

(б) Если $x' = (x_1, x_2)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то $Q(x) = x'A\,x = 2x_1x_2$. Следовательно, $Q(x)$ может быть отрицательной, положительной или нулевой в зависимости от значений x_1 и x_2.

(в) Если $x' = (x_1, x_2)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $Q(x) = x'A\,x = x_2^2$. $Q(x) \geq 0$ для всех x, но $Q(x) = 0$, если, например, $x' = (1, 0)$.

В этих примерах: матрица A в (а) положительно определена, в (б) матрица A не является ни положительно ни отрицательно (полу)определенной, в упражнении (в) матрица A положительно полуопределена, но не является положительно определенной.

Из определения 7 следуют утверждения:

Если A и B положительно (отрицательно) определены, то матрица $(A + B)$ положительно (отрицательно) определена.

Если A и B положительно (отрицательно) полуопределены, то матрица $(A + B)$ положительно (отрицательно) полуопределена.

Рассмотрим полезный метод выяснения вида определенности конкретной матрицы с помощью миноров.

Пусть дана $n \times n$-матрица $A \equiv [a_{ij}]$. Выпишем следующие $k \times k$ определители, где $k \leq n$:

$$D_k \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Определители D_1, D_2, …, D_n называются **последовательными главными минорами** матрицы A. Рассмотрим теперь определители матрицы A, составленные из элементов, стоящих на пересечении произвольно выделенных её k строк и k столбцов с сохранением их порядка:

$$\check{D}_k \equiv \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \ldots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \ldots & a_{jk} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{ki} & a_{kj} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

Если номера строк, в которых расположен минор, совпадают с номерами столбцов, то определитель $\check{D}_k$ называется **главным минором** матрицы A порядка k.

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\check{D}_1 = a_{11}, a_{22}, \quad \check{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следующая теорема связывает главные миноры и характеристики определенности.

Теорема 3. Пусть A – симметричная $n \times n$ -матрица с квадратичной формой $Q(x) \equiv x'A\, x$. Тогда

(1) A положительно определена в том и только в том случае, если

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0,\ \ldots,\ D\mathrm{n} > 0.$$

(2) A отрицательно определена в том и только в том случае, если

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^{\mathrm{n}} D\mathrm{n} > 0.$$

(3) A положительно полуопределена в том и только в том случае, если

$$\breve{D}_1 \geq 0,\ \breve{D}_2 \geq 0,\ \breve{D}_3 \geq 0,\ \ldots,\ \breve{D}_{\mathrm{n}} \geq 0.$$

(4) A отрицательно полуопределена в том и только в том случае, если

$$\breve{D}_1 \leq 0,\ \breve{D}_2 \geq 0,\ \breve{D}_3 \leq 0,\ \ldots,\ (-1)^{\mathrm{n}} \breve{D}_{\mathrm{n}} \geq 0.$$

Замечание. Поскольку D_{n} – определитель матрицы A, то утверждения (1) и (2) теоремы 3 подтверждают тот факт, что положительно либо отрицательно определенная матрица должна быть невырожденной (*вырожденная матрица, особая (особенная) матрица, сингулярная матрица*, – квадратная матрица, определитель которой равен нулю).

Определители $\breve{D}_{\mathrm{k}}$ в утверждениях (3) и (4) теоремы 3 *не могут* быть заменены на D_{k}. Например, в вышеприведенном примере (в):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad \text{а} \quad \breve{D}_1 = 0; 1.$$

Матрица A *не* является отрицательно полуопределенной (она положительно полуопределена), и можно заметить, что $Q(x) = x'A\, x = x_2^2$.

5. Дифференцирование, вогнутые и квази-вогнутые функции

5.1. Дифференцирование

Рассмотрение материала начнем с определения производной.

Определение 8. Пусть X – открытое множество в R и пусть x° – точка в X. Тогда функция $f: X \to R$ называется **дифференцируемой в точке** x°, если существует вещественное a такое, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^\circ+h)-f(x^\circ)}{h}=a, \text{ или}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^\circ+h)-f(x^\circ)-ah}{h}=0,$$

где $h \neq 0$ и $x^\circ + h \in X$. Величина a называется **производной функции f в точке x°** и обозначается как $f'(x^\circ)$. Если f дифференцируема в каждой точке $x \in X$, то f называется **дифференцируемой функцией в X**.

Фигурирующий в определении производной предел зависит от x°. При изменении x° в X значение $f'(x^\circ)$ также изменяется в R. Следовательно, f' есть функция от x в X, и это может быть записано как $f'(x)$. Поскольку X есть открытое множество, x° есть внутренняя точка X. Это существенно, т.к. величина h, фигурирующая в определении, может быть либо положительной, либо отрицательной. Т.е. $x^\circ + h$ может приближаться к x° с любого направления. Более того, это приближение не обязано быть даже монотонным: оно может осциллировать около значения x°. Понятие производной иллюстрирует рис. 5 (а).

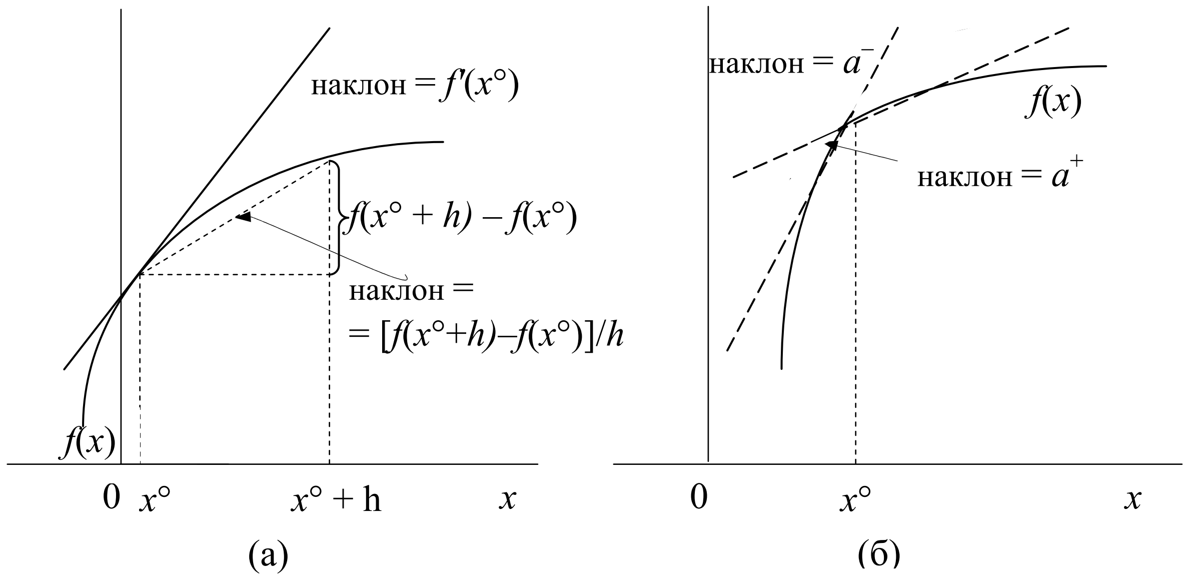

Рис.5. Иллюстрация понятия производной

Как хорошо известно и как это видно на графике, производная характеризует наклон кривой, являясь тангенсом угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x°$. Отметим, что сделанное определение требует, в частности, чтобы оба предела

$$\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(x° + h) - f(x°)}{h} = a^+,$$

$$\lim_{h \to 0, h < 0} \frac{f(x° + h) - f(x°)}{h} = a^-$$

существовали и чтобы они были равны $a^+ = a^-$. (Можно показать, что обратное утверждение также верно, т.е. если a^+ и a^- существуют и если $a^+ = a^-$, то f дифференцируема в $x°$ и $f'(x°) = a^+ = a^-$.) Здесь a^+ называется **производной справа**, а a^- – **производной слева**. Рис.5(б) демонстрирует случай, когда и a^+, и a^- существуют, но они не равны, и, как следствие, $f(x)$ недифференцируема в $x°$.

Другим простым примером, когда и a^+, и a^- существуют, но они не равны, является функция

$f(x) = |x|$, где $a^- = -1$, а $a^+ = 1$ при $x = 0$.

Следовательно, функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в начале координат ($x = 0$). Т.о., непрерывная функция может *не* быть дифференцируемой. Из определения 8 также следует, что если функция разрывна в точке x°, то она не может быть дифференцируема в этой точке. Иными словами, требование непрерывности является необходимым для дифференцируемости, но недостаточным.

Далее, если f определена в R^n, то определение 8 необходимо модифицировать, поскольку h теперь представляет собой вектор, также как и x° – вектор в R^n. Обозначая через $\| h \|$ евклидову норму h, рассмотрим следующее определение 9, являющееся естественным расширением сделанного ранее определения.

Определение 9. Пусть X – открытое множество в R^n и пусть x° – точка в X. Тогда функция $f : X \to R$ называется **дифференцируемой в точке** x°, если существует n-мерный вектор a такой, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^\circ+h)-f(x^\circ)-a\cdot h}{\|h\|}=0,$$

где h – n-мерный вектор, $h \neq 0$, $x^\circ + h \in X$. Вектор a обозначается как $f'(x^\circ)$ и называется **производной функции *f* в точке *x*°**. Если f дифференцируема в каждой точке X, то f называется **дифференцируемой функцией в *X***.

Замечание. В сделанном определении различия между вектором-столбцом и вектором-строкой несущественны. Вспомним, что символ "$\cdot$" обозначает евклидово внутреннее произведение (скалярное произведение). Здесь использована запись $a\cdot h$ вместо $a'\cdot h$, чтобы не спутать значок транспонирования в a' с обозначением производной.

В определении производной весьма полезно использование значка "o" Ландау. Так, последнее определение можно переформулировать в следующей эквивалентной форме: говорят, что f **дифференцируема в *x*°**, если существует такое a в R^n, что

$$f(x^\circ + h) - f(x^\circ) = a \cdot h + o(\| h \|), \quad (*)$$

где $o(\| h \|)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка, чем h, определяемая соотношением:

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}=0, \quad h\neq 0.$$

Этот значок $o(..)$ часто называют ***o*-символом Ландау**. Подробнее, $o(\|h\|)$ – это символ, который обозначает любой скаляр или вектор, который "бесконечно мал" в том смысле, что запись $r(h) = o(\| h \|)$ означает

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}=0,\quad h\neq 0,$$

где $r(h)$ может быть скаляром или вектором. Аналогично, $r(h) = o(\|h\|^2)$ означает, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|^2}=0,\quad h\neq 0.$$

Например, если $h \in R$, то $h^2 = o(\|h\|)$, $h^3 = o(\|h\|^2)$, $1/h \neq o(\|h\|)$. Таким образом, последнее определение (*) может быть переписано в виде:

$$f(x^\circ + h) - f(x^\circ) = a \cdot h + r(h),$$

где $r(h) = o(\|h\|)$ и где $r(h)$ обозначает **остаточный член**. Это соотношение также может быть истолковано как представление функции $f(x)$ (где $x = x^\circ + h$), которая может быть аппроксимирована (приближенно представлена) $f(x^\circ)$, когда h достаточно мало, а ошибка аппроксимации равна $r(h)$, величина которой измеряется $o(\|h\|)$.

Определение 10. Говорят, что вещественная функция f, определенная на открытом множестве X в R^n, **имеет частную производную по x_i в точке x°**, где $x^\circ \in X$, если существует такое вещественное a_i, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x^\circ + e^i h) - f(x^\circ) - a_i h}{h} = 0,$$

где h – скаляр ($h \neq 0$), а e^i – n-мерный вектор, чей i-й элемент равен 1 (i = 1, 2, …, n), а все другие элементы равны 0. Скаляр a_i называется **частной производной функции f по x_i в точке x°** и записывается как $\partial f(x^\circ)/\partial x_i$.

Пусть $f : X \to R$, где X – открытое множество в R^n, и пусть x° – точка в X. Тогда имеет место:

(1) Если вещественная функция $f(x)$, определенная на открытом множестве в X пространства R^{n}, дифференцируема в точке $x^{\circ} \in X$, то она непрерывна в x° и обладает частными производными по каждой координатной переменной; при этом $f'(x^{\circ}) = a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ может быть записана как

$$f'(x^{\circ}) = \left[\frac{\partial f(x^{\circ})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^{\circ})}{\partial x_2}, \Lambda, \frac{\partial f(x^{\circ})}{\partial x_n} \right].$$

(2) Функция f дифференцируема, а её производная $f'(x)$ непрерывна в открытом множестве D в X в том и только в том случае, если f имеет непрерывные частные производные для всех x в D по каждой из своих координатных переменных.

Замечание. Функция f называется **непрерывно дифференцируемой** в D, если она дифференцируема *и* если $f'(x)$ непрерывна в каждой точке x в D. Вектор $f'(x^{\circ})$, записанный как в (1), называется **вектором градиента** функции f в точке x°. Вектор градиента также обозначается как f_x°, $f_x(x^{\circ})$ либо $\nabla f\,(x^{\circ})$. Обозначение f_x часто используется, когда f зависит и от других переменнных, например, $f(x, y)$, где $y \in R^{m}$. В этом случае f_x означает вектор градиента функции f по отношению к x (считая y постоянной величиной).

В этих определениях производных предполагалось, что f – вещественная функция. Можно расширить понятие производной, рассмотрев случай, когда f является векторной функцией.

Определение 11. Пусть X – открытое множество в R^{n} и пусть x° – точка в X. Функция $f : X \to R^{m}$ называется дифференцируемой в точке x°, если существует такая $n \times n$-матрица A с вещественными элементами, что

$$f(x^{\circ} + h) - f(x^{\circ}) = Ah + o(\| h \|), \text{ для } h \in R^{n}, x^{\circ} + h \in X.$$

Матрица A записывается как $f'(x^{\circ})$ и называется **производной функции f в точке x°**. Если f дифференцируема в каждой точке в X, то f называется **дифференцируемой функцией в X**. (Показывается, что матрица A – единственна.)

Замечание. Чтобы выражение Ah в приведенном определении было правильным, h выбрано в виде вектора-столбца. Записывая $f(x)$ в виде $f(x) = [\, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)]$, можно показать, что $f(x)$ дифференцируема в точке x° в том и только в том случае, если $f_i(x)$ дифференцируема в x° для всех i. Матрица A называется **матрицей Якоби** (**якобианом**) функции f в точке x° и записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^\circ)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1(x^\circ)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x^\circ)}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m(x^\circ)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Также используется запись $A = f'(x^\circ)$. Еще возможные обозначения для матрицы Якоби: f_x°, $f_x(x^\circ)$. Как и ранее, обозначение f_x полезно, когда f зависит и от других переменнных, например, $f(x, y)$. В этом случае f_x обозначает матрицу Якоби функции f по отношению к x (считая y постоянной).

Отметим, что на самом деле все определения дифференцируемости или производных одинаковы. Первое определение касается случая, когда $n = m = 1$, второе определение относится к случаю $n \geq 1$, $m = 1$, а последнее определение соответствует $n \geq 1$, $m \geq 1$.

5.2. Некоторые виды функций

Перечислим некоторые важные положения, которые используют понятие производной.

Теорема 4 (теорема о сложной функции). Пусть $f : X \to R^{\mathrm{m}}$, где X – открытое множество в R^{n} и пусть g: $Y \to R^{\mathrm{k}}$, где Y – открытое множество в R^{m}, причем $f(X) \subset Y$. Допустим, что функция f дифференцируема в точке x° в X, а g дифференцируема в $f(x^\circ)$. Тогда функция $h = g \circ f : X \to R^{\mathrm{k}}$, определяемая как $h(x) = g[f(x)]$ дифференцируема в x° и $h'(x^\circ) = g'[f(x^\circ)]\, f'(x^\circ)$, где умножение $g' f'$ производится по правилам перемножения матриц. Поскольку f' есть $m \times n$-матрица, а g' есть $k \times m$-матрица, то произведение $g'f'$ есть $k \times n$-матрица.

Примеры

(a) Пусть $n = k = 1$, а $m > 1$. В этом случае, записывая $f(x)$ в виде $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{\mathrm{m}}(x)]$, $y_i = f_i(x)$, получим:

$$h'(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x}.$$

В частности, если $f(x) = a + bx$, $x \in R$, а $a,b \in R^{m}$, то $h'(x) = g'(y)\cdot b$.

(б) Пусть $n = m = 2$, а $k = 1$ и пусть $z = g(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (система полярных координат).

$$\partial x/\partial r = \cos\theta,\ \partial x/\partial\theta = -r\sin\theta,$$

$$\partial y/\partial r = \sin\theta,\ \partial y/\partial\theta = r\cos\theta.$$

Следовательно, полагая $h(r, \theta) \equiv g(r\cos\theta, r\sin\theta)$, получим

$$\partial h/\partial r = (\cos\theta)g_x + (\sin\theta)g_y,\ \partial h/\partial\theta = (-r\sin\theta)g_x + (r\cos\theta)g_y,$$

где $g_x \equiv \partial g/\partial x$, $g_y \equiv \partial g/\partial y$.

Пусть $f(x, z) = 0$, где f – непрерывно дифференцируемая функция на $R \times R$. Если можно получить такую функцию φ, что $x = \varphi(z)$ и $f[\varphi(z), z] = 0$, то говорят, что $f(x, z)$ "разрешается относительно x". Находя дифференциал функции $f(x, z) = 0$, получим $f_x dx + f_z dz = 0$, где f_x и f_z – частные производные функции f по переменным x и z соответственно. Следовательно, $dx/dz = \varphi' = -f_z/f_x$. Таким образом, чтобы уравнение $f(x, z) = 0$ было разрешимо относительно x, нужно, чтобы $f_x \neq 0$. Это может быть обобщено на случай, когда x является n-вектором, а z – m-вектором. Иными словами, можно получить теорему 5. Теоремы 4 и 5, возможно, являются одними из самых важных при выполнении аналитических преобразований в экономических исследованиях.

Теорема 5 (теорема о неявной функции). Пусть $f : D \to R^{n}$ – непрерывно дифференцируемая функция, где D – открытое множество в $R^{n} \times R^{m}$. Пусть (x°, z°) – точка в D, для которой $f(x^{\circ}, z^{\circ}) = 0$. Если матрица Якоби функции f по отношению к x в точке (x°, z°), т.е. $f_x(x^{\circ}, z^{\circ})$, невырождена, то существует такая единственная непрерывно дифференцируемая функция φ, что $x^{\circ} = \varphi(z^{\circ})$ *и* $f[\varphi(z), z] = 0$ для всех z в некоторой окрестности z°.

Замечание. Теорема 5 устанавливает только *достаточное* условие для *локального* существования функции φ [$= (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$], или "разрешимости" $f(x, z) = 0$ относительно x в виде $x = \varphi(z)$, поскольку $f[\varphi(z), z] = 0$ выполняется только в окрестности z°. Уравнением $f[\varphi(z), z] = 0$ функция $\varphi(z)$ определена *неявно*, отсюда название теоремы. Невырожденность матрицы Якоби f_x не является *необходимым* условием для существования функции φ.

Найдем полный дифференциал $f(x, z) = 0$: $f_x dx + f_z dz = 0$ (где f_x и f_z – матрицы Якоби функции f по отношению к x и z соответственно), откуда получим: $dx = -(f_x^{-1} f_z)\, dz$. Это соотношение дает возможность определить dx_1, dx_2, …, dx_n и, следовательно, все частные производные неизвестной функции φ. Ясно, что для существования этих значений матрица f_x должна быть невырожденной.

Подобным образом, пусть $f(x, z)$ определена как

$$f(x, z) \equiv Ax + z = 0,$$

где A – $n \times n$-матрица, а x и z – n-мерные векторы-столбцы. Для того, чтобы эта система имела единственное решение, матрица A должна быть невырождена; в этом случае $x = -A^{-1}z$. Поскольку матрица A в точности соответствует матрице Якоби функции f по отношению к x, этот пример также показывает, что невырожденность матрицы Якоби в теореме 5 является определяющим условием в существовании неявной функции.

Следующий пример демонстрирует применение теоремы 5 в экономике.

Пример. Обозначим через f_i избыточный спрос (т.е. спрос за вычетом предложения) на i-е благо. Пусть условия рыночного равновесия записаны в виде:

$$f_i(p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0,\ i = 1, 2, \dots, n,$$

или, компактнее: $f(p, \alpha) = 0$, где p_i – цена i-го блага, а α – вектор параметров, которые влияют на избыточный спрос. Если f непрерывно дифференцируема и если матрица Якоби функции f по отношению к p, f_p, невырождена, то существует единственная непрерывно дифференцируемая функция φ такая, что $p = \varphi(\alpha)$. Величина $\partial\varphi_i / \partial\alpha_j$ характеризует влияние изменения j-го параметра на цену i-го блага. (Этот пример относится к разделу **сравнительной (компаративной) статики** курса экономической теории.)

Предыдущая теорема тесно связана с теоремой об обратной функции.

Теорема 6 (теорема об обратной функции). Пусть $f : X \to R^n$ – непрерывно дифференцируемая функция, где X – открытое множество в R^n. Если якобиан $f'(x^\circ)$ не является вырожденным в некоторой точке x° в X, то существует единственная непрерывно дифференцируемая функция φ такая, что

$$\varphi\,[f(x)] = x \text{ для всех } x \text{ в некоторой окрестности } x^\circ,$$

где областью φ является открытое множество $Y \subset f(X)$, причем $f(x°) \in Y$.

Функция φ есть **обратная функция** функции f, которая записывается как f^{-1}. Иными словами, эта теорема утверждает, что непрерывно дифференцируемая функция f обладает обратной функцией ("инвертируема") в окрестности точки $x°$, в которой матрица $f'(x°)$ (якобиан) невырождена. Этот результат широко используется в экономической литературе.

Теорема 7 (теорема Эйлера). Пусть $f(x)$ есть вещественная дифференцируемая функция, определенная на открытом множестве X в R^n. Тогда $f(x)$ является однородной функцией степени m в том и только в том случае, если $f'(x) \cdot x = mf(x)$ для всех x в X, т.е.:

$$f_1(x)\, x_1 + f_2(x)\, x_2 + \ldots + f_n(x)\, x_n = mf(x),$$

для всех x в X, где $f_i \equiv \partial f / \partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (Это уравнение называется **уравнением Эйлера** (для однородных функций).

Замечание. Функция f называется **однородной функцией степени *m***, если для любого вещественного $\alpha \neq 0$:

$$f(\alpha x) = \alpha^m f(x), \text{ для всех } x.$$

Пример. Пусть $f(x)$ – производственная функция. Согласно известному определению, функция f проявляет **постоянную отдачу от масштаба**, если f – однородная функция первой степени. В этом случае уравнение Эйлера может быть записано как

$$f_1(x)\, x_1 + f_2(x)\, x_2 + \ldots + f_n(x)\, x_n = f(x), \text{ для всех } x,$$

где $f_i \equiv \partial f / \partial x_i$ обозначает предельный продукт i-го фактора производства. Одна из важных проблем в теории предельной производительности заключается в поиске ответа на вопрос, является ли выпуск продукции результатом применения всех факторов производства таким образом, чтобы каждый фактор использовался полностью и в соответствии со своей предельной производительностью. Из приведенного выше уравнения следует, что эта задача имеет простое решение, когда производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба.

5.3. Производные высших порядков и гессиан

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая вещественная функция, определенная на открытом множестве X в R^n. Ее производная $f'(x)$ зависит от точки x, в которой берется предел, т.е, иными словами, является функцией от x. Если задана функция $y(x) \equiv f'(x)$, то можно определить ее производную $y'(x)$ (там, где она существует). Эта производная записывается как $f''(x)$ и называется **производной второго порядка (второй производной)** функции f в точке x. Соответственно, $f'(x)$ также называется **производной первого порядка (первой производной)** функции f в точке x. Далее, $f''(x)$ также зависит от x и, следовательно, является функцией x. Таким образом, можно определить **производную k-го порядка** функции f в точке x (там, где она существует), которая записывается как $f^{(k)}(x)$. Если $f''(x)$ существует, то говорят, что f **дважды дифференцируема** в x. Подобным образом, если существует $f^{(k)}(x)$, то говорят, что f **k раз дифференцируема** в x. $f'(x)$ и $f''(x)$ – это принятые обозначения для $f^{(1)}(x)$ и $f^{(2)}(x)$ соответственно. Если функция $f^{(k)}(x)$ дифференцируема *и* ее производная $f^{(k+1)}(x)$ непрерывна для любого x в X (т.е. если $f^{(k)}(x)$ непрерывно дифференцируема), то говорят, что f является **функцией класса** $C^{(k+1)}$. Т.о., если $f \in C^{(1)}$, то f непрерывно дифференцируема. Если $f \in C^{(2)}$, то говорят, что f является **дважды непрерывно дифференцируемой функцией**.

Замечание. Существует множество важных результатов, использующих производные высших порядков. В качестве примера, ограничиваясь случаем, когда x – скаляр, приведем один результат, известный как "формула разложения Тейлора" (ряд Тейлора). Пусть $f : X \to R$, где X – открытое множество в R. Допустим, что f имеет непрерывные производные k-го порядка для каждой точки в X, где $f \in C^{(k)}$. Тогда для каждого x в X функция $f(x)$ может быть представлена в виде следующего ряда ($x°$ – некоторая

$$f(x) = f(x°) + f'(x°)h + \frac{1}{2}f''(x°)h^2 + \mathrm{K} + \frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x°)h^{k-1} + r(h),$$

точка в X):

где $h \equiv x - x°$, а $r(h) = o(\|h\|^k)$. Остаточный член $r(h)$ может быть представлен в уточненной форме:

$$r(h) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(\bar{x})h^k,$$

для некоторой точки, являющейся внутренней по отношению к интервалу, соединяющему x и $x°$. Приведенное разложение называется **формулой**

Тейлора. Эта формула используется для приближенных вычислений функции f и может быть обобщена для случая, когда X – открытое множество в R^n, а не в R.

Вспомним, что $f'(x) = [\partial f(x)/\partial x_1, \ldots, \partial f(x)/\partial x_n]$, где $f: X \to R$, $X \subset R^n$. Заметим, что $g_i(x) \equiv \partial f(x)/\partial x_i$ также является вещественной функцией. Определим подобным образом ее частные производные (если они существуют) и запишем это в виде: $\partial g_i(x)/\partial x_j = \partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j$. Эти частные производные называются **частными производными второго порядка** функции f в точке x.

Например, если $f(x, y) = xy^2$, $x, y \in$ R, то $\partial f/\partial x = y^2$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial f/\partial y = 2xy$, $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x = 2y$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 2x$. Частные производные более высоких порядков ($k = 3, 4, \ldots$) определяются аналогичным образом.

Ранее были даны определения производных высших порядков. Сосредоточимся теперь на производных второго порядка и переформулируем их определение в следующей эквивалентной форме.

Определение 12. Пусть X – открытое множество в R^n и пусть $x°$ – точка в X. Говорят, что функция $f: X \to R$ **дважды дифференцируема в $x°$**, если существуют $\alpha \in R^n$ и вещественная матрица A размерности $n \times n$, такие, что

$$f(x° + h) - f(x°) = \alpha \cdot h + (1/2)h \cdot (Ah) + o(\|h\|^2).$$

n-вектор α называется **первой производной** (производной первого порядка) **функции f в $x°$**, а A называется **второй производной** (производной второго порядка) **функции f в $x°$**, причем α записывается как $f'(x°)$, а A – как $f''(x°)$. Говорят, что функция f – дважды дифференцируемая функция в X, если $f(x)$ дважды дифференцируема в каждой точке в X.

Замечание. В последней формуле h в (Ah) выбрано в виде вектора-столбца, чтобы произведение Ah было корректным. Т.о., полагая $A = [a_{ij}]$, $h \cdot (Ah)$ может быть записано в виде:

$$h \cdot (Ah) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j .$$

Если обозначить транспонированную матрицу h как h', то $h \cdot (Ah)$ может быть записано как $h'Ah$.

Замечание. Если f дважды дифференцируема в точке $x°$, то $\partial f(x°)/\partial x_i$ и $\partial^2 f(x°)/\partial x_i\,\partial x_j$ существуют для всех i и j, а α и A могут быть записаны следующим образом:

$$\alpha = [\partial f(x°)/\partial x_1, \ldots, \partial f(x°)/\partial x_n];$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_1 \partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_2^2} & \Lambda & \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_n \partial x_1} & \Lambda & \Lambda & \dfrac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Матрица A называется **матрицей Гессе** (**гессианом**) функции f в точке $x°$. Функция $f''(x)$ непрерывна в $x°$ в том и только в том случае, если все вторые частные производные $\partial^2 f(x°)/\partial x_i\,\partial x_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) непрерывны в $x°$; в этом случае имеем

$$\frac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x°)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n.$$

(Этот результат известен как теорема Янга.) Следовательно, если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в X, то ее матрица Гессе $f''(x)$ симметрична для всех x в X. Здесь важно отметить наделение $f''(x)$ свойством непрерывности.

Замечание. Если $f''(x)$ не является непрерывной в точке $x°$, то матрица $f''(x°)$ может быть несимметричной. Следующий пример демонстрирует это. Пусть

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)/(x_1^2 + x_2^2), \text{ если } x_1, x_2 \neq 0 \text{ и } f(0, 0) = 0.$$

Простые вычисления показывают, что $\partial^2 f(0, 0)/\partial x_1 \partial x_2 \neq \partial^2 f(0, 0)/\partial x_2 \partial x_1$

Заканчивая, можно привести хорошо известные формулы дифференцирования внутренних произведений и квадратичных форм. Пусть a – вектор-константа в R^n, а A – матрица-константа размерности $n \times n$. Тогда, если $f(x) = a \cdot x$, то $f'(x) = a$, а $f''(x) = \mathbf{0}$ (где $\mathbf{0}$ – нулевая матрица размерности $n \times n$). Если $f(x) = x \cdot (Ax)$, то $f'(x) = 2Ax$, а $f''(x) = 2A$.

5.4. Выпуклые и вогнутые функции

Определение 13. Пусть заданы x и y в R^n. Тогда z, определенное как

$$z \equiv \theta x + (1 - \theta)y,\ 0 \le \theta \le 1$$

называется **выпуклой комбинацией** x и y. Аналогично, пусть заданы k точек $x^1, x^2, \ldots, x^k$ в R^n. Тогда z, определенное как

$$z \equiv \theta_1 x^1 + \theta_2 x^2 + \ldots + \theta_k x^k, \quad 0 \le \theta_i \le 1,\ \ i = 1,2,\ldots,k,\ \ \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$$

называется **выпуклой комбинацией** этих k точек.

Понятие выпуклой комбинации иллюстрирует рис.6, на котором можно видеть, что $z = x$, если $\theta = 1$, и $z = y$, если $\theta = 0$.

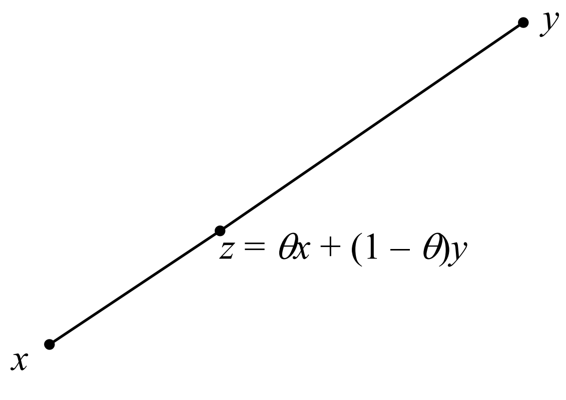

Рис.6. Иллюстрация выпуклой комбинации

Определение 14. Пусть S – подмножество R^n. Множество S называется **выпуклым множеством**, если произвольная выпуклая комбинация любых двух точек этого множества находится в S. То есть, S выпукло, если из $x, y \in S$ следует $\theta x + (1 - \theta)y \in S$, $0 \le \theta \le 1$.

Например, окружность не является выпуклым множеством, но круг, содержащий все внутренние точки окружности, представляет собой выпуклое множество. Понятие выпуклого множества является одним из важнейших в экономическом анализе.

Полезно отметить следующие свойства выпуклых множеств.

(а) Любое пересечение (конечное либо бесконечное) выпуклых множеств есть выпуклое множество.

(б) Если S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ – выпуклые множества в R^n, то их **линейная сумма**, определяемая как

$$S \equiv \{z : z = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k, x^i \in S_i, \alpha_i \in R, i = 1, 2, \ldots, k\},$$

также выпукла.

(в) Если S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ – выпуклые множества в R^n, то их декартово произведение $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ также выпукло.

Теперь введем понятие вогнутой функции.

Определение 15. Пусть f – вещественная функция, определенная на выпуклом (не обязательно открытом) множестве X в R^n. Функция f называется **вогнутой вниз (выпуклой вверх) функцией**, или просто **вогнутой функцией**, если для всех $x, y \in X$ и $0 \le \theta \le 1$

$$f[\theta x + (1 - \theta)y] \ge \theta f(x) + (1 - \theta) f(y).$$

Если неравенство является строгим для всех $x, y \in X$ при $x \ne y$ и $0 \le \theta \le 1$, то f называется **строго вогнутой функцией**.

Функция f называется **выпуклой вниз (вогнутой вверх) функцией**, или просто **выпуклой** (соответственно, **строго выпуклой**) **функцией**, если функция $-f$ – вогнута (строго вогнута).

Очевидно, что если функция является строго вогнутой (или строго выпуклой), то она автоматически вогнута (или выпукла). На рис. 7 (где $X = R$) показан пример строго вогнутой функции. Функция вогнута, если каждая дуга графика этой функции лежит не ниже стягивающей ее хорды. Множество X, на котором определена f, должно быть выпуклым, в противном случае $\theta x + (1 - \theta)y$ может не находиться в X, области определения f.

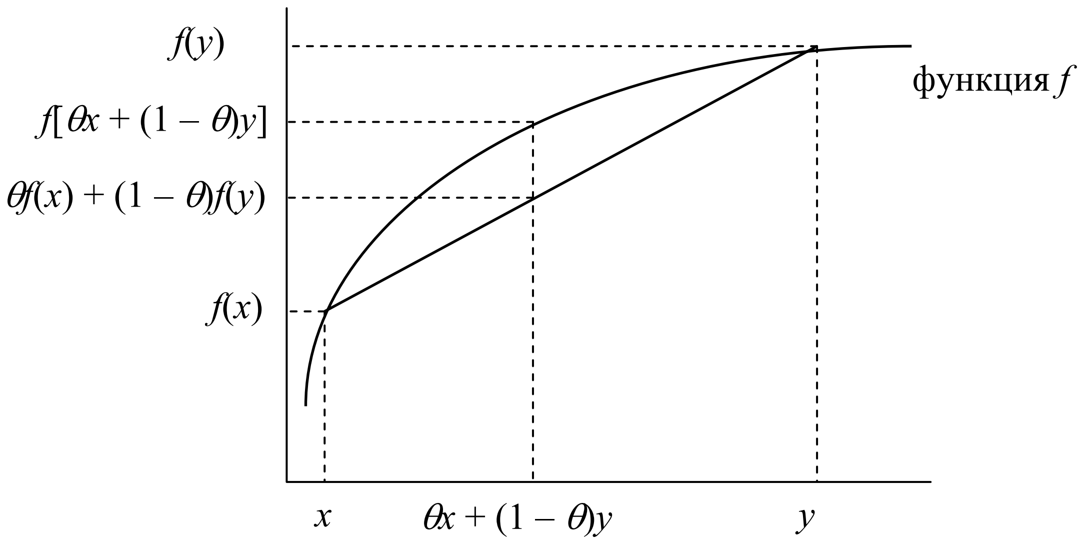

Рис. 7. Иллюстрация вогнутой функции

В частности, функция $f : R^{n} \to R$, определенная как $f(x) = a \cdot x + a_0$ (где a – вектор-константа в R^{n}, а a_0 – скаляр) является одновременно вогнутой и выпуклой функцией (но не строго вогнутой и не строго выпуклой). Понятие вогнутой (или выпуклой) функции является глобальным в том смысле, что определяемое свойство выполняется для всех точек области. С другой стороны, возможно рассмотрение функции, которая локально вогнута (либо выпукла), т.е. функции, которая вогнута (либо выпукла) на некоторых подмножествах области X. Например, тригонометрическая функция

$$f(x) = \sin(x),\ x \in X = [0, 2\pi]$$

является вогнутой функцией на отрезке $[0, \pi]$, тогда как на отрезке $[\pi, 2\pi]$ функция является выпуклой.

Некоторые полезные свойства вогнутых функций приведены в теореме 8.

Теорема 8

(1) Пусть $f : X \to R$ – вогнутая функция, где X – выпуклое множество в R^{n}. Тогда множество L, определенное как

$$L \equiv \{x : x \in X, f(x) \geq \alpha\},$$

является выпуклым для любого $\alpha \in R$.

(2) Всякая неотрицательная линейная комбинация вогнутых функций также вогнута. Т.е., если $f_i : X \to R$, $i = 1, 2, \ldots, k$ – вогнутые функции, а X – выпуклое множество в R^n, то функция

$$f(x) \equiv \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x),\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

также является вогнутой.

(3) Функция $f : X \to R$, где X – выпуклое множество в R^n, является вогнутой в том и только в том случае, если для каждого целого $k \geq 1$

$f(\theta_1 x^1 + \theta_2 x^2 + \ldots + \theta_k x^k) \geq \theta_1 f(x^1) + \theta_2 f(x^2) + \ldots + \theta_k f(x^k)$ для всех $x^i \in X$, $\theta_i \in R$, $\theta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k = 1$.

(4) Функция $f : X \to R$, где X – выпуклое множество в R^n, является вогнутой в том и только в том случае, если

$$\{(x, \alpha) : x \in X,\ \alpha \in R,\ f(x) \geq \alpha\}$$

выпукло в R^{n+1}.

(5) Всякая вогнутая функция непрерывна внутри области определения функции.

Замечание. Множество L в утверждении (1) теоремы 8 часто называют **множеством верхних линий уровня**. Пример такого множества L показан на рис.8 в виде заштрихованной области, где предполагается, что $f(x)$ растет с увеличением значения любой координатной переменной x_i (т.е. $\partial f/\partial x_i > 0$).

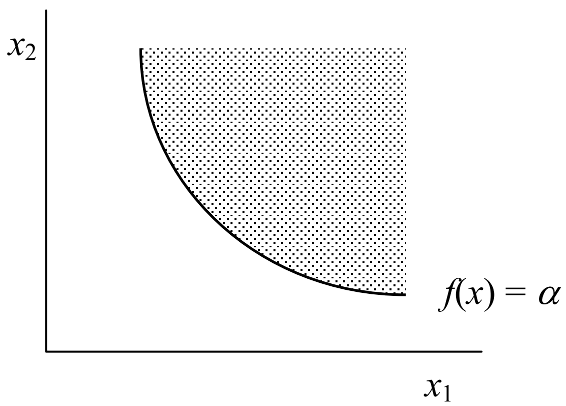

Рис. 8. Множество верхних линий уровня

В теории потребительского выбора в качестве функции $f(x)$ выбирается функция полезности отдельного потребителя, а множество L^*, определенное как

$$L^* \equiv \{x : x \in X, f(x) = \alpha\},$$

известно под названием **кривой (поверхности) безразличия**, или **линии (поверхности) уровня**. В теории производства в качестве функции $f(x)$ выбирается производственная функция отдельного вида продукции, а множество L^* известно под названием **производственной изокванты**, где в качестве α обычно выбирается положительное вещественное число.

Замечание. Часто в качестве области X вогнутой функции f выбирается все пространство R^n; в этом случае f всегда непрерывна, если она вогнута (выпукла) в соответствии с утверждением (5) теоремы 8. С другой стороны, если X – замкнутое множество, вогнутая функция может иметь разрыв в граничной точке. В качестве примера можно привести функцию $f : X \to R$, $X = (0, \infty)$, определенную как

$$f(x) = 1,\ x \neq 0, \text{ и } f(0) = 0.$$

Теорема 9, содержащая полную характеристику дифференцируемых вогнутых либо строго вогнутых функций, часто используется в экономическом анализе.

Теорема 9. Пусть f – дифференцируемая вещественная функция, определенная на открытом выпуклом множестве X в R^n. Тогда функция f является вогнутой в том и только в том случае, если

$$f_x^\circ \cdot (x - x^\circ) \geq f(x) - f(x^\circ), \text{ для всех } x, x^\circ \text{ в } X,$$

где f_x° – вектор градиента функции f в точке x°. Аналогично, функция f является строго вогнутой в том и только в том случае, если приведенное выше неравенство является строгим, т.е.:

$$f_x^\circ \cdot (x - x^\circ) > f(x) - f(x^\circ), \text{ для всех } x, x^\circ \text{ в } X, x \neq x^\circ.$$

Замечание. Рис.9 поясняет теорему 9. Поскольку функция f выпукла (строго выпукла) в том и только в том случае, если функция $-f$ вогнута (строго вогнута), полную характеристику дифференцируемых выпуклых или строго выпуклых функций получим путем обращения неравенства в теореме 9.

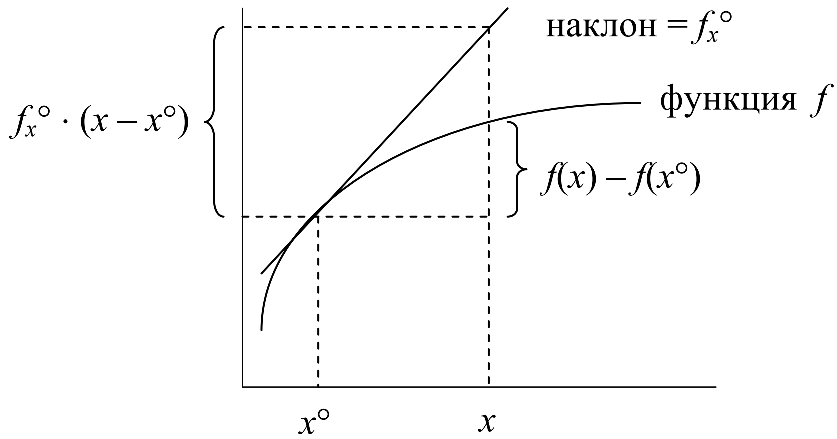

Рис.9. Иллюстрация теоремы 9

Пример. Пусть $y = f(x)$ – производственная функция (предполагаем ее дифференцируемость), где x – вектор факторов производства, а y характеризует объем выпуска продукции. Допустим, что функция $f(x)$ вогнута; тогда, в соответствии с приведенным выше в теореме 9 неравенством для любых двух точек $x°$ и x^1 имеем:

$$f_x° \cdot (x^1 - x°) \geq f(x^1) - f(x°), \text{ и}$$

$$f_x^1 \cdot (x° - x^1) \geq f(x°) - f(x^1).$$

Суммируя эти два неравенства, получим:

$$(f_x° - f_x^1) \cdot (x^1 - x°) \geq 0 \text{ для всех } x° \text{ и } x^1.$$

Выбирая $x^1_j = x°_j$ для всех j за исключением $j = i$, получим:

$$\left[\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x^1)}{\partial x_i}\right](x_i^1 - x_i^0) \geq 0$$

для всех $x°$ и x^1. Отсюда следует, что $\partial f(x^1)/\partial x_i \leq \partial f(x°)/\partial x_i$, если $x^1_i > x°_i$. Поскольку выбор i произволен, это неравенство справедливо для любых $i = 1, 2, .., n$. Следовательно, можно заключить, что если $f(x)$ вогнута, то предельный продукт любого фактора производства ($\partial f/\partial x_i$) не возрастает при увеличении этого фактора. Приведенное рассуждение показывает, что эта фундаментальная экономическая закономерность тесно связана с вогнутостью производственной функции. Подобное обсуждение может быть проведено и в контексте теории потребительского выбора, используя в качестве $f(x)$ функцию полезности потребителя. Например, можно видеть, что если функция полезности вогнута, то предельная полезность любого блага ($\partial f/\partial x_i$) не растет при увеличении потребления этого блага.

Теорема 10 содержит важные характеристики вогнутых и строго вогнутых функций в терминах гессианов.

Теорема 10. Пусть f – дважды дифференцируемая вещественная функция, определенная на открытом выпуклом множестве X в R^n, и пусть $f''(x)$ – ее матрица Гессе (гессиан). Тогда:

(1) Функция f вогнута на X в том и только в том случае, если $f''(x)$ отрицательно полуопределена для всех x в X.

(2) Функция f строго вогнута на X, если $f''(x)$ отрицательно определена для всех x в X.

(3) Функция f выпукла на X в том и только в том случае, если $f''(x)$ положительно полуопределена для всех x в X.

(4) Функция f строго выпукла, если $f''(x)$ положительно определена для всех x в X.

Замечание. Очевидно, что утверждения (3) и (4) следуют из утверждений (1) и (2) соответственно, поскольку f (строго) выпукла, если $-f$ (строго) вогнута.

Вогнутость и выпуклость являются глобальными понятиями. Следовательно, в каждом утверждении теоремы 10 фраза "для всех x в X" является необходимой. Если $f(x)$ вогнута либо выпукла в выпуклом подмножестве S ее области X, множество X в теореме 10 необходимо заменить на S.

Утверждения, обратные утверждениям (2) и (4), вообще говоря, неверны. Например, функция $f(x) = -(x-1)^4$, $x \in R$, строго вогнута, однако $f''(1) = 0$.

Вернемся теперь к теореме 3, которая связывает понятие "определенности" (квадратной) матрицы с ее главными минорами. Пусть $f''(x) = [a_{ij}]$; определим, как и прежде, миноры D_k и $\check{D}_k$. Теперь, комбинируя теорему 10 с теоремой 3, получим теорему 11.

Теорема 11. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция, определенная на открытом выпуклом множестве X в R^n. Тогда:

(1) Функция f вогнута в том и только в том случае, если

$$\check{D}_1 \le 0,\ \check{D}_2 \ge 0,\ \check{D}_3 \le 0,\ \ldots,\ (-1)^n\check{D}_n \ge 0,\ \text{для всех } x \text{ в } X.$$

(2) Функция f строго вогнута, если

$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \ldots, (-1)^n Dn > 0$, для всех x в X.

(3) Функция f выпукла в том и только в том случае, если

$\check{D}_1 \geq 0, \check{D}_2 \geq 0, \check{D}_3 \geq 0, \ldots, \check{D}_n \geq 0$, для всех x в X.

(4) Функция f строго выпукла, если

$D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0, \ldots, Dn > 0$, для всех x в X.

Пример. Пусть $y = f(x_1, x_2)$ – вогнутая функция с $\partial^2 f/\partial x_1^2 < 0$ и $\partial^2 f/\partial x_2^2 < 0$ для всех (x_1, x_2). Если f является однородной функцией первой степени, то легко можно показать, применяя теорему 11, что функция f вогнута (но не строго вогнута). В частности, если f является функцией типа функции Кобба-Дугласа,

$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, 0 < \alpha, \beta < 1,$

то функция f вогнута, если $\alpha + \beta = 1$. Из теоремы 11 также следует, что функция f строго вогнута, если $\alpha + \beta < 1$.

5.5. Квази-вогнутые функции

Определение 16. Пусть f – вещественная функция, определенная на выпуклом множестве X в R^n. Функция f называется **квази-вогнутой**, если для всех x, $x°$ в X из условия $f(x) \geq f(x°)$ следует

$f[\theta x + (1 - \theta)x°] \geq f(x°), 0 \leq \theta \leq 1.$

(Говорят, что функция f **квази-выпуклая**, если функция $-f$ квази-вогнутая, **явно квази-выпуклая**, если функция $-f$ явно квази-вогнутая, и **строго квази-выпуклая**, если функция $-f$ строго квази-вогнутая.)

Функция f называется **строго квази-вогнутой**, если для всех x, $x°$ в X, $x \neq x°$ из условия $f(x) \geq f(x°)$ следует

$f[\theta x + (1 - \theta)x°] > f(x°), 0 < \theta < 1.$

Функция f называется **явно квази-вогнутой**, если она квази-вогнута *и* если для всех x, x° в X, $x \neq x^\circ$ из условия $f(x) > f(x^\circ)$ следует

$$f[\theta x + (1 - \theta)x^\circ] > f(x^\circ),\ 0 < \theta \leq 1.$$

(Отметим, что два свойства, фигурирующие в определении явной квази-вогнутости, являются независимыми. Например, рассмотрим функцию $f(x)$, $x \in R$, определенную как

$$f(x) = -1, \text{ если } x = 0, \text{ и } f(x) = 0, \text{ если } x \neq 0.$$

Эта функция не является квази-вогнутой, но она удовлетворяет второму условию. Однако, в экономических приложениях обычно предполагается, что функция f непрерывна. В этом случае выполнение второго условия влечет квази-вогнутость функции f, так что первое условие квази-вогнутости становится излишним дополнительным требованием для явной квази-вогнутости.)

Можно показать, что множество верхних линий уровня,

$$L \equiv \{x : x \in X, f(x) \geq \alpha\},$$

выпукло для всех $\alpha \in R$ в том и только в том случае, если функция f квази-вогнута. Также можно показать, что всякая вогнутая функция является квази-вогнутой, однако обратное не всегда верно.

Как уже отмечалось в утверждении (2) теоремы 8, всякая неотрицательная линейная комбинация вогнутых функций вогнута. К сожалению, похожее утверждение не выполняется для квази-вогнутых функций. Неотрицательная линейная комбинация квази-вогнутых функций может не быть квази-вогнутой. Например, рассмотрим конкурирующую фирму, производящую один вид продукции, с производственной функцией $f(x)$, где x – n-мерный вектор. Пусть p и w обозначают соответственно цену продукции и вектор затрат. Обе эти величины заданы фирме. Тогда функция прибыли фирмы $\pi(x)$ может быть определена как

$$\pi(x) = pf(x) - w \cdot x\ [= pf(x) + (-w \cdot x)].$$

В случае, если $f(x)$ вогнута, функция $\pi(x)$ также вогнута. Однако, если функция $f(x)$ квази-вогнута, $\pi(x)$ может не быть квази-вогнутой функцией.

Приведем примеры квази-вогнутых функций, которые не являются вогнутыми функциями:

(а) $f(x) = x^2$, где $X \equiv \{x : x \in R, x \geq 0\}$,

(б) $f(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$, $X \equiv \{x : x \in R^2, x_1, x_2 \geq 0\}$.

Можно показать, что любая монотонно возрастающая (или убывающая) функция строго квази-вогнута, если $X \subset R$. Также из определения 16 следует, что всякая явно квази-вогнутая функция является квази-вогнутой и что всякая строго квази-вогнутая функция является явно квази-вогнутой функцией. Более того, можно показать, что всякая вогнутая функция является явно квази-вогнутой и что всякая строго вогнутая функция является строго квази-вогнутой. Отношения между различными понятиями вогнутости и квази-вогнутости схематически отображены на рис. 10, где символ "$\Rightarrow$" читается как "влечет" (или "следует").

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{строгая вогнутость} & \Rightarrow & \text{вогнутость} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{строгая квази-вогнутость} & \Rightarrow & \text{явная квази-вогнутость} & \Rightarrow & \text{квази-вогнутость}
\end{array}
$$

Рис. 10. Отношения между вогнутостью и квази-вогнутостью

В обсуждаемом контексте интересным примером может служить *функция Кобба-Дугласа*, определенная как

$$f(x) = x_1^{\alpha 1} x_2^{\alpha 2} \ldots x_n^{\alpha n}, \text{ где } 0 < \alpha 1, \alpha 2, \ldots \alpha n < 1,\ \alpha 1 + \alpha 2 + \ldots + \alpha n = 1.$$

Можно показать, что эта функция строго квази-вогнута и вогнута на множестве $X \equiv \{x : x \in R^n, x > 0\}$, но не является строго вогнутой.

В определении 16 были определены три понятия квази-вогнутости. Различия между этими тремя понятиями лучше всего рассмотреть, используя понятие линии уровня,

$$L^* \equiv \{x : x \in X, f(x) = \alpha\},\ \alpha \in R.$$

Строгая квази-вогнутость означает, что линии уровня строго "выгнуты" по направлению к началу координат [рис.11 (а)]. Явная (но не строгая) квази-вогнутость означает, что всякая линия уровня может содержать линейный сегмент [рис.11 (б)]. Квази-вогнутость (но ни явная, ни строгая квази-вогнутость) означает, что "линия" уровня может содержать утолщенный участок [рис.11 (в)].

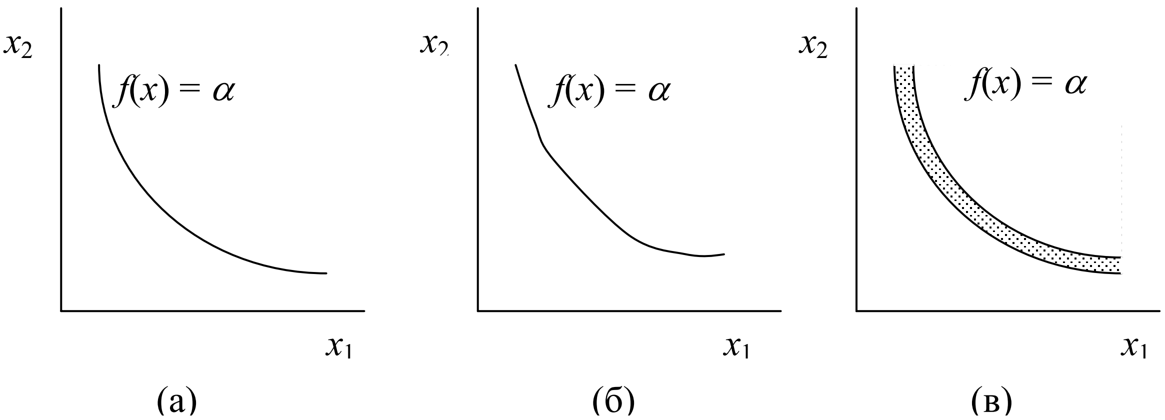

Рис. 11. Линии уровня для трех квази-вогнутых функций

Применение трех типов квази-вогнутости в экономических приложениях может быть проиллюстрировано на примере теории потребительского выбора, в которой потребитель выбирает набор благ $x \in R^n$ такой, чтобы максимизировать $u(x)$ при заданных ограничениях:

$$p \cdot x \leq Y, x \geq 0,$$

где $u(x)$ – функция полезности потребителя, Y – доход, p – ценовой вектор и где p и Y – заданные потребителю параметры. Решение этой задачи может быть представлено как $x^* = x(p, Y)$. Добавив на графики Рис.11 линию бюджетного ограничения $p \cdot x = Y$, можно увидеть, что если функция полезности квази-вогнута либо явно квази-вогнута, то функция спроса $x(p, Y)$ может быть многозначной (т.е. может быть более одного, в действительности, бесконечно много значений x^*, которые являются решением этой задачи максимизации). С другой стороны, если функция $u(x)$ строго квази-вогнута, то решение задачи потребительского выбора единственно. Строгая квази-вогнутость функции полезности означает, что потребителю предпочтительнее потребление разнообразных благ, нежели какого-то одного блага; явная квази-вогнутость говорит о том, что выпуклая комбинация (с положительными весами) любых двух независимых наборов благ для потребителя предпочтительнее любого из этих наборов. Утолщение "линии" уровня означает, что потребитель не ощущает изменения уровня полезности, если потребление благ "чуть-чуть" возрастает.

В заключение приведем характеристики квази-вогнутых функций, используя понятия производных.

Определение 17. Пусть f – вещественная функция, определенная на открытом множестве X в R^n. Предположим, что эта функция дважды дифференцируема в X. Тогда следующая матрица B называется **окаймленной матрицей Гессе функции *f*** (окаймленным гессианом, или гессианом функции f, окаймленным функциями f_i):

$$B \equiv \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & . & . & . & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & . & . & . & f_{2n} \\ .. & .. & .. & . & . & . & .. \\ .. & .. & .. & . & . & . & .. \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & . & . & . & f_{nn} \end{bmatrix},$$

где $f_i \equiv \partial f/\partial x_i$, $f_{ij} \equiv \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что матрица B зависит от точки x, в которой берутся эти производные. Обозначим через B_k $(k+1)$-й главный минор матрицы B, который назовем ***k*-м определителем окаймленного гессиана**, где

$$B_k \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & . & . & . & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & . & . & . & f_{1k} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & . & . & . & f_{2k} \\ .. & .. & .. & . & . & . & .. \\ .. & .. & .. & . & . & . & .. \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & . & . & . & f_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что B_k также зависит от x.

Теорема 12. Пусть $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция, определенная в R^n. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если $f(x)$ квази-вогнута в R^n, то

$B_1 \le 0$, $B_2 \ge 0$, $B_3 \le 0$, … , $(-1)^n B_n \ge 0$, для всех $x \ge 0$.

(2) Если

$B_1 < 0$, $B_2 > 0$, $B_3 < 0$, … , $(-1)^n B_n > 0$, для всех $x \in R^n$,

то $f(x)$ строго квази-вогнута в R^n.

Задачи

1) Пусть A_n, B_n, C_n – интервалы в R, определенные как

$A_n \equiv [0, 1/n]$, $B_n \equiv (0, 1/n]$, $C_n \equiv (-1/n, n)$, где n – положительное целое.

Найти

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

2) Привести примеры.

(а) Подмножества S множества R, не содержащего его супремум.

(б) Бесконечного объединения замкнутых множеств, которое не является замкнутым множеством.

(в) Бесконечного пересечения открытых множеств, которое не является открытым множеством.

(г) Непрерывной функции, которая не является дифференцируемой.

(д) Функции, которая не является ни вогнутой, ни выпуклой.

(е) Функции, которая вогнута *и* выпукла.

(ж) Выпуклой функции, которая не является непрерывной.

(з) Квази-вогнутой функции, которая не является вогнутой.

(и) Строго квази-вогнутой функции в R^2, которая не является строго вогнутой.

(к) Матрицы, которая отрицательно полуопределена, но которая не является отрицательно определенной.

3) Пусть A и B – замкнутые множества в R^n. Показать, что множество $A \cap B$ также замкнуто.

4) Пусть A и B – выпуклые множества в R^n. Показать, что множество $A \cap B$ также выпукло.

5) Пусть $f: R^n \to R^m$. Известно, что f непрерывна в R^n в том и только в том случае, если $f^{-1}(T)$ замкнуто для любого замкнутого подмножества T в R^m. Используя это, доказать следующие утверждения.

(а) Пусть $b \in R^m$, тогда $f^{-1}(b)$ замкнуто в R^n, если f непрерывна.

(б) Пусть $f : R^n \to R$ непрерывна. Тогда для любого $\alpha \in R$ множество

$$S \equiv \{x : x \in R^n, f(x) \geq \alpha\}$$

замкнуто в R^n.

6) Пусть S – множество в R^n. Известно, что S компактно в том и только в том случае, если всякая последовательность в S обладает сходящейся подпоследовательностью и ее предел находится в S. Пусть теперь $f : R^n \to R^m$ – непрерывная функция в R^n и пусть S – компактное подмножество R^n. Доказать, что множество $f(S)$ компактно.

7) Показать, что теорема Вейерштрасса (о существовании максимума и минимума) неверна, если из ее формулировки убрать требование непрерывности либо компактности множества.

8) Пусть

$$S \equiv \{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

(называемое **симплексом**). Показать, что S – замкнутое множество.

Совет. Можно ввести обозначения

$$f_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad f_i(x) \equiv x_i$$

и использовать тот факт, что множества

$S_0 \equiv \{x \in R^n : f_0(x) = 1\}$ и $S_i \equiv \{x_i \in R^n : f_i(x) \geq 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

являются замкнутыми.

9) Пусть f – вещественная функция, определенная на выпуклом подмножестве X в R^n. Показать, что если f вогнута, то следующее множество S выпукло:

$$S \equiv \{x : x \in X, f(x) \geq 0\}.$$

Совет. Пусть $x, y \in S$. Мы хотим показать, что $\theta x + (1 - \theta)y \in S$, $0 \le \theta \le 1$, т.е.

$$f[\theta x + (1 - \theta)y] \ge 0,\ 0 \le \theta \le 1.$$

Нужно использовать условие вогнутости f и тот факт, что $x, y \in S$.

10) Пусть $f : X \to R$, где X – выпуклое подмножество R^n. Показать, что f квази-вогнута в том и только в том случае, если $S \equiv \{x \in X : f(x) \ge \alpha\}$ выпукло для любых $\alpha \in R$.

Совет. "Только в том случае": мы хотим показать, что если $x, y \in S$, $\theta x + (1 - \theta)y \in S$. Без потери общности можно установить $f(x) \ge f(y)$. *"В том случае"*: мы хотим показать, что если $x, y \in X$ и $f(x) \ge f(y)$, то $f[\theta x + (1 - \theta)y] \ge f(y)$. Допустим $\alpha = f(y)$.

11) Пусть в R^n заданы вектор a^i и скаляр b_i; определим $f_i(x)$ как

$$f_i(x) \equiv a^i \cdot x + b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \text{ где}$$

$$a^i \cdot x \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Определим множество S следующим образом:

$$S \equiv \{x \in R^n : f_i(x) \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, m\}.$$

(а) Доказать, что S – выпуклое множество.
(б) Допустим $m = 2$, $a^1 = (-1, -2)$, $b_1 = 1$, $a^2 = (-2, -1)$, $b_2 = 1$. Дать графическую интерпретацию множества S.

12) Пусть $f : \Omega^2 \to R$, определена как $f(x_1, x_2) \equiv x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, где $\Omega^2 \equiv \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1, x_2 \ge 0\}$. Показать, что $f(x_1, x_2)$ – вогнутая функция.

Совет. Мы хотим показать, что $f[\theta x_1 + (1 - \theta)\, x_2] \ge \theta f(x_1) + (1 - \theta) f(x_2)$, $0 \le \theta \le 1$, для всех x_1, x_2. Вспомним, что $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, а x_1, $x_2 \ge 0$. Как можно было бы записать $f[\theta x_1 + (1 - \theta)\, x_2]$?

13) Пусть $f : \Omega^n \to R$, где $\Omega^n \equiv \{x : x \in R^n, x \ge 0\}$. Доказать, что $f(x)$ не может быть строго вогнутой, если f является однородной функцией первой степени.

Совет. Строгая вогнутость требует $f(x/2 + x'/2) > f(x)/2 + f(x')/2$ для всех $x, x' \in \Omega^n$, где $x \neq x'$ (почему?). Допустим $x' = 2x$ и заметим, что $x' \in \Omega^n$, если $x \in \Omega^n$. Затем наблюдаем противоречие для случая, когда f – однородная функция первой степени.

Замечание. Этот результат достаточно важен из-за частого использования линейной однородной функции в экономических приложениях.

14) Пусть $f(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$, $(x, y) \in \Omega^2$ и $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, где Ω^2 – неотрицательный ортант R^2. Доказать, что функция $f(x, y)$ строго вогнута.

15) Пусть $f(x)$ – вещественная функция, определенная на выпуклом подмножестве X в R^n. Доказать, что f вогнута в том и только в том случае, если множество $S \equiv \{(x, \alpha) : f(x) \geq \alpha, x \in X, \alpha \in R\}$ выпукло в R^{n+1}.

16) Пусть $f(x)$ – вещественная функция, определенная на выпуклом подмножестве X в R^n. Доказать, что f вогнута в том и только в том случае, если для любого целого $m \geq 1$

$f(\theta_1 x^1 + \theta_2 x^2 + \ldots + \theta_m x^m) \geq \theta_1 f(x^1) + \ldots + \theta_m f(x^m)$, для всех $x_j \in X$, $\theta_j \in R$, $\theta_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, m$, $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m = 1$.

Совет. Использовать 15).

17) Пусть $f(x)$ – линейная однородная вогнутая функция, определенная на выпуклом подмножестве X в R^n. Показать, что для всякого $x^j \in X, j = 1, 2, \ldots, m$ справедливо

$f(x^1 + x^2 + \ldots + x^m) \geq f(x^1) + \ldots + f(x^m)$

Совет. Использовать 16).

Библиографический список

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. – 552 с.

2. Математический энциклопедический словарь / Отв. ред. Ю.В.Прохоров. М.: Сов.энциклопедия, 1988. – 847 с.

3. Rowcroft E. Mathematical Economics: an Integrated Approach.: Prentice Hall Canada Inc., 1994. – 636 p.

4. Takayama A. Analytical Methods in Economics.: Harvester Wheatsheaf, 1994. – 672 p.

5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. М.: Физматгиз, 1960. – 440 с.

6. Щипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1985. – 471 с.

Содержание

Александр Александрович Мартынов

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И МЕНЕДЖЕРОВ

Учебное пособие

Редактор Е.А.Краснова
Компьютерная верстка, макет Л.Л.Паймулина

ЛР № 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 15.06.00. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ.л 4,0; уч.-изд.л. 4,25.
Гарнитура «Times New Roman».Тираж 200 экз. С 27. Заказ №
Издательство «Самарский университет». 443011, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.