МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Л.С. ПУЛЬКИНА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2021

УДК 519(075)
ББК 22.193я7
П885

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. С. В. А с т а ш к и н,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Р а д ч е н к о

Пулькина, Людмила Степановна

И885 **Практическое исследование уравнений с частными производными:** учебное пособие / *Л.С. Пулькина.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 72 с.

ISBN 978-5-7883-1674-1

Учебное пособие предназначено для обучающихся университета, по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, изучающих курс «Уравнения в частных производных». Цель его – познакомить обучающихся с современными методами исследования разрешимости краевых задач для уравнений с частными производными и научить их применять в конкретных случаях.

Содержание пособия соответствует программе курса «Уравнения в частных производных» и дополняет наиболее трудные для освоения разделы. Теоретические вопросы рассматриваются на конкретных примерах. В пособии содержатся примеры задач с подробными решениями и ссылками на дополнительную литературу, а также задачи для самостоятельного решения.

Написано на основе многолетнего опыта чтения лекций, ведения практических и семинарских занятий, а также небольшого опыта проведения занятий в дистанционной форме.

УДК 519(075)
ББК 22.193я7

ISBN 978-5-7883-1674-1

Оглавление

Введение

Многие уравнения с частными производными не обладают, вообще говоря, гладкими решениями. С другой стороны, они являются основой математических моделей реальных физических процессов, которые происходят несмотря на то, что классического решения соответствующего уравнения может и не существовать. Возникшее противоречие породило идею о новых подходах к понятию решения уравнения и стимулировало разработку эффективных математических методов. Это оказалось тем более важным в силу того, что современный уровень развития естествознания позволяет и требует изучать более тонкие свойста физических процессов и явлений, ранее недоступных для наблюдения и исследования. Для этого портебовалось научиться использовать современный математический аппарат. К настоящему времени разработан ряд методов исследования разрешимости задач для уравнений с частными производными, позволяющих доказать существование решения и в том случае, когда входные данные не достаточно гладкие и нельзя использовать классические методы.

Некоторые из таких методов основаны на введении понятия обобщенного решения тем или иным способом. В нашем пособии мы используем понятие обобщенного решения как элемента пространства Соболева, что позволяет применять многие идеи и фундаментальные понятия функционального анализа.

В изложении материала нам помогут произвольно выбранные студенты Петр и Николай, знакомые тем, кто читал пособие "Практическое решение уравнений с частными производными". Они задают вопросы и пытаются найти ответы на них, решают задачи, порой заблуждаются, но всегда находят правильный путь, так как соблюдают законы, принятые в пространствах Соболева. Таким образом, начинается

Путешествие Петра и Николая в пространство Соболева.

1 Понятие обобщенного решения дифференциального уравнения

1.1 Некоторые примеры и рассуждения

Необходимость введения понятия обобщенного решения дифференциального уравнения возникла в связи с задачами математической физики, когда под решением потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных. Такая ситуация возможна при математическом моделировании физических явлений, если входные данные не обладают достаточной гладкостью, но, несмотря на это, реальный процесс происходит, и можно наблюдать его реализацию.

Рассмотрим в качестве примера колебание струны, начальная конфигурация которой задана следующим образом. На высоте h струна закреплена в точке тонкой иголкой, которая в начальный момент убирается, после чего начинаются колебания. Для изучения свободных колебаний (без начальной скорости) построим математическую модель:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1}$$

где начальное значение можно записать в виде $\varphi(x) = h - |x|,\ x \in (-h, h)$, а в остальных точках интервала $(-\infty, \infty)$ равна нулю. Так как $\varphi(x)$ не дифференцируема в $(-h, h)$, то формулу Даламбера применить нельзя. Но процесс идет! Подобные противоречия и способствовали появлению нового подхода к понятию решения без отказа от удобного способа построения математических моделей, базирующихся на дифференциальных уравнениях. Проблема заключалась в том, что способ вывода дифференциальных уравнений априори предполагает гладкость решения и под классическим решением мы понимаем функцию, непрерывную со всеми производными, входящими в уравнение.

Ввести понятие обобщенного решения можно разными способами. Один из них продемонстрируем на примере.

Рассмотрим уравнение $u_t + u_x = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $u(x,t) = f(x-t)$, если функция $f(x,t)$ непрерывно дифференцируема. А если нет? Рассмотрим последовательность гладких решений вида $u_n(x,t) = f_n(x,t)$. Заметим, что предельная функция для $\{f_n\}$ не обязательно всюду дифференцируема. Однако возникает идея объявить предел последовательности u_n обобщенным решением. Другими словами, мы хотим назвать функцию $u(x,t)$ обобщенным решением уравнения $u_t + u_x = 0$, если ее можно как угодно точно аппроксимировать гладкими решениями. Это можно сделать, если разумно ввести норму ([1], с. 218-220). Мы не будем здесь обсуждать вопрос о норме, тем более что этот подход неудобен для исследования разрешимости, так как для того, чтобы убедиться в том, что $u(x,t)$ является обобщенным решением, нужно построить бесконечную последовательность гладких функций u_n, аппроксимирующих $u(x,t)$, причем эти функции должны быть точными решениями уравнения, что во многих случаях сделать трудно.

Другое определение обобщенного решения дано С.Л. Соболевым. Это определение оказалось эффективным и в настоящее время широко применяется. Основная идея этого подхода состоит в возможности замены дифференциальных уравнений интегральными законами сохранения, из которых уравнения и выводятся. При этом мы не отказываемся и от дифференциального уравнения. Разумеется, пока все не очень понятно и может показаться странным [5], но мы рассмотрим простой пример, чтобы немного прояснить ситуацию.

Опять рассмотрим уравнение $u_t + u_x = 0$ в некоторой области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$.

Покажем, что если $u \in C^1(\Omega)$, а $v(x,t)$ — достаточно гладкая функция, например, $v \in C^2(\Omega)$, то равенства

$$u_t + u_x = 0, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\Omega} (u_t + u_x) v(x,t)\, dx dt = 0 \tag{3}$$

эквивалентны. Равенство (3) следует из (2) очевидным образом. Пусть теперь выполняется (3). Предположим, что $u_t + u_x \neq 0$ в некоторой внутренней точке (x_0, t_0) области Ω. Пусть, например,

$u_t + u_x = \delta > 0$. Так как по условию производные u_t, u_x непрерывны, то существует окрестность $(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 \le \varepsilon$ точки (x_0, t_0), в которой функция $u_t + u_x$ сохраняет знак. Можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы $u_t + u_x > \frac{\delta}{2}$. Функция $v(x,t)$ произвольна, выберем ее следующим образом:

$$v(x,t) = \begin{cases} [1 - \frac{(x-x_0)^2+(t-t_0)^2}{\varepsilon}]^p & (x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 \le \varepsilon, \\ 0, & (x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 > \varepsilon. \end{cases} \qquad (4)$$

(*Выбором p можно добиться, чтобы функция $v(x,t)$ была непрерывно дифференцируемой нужное число раз. Пусть, например, $p = 3$. Из (4) легко увидеть, что тогда $v \in C^2(\Omega)$*). Подставим эту функцию в (3) и, перейдя к полярным координатам

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \;\; t = t_0 + r\sin\varphi,$$

получим

$$\int\limits_{\Omega} (u_t + u_x) v(x,t) dxdt$$

$$= \int\limits_{r \le \sqrt{\varepsilon}} (u_t + u_x)[1 - \frac{r^2}{\varepsilon}]^p dxdt > \delta\pi \int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon}} [1 - \frac{r^2}{\varepsilon}]^p r dr > 0.$$

При переходе к неравенству учтено предположение $u_t + u_x > \frac{\delta}{2}$. Мы пришли к противоречию, что и доказывает утверждение.

Проделаем некоторые преобразования. Воспользуемся очевидными равенствами

$$(uv)_x = u_x v + u v_x, \quad (uv)_t = u_t v + u v_t$$

и перепишем равенство (3) следующим образом:

$$0 = \int\limits_{\Omega} (u_t + u_x) v(x,t) dxdt = \int\limits_{\Omega} [(uv)_x + (uv)_t] dxdt - \int\limits_{\Omega} u(v_x + v_t) dxdt.$$

Применив формулу Грина к первому слагаемому правой части, получим

$$\int\limits_{\Omega} u(v_x + v_t) dxdt = \int\limits_{\partial\Omega} uvdx - uvdt. \qquad (5)$$

Если требование гладкости функций u, v выполняется, то (2) и (5) эквивалентны.

Если же $u(x,t)$ лишь непрерывна, то интеграл (5) существует, но теперь из (5) не следует (2). Однако проделанный эксперимент позволяет увидеть тот путь, который ведет к понятию обобщенного решения. Идея заключается в том, чтобы функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую равенству (5) для всех $v(x,t)$ из некоторого множества, объявить обобщенным решением уравнения (2). Пока это только идея. Для того чтобы дать определение обобщенного решения, нужно четко определиться с функциональными пространствами, в которых это определение будет разумным и удобным для исследования разрешимости краевых и всяких других задач для уравнений в частных производных. Для этого нам понадобятся новые инструменты. В следующем параграфе мы и начнем их осваивать.

1.2 Обобщенные производные

Вводя новые понятия, разумно не отказываться от уже известных, классических. Образно говоря, новые понятия приводят нас в другое, часто более широкое пространство. Но заранее мы не знаем, как там живется функциям, поэтому хорошо бы иметь возможность вернуться в прежнее, знакомое пространство, и знать, как эту возможность реализовать [15].

— Ну конечно, туда и обратно, — сказал Петр.

Заметим, что эти утверждения облечены в строгую математическую форму и называются *теоремами вложения*. Теоремы вложения важны потому, что они позволяют проследить, как ограничения на поведение производных влияют на поведение самих функций [14, 8].

Пусть $u, v \in C^\infty(\Omega)$, Ω — конечная область с гладкой границей пространства R^n. Для таких функций справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int\limits_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\cos(\nu, x_i)ds,$$

где ν — вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$. Вместо производной первого порядка можно взять производную более высокого порядка и получить в результате последовательного применения формулы интегрирования по частям аналогичный, но громоздкий результат. Мы не только упростим вычисления, но и вскоре получим существенную пользу, если в качестве функции $v(x)$ возьмем финитную функцию $\varphi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega)$.

— Финитная... что это за функция? — спросил Николай. Петр тут же объяснил:

— Это бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Компактный — это понятно, а вот что такое носитель:

$$supp\varphi(x) = \overline{\{x : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Таким образом, носитель функции $\varphi(x)$ — это замыкание множества значений x, на котором $\varphi(x)$ отлична от нуля.

— Это значит, что функция вне области обращается в нуль вместе со всеми своими производными, и интеграл по границе области равен нулю, — сказали хором Петр и Николай.

Формула становится проще, и нетрудно записать результат, когда одно из слагаемых представляет собой производную порядка выше первого, например, порядка k:

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}\varphi(x)dx. \qquad (6)$$

Если же функция $u(x)$ не имеет производных в Ω, то, увы, эта формула не имеет смысла.

Введем обозначения.

Мультииндекс:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ целые, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Производная порядка $|\alpha|$:

$$D^{\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Теперь мы можем дать определение обобщенной производной.

Определение 1.2.1. Пусть $u \in L_1(\Omega)$. Если существует функция $v \in L_1(\Omega)$ такая, что для любой финитной в этой области функции $\varphi(x)$ справедливо тождество

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \tag{7}$$

то $v(x)$ называется обобщенной производной функции $u(x)$ в области Ω.

Возникают такие вопросы: как находить обобщенную производную, каковы свойства обобщенной производной и зачем она нужна.

Проще всего ответить на второй вопрос, так как во многих учебниках все написано. Например, в [10]. Оказывается, многие свойства обобщенной производной являются аналогами свойств обычной производной, но не все. Доказательства свойств обобщенной производной легко найти в учебниках, например, в [10], [8]. Некоторые из них мы обсудим, но позже. К тому же в доказательствах встречаются незнакомые слова, например, **средняя функция, усредняющее ядро**, поэтому сначала нужно узнать, что они означают.

1.3 Вычисление обобщенных производных

Рассмотрим пример. Найти в $\Omega = (-1, 1)$ обобщенную производную функции $u(x) = |x|$.

На этом примере становится понятно, почему в определении обобщенной производной указана область. Действительно, если нужно было бы найти производную в интервале $(1, 2)$, то не возникло бы необходимости находить обобщенную производную, так как в интервале $(1, 2)$ существует самая обычная. А кстати, эта обычная производная совпадает с обобщенной в том же интервале? Нужно это проверить.

Приступим к нахождению производной, для этого воспользуемся определением. Формула (7) в нашем случае, если $v(x)$ существует, должна иметь вид

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)dx.$$

Рассмотрим интеграл в левой части этого равенства и преобразуем его, учитывая определение функции $|x|$. Получим

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx$$

и проинтегрируем по частям.

$$-\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx = -x\varphi(x)|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx$$

$$+x\varphi(x)|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx.$$

Так как $\varphi(x)$ финитна, то внеинтегральные члены обращаются в нуль, и мы получаем

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx.$$

На первый взгляд кажется, что ничего не получилось, но это не так. Используя функцию $signx$, сумму интегралов можно записать в виде одного, и мы получим

$$\int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} signx\varphi(x)dx,$$

что означает, что обобщенной производной функции $|x|$ в области $\Omega = (-1, 1)$ является функция $signx$.

Рассмотрим теперь ту же функцию $u(x) = |x|$, но в области $(1, 2)$. По определению $|x| = x$ в $(1, 2)$ и ее производная равна 1. Найдем ее обобщенную производную.

$$\int_{1}^{2} x\varphi'(x)dx = -\int_{1}^{2} \varphi(x)dx.$$

Из этого равенства видно, что $v(x) = 1$, и, следовательно, обобщенная производная функции $u(x) = |x|$ в интервале $(1, 2)$ совпадает с обычной.

Задачи для самостоятельного решения

1.3.1. Показать, что смешанная обобщенная производная не зависит от порядка дифференцирования.

1.3.2. Найти обобщенную производную функции $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ в $(0, 5)$.

1.3.3. Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} \ \ 1, & x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0, \\ -1, & x^2 + y^2 < 1, \quad y < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Найти обобщенную производную в каждом из полукругов. Показать, что функция (8) не имеет обобщенной производной по переменной y во всем круге.

1.3.4. Пусть функция $u \in L_2(a, b)$ и известно, что она имеет в этом интервале обобщенную производную $u' \in L_2(a, b)$. Рассмотрим функцию $w \in C^\infty(a, b)$. Показать, что функция $u(x)w(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка и для нахождения ее справедлива обычная формула Лейбница.

1.3.5. Выяснить, принадлежит ли эта обобщенная производная (см. задачу 1.3.4) пространству $L_2(a, b)$?

Петя и Коля быстро решили первую и вторую задачи, не очень быстро, но все же решили третью, а четвертая вызвала некоторые затруднения. Поэтому они решили обсудить решение четвертой и пятой задач.

Пусть $u \in L_2(a, b), u' \in L_2(a, b),\ w \in C^\infty(a, b)$.

Так как $u(x)$ имеет по условию обобщенную производную, то по определению существует функция $v(x)$ такая, что

$$\int\limits_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_a^b v(x)\varphi(x)dx.$$

Обозначим $v(x) = u'(x)$.

Так как $w(x)$ бесконечно дифференцируема, а $\varphi(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция, то $w(x)\varphi(x)$ тоже финитна, и ее можно использовать в формуле, определяющей

обобщенную производную:
$$\int_a^b u(x)(w(x)\varphi(x))'dx = -\int_a^b u'(x)(w(x)\varphi(x))dx.$$
Для непрерывно дифференцируемой функции справедливо правило Лейбница $(w\varphi)' = w'\varphi + w\varphi'$. Отсюда
$$w\varphi' = (w\varphi)' - w'\varphi.$$
Тогда
$$\int_a^b u(x)w(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b u(x)(w(x)\varphi(x))'dx - \int_a^b u(x)w'(x)\varphi(x)dx =$$
$$-\int_a^b u'(w(x)\varphi(x))dx - \int_a^b u(x)w'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b (u'w + uw')\varphi(x)dx.$$
Гарантии, что эта производная принадлежит $L_2(a,b)$, нет.

1.4 Усредняющее ядро и средняя функция

Пусть x, y — произвольные точки пространства R^n, h — произвольное положительное число.

Определение 1.4.1. Функция $\omega_h(x,y)$ называется **усредняющим ядром**, если она удовлетворяет условиям:

1. $\omega_h(x,y)$ зависит только от $r = |x-y|$.
2. $\omega_h(r) > 0$ внутри шара $r < h$, $\omega_h(r) = 0,\ r \geq h$.
3. $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)dx = \int\limits_{r<h} \omega_h(r)dy = 1$.
4. $\omega_h \in C^\infty$ по декартовым координатам каждой из точек x, y.

Пример:
$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}, & r < h, \\ 0, & r \geq h. \end{cases}$$
Постоянную c_h можно выбрать так, чтобы условие 3 выполнялось, положив
$$c_h = \left(\int\limits_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} dx \right)^{-1}.$$

Все подробности можно прочитать в [10].

Пусть Ω — конечная область пространства R^n, $u(y)$ — функция, суммируемая в Ω. Доопределим ее вне Ω нулем. Произвольную точку пространства R^n обозначим через x.

Определение 1.4.2. Функция

$$u_h(x) = \int\limits_{\Omega} \omega_h(r) u(y) dy, \tag{9}$$

где $\omega_h(r)$ — какое-нибудь усредняющее ядро, называется **средней функцией** по отношению к $u(y)$. Число h называется радиусом усреднения.

Среднюю функцию можно представить следующим образом:

$$u_h(x) = \int\limits_{R^n} \omega_h(r) u(y) dy,$$

так как $u(y) = 0$, если y **вне** Ω.

В силу свойства 2 усредняющего ядра $\omega_h(r) = 0$, если $r \geq h$, тогда среднюю функцию можно представить и так:

$$u_h(x) = \int\limits_{r<h} \omega_h(r) u(y) dy.$$

Из определений средней функции и усредняющего ядра следует, что средняя функция бесконечно дифференцируема во всем пространстве. Производные можно найти дифференцированием под знаком интеграла.

— Отлично, — сказал Николай. — Была совсем плохая функция, всего лишь из $L_1(\Omega)$, а стала такой гладкой!

— В книге В.Н. Масленниковой "Дифференциальные уравнения в частных производных"[8] есть замечательные картинки, иллюстрирующие это свойство, на с. 264-265, — заметил Петр.

— Да, Алиса была совершенно права [5], когда говорила: "Что толку в книге, если в ней нет ни картинок, ни разговоров?"

— согласился с ним Николай.

— Вот теперь стали понятны картинки на 264-265 в [8]. Все углы сглажены.

Интересно, зависит ли качество средних функций от h? Рассмотрим три теоремы, которые будут нужны в дальнейшем. Оказывается, поведение средних функций зависит и от h, и от того, какому пространству принадлежит исходная функция $u(y)$.

Теорема 1.4.1. Если $u \in C(\Omega)$, то средняя функция $u_h(x)$ сходится при $h \to 0$ к $u(x)$ равномерно во всякой строго внутренней подобласти области Ω.

(*Строго внутренняя* — это подобласть, принадлежащая области вместе с границей.)

Теорема 1.4.2. Норма в $L_2(\Omega)$ не возрастает при усреднении: $||u_h||_{L_2(\Omega)} \leq ||u||_{L_2(\Omega)}$.

Теорема 1.4.3. Если $u \in L_2(\Omega)$, то средняя функция $u_h(x)$ сходится при $h \to 0$ к $u(x)$ в среднем:

$$||u - u_h||_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad h \to 0.$$

Доказательства этих теорем можно найти в [10, 13].

1.5 Свойства обобщенных производных

Прежде чем сформулировать свойства обобщенных производных, введем некоторые обозначения. Заметим, что средняя функция равна нулю во всех точках, расстояние которых до области Ω больше h. Действительно, в этом случае шар $r < h$ целиком лежит вне Ω, но тогда под знаком интеграла, определяющего среднюю функцию, $u(y) = 0$. (Мы доопределили $u(y)$ нулем в точках, расположенных вне Ω.) Таким образом, средняя функция может быть отлична от тождественного нуля в некоторой области, обозначим ее Ω^h, которая содержит в себе область Ω. Например, если Ω есть шар радиуса R, то Ω^h — шар радиуса $R + h$ с центром в той же точке. Часть пространства между Ω и Ω^h обозначим Ω_h и будем называть ее пограничной полоской, как это принято в [10].

Теорема 1.5.1. Пусть в области Ω функция $u(x)$ имеет обобщенную производную $v(x)$. Тогда в строго внутренней подобласти области Ω средняя функция от этой производной равна производной от средней функции.

Доказательство. Пусть $\Omega^h = \Omega \setminus \Omega_h$. Множество Ω^h — открытое. Если $x \in \Omega^h$, то расстояние от x до границы $\partial\Omega$ области Ω больше h. Тогда усредняющее ядро $\omega_h(r)$ есть финитная в Ω функция, и справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} u(y) \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1} ... \partial y_n^{k_n}} dy = (-1)^k \int\limits_{\Omega} v(y) \omega_h(y) dy = (-1)^k v_h(x). \qquad (10)$$

С другой стороны, так как усредняющее ядро зависит лишь от $r = |x - y|$, то

$$\frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1} ... \partial y_n^{k_n}} = (-1)^k \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}.$$

Учитывая это равенство и определение средней функции, левую часть (10) запишем теперь так:

$$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \int\limits_{\Omega} u(y) \omega_h(r) dy = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} u_h(x).$$

Из этого равенства и равенства (10) следует справедливость утверждения теоремы:

$$v_h(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}.$$

Теорема 1.5.2. Пусть Ω' — подобласть области Ω. Если $v(x)$ есть обобщенная производная функции $u(x)$ в Ω, то она является такой же производной от $u(x)$ в Ω'.

Теорема 1.5.3. Если в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная функции $u(x)$ порядка k, а функция $w(x)$ есть обобщенная производная функции $v(x)$ порядка l в Ω, то $w(x)$ является обобщенной производной функции $u(x)$ порядка $k + l$ в той же области.

Эти теоремы нетрудно доказать самостоятельно, но можно и прочитать в [10], с. 31-32.

Теорема 1.5.4. Функция $u \in L_2(\Omega)$, обобщенный градиент которой равен нулю, есть постоянная.

Доказательство есть в [10] с. 32-33, но мы его приведем здесь немного подробнее. В формулировке теоремы появился новый термин — обобщенный градиент. Нетрудно догадаться, что это вектор, компонентами которого являются *обобщенные* производные первого порядка: $(u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n})$. По условию все $u_{x_i} = 0$. Если бы речь шла об обычных производных, то мы *сразу* же сделали бы вывод о том, что функция $u(x) = const$. Но так как теперь речь идет об обобщенной производной, то *не сразу*.

Построим среднюю функцию $u_h(x)$. По теореме 1.5.1 все ее производные первого порядка равны нулю в строго внутренней подобласти $\Omega \backslash \Omega_h$. Зафиксируем произвольно $\delta > 0$ и выберем радиус усреднения h так, чтобы $h < \delta$. Тогда в $\Omega \setminus \Omega_\delta$ $u_h(x) = const$. Для того, чтобы показать, что и $u(x) = const$, применим теорему 1.4.3. В силу этой теоремы $||u - u_h||_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $h \to 0$. Это означает, что $u(x) = const$ в $\Omega \setminus \Omega_\delta$. Так как δ произвольно, то $u(x) = const$ в области Ω.

Докажем две очень важные теоремы о предельных свойствах обобщенных производных.

Теорема 1.5.5. Пусть функции $u_n \in L_2(\Omega)$ и имеют в Ω обобщенные производные $v_n(x) = D^k u_n(x)$, также принадлежащие $L_2(\Omega)$. Если обе последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ сходятся в метрике $L_2(\Omega)$ к пределам $u(x)$, $v(x)$ соответственно, то в области Ω $v(x) = D^k u(x)$.

Доказательство. По условию теоремы и определению обобщенной производной имеет место равенство

$$\int\limits_\Omega u_n D^k \varphi dx = (-1)^k \int\limits_\Omega v_n \varphi dx.$$

В силу принадлежности функций u_n, v_n пространству $L_2(\Omega)$ это равенство можно записать как равенство скалярных произведений:

$$(u_n, D^k\varphi)_{L_2(\Omega)} = (-1)^k (v_n, \varphi)_{L_2(\Omega)}.$$

Выполнив предельный переход (в силу свойства непрерывности скалярного произведения [7, 16]), получим

$$(u, D^k\varphi)_{L_2(\Omega)} = (-1)^k (v, \varphi)_{L_2(\Omega)},$$

что и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема 1.5.6. Пусть $u, v \in L_2(\Omega)$, $v(x) = D^k u(x)$ в области Ω. В любой внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$ можно построить последовательность $\{u_n(x)\}$ бесконечно дифференцируемых функций таких, что в метрике пространства $L_2(\Omega')$

$$u_n \to u, \quad D^k u_n \to v.$$

Доказательство. Построим последовательность $\{u_{h_n}(x)\}$ средних функций. Радиусы усреднения выберем так, чтобы $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, например, $h_n = \frac{1}{n}$. Из теоремы 1.4.3 эта последовательность сходится к $u(x)$. По теореме 1.5.1 $D^k u_{h_n}(x) = (D^k u(x))_{h_n}$. По теореме 1.4.3 $(D^k u(x))_{h_n} \to D^k u(x) = v(x)$. Теорема доказана.

1.6 Ответы и решения задач

Задача 1.3.1. Показать, что смешанная о.п. не зависит от порядка дифференцирования.

Рассмотрим решение этой задачи на простом примере. Пусть $u(x, y)$ имеет обобщенную производную u_{xy}. Это означает, что существует функция $v_1(x, y)$ такая, что

$$\int_\Omega u(x, y)\varphi_{xy} dxdy = \int_\Omega v_1(x, y)\varphi(x, y)dxdy.$$

Предположим, что $v_2(x, y)$ — о.п. $u(x, y)$, а именно, $v_2 = u_{yx}$:

$$\int_\Omega u(x, y)\varphi_{yx} dxdy = \int_\Omega v_2(x, y)\varphi(x, y)dxdy.$$

Теперь заметим, что $\varphi(x, y)$ — финитная функция, т.е. $\varphi \in \dot{C}^{\infty}$. Как известно, для таких функций справедливо $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$. Тогда левые части выделенных формул равны. Вычитая из одного другое, получим

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)\varphi(x, y)dxdy = 0.$$

Но тогда $v_1 = v_2$ в смысле равенства функций в L_2.

Задача 1.3.3. Пусть

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0, \\ -1, & x^2 + y^2 < 1, \quad y < 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Найти обобщенную производную в каждом из полукругов и показать, что функция (8) не имеет обобщенную производную во всем круге по переменной y.

Рассмотрим верхний полукруг Ω^+. Выясним, существует ли функция $v(x,y)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega^+} u\varphi_y dxdy = -\int\limits_{\Omega^+} v\varphi dxdy.$$

Запишем пределы интегрирования и учтем представление функции u в этой области.

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} u(x,y)\varphi_y(x,y)dydx = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \varphi_y(x,y)dydx.$$

Здесь мы воспользовались свойсвом интеграла Лебега, чтобы перейти к повторному интегралу, и представлением функции f в верхнем полукруге.

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \varphi_y(x,y)dydx = -\int\limits_{-1}^{1}[\varphi(x,0) - \varphi(x,\sqrt{1-x^2})]dx = 0,$$

так как φ финитна в Ω^+. Нарисуйте картинку, и все будет понятно.

Доказали, что производная по y существует в Ω^+.

Затем то же самое проделать для Ω^-. При решении задачи нужно все время учитывать, что нам нужна функция, финитная именно в той области, где мы хотим найти о.п.

Если вы не будете забывать об этом, то сможете легко показать, что во всем круге функция не имеет производной по y.

2 Пространства Соболева

2.1 Определения и простейшие свойства

Рассмотрим множество функций из пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные первого порядка. Нас будут интересовать в первую очередь те функции, обобщенные производные которых также принадлежат $L_2(\Omega)$. Как и в любом объединении, например, людей, чисел, функций, нужно сформулировать основные законы поведения и критерии их соблюдения для того, чтобы не возникало конфликтов, а также для того, чтобы можно было предвидеть события в этом объединении. Таким объединением для функций часто служит пространство [7, 16]. Удобным для исследования дифференциальных уравнений часто является линейное нормированное пространство [7, 16].

Обозначим через $W_2^1(\Omega)$ множество функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ и имеющих обобщенные производные первого порядка, которые также принадлежат $L_2(\Omega)$.

Верхний индекс означает порядок обобщенной производной, а нижний индекс означает принадлежность функций и производных пространству $L_2(\Omega)$. Легко убедиться в том, что $W_2^1(\Omega)$ — линейное пространство.

Введем норму следующим образом. Пусть $u \in L_2(\Omega)$, обобщенные производные $u_{x_i} \in L_2(\Omega), \quad x = (x_1, ..., x_n)$. Обозначим

$$||u||_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} [u^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

(Убедитесь, что (12) — норма).

Покажем, что $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство. Для этого нужно убедиться в том, что норма порождена скалярным произведением, и пространство в этой норме является полным.

Скалярное произведение определим так:

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} [uv + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i}] dx.$$

Пусть $\{u_m\}$ — произвольная фундаментальная последовательность элементов из $W_2^1(\Omega)$:

$$||u_m - u_k||^2_{W_2^1(\Omega)} \to 0, \quad m, k \to \infty.$$

Тогда

$$\int\limits_\Omega [(u_m - u_k)^2 + \sum_{i=1}^n (u_{mx_i} - u_{kx_i})^2] dx \to 0, \ m, k \to \infty$$

и, в частности,

$$\int\limits_\Omega (u_m - u_k)^2 dx \to 0, \quad \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (u_{mx_i} - u_{kx_i})^2 dx \to 0, \ m, k \to \infty.$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega (u_m - u_k)^2 dx = ||u_m - u_k||^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n (u_{mx_i} - u_{kx_i})^2 dx = \sum_{i=1}^n ||u_{mx_i} - u_{kx_i}||^2_{L_2(\Omega)}.$$

Так как из предыдущих рассуждений следует

$$||u_m - u_k||^2_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad m, k \to \infty,$$

то последовательность $\{u_m\}$ фундаментальна и в $L_2(\Omega)$. В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ эта последовательность имеет предел $u \in L_2(\Omega)$. Аналогичные рассуждения приводят к утверждению о существовании предела $w_i \in L_2(\Omega)$ последовательности $\{u_{mx_i}\}$. Осталось показать, что $w_i = u_{x_i}$. Так как u_m имеет обобщенные производные первого порядка, то по определению

$$(u_m, \varphi_{x_i})_{L_2(\Omega)} = -(u_{mx_i}, \varphi)_{L_2(\Omega)}.$$

Известно, что из сильной сходимости следует слабая. Поэтому, переходя к пределу, получим

$$(u, \varphi_{x_i})_{L_2(\Omega)} = -(w_i, \varphi)_{L_2(\Omega)}.$$

Из определения обобщенной производной и из ее единственности следует, что $u_{x_i} = w_i \quad \forall i$.

Замечание. В гильбертовом пространстве наряду со сходимостью по норме, которую называют также *сильной сходимостью,* удобно ввести еще один вид сходимости: *слабая сходимость*. При доказательстве полноты пространства $W_2^1(\Omega)$ появились эти термины. Уточним их.

Определение 2.1.1. Последовательность h_m из гильбертова пространства H называется *слабо сходящейся* к элементу $h \in H$, если

$$\lim_{m\to\infty}(h_m, f) = (h, f)$$

для любого элемента $f \in H$.

Если последовательность $h_m \in H$ сходится по норме к $h \in H$, то она сходится и слабо к h. Действительно, в силу неравенства Буняковского

$$|(h_m, f) - (h, f)| = |(h_m - h, f)| \leq ||h_m - h||||f|| \to 0, \quad m \to \infty.$$

В этом случае говорят, что из сильной сходимости вытекает слабая.

Свойство гильбертовости пространства $W_2^1(\Omega)$ позволяет эффективно исследовать разрешимость задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Приведем формулировки некоторых утверждений [9], результат применения которых будет виден не сразу, но скоро.

Теорема 2.1. Ограниченное в пространстве $W_2^1(\Omega)$ множество компактно в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2.2. Любое ограниченное подмножество гильбертова пространства слабо компактно.

Теорема 2.3. Множество функций $C^\infty(\bar{\Omega})$ (и, тем более, $C^1(\bar{\Omega})$) всюду плотно в $W_2^1(\Omega)$.

Теорема 2.4. Пространство $W_2^1(\Omega)$ сепарабельно.

Доказательства этих теорем можно найти в [6] (глава I, §1, теорема 1.2, §6, теорема 6.1) и [9] (глава II, §3, п.8, теорема 3, глава III, §4, п.3, теорема 3, §4, п.4, теорема 4).

Обозначим $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ замыкание множества $\dot{C}^{\infty}(\Omega)$ в норме $W_2^1(\Omega)$.

— Интересно, что означает нолик наверху? Точка над C означает, что функции, принадлежащие этому множеству, финитны, т.е. рано или поздно обращаются в нуль, — сказал Петр.

— Да, сразу же, как попадают на границу области, а за границей и совсем исчезают, — ответил Николай.

— Наверное, нолик над W тоже что-то говорит о регламенте поведения функции из $W_2^1(\Omega)$ на границе области.

— Но как теперь понимать значение функции на границе? Если функция определена в каждой точке области, то термин "значение на границе"понятен. А если функция определена почти всюду, то нет. Тогда возникнет проблема с постановкой краевых задач.

Петр и Николай стали читать книги [8, 9] и выяснили, что есть такое понятие!

2.2 След функций из $W_2^1(\Omega)$

Пусть Ω — область в R^n, S — $(n-1)$-мерная поверхность, лежащая в $\bar{\Omega}$. Если функция $f(x)$ определена в *каждой* точке Ω, то нетрудно определить и ее *значения* на поверхности S. Если же функция задана почти всюду (п.в.), то значения ее на фиксированной поверхности S определяются неоднозначно: так как мера S равна нулю, то функция f может иметь на S произвольное значение.

Однако можно так обобщить понятие значения функции на поверхности, что оно будет иметь смысл и для функции, определенной почти всюду.

Определение 2.2.1. Следом $f|_S$ функции $f \in C(\bar{\Omega})$ на $(n-1)$-мерной поверхности S называется значение на этой поверхности определенной в каждой точке непрерывной в $\bar{\Omega}$ функции, почти всюду совпадающей с f.

Введем теперь понятие следа функции для функций из пространства $W_2^1(\Omega)$. Для этого нам потребуются некоторые определения.

Под $(n-1)$-мерной поверхностью S класса C^k, $k \geq 1$ будем понимать связную поверхность, которую можно покрыть конечным числом n-мерных областей $U_i, i = 1, ..., N$ так, что каждое из множеств $S_i = S \cap U_i$ однозначно проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область D_i с гладкой границей, лежащую в одной из координатных плоскостей. Другими словами, каждый *простой кусок* S_i описывается уравнением $x_i = \varphi_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$, где $\varphi_i \in C^k(\bar{D}_i)$.

Совокупность поверхностей S_i, простых кусков, будем называть покрытием поверхности S простыми кусками.

Пусть S — поверхность класса C^1, лежащая в $\bar{\Omega}$, S_1 — ее простой кусок, имеющий уравнение $x_n = \varphi(x')$, $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, где $x' \in D_1$, $\varphi \in C^1(\bar{D}_1)$.

Так как Ω ограничена, то можно считать, что она расположена в кубе $\{0 < x_i < a, \quad i = 1, ..., n\}$, $a > 0$. Предположим, что $u(x) \in \dot{C}^1 (\bar{\Omega})$ и положим ее равной нулю вне $\bar{\Omega}$. Представим ее с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$u(x)|_{S_1} = u(x', \varphi(x')) = \int\limits_0^{\varphi(x')} \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n.$$

Применим неравенство Буняковского, что приведет нас к неравенству

$$(u(x)|_{S_1})^2 \leq \varphi(x') \int\limits_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n \leq a \int\limits_0^a \left| \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n.$$

Перейдем в левой части к интегралу по поверхности S_1. Для этого обе части последнего неравенства умножим на $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + ... + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ и проинтегрируем по D (см.[17], том III). Получим

$$\int\limits_{S_1} |u|^2 dS_1 \leq a \int\limits_{\Omega_1} \left| \frac{\partial u(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 dS_1 d\xi_n. \tag{13}$$

Мы обозначили Ω_1 цилиндр с основанием D, ограниченный сверху поверхностью S_1 как шапочкой.

Так как поверхность S можно покрыть конечным числом N простых кусков, то, сложив все неравенства вида (13), получим

$$\int\limits_S |u|^2 dS \leq A \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right|^2 dSdx,$$

где $A \leq aN$. Если к правой части этого неравенства прибавить $\int\limits_\Omega u^2 dSdx$, то предыдущее неравенство усилится и позволит перейти к неравенству

$$||u||_{L_2(S)} \leq C||u||_{W_2^1(\Omega)}, \tag{14}$$

где C не зависит от u.

Пусть теперь $u \in W_2^1(\Omega)$. В силу теоремы 1.5.6 существует последовательность $u_q(x)$ функций из $C^1(\bar{\Omega})$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Omega)$ к $u(x)$. Так как для любых двух функций этой последовательности справедливо неравенство (14), то

$$||u_p - u_q||_{L_2(S)} \leq C||u_p - u_q||_{W_2^1(\Omega)}. \tag{15}$$

Так как $||u_p - u_q||_{W_2^1(\Omega)} \to 0, \quad p, q \to \infty$, то и $||u_p - u_q||_{L_2(S)} \to 0, \quad p, q \to \infty$. Это означает, что последовательность значений на поверхности $u_q\big|_S$ является фундаментальной в $L_2(S)$. В силу полноты пространства $L_2(S)$ эта последовательность имеет предел $u^s \in L_2(S)$. В неравенстве (15) перейдем к пределу при $q \to \infty$ и получим

$$||u_p - u^s||_{L_2(S)} \leq C||u_p - u||_{W_2^1(\Omega)}. \tag{16}$$

Определение 2.2.2. Функцию $u^s \in L_2(S)$ будем называть *следом* функции $u \in W_2^1(\Omega)$ на поверхности S и обозначать $u\big|_S$.

Теорема 2.2.1. Если множество функций ограничено в $W_2^1(\Omega)$, то множество их следов на $(n-1)$-мерной поверхности $S \subset \bar{\Omega}$ класса C^1 компактно в $L_2(S)$.

Доказательство теоремы 2.2.1 можно найти в [9] (глава III, §5, п. 5, теорема 4).

2.3 Эквивалентные нормировки пространств Соболева $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

В области Ω с гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$ рассмотрим вещественную симметрическую матрицу $P(x) = (p_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $p_{ij} = p_{ji}$, элементы которой $p_{ij} \in C(\bar{\Omega})$. Пусть в этой же области задана вещественная функция $q \in C(\bar{\Omega})$, а на границе задана функция $r \in C(\partial\Omega)$.

Определим в пространстве $W_2^1(\Omega)$ билинейную форму

$$\mathcal{W}(f,g) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} dx + \int\limits_{\Omega} qfg dx + \int\limits_{\partial\Omega} rfg ds. \tag{17}$$

Для справки:

Говорят, что на гильбертовом пространстве H задана эрмитова билинейная форма $\mathcal{W}$, если любой паре h_1, h_2 элементов этого пространства поставлено в соответствие комплексное число $\mathcal{W}(h_1,h_2)$, и это соответствие удовлетворяет свойствам:

a) $\mathcal{W}(h_1+h_2,h) = \mathcal{W}(h_1,h) + \mathcal{W}(h_2,h)$;

b) $\mathcal{W}(ch_1,h) = c\mathcal{W}(h_1,h)$;

c) $\mathcal{W}(h_1,h_2) = \overline{\mathcal{W}(h_2,h_1)}$.

Теорема 2.3.1. Если $q(x) \geq 0,\ x \in \bar{\Omega},\quad r(x) \geq 0,\ x \in \partial\Omega$ и не обращаются в нуль одновременно, $P(x)$ положительно определена, то билинейная форма (17) определяет на $W_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное стандартному скалярному произведению в $W_2^1(\Omega)$.

Прежде чем доказывать теорему, сделаем некоторые уточнения.

1. Матрица положительно определена. Это означает, что для любого вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и для всех $x \in \bar{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

с постоянной $\gamma > 0$.

2. Будем для краткости записи часто использовать обозначения:

$\nabla f = (f_{x_1}, ..., f_{x_n})$, $\nabla f \nabla g = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i} g_{x_i}$, т.е. скалярное произведение этих векторов.

3. Под стандартным скалярным произведением в $W_2^1(\Omega)$ мы понимаем

$$(f, g)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (fg + \nabla f \nabla g) dx. \qquad (18)$$

4. Скалярные произведения называются эквивалентными, если эквивалентны порождаемые ими нормы. Нормы $||f||_1$ и $||f||_2$ называются эквивалентными, если существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что

$$||f||_1 \le C_1 ||f||_2, \quad ||f||_2 \le C_2 ||f||_1.$$

Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Нам нужно выяснить, существуют ли положительные числа C_1, C_2 такие, что для любой функции $f \in W_2^1(\Omega)$

$$\mathcal{W}(f, f) \le C_1^2 ||f||^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad ||f||^2_{W_2^1(\Omega)} \le C_2^2 \mathcal{W}(f, f). \qquad (19)$$

I. Покажем справедливость первого неравенства (19). Для этого оценим каждое из трех слагаемых правой части (17) при $g = f$. Заметим, что в силу условий теоремы все они неотрицательны.

1) Так как по условию $p_{ij}(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$, то

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} f_{x_j} dx \le A \int\limits_{\Omega} \sum_{ij}^{n} |f_{x_i}||f_{x_j}| dx, \quad A = \max_{1 \le i,j \le n} ||p_{ij}||_{C(\bar{\Omega})}.$$

Рассмотрим

$$\sum_{ij}^{n} |f_{x_i}||f_{x_j}| = f_{x_1}^2 + ... + f_{x_n}^2 + 2 f_{x_1} f_{x_2} + ... + 2 f_{x_m} f_{x_l} + ... 2 f_{x_{n-1}} f_{x_n}$$

и удвоенные произведения оценим с помощью неравенства Коши:

$$2|f_{x_i}||f_{x_j}| \le |f_{x_i}|^2 + |f_{x_j}|^2.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{ij=1}^{n}|f_{x_i}||f_{x_j}|dx \le An\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|f_{x_i}|^2dx = An\int\limits_{\Omega}|\nabla f|^2dx.$$

Прибавим справа $An\int\limits_{\Omega}f^2dx$. Предыдущее неравенство усилится:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{ij}^{n}|f_{x_i}||f_{x_j}|dx \le An\int\limits_{\Omega}(f^2+|\nabla f|^2)dx.$$

Заметив, что последний интеграл есть не что иное, как норма $f(x)$ в $W_2^1(\Omega)$, получим

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}f_{x_i}f_{x_j}dx \le An||f||^2_{W_2^1(\Omega)}.$$

2) Рассмотрим второе и третье слагаемые правой части (17) и оценим их. Обозначим $A_1 = ||q||_{C(\bar{\Omega})}$, $A_2 = ||r||_{C(\bar{\Omega})}$. Такие числа существуют, так как по условию теоремы функции $q(x)$, $r(x)$ непрерывны в замкнутой области. Получим, усиливая неравенство,

$$\int\limits_{\Omega}qf^2dx \le A_1\int\limits_{\Omega}f^2dx = A_1||f||^2_{L_2(\Omega)} \le A_1||f||^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\int_{\partial\Omega}rf^2ds \le A_2\int_{\partial\Omega}f^2ds = A_2||f||^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

и в силу неравенства (14)

$$\int\limits_{\Omega}qf^2dx \le A_2C^2||f||^2_{W_2^1(\partial\Omega)}.$$

Полученные оценки убеждают нас в том, что число C_1^2 существует: $C_1^2 = An + A_1 + A_2C^2$ и, стало быть, первое из неравенства (19) выполняется.

II. Покажем справедливость второго из неравенств (19).

Предположим, что не существует постоянной C_2^2. Тогда для любого целого числа $m \ge 1$ найдется функция $f_m \in W_2^1(\Omega)$ такая, что

$$||f_m||^2_{W_2^1(\Omega)} > m\mathcal{W}(f_m, f_m).$$

Введем функцию $g_m(x) = \frac{f_m(x)}{||f_m||_{W_2^1(\Omega)}}$. Ее норма $||g_m||_{W_2^1(\Omega)} = 1$. Рассмотрим

$$\mathcal{W}(g_m, g_m) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} g_{mx_i} g_{mx_j} dx + \int\limits_{\Omega} q g_m^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} r g_m^2 ds.$$

В силу предположения

$$\mathcal{W}(g_m, g_m) < \frac{1}{m},$$

но тогда каждое слагаемое правой части не превосходит $1/m$ и

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g_m|^2 dx < \frac{1}{\gamma m}, \quad \int\limits_{\Omega} q g_m^2 dx < \frac{1}{m}, \quad \int\limits_{\partial\Omega} r g_m^2 ds < \frac{1}{m}. \qquad (20)$$

Второе и третье неравенства не вызывают сомнения. Рассмотрим, как получилось первое. По условию теоремы матрица $P(x)$ положительно определена, а это означает, что для $\bar{\xi} = \nabla g_m$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x) g_{mx_i} g_{mx_j} \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} |g_{mx_i}|^2 = \gamma |\nabla g_m|^2.$$

Тогда имеем

$$|\nabla g_m|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x) g_{mx_i} g_{mx_j}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla g_m|^2 dx \leq \frac{1}{\gamma} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x) g_{mx_i} g_{mx_j} dx < \frac{1}{\gamma m}.$$

У нас образовалась последовательность $\{g_m\}$, причем по построению $||g_m||_{W_2^1(\Omega)} = 1$. Но это означает, что последовательность $\{g_m\}$ ограничена в $W_2^1(\Omega)$. Тогда в силу теоремы 2.1 из нее можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в $L_2(\Omega)$. Для простоты оставим за выделенной подпоследовательностью то же обозначение. Тогда

$$||g_m - g_p||_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad m, p \to \infty.$$

Рассмотрим теперь поведение этой последовательности в $W_2^1(\Omega)$.

$$||g_m - g_p||^2_{W_2^1(\Omega)} = ||g_m - g_p||^2_{L_2(\Omega)} + |||\nabla(g_m - g_p)|||^2_{L_2(\Omega)}.$$

(Это равенство следует из определения нормы пространства $W_2^1(\Omega)$.) Применим ко второму слагаемому правой части этого равенства неравенство Коши, как в п. I:

$$|||\nabla(g_m - g_p)|||^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla(g_m - g_p)|^2 dx = \int\limits_\Omega |\nabla g_m - \nabla g_p|^2 dx$$

$$= \int\limits_\Omega (|\nabla g_m|^2 - 2|\nabla g_m||\nabla g_p| + |\nabla g_p|^2) dx \le 2\int\limits_\Omega |\nabla g_m|^2 dx + 2\int_\Omega |\nabla g_p|^2 dx$$

$$= 2|||\nabla g_m|||_{L_2(\Omega)} + 2|||\nabla g_m|||_{L_2(\Omega)}.$$

Получим

$$||g_m - g_p||^2_{W_2^1(\Omega)} \le ||g_m - g_p||^2_{L_2(\Omega)} + 2|||\nabla g_m|||_{L_2(\Omega)} + 2|||\nabla g_m|||_{L_2(\Omega)}$$

$$\le ||g_m - g_p||^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$||g_m - g_p||_{W_2^1(\Omega)} \to 0, \quad m, p \to \infty,$$

а это значит, что последовательность $\{g_m\}$ фундаментальна и в $W_2^1(\Omega)$. В силу полноты этого пространства последовательность $\{g_m\}$ сходится в норме $W_2^1(\Omega)$ к некоторому элементу $g \in W_2^1(\Omega)$.

Перейдем к пределу в равенстве $||g_m|| = 1$, а также в неравенствах (20). Получим

$$||g||_{W_2^1(\Omega)} = 1, \quad \int\limits_\Omega |\nabla g|^2 dx = 0, \quad \int\limits_\Omega q|g|^2 dx = 0, \quad \int\limits_{\partial\Omega} r|g|^2 ds = 0.$$

Из второго равенства следует, что $g(x) = g = const$, так как обобщенный градиент равен нулю.

Из первого равенства следует, что $g = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$. Действительно, по определению

$$||g||^2_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega [g^2 + |\nabla g|^2] dx,$$

но выше показано, что $\nabla g = 0$. Тогда

$$||g||^2_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega g^2 dx = g^2 \int\limits_\Omega dx.$$

Так как $||g||_{W_2^1(\Omega)} = 1$, то $g = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$. Аналогично находим и $g|_{\partial\Omega} = \frac{1}{\sqrt{|\partial\Omega|}}$. (Покажите сами!) Но тогда мы получаем противоречие с двумя последними равенствами, так как по условию функции $q(x)$ и $r(x)$ не обращаются в нуль одновременно. Теорема доказана.

Для решения задач нам будут полезны некоторые частные случаи доказанной теоремы. Из теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие. Пусть $P(x) = p(x)E,\ E-$ единичная матрица, $p(x)-$ непрерывная функция. Тогда если $p \in C(\bar\Omega),\ p(x) \geq p_0 > 0,\ q \in C(\bar\Omega),\ q(x) \geq 0,\ r \in C(\partial\bar\Omega),\ r(x) \geq 0,\ q(x), r(x)$ не обращаются в нуль одновременно, то билинейная форма

$$\mathcal{W}(f,g) = \int\limits_\Omega (p(x)\nabla f \nabla g + qfg)dx + \int\limits_{\partial\Omega} rfgds$$

определяет в $W_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное скалярному произведению

$$(f,g)_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega (fg + \nabla f \nabla g)dx.$$

Теорема 2.3.2. Если $q(x) \geq 0,\ x \in \bar\Omega,\ P(x)$ положительно определена, то билинейная форма

$$\mathcal{W}(f,g) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n p_{ij} f_{x_i} g_{x_j} dx + \int\limits_\Omega qfgdx$$

определяет в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное стандартному скалярному произведению

$$(f,g)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (fg + \nabla f \nabla g)dx.$$

Из теоремы 2.3.2 вытекает

Следствие. Пусть $P(x) = p(x)E$, где E — единичная матрица, $p(x), q(x)$ — непрерывные функции, $p(x) \geq p_0 > 0,\ q(x) \geq 0$ в $\bar{\Omega}$. Билинейная форма

$$\mathcal{W}(f, g) = \int\limits_{\Omega} (p(x)\nabla f \nabla g + qfg)dx$$

определяет в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение, эквивалентное стандартному

$$(f, g)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (fg + \nabla f \nabla g)dx.$$

В частности, из следствия теоремы 2.3.2 очевидно, что эквивалентным скалярным произведением стандартному является скалярное произведение

$$(f, g)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla f \nabla g dx.$$

2.4 Неравенства Фридрихса и Пуанкаре

Для решения задач нам потребуются некоторые неравенства, известные и не очень.

Неравенство Фридрихса. Пусть Ω — ограниченная область в R^n. Для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \leq C \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \tag{21}$$

с постоянной C, которая не зависит от $u(x)$, а определяется только размерами области Ω.

Доказательство можно найти, например, в [8]. Идея доказательства хорошо видна на примере в одномерном случае.

Пусть $u \in W_2^1(a, b)$ и $u(a) = u(b) = 0$. Известно [10], с.34, что такая функция абсолютно непрерывна, но тогда ее можно представить следующим образом (учитывая, что $u(a) = 0$):

$$u(x) = \int\limits_a^x u'(x)dx.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и в правой части применим неравенство Коши-Буняковского:

$$|\int\limits_a^x u(t)'dt| \leq \left(\int\limits_a^x 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_a^x (u'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$u^2(x) \leq x\int\limits_a^x (u'(x))^2 dx \leq x\int\limits_a^b (u'(x))^2 dx.$$

(Так как под интегралом неотрицательная функция.) Проинтегрируем неравенство по (a, b) и в результате получим:

$$\int\limits_a^b u^2(x)dx \leq \frac{b^2 - a^2}{2}\int\limits_a^b (u'(x))^2 dx.$$

Неравенство Пуанкаре. Для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega u^2 dx \leq C_1 \left(\int\limits_\Omega u(x)dx\right)^2 + C_2\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx, \qquad (22)$$

с постоянными C_i, которые не зависят от $u(x)$, а определяются только размерами области Ω.

Доказательство можно найти в [8], с. 283, а мы здесь рассмотрим частный случай $n = 1$.

Пусть $\Omega = (a, b),\ x, y \in (a, b)$. Для определенности будем считать, что $y < x$. Представим функцию u с помощью интеграла следующим образом:

$$u(x) - u(y) = \int\limits_y^x u'(t)dt.$$

Возведем в квадрат обе части

$$u^2(x) - 2u(x)u(y) + u^2(y) = \left(\int\limits_y^x u'(t)dt\right)^2$$

и оценим правую часть с помощью неравенства Коши-Буняковского. Учитывая, что левая часть неотрицательна, получим

$$u^2(x) - 2u(x)u(y) + u^2(y) \le (x-y)\int_x^y (u'(t))^2 dt \le (b-a)\int_a^b (u'(t))^2 dt.$$

Теперь проинтегрируем неравенство по x:

$$\int_a^b u^2(x)dx - 2u(y)\int_a^b u(x)dx + (b-a)u^2(y) \le (b-a)^2 \int_a^b (u'(t))^2 dt.$$

А теперь по y:

$$(b-a)\int_a^b u^2(x)dx - 2\int_a^b u(y)dy \int_a^b u(x)dx + (b-a)\int_a^b u^2(y)dy$$

$$\le (b-a)^3 \int_a^b (u'(t))^2 dt.$$

После элементарных действий получим

$$\int_a^b u^2(x)dx \le \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u(x)dx\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (u'(x))^2 dx.$$

2.5 Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,a)$ скалярные произведения

$$(u,v)_1 = \int_0^a (uv + u'v')dx, \quad (u,v)_2 = \int_0^a u'v'dx$$

эквивалентны.
2. Доказать, что в $W_2^1(a,b)$ скалярные произведения

$$(u,v)_1 = \int_a^b (uv + u'v')dx, \quad (u,v)_2 = \int_a^b u'v'dx + \int_a^b udx \int_a^b vdx$$

эквивалентны.
3. a) Доказать, что всякая функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ является непрерывной в $(0,1)$.

b) Всякая ли непрерывная функция $u(x)$ на отрезке $[0,1]$, такая что $u(0) = u(1) = 0$, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$?

3 Обобщенное решение задачи Дирихле

3.1 Определение обобщенного решения в пространстве $W_2^1(\Omega)$

В n-мерной ограниченной области Ω рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv div(a(x)\nabla u) - c(x)u = f. \tag{23}$$

— Это похоже на зашифрованное сообщение, — сказал Петр.

— Сейчас расшифруем, — ответил Николай. div — это дивергенция: если компоненты $b_i(x)$ вектора $\bar{b}(x) = (b_1(x), ..., b_n(x))$ имеют производные первого порядка, то

$$div\bar{b}(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ix_i}(x).$$

Но у нас вектор $\nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_n})$ еще и умножен на скалярную функцию $a(x)$. Поэтому

$$div(a(x)\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} (a(x)u_{x_i})_{x_i}.$$

То есть уравнение (23) является частным случаем уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x),$$

с которым мы уже встречались, когда изучали классификацию уравнений второго порядка.

(С понятиями *градиент, дивергенция* можно ближе познакомиться, например, в [2].)

Заметим, что если в (23) $a(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, то это уравнение эллиптическое. А если $a = 1$, $c = 0$, то это уравнение Лапласа! Мы рассматривали задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа и выяснили, что найти решение этих задач в виде формулы с помощью известных нам методов можно далеко не всегда. Если область Ω, внутри или вне которой мы ищем решение, произвольна, то найти решение в явном виде не удастся ни методом разделения переменных, ни с помощью функции Грина, ни методом потенциалов. Однако последний из перечисленных методов дает возможность доказать, что решение существует, несмотря на то, что мы не можем предъявить формулу решения. Но именно доказательство существования решения и его единственности является важным в исследовании краевых задач. Поэтому вместо уравнения Лапласа будем рассматривать уравнение вида (23). Произвольность его коэффициентов пресекает попытки получить решение в явном виде и, хотя это уравнение не является самым общим эллиптическим уравнением, на его примере удобно изучить метод исследования разрешимости краевых задач в пространстве Соболева. Результаты о разрешимости задач в пространстве $W_2^1(\Omega)$ могут позволить найти условия на входные данные, при которых существует и более гладкое решение.

Будем предполагать, что $a \in C^1(\bar{\Omega}),\ a(x) \geq a_0 > 0 \ \ \forall x \in \Omega$, $c \in C(\bar{\Omega})$.

Функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ называется классическим решением задачи Дирихле для уравнения (23), если в Ω она удовлетворяет уравнению (23), а на границе $\partial\Omega$ условию

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{24}$$

Пусть $u(x)$ является классическим решением задачи Дирихле (23)—(24). Умножим равенство (23) на произвольную функцию $v \in \dot{C}^1(\Omega)$ и проинтегрируем полученное равенство по Ω. Так как уравнение записано в дивергентной форме, а $v|_{\partial\Omega} = 0$, то, применив формулу Остроградского, получим

$$\int\limits_{\Omega} (a(x)\nabla u \nabla v + c(x)uv)dx = -\int\limits_{\Omega} fv dx. \tag{25}$$

Действительно, в силу формулы интегрирования по частям для каждого слагаемого суммы $div(a(x)\nabla u) = \sum\limits_{i=1}^{n} (a(x)u_{x_i})_{x_i}$, получим

$$\int\limits_{\Omega} (a(x)u_{x_i})_{x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} a(x)u_{x_i}v_{x_i}dx + \int\limits_{\partial\Omega} a(x)u_{x_i}v\nu_i ds,$$

где ν_i — это i-я компонента внешней нормали ν к поверхности $\partial\Omega$. Так как в наших обозначениях $\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} = \nabla u \nabla v$, а на границе $v(x)$ равна нулю, то после суммирования и получим (25).

Если $u_{x_i} \in L_2(\Omega)$, то $u \in W_2^1(\Omega)$ и тождество (25) будет выполняться для всех функций $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Действительно, в силу свойства плотности $\dot{C}^1(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (следует из определения), для любой $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ существует последовательность $v_k \in \dot{C}^1(\Omega)$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Omega)$ к $v(x)$. Для каждой функции $v_k(x)$ справедливо (25). Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$, убеждаемся в справедливости утверждения.

Эти рассуждения приводят нас к выводу о том, что если правая часть уравнения, $f(x)$, не является непрерывно дифференцируемой функцией, но принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, то классическое решение $u(x)$ задачи (23)—(24) удовлетворяет тождеству (25) при всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Заметим, что интеграл в левой части равенства (25) существует и для $u \in W_2^1(\Omega)$. Такая функция не может претендовать на роль классического решения (существование даже обобщенных вторых производных не предполагается), но тот факт, что (25) имеет смысл и для функций из пространства $W_2^1(\Omega)$, позволяет ввести определение *обобщенного решения.*

Определение 3.1.1. Функция $u \in W_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле (23)—(24), если она удовлетворяет граничному условию (24) и тождеству (25) для всех функций $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Замечание. Если граничное условие однородное, $u|_{\partial\Omega} = 0$, то в определении обобщенного решения возникает симметрия, так как теперь функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Рассмотрим этот случай подробно.

Определение 3.1.2. Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле

$$div(a(x)\nabla u) - c(x)u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

если она удовлетворяет тождеству (25) при всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Заметим, что в этом случае информация о граничном условии содержится в определении обобщенного решения с помощью включения $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

3.2 Существование и единственность обобщенного решения в простейшем случае

Сначала рассмотрим простейший случай. Его простота определяется знаком $c(x)$.

Рассмотрим задачу Дирихле с однородным граничным условием $u|_{\partial\Omega} = 0$ и будем считать, что $c(x) \geq 0$ в Ω.

Тогда интеграл в левой части (25) можно принять за скалярное произведение. Более того, это новое скалярное произведение

$$(u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (a \nabla u \nabla v + cuv) dx$$

эквивалентно стандартному скалярному произведению в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

(Убедитесь в том, что это возможно, только если $c(x) \geq 0$ в Ω.)

Правая часть (25) представляет собой скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, поэтому (25) можно записать в виде

$$(u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = -(f, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{26}$$

— Ах, если бы и справа было скалярное произведение в том же пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$! — воскликнул Петр.

— Но это можно устроить, — ответил Николай.

Действительно, есть замечательная теорема Ф. Рисса:

Теорема Рисса. Для любого линейного ограниченного функционала l, заданного на гильбертовом пространстве H, существует единственный элемент $h \in H$ такой, что для всех $f \in H$ $l(f) = (f, h)$. При этом $||h|| = ||f||$.

Так как при фиксированном $f \in L_2(\Omega)$ скалярное произведение $(f, v)_{L_2(\Omega)}$ является линейным ограниченным функционалом, заданным на гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то существует функция $F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что

$$-(f,v)_{L_2(\Omega)} = (F,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Очевидно, что $(f,v)_{L_2(\Omega)}$ — линейный функционал. Проверим, что он ограничен. В силу неравенства Буняковского

$$|(f,v)_{L_2(\Omega)}| \le ||f||_{L_2(\Omega)}||v||_{L_2(\Omega)} \le C||f||_{L_2(\Omega)}||v||_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Вот теперь можно записать (26) так:

$$(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} = (F,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}. \tag{27}$$

Следовательно, в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ существует единственный элемент F такой, что $u = F$ (в смысле равенства функций в L_2).

Теорема 3.2.1. Если $c(x) \ge 0$ в Ω, то для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле для уравнения (23), удовлетворяющее однородному граничному условию $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Если $c(x)$ не удовлетворяет этому условию, то ничего не получится?

Получится, но потребуется гораздо больше усилий. Начнем с понятия *обобщенной собственной функции.*

3.3 Обобщенные собственные функции

Вспомним сначала определение собственной функции и собственного значения оператора $\mathcal{L} \equiv div(a(x)\nabla) - c(x)$.

Не равная тождественно нулю функция $u(x)$ называется собственной функцией задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$, если существует такое число λ, что функция $u(x)$ является решением однородной задачи

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{28}$$

Пусть λ — собственное значение, а $u(x)$ — собственная функция задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$. Предположим, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Умножим равенство (28) на произвольную функцию $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. В результате получим тождество

$$\int\limits_{\Omega}(a\nabla u\nabla v + cuv)dx = -\lambda\int\limits_{\Omega} uvdx. \tag{29}$$

Определение 3.3.1. Не равная нулю функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$, если существует такое число λ, что функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству (29) при всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Число λ называется собственным значением.

Заметим, что собственная функция определяется с точностью до множителя: если $u(x)$ — собственная функция, то для любого, не равного нулю числа C, функция $Cu(x)$ также собственная функция. В связи с этим можно рассматривать нормированные собственные функции, и мы будем считать, что $||u||_{L_2(\Omega)} = 1$.

Проделаем некоторые преобразования, которые кажутся на первый взгляд не вполне осмысленными, но вскоре будет понятно, что они очень нужны.

Пусть $m = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} c(x)$. Тогда $\tilde{c}(x) = c(x) - m + 1 \geq 1$ в Ω и скалярное произведение

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}(a\nabla u\nabla v + \tilde{c}uv)dx \tag{30}$$

эквивалентно стандартному. Тождество (29) с учетом проделанных преобразований приобретает вид

$$\int\limits_{\Omega}(a\nabla u\nabla v + \tilde{c}uv)dx + (m-1)\int\limits_{\Omega} uvdx = -\lambda\int\limits_{\Omega} uvdx,$$

откуда получим вот такое равенство:

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda - m + 1)(u, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{31}$$

3.4 Разрешимость задачи Дирихле в случае произвольного знака $c(x)$

Пусть теперь условие $c(x) \geq 0$ не выполняется. Тогда интеграл $\int\limits_{\Omega}(\nabla u \nabla v + cuv)dx$ не может служить скалярным произведением. Воспользуемся введенной в предыдущем пункте функцией $\tilde{c}(x)$ и перепишем тождество (25) следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega}[a(x)\nabla u \nabla v + \tilde{c}(x)uv]dx + (m-1)\int\limits_{\Omega} uvdx = -\int\limits_{\Omega} fvdx.$$

Учитывая сделанные выше замечания, это равенство можно переписать так:

$$(u,v)_{W_2^1(\Omega)} + (m-1)(u,v)_{L_2(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)} \tag{32}$$

К сожалению, второе слагаемое левой части последнего равенства не позволяет нам применить теорему Рисса, как это было сделано в случае неотрицательного $c(x)$. Придется принять меры.

Теорема 3.4.1. Существует линейный ограниченный оператор A, действующий из $L_2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с областью определения $L_2(\Omega)$, для которого при всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = (Au,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}; \tag{33}$$

оператор A имеет обратный A^{-1};

оператор A, если его рассматривать как оператор из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,является самосопряженным, положительным и вполне непрерывным.

Доказательство. В теореме сформулированы три утверждения, каждое из которых важно. Поэтому доказательство удобно разбить на три шага.

1. Скалярное произведение $(u,v)_{L_2(\Omega)}$ для любой фиксированной функции u является линейным по v функционалом: $l(v) = (u,v)_{L_2(\Omega)}$. Этот функционал ограничен. Действительно,

$$|l(v)| = |(u,v)_{L_2(\Omega)}| \leq ||u||_{L_2(\Omega)}||v||_{L_2(\Omega)} \leq C||u||_{L_2(\Omega)}||v||_{W_2^1(\Omega)}.$$

Согласно теореме Рисса (см. с. 38) существует единственная функция $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что $l(v) = (U, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Итак, для *фиксированной* u существует единственная функция U, которая находится по правилу, описанному выше. Зафиксировав другую функцию u, получим соответствующую U по тому же правилу. Это означает, что на $L_2(\Omega)$ задан оператор, который обозначим A, такой, что $Au = U$ и он действует по правилу (33). Линейность оператора A очевидна. Покажем, что он ограничен. Действительно,

$$||Au||_{W_2^1(\Omega)} = ||U||_{W_2^1(\Omega)} = ||l|| \leq C||u||_{L_2(\Omega)}.$$

— Полезно вспомнить определения функционала, его нормы, да и всякие свойства, которые мы уже использовали и будем использовать в дальнейшем, — сказал Петр. Николай с ним полностью согласился.

2. Если при некотором $u \in L_2(\Omega)$ $Au = 0$, то в силу равенства (33) $(u, v)_{L_2(\Omega)} = 0$ для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда из свойства скалярного произведения $u = 0$, а это означает, что существует обратный оператор A^{-1}.

3. Покажем, что оператор A самосопряженный, если его рассматривать как оператор из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Из (33) имеем

$$(Au, v)_{W_2^1(\Omega)} \overset{a}{=} (u, v)_{L_2(\Omega)} \overset{b}{=} (v, u)_{L_2(\Omega)} \overset{a}{=} (Av, u)_{W_2^1(\Omega)} \overset{b}{=} (u, Av)_{W_2^1(\Omega)}.$$

— А что означают буквы над знаками равенств? — спросил Петр.
— Чтобы пояснить происхождение каждого из равенств:
a — по определению оператора, b — по свойству скалярного произведения, — ответил Николай.
— Кстати, мы ведь договорились, что рассматриваем только действительные функции?
— Почему ты спрашиваешь? Ааа, понял. Да, это важно.

Из (33) вытекает и положительность оператора:

$$(Au, u)_{W_2^1(\Omega)} = (u, u)_{L_2(\Omega)} \geq 0.$$

Причем в силу свойства скалярного произведения $(u, u) = 0$ только при $u = 0$.

Докажем теперь очень важное для дальнейшего свойство оператора A, а именно, его полную непрерывность. Возьмем произвольное ограниченное в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ множество функций. Это множество компактно в $L_2(\Omega)$ (теорема 2.1), а это значит, что из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в $L_2(\Omega)$ последовательность $u_k,\ k = 1, 2, \ldots$ Так как оператор A из $L_2(\Omega)$ ограничен и, в силу линейности, непрерывен, то последовательность $\{Au_k\}$ фундаментальна в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким образом, оператор A переводит ограниченное множество в компактное и, следовательно, является вполне непрерывным.

Теорема доказана.

(Для того чтобы все это понять, полезно вспомнить определения. Открываем книгу [9] и читаем главу II, § 3, п. 6 и 9.)

Вернемся к задаче Дирихле. Мы остановились на равенстве (32) и не знали, что делать дальше, а именно, как быть со вторым скалярным произведением в левой его части.

— Теорема нам поможет! — воскликнул Петр.

И это действительно так. В силу теоремы 3.4.1 и теоремы Рисса равенство (32) можно переписать так:

$$(u, v)_{W_2^1(\Omega)} + (m-1)(Au, v)_{W_2^1(\Omega)} = (F, v)_{W_2^1(\Omega)}. \tag{34}$$

Заметим, что теперь все слагаемые этого равенства суть скалярные произведения в одном и том же пространстве, поэтому можно применить к нему свойства скалярных произведений:

$$(u + (m-1)Au - F, v)_{W_2^1(\Omega)} = 0.$$

Это равенство выполняется для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому из него следует

$$u + (m-1)Au = F. \tag{35}$$

(Напомним, что $F = -Af$.) Нетрудно показать, что если $u(x)$ удовлетворяет операторному уравнению (35), то выполняется тождество (32), а это означает, что (32) и (35) эквивалентны.

Так как оператор A не просто какой-нибудь, а вполне непрерывный, то к нему применимы теоремы Фредгольма.

Утверждение 1. Если число $1-m$ не является характеристическим числом оператора A, то в силу второй теоремы Фредгольма [11] уравнение (35) однозначно разрешимо при любой правой части $F \in L_2(\Omega)$.

Обратимся к определению обобщенных собственных функций. Сравнение равенств (29) и (35) говорит нам о том, что $1-m$ является характеристическим числом оператора A тогда и только тогда, когда нуль является собственным значением задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4.2. Если нуль не является собственным значением оператора $\mathcal{L}$, то для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение однородной задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}u = f$ в области Ω.

Утверждение 2. Если число $1-m$ есть характеристическое число оператора A, то в силу четвертой теоремы Фредгольма [11] для разрешимости уравнения (35) необходимо и достаточно выполнение условия $(Af, u_k)_{W_2^1(\Omega)} = 0$ для всех собственных функций u_k оператора A, соответствующих характеристическому числу $1-m$.

Из определения оператора A следует, что ортогональность функций Af и u_k в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ эквивалентна ортогональности функций f и u_k в $L_2(\Omega)$.

Теорема 3.4.3. Если нуль является собственным значением задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$, то для существования обобщенного решения однородной задачи Дирихле необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $(f, u_k)_{L_2(\Omega)} = 0$ для всех обобщенных собственных функций u_k, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$.

Примеры

Рассмотрим задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} - (x+y)u = f(x,y), \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

$$a)\ \Omega = \{(x,y) : 1 < x < 2, 1 < y < 3\}.$$

В этом уравнении $c(x,y) = x+y$. Выясним, какой знак имеет эта функция в области Ω. Легко видеть, что всюду в рассматриваемой области $c(x,y) > 0$. Поэтому для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача Дирихле имеет единственное решение.

А если область другая, например,

$$b)\ \Omega = \{(x,y):\ x^2+y^2<1\}.$$

В этом случае функция $x+y$ может принимать и отрицательные значения. Поэтому нельзя сразу сделать вывод о разрешимости задачи.

Рассмотрим функцию $\tilde{c}(x,y) = x+y-m+1$, где мы можем положить $m=-1$. Тогда $\tilde{c}(x,y) = x+y+2$. Отсюда $x+y = \tilde{c}(x,y)-2$. Подставим в уравнение:

$$u_{xx}+u_{yy}-(x+y+2)u+2u = f(x,y).$$

Введем понятие обобщенного решения. Сначала получим интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega}(u_x v_v + u_y v_y + (x+y+2)uv)dxdy - 2\int\limits_{\Omega} uvdxdy = -\int\limits_{\Omega} fvdxdy.$$

Будем называть обобщенным решением поставленной задачи Дирихле в круге $\Omega:\ x^2+y^2<1$ функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет этому тождеству для любой $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Первый интеграл в выведенном тождестве позволяет ввести скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, эквивалентное стандартному, а в силу теоремы 3.4.1 существует подходящий для наших целей оператор A, и мы можем перейти к операторному уравнению

$$u-2Au = -Af,$$

в котором оператор A вполне непрерывный.

Петр сказал: "Теперь осталось совсем немного сделать, чтобы доказать разрешимость этого уравнения. Всего-то выяснить, является число 2 характеристическим значением оператора A или нет. В зависимости от ответа на этот вопрос применим либо утверждение 1, либо утверждение 2, а затем одну из теорем: 3.4.2 или 3.4.3".

А Николай ответил: "Легко сказать, но как мы выясним, является ли 2 характеристическим числом или нет? Наверное, нужно почитать в очередной раз [11]."

— Но там же про интегральные уравнения, а у нас какой-то оператор A, — воскликнул Петр.

— Да, но интегральный оператор Фредгольма — вполне непрерывный оператор, — сказал Николай.

— А еще есть *альтернатива Фредгольма.* Нужно прочитать внимательно и обдумать.

Задачи для самостоятельного решения

1. Как в рассмотренном выше примере проанализируйте условия разрешимости задачи Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} - (2x - y)u = f(x, y), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$a) \quad \Omega = \{(x, y) : \ 1 < x < 2, \ 0 < y < 1\},$$

$$b) \quad \Omega = \{(x, y) : \ 0 < x < 2, \ 2 < y < 4\}.$$

2. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение однородной задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - c(x) = f(x), \ c(x) \geq 0$ в Ω. Покажите, что если $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, то $u(x)$ является классическим решением задачи Дирихле.

3. Рассмотрите задачу Дирихле с однородным условием для уравнения $\Delta u - 2(x - 1)u = f(x)$. Приведите примеры областей, где эта задача безусловно разрешима. (Здесь под безусловной разрешимостью мы имеем в виду случай определенного знака $c(x)$.)

4. Обдумайте, как может помочь альтернатива Фредгольма при исследовании разрешимости задачи Дирихле, если в уравнении знак $c(x)$ не тот, который обеспечивает однозначную безусловную разрешимость.

4 Обобщенное решение краевой задачи для гиперболического уравнения

4.1 Определение обобщенного решения

В этой главе мы рассмотрим первую начально-краевую задачу для одномерного гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t). \tag{36}$$

Задача 4.1. Найти решение уравнения (36) в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{37}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0. \tag{38}$$

Будем предполагать, что $a(x,t) > 0$ всюду в $\bar{Q}_T$. Это условие обеспечивает гиперболичность уравнения (36). Так как коэффициенты уравнения произвольны, то нет никаких надежд найти решение поставленной задачи в явном виде. Поэтому нашей целью будет доказательство разрешимости задачи, а не поиск формулы решения. Исследовав вопрос о разрешимости задачи, иначе говоря, найдя условия на входные данные, при выполнении которых задача имеет единственное и устойчивое решение, можно переходить к поиску приближенных решений. Хотя последнее выходит за рамки наших разговоров, и мы не будем детально рассматривать численные методы, метод, который мы сейчас начнем обсуждать, укажет один из возможных путей построения приближенных решений.

Исследование разрешимости проведем по следующей схеме.

1. Введем понятие обобщенного решения.

2. Докажем существование единственного обобщенного решения в пространстве Соболева $W_2^1(Q_T)$.

3. Найдем условия на входные данные, при выполнении которых обобщенное решение является классическим.

Приступим к реализации нашего плана.

Начнем с вывода тождества, на котором будет основано определение обобщенного решения.

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи 4.1. Это означает, что $u \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяет в Q_T уравнению (36), а также начальным и краевым условиям (37), (38). Умножим обе части *равенства* (36) на достаточно гладкую функцию $v(x,t)$ такую, что $v(x,T) = 0$, $v(0,t) = v(l,t) = 0$, и проинтегрируем по области Q_T.

$$\int_0^T \int_0^l [u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u] v\,dx\,dt = \int_0^T \int_0^l f v\,dx\,dt.$$

Преобразуем левую часть, интегрируя по частям и не забывая про граничные условия, которым удовлетворяют функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Получим

$$\int_0^T \int_0^l u_{tt} v\,dx\,dt = -\int_0^T \int_0^l u_t v_t\,dx\,dt - \int_0^l \psi(x) v(x,0)\,dx;$$

$$-\int_0^T \int_0^l (a u_x)_x v\,dx\,dt = \int_0^T \int_0^l a u_x v_x\,dx\,dt$$

и придем к равенству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v)\,dx\,dt = \int_0^T \int_0^l f v\,dx\,dt + \int_0^l \psi(x) v(x,0)\,dx. \quad (39)$$

Заметим, что в равенстве (39) все интегралы (как интегралы Лебега) существуют, если функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ принадлежат пространству $W_2^1(Q_T)$. Обозначим

$$W_{2,0}^1(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T),\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0\},$$

$$\hat{W}_{2,0}^1(Q_T) = \{v(x,t) : v \in W_{2,0}^1(Q_T),\ v(x,T) = 0\}.$$

Заметим, что информация о том, что $u_t(x,0) = \psi(x)$, отражена в равенстве (39) при помощи интеграла $\int\limits_0^l \psi(x)v(x,0)dx$.

Определение 4.1.1. Функцию $u \in W^1_{2,0}(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи 4.1, если она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству (39) для любой $v \in \hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$.

Приступим к исследованию разрешимости задачи в пространстве $W^1_2(Q_T)$.

— Сформулируем теорему? — Спросил Петр.

— Нет, пока не можем это сделать, — ответил Николай.

— Мы еще не знаем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнения, начальные условия, правая часть, может быть, возникнут условия на область. В учебниках действительно, сначала теорема, потом доказательство, но теорема вперед!

Пока мы не изучим задачу, условия не могут откуда ни возьмись появиться. Вот мы сейчас как настоящие исследователи будем пытаться выяснить, что нужно потребовать от входных данных для того, чтобы существовало единственное обобщенное решение задачи 4.1, все это зафиксируем, а потом сформулируем теорему.

Начнем с вопроса о единственности решения. Точнее, выясним, при выполнении каких условий не может существовать более одного решения. Другими словами, либо одно, либо ни одного.

4.2 Разрешимость первой начально-краевой задачи

Начнем изучать вопрос о разрешимости задачи с исследования условий, при выполнении которых не может существовать более одного решения.

Предположим, что существует два различных обобщенных решения задачи 4.1: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Это означает, что каждая из этих функций удовлетворяет тождеству (39)

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_{1t}v_t + au_{1x}v_x + cu_1v)dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt + \int\limits_0^l \psi(x)v(x,0)dx,$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_{2t}v_t+au_{2x}v_x+cu_2v)dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt+\int\limits_0^l\psi(x)v(x,0)dx$$

и $u_1(x,0)=\varphi(x),\ \ u_2(x,0)=\varphi(x)$. Тогда, как легко видеть, функция $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ обращается в нуль при $t=0$ и удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt=0. \tag{40}$$

Если нам удастся показать, что при некоторых разумных условиях это тождество справедливо *только* для $u=0$, то $u_1=u_2$ и единственность будет установлена.

Так как тождество (40) выполняется для всех $v\in\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$, то мы можем выбрать одну из возможных. Выберем ее, положив

$$v(x,t)=\begin{cases}\int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0\le t\le\tau,\\ 0, & \tau\le t\le T\end{cases}$$

и подставим в (40).

— Принадлежит ли эта функция пространству $\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$? — спросил Петр.

— Да это совсем просто показать, — сказал Николай, — мы ведь предположили, что $u\in W^1_{2,0}(Q_T)$. Кстати, из представления видно, что $v_t(x,t)=u(x,t)$.

— Действительно, функция $v(x,t)$ представлена интегралом с переменным пределом, а подинтегральная функция от t не зависит, — сказал Петр.

(Полезно убедиться в принадлежности выбранной нами функции $v(x,t)$ пространству $\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$, используя определения и представление функции $v(x,t)$.)

Сделаем некоторые преобразования, интегрируя по частям:

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^l u_tv_tdxdt=-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_tudxdt,$$

$$-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_tudxdt=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l uu_tdxdt-\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx.$$

В правой части последнего равенства получили такой же интеграл, что и в левой, но с противоположным знаком. Перенесем его в левую часть. Подставляя пределы во втором интеграле правой части мы учли, что $u(x,0) = 0$. В результате получим

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^l u_t v_t dxdt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx.$$

Рассмотрим второй интеграл. Так как $v_t = u$, то

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l a u_x v_x dxdt = \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a v_{xt} v_x dxdt.$$

Проинтегрируем его по частям

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a v_{xt} v_x dxdt = -\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a v_x v_{xt} dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t v_x^2 dxdt + \int\limits_0^l a v_x^2|_0^\tau dx.$$

Опять в правой части получен такой же, как в левой, интеграл с другим знаком. Мы его перенесем в левую часть. При подстановке пределов в последнем интеграле учтем, что $v_x(x,\tau) = 0$, что следует из определения функции $v(x,t)$. Получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l a u_x v_x dxdt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t v_x^2 dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_0^l a(x,0)v_x^2(x,0)dx.$$

Проделав пока формально эти преобразования, мы пришли к необходимости наложить некоторые требования на коэффициент $a(x,t)$. Действительно, эта функция должна иметь производную по переменной t, причем такую, чтобы интеграл $\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t v_x^2 dxdt$ существовал.

Будем теперь предполагать, что

$$a, a_t \in C(\bar{Q}_T).$$

Вот так и появляются постепенно условия теоремы.

Сначала приведем доказательство единственности решения в частном случае.

Доказательство единственности в частном случае

Преобразовывать ли последнее слагаемое в (40)? На всякий случай преобразуем, а потом подумаем, стоит ли.

$$\int_0^T\int_0^l cuv\,dxdt = \int_0^\tau\int_0^l cvv_t\,dxdt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l c_t v^2\,dxdt - \frac{1}{2}\int_0^l cv^2(x,0)\,dx.$$

Мы видим, что для законности этих действий нужно потребовать существование непрерывной производной $c_t(x,t)$. Ниже увидим, что нам придется еще кое-какие условия наложить на коэффициент $c(x,t)$. Но чем меньше мы требуем, тем лучше, поэтому постараемся обойтись без этого преобразования. Как — скоро увидим.

Используя проделанные преобразования, запишем (40) с выбранной функцией $v(x,t)$, умножив обе части равенства на -2:

$$\int_0^l (u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0) + c(x,0)v^2(x,0))dx$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l a_t u^2\,dxdt + \int_0^\tau\int_0^l c_t v^2\,dxdt = 0. \qquad (41)$$

Из равенства (41) видно, что если $c, c_t \in C(\bar{Q}_T), c(x,0) \geq 0$, $c_t(x,t) \geq 0$, $a_t(x,t) \geq 0\ \forall (x,t) \in \bar{Q}_T$, то $u(x,\tau) = 0$. Так как $\tau \in [0,T]$ произвольно, то $u(x,t) = 0$ во всей области Q_T. Отсюда вытекает равенство $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, а это значит, что наше предположение неверно, стало быть, существует не более одного решения рассматриваемой задачи.

Итак, получены условия, при которых верно утверждение о единственности обобщенного решения (если, конечно, оно существует).

Однако эти условия слишком жесткие. Хотелось бы ослабить их, особенно условие неотрицательности коэффициента $c(x,t)$ и его производной. Оказывается, это вполне реально. Но сначала рассмотрим несколько примеров.

Задачи для самостоятельного решения

1. Получить тождество и дать определение обобщенного решения задачи в области Q_T:

$$u_{tt} - (e^{(x+t)}u_x)_x + x^2u = 2t,$$
$$u(x,0) = x(l-x),\ u_t(x,0) = 2x,\ u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$Q_T = (0,l) \times (0,T).$$

2. Можно ли доказать единственность обобщенного решения задачи п. 1 описанным выше способом?

3. Получить тождество и дать определение обобщенного решения задачи:

$$u_{tt} - (e^{-(x+t)}u_x)_x - (x+t)u = 2t,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 2x,\ u(0,t) = u(2,t) = 0,$$
$$Q_T = (0,2) \times (0,T).$$

4. Можно ли доказать единственность обобщенного решения задачи п. 3 описанным выше способом?

С задачами 1 и 2 все просто, и ответ на вопрос в задании 2 "можно".

Рассмотрим задачи 3 и 4. Получим тождество:

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t + e^{-(x+t)}u_xv_x - (x+t)uv)dxdt + 2\int_0^l xe^{-x}v(x,0)dx$$
$$= 2\int_0^T\int_0^l tv(x,t)dxdt.$$

Теперь предположим, что существует два различных решения и реализуем описанную выше схему с выбранной функцией $v(x,t)$. Получим

$$\int_0^l(u^2(x,\tau) + e^{-x}v_x^2(x,0) - xv^2(x,0))dx - \int_0^\tau\int_0^l v^2dxdt$$

$$-\int_0^\tau\int_0^l e^{-(x+t)}v_x^2dxdt=0,$$

и мы уже не уверены, что может существовать не более одного решения. Но нельзя и сделать вывод о том, что может существовать более одного решения. В следующем параграфе мы увидим, какие условия на данные задачи гарантируют единственность решения, если оно существует.

Доказательство единственности в общем случае

Вернемся к тождеству (40) и выбранной функции $v(x,t)$, но не будем преобразовывать интеграл, содержащий cuv. Перепишем равенство, полученное в результате интегрирования только двух первых слагаемых следующим образом:

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx=\int_0^\tau\int_0^l a_tu^2dxdt-2\int_0^\tau\int_0^l cuvdxdt. \quad (42)$$

Левая часть этого равенства неотрицательна, поэтому из (42) вытекает неравенство

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx\le$$

$$\le|\int_0^\tau\int_0^l a_tu^2dxdt|+2|\int_0^\tau\int_0^l cuvdxdt|. \quad (43)$$

Будем предполагать, что $a, a_t, c\in C(\bar{Q}_T)$ и напомним, что $a(x,t)>0\ \ \forall(x,t)\in\bar{Q}_T$. Тогда можно утверждать, что существуют такие положительные числа a_0, a_1, c_0, что
$|a_t(x,t)|\le a_1,\ \ |c(x,t)|\le c_0,\ \ a(x,t)>a_0$. Учитывая это, получим из (43)

$$\int_0^l(u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0))dx\le a_1\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt+2c_0\int_0^\tau\int_0^l|uv|dxdt. \quad (44)$$

Последнее слагаемое правой части (44) оценим с помощью неравенства Коши: $2|uv|\le u^2+v^2$, и тогда

$$2c_0\int_0^\tau\int_0^l|uv|dxdt\le c_0\int_0^\tau\int_0^l(u^2+v^2)dxdt.$$

Теперь получим неравенство из представления функции $v(x,t)$. Очевидно,

$$v^2(x,t) = \left(\int\limits_{\tau}^{t} u(x,\eta)d\eta\right)^2.$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для оценки интеграла:

$$\left(\int\limits_{\tau}^{t} u(x,\eta)d\eta\right)^2 \le |t-\tau|\left|\int\limits_{\tau}^{t} u^2(x,\eta)d\eta\right|.$$

Очевидно, что $|t-\tau| \le \tau$, а так как под знаком интеграла неотрицательная функция, то

$$\left|\int\limits_{\tau}^{t} u^2(x,\eta)d\eta\right| \le \int\limits_{0}^{\tau} u^2(x,\eta)d\eta.$$

Тогда получим

$$c_0\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{l}(u^2+v^2)dxdt \le c_0\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{l}(u^2+\tau\int\limits_0^{\tau}u^2dt)dxdt.$$

Рассмотрим последнее слагаемое правой части этого неравенства, предварительно представив интеграл суммы как сумму интегралов:

$$\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{l}\tau\int\limits_0^{\tau}u^2dtdxdt.$$

Изменив порядок интегрирования и учитывая, что $\int\limits_0^{\tau}u^2(x,t)dt$ не зависит от t, получим

$$\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{l}\tau\int\limits_0^{\tau}u^2dtdxdt = \tau^2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{l}u^2dxdt.$$

После проделанных преобразований мы приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{l}(u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0))dx \le C\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{l}u^2dxdt, \tag{45}$$

где мы обозначили $C = a_1 + c_0(1+\tau^2)$.

Но что нам дает это неравенство?

Оказывается, это неравенство позволит нам применить лемму Гронуолла [3].

Лемма Гронуолла. *Пусть ρ и σ - две неотрицательные неубывающие функции. Тогда неравенство*

$$\rho(t) \leq C \int_0^t \rho(s) ds + \sigma(t)$$

влечет за собой

$$\rho(t) \leq e^{Ct} \sigma(t).$$

Заметим, что из (45), в частности, следует

$$\int_0^l u^2(x, \tau) dx \leq C \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt. \tag{46}$$

Тогда в силу леммы Гронуолла

$$\int_0^l u^2(x, \tau) dx \leq 0.$$

Действительно, обозначим $\rho(t) = \int_0^l u^2(x, \tau) dx$ и заметим, что в нашем случае $\sigma(t) = 0$. Легко видеть, что все условия леммы Гронуолла выполняются, но тогда и вывод леммы справедлив. Так как $\int_0^l u^2(x, \tau) dx$ не может быть меньше нуля, то ему остается только быть равным нулю. Но тогда $u(x, t) = 0$ и, стало быть, $u_1 = u_2$, т.е. наше предположение о существовании двух различных решений одной и той же задачи неверно.

Таким образом, доказано, что не может существовать более одного решения задачи 4.1.

Доказательство существования решения

Доказательство существования решения проведем по следующей схеме.

1. Построим последовательность приближенных решений методом Галеркина.

2. Получим оценки, позволяющие выделить из построенной последовательности слабо сходящуюся подпоследовательность.

3. Покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение.

Приступим к реализации нашего плана. Будем считать, что начальные условия однородны: $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$. Это предположение не ограничивает общности, так как мы всегда можем перейти к задаче с однородными начальными условиями, если введем новую неизвестную функцию, положив $v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x) - t\psi(x)$. В силу условий согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$ краевые условия для новой неизвестной функции $v(x,t)$ останутся однородными. Это предположение значительно упростит выкладки.

1-й шаг. Обозначим $w_k(x)$ произвольную систему функций, принадлежащих $C^2[0,l]$ и удовлетворяющих граничным условиям $w_k(0) = w_k(l) = 0$, линейно независимую и полную в $W_2^1(0,l)$.

— Сколько условий! Найдется ли такая система? — спросил Петр.

— Найдется, — ответил Николай. — Вот смотрите, Петр, теорема 4 на с.142 [9] о сепарабельности $W_2^1(\Omega)$ дает ответ на этот вопрос.

Будем искать приближенное решение задачи 4.1 в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x)$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m - (au_x^m)_x + cu^m) w_j(x)dx = \int_0^l f w_j dx. \qquad (47)$$

Мы можем проинтегрировать второе слагаемое левой части (47), учтя свойства функций $w_k(x)$, и записать так:

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + au_x^m w_j' + cu^m w_j(x))dx = \int_0^l f w_j dx.$$

Подставим в это равенство сумму, которая представляет $u^m(x,t)$, и получим

$$\int\limits_0^l [\sum_{k=1}^m c_k''(t)w_k(x)w_j(x) + a(x,t)\sum_{k=1}^m c_k(t)w_k'(x)w_j'(x)$$

$$+c(x,t)\sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)w_j(x)]dx = \int\limits_0^l f(x,t)w_j(x)dx.$$

Так как суммы конечные, то можем без проблем поменять порядок интегрирования и суммирования:

$$\sum_{k=1}^m c_k''(t)\int\limits_0^l w_k(x)w_j(x)dx$$

$$+\sum_{k=1}^m c_k(t)\int\limits_0^l [a(x,t)w_k'(x)w_j'(x) + c(x,t)w_k(x)w_j(x)]dx$$

$$= \int\limits_0^l f(x,t)w_j(x)dx.$$

Обозначим

$$f_j(t) = \int\limits_0^l f(x,t)w_j(x)dx, \quad A_{kj} = \int\limits_0^l w_k(x)w_j(x)dx,$$

$$B_{kj}(t) = \int\limits_0^l [a(x,t)w_k'(x)w_j'(x) + c(x,t)w_k(x)w_j(x)]dx.$$

Тогда предыдущее равенство запишется так:

$$\sum_{k=1}^m A_{kj}c_k''(t) + \sum_{k=1}^m B_{kj}(t)c_k(t) = f_j(t). \tag{48}$$

— Так это же система самых обыкновенных дифференциальных уравнений! — воскликнул Петр.

— Да, и мы многое о ней знаем, — добавил Николай,

— она разрешима относительно старших производных.

— Почему? — спросил Петр.

— А потому, что мы выбрали правильно функции $w_k(x)$, они линейно независимы. А если посмотреть на матрицу при старших производных, то видно, что это матрица Грамма, а определитель матрицы Грамма отличен от нуля ([9], с. 216).

К этой системе можно добавить начальные условия

$$c_k(0) = 0, \quad c_k'(0) = 0, \tag{49}$$

которые являютмя следствием равенств

$$u^m(x,0) = 0, \quad u_t^m(x,0) = 0.$$

Тогда (48)-(49) — задача Коши. В силу условий на коэффициетны и правую часть уравнения (36) коэффициенты системы (48) ограничены, а правая часть принадлежит $L_1(0,T)$. Тогда можно воспользоваться известными утверждениями теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в силу которых задача Коши (48)-(49) имеет единственное решение $c_k(t)$ [12] для любого m. Таким образом, последовательность приближенных решений $u^m(x,t)$ построена.

2-й шаг. Покажем, что построенная последовательность ограничена в пространстве $W_2^1(Q_T)$.

Умножим (47) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем по $(0,\tau)$. Получим

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dxdt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dxdt.$$

Теперь преобразуем левую часть, интегрируя по частям, как при доказательстве единственности. Получим

$$\frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2] dx + \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dxdt$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dxdt.$$

При интегрировании мы учли, что $u_t^m(x,0) = 0, \;\; u_x^m(x,0) = 0$. Запишем полученное равенство в удобной для вывода оценок форме

$$\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2] dx = -2 \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dxdt$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m dxdt. \qquad (50)$$

Левая часть (50) неотрицательна, и из этого равенства следует неравенство

$$\int_0^l[(u_t^m(x,\tau))^2+a(u_x^m(x,\tau))^2]dx\le 2|\int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m dxdt|$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l |a_t|(u_x^m)^2dxdt+2|\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m dxdt|. \qquad (51)$$

В силу ограниченности коэффициента $c(x,t)$ и неравенства Коши

$$2|\int_0^\tau\int_0^l cu^m u_t^m dxdt|\le c_0\int_0^\tau\int_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2]dxdt,$$

$$2|\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m dxdt|\le\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m)^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt.$$

Так как $u^m(x,t)$ абсолютно непрерывна и $u(x,0)=0$, то ее можно представить в интегральной форме $u^m(x,t)=\int_0^t u_t^m dt$, откуда, применив для оценки интеграла неравенство Коши-Буняковского и учтя, что $t\le\tau$, получим неравенство

$$(u^m(x,t)^2\le\tau\int_0^\tau(u_t^m)^2dt.$$

Прибавив его к обеим частям (51), приходим к неравенству

$$k_0\int_0^l[(u^m(x,\tau))^2+(u_t^m(x,\tau))^2+(u_x^m(x,\tau))^2]dx$$

$$\le k_1\int_0^\tau\int_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2]dxdt+\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt,$$

где $k_0=\min\{1,a_0\}$, $k_1=\max\{c_0(1+\tau^2)+1,a_1\}$. Применим к этому неравенству лемму Гронуолла. Учитывая, что $\tau\le T$, получим

$$\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]dx$$

$$\leq (k_0)^{-1} e^{\frac{k_1}{k_0}T} \int_0^T \int_0^l f^2(x,t)dxdt. \qquad (52)$$

Интегрируя неравенство (52) по $(0,T)$, получим

$$||u^m||^2_{W_2^1(Q_T)} \leq T(k_0)^{-1} e^{\frac{k_1}{k_0}T} ||f||^2_{L_2(Q_T)},$$

откуда в силу принадлежности $f \in L_2(Q_T)$ следует

$$||u^m||_{W_2^1(Q_T)} \leq K, \qquad (53)$$

где $K = \sqrt{T(k_0)^{-1} e^{\frac{k_1}{k_0}T}} ||f||_{L_2(Q_T)}$ и не зависит от m.

Итак, доказано, что последовательность $\{u^m(x,t)\}$ ограничена в пространстве $W_2^1(Q_T)$. Так как $W_2^1(Q_T)$ гильбертово, то (см. теорему 2.2) ограниченное в нем множество слабо компактно. Другими словами, из последовательности $\{u^m(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу этого пространства. Сохраним за выделенной подпоследовательностью во избежание громоздкости то же обозначение, а предел ее обозначим $u(x,t)$.

3-й шаг. Покажем, что предел выделенной подпоследовательности, $u(x,t)$, и есть искомое обобщенное решение. Для этого нам нужно убедиться в том, что $u(x,t)$ удовлетворяет первому начальному условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (39) для любой $v \in \hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$. Для этого мы можем воспользоваться только тем, что доказано выше, а также известными фактами из курсов математического и функционального анализа.

1. *Каждая функция $u^m(x,t)$ из построенной последовательности удовлетворяет равенству* (47) (для всех j от 1 до m).

Умножим обе части этого равенства на $d_j(t) \in W_2^1(0,T)$, такую, что $d_j(T) = 0$, просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем по $(0,T)$. Получим, проинтегрировав второе слагаемое,

$$\int_0^T \int_0^l \left(u_{tt}^m \sum_{l=1}^m d_j(t) w_j(x) + a u_x^m \sum_{l=1}^m d_j(t) w_j'(x) + c u^m \sum_{l=1}^m d_j(t) w_j(x) \right) dxdt$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l f(x,t) \sum_{l=1}^m d_j(t) w_j(x) dxdt.$$

Обозначим $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^m d_j(t) w_j(x)$. Тогда полученное равенство после интегрирования первого слагаемого может быть записано так:

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \left(-u_t^m \eta_t + a u_x^m \eta_x + c u^m \eta\right) dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l f(x,t) \eta(x,t) dxdt. \quad (54)$$

2. *Подпоследовательность* $\{u^m(x,t)\}$ *слабо сходится к* $u(x,t)$. Перейдем в (54) к пределу при фиксированной $\eta(x,t)$. Получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \left(-u_t \eta_t + a u_x \eta_x + c u \eta\right) dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l f(x,t) \eta(x,t) dxdt. \quad (55)$$

Очень похоже на (39), но не оно, так как (55) выполняется НЕ ДЛЯ ВСЕХ $v \in \hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$, как требует определение, а только для $\eta(x,t) = \sum\limits_{l=1}^m d_l(t) w_l(x)$. НО:

3. В силу теоремы 2.3 можно утверждать, что *множество функций вида*

$$\eta(x,t) = \sum_{j=1}^m d_j(t) w_j(x)$$

всюду плотно в $\hat{W}^1_2(Q_T)$. Но тогда (55) выполняется для всех $v \in \hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$. Очевидно, $u(x,0) = 0$, стало быть, выполняются все условия определения 4.1.1 обобщенного решения. Таким образом, доказано существование обобщенного решения задачи 4.1.

Ввести определение обобщенного решения можно и для задач с другими краевыми условиями. Например, с условиями Неймана на боковой границе, с условиями упругого закрепления, и даже с гораздо более общими условиями. Однако нужно помнить, что описанный выше подход к определению обобщенного решения нельзя применять формально.

4.3 Задачи для самостоятельного решения

с подсказками и комментариями

1. Дать определение обобщенного решения, принадлежащего пространству $W_2^1(Q_T)$, где $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, второй краевой задачи для гиперболического уравнения:

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0.$$

2. Найти условия на входные данные, при выполнении которых не может существовать более одного обобщенного решения из пространства $W_2^1(Q_T)$ второй краевой задачи.

3. Доказать существование обобщенного решения второй краевой задачи. Сформулировать условия на входные данные, обеспечивающие существование обобщенного решения из пространства $W_2^1(Q_T)$.

4. Дать определение обобщенного решения, принадлежащего пространству $W_2^1(Q_T)$, где $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, третьей краевой задачи для гиперболического уравнения:

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

$$u_x(0,t) + \gamma_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \gamma_2 u(l,t) = 0.$$

5. Найти условия на входные данные, при выполнении которых не может существовать более одного обобщенного решения из пространства $W_2^1(Q_T)$ третьей краевой задачи. (Обратите внимание на знаки $\gamma_1,\ \gamma_2$.)

6. Доказать существование обобщенного решения третьей краевой задачи. Сформулировать условия на входные данные, обеспечивающие существование обобщенного решения из пространства $W_2^1(Q_T)$.

Сначала Петру и Николаю показалось, что задачи очень трудные. Они немного подумали, потом еще немного, и поняли, что они смогут решить эти задачи, если как следует изучат изложенное выше: как ввести понятие обобщенного решения первой краевой задачи, как доказать ее однозначную разрешимость, как воспользоваться этими же методами, но для других задач. Разумеется, нужно быть очень внимательными и вовремя увидеть, чем отличаются задачи 1 и 4 от первой краевой задачи и как эти отличия влияют на реализацию метода доказательства разрешимости.

Петр исследовал задачу 1. Сначала он получил вот такое равенство:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_0^l fvdxdt+\int\limits_0^l\psi(x)v(x,0)dx$$

и удивился: оно такое же, как и то, которое получили при исследовании первой краевой задачи. Но Николай все объяснил.

— Так как краевые условия теперь $u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0$, то интегралы, содержащие эти функции, обратились в нуль без помощи функции $v(x,t)$, от которой теперь можно требовать лишь выполнения условия $v(x,T)=0$, а условия $v(0,t)=0,\ v(l,t)=0$ не нужны, в отличие от первой краевой задачи. Поэтому получилось такое же равенство, как и (39).

— А почему мы хотим, чтобы эти интегралы обратились в нуль, чем они нам мешают? — спросил Петр?

Немного подумав, Петр и Николай поняли, почему. Так как целью является определить обобщенное решение из пространства $W_2^1(Q_T)$, то по правилам этого пространства можно гарантировать существование только следа искомого решения на границе области, а не следа производной. Если оба интеграла, $\int\limits_0^T u_x(0,t)dt$, $\int\limits_0^T u_x(l,t)dt$, полученные после интегрирования по частям слагаемого $\int\limits_0^T\int\limits_0^l(au_x)_xvdxdt$ останутся в равенстве, на котором будет базироваться определение обобщенного решения, то мы не сможем дать корректное определение и не будем знать, что делать с интегралами по границе.

— Так значит нам очень повезло и с другим слагаемым:

$$\int_0^T\int_0^l u_{tt}v\,dxdt = -\int_0^T\int_0^l u_t v_t\,dxdt + \int_0^l u_t(x,0)v(x,0)dx,$$

с помощью которого мы "спрятали" $u_t(x,0)$ в равенство, так как по условию $u_t(x,0) = \psi(x)$, и если $\psi \in L_2(0,l)$, то полученный интеграл по $(0,l)$ существует.

Теперь мы можем дать определение.

Функцию $u \in W_2^1(Q_T)$ будем называть обобщенным решением второй краевой задачи , если она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt = \int_0^T\int_0^l fv\,dxdt + \int_0^l \psi(x)v(x,0)dx$$

для любой $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

Следует обратить внимание на то, что тождество в этом определении совпадает с тождеством (39), но пространство другое! Ну не совсем другое, просто функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ теперь не обращаются в нуль на боковой границе, поэтому в обозначении пространства нет нолика справа.

Теперь можно продолжить исследование разрешимости второй краевой задачи, обращая внимание на детали, которые Петр и Николай подробно обсудили при получении тождества, на котором базируется определение обобщенного решения.

Рассмотрим задачи 5 и 6, но в очень простом случае, а именно будем рассматривать уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad a = const.$$

Тождество, на котором будет базироваться определение обобщенного решения, таково:

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t v_t + a^2 u_x v_x)dxdt - \gamma_1 \int_0^T a^2 u(0,t)v(0,t)dt$$

$$+\gamma_2 \int_0^T a^2 u(l,t)v(l,t)dt = \int_0^T\int_0^l fv\,dxdt.$$

Попробуем выяснить, при каких условиях на γ_i решение будет единственным. Предположим, что существует два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, а функцию $v(x,t)$ возьмем такой же, как и выше, т.е.

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{\tau}^{t} u(x,\eta)d\eta, 0 \le t \le \tau, \\ 0, \tau \le t \le T. \end{cases}$$

Тогда после известных уже преобразований, интегрируя по частям, получим для $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$\int\limits_0^l [u^2(x,\tau) + a^2 v_x^2(x,0)]dx - \gamma_1 v^2(0,0) + \gamma_2 v^2(l,0) = 0.$$

Отсюда видно, что если $\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 > 0$, то $u(x,t) = 0$ и, стало быть, не может существовать более одного решения третьей краевой задачи для уравнения колебаний струны.

Для доказательства единственности решения в случае более общего уравнения нужно проделать оценки, как это сделано выше для первой краевой задачи, но условия на знаки γ_i останутся такими же.

Рассмотрим еще один пример, который иллюстрирует один из этапов доказательства существования решения. Для того чтобы построить последовательность приближенных решений задачи мы переходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Посмотрим, как это делается. Будем искать приближенное решение первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Ищем решение в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x)$$

из соотношений

$$\int\limits_0^l (u_{tt}^m - a^2 u_{xx}^m) w_j(x) dx = \int\limits_0^l f w_j dx.$$

Пусть $m = 2$. Тогда мы сможем легко записать систему уравнений. Действительно, проделав все действия, описанные выше для общего случая, получим

$$\begin{cases} c_1''(t)\int\limits_0^l w_1^2(x)dx + c_2''(t)\int\limits_0^l w_2(x)w_1(x)dx + c_1(t)a^2\int\limits_0^l (w_1'(x))^2dx \\ \qquad +c_2(t)a^2\int\limits_0^l w_2'(x)w_1'(x)dx = f_1(t), \\ c_1''(t)\int\limits_0^l w_1(x)w_2(x)dx + c_2''(t)\int\limits_0^l w_2^2(x)dx + c_1(t)a^2\int\limits_0^l w_1'(x)w_2'(x)dx \\ \qquad +c_2(t)a^2\int\limits_0^l (w_2'(x))^2dx = f_2(t). \end{cases}$$

Заметим, что если система функций $w_k(x)$ выбрана, то решение задачи Коши для полученной системы можно получить в явном виде. А если функции $w_k(x)$ ортогональны, то получится еще проще, так как в этом случае

$$\int\limits_0^l w_2(x)w_1(x)dx = 0.$$

Остановимся здесь на обсуждении решения задач, иначе будет неинтересно решать остальные.

– Но как раз сейчас и стало интересно! Мы познакомились только с некоторыми уравнениями, задачами и методами, а ведь есть еще много других.

– Да, разумеется, но мы теперь знаем, в каких книгах можно прочитать то, о чем не говорилось в этом пособии. И вот еще одна книга, о которой нужно сказать: Л.К. Эванс, Уравнения с частными производными [18]. В предисловии автор пишет о принципах, которых придерживался при написании книги, и мы их здесь приведем, но в качестве заключения.

Принципы Л.К. Эванса

a. Теория уравнений с частными производными (большей частью) не ограничивается случаем двух независимых переменных.

b. Многие интересные уравнения - нелинейны.

c. Понятие обобщенных решений - фундаментально.

d. Теория уравнений с частными производными не является частью функционального анализа.

e. Обозначения - это кошмар.

f. Хорошая теория так же полезна, как точные формулы.

И несколько слов от автора.

Надеюсь, многие со мной согласятся, что математика и музыка очень близки между собой. Их объединяет уровень абстракции и взаимопроникновение: например, звук - это результат процесса колебаний, а решение хорошей задачи можно сравнить с фугами Баха. Если же говорить о новых задачах, которые еще никто не решал, а мы взялись за это дело, и нам нужно самим придумать, как решить и обосновать решение, при этом мы можем пользоваться и известными методами, то возникает аналогия с джазом. Джазовые концерты, которые организовывал и проводил известный джазовый пианист Даниил Крамер, по традиции заканчивались такой его фразой: "Если вам это понравилась, приходите еще!"

Если вам понравились уравнения с частными производными, читайте книги и решайте задачи!

Список литературы

[1] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1971.

[2] Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. М.: Физматгиз. 1962.

[3] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: 1961. Издательство Иностранной литературы.

[4] Градштейн В.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.: Физматгиз. 1963. 1100 с.

[5] Льюис Кэррол, Приключения Алисы в стране чудес. М.: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1991.

[6] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.М.: Издательство "Наука". 1973.

[7] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Издательство "Наука". 1965.

[8] Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Издательство Российского университета дружбы народов. 1997.

[9] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: "Наука". Физ-мат лит. 1983.

[10] Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1968. 575 с.

[11] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

[12] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз. 1961. 311 с.

[13] Пулькина Л.С. Дифференциальные уравнения в частных производных. Самара. Издательство "Самарский университет". 2004.

[14] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука. 1988.

[15] Толкин Дж.Р.Р.. Хоббит, или туда и обратно. М.: Издательство АСТ. 2017.

[16] Треногин В.А. Функциональный анализ.М.: Физматлит. 2007.

[17] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Издательство "Лань". 2019-2020.

[18] Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. Новосибирск. Тамара Рожковская. 2003. 560 с.

Учебное издание

Пулькина Людмила Степановна

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

Учебное пособие

Редактор *А.С. Никитина*
Компьютерная верстка *А.С. Никитиной*

Подписано в печать 02.11.2021. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 1(Р3У)/2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.