

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

*А. И. Белоусов, И. А. Биргер*

# ПРОЧНОСТНАЯ НАДЕЖНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ ТУРБОМАШИН

*Утверждено редакционным советом института  
в качестве учебного пособия*

КУЙБЫШЕВ 1983

Белоусов А. И., Биргер И. А. *Прочностная надежность деталей турбомашин*: Учебное пособие. — Куйбышев: КуАИ. 1983. — 75 с.

Пособие знакомит со статистическими моделями разрушения, связями запасов прочности с вероятностью разрушения, необходимыми для оценки надежности турбомашин при их проектировании.

Ил. 22, табл. 1, библиогр. — 12 назв.

Рецензенты: д.т.н. К. А. Жуков, д.т.н. В. И. Цейтлин

Проблема повышения надежности ГТД является частью общей проблемы безопасности и регулярности движения, а также экономической эффективности авиационного транспорта.

С развитием двигателей возрастает их трудоемкость и стоимость. Для повышения экономической эффективности ГТД важно обеспечивать высокие показатели надежности. Задача эта очень сложна, так как современные двигатели имеют напряженные параметры, их рабочие режимы находятся вблизи границ предельного состояния элементов.

В результате работ, проведенных в последние годы конструкторскими, научно-исследовательскими, эксплуатирующими организациями и серийными заводами по совершенствованию конструкции, улучшению технологии изготовления, применению повышающих работоспособность узлов и деталей восстановительно-технологических методов, отработке методики испытаний, применению средств технической диагностики, удалось значительно улучшить показатели надежности ГТД. Так, в короткий срок ресурс отечественных двигателей вырос в 6—8 раз, для ряда ГТД пассажирских самолетов гарантийный ресурс уже превышает 6000 ч при назначенном ресурсе 18000...20000 ч [10]. При этом надежность отечественных двигателей (например, по такому показателю, как наработка на одно выключение в полете) в ряде случаев выше надежности лучших зарубежных ГТД.

Выполнение растущих требований к надежности изделий может быть достигнуто благодаря разработке оптимальной конструкции, совершенствованию технологии, максимальному использованию возможностей материала.

Обеспечение высокой и стабильной конструкционной прочности двигателей, под которой понимается прочность конструкции в реальных условиях работы с учетом металлургических, технологических и конструкционных факторов, — одно из на-

правлений решения проблемы повышения надежности изделий.

*Требуемая надежность двигателей закладывается на этапе проектирования, обеспечивается в процессе производства, достигается при испытаниях и доводке изделия, совершенствуется и реализуется при эксплуатации.*

Но даже если конструирование, расчеты, изготовление, сборка, испытания отдельных элементов выполнены правильно, в соответствии с нормативно-технической документацией, при доводке опытных изделий и в эксплуатации наблюдаются отказы и разрушения деталей. Это объясняется многообразием факторов, влияющих на конструкционную прочность, и отсутствием четких, научно обоснованных рекомендаций по ряду вопросов конструирования, выбора материала, расчета на прочность с учетом комплексности нагружения и длительности эксплуатации. Анализ причин разрушения показывает, что наибольшее число разрушений связано с не поддающимися пока расчету на этапе проектирования задачами прочности (переменные напряжения, термоусталость, распределение термических напряжений, износы, контактная и вибрационная коррозия и др.), а также с рядом факторов, снижающих достоверность прочностных расчетов (недостаточная обоснованность допущений, ограничения и упрощения расчетных схем, нестабильность нагружения, многорежимность и широкий диапазон реальных условий эксплуатации, сложность изменения свойств материалов под нагрузкой, разброс механических характеристик несущей способности и долговечности деталей в связи со свойствами материалов, особенностями технологии и т. д.).

*Большинство отказов (61%) связано с недостаточной прочностью конструкционных элементов, причем основная часть отказов (42%) вызвана переменными нагрузками и обусловлена низкой конструкционной прочностью [10].* Таким образом, обеспечение прочностной надежности современных двигателей летательных аппаратов представляет собой актуальную и сложную научно-техническую проблему.

Отсюда следует необходимость основательного изучения вопросов прочностной надежности при подготовке инженеров-механиков по двигателям летательных аппаратов.

## **НАДЕЖНОСТЬ И УСТАЛОСТНЫЕ РАЗРУШЕНИЯ**

---

Надежность конструкций и узлов, подверженных динамическим нагрузкам, существенно зависит от вероятности усталостного разрушения. Усталостные поломки, в отличие от других видов отказов, часто приводят к весьма тяжелым последствиям. Их предварительное обнаружение в процессе эксплуатации в большинстве случаев невозможно, так как они возникают внезапно.

Большой статистический разброс характеристик усталости, вызываемый конструктивными, технологическими и эксплуатационными факторами, уменьшает достоверность прогнозирования надежности.

Практическая важность проблемы стимулировала большое число исследований по различным вопросам сопротивления усталости.

В этой главе основное внимание уделяется статистическому описанию и статистическим моделям циклической долговечности, что имеет существенное значение для проблем надежности.

Рассмотрим сначала основные закономерности усталости.

### **1.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ УСТАЛОСТНЫХ РАЗРУШЕНИЙ**

#### **1.1.1. ОСОБЕННОСТИ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ**

Усталостное разрушение возникает в результате постепенного развития начальной трещины. Для усталостных изломов характерно наличие двух зон: зоны возникновения и развития трещины и зоны окончательного статического разрушения. Поверхность усталостной зоны излома имеет гладкие притертые участки. В зоне усталостной трещины пластические деформации не наблюдаются. Поверхность статического разрушения обладает зернистой, кристаллической структурой, имеет следы пластической деформации.

При высокой температуре усталостная трещина пересекает зерна материала, тогда как статическое разрушение идет по границам зерен.

Зарождение усталостной трещины начинается в области наибольших переменных напряжений, обычно в местах концентрации напряжений (возле галтелей, отверстий и т. п.).

### 1.1.2. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

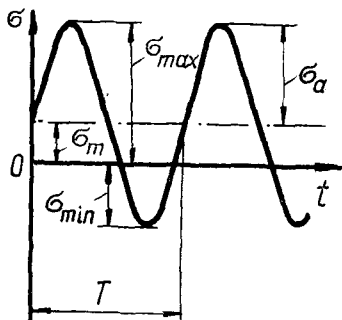


Рис. 1. Циклическое изменение напряжений во времени

Напряжения, действующие в детали, можно представить (рис. 1) при стационарном нагружении в виде

$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \varphi(t). \quad (1)$$

В уравнении (1):

$\sigma_m$  — среднее напряжение;

$\sigma_a$  — амплитуда переменных напряжений или переменное напряжение;

$\varphi(t)$  — периодическая функция времени  $t$ , изменяющаяся в пределах  $-1 \leq \varphi(t) \leq 1$ . Например,

$$\varphi(t) = \sin \omega t,$$

где  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота колебаний, рад/с;

$f = 1/T$  — частота цикла, Гц;

$T$  — период цикла, с.

Если среднее (постоянное) напряжение равно нулю, то цикл

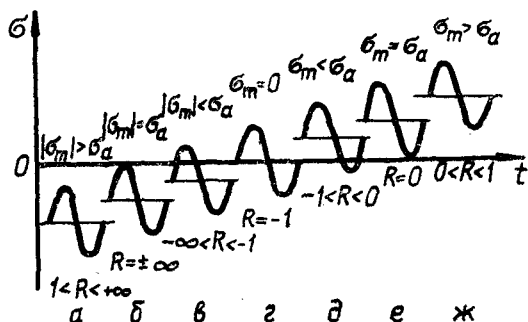


Рис. 2. Разновидности циклов напряжений и соответствующие им значения коэффициентов асимметрии

называется симметричным. В общем случае асимметрия характеризуется коэффициентом

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  — минимальное и максимальное напряжения цикла.

Согласно рис. 1 и уравнению (2) для симметричного цикла  $R = -1$ .

На рис. 2 изображены циклы, термины которых определены ГОСТ 23207-78: симметричный (г) и асимметричные (а, б, в, д, е, ж); знакопостоянные (а, б, е, ж) и знакопеременные (в, г, д); отнулевые (б, е).

Форма цикла, т. е. вид функции  $\varphi(t)$ , не оказывает существенного влияния на процесс усталостного разрушения.

### 1.1.3. СВЯЗЬ ВЕЛИЧИНЫ РАЗРУШАЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ И ЧИСЛА ЦИКЛОВ

Усталость материала определяет долговечность деталей, испытывающих большие переменные нагрузки (лопатки, диски, валы, оболочки, трубопроводы, подвески, агрегаты и др.).

Экспериментальные исследования показали, что характер разрушения конструкционных материалов (черных и цветных металлов, жаропрочных сплавов и др.) зависит от числа циклов нагружений (рис. 3).

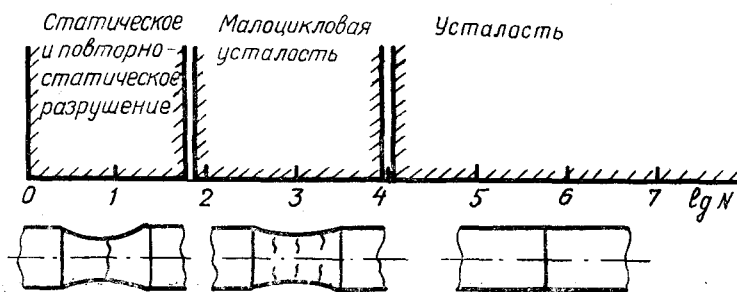


Рис. 3. Типы разрушений в зависимости от числа циклов

При малом числе циклов в образце из пластичных материалов образуется шейка и разрыв происходит по минимальному сечению, т. е. происходит статическое разрушение.

При числе циклов  $10^2 \dots 10^4$  возникают сетка трещин и менее выраженные пластические деформации — наступает разрушение

от малоциклового усталости. Оно имеет смешанный характер, в изломе наблюдаются отдельные участки усталостного разрушения. Разрушение от малоциклового усталости возникает при действии значительных (десятые доли процента и более) циклических упругопластических деформаций. Частота действия нагрузок невелика. Она определяется частотой запусков двигателя или резким изменением режимов его работы. Но при большой длительности работы накапливается достаточное для разрушения число циклов.

При числе циклов  $N > 10^4$  появляется типичное усталостное разрушение без заметных следов пластической деформации.

При увеличении числа циклов напряжение разрушения уменьшается. На рис. 4 показаны типичные зависимости  $\sigma_a = f(N)$  при усталостных разрушениях\*. В логарифмических координатах эти зависимости можно приблизительно представить отрезками прямых линий. Кривая первого типа (рис. 4,а) свойственна углеродистым сталям, второго типа (рис. 4,б) — высоколегированным сталям и титану, третьего типа (рис. 4,в) — жа-

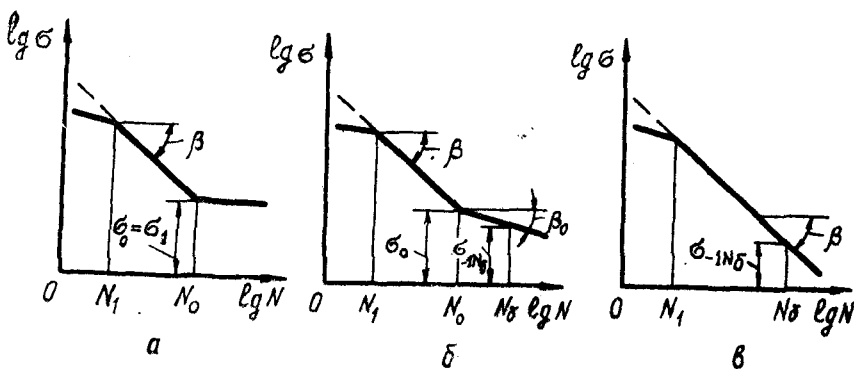


Рис. 4. Три вида кривой усталости (кривой Велера)

прочным сплавам и легким цветным металлам. Точки перелома на кривых усталости (в логарифмических координатах) соответствуют обычно числу циклов  $N_1 \approx 10^3 \dots 10^4$  и  $N_0 = 10^6 \dots 10^7$ . При числе циклов  $N < N_1$  кривые усталости имеют один перелом, связанный с переходом в область малоциклового усталости, где возрастает роль пластических деформаций.

Если при  $N > N_0$  кривая идет горизонтально (рис. 4,а), то

\* Для краткости индекс  $a$  в дальнейшем часто будет опускаться. В связи со статистическим разбросом под  $N$  понимается среднее число циклов до разрушения.



Материал обладает пределом выносливости  $\sigma_{-1}$ , и при напряжениях  $\sigma < \sigma_{-1}$  усталостное разрушение невозможно при любом возрастании числа циклов нагружения.

В других случаях в расчет вводится условный предел выносливости для определенного числа циклов  $N_0$  — базы испытаний. Обычно принимается  $N_0 = 2 \cdot 10^6 \dots 5 \cdot 10^7$  циклов\*\*.

#### 1.1.4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КРИВОЙ УСТАЛОСТИ

Простая и достаточно точная зависимость между  $\sigma_a$  и  $N$  принимается в виде

$$\sigma^m N = C, \quad (3)$$

где  $m$  и  $C$  — постоянные, зависящие от свойств материала и температуры.

Уравнение (3) соответствует прямолинейной зависимости в логарифмических координатах в диапазоне  $N_1 \leq N \leq N_0$  (рис. 5)

$$\lg \sigma = -\frac{1}{m} \lg N + \frac{1}{m} \lg C. \quad (4)$$

Тангенс угла наклона  $\beta$  по абсолютной величине равен  $1/m$ . При увеличении  $m$  наклон уменьшается, и при  $m \rightarrow \infty$  прямая становится горизонтальной. Обычно  $m = 4 \dots 20$ , а для деталей с концентрацией напряжений  $m = 4 \dots 6$ .

Точка перелома  $A_0$  принадлежит прямой  $A_0 A_1$ , поэтому

$$C = \sigma_0^m N_0. \quad (5)$$

Зависимость (3) иногда удобно представить в такой форме:

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m = \frac{N_0}{N}. \quad (6)$$

Если продолжить прямую  $A_1 A_0$  до пересечения с осью ординат, то получим предельное сопротивление  $\sigma_l$ , которое не совпадает с пределом статической прочности  $\sigma_b$ .

Из соотношения (6) при  $N = 1$  вытекает, что

$$\sigma_l = \sigma_0 \sqrt[m]{N_0}.$$

---

\*\* В реальных условиях не представляет интереса число циклов больше  $10^{12} \dots 10^{14}$ . Например, если даже принять высокую частоту колебаний порядка  $f = 10$  кГц, то при непрерывной работе в течение года совершается  $\sim 3 \cdot 10^{11}$  циклов, в течение 100 лет  $\sim 3 \cdot 10^{13}$  циклов. Если циклы нагружений связаны с частотой вращения ротора, то число циклов уменьшается на два—три порядка.

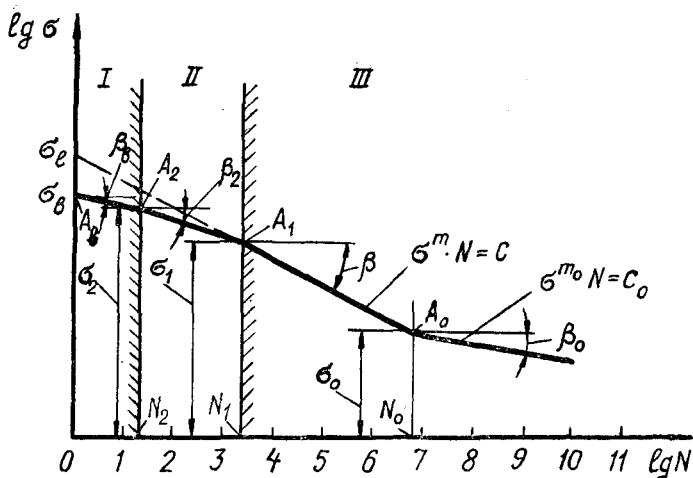


Рис. 5. Зависимость «напряжение—число циклов до разрушения» (в обозначениях опущен знак логарифма): I — статическое и повторно-статическое разрушение; II — малоцикловая усталость; III — усталость

В точке перелома  $A_0$  величина  $\sigma_0$  равна условному пределу выносливости  $\sigma_{-1}$ , и при  $N_0 = 10^7$  циклов

$$\sigma_l = 10^{7/m} \sigma_0 = 10^{7/m} \sigma_{-1}.$$

Отношение  $\sigma_l / \sigma_{-1}$  для различных  $m$  следующее:

$m$	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20
$\sigma_l / \sigma_{-1}$	56	25	15	10	7,5	6	5	3,8	2,7	2,2

Величину  $\sigma_l$  можно рассматривать как константу материала, характеризующую предельное сопротивление повторному нагружению при условиях, когда развитие макроскопических пластических деформаций затруднено.

При числе циклов  $N \geq N_0$  также справедлива линейная зависимость в логарифмических координатах

$$\sigma^{m_0} N = C_0, \quad (7)$$

причем  $m_0$  значительно больше  $m$  ( $m_0 \approx 10m$ ).

Точка  $A_0$  одновременно удовлетворяет уравнениям (5) и (7), поэтому

$$C_0 = \sigma_0^{m_0} N_0 = C \sigma_0^{m_0 - m}.$$

Наконец, в области малоцикловой усталости и повторного статического разрушения удовлетворительное описание можно

облучить с помощью двух прямых (в логарифмических координатах). Точка перелома  $A_2$  соответствует переходу от малоциклового участка к статическому разрушению. Обычно  $N_2 \approx (0,5...5) \cdot 10^2$  циклов.

При единственном цикле ( $N = 1$ ) следует принять амплитудное отклонение, равное пределу прочности  $\sigma_b$ .

Для аналитического описания основного участка зависимости  $\sigma = f(N)$  ( $N_1 < N < N_0$ ) предлагались различные уравнения [6,11].

Достаточно общая зависимость такова:

$$(\sigma - a)^m (N - b) = C. \quad (8)$$

Она содержит четыре параметра ( $m$ ,  $a$ ,  $b$  и  $C$ ). При условии, что  $a = 0$ ,  $b = 0$ , соотношения (8) и (3) совпадают.

### 1.1.5. ВЛИЯНИЕ НЕКОТОРЫХ ФАКТОРОВ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

Рассмотрим влияние статического напряжения, концентрации напряжений, масштабного фактора, сложного напряженного состояния и качества поверхности на предел выносливости.

Экспериментальные исследования показали, что с увеличением напряжения растяжения  $\sigma_m$  от постоянно действующей (статической) нагрузки величина предела выносливости (предельного значения амплитуды переменных напряжений) уменьшается.

Наиболее простое описание можно получить, предполагая линейную зависимость между величинами  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b}, \quad (9)$$

где  $\sigma_b$ ,  $\sigma_{-1}$  — соответственно пределы прочности и выносливости материала.

Уравнение (9) пригодно для титановых и алюминиевых сплавов, высокопрочных сталей, а также металлов и сплавов, подверженных воздействию высоких температур. В последнем случае под  $\sigma_b$  понимается предел длительной прочности

$$\sigma_{b,t}^T = \sigma_{дл},$$

т. е. постоянное напряжение, приложенное к детали при постоянной температуре  $T$  и приводящее ее к разрушению в течение заданного промежутка времени  $t$ . Для углеродистых и легированных сталей при нормальных температурах удовлетворительные результаты дает зависимость

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b}},$$

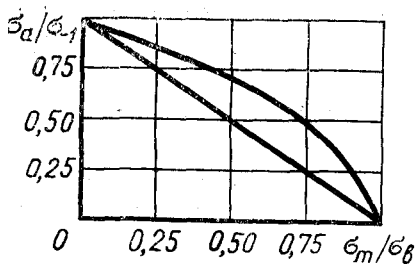


Рис. 6. Расчетные диаграммы усталости (диаграммы предельных амплитуд)

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости при переменных напряжениях существенно больше, чем при напряжениях постоянных, так как усталость, в противоположность статической прочности, имеет резко выраженный локальный характер. Усталостные разрушения начинаются возле мест концентрации напряжений (отверстий, галтелей, забоин, рисок, точечных дефектов материала и т. п.).

На рис. 7 показано распределение напряжений возле отверстия. В упругой области наибольшее напряжение обычно представляют в виде

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\sigma} \sigma_n$$

где  $\alpha_{\sigma}$  — теоретический коэффициент концентрации напряжений;  $\sigma_n$  — номинальное напряжение, определяемое без учета концентрации напряжений.

Значения  $\alpha_{\sigma}$  для различных источников концентрации приведены в [4, 8, 11]. Для малых отверстий  $\alpha_{\sigma} = 3$ .

Коэффициент концентрации напряжений возле основания зуба шестерни (рис. 8)

$$\alpha_{\sigma} \approx 1 + 0,15 \frac{S}{r}$$

При  $r \rightarrow 0$  значение  $\alpha_{\sigma} \rightarrow \infty$ , что свойственно и другим случаям концентрации напряжений. При наличии пластических деформаций распределение напряжений выравнивается и величина  $\alpha_{\sigma}$  уменьшается. Отметим, что величина  $\alpha_{\sigma}$  зависит не от абсолютного размера радиуса закругления, а определяется соотношением характерного размера (в данном случае ширины основания зуба) и радиуса закругления.

Усталостные разрушения при наличии концентрации напряжений происходят при условии

которая, как и линейная (9), изображена на рис. 6.

Установлено, что при постоянных сжимающих напряжениях предел выносливости повышается, так как затрудняется зарождение и развитие усталостной трещины. Поэтому целесообразно создавать сжимающие остаточные напряжения в поверхностных слоях благодаря упрочняющей обработке.

$$\sigma_{a \max} = K_{\sigma} \sigma_H = \sigma_{-1};$$

где  $K_{\sigma}$  — эффективный коэффициент концентрации напряжений;  
 $\sigma_{-1}$  — предел выносливости материала;  
 $\sigma_{a \max}$  — максимальное переменное напряжение в опасной точке детали.

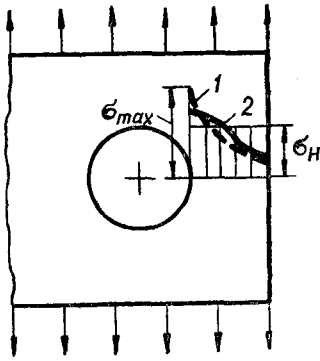


Рис. 7. Концентрация напряжений возле отверстия: 1 — упругие деформации; 2 — упругопластические деформации

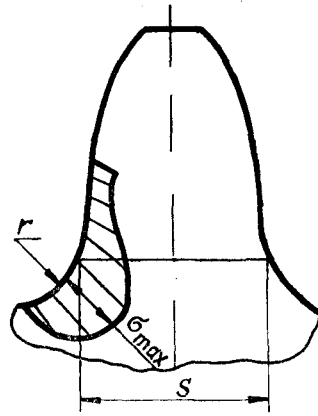


Рис. 8. Концентрация напряжений возле зуба шестерни

Величина  $K_{\sigma} < \alpha_{\sigma}$ , и только для деталей больших размеров, изготовленных из материалов, чувствительных к концентрации напряжений (высокопрочная сталь, титан),  $K_{\sigma} \approx \alpha_{\sigma}$ .

В практических расчетах используется формула

$$K_{\sigma} = 1 + q (\alpha_{\sigma} - 1),$$

где коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений принимается в пределах  $q = 0,5 \dots 0,9$  (нижние значения для малоуглеродистых сталей, верхние — для легированных сталей и титана). При  $q = 0$   $K_{\sigma} = 1$  и материал нечувствителен к концентрации напряжений; при  $q = 1$   $K_{\sigma} = \alpha_{\sigma}$  и чувствительность материала к концентрации напряжений наибольшая.

Необходимость применения больших радиусов закругления для снижения концентрации напряжений при переменных нагрузках принадлежит к элементарным сведениям, однако nepocтижимым образом около 50% усталостных разрушений возникает от недостаточности назначенного или выполненного радиуса закругления.

Масштабный фактор характеризуется размерами детали. Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров сопротивление усталости деталей уменьшается. Этот эффект проявляется в большей степени при неравномерном распределении напряжений, особенно при наличии концентрации напряжений.

Объяснение эффекта может быть дано с помощью статистической теории усталости [5, 11]. Обычно в статистической теории рассматривается совокупность зерен металла, обладающих различными пределами выносливости. Естественно, что при увеличении размеров возрастает вероятность «попадания» дефектных зерен в зону концентрации напряжений. Проявлению масштабного эффекта способствуют меньшая однородность материала в деталях больших размеров, трудность обеспечения стабильности технологического процесса, условий контроля и т. п. Масштабный эффект зависит главным образом от поперечных размеров (диаметра) изделия и в меньшей степени от его длины.

Во многих случаях в опасных точках деталей машин имеет место сложное напряженное состояние (одновременное действие нормальных и касательных напряжений).

Ответственным за усталостное разрушение является максимальное касательное напряжение [11]. Например, при изгибе и кручении вала переменное касательное напряжение

$$\tau_{a \max} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}.$$

Влияние постоянных напряжений связано с величиной и знаком нормального напряжения, приложенного к площадке, где действует максимальное переменное касательное напряжение.

Качество поверхности существенным образом влияет на сопротивление усталости. Обычно на поверхности детали находятся точки с наибольшими напряжениями, где происходит зарождение усталостной трещины. Наличие рисок, забоин, грубой обработки может снизить предел выносливости на 10...50%.

Ответственные детали турбомашин, работающие при переменных нагрузках, изготавливаются с высокой чистотой поверхности и часто подвергаются упрочняющей технологии (виброгалтовке, наклепу, обдувке дробью, выглаживанию и т. п.).

Однако нестабильность качества поверхности в производственных условиях (дефекты изготовления и контроля) создает одну из важных причин статистического разброса пределов выносливости.

Рассеяние долговечности при переменных напряжениях связано как с нестабильностью технологии, так и с самой природой

усталостного разрушения (неоднородность микроструктуры материала).

Для повышения достоверности оценки долговечности конструкций широко используется статистическое описание процесса усталостного разрушения.

## 1.2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

Анализ аварий и разрушений, связанных с усталостными поломками, а также результатов лабораторных испытаний показывает, что *закономерности усталостного разрушения носят статистический характер*. При действии одного и того же циклического напряжения число циклов до разрушения может отличаться в несколько раз. В эксплуатации усталостные поломки встречаются после различной наработки. Необходимость статистического описания сопротивления усталости вытекает из природы усталостного разрушения, зависящего главным образом от локальных свойств поверхностного слоя детали.

В настоящее время статистическое описание проводится в двух основных направлениях. Первое направление связано со статистической обработкой результатов усталостных испытаний деталей и образцов с целью определения параметров распределения и доверительных границ, второе — с построением теоретических моделей усталостного разрушения. Второе направление в настоящем пособии не рассматривается, так как оно не получило еще широкого практического применения для расчета надежности.

### 1.2.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

При усталостном разрушении долговечность определяется числом циклов нагружения\*.

Статистическая обработка экспериментальных данных по определению числа циклов до разрушения показала, что при постоянной амплитуде переменных напряжений логарифм числа циклов распределяется по нормальному закону [12]. Такое распределение называется логарифмически нормальным.

Плотность этого распределения

$$f(\lg N) = \frac{1}{S_{\lg N} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\lg N - \overline{\lg N})^2}{2 S_{\lg N}^2} \right]. \quad (10)$$

\* Прямое влияние времени нагружения сказывается при наличии дополнительных процессов разупрочнения, связанных с действием высоких температур и других факторов.

В равенстве (10)  $\overline{\lg N}$  и  $S_{\lg N}$  — соответственно среднее значение и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $\lg N$ .

При невысоком уровне напряжений существует «порог чувствительности»  $N_n$ , т.е. разрушение при числе циклов  $N < N_n$  не встречается.

Тогда усеченное логарифмически нормальное распределение выражается следующей плотностью распределения:

$$f = \frac{1}{S_{\lg(N-N_n)} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[\lg(N-N_n) - \overline{\lg(N-N_n)}]^2}{2 S_{\lg(N-N_n)}^2} \right\}. \quad (11)$$

В этом случае распределение характеризуется тремя параметрами: средним значением, средним квадратическим отклонением и величиной «порога». *Задача статистической обработки результатов усталостных испытаний состоит в определении параметров распределения и доверительных пределов для прогнозируемых значений числа циклов до разрушения.*

Равенства (10) и (11) выражают статистическую модель усталостной долговечности, в качестве которой принимается логарифмически нормальное распределение.

Для определения параметров распределения применяются различные методы [6, 8].

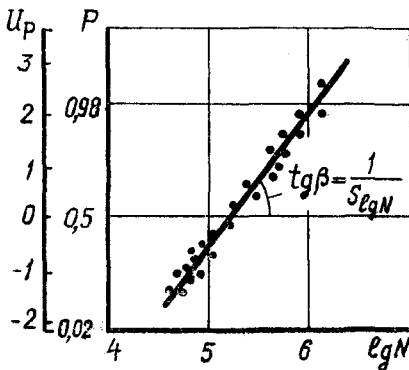


Рис. 9. Статистическая обработка результатов усталостных испытаний

### Графический метод.

Простейший способ нахождения параметров распределения — нанесение экспериментальных точек на вероятностной бумаге с логарифмическим масштабом по оси абсцисс (рис. 9).

Пусть испытано  $n$  образцов, показавших при  $\sigma = \text{const}$  число циклов до разрушения  $N_1, N_2, \dots, N_n$ .

Для статистической обработки номера́ присваиваются в порядке

возрастания числа циклов до разрушения ( $N_1 < N_2 < \dots < N_n$ ).

Затем определяется накопленная частота (статистическая вероятность разрушения)



$$\hat{P}_i = \hat{P}(N < N_i) = \frac{i}{n+1}.$$

Несколько лучшие результаты дает при малых  $n$  зависимость

$$P_i = \frac{i-0,5}{n}.$$

Величина  $P_i$  выражает приближенно вероятность того, что число циклов до разрушения окажется меньше  $N_i$ :

$$P(N_{\text{разр}} < N_i) \approx P_i.$$

На вероятностную бумагу наносятся экспериментальные точки по известным значениям  $N_i$  и  $P_i$  (часто величина  $P_i$  определяется в процентах). Абсцисса точки, соответствующая  $P_i = 0,5$ , равна среднему значению логарифмов числа циклов  $\overline{\lg N}$ .

На второй шкале ординат отложена величина  $U_p$  — квантиль вероятности  $P$ , т. е. безразмерное отклонение

$$U_p = \frac{x - \bar{x}}{s}, \quad (12)$$

соответствующее (при нормальном законе) вероятности

$$P(X < x) = P.$$

В рассматриваемом случае  $x = \lg N$ .

Значения  $U_p$  для некоторых величин  $P$  следующие:

$U_p$	-3	-2	-1	0	1	1,96	2	2,58	3
$P$	0,0013	0,023	0,159	0,500	0,841	0,95	0,977	0,99	0,9987

Тангенс угла наклона прямой линии, проведенной в качестве аппроксимирующей экспериментальные точки, равен

$$\operatorname{tg} \beta = 1/S_{\lg N}.$$

Это отношение вытекает из равенства (12), так как по оси ординат в равномерном масштабе отложена величина  $U_p$ .

Если прямая располагается более полого, то ей соответствует большая величина среднего квадратического отклонения.

Графический метод достаточно прост и нагляден, но не обладает высокой точностью и без дополнительных вычислений не дает возможности установить доверительные границы. Подобная обработка допустима в том случае, когда экспериментальные точки хорошо аппроксимируются прямой линией, т. е. распределение строго соответствует логарифмически нормальному.

**Аналитический метод.** Среднее значение и среднее квадратическое отклонение логарифма числа циклов до разрушения определяют расчетным путем из соотношений

$$(\overline{\lg N})_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg N_i; \quad (13)$$

$$(\overline{S_{\lg N}})_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lg N_i - \overline{\lg N})^2} \quad (14)$$

Достоверность этих значений зависит от объема выборки (числа экспериментальных точек) и при возрастании  $n$  увеличивается. Вычисления по формулам (13) и (14) проводятся на ЭВМ, при ручном счете для больших значений  $n$  ( $n > 30$ ) целесообразно группировать значения  $\lg N_i$  по интервалам (обычно используется 6...10 интервалов).

Методами математической статистики можно установить доверительные интервалы для среднего значения логарифма числа циклов до разрушения.

Значение  $\overline{\lg N}$  для генеральной совокупности (например, для всех изделий, выпускаемых по данным техническим условиям)

$$(\overline{\lg N})_n - t_c(n, P_d) \frac{(S_{\lg N})_n}{\sqrt{n}} < \overline{\lg N} < (\overline{\lg N})_n + t_c(n, P_d) \frac{(S_{\lg N})_n}{\sqrt{n}}, \quad (15)$$

где  $t_c(n, P_d)$  — значение коэффициента Стьюдента при объеме выборки  $n$  и доверительной вероятности  $P_d$ .

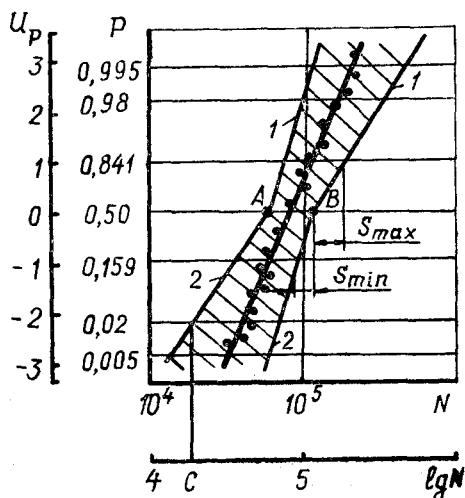


Рис. 10. Построение доверительной зоны для долговечности при усталостных испытаниях

Можно указать доверительные границы для среднего квадратического отклонения:

$$\left. \begin{aligned} (S_{\lg N})_{\min} &= k_{\sigma_{\min}}(n, P_{\sigma}) (S_{\lg N})_n \\ (S_{\lg N})_{\max} &= k_{\sigma_{\max}}(n, P_{\sigma}) (S_{\lg N})_n \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где коэффициенты  $k_{\sigma_{\min}}$  и  $k_{\sigma_{\max}}$  вычисляются на основании распределения  $\chi^2$ .

Приближенное построение доверительной зоны для долговечности при усталостных испытаниях осуществляется (рис. 10) с помощью значений доверительных границ, определяемых выражениями (15) и (16). Разброс среднего значения  $\lg N$

$$AB = 2 t_c(n, P_{\sigma}) (S_{\lg N})_n / \sqrt{n}.$$

Наибольшее значение долговечности соответствует случаю, когда аппроксимирующая прямая будет исходить из точки В, причем прямая 1В получит угол наклона

$$\operatorname{tg} \beta_{\min} = 1 / (S_{\lg N})_{\max},$$

а прямая 2В — угол наклона

$$\operatorname{tg} \beta_{\max} = 1 / (S_{\lg N})_{\min}.$$

Прямые 1А и 2А параллельны соответственно прямым 2В и 1В.

С помощью построенной доверительной зоны можно установить, например, что только для 2,0% образцов логарифм числа циклов до разрушения будет меньше  $C$  (см. рис. 10), и это утверждение сделано с доверительной вероятностью  $P_{\sigma}$ .

### 1.2.2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА ЦИКЛОВ ДО РАЗРУШЕНИЯ

Предположение о логарифмически нормальном законе распределения долговечности (числа циклов до разрушения) позволяет указать доверительные границы для среднего и минимального числа циклов при определенном уровне значимости.

Среднее число циклов  $\bar{N}$  и среднее значение логарифма числа циклов связаны при логарифмически нормальном распределении следующим образом:

$$\lg \bar{N} = \lg \overline{N} + \frac{1}{2 \lg e} S_{\lg N}^2 = \overline{\lg N} + 1,15 S_{\lg N}^2.$$

Оценка математического ожидания логарифма среднего числа циклов по результатам выборки

$$\lg \bar{N} \approx (\overline{\lg N})_n + 1,15 (S_{\lg N}^2)_n. \quad (17)$$

Чтобы установить доверительные пределы для среднего числа циклов, можно поступить двояким образом.

Используя оценки (15) и (16), находим крайние значения  $\overline{\lg N}$  и  $S_{\lg N}$  и соответствующие им крайние значения  $\lg \bar{N}$ .

По второму (более простому) способу проводится непосредственная оценка дисперсии  $\lg \bar{N}$  в соответствии с равенством (17).

Учитывая значения дисперсий

$$D[\overline{\lg N}] = S_{\lg N}^2/n;$$

$$D[S_{\lg N}^2] = 2S_{\lg N}^4/(n-1) \approx 2S_{\lg N}^4/n,$$

получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \lg \bar{N} = & (\overline{\lg N})_n + 1,15 (S_{\lg N}^2)_n \pm U_{P_\partial} \frac{(S_{\lg N})_n}{\sqrt{n}} \times \\ & \times \sqrt{1 + 2(1,15)^2 (S_{\lg N}^2)_n}, \end{aligned}$$

где  $U_{P_\partial}$  — квантиль нормального распределения соответствующей принятой доверительной вероятности  $P_\partial$ .

Перейдем к определению доверительной границы для минимального числа циклов до разрушения. Воспользуемся толерантными коэффициентами для нормального распределения, которому подчиняется распределение  $\lg N$ . В этом случае нижняя оценка выражается следующим образом:

$$(\lg N)_{\min} \geq (\overline{\lg N})_n - k(n, q, P_\partial) \cdot (S_{\lg N})_n,$$

где  $k(n, q, P_\partial)$  — односторонний толерантный коэффициент, соответствующий уровню значимости  $q$  и установленный с доверительной вероятностью  $P_\partial$ .

Если принято  $q = 5\%$  и  $P_\partial = 90\%$ , то это означает, что только в  $5\%$  случаев значение  $\lg N$  может оказаться меньше  $(\lg N)_{\min}$ , и это утверждение справедливо, по крайней мере, для  $90\%$  случаев испытаний.

Иногда для описания усталостного разрушения используется распределение Вейбулла, в соответствии с которым функция распределения долговечности

$$F(N) = 1 - \exp\left[-\frac{(N - N_0)^m}{N_c}\right],$$

где  $m, N_0, N_c$  — параметры распределения ( $N_0$  — порог усеченного распределения).

Обычно логарифмически нормальное распределение и распределение Вейбулла в равной мере подходят для описания

усталостной долговечности, но первое из них существенно проще для практических расчетов.

### 1.2.3. ПЛОТНОСТЬ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ

Статическая прочность может быть охарактеризована одномерным распределением случайной величины — предела прочности. Сопротивление усталости зависит от двух факторов — напряжения и числа циклов, поэтому оно должно описываться двумерным статистическим распределением с плотностью распределения  $f(\sigma, N)$ .

Интегральная функция распределения

$$P(\sigma, N) = \int_0^{\sigma} \int_0^N f(\sigma, N) \cdot d\sigma \cdot dN \quad (18)$$

выражает вероятность усталостного разрушения при напряжении  $\sigma_{\text{разр}} < \sigma$  и числе циклов  $N_{\text{разр}} < N$ :

$$P(\sigma, N) = P(\sigma_{\text{разр}} < \sigma; N_{\text{разр}} < N).$$

Обычные испытания на усталость проводятся при заданных значениях напряжения и дают распределение случайной величины — число циклов до разрушения. Плотность этого распределения  $f(N/\sigma)$ , как указывалось, подчиняется логарифмически нормальному закону.

Распределение пределов выносливости при заданной базе испытаний (числе циклов) имеет плотность  $f(\sigma/N)$ . Однако прямое экспериментальное исследование такого распределения осуществить весьма трудно, хотя именно оно представляет наибольший интерес для проблемы надежности.

Будем, как и раньше, использовать логарифмические координаты, обозначая  $x = \lg N$ ,  $y = \lg \sigma$ . Плотность совместного распределения

$$f(x, y) = f(x) f(y/x) = f(y) f(x/y).$$

### 1.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Разобьем общее изменение числа циклов  $x = \lg N$  на  $m_1$  интервалов и обозначим центры интервалов  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_{m_1}$  (рис. 11). Напряжение условно представим интервалами, центры которых имеют значения  $y_1, \dots, y_j, \dots, y_{m_2}$ .

Пусть при уровне напряжений  $y_j$  число образцов, оказавшихся в  $i$ -м интервале числа циклов, равно  $n_{ij}$ . Тогда плотность

$x_i \backslash y_j$	1	2	$i$	$m_1$	$n_j$
1	$n_{11}$	$n_{21}$	$n_{i1}$		
2	$n_{12}$				
$j$	$n_{1j}$		$n_{ij}$		$n_j$
$m_2$					
$n_i$			$n_i$		$n$

Рис. 11. Таблица испытаний образцов

вероятности, соответствующая элементу с координатами центра  $x_i, y_j$ ,

$$\hat{f}(x_i, y_j) = n_{ij}/n,$$

где  $n$  — общее число образцов, испытанных на всех уровнях напряжений.

Для определения плотности вероятности  $f(x)$  в точке  $x_i$  следует определить число всех образцов в интервале  $i$

$$n_i = \sum_{j=1}^{m_2} n_{ij}$$

и отнести эту сумму к общему числу образцов:

$$\hat{f}(x_i) = n_i/n. \quad (19)$$

Плотность вероятности  $f(y)$  в точке  $y_j$

$$\hat{f}(y_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} n_{ij}}{n} = \frac{n_j}{n}. \quad (20)$$

В равенствах (19) и (20)  $n_i$  и  $n_j$  — число образцов в столбце  $i$  и в строке  $j$  общей таблицы (рис. 11).

Плотность распределения логарифма числа циклов до разрушения при напряжении  $\sigma_j$  в точке  $x_i, y_j$

$$\hat{f}(x_i/y_j) = \frac{\hat{f}(x_i, y_j)}{\hat{f}(y_j)} = \frac{n_{ij}}{n_j}.$$

Плотность распределения логарифма напряжений при заданном числе циклов в точке  $x_i, y_j$

$$\hat{f}(y_j/x_i) = \frac{\hat{f}(x_i, y_j)}{\hat{f}(x_i)} = \frac{n_{ij}}{n_i}.$$

Если число циклов является базовым при испытании на выносливость (обычно принимается  $N_0 = 10^7$ ,  $\lg N_0 = 7$ ), то величина  $\hat{f}(y_j, x_i)$  выражает плотность распределения логарифмов пределов выносливости.

Отметим, что использование логарифмических координат не является обязательным. Для числа циклов это вполне целесообразно, для напряжений удобство использования логарифмических координат менее очевидно; иногда может оказаться целесообразным принимать  $y_i = \sigma_i$ .

Описанная методика определения плотности вероятности двумерного распределения усталости рассматривает  $x$  и  $y$  как независимые случайные величины.

При обычной методике усталостных испытаний проводится серия испытаний заранее выбранного числа образцов при заданном уровне напряжений. При достаточно большом числе таких уровней поверхность плотности вероятности задается с помощью ряда сечений  $y = \text{const}$  с точностью, удовлетворяющей техническим расчетам. Отметим, что при статистической обработке экспериментальных данных по сопротивлению усталости используется главным образом функция распределения  $P(\sigma, N)$ .

### 1.2.5. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИАГРАММА УСТАЛОСТИ

В трехмерной диаграмме (рис. 12) по осям  $x$  и  $y$  откладываются величины  $N$  и  $\sigma$  (обычно в логарифмическом масштабе), по оси  $z$  — вероятность разрушения  $P(\sigma, N)$ .

Сечения поверхности распределения плоскостями  $N = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$  и  $P = \text{const}$  образуют соответственно кривые:

$(\sigma, P)$  — распределения предела выносливости;

$(N, P)$  — распределения циклической долговечности;

$(\sigma, N)$  — равной вероятности усталостного разрушения.

С помощью усталостных испытаний обычно получают кривые распределения циклической долговечности  $(N, P)_{\sigma = \text{const}}$ . Одна из главных задач статистической обработки — получение двух других кривых.

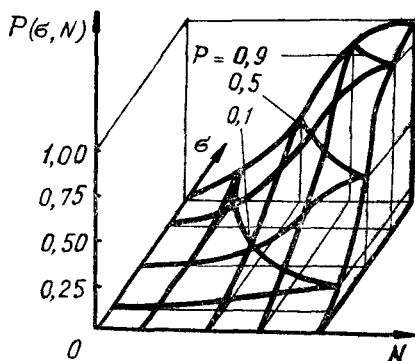


Рис. 12. Пространственная диаграмма усталости

### 1.2.6. РАССЕЙАНИЕ ПРЕДЕЛОВ ВЫНОСЛИВОСТИ

Часто бывает необходимым оценить рассеяние пределов выносливости при заданном числе циклов, т. е. построить зависимости

$$(\sigma, N)_{P = \text{const}} \text{ и } (\sigma, P)_{N = \text{const}}$$

На рис. 13 дан способ построения таких кривых

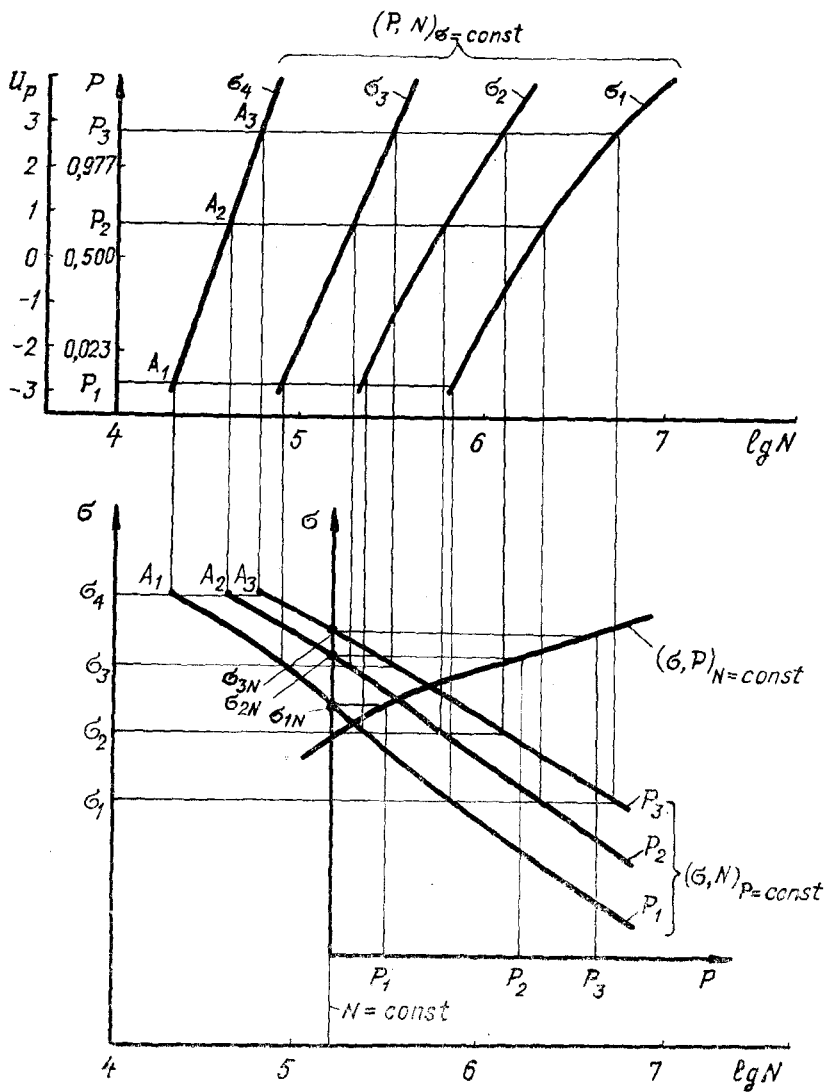


Рис. 13. Построение кривых равной вероятности усталостного разрушения и распределения предела выносливости с помощью кривых распределения циклической долговечности



с помощью сечений  $\bar{P} = \text{const}$  на обычной диаграмме «логарифм числа циклов — вероятность разрушения». Например, вероятностям  $P_1, P_2$  и  $P_3$  при  $\sigma = \sigma_4$  соответствуют точки  $A_1, A_2$  и  $A_3$ . Соединяя точки с одинаковой вероятностью, получим кривые  $P_1, P_2, P_3$ , т. е. зависимости  $(\sigma, N)_{P=\text{const}}$ .

Если провести теперь сечение  $N = \text{const}$  и отложить по новой оси  $P$  значения  $P_1, P_2, P_3$  (в точках  $\sigma_{1N}, \sigma_{2N}$  и  $\sigma_{3N}$ ), то получим точки, принадлежащие функции распределения пределов выносливости, т. е. зависимости  $(\sigma, P)_{N=\text{const}}$ .

В общем случае задача «восстановления» распределения пределов выносливости ставится следующим образом: дано  $n$  значений абсцисс и ординат распределения  $(\sigma_{iN}, P_i)$ , необходимо найти значения  $P$  во всех других точках. Эта задача аппроксимации решается различными способами, например методом интерполяционных полиномов. В практических задачах более удобно аппроксимировать результаты с помощью уже известного распределения (например, нормального), подбирая подходящим образом параметры распределения. Наиболее простой способ подбора параметров аппроксимирующего нормального распределения состоит в следующем.

Пусть сечения  $P = \text{const}$  для серии кривых  $(P, N)$  выбраны так:  $P_3 = 0,90, P_2 = 0,50$  и  $P_1 = 0,10$ . Этим значениям вероятности соответствуют квантили 1,282; 0; -1,282. Приближенно можно принять

$$\bar{\sigma} = \sigma_{2N},$$

т. е. среднее значение замещается медианным и

$$S_{\sigma} \approx \frac{\sigma_{1N} - \sigma_{3N}}{2 \cdot 1,282} = 0,39 (\sigma_{1N} - \sigma_{3N}).$$

Величины  $\bar{\sigma}$  и  $S_{\sigma}$  позволяют определить плотность распределения и другие необходимые статистические характеристики.

Второй приближенный метод основан на связи между напряжениями и числом циклов до разрушения (см. § 1.1).

Для  $N < N_0$  зависимость  $(\sigma, N)$  при определенной вероятности разрушения (например,  $P = 0,5$ ) может быть представлена в виде

$$\sigma^m N = C, \quad (21)$$

для  $N > N_0$  — в виде

$$\sigma^{m_0} N = C_0.$$

Из уравнения (21) вытекает линейная зависимость между  $\lg \sigma$  и  $\lg N$ :

$$m \lg \sigma + \lg N = \lg C.$$

Тогда в силу общих свойств среднего квадратического отклонения при линейных преобразованиях

$$S_{lg\sigma} = \frac{1}{m} S_{lgN}. \quad (22)$$

Так как обычно  $m = 6 \dots 10$ , то из соотношения (22) следует, что *разброс значений разрушающих напряжений* (при  $N = \text{const}$ ) *значительно меньше, чем разброс числа циклов до разрушения* (при  $\sigma = \text{const}$ ).

Подобный вывод в еще большей степени относится к разрушениям при низком уровне напряжений ( $N > N_0$ ).

В этом случае

$$S_{lg\sigma} = \frac{1}{m_0} S_{lgN},$$

причем по экспериментальным данным  $m_0 \gg m$ .

Равенство (22) часто используется в практических расчетах, однако следует отметить, что оно является приближенным, так как предполагается справедливость зависимости (21) и, что более существенно, предполагаются одинаковые значения  $m$  прямых, соответствующих разным вероятностям разрушения.

### 1.3. СУММИРОВАНИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Для оценки надежности машин важно учитывать весь спектр нагружения. Во время эксплуатации на детали действуют переменные напряжения различной величины и продолжительности. Требуется определить степень повреждения, внесенную в результате суммарного воздействия. Наиболее правильные оценки можно получить с помощью усталостных испытаний при программном нагружении, отражающем эксплуатационные нагрузки. Такие испытания все больше внедряются в практику, однако сложность и длительность их проведения делают весьма важной разработку методов оценки сопротивления усталости при программном (нестационарном) нагружении по результатам более простых усталостных испытаний. Это составляет основную задачу теории суммирования повреждений.

Вначале рассмотрим некоторые экспериментальные результаты и способы их представления, затем — основы линейной теории суммирования повреждений.

#### 1.3.1. ПРОСТЕЙШЕЕ ПРОГРАММНОЕ НАГРУЖЕНИЕ И КРИВЫЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

На рис. 14 показано двухступенчатое нагружение, при котором деталь получает начальное число циклов  $n_n$  с напряжением

$\sigma_n$  и конечное число циклов  $n_k$  при напряжении  $\sigma_k$ . Если испытывать деталь (образец) при постоянном уровне напряжений (стационарный режим, рис. 15), то число циклов до разрушения будет соответственно  $N_n$  и  $N_k$ . Результаты эксперимента при двухступенчатом нагружении выражают обычно в виде кривых повреждаемости (рис. 16).

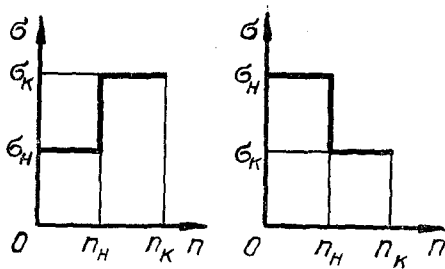


Рис. 14. Двухступенчатое программное нагружение

Прямая линия на рис. 16 соответствует условию

$$\frac{n_n}{N_n} + \frac{n_k}{N_k} = 1. \quad (23)$$

Это условие, имеющее очень важное значение, в дальнейшем называется условием линейного суммирования усталостных повреждений. Например, если при напряжении  $\sigma_n = 500$  МПа образец разрушается при  $N_n = 1,5 \cdot 10^5$  циклов и работает на этом уровне  $n_n = 9 \cdot 10^4$  циклов, то, проводя «долом» при уровне  $\sigma_k = 600$  МПа за  $N_k = 5 \cdot 10^4$  циклов, получим по равенству (23) число циклов до разрушения

$$n_k = N_k \left( 1 - \frac{n_n}{N_n} \right) = 5 \cdot 10^4 \left( 1 - \frac{9 \cdot 10^4}{1,5 \cdot 10^5} \right) = 2 \cdot 10^4 \text{ циклов.}$$

Кривые повреждаемости, расположенные выше прямой линейного суммирования, указывают на процесс упрочнения

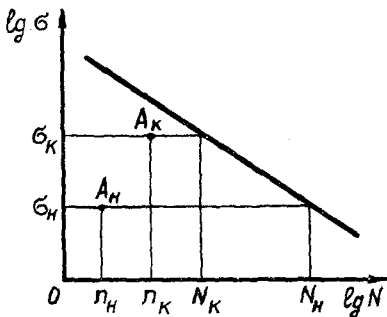


Рис. 15. Разрушающее число циклов при стационарном нагружении

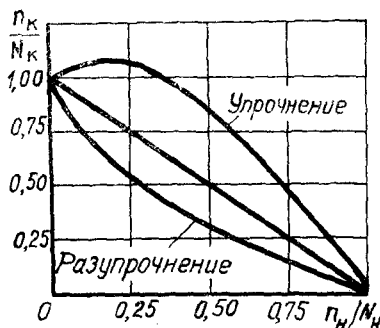


Рис. 16. Кривые повреждаемости при двухступенчатом нагружении

(«тренировки»), а расположенные ниже — на процесс разупрочнения.

На основании экспериментальных данных установлено [7, 11], что при  $\sigma_n > \sigma_k$  часто наблюдается процесс разупрочнения, тогда как при  $\sigma_n < \sigma_k$  — процесс упрочнения.

При чередовании двухступенчатых блоков нагружения, что характерно для реальных условий эксплуатации, в большинстве случаев оказывается применимым линейный закон суммирования.

### 1.3.2. ЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН СУММИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Будем характеризовать повреждение некоторой функцией  $D$ , считая, что моменту разрушения соответствует ее значение

$$D = D_p, \quad (24)$$

где  $D_p$  — предельное значение функции разрушения.

Далее предположим, что скорость накопления повреждений по числу циклов является степенной функцией действующего напряжения

$$\frac{dD}{dn} = C_p \sigma^m(n), \quad (25)$$

где  $C_p$  и  $m$  — константы материала.

Из формулы (25) вытекает, что

$$D = C_p \int_0^n \sigma^m(n) dn. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь стационарный режим

$$\sigma(n) = \sigma = \text{const}$$

и обозначим число циклов до разрушения  $N$ . Тогда в соответствии с равенством (26)

$$D_p = C_p \int_0^N \sigma^m dn = C_p \sigma^m N.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\sigma^m N = \frac{D_p}{C_p} = C = \text{const}. \quad (27)$$

Из сравнения выражений (3) и (27) вытекает, что величину  $m$  можно считать равной показателю степени при аппроксимации результатов усталостных испытаний. Из равенства (27)

$$\sigma^m = C/N, \quad (28)$$

где  $N = N(\sigma)$  — число циклов до разрушения, соответствующих напряжению  $\sigma$ .

Внося зависимость (28) в формулу (26), находим

$$D = C_p C \int_0^n \frac{dn}{N[\sigma(n)]}. \quad (29)$$

Видом записи равенства (29) подчеркивается, что  $N$  определяется действующим напряжением  $\sigma$ , изменяющимся при возрастании числа циклов.

Пусть  $N_\Sigma$  — суммарное число циклов до разрушения при программном нагружении. Из условия (24) и равенства (29) в момент разрушения

$$D_p = C_p C \int_0^{N_\Sigma} \frac{dn}{N[\sigma(n)]}.$$

Внося значение  $C$  из выражения (27), приходим к условию

$$\int_0^{N_\Sigma} \frac{dn}{N[\sigma(n)]} = 1. \quad (30)$$

Условие (30) выражает закон линейного суммирования при непрерывном изменении напряжений. Он был предложен Пальмгреном (1924 г.) в связи с анализом долговечности подшипников и затем исследовался в ряде работ как общая закономерность усталостного разрушения\*.

Часто имеет место ступенчатое изменение действующих напряжений, или непрерывное распределение удобно представить в виде ступенчатого.

Пусть напряжение  $\sigma_i$  действовало  $n_i$  циклов и всего имелось  $\nu$  уровней напряжений. Из равенства (30)

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{n_i}{N_i(\sigma_i)} = 1. \quad (31)$$

В такой форме условие линейного суммирования находит широкое применение.

Выше не затрагивалось рассеяние долговечности при усталостных испытаниях.

В действительности при каждом напряжении  $\sigma_i$  имеется статистическое распределение  $N_i$ . Условия (30) и (31) следует относить к средним значениям числа циклов до разрушения.

\* Из отечественных ученых этим вопросом занимались С. В. Серенсен, Д. Н. Решетов, В. Н. Трейер, В. М. Бахарев, В. П. Когаев, Л. А. Козлов и др.

Вполне вероятно, что они окажутся приближенно справедливыми и в том случае, когда все  $N_i$  относятся к определенному уровню доверительной вероятности.

При работе детали на  $i$ -м режиме частный запас прочности (рис. 17)

$$k_{\sigma i} = \sigma_{pi} / \sigma_i,$$

где  $\sigma_{pi}$  — разрушающее напряжение при числе циклов  $n_i$ .

Запас долговечности (по числу циклов) на  $i$ -м режиме

$$k_{ni} = N_i / n_i. \quad (32)$$

Точки  $A_i$  и  $A_n$  лежат на кривой усталостной прочности, поэтому в соответствии с выражением (27)

$$\sigma_{pi}^m n_i = \sigma_i^m N_i.$$

Следовательно, запас долговечности

$$k_{ni} = (\sigma_{pi} / \sigma_i)^m = k_{\sigma i}^m. \quad (33)$$

Так как  $m \geq 1$ , то из равенства (33) следует, что запас долговечности значительно больше запаса прочности. Увеличение запаса прочности по напряжениям дает существенное возрастание по долговечности, так как

$$\Delta k_{ni} = m \Delta k_{\sigma i}.$$

Условие разрушения (31) можно записать и в форме

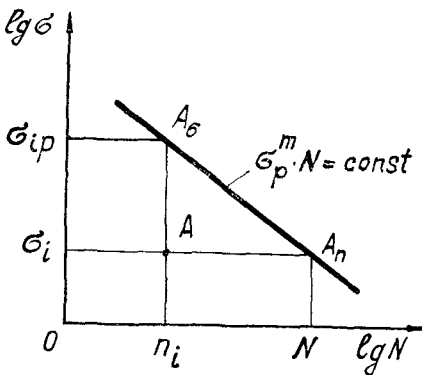


Рис. 17. К выводу соотношения между запасами прочности и долговечности

$$\sum_{i=1}^v (1/k_{\sigma i}^m) = 1,$$

получаемой с использованием зависимостей (32) и (33).

### 1.3.3. ОБОБЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА СУММИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Дальнейшее обобщение условия линейного суммирования повреждений содержится в следующем условии усталостного разрушения:

$$\sum_{i=1}^v \frac{n_i}{N_i(\sigma_i)} = a, \quad (34)$$

где параметр  $a$  зависит не только от материала, температуры испытаний, среды, но и должен отражать историю нагружения. Учесть все факторы затруднительно, и в практических расчетах применяется значение  $a$  по результатам сходственных испытаний. Отметим, что влияние даже значительных отклонений величины  $a$  на общий запас прочности невелико. Достаточно общее условие усталостного разрушения можно представить в форме

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mu_i \left[ \frac{n_i}{N_i(\sigma_i)} \right]^{p_i} = a.$$

При  $\mu_i = p_i = 1$  это условие совпадает с условием линейного суммирования (34).

Для того чтобы отразить историю нагружения, суммирование должно проводиться в естественном порядке нагружения (индекс 1 присваивается первому по календарному времени нагружению, индекс 2 — второму и т. д.). Значения  $\mu_i$  для некоторых режимов могут быть отрицательными, что дает возможность отразить упрочнение («тренировку») на соответствующем режиме.

В практических задачах часто встречаются асимметричные циклы напряжений, имеющие амплитуду цикла  $\sigma_a$  и среднее напряжение  $\sigma_m$  (см. рис. 1 и 2).

Условия суммирования усталостных повреждений для асимметричных циклов не разработаны, но в первом приближении можно принять

$$\sum_{i=1}^{\nu} \frac{n_i}{N_i(\sigma_{i\text{эКВ}})} = 1, \quad (35)$$

где  $\sigma_{i\text{эКВ}}$  — эквивалентное напряжение для  $i$ -го цикла.

На основании обычного способа учета влияния асимметрии цикла (см. § 1.1) следует считать

$$\sigma_{i\text{эКВ}} = \sigma_{ai} \left( 1 - \frac{\sigma_{mi}}{\sigma_{bi}} \right),$$

где  $\sigma_{bi}$  — предел статической прочности материала для условий  $i$ -го режима.

Принцип использования эквивалентных напряжений в условиях линейного суммирования может быть распространен и на сложное напряженное состояние, как, например, при расчете диска на прочность [3]. При действии нормальных и касательных переменных напряжений  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  эквивалентное напряжение по Мизесу-Генки принимается равным

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}.$$

При сложном напряженном состоянии и асимметричных циклах нагружения можно принимать

$$\sigma_{\text{э.в.}} = \sqrt{\left[ \sigma_a \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right) \right]^2 + 3 \left[ \tau_a \left( 1 - \frac{\tau_m}{\tau_b} \right) \right]^2}.$$

Далее в соответствии с условием (35) следует воспользоваться кривой усталости для определения  $N(\sigma_{\text{э.в.}})$ .



### СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТНЫХ ОТКАЗОВ

---

Во введении уже отмечалось, что среди отказов двигателей особое место занимают отказы прочностного характера, выражающиеся в разрушении элементов конструкций. Часто подобные отказы вызывают тяжелые последствия. Поэтому одна из основных задач теории надежности состоит в разработке методов анализа и контроля конструкций, обеспечивающих их прочность и безопасность.

Обычно при оценке надежности изделий исходят из статистических распределений, получаемых с помощью анализа отказов в эксплуатационных условиях. Построение статистической модели позволяет оценить надежность конструкции уже на стадии проектирования и опытных исследований. Надежность конструкции оценивается по статистической модели с помощью величины вероятности разрушения или запаса прочности. Подход, применяемый в настоящей главе, может быть использован и для статистических моделей с другой физикой отказов.

#### 2.1. ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

##### 2.1.1. ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ (СИСТЕМЫ) И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

При рассмотрении условий разрушения обычно сопоставляются две группы параметров, из которых первая характеризует прочность конструкции, вторая — действующие нагрузки или напряжения. Например, условие усталостного разрушения при одноосном напряженном состоянии лопаток турбомашин

$$\sigma_{-1}/\sigma_a < 1$$

или

$$\sigma_{-1} - \sigma_a < 0,$$

где  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости;

$\sigma_a$  — максимальное переменное напряжение в опасной точке детали.

В общем случае будем считать, что имеется некоторое число основных параметров «группы прочности»

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$$

и «группы нагрузок»

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n.$$

В параметры «группы прочности» могут входить пределы прочности, разрушающие усилия, предельные деформации и другие характеристики; в «группу нагрузок» могут быть включены компоненты напряженного и деформированного состояний, действующие усилия и т. п.

Условие разрушения в общем виде запишется так: некоторая функция определяющих параметров в опасной точке или опасном сечении элемента конструкции становится отрицательной, т. е.

$$\zeta(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_m) < 0. \quad (36)$$

Функцию  $\zeta$  будем считать функцией неразрушения. Например, условие усталостного разрушения вала

$$\zeta = \eta_1 \left( 1 - \frac{\xi_2}{\eta_2} \right) - \sqrt{(\xi_1 + \eta_3 \xi_2)^2 + 3(\xi_3 + \eta_4 \xi_4)^2} < 0,$$

где  $\xi_1 = \sigma_a$ ,  $\xi_2 = \sigma_m$ ,  $\xi_3 = \tau_a$ ,  $\xi_4 = \tau_m$  — нормальные и касательные напряжения в опасной точке сечения вала ( $a$  и  $m$  — индексы переменных и постоянных напряжений);

$\eta_1 = \sigma_{-1}$  — предел выносливости;

$\eta_2 = \sigma_b$  — предел прочности;

$\eta_3 = \psi_\sigma$ ,  $\eta_4 = \psi_\tau$  — коэффициенты чувствительности материала.

Условие разрушения есть условие того, что функция неразрушения  $\zeta$  имеет отрицательное значение.

Условие (36), в сущности, представляет собой статистическую модель разрушения элемента конструкции, так как определяющие параметры рассматриваются как случайные функции. В общем случае вероятность разрушения элемента следует рассматривать как вероятность выброса случайного процесса за допустимые пределы.

Ограничимся более простым случаем, когда определяющие параметры являются элементарными случайными функциями

$$\xi_i(t) = \xi_i f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\eta_j(t) = \eta_j \varphi_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

где  $\xi_i$  и  $\eta_j$  — случайные величины;

$f_i(t)$  и  $\varphi_j(t)$  — детерминированные функции времени.

В каждый момент времени параметры системы  $\xi_i$  и  $\eta_i$  представляют собой случайные числа.

Рассмотрим сначала вариант, когда имеется всего два определяющих параметра и условие разрушения в данный момент времени можно представить в форме

$$\xi = \eta - \xi < 0. \quad (37)$$

Для определенности будем понимать под  $\eta = \sigma_{-1}$  предел выносливости лопатки турбомашины, а под  $\xi = \sigma_a$  — наибольшее переменное напряжение в лопатке.

Пусть величины  $\eta$  и  $\xi$  зависят от времени и представляют собой эквивалентные характеристики, учитывающие накопление повреждаемости и нестационарный процесс нагружения.

По условиям технологии и эксплуатации каждой лопатке соответствуют случайные значения предела выносливости  $\eta$  и переменного напряжения  $\xi$ . Плотность распределения величин  $\eta$  и  $\xi$  показана на рис. 18.

Предполагается, что проведено тензометрирование достаточно большого количества лопаток и найдены переменные (максимальные) напряжения  $\xi$  в каждой лопатке. Определение пределов выносливости лопаток методами неразрушающего контроля весьма затруднительно, но будем считать, что они установлены, например, с помощью измерения твердости лопаток.

Проводя соответствующие измерения для выборочной совокупности лопаток, можно построить двумерную гистограмму распределения, представляющую собой аппроксимацию поверхности распределения.

В практических случаях построение поверхности распределения оказывается весьма затруднительным, но имеется возможность найти отдельно и независимо распределение пределов выносливости и распределение переменных напряжений. Первое распределение находится с помощью испытаний на усталость партии лопаток, второе — при тензометрировании лопаток в ра-

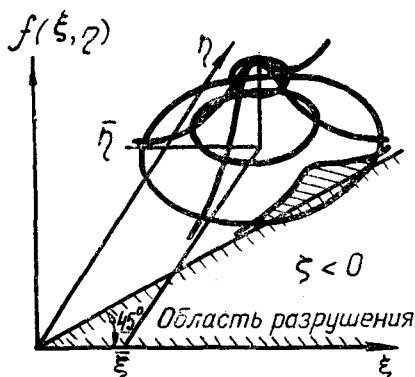


Рис. 18. Плотность распределения определяющих параметров и область разрушения

бочих условиях. Существенно, что значения  $\eta$  и  $\xi$  определяются на различных экземплярах лопаток.

В большинстве реальных конструкций взаимное влияние характеристик прочности и напряженности оказывается незначительным, и обычно принимается допущение об их статистической независимости.

Если величины  $\eta$  и  $\xi$  независимы и распределены по нормальному закону, то плотность вероятности

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi S_\xi S_\eta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\xi - \bar{\xi}}{S_\xi} \right)^2 + \left( \frac{\eta - \bar{\eta}}{S_\eta} \right)^2 \right] \right\},$$

где  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$  — средние значения;

$S_\xi$  и  $S_\eta$  — средние квадратические отклонения.

Нормальный закон благодаря его простоте часто используется для описания распределения параметров механических систем. Как известно, при значениях коэффициентов однородности (отношений  $\bar{\xi}/S_\xi$  и  $\bar{\eta}/S_\eta$ ), больших трех, нормальный закон достаточно хорошо представляет реальные распределения существенно положительных величин (например, пределов прочности).

При малых коэффициентах однородности или, что то же самое, больших коэффициентах вариации

$$v_\xi = S_\xi / \bar{\xi} \text{ и } v_\eta = S_\eta / \bar{\eta}$$

можно применять логарифмически нормальный закон или другие распределения.

*Анализ статистических распределений пределов прочности, текучести и выносливости показывает, что для их описания пригоден нормальное распределение, причем коэффициент вариации составляет обычно 0,06...0,12 (см., например, [7]).*

*Значительно большим рассеянием и разнообразием статистических распределений обладают действующие напряжения. Например, для описания динамических напряжений в лопатках газовых турбин и осевых компрессоров справедливы логарифмически нормальный или нормальный законы с коэффициентом вариации от 0,2 до 0,4.*

### 2.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ОБЛАСТИ РАЗРУШЕНИЯ

Если переменное напряжение  $\xi$  превышает предел выносливости  $\eta$ , то наступает разрушение и величина  $\zeta$  становится отрицательной в соответствии с условием (37). Область разрушения, в которой  $\zeta < 0$ , показана на рис. 18. Она расположена ниже линии  $\eta = \xi$ , идущей под углом  $45^\circ$  из начала координат.

Вероятность попадания точки  $A(\xi, \eta)$  в некоторую область  $D$  в соответствии с определением плотности вероятности

$$P = \iint_D f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Вероятность разрушения равна вероятности попадания данной лопатки (точки)  $A(\xi, \eta)$  в область разрушения

$$P_{\text{разр}} = \iint_{\xi < 0} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Проводя интегрирование по области разрушения сначала по  $\xi$  в пределах от  $\eta$  до  $\infty$ , затем по  $\eta$ , найдем

$$P_{\text{разр}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (38)$$

При изменении порядка интегрирования получаем равносильное соотношение

$$P_{\text{разр}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (39)$$

Определенные интегралы (38) и (39) могут быть вычислены по обычным правилам приближенных вычислений (область интегрирования разбивается на малые участки, в пределах которых величина  $f(\xi, \eta)$  считается постоянной и равной среднему значению).

Вычисления могут быть упрощены, если величины  $\xi$  и  $\eta$  являются статистически независимыми.

Тогда

$$f(\xi, \eta) = f_{\xi}(\xi) f_{\eta}(\eta),$$

и с помощью равенства (39) получаем

$$P_{\text{разр}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\xi} f_{\xi}(\xi) f_{\eta}(\eta) d\eta d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\xi) F_{\eta}(\xi) d\xi, \quad (40)$$

где  $F_{\eta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_{\eta}(\eta) d\eta$  — функция распределения для  $\eta$ .

Нахождение вероятности разрушения сводится теперь к вычислению определенного интеграла (40).

### 2.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА УСЛОВИЯ РАЗРУШЕНИЯ

В соответствии с этим способом рассматривается функция неразрушения

$$\zeta = \eta - \xi,$$

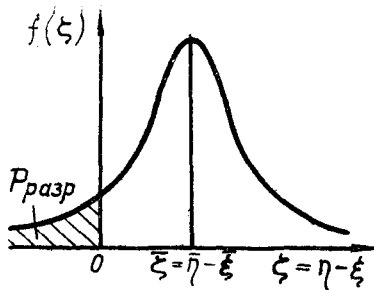


Рис. 19. Определение вероятности разрушения с помощью функции неразрушения

представляющая собой разность двух случайных величин.

Условие разрушения (37)

$$\zeta < 0.$$

Если  $f(\xi)$  — плотность распределения  $\xi$ , то вероятность разрушения (рис. 19)

$$P_{\text{разр}} = P(\zeta < 0) = \int_{-\infty}^0 f(\zeta) d\zeta = F_{\zeta}(0), \quad (41)$$

где  $F_{\zeta}(\zeta)$  — интегральная функция распределения.

Плотность вероятности  $f(\zeta)$  может быть вычислена, если известна плотность двумерного распределения  $f(\xi, \eta)$ :

$$f(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta - \zeta, \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \xi + \zeta) d\xi.$$

Для статистически независимых величин  $\xi$  и  $\eta$

$$f(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\eta - \zeta) f_{\eta}(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(\xi) f_{\eta}(\xi + \zeta) d\xi.$$

Рассмотрим случай, когда  $\xi$  и  $\eta$  независимы и распределены нормально. Разность двух нормальных случайных величин также имеет нормальное распределение, причем

$$\bar{\zeta} = \bar{\eta} - \bar{\xi}, \quad (42)$$

$$S_{\zeta} = \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2}. \quad (43)$$

Плотность распределения величины  $\zeta$

$$f(\zeta) = \frac{1}{S_{\zeta} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{2S_{\zeta}^2}\right]. \quad (44)$$

В случае, когда величины  $\xi$  и  $\eta$  распределены по нормальному закону, но не являются независимыми, выражение (44) остается в силе, однако

$$S_{\zeta} = \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2 - 2K_{\xi\eta}}. \quad (45)$$

В формуле (45)

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) f(\xi, \eta) d\xi d\eta - \quad (46)$$

корреляционный момент случайных величин ( $\xi$  — переменных напряжений и  $\eta$  — пределов выносливости).

Если известна плотность распределения величины  $\xi$ , то вероятность разрушения вычисляется по формуле (41).

Для нормального закона распределения (рис. 19) согласно (41)

$$P_{\text{разр}} = F_{\xi}(0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right), \quad (47)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} dU$  — функция Лапласа.

Если используются статистические таблицы для интегральной функции нормированного нормального распределения

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} dU,$$

то

$$P_{\text{разр}} = F_0\left(-\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right) = 1 - F_0\left(\frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}}\right).$$

Значения  $S_{\xi}$  и  $\bar{\xi}$  определяются равенствами (42) и (43) или (45).

Коэффициент вариации функции неразрушения

$$v_{\xi} = S_{\xi} / \bar{\xi} \quad (48)$$

однозначно определяет вероятность разрушения

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi(1/v_{\xi}). \quad (49)$$

В практических задачах  $v_{\xi} < 0,4$ , и для вычисления  $P_{\text{разр}}$  удобно пользоваться асимптотической формулой

$$P_{\text{разр}} = \frac{v_{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2v_{\xi}^2}} (1 - v_{\xi}^2 + 1 \cdot 3 v_{\xi}^4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 v_{\xi}^6 + \dots). \quad (50)$$

Погрешность этого соотношения не выше последнего, использованного при вычислении члена ряда.

При логарифмически нормальном распределении величин  $\xi$  и  $\eta$

$$\begin{aligned} \lg \xi &= \lg \eta - \lg \xi; \\ \overline{\lg \xi} &= \overline{\lg \eta} - \overline{\lg \xi}; \\ S_{\lg \xi} &= \sqrt{S_{\lg \eta}^2 + S_{\lg \xi}^2}. \end{aligned}$$

Вероятность разрушения при логарифмически нормальном

распределении факторов нагружения и прочности определяется по формуле (49), в которой коэффициент вариации

$$v_{lgz} = S_{lgz} / \overline{lgz}.$$

Рассматриваемый метод можно приближенно распространить и на более сложные условия разрушения.

Например, пусть действуют нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения. Эквивалентное напряжение при таком сложном нагруженном состоянии по Мизесу-Генки

$$\xi = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Здесь  $\sigma$  и  $\tau$  рассматриваются как случайные величины. Если  $\sigma$  и  $\tau$  коррелированы между собой, т. е. связаны между собой, например, одним и тем же силовым фактором, то их отношение

$$\tau/\sigma = \kappa = \text{const},$$

и тогда

$$\bar{\xi} = \bar{\sigma} \sqrt{1 + 3\kappa^2},$$

$$S_{\xi} = S_{\sigma} \sqrt{1 + 3\kappa^2},$$

$$v_{\xi} = S_{\xi} / \bar{\xi}.$$

Если  $\sigma$  и  $\tau$  независимы, то можно пользоваться зависимостями

$$\bar{\xi} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 3\bar{\tau}^2},$$

$$S_{\xi} = \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \right)^2 S_{\sigma}^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right)^2 S_{\tau}^2 \right]^{1/2} = \left[ \frac{\bar{\sigma}^2 S_{\sigma}^2 + 9\bar{\tau}^2 S_{\tau}^2}{\bar{\sigma}^2 + 3\bar{\tau}^2} \right]^{1/2}.$$

При большом числе независимых определяющих факторов, имеющих случайное распределение, можно допустить нормальное распределение для функции неразрушения. Коэффициент вариации функции неразрушения

$$v_{\xi} = \frac{1}{\bar{\xi}(\xi_1, \dots, \eta_m)} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \xi}{\partial \xi_i} \right)^2 S_{\xi_i}^2 + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \xi}{\partial \eta_j} \right)^2 S_{\eta_j}^2 \right]^{1/2}, \quad (51)$$

где величины частных производных берутся для средних значений параметров;  $S_{\xi_i}$ ,  $S_{\eta_j}$  — средние квадратические отклонения параметров  $\xi_i$  и  $\eta_j$ .

Вероятность разрушения может быть определена по формулам (49) или (50).

#### 2.1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЗАПАСОВ ПРОЧНОСТИ

В этом способе рассматривается распределение случайной величины

$$k = \eta/\xi, \quad (52)$$



представляющей собой запас прочности.

Условие разрушения

$$k < 1. \quad (53)$$

Как и в предыдущем способе, вероятность разрушения находится с помощью анализа условия разрушения, представленного теперь в форме (53).

Если известна плотность распределения запасов прочности  $f(k)$ , то вероятность разрушения

$$P_{\text{разр}} = P(k < 1) = \int_{-\infty}^1 f(k) dk = \int_0^1 f(k) dk. \quad (54)$$

Здесь принимается во внимание, что запас прочности является существенно положительной величиной.

Величина  $f(k)$  может быть определена, если задана плотность совместного распределения  $f(\xi, \eta)$ . Учитывая, что величины  $\xi$  и  $\eta$  положительны, найдем

$$f(k) = \int_0^{\infty} \xi f(\xi, k\xi) d\xi. \quad (55)$$

Последнее соотношение можно получить непосредственно из следующих соображений.

Функция распределения запасов прочности

$$F(k) = P(K < k).$$

Проведя интегрирование по области, внутри которой запас прочности меньше  $K$  (область между осями  $\eta = 0$  и  $\eta = k\xi$ ), получим

$$F(k) = \int_0^{\infty} \int_0^{k\xi} f(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

Дифференцируя обе части равенства по  $k$ , приходим к равенству (55).

Вероятность разрушения

$$P_{\text{разр}} = F(1).$$

Рассмотрим практически важный случай, когда величины  $\xi$  и  $\eta$  распределены логарифмически нормально.

Так как

$$\lg k = \lg \eta - \lg \xi,$$

то распределение  $\lg k$  подчиняется нормальному закону.

Плотность распределения логарифма запаса прочности

$$f(\lg k) = \frac{1}{S_{\lg k} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg k - \overline{\lg k})^2}{2S_{\lg k}^2}}.$$

Здесь среднее значение логарифма запаса прочности

$$\overline{\lg k} = \overline{\lg \eta} - \overline{\lg \xi}$$

равно разности средних значений логарифмов пределов выносливости и переменных напряжений, а среднее квадратическое отклонение логарифма запаса прочности

$$S_{\lg k} = \sqrt{S_{\lg \eta}^2 + S_{\lg \xi}^2 - 2K_{\lg \xi \lg \eta}},$$

где  $S_{\lg \xi}$ ,  $S_{\lg \eta}$  и  $K_{\lg \xi \lg \eta}$  — средние квадратические отклонения логарифмов  $\xi$  и  $\eta$  и их корреляционный момент.

Величина  $\lg k$  монотонно возрастает вместе с  $k$ , и потому

$$F(\lg k) = P(\lg K < \lg k) = P(K < k) = F(k).$$

Вероятность разрушения выражается функцией распределения при  $k = 1$  или  $\lg k = 0$ .

В соответствии с этим

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{\overline{\lg k}}{S_{\lg k}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\overline{\lg k}}{S_{\lg k}}\right).$$

Последняя формула позволяет вычислить вероятность разрушения при логарифмически нормальном законе распределения пределов выносливости и переменных напряжений.

Рассмотрим теперь приближенный метод, пригодный для произвольного распределения величин  $\xi$  и  $\eta$ .

Из соотношения (52) вытекают приближенные соотношения

$$\overline{k} = \frac{\overline{\eta}}{\overline{\xi}};$$

$$S_k = \left[ \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} \right)^2 S_{\xi}^2 + \left( \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)^2 S_{\eta}^2 \right]^{1/2}.$$

Последнее равенство записывается так:

$$S_k = k \sqrt{v_{\xi}^2 + v_{\eta}^2},$$

где  $v_{\xi} = S_{\xi} / \overline{\xi}$ ;  $v_{\eta} = S_{\eta} / \overline{\eta}$  — коэффициенты вариации.

Зная два параметра распределения (среднее значение и среднее квадратическое отклонение), можно приближенно оценить вероятность разрушения по формуле (54):

Например считая, что запас прочности имеет приблизительно нормальное распределение, получим

$$P_{\text{разр}} = F(1) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{1-k}{S_k}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{k-1}{S_k}\right). \quad (56)$$

Эта формула может использоваться для приближенных оценок.

*Рассмотрение условий разрушения с помощью статистического анализа запасов прочности позволяет естественным образом установить связь между параметрами распределения запасов прочности и функции неразрушения.* Такой метод дает удобные расчетные зависимости при логарифмически нормальном распределении параметров напряжений и прочности и, наконец, приводит к приближенной зависимости, если распределение запасов прочности близко к нормальному.

### 2.1.5. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ

Этот способ дает оценки вероятности разрушения при любых законах распределения определяющих параметров. Одномерные распределения, например, пределов выносливости и переменных напряжений (в лопатках) показаны на рис. 20.

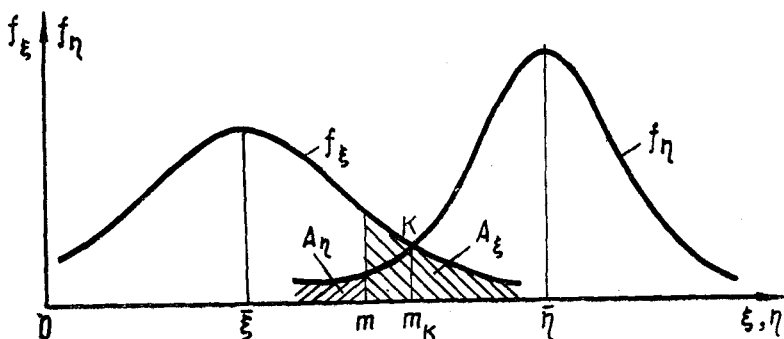


Рис. 20. Одномерные распределения факторов прочности и нагрузки

На практике получают именно такие распределения, так как пределы выносливости определяют на партии изготовленных деталей, а переменные напряжения — с помощью тензометрирования (других экземпляров деталей) на работающем изделии.

Если выбрать некоторый уровень напряжений  $m$ , то разру-

шение произойдет во всяком случае при условии, что одновременно  $\eta < m$  и  $\xi > m$ . Можно утверждать, что

$$P_{\text{разр}} > P(\eta < m, \xi > m). \quad (57)$$

Знак неравенства стоит потому, что возможны случаи разрушения ( $\xi > \eta$ ) при  $\eta > m$  или  $\xi < m$ , которые не учитываются в правой части соотношения (57). С другой стороны, вероятность неразрушения

$$P_{\text{неразр}} = 1 - P_{\text{разр}} > P(\eta > m, \xi < m). \quad (58)$$

Здесь знак неравенства стоит потому, что возможны случаи неразрушения ( $\xi < \eta$ ) при  $\eta < m$  или  $\xi > m$ .

Из неравенств (57) и (58) вытекает для произвольного значения  $m$

$$P(\eta < m, \xi > m) < P_{\text{разр}} < 1 - P(\eta > m, \xi < m). \quad (59)$$

Левая часть неравенства (59) выражает нижнюю, а правая — верхнюю границы для вероятности разрушения.

Принимая величины  $\xi$  и  $\eta$  независимыми, получим

$$\begin{aligned} P(\eta < m, \xi > m) &= P(\eta < m) P(\xi > m) = \\ &= F_{\eta}(m) [1 - F_{\xi}(m)] = A_{\eta} A_{\xi}, \end{aligned} \quad (60)$$

где  $F_{\eta}(m)$  и  $F_{\xi}(m)$  — функции распределения величин  $\eta$  и  $\xi$ ;

$A_{\eta}$  и  $A_{\xi}$  — заштрихованные на рис. 20 площади.

Найдем теперь значение  $m = m_*$ , при котором произведение  $A_{\eta} A_{\xi}$  имеет наибольшее значение. Это позволит установить наибольшую нижнюю оценку для вероятности разрушения.

Дифференцируя соотношение (60) и приравнявая производную к нулю, находим

$$f_{\eta}(m_*) A_{\xi}^* = f_{\xi}(m_*) A_{\eta}^*. \quad (61)$$

В уравнении (61)

$$A_{\xi}^* = 1 - F_{\xi}(m_*); \quad A_{\eta}^* = F_{\eta}(m_*). \quad (62)$$

Для реальных распределений  $f'_{\eta}(m_*) > 0$ ,  $f'_{\xi}(m_*) < 0$  и условие (61) дает максимум выражения (60).

Тогда в соответствии с неравенством (59)

$$P_{\text{разр}} > A_{\xi}^* A_{\eta}^*.$$

Значение  $m_*$  из уравнения (61) в практических задачах мало отличается от абсциссы  $m_k$  точки К пересечения кривых (рис. 19).

Верхняя граница для вероятности разрушения при условии независимости распределений в соответствии с неравенством (59)

$$P_{\text{разр}} < 1 - P(\eta > m, \xi < m) = 1 - P(\eta > m) P(\xi < m) = \\ = 1 - [1 - F_{\eta}(m)] F_{\xi}(m) = 1 - (1 - A_{\eta})(1 - A_{\xi}) = A_{\xi} + A_{\eta} - A_{\xi} A_{\eta}. \quad (63)$$

Практически следует проводить расчеты для различных  $m$  и находить наибольшее значение нижней и наименьшее верхней оценок.

Учитывая неизбежную условность определения вероятности разрушения, Н. С. Стрелецкий предложил принять нижнюю оценку в качестве расчетного значения вероятности разрушения:

$$P_{\text{разр}} = A_{\xi} A_{\eta}, \quad (64)$$

причем значения  $A_{\xi}$  и  $A_{\eta}$  соответствуют условию (см. рис. 19)

$$f_{\eta} = f_{\xi}. \quad (65)$$

Рассмотрим использование равенства (64) при нормальном законе распределения параметров  $\xi$  и  $\eta$ .

Из условия (65) следует, что  $m = m_{*} \approx m_{*}$ , т. е.

$$f_{\eta}(m_{*}) \approx f_{\xi}(m_{*}).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{S_{\xi}} e^{-\frac{(m_{*} - \bar{\xi})^2}{2S_{\xi}^2}} = \frac{1}{S_{\eta}} e^{-\frac{(m_{*} - \bar{\eta})^2}{2S_{\eta}^2}},$$

что дает после логарифмирования

$$\frac{(m_{*} - \bar{\xi})^2}{S_{\xi}^2} - \frac{(m_{*} - \bar{\eta})^2}{S_{\eta}^2} + 2 \ln \frac{S_{\xi}}{S_{\eta}} = 0 \quad (66)$$

или

$$m_{*} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}, \quad (67)$$

где

$$a = \frac{1}{S_{\xi}^2} - \frac{1}{S_{\eta}^2}; \\ b = 2 \left( \frac{\bar{\eta}}{S_{\eta}^2} - \frac{\bar{\xi}}{S_{\xi}^2} \right); \\ c = \frac{\bar{\xi}^2}{S_{\xi}^2} - \frac{\bar{\eta}^2}{S_{\eta}^2} + 2 \ln \frac{S_{\xi}}{S_{\eta}}.$$

В формуле (66) используется наименьший положительный корень. При  $S_{\xi} = S_{\eta}$

$$m_* = \frac{\bar{\xi} + \bar{\eta}}{2}.$$

Как уже указывалось, формула (64) приводит к заниженному значению вероятности разрушения.

Следует, однако, учесть, что при использовании обычных распределений (например, нормальных) плотность распределения при больших отклонениях от среднего значения получается завышенной по сравнению с реально наблюдаемыми отклонениями.

Возможно, что нижняя граница в этих случаях более близка к реальной величине вероятности разрушения, что оправдывает применение формулы (64) для сравнительных расчетов.

Рассмотрим в качестве примера определение вероятности разрушения лопатки газовой турбины при нормальном законе распределения переменных напряжений и пределов выносливости.

Пусть на основании тензометрирования установлено среднее значение переменных напряжений  $\bar{\xi} = 100$  МПа и среднее квадратическое отклонение  $S_{\xi} = 20$  МПа. С помощью испытания партий лопаток на усталость определено среднее значение предела выносливости  $\bar{\eta} = 200$  МПа и среднее квадратическое отклонение  $S_{\eta} = 30$  МПа. С помощью равенств (42) и (43), считая величины  $\xi$  и  $\eta$  независимыми, находим

$$\bar{\zeta} = \bar{\eta} - \bar{\xi} = 200 - 100 = 100 \text{ МПа};$$

$$S_{\zeta} = \sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2} = \sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36 \text{ МПа}.$$

Вероятность разрушения согласно формуле (47)

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{100}{36}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(2,78).$$

По таблицам находим  $\Phi(2,78) = 0,49728$  и

$$P_{\text{разр}} = 0,5 - 0,49728 = 0,272 \cdot 10^{-2}.$$

По формуле (50), сохраняя три члена ряда,

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2,78 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2,78^2}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2,78^2} + 3 \frac{1}{2,78^4} \right) = 0,277 \cdot 10^2.$$

При использовании приближенного метода решается уравнение (66), которое дает положительный корень  $m_* = 142,5$  МПа.

Далее находим по зависимостям (62)

$$A_{\xi} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{142,5 - 100}{20}\right) = 0,17 \cdot 10^{-1};$$

$$A_{\eta} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{200 - 142,5}{30}\right) = 0,28 \cdot 10^{-1}.$$

В соответствии с формулой (64)

$$P_{\text{разр}} = A_{\xi} A_{\eta} = 0,17 \cdot 10^{-1} \cdot 0,28 \cdot 10^{-1} = 0,048 \cdot 10^{-2},$$

что существенно ниже полученного выше значения.

Укажем, что верхняя оценка для вероятности разрушения по равенству (63)

$$P_{\text{разр}} = 0,17 \cdot 10^{-1} + 0,28 \cdot 10^{-1} - 0,17 \cdot 0,28 \cdot 10^{-2} = 0,4 \cdot 10^{-1}$$

оказывается весьма грубой.

### 2.1.6. ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ РАСЧЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ

Разберем этот вопрос для наиболее простого случая, когда условие разрушения выражается соотношением (37), а статистическое распределение факторов напряженности  $\xi$  и прочности  $\eta$  считается независимым.

Предыдущие результаты относились к генеральной совокупности случайных параметров прочности и напряженности. Например, при вычислении вероятности разрушения по формуле (47) предполагается, что параметры распределения  $\zeta$  и  $S$  имеют точные значения.

В действительности эти величины определяются по данным выборки ограниченного объема, и возникает вопрос о достоверности расчетных значений вероятности разрушения.

Если имеется функция двух независимых параметров  $F(\alpha_1, \alpha_2)$  и на основании выборочных данных получены оценки параметров  $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}$ , то при весьма широких предположениях среднее значение и среднее квадратическое отклонение

$$\langle F \rangle = F(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) + 0(1/n); \quad (68)$$

$$\sigma[F] = \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \right)^2 \sigma^2[\alpha_1] + \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \right)^2 \sigma^2[\alpha_2] \right\}^{1/2} + 0(1/n^{3/2}), \quad (69)$$

где  $n$  — объем выборки;

$0(1/n)$  и  $0(1/n^{3/2})$  — малые величины порядка  $1/n$  и  $1/n^{3/2}$ .

В равенстве (69) значения производных и среднеквадратических отклонений принимаются при  $\alpha_1 = \alpha_{1n}, \alpha_2 = \alpha_{2n}$ . Интер-

вальная оценка для функции  $\hat{F}(\alpha_1, \alpha_2)$  с достоверной вероятностью  $P_\partial$

$$F(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) - U_{p_\partial} \sigma[F] < F(\alpha_1, \alpha_2) < F(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) + U_{p_\partial} \sigma[F], \quad (70)$$

где  $U_{p_\partial}$  — квантиль нормального распределения с вероятностью  $P_\partial$  (см. формулу (12)).

В соответствии с равенствами (47) и (68) среднее значение вероятности разрушения

$$\langle P_{\text{разр}} \rangle = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\xi}_n}{S_{\xi n}}\right). \quad (71)$$

В выражении (71) величины

$$\bar{\xi}_n = \bar{\eta}_{n1} - \bar{\xi}_{n2}; \quad S_{\xi n} = \sqrt{S_{\eta n1}^2 + S_{\xi n2}^2} \quad (72)$$

являются средним значением и средним квадратическим отклонением по данным выборки. В формулах (71) и (72)  $\bar{\eta}_{n1}$ ,  $\bar{\xi}_{n2}$  — средние значения фактора прочности и фактора напряженности для выборок из числа  $n_1$  и  $n_2$  соответственно, а

$$S_{\eta n1} = \left[ \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\eta_i - \bar{\eta}_{n1})^2 \right]^{1/2};$$

$$S_{\xi n2} = \left[ \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (\xi_i - \bar{\xi}_{n2})^2 \right]^{1/2} -$$

средние квадратические отклонения для соответствующих выборок.

Величина  $P_{\text{разр}}$ , определяемая по данным выборки, является случайной в связи со случайным характером самих выборочных данных.

На основании (70) можно установить следующую оценку верхнего значения вероятности разрушения с доверительной вероятностью  $P_\partial$ :

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\xi}_n}{S_{\xi n}}\right) + U_{p_\partial} \sqrt{D\left[\Phi\left(\frac{\bar{\xi}_n}{S_{\xi n}}\right)\right]}. \quad (73)$$

Дисперсия функции Лапласа как функции случайных величин в связи с рассеянием выборочных характеристик определяется по соотношению (69)

$$D\left[\Phi\left(\frac{\bar{\xi}_n}{S_{\xi n}}\right)\right] = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\eta}_{n1}}\right)^2 D[\bar{\eta}_{n1}] + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\xi}_{n2}}\right)^2 D[\bar{\xi}_{n2}] +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial S_{\eta n1}}\right)^2 D[S_{\eta n1}] + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial S_{\xi n2}}\right)^2 D[S_{\xi n2}]. \quad (74)$$



Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\eta}_{n1}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{n1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\bar{\eta}_{n1} - \bar{\xi}_{n2})/S_{\zeta n}} e^{-U^2/2} dU = \\ &= \frac{1}{S_{\zeta n} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (\bar{\xi}_{n2}/S_{\zeta n})^2}; \end{aligned}$$

$$D[\bar{\eta}_{n1}] = S_{\eta}^2/n_1; \quad D[S_{\eta n1}] = S_{\eta}^2 n_1/2 n_1;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial S_{\eta n1}} &= \frac{\partial}{\partial S_{\eta n1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\bar{\zeta}_n / \sqrt{S_{\eta n1}^2 + S_{\xi n2}^2}} e^{-U^2/2} dU = \\ &= \frac{\bar{\zeta}_n}{S_{\zeta n}^2} \frac{S_{\eta n1}}{S_{\zeta n} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (\bar{\zeta}_n/S_{\zeta n})^2} \end{aligned}$$

и аналогично для других членов равенства (74).

После преобразования находим

$$\begin{aligned} \sigma[P_{\text{разр}}] &= \sqrt{D\left[\Phi\left(\frac{\bar{\zeta}_n}{S_{\zeta n}}\right)\right]} = \frac{e^{-1/2 v_{\zeta n}^2}}{S_{\zeta n} \sqrt{2\pi}} \left[ \frac{S_{\eta n1}^2}{n_1} + \frac{S_{\xi n2}^2}{n_2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2 S_{\zeta n}^2 v_{\zeta n}^2} \left( \frac{S_{\eta n1}^4}{n_1} + \frac{S_{\xi n2}^4}{n_2} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (75)$$

где  $v_{\zeta n} = S_{\zeta n}/\bar{\zeta}_n$  — коэффициент вариации функции неразрушения по данным выборки.

Проиллюстрируем полученные результаты на следующем примере.

Пусть требуется определить вероятность статического разрушения лопатки газовой турбины через 2000 ч работы. По результатам испытаний тридцати изделий определено среднее значение напряжений в опасной точке  $\bar{\xi} = 160$  МПа и  $S_{\xi} = 10$  МПа. Согласно результатам испытаний пятидесяти образцов предел прочности материала лопатки при времени работы 2000 ч составляет  $\bar{\eta} = 250$  МПа и среднее квадратическое отклонение  $S_{\eta} = 20$  МПа. Доверительная вероятность оценки вероятности разрушения  $P_d = 0,95$ .

Находим

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_n &= \bar{\eta}_{n1} - \bar{\xi}_{n2} = 250 - 160 = 90 \text{ МПа}; \\ S_{\zeta n} &= \sqrt{S_{\eta n1}^2 + S_{\xi n2}^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,4 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$v_{\zeta n} = S_{\zeta n} / \bar{\zeta}_n = 22,4/90 = 0,2485;$$

$$1/v_{\zeta n} = 4,025.$$

Среднее значение вероятности разрушения

$$\langle P_{\text{разр}} \rangle = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{\zeta}_n}{S_{\zeta n}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(4,025) = 0,285 \cdot 10^{-4}.$$

Среднее квадратическое отклонение вероятности разрушения по формуле (75)

$$\sigma[P_{\text{разр}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-4,025^2/2}}{\sqrt{500}} \left[ \frac{20^2}{50} + \frac{10^2}{30} + \frac{4,025^2}{2 \cdot 500} \left( \frac{20^4}{50} + \frac{10^4}{30} \right) \right]^{1/2} = 0,447 \cdot 10^{-4}.$$

Согласно данным на с. 17  $P_{\theta} = 0,95$  соответствует  $U_{P_{\theta}} = 1,96$ . Тогда по равенству (73) находим оценку верхнего значения вероятности разрушения

$$P_{\text{разр}} = 0,285 \cdot 10^{-4} + 1,96 \cdot 0,447 \cdot 10^{-4} = 1,162 \cdot 10^{-4}.$$

Как видно из приведенного примера, при выборке из тридцати — пятидесяти изделий расчет по средним величинам нуждается в существенной поправке.

Теперь перейдем к рассмотрению вопроса о рассеянии вероятности разрушения как функции параметров распределения случайной величины  $\zeta$  в более общей форме.

Предположим для простоты, что объем выборок для параметров прочности и напряженности одинаков, т. е.  $n_1 = n_2 = n$ .

Из равенства (75) следует, что

$$\sigma[P_{\text{разр}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 v_{\zeta n}^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{\theta}{2 v_{\zeta n}^2}}, \quad (76)$$

где  $0,5 < \theta < 1$ .

Используя приближенное равенство (50), находим среднее значение вероятности разрушения

$$\langle P_{\text{разр}} \rangle = \bar{P}_{\text{разр}} = \frac{v_{\zeta n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 v_{\zeta n}^2} (1 - v_{\zeta n}^2 + \dots). \quad (77)$$

Приближенная верхняя оценка вероятности разрушения согласно (70)

$$P_{\text{разр max}} = \bar{P}_{\text{разр}} (1 + U_{P_{\theta}} v_{\text{разр}}),$$

где коэффициент вариации вероятности разрушения

$$v_{\text{разр}} = \frac{\sigma[P_{\text{разр}}]}{\bar{P}_{\text{разр}}}.$$

С помощью соотношений (76) и (77) получаем

$$v_{\text{разр}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\theta}{2 v_{c_n}^2}}}{v_{c_n}(1 - v_{c_n}^2) \sqrt{n}}.$$

Учитывая, что в практических задачах величина  $V_{c_n}$  является малой, находим

$$v_{\text{разр}} \approx \frac{\sqrt{\theta}}{v_{c_n}^2 \sqrt{2\pi}}.$$

Из этого соотношения вытекает, что коэффициент вариации вероятности разрушения увеличивается при уменьшении коэффициента вариации функции неразрушения. Это связано с тем, что при уменьшении  $v_{c_n}$  величина  $P_{\text{разр}}$  уменьшается сильнее, чем величина  $\sigma[P_{\text{разр}}]$ .

Для того, чтобы расчет по средним значениям был достаточно точен, выборка должна включать порядка тысячи изделий.

### 2.1.7. ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕНИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ

Как уже указывалось, параметры напряженности  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и параметры прочности  $\eta_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) зависят от времени, и значения вероятности разрушения относятся к определенной наработке. Ограничимся рассмотрением простейшего условия разрушения (37).

Для статического разрушения в условиях воздействия высоких температур необходимо знать изменение действующего напряжения во времени

$$\sigma(t) = \sigma_0 f(t). \quad (78)$$

Например, для лопатки турбины функция  $f(t)$  определяется по времени работы на различных режимах.

В условие разрушения вносится эквивалентное напряжение  $\xi = \sigma_{\text{эkv}}(t)$ , которое определим на основе линейного суммирования повреждений (см. § 1.3.2):

$$\int_0^t \frac{d\tau}{t_*[\sigma(\tau)]} = \frac{1}{k^m} = \frac{\sigma_{\text{эkv}}^m(t)}{\sigma_{\text{лт}}^m}, \quad (79)$$

где  $t_*[\sigma(\tau)] = t_*$  — время до разрушения при действии напряжения  $\sigma$  (рассматривается среднее время до разрушения).

Для этого воспользуемся зависимостью предела длительной прочности от времени в виде

$$\sigma_{дл}^m t = C(T), \quad (80)$$

где  $\sigma_{дл} = \sigma_{дл, t}$  — напряжение, которое вызывает разрушение за время нагружения  $t$  при температуре  $T$ ;

$C(T)$  — постоянная материала, зависящая от температуры  $T$ .

Из уравнения (80) следует, что

$$\sigma_{дл}^m t = \sigma^m t_*. \quad (81)$$

Теперь из соотношений (79) и (81)

$$\sigma_{э.кв.}(t) = \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \sigma^m(\tau) d\tau \right]^{1/m},$$

чему соответствует с учетом выражения (78)

$$\xi = \sigma_{э.кв.}(t) = \left[ \frac{1}{t} \int_0^t f^m(\tau) d\tau \right]^{1/m} \sigma_0. \quad (82)$$

Условие (82) применимо при работе на различных уровнях напряжений, но при одной температуре.

Если температура  $T$  сама является функцией времени, то сделаем приведение к одному режиму с температурой  $T_1$  и длительностью  $t$ .

Тогда получим

$$\xi = \sigma_{э.кв.}(t) = \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{\psi(\tau, t)} f^m(\tau) d\tau \right]^{1/m} \sigma_0.$$

Здесь

$$\psi(\tau, t) = \frac{\sigma_{дл}^m[t, T(\tau)]}{\sigma_{дл}^m(t, T_1)},$$

где показатель  $m = m[T(\tau)]$  в формуле (80) зависит от температуры в данный момент нагружения, а величина  $\sigma_{дл}[t, T(\tau)]$  представляет собой предел длительной прочности за время  $t$  и при температуре  $T$ , соответствующей данному моменту нагружения.

Для усталостных разрушений при линейном суммировании повреждений время заменяется числом циклов  $N$ , и тогда

$$\xi = \sigma_{э.кв.}(N) = \left[ \frac{1}{N} \int_0^N \sigma^m(n) dn \right]^{1/m},$$

где  $m$  — показатель степени для зависимости пределов выносливости от числа циклов согласно формуле (3).

Величина  $\eta$  в условии разрушения (37) представляет собой значение предела длительной прочности за время  $t$  при температуре приведения  $T_1$

$$\eta = \sigma_{дл}(t, T_1) -$$

для статического разрушения и предела выносливости при числе циклов  $N$

$$\eta = \sigma_{-1N} -$$

для усталостных разрушений.

### 2.1.8. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ

Статистическая модель разрушения в виде условия (37)

$$\zeta = \eta - \xi < 0$$

относилось к одной опасной точке элемента конструкции. Однако в некоторых случаях в элементе имеется несколько опасных точек (или опасных сечений). Например, в лопатке турбины опасными могут быть разрушения в профильной или замковой части.

В этом случае статистическая модель разрушения описывается двумерной случайной величиной

$$\zeta(\zeta_1, \zeta_2),$$

где  $\zeta_1 = \eta_1 - \xi_1$ ,  $\zeta_2 = \eta_2 - \xi_2$ .

Разрушение наступает, если какой-либо из компонентов вектора ( $\zeta_1$  или  $\zeta_2$ ) становится отрицательным.

При определении вероятности разрушения следует учитывать корреляцию между этими компонентами. Необходимость изучения многомерного условия разрушения возникает в тех случаях, когда опасность разрушения в нескольких точках одинаково вероятна (близкие значения запасов прочности) и при слабой корреляции условий разрушения. В большинстве случаев оказывается достаточным статистический анализ одномерных условий разрушения в различных элементах конструкции.

*Вероятность разрушения как характеристика прочностной надежности правильно отражает качественные особенности задачи: согласно зависимостям (47), (56) и (64) она возрастает при уменьшении запаса прочности и увеличении рассеяния нагрузок и механических свойств материала.*

*Однако ее использование как нормативной характеристики для отказов (разрушений) турбомашин с тяжелыми последствиями встречает ряд возражений.*

1. Значение вероятности разрушения зависит от «хвостов» распределений, которые даже по выборкам большого объема ( $n > 100$ ) определяются весьма неточно (погрешность может составлять несколько порядков). Следовательно, расчетная вероятность разрушения носит условный характер. Реальный смысл имеет только сопоставление вероятности разрушений элементов выполненных и вновь проектируемых конструкций. Такие сравнительные расчеты должны проводиться по единой методике, чтобы исключить влияние способа расчета.

2. При расчете допускается возможность аварии (катастрофы), что создает затруднения психологического характера.

Рассмотренная статистическая модель по схеме «прочность — нагрузка» вполне оправдана для отказов с ограниченными последствиями, для которых допускается  $P_{\text{разр}} > 1 \cdot 10^{-3}$ . Допустимые значения вероятности отказа с ограниченными последствиями значительно больше, чем для катастрофических отказов, и точность расчета существенно возрастает.

В качестве нормативных характеристик для прочностных отказов, особенно с тяжелыми последствиями, более обосновано применение статистических запасов прочности, которые рассмотрены ниже.

## 2.2. ЗАПАСЫ ПРОЧНОСТИ

*Необходимый уровень прочностной надежности деталей двигателей достигается с помощью выбора надлежащих запасов прочности.*

При определении запасов прочности детали анализируются условия ее работы, выбирается расчетная схема, определяются действующие нагрузки, оценивается конструкционная прочность, сравниваются полученные результаты с нормами прочности [3].

### 2.2.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ЗАПАС ПРОЧНОСТИ

Прочностная надежность деталей машин иногда оценивается сопоставлением наибольших напряжений в опасной точке  $\sigma_{\text{max}}$  с допускаемыми  $[\sigma]$ . Условие прочности в этом случае

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma].$$

Такая оценка удобна, если разработана система допускаемых напряжений для однотипных конструкций, изготавливаемых по устоявшейся технологии

производства и эксплуатирующихся в стабильных условиях нагружения.

Но величина  $[\sigma]$  не дает представления о степени надежности в явном виде, так как для этого нужно знать предельные напряжения  $\sigma_{\text{пред}}$ , которые вызывают разрушение детали. Величина  $[\sigma]$  носит условный характер, она не отражает типа предполагаемого разрушения (статическое, усталостное и т. п.) и режима нагружения, сильно зависит от геометрии детали, концентрации напряжений, материала и технологии изготовления.

Следовательно, допускаемые напряжения целесообразно использовать в качестве нормативной характеристики.

Поэтому наибольшее распространение получило условие прочностной надежности по запасам прочности

$$k_{\sigma} = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\text{max}} \geq k_{\text{min}}, \quad (83)$$

где  $k_{\text{min}}$  — минимальное допускаемое нормами прочности значение запаса прочности.

Условия прочности по допускаемым напряжениям и запасам прочности связаны соотношением

$$k_{\text{min}} = \sigma_{\text{пред}} / [\sigma].$$

Практика показала, что значение  $k_{\text{min}}$  стабильно для данной детали, тогда как  $\sigma_{\text{пред}}$  и, следовательно,  $[\sigma]$  существенно зависят от применяемого материала, геометрии, качества заготовки и обработки, условий нагружения и т. д.

В качестве  $\sigma_{\text{пред}}$  принимаются различные величины в зависимости от условий работы рассчитываемой детали.

При действии нормальных температур статическая прочность обычных конструкционных материалов (сталей, титана, легких сплавов и др.) практически не зависит от времени, поэтому в качестве  $\sigma_{\text{пред}}$  принимается предел прочности материала  $\sigma_b$ .

При воздействии высоких температур на горячие детали двигателя в течение длительного времени (рабочие лопатки и диски турбины, корпуса и оболочки, валы, опоры) прочность материала падает, разрушающее напряжение в этом случае принимается равным пределу длительной прочности

$$\sigma_{b,t}^T = \sigma_{дл}.$$

Надежная работа деталей горячей части двигателя (лопаток и дисков турбины и последних ступеней компрессора, диафрагм сопловых и направляющих аппаратов, болтовых соединений и др.) обусловлена возможностью допустимых перемещений и

деформаций при отсутствии, например, касания роторных деталей о статорные. В этом случае используется предел ползучести  $\sigma_{\varepsilon/t}^T$ , определяемый напряжением, которое вызывает величину остаточной деформации  $\varepsilon\%$  за установленный ресурс  $t$  при температуре  $T$ . При  $\varepsilon = 0,2\%$  получаем условный предел ползучести  $\sigma_{0,2/t}^T$ .

В практике двигателестроения наряду с запасом прочности по напряжениям (83) используют и другие запасы прочности. Рассмотрим некоторые из них.

Запас по долговечности или числу циклов

$$k_t = t_{p \min} / t_{\max};$$

$$k_N = N_{p \min} / N_{\max},$$

где  $t_{p \min}$  и  $N_{p \min}$  — минимальные значения времени и числа циклов до разрушения;

$t_{\max}$  и  $N_{\max}$  — максимальные длительность и число циклов нагружения.

Запас по долговечности или числу циклов в соответствии с уравнением (33) существенно больше запаса прочности по напряжениям

$$k_N = k_\sigma^m,$$

где  $m = 4 \dots 20$  — показатель степени в уравнениях усталости (3) или длительной прочности (80).

Запас по силовому фактору

$$k_\omega = \omega_{p \min} / \omega_{\max};$$

$$k_p = p_{p \min} / p_{\max};$$

$$k_T = T_{p \min} / T_{\max},$$

где  $\omega_{p \min}$ ,  $p_{p \min}$ ,  $T_{p \min}$  — минимальные значения приводящих к разрушению параметров нагружения (частоты вращения, давления или внешнего усилия, температуры);

$\omega_{\max}$ ,  $p_{\max}$ ,  $T_{\max}$  — наибольшие значения указанных параметров в рабочих условиях.

Запас усталостной прочности

$$k = \frac{\sigma_{-1N}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon^\beta} \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_m}, \quad (84)$$

где  $\sigma_{-1N}$  — предел выносливости на базе  $N$  циклов;

$\sigma_a$  и  $\sigma_m$  — переменные и постоянные напряжения в опасной точке детали в рабочих условиях;



$K_{\sigma}$  — коэффициент концентрации напряжений;  
 $\varepsilon$  — коэффициент влияния масштабного фактора;  
 $\beta$  — коэффициент поверхностных слоев;  
 $\psi_{\sigma}$  — коэффициент влияния постоянных напряжений  
 (обычно  $\psi_{\sigma} = 0,1 \dots 0,3$ ).

Запас прочности (84) называется запасом усталостной прочности по подобному циклу [8]. Но не всегда наблюдается пропорциональное возрастание переменных и постоянных напряжений. Например, в лопатках и дисках турбин и компрессоров постоянные напряжения пропорциональны квадрату частоты вращения, а переменные напряжения существенно возрастают лишь на резонансных режимах работы. В таких случаях определяется запас по переменным напряжениям

$$k_a = \frac{\sigma_{-1\partial} - \psi_{\sigma\partial} \sigma_m}{\sigma_a},$$

где  $\sigma_{-1\partial} = \varepsilon \beta \sigma_{-1} / K_{\sigma}$  — предел выносливости детали;

$\psi_{\sigma\partial} = \varepsilon \beta \psi_{\sigma} / K_{\sigma}$  — коэффициент влияния постоянных напряжений детали.

Минимальные значения параметров при разрушении принимаются на основании технических условий на материал и деталь, справочных сведений и результатов экспериментов. Наибольшие значения действующего параметра (напряжения, давления, температуры, деформации и т. п.) определяются для наиболее тяжелого режима. *Так как запасы прочности служат основными критериями прочностной надежности деталей двигателя, то условия их определения строго оговариваются нормативно-технической документацией.*

Детерминированный запас прочности не связан с количественной оценкой достоверности разрушающего (критического) и действующего значений соответствующего параметра.

В последнее время определяется и статистический запас прочности, при вычислении которого приближенно оценивается достоверность принятых значений предельного (разрушающего) и действующего параметров.

Ограничимся рассмотрением простого случая, когда запас прочности определяется как отношение параметров прочности и напряжений.

### 2.2.2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ЗАПАС ПРОЧНОСТИ

Обычно запас прочности определяется по формуле (83), в которой предельные (разрушающие) и действующие напряжения подвержены статистическому рассеянию, так как зависят от многих конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов. Тогда, применяя прежние обозначения, можно

рассматривать запас прочности конкретной детали

$$k = \eta/\xi,$$

как случайную величину.

Если  $F(k)$  — функция распределения запасов прочности, то величина запаса прочности  $k(q)$ , соответствующая уровню значимости  $q$ , удовлетворяет условию

$$F[k(q)] = P[K < k(q)] = q. \quad (85)$$

Параметры функции распределения «восстанавливаются» по выборкам ограниченного объема с определенной доверительной вероятностью  $P_d$ , поэтому величина запаса прочности зависит не только от уровня значимости  $q$ , но и от величины  $P_d$ :

$$k = k(q, P_d). \quad (86)$$

Например, запись

$$k(q, P_d) = k(0,01; 0,95) = 2$$

означает, что только у 1% всех деталей запас прочности может сказаться менее 2, причем это утверждение справедливо, по крайней мере, для 95% случаев испытаний (т. е. с доверительной вероятностью 0,95).

Математический смысл равенства (86) в том, что «вероятность вероятности»

$$P\{P[K < k(q, P_d)] = q\} = P_d.$$

*Статистический запас прочности сохраняет свое условное значение как критерий сравнения по надежности вновь создаваемых и успешно работающих изделий. Его основное преимущество по сравнению с обычным (детерминированным) запасом состоит в том, что сопоставление приводится к более однородным условиям в смысле объема используемой информации относительно рассеяния механических свойств материалов и действующих напряжений.*

Рассмотрим простой, но практически важный случай, когда величины  $\eta$  и  $\xi$  распределены по логарифмически нормальному закону, для которого математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение

$$\overline{\lg k} = \overline{\lg \eta} - \overline{\lg \xi}; \quad S_{\lg k} = \sqrt{S_{\lg \eta}^2 + S_{\lg \xi}^2}.$$

Допустим, что параметры распределения определены на основании достаточно большой выборки (генеральной совокупности).

Тогда согласно условию (85)

$$F[\lg k(q, 1)] = \frac{1}{2} - \Phi \left[ \frac{\overline{\lg k} - \lg k(q, 1)}{S_{\lg k}} \right] = q;$$

$$\lg k(q, 1) = \overline{\lg k} - U_{1-q} S_{\lg k},$$

где  $U_{1-q}$  — квантиль нормального распределения вероятности  $P_{\partial} = 1 - q$ .

### 2.2.3. ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАПАСОВ ПРОЧНОСТИ

Продолжим рассмотрение случая, когда параметры прочности и напряженности распределены по логарифмически нормальному закону. Пусть имеется выборка с числом изделий  $n_1$  при определении параметра прочности  $\eta$  и  $n_2$  — для параметра напряженности  $\xi$ .

Если параметры распределения установлены по данным выборок с использованием соотношений (13) и (14), например,

$$\overline{\lg \eta_{n_1}} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \lg \eta_i;$$

$$S_{\lg \eta_{n_1}} = \left[ \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\lg \eta_i - \overline{\lg \eta_{n_1}})^2 \right]^{1/2},$$

то следует учесть их возможные (неблагоприятные) отклонения от параметров генеральной совокупности.

Тогда

$$\overline{\lg \eta} = \overline{\lg \eta_{n_1}} - t(n_1, P_{\partial}^*) \frac{S_{\lg \eta_{n_1}}}{\sqrt{n_1}};$$

$$\overline{\lg \xi} = \overline{\lg \xi_{n_2}} + t(n_2, P_{\partial}^*) \frac{S_{\lg \xi_{n_2}}}{\sqrt{n_2}},$$

где  $t(n_1, P_{\partial}^*)$  и  $t(n_2, P_{\partial}^*)$  — коэффициенты Стьюдента, соответствующие выборкам с объемом  $n_1$  и  $n_2$  для односторонней оценки с доверительной вероятностью  $P_{\partial}^*$ .

Доверительная вероятность односторонней оценки  $P_{\partial}^*$  выше обычно используемой в таблицах двухсторонней оценки  $P_{\partial\partial}$ :

$$P_{\partial}^* = 1 - 0,5(1 - P_{\partial\partial}) = 0,5(1 + P_{\partial\partial}).$$

С помощью распределения  $\chi^2$  можно оценить наибольшие значения средних квадратических отклонений

$$S_{\lg \eta} = \frac{\sqrt{n_1 - 1}}{\chi(n_1, P_{\partial}^*)} S_{\lg \eta_{n_1}};$$

$$S_{\lg \xi} = \frac{\sqrt{n_2 - 1}}{\chi(n_2, P_{\partial}^*)} S_{\lg \xi_{n_2}},$$

где  $\chi(n_1, P_{\partial}^*)$ ,  $\chi(n_2, P_{\partial}^*)$  — односторонние оценки в распределении  $\chi^2$ , соответствующие выборкам с объемами  $n_1$  и  $n_2$  и доверительной вероятности  $P_{\partial}^*$ .

Для статистического запаса прочности при уровне значимости  $q$  и доверительной вероятности  $P_\delta$  получаем

$$\begin{aligned} \lg k(q, P_\delta) = & \overline{\lg \eta_{n_1}} - \overline{\lg \xi_{n_2}} - t(n_1, P_\delta^*) \frac{S_{\lg \eta_{n_1}}}{\sqrt{n_1}} - t(n_2, P_\delta^*) \times \\ & \times \frac{S_{\lg \xi_{n_2}}}{\sqrt{n_2}} - U_{1-q} \left[ \frac{(n_1 - 1) S_{\lg \eta_{n_1}}^2}{\chi^2(n_1, P_\delta^*)} + \frac{(n_2 - 1) S_{\lg \xi_{n_2}}^2}{\chi^2(n_2, P_\delta^*)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (87)$$

Доверительная вероятность  $P_\delta$ , с которой осуществляется последнее равенство, очевидно, зависит от значений  $P_\delta^*$ .

Величина  $\lg k$  является функцией четырех случайных величин

$$\overline{\lg \eta_{n_1}}, \overline{\lg \xi_{n_2}}, S_{\lg \eta_{n_1}} \text{ и } S_{\lg \xi_{n_2}}.$$

Предполагая независимое распределение указанных величин, можно провести интегрирование плотности вероятности их совместного распределения и найти величину  $P_\delta$ . Однако практическая реализация такого метода вряд ли возможна, поэтому в расчетах можно принимать [8]

$$P_\delta \approx P_\delta^*.$$

Равенства вида (87) можно составить и для других законов распределения.

По соображениям, указанным ранее, не следует использовать  $q < 10^{-4}$  и  $P_\delta > 0,999$ , так как запас прочности применяется как сравнительная характеристика надежности.

Более близок к обычным (детерминистским) методам определения запаса прочности несколько иной подход.

Определим статистический запас прочности как отношение (рис. 21)

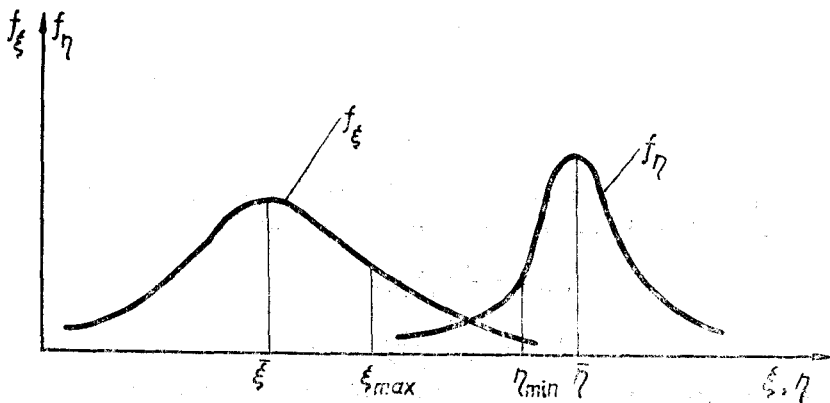


Рис. 21. К определению статистического запаса прочности

$$k = \frac{\bar{\eta}_{\min}(q_1, P_{\partial 1})}{\bar{\xi}_{\max}(q_2, P_{\partial 2})}, \quad (88)$$

где минимальное значение фактора прочности материала и максимальное значение фактора напряженности устанавливаются с нормированным уровнем значимости и доверительной вероятностью.

Такое определение обосновывается тем, что при современных методах экспериментального исследования характеристики прочности и напряженности устанавливаются на разных экземплярах детали.

Если для определения величин  $\eta$  и  $\xi$  использовались выборки объемом  $n_1$  и  $n_2$ , то равенство (88) можно представить в такой форме:

$$k = \frac{\bar{\eta}_{n_1} - k_1(n_1, q_1, P_{\partial 1}) S_{\eta n_1}}{\bar{\xi}_{n_2} + k_2(n_2, q_2, P_{\partial 2}) S_{\xi n_2}}, \quad (89)$$

где  $\bar{\eta}_{n_1}$ ,  $\bar{\xi}_{n_2}$  — средние значения выборок;

$S_{\eta n_1}$ ,  $S_{\xi n_2}$  — средние квадратические отклонения;

$k_i(n_i, q_i, P_{\partial i})$  — односторонние толерантные коэффициенты для выборки объемом  $n_i$  с уровнем значимости  $q_i$  и доверительной вероятностью  $P_{\partial i}$  ( $i = 1; 2$ ).

Для нормального распределения толерантные коэффициенты имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} k_i(n_i, q_i, P_{\partial i}) &= \frac{t(n_i, P_{\partial i}^*)}{\sqrt{n_i}} + \frac{U_{1-q_i} \sqrt{n_i - 1}}{\chi(n_i, P_{\partial i}^*)} = \\ &= \frac{t(n_i, P_{\partial i}^*)}{\sqrt{n_i}} + U_{1-q_i} k_{\sigma_{\max i}}(n_i, P_{\partial i}^*), \end{aligned} \quad (90)$$

где  $U_{1-q_i}$  — квантиль нормального распределения вероятности  $P_{\partial i} = 1 - q_i$ ;

$k_{\sigma_{\max i}}$  — коэффициент для оценки максимальной величины среднего квадратического отклонения (в соответствии с  $\chi^2$  — распределением).

Как уже указывалось, связь между величинами  $P_{\partial i}^*$  и  $P_{\partial i}$  может быть установлена с помощью анализа распределения случайной величины

$$\eta = \bar{\eta}_n + U_{1-q} S_{\eta n}.$$

Здесь для упрощения записи индекс  $i$  у  $n$  и  $q$  опущен.

Подобный анализ проводился для определения вероятности разрушения, но в рассматриваемом случае область изменения случайных величин  $\bar{\eta}_n$  и  $S_{\eta n}$  ограничена условиями

$$\bar{\eta}_n < \bar{\eta}_n^*; S_{\eta n} < S_{\eta n}^*$$

где  $\bar{\eta}_n^*$  и  $S_{\eta n}^*$  — значения, соответствующие доверительной вероятности  $P_\delta^*$ :

$$P(\bar{\eta}_n < \bar{\eta}_n^*) = P_\delta^*;$$

$$P(S_{\eta n} < S_{\eta n}^*) = P_\delta^*.$$

Укажем границы, связывающие величины  $P_\delta$  и  $P_\delta^*$ .

Вероятность условия

$$P(\eta < \eta^* = \bar{\eta}_n^* + U_{1-\gamma} S_{\eta n}^*) = P_\delta > P(\bar{\eta}_n < \bar{\eta}_n^*) \times P(S_{\eta n} < S_{\eta n}^*) = (P_\delta^*)^2, \quad (91)$$

так как могут быть случаи, когда  $\eta < \eta^*$  при  $S_{\eta n} > S_{\eta n}^*$ . Такие случаи возникают, если сильно отличаются средние значения

$$\bar{\eta}_n < < \bar{\eta}_n^* .$$

Точно так же для противоположного события

$$1 - P_\delta > [1 - P(\bar{\eta}_n < \bar{\eta}_n^*)] [1 - P(S_{\eta n} < S_{\eta n}^*)] = (1 - P_\delta^*)^2. \quad (92)$$

На основании условий (91) и (92) получаем

$$(P_\delta^*)^2 < P_\delta < 1 - (1 - P_\delta^*)^2.$$

Следовательно,

$$1 - \sqrt{1 - P_\delta} < P_\delta^* < \sqrt{P_\delta}.$$

Возвращаясь к индексу  $i = 1; 2$ , запишем

$$1 - \sqrt{1 - P_{\delta 1}} < P_{\delta 1}^* < \sqrt{P_{\delta 1}};$$

$$1 - \sqrt{1 - P_{\delta 2}} < P_{\delta 2}^* < \sqrt{P_{\delta 2}}.$$

Например, при  $P_\delta = 0,99$

$$0,900 < P_\delta^* < 0,995.$$

Уже отмечалось, что в практических расчетах можно принимать  $P_\delta^* \approx P_\delta$ . При этом значения толерантного коэффициента (90) получаются несколько завышенными, что в соответствии с формулой (89) дает заниженное значение статистического запаса прочности.

Для некоторых значений уровня значимости  $q$  и доверительной вероятности  $P_\delta$  толерантные коэффициенты для нормального распределения приведены в таблице на с. 63.

Выбор толерантных коэффициентов существенно сказывается на численном значении запасов прочности. В связи с этим

Толерантные коэффициенты для нормальных распределений

n	$P_0 = 0,95$			$P_0 = 0,99$		
	q			q		
	0,10	0,05	0,01	0,10	0,05	0,01
3	6,158	7,655	10,552			
4	4,163	5,145	7,042			
5	3,407	4,202	5,741			
6	3,006	3,707	5,062	4,08	5,409	7,334
7	2,755	3,399	4,641	3,856	4,736	6,411
8	2,582	3,188	4,353	3,496	4,287	5,811
9	2,454	3,031	4,143	3,242	3,971	5,389
10	2,355	2,911	3,981	3,048	3,739	5,075
11	2,275	2,815	3,852	2,897	3,557	4,828
12	2,210	2,736	3,747	2,773	3,410	4,633
13	2,155	2,670	3,659	2,677	3,290	4,472
14	2,108	2,614	3,585	2,592	3,189	4,336
15	2,068	2,566	3,520	2,521	3,102	4,224
16	2,032	2,523	3,463	2,458	3,028	4,124
17	2,001	2,486	3,415	2,405	2,962	4,038
18	1,974	2,453	3,370	2,357	2,906	3,961
19	1,949	2,423	3,331	2,315	2,855	3,893
20	1,926	2,396	3,295	2,275	2,807	3,832
21	1,905	2,371	3,262	2,241	2,768	3,776
22	1,887	2,350	3,233	2,208	2,729	3,727
23	1,869	2,329	3,206	2,179	2,693	3,680
24	1,853	2,309	3,181	2,154	2,663	3,638
25	1,838	2,292	3,158	2,129	2,632	3,601
30	1,778	2,220	3,064	2,029	2,516	3,446
35	1,732	2,166	2,994	1,957	2,431	3,334
40	1,697	2,126	2,941	1,902	2,365	3,250
45	1,669	2,092	2,897	1,857	2,313	3,181
50	1,646	2,065	2,863	1,821	2,296	3,124

сопоставляемые данные должны относиться к одинаковым значениям уровня значимости  $q$  и доверительной вероятности  $P_0$ .

На практике большие отклонения встречаются реже, чем их прогнозирует нормальное распределение. Это обстоятельство заставляет использовать усеченные нормальные распределения или переходить к другим распределениям. При применении для расчета нормального распределения целесообразно использо-

вать нижнюю оценку для толерантных коэффициентов, полагая

$$P_{\partial i}^* = 1 - \sqrt{1 - P_{\partial i}}.$$

При нормировании запасов прочности должен быть указан порядок определения толерантных коэффициентов.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть требуется определить запас прочности лопатки компрессора, для которой предел выносливости, полученный в шести испытаниях ( $n_1 = 6$ ), составил среднее значение  $\bar{\sigma}_{-1} = \bar{\eta}_{n_1} = 420$  МПа и среднее квадратическое отклонение  $S_{\eta_{n_1}} = 20$  МПа. Переменные напряжения, найденные при тензометрировании десяти лопаток ( $n_2 = 10$ ), дали среднее значение  $\bar{\sigma}_a = \bar{\xi}_{n_2} = 60$  МПа и среднее квадратическое отклонение  $S_{\xi_{n_2}} = 15$  МПа. Принимаются уровень значимости  $q_1 = q_2 = 0,01$  и доверительные вероятности  $P_{\partial 1} = P_{\partial 2} = 0,99$ .

Запас прочности определяем по формулам (88) и (89).

Минимальное значение предела выносливости

$$\eta_{\min} = \bar{\eta}_{n_1} - k_1(n_1, q_1, P_{\partial 1}) S_{\eta_{n_1}}.$$

Для  $n_1 = 6$ ,  $q = 0,01$  и  $P_{\partial} = 0,99$  по таблице на с. 63 находим

$$k_1(6; 0,01; 0,99) = 7,334.$$

Тогда

$$\eta_{\min} = 420 - 7,334 \cdot 20 = 273,3 \text{ МПа.}$$

Максимальное значение переменных напряжений

$$\xi_{\max} = \bar{\xi}_{n_2} + k_2(n_2, q_2, P_{\partial 2}) S_{\xi_{n_2}}.$$

Для  $n_2 = 10$ ,  $q = 0,01$  и  $P_{\partial 2} = 0,99$  по таблице на с. 63 получаем

$$k_2(10; 0,01; 0,99) = 5,075.$$

Тогда

$$\xi_{\max} = 60 + 5,075 \cdot 15 = 136 \text{ МПа.}$$

Запас усталостной прочности

$$k(0,01; 0,99) = \frac{273,3}{136} = 2,01.$$

#### 2.2.4. СВЯЗЬ ЗАПАСОВ ПРОЧНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ

На практике давно установлено, что бóльшим запасам прочности соответствует меньшая вероятность разрушения.

Рассмотренная ранее схема статистического распределения



параметров прочности и действующих напряжений позволяет установить количественную связь между указанными величинами.

Пусть параметр прочности  $\eta$  и параметр напряжений  $\xi$  являются независимыми случайными величинами. Тогда вероятность разрушения согласно равенству (49)

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{v_c}\right),$$

где коэффициент вариации функции неразрушения (48) в соответствии с уравнениями (42) и (43)

$$v_c = \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{S_\eta^2 + S_\xi^2}}{\bar{\eta} - \bar{\xi}}. \quad (93)$$

Здесь  $\gamma$  — гауссовская мера надежности.

Наиболее просто величина  $P_{\text{разр}}$  выражается через запас прочности по средним напряжениям

$$\bar{k} = \bar{\eta} / \bar{\xi}. \quad (94)$$

Заметим, что запас прочности по средним значениям  $\bar{k}$  существенно больше обычно применяемых запасов прочности  $k$ . Это следует из графической интерпретации формул (88) и (94), представленной на рис. 21, а также из равенств (89) и (94):

$$\frac{k}{\bar{k}} = \frac{1 - k_1 v_\eta}{1 + k_2 v_\xi} < 1,$$

где  $k_1, k_2$  — толерантные коэффициенты.

Практически применяемые запасы прочности обычно составляют

$$k = (0,5 \dots 0,8) \bar{k}.$$

Если ввести коэффициенты вариаций напряжений

$$v_\xi = S_\xi / \bar{\xi}$$

и пределов прочности

$$v_\eta = S_\eta / \bar{\eta},$$

то выражение (93) приводится к виду

$$\gamma = \frac{\bar{k} - 1}{\sqrt{\bar{k}^2 v_\eta^2 + v_\xi^2}}. \quad (95)$$

Следовательно,

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{k} - 1}{\sqrt{\bar{k}^2 v_\eta^2 + v_\xi^2}}\right) = 1 - \Phi(\gamma) \quad (96)$$

или в другой форме

$$P_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - F_0 \left( \frac{\bar{k} - 1}{\sqrt{k^2 v_{\eta}^2 + v_{\xi}^2}} \right).$$

Величина запаса прочности согласно выражению (96) при заданных значениях коэффициентов вариации параметров прочности и напряженности однозначно определяет вероятность разрушения.

Проиллюстрируем отмеченное следующим примером.

Определить вероятность разрушения лопаток, если по данным тензометрирования для переменных напряжений установлено  $\bar{\xi} = 100$  МПа,  $S_{\xi} = 20$  МПа, а по данным испытаний на вязность  $\bar{\eta} = 200$  МПа,  $S_{\eta} = 30$  МПа.

Гауссовская мера надежности по уравнению (93)

$$\gamma = \frac{\bar{\eta} - \bar{\xi}}{\sqrt{S_{\eta}^2 + S_{\xi}^2}} = \frac{200 - 100}{\sqrt{30^2 + 20^2}} = 2,78.$$

Вероятность разрушения по формуле (96) и таблице значений функции Лапласа

$$P_{\text{разр}} = 0,5 - \Phi(2,78) = 0,5 - 0,49728 = 0,27 \cdot 10^{-2}.$$

Зависимости вероятности разрушения от запаса прочности изображены на рис. 22. Так как  $k > 1$ , то согласно уравнению (95) на меру надежности и, следовательно, на вероятность разрушения разброс прочности  $\eta$  влияет сильнее, чем разброс нагрузки  $\xi$ . Поэтому необходимо предъявлять высокие требования к прочностным характеристикам конструкционных материалов и к их контролю. Из рис. 20 видно, что при увеличении запаса прочности  $k$  (при увеличении расстояния между пиками кривых) вероятность разрушения падает. К такому же результату приводит уменьшение разброса величин  $\eta$  и  $\xi$ , т. е. уменьшение их средних квадратических отклонений  $S_{\eta}$  и  $S_{\xi}$ . Кривые распределения при этом становятся «острее», площади  $A_{\eta}$  и  $A_{\xi}$  уменьшаются. Уменьшению разброса параметров прочности во многом способствует стабильность производства.

Строго говоря, формула (95) пригодна лишь для однократного дискретного нагружения. Используя схему независимых испытаний, ее можно распространить на случай дискретных многократных нагружений. С некоторыми оговорками формулу можно использовать при непрерывном нагружении, если под  $\eta$  понимать минимальное значение случайной функции  $\eta(t)$ , а под  $\xi$  — максимальное значение случайной функции  $\xi(t)$  за время эксплуатации  $t_3$ . Для случайных процессов с накоплением повреждений эта формула непригодна [5].

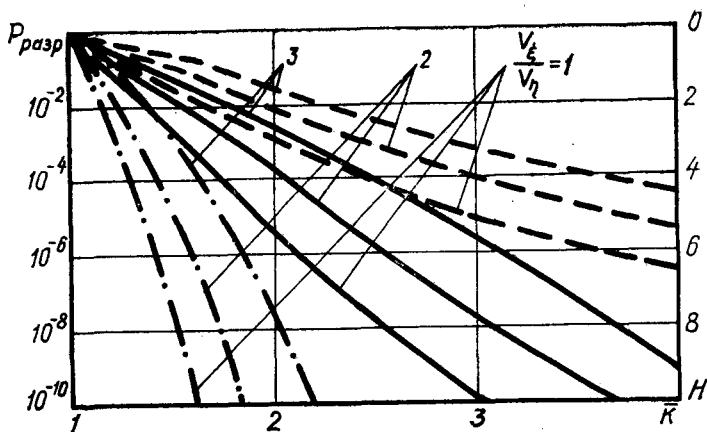


Рис. 22. Зависимость вероятности разрушения и коэффициента надежности от среднего запаса прочности при различных коэффициентах вариации факторов нагрузки и прочности:  
 - - -  $V_{\eta} = 0,05$ ; —  $V_{\eta} = 0,10$ ; - · - ·  $V_{\eta} = 0,15$

На этапе проектирования отсутствуют достоверные экспериментальные данные о величинах  $\eta$  и  $\xi$ . Поэтому запас прочности можно определить на основании расчетных величин по напряженности и справочных данных по несущей способности материала, приняв эти данные в качестве средних значений их функции распределения.

Коэффициент вариации прочностных свойств материала  $v_{\eta}$  для некоторых авиационных сплавов и сталей можно определить по справочнику [7].

Коэффициент вариации действующих напряжений  $v_{\xi}$  находится из разбросов нагрузок и геометрических размеров рассматриваемой детали.

Коэффициенты вариаций параметров прочности  $\eta$  и действующих напряжений  $\xi$  можно принять  $v_{\eta} = 0,1$ ;  $v_{\xi} = 0,2 \dots 0,3$  [4].

Определив меру надежности  $\gamma$  по формуле (95) и воспользовавшись табличными данными для функции Лапласа  $\Phi(\gamma)$ , можно рассчитать вероятность разрушения элемента по зависимости (96).

На этапе проектирования оценивается схемная надежность изделия и его систем и определяется уровень необходимой надежности элементов, обеспечиваемый соответствующими запасами прочности. При этом может возникнуть прямая или обратная задача: определить вероятность разрушения при заданном запасе прочности или при заданной вероятности разруше-

ния определить необходимый запас прочности [9]. Схемную надежность при решении этих задач следует рассматривать с позиций получения оптимальных решений, так как всегда имеются ограничения по массе, габаритам, конфигурации деталей и др. Основные правила применения методов оптимизации и программы приведены в методических указаниях [1], а пример оптимизации системы разгрузки опор роторов турбомашин от осевых усилий — в учебном пособии [2].

**Порядок определения вероятности разрушения при заданном запасе прочности следующий.**

1. Определяется средний запас прочности

$$\bar{k} = \bar{\eta} / \bar{\xi} = \sigma_{\text{пред ср}} / \sigma_{\text{max ср}}$$

в соответствии с методами расчетов, излагаемыми в курсе «Динамика и прочность ДЛА». Здесь принимается нормальный закон распределения предельных и действующих напряжений. Под предельными напряжениями понимаются пределы прочности, длительной прочности, ползучести или выносливости, а под действующими напряжениями — максимальные напряжения, соответствующие основной нагрузке и принимаемые равными среднему значению  $\sigma_{\text{max ср}}$ .

2. Принимаются коэффициенты вариации согласно приведенным выше рекомендациям. Например, можно приближенно принять

$$v_{\eta} = v_{\sigma_{\text{пред}}} = 0,1 \text{ и } v_{\xi} = v_{\sigma_{\text{max}}} = 0,3.$$

3. Вычисляется гауссовская мера надежности по формуле (95), которая для приближенных значений коэффициентов вариаций имеет вид

$$\gamma = \frac{\bar{k} - 1}{\sqrt{k^2 v_{\eta}^2 + v_{\xi}^2}} = \frac{10(\bar{k} - 1)}{\sqrt{\bar{k}^2 + 9}}.$$

4. Оценивается вероятность разрушения согласно уравнениям (96) и (50)

$$P_{\text{разр}} = 0,5 - \Phi(\gamma) \approx \frac{v_{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2v_{\xi}^2}} (1 - v_{\xi}^2 + 3v_{\xi}^4 - 15v_{\xi}^6 + \dots),$$

где  $v_{\xi} = 1/\gamma$  — вариация функции неразрушения.

На этапе доводки, когда имеются экспериментальные данные даже небольших выборок (6...20 точек), вероятность разрушения можно уточнить по формуле (73).

**Порядок определения требуемого запаса прочности при заданной вероятности разрушения следующих.**

1. Определяется функция Лапласа

$$\Phi(\gamma) = 0,5 - P_{\text{разр}}.$$

2. По таблицам для функции Лапласа находится мера надежности

$$\gamma = 1/v_{\xi}.$$

3. Принимаются коэффициенты вариации согласно приведенным выше рекомендациям. Можно принять

$$v_{\eta} = v_{\sigma \text{ пред}} = 0,1 \text{ и } v_{\xi} = v_{\sigma \text{ макс}} = 0,3.$$

4. Рассчитывается коэффициент запаса прочности согласно выражению (95), которое для приближенных значений коэффициентов вариации преобразуется к виду

$$\bar{k} = \frac{1 + \gamma \sqrt{0,1 - 0,0009 \gamma^2}}{1 - 0,01 \gamma^2}.$$

В задачах прочности отказ означает, как правило, либо разрушение, либо потерю несущей способности. Поэтому вероятность отказа

$$Q = P_{\text{разр}},$$

а наиболее удобной мерой надежности является вероятность безотказной работы (вероятность неразрушения)

$$P = 1 - Q = 1 - P_{\text{разр}}.$$

Для простоты эту меру иногда называют надежностью системы.

Прочностную надежность деталей турбомашин можно оценивать и в логарифмических единицах (беллах) с помощью коэффициента надежности

$$H = \lg \frac{1}{Q} = -\lg Q = -\lg(1 - P) = -\lg P_{\text{разр}}.$$

Значения  $H$  в зависимости от надежности системы  $P$  следующие:

$P$	0,9	0,99	0,999	0,9999
$H$	1	2	3	4

Для деталей и узлов двигателей летательных аппаратов  $P_{\text{разр}} < 0,1$  и, следовательно,  $H > 1$ .

Коэффициент надежности, соответствующий  $P_{\text{разр}} = 0,27 \cdot 10^{-2}$  (см. пример на с. 66),

$$N = -\lg(2,7 \cdot 10^{-3}) = 3 - \lg 2,7 = 2,57.$$

Связь коэффициента надежности с запасом прочности изображена на рис. 22.

В двигателях летательных аппаратов обычно принимается минимальный запас прочности 1,4...2,5 при статических нагрузках или нагрузках с небольшим числом циклов и 2...4 при переменных нагрузках. При конструировании деталей турбомашин определяющими являются конструктивные, технологические и эксплуатационные соображения. Поскольку к двигателям летательных аппаратов предъявляется требование всемерного уменьшения массы конструкции, то необходимо стремиться к обоснованному снижению запасов прочности. Для этого требуется уточнение расчетных схем, сведений о нагрузках, механических свойствах материалов и условиях работы. Поэтому коэффициенты запаса согласно нормам прочности дифференцируются в зависимости от нагрузок, назначения двигателя и других факторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов А. И., Иванов А. И. Методы оптимизации в проектировании двигателей летательных аппаратов: Методические указания к курсовому и дипломному проектированию. — Куйбышев: КуАИ, 1980. — 32 с.
2. Белоусов А. И., Иванов А. И. Расчет осевых сил, действующих в турбомашинах: Учебное пособие. — Куйбышев: КуАИ, 1981. — 84 с.
3. Белоусов А. И., Камынин В. А. Расчет на прочность дисков и крыльчаток турбомашин методом конечных разностей с помощью ЭВМ: Методические указания к дипломному и курсовому проектированию. — Куйбышев: КуАИ, 1982. — 32 с.
4. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1979. — 702 с.
5. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965. — 279 с.
6. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. — М.: Машиностроение, 1964. — 275 с.
7. Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и размеров сортамента: Справочник/Под ред. С. О. Охупкина. — М.: Машиностроение, 1970. — 567 с.
8. Конструкционная прочность материалов и деталей газотурбинных двигателей/И. А. Биргер, Б. Ф. Балашов, Р. А. Дульнев и др.; Под ред. И. А. Биргера и Б. Ф. Балашова. — М.: Машиностроение, 1981. — 222 с.
9. Косточкин В. В., Спорягина Н. М. Анализ и оценка надежности авиационных двигателей на этапе проектирования. — М.: МАИ, 1978. — 66 с.

10. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. — М.: Машиностроение, 1976. — 216 с.
11. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность: Руководство и справочное пособие. — М.: Машиностроение, 1975. — 488 с.
12. Степнов М. Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний. — М.: Машиностроение, 1972. — 232 с.

# СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
<i>Глава 1. НАДЕЖНОСТЬ И УСТАЛОСТНЫЕ РАЗРУШЕНИЯ</i>	<i>5</i>
1.1. Основные закономерности усталостных разрушений	5
1.1.1. Особенности усталостного разрушения	5
1.1.2. Постоянные и переменные напряжения	6
1.1.3. Связь величины разрушающего напряжения и числа циклов	7
1.1.4. Аналитическое описание кривой усталости	9
1.1.5. Влияние некоторых факторов на сопротивление усталости	11
1.2. Статистическое описание сопротивления усталости	15
1.2.1. Статистический анализ долговечности	15
1.2.2. Доверительные пределы для числа циклов до разрушения	19
1.2.3. Плотность двумерного распределения сопротивления усталости	21
1.2.4. Определение плотности распределения по статистическим данным	21
1.2.5. Пространственная диаграмма усталости	23
1.2.6. Рассеяние пределов выносливости	23
1.3. Суммирование повреждений	26
1.3.1. Простейшее программное нагружение и кривые повреждаемости	26
1.3.2. Линейный закон суммирования повреждений	28
1.3.3. Обобщение линейного закона суммирования повреждений	30
<i>Глава 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТНЫХ ОТКАЗОВ</i>	<i>33</i>
2.1. Вероятность разрушения, статистические модели	33
2.1.1. Параметры модели (системы) и их распределение	33
2.1.2. Определение вероятности разрушения с помощью интегрирования по области разрушения	36
2.1.3. Определение вероятности разрушения с помощью статистического анализа условия разрушения	37
2.1.4. Определение вероятности разрушения с помощью статистического анализа запасов прочности	40
2.1.5. Приближенный способ определения вероятности разрушения	43
2.1.6. Оценка достоверности расчетных значений вероятности разрушения	47
2.1.7. Влияние времени на вероятность разрушения	51
2.1.8. Общие замечания о вероятности разрушения	53
2.2. Запасы прочности	54
2.2.1. Детерминированный запас прочности	54
2.2.2. Статистический запас прочности	57
2.2.3. Оценка достоверности статистических запасов прочности	59
2.2.4. Связь запасов прочности и вероятности разрушения	64
Литература	70



Св. план 1983, поз. 33

*Анатолий Иванович Белоусов*  
*Исаак Аронович Биргер*

**ПРОЧНОСТНАЯ НАДЕЖНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ  
ТУРБОМАШИН**

Редактор Г. А. Усачева  
Техн. редактор Н. М. Каленюк  
Корректор В. П. Петрова

Подписано в печать 10.11.83 г. ЕО07244.  
Формат 60×84 1/16. Бумага писчая. Печать высокая.  
Усл. п. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,0. Т. 1000 экз.  
Заказ 946. Цена 15 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С. П. Королева,  
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

---

Тип. УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.