МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С.П.Королева

В.В.КУЛИКОВ

ПРОГРАММИРОВАННОЕ РУКОВОДСТВО

к решению задач по математическому анализу

Учебное пособие

ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Куйбышев - I967

Ответственный редактор - к.ф-м.н. доцент Г.Д.ТРОШИН

Предлагаемое руководство предназначено для студентов I курса. Оно имеет своей целью научить студентов вычислять пределы некоторых функций, содержащих тригонометрические, при помощи формулы первого замечательного предела, а также выработать навыки правильно объяснять и оформлять решение примеров.

Для чтения этого руководства требуется знание, помимо алгебры и тригонометрии, следующих фактов математического анализа:

1) определение предела функции;

2) теоремы о бесконечно малых;

3) теоремы о пределах (о пределе алгебраической суммы, произведения, частного, сложной функции);

4) определение бесконечно большой величины; связь между бесконечно малой и бесконечно большой величинами;

теорема: если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq 0$, а

$$\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \text{, то} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \ ;$$

5) теорема о пределе элементарной функции; если элементарная функция $y=f(x)$ определена в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Это пособие отличается от других руководств в основном тем, что материал излагается методом программированного обучения. Оно составлено по методу множественного выбора.

Пособие нужно читать не так, как обычную книгу. Изучив материал одной страницы, в конце ее вы найдете номер той страницы, которую следует читать дальше.

Тем, кто будет правильно решать предложенные примеры, не понадобится читать все пособие. Ну а если вы ошибетесь, то на нужной странице получите консультацию, которая поможет правильно ответить на вопрос.

А теперь откройте стр. 4 и за работу.

ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Эту формулу можно прочитать так:
предел отношения синуса к своему аргументу равен I, когда аргумент стремится к 0.

Следует заметить, что у дроби $\frac{\sin x}{x}$ и числитель и знаменатель стремятся к 0. С помощью первого замечательного предела можно вычислять многие другие пределы

а) Докажем, что $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$

В самом деле, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=$ (делим числитель и знаменатель на x)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=$$

по теореме о пределе частного

$$=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

б) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1}$

Действительно, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$ (по теореме о пределе произведения)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1.$$

Полученные результаты используем в дальнейшем при решении других примеров. Поэтому их следует запомнить.

Теперь самостоятельно попробуйте найти предел $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}$

Вам необходимо выбрать ответ, который вы считаете правильным, и открыть затем страницу, номер которой указан за выбранным вами ответом.

Ответы
а) I — страница 6
б) 5 — страница 9

(к странице I3)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}3x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\dfrac{0}{0}=0$

Здесь имеется ошибка.

<u>Совершенно верно</u>. Во-первых, здесь нельзя применить теорему о пределе частного $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}\stackrel{?}{=}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}3x}{\lim\limits_{x\to 0}x}\right)$, т.к. предел знаменателя равен 0. Во-вторых, запись $\dfrac{0}{0}=0$ бессмысленна, т.к. на нуль делить нельзя.

Заметим, что два других способа решения этого примера (приведенные на стр. I3) ошибок не имеют.

Теперь вычислите самостоятельно $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\operatorname{tg}7x}$ и найдите верный ответ.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\operatorname{tg}7x}=\dfrac{7}{10}$ — страница I4

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\operatorname{tg}7x}=\infty$ — страница II

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\operatorname{tg}7x}=\dfrac{10}{7}$ — страница I6

(к странице 4)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 1$

Неверно. Вспомним словесную формулировку I-го замечательного предела: предел отношения синуса к своему аргументу равен I, когда последний стремится к 0.

В нашем примере аргументом синуса является $(5x)$, причем $5x \to 0$, если $x \to 0$. Но в знаменателе имеем не $5x$, а x.

Попробуйте так тождественно преобразовать дробь $\dfrac{\sin 5x}{x}$, чтобы в знаменателе было $5x$.

Вернитесь к стр.4 и найдите правильный ответ.

(к странице 9)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\alpha\beta$

Неверно.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin\alpha x}{x}}{\frac{\sin\beta x}{x}}$ теперь, чтобы использовать первый замечательный предел, числитель умножим и разделим на α. Аналогичным образом преобразуем знаменатель.

Вы как будто правильно нашли предел числителя. Он равен α. Найдите отдельно предел знаменателя и примените теорему о пределе частного.

Теперь вернитесь к стр. 9 и найдите верный ответ.

(к странице I3)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\,\frac{tg3x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}=$

$=3\cdot 1=3$. Здесь имеется ошибка.

Нет, этот предел вычислен верно.

Сначала мы умножили числитель и знаменатель дроби на число 3. От этого дробь не изменится. Затем мы применили теорему о пределе произведения, что вполне допустимо, т.к. оба множителя имеют конечные пределы:

$$\lim_{x\to 0}3=3\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}=1$$

На стр.4 мы доказали, что предел отношения tg к своему аргументу равен I, когда аргумент стремится к 0,

т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$. В нашем случае при $x\to 0$ аргумент $3x$ также $\to 0$.

Вернитесь, пожалуйста, к странице I3 и выберите нужный ответ.

(к странице 4)

$$\boxed{\text{Ваш ответ.} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5}$$

Правильно. Сначала устанавливаем, что данная функция $\frac{\sin 5x}{x}$ не определена при $x = 0$, что она представляет отношение двух бесконечно малых величин при $x \to 0$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Затем для раскрытия неопределенности преобразуем функцию так, чтобы можно было использовать первый замечательный предел. Чтобы в знаменателе дроби создать $5x$, умножим и знаменатель и числитель на 5:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} 5 \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{x \to 0} 5 \cdot \lim_{5x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$$

(т.к. если $x \to 0$, то и $5x \to 0$).

Теперь решим более трудный пример

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin \alpha x}{x}}{\frac{\sin \beta x}{x}}$$

Здесь, чтобы использовать первый замечательный предел, мы разделим и числитель и знаменатель на x, что вполне допустимо, т.к. $x \to 0$ и $x \neq 0$. Теперь, применяя метод решения предыдущего примера, можно найти пределы числителя и знаменателя, а затем использовать теоремы о пределах. Завершите решение этого примера.

Ответы:

$\alpha \cdot \beta$ страница 7

$\frac{\alpha}{\beta}$ страница I2

(к странице 13)

Ответ ваш. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{\cos 0}\cdot 1=3$$

Здесь имеется ошибка.

Нет, этот предел вычислен верно. В самом деле, $tg3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$, затем мы умножили числитель и знаменатель на одно и то же число 3, от чего дробь не изменится (это было сделано для применения первого замечательного предела).

Далее: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=$ (по теореме о пределе произведения)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{\cos 0}\cdot 1=3\text{, т.к.}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$ – это первый замечательный предел, а

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}=\frac{3}{\cos 0}=\frac{3}{1}=3$ в силу того, что $\frac{3}{\cos 3x}$ – элементарная функция, определенная в точке $x=0$. Поэтому ее предел равен значению функции в т. $x=0$.

Итак, указанный способ решения ошибок не содержит. Вернитесь, пожалуйста, к странице 13 и выберите нужный ответ.

(к странице 5)

Ваш ответ.	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,10x}{tg\,7x} = \infty$

Неправильно. Здесь имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, т.к. числитель и знаменатель при $x \to 0$ стремятся к 0. Для раскрытия неопределенности функцию можно преобразовать так, чтобы можно было использовать первый замечательный предел или формулу $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,x}{x} = 1$.

Вспомните метод, примененный при решении $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, и примените его при решении данного примера.

Вернитесь, пожалуйста, к странице 5 и сделайте еще попытку.

(к странице 9)

Ваш ответ.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

Правильно. Этот предел мы вычислим двумя мало отличающимися друг от друга способами.

1 способ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{x}}{\frac{\sin\beta x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\beta\cdot\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=$

используя теоремы о пределах произведения и частного

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\alpha\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\beta\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha\cdot 1}{\beta\cdot 1}=\frac{\alpha}{\beta},$$

т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=\alpha$ (предел постоянной равен самой постоянной),

а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$ – по формуле первого замечательного предела.

2 способ. Умножим числитель и знаменатель на x.

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\alpha x}{x\cdot\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{x}{\sin\beta x}=$$

теперь первую дробь умножим и разделим на α, а вторую — на β.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha\cdot\frac{\beta x}{\beta\cdot\sin\beta x}=$ по теореме о пределе произведения

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta x}{\sin\beta x}=1\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\frac{\alpha}{\beta},$$

т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$.

(Продолжение на следующей странице)

(к странице I2)

Теперь предложим несколько способов решения примера

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}}$$

Какой из следующих способов даст неправильный ответ ?

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\operatorname{tg}3x}{3x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Здесь имеется ошибка. страница 8

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}3x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{0}{0}=0.$$

Здесь имеется ошибка. страница 5

в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{\cos 0}\cdot 1=3.$$

Здесь имеется ошибка. страница I0

(к странице 5)

Ваш ответ.	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg10x}{tg7x} = \dfrac{7}{10}$

Неправильно. Если вы решали этот пример тем же методом, что и $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$, то вы шли по верному пути.

Но, наверно, в конце была допущена арифметическая ошибка. Проверьте свое решение и выберите на странице 5 нужный ответ.

(к странице I7)

Ваши ответы .

I) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}=\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{tg\,11x}=\dfrac{2}{11}$

Не совсем так. Ответ в примере 2 верный. А вот

I) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}$ вычислен неверно. Если вы начинали решать так: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x^2}$,

то допускали грубую ошибку: здесь неприменима теорема о пределе разности, т.к. и $\dfrac{\cos mx}{x^2}$ и $\dfrac{\cos x}{x^2}$ при $x\to 0$ не имеют конечных пределов.

Здесь числитель ($\cos mx-\cos x$) следует преобразовать в произведение синусов (см. тригонометрическую формулу на странице I6), а затем применить теорему о пределе произведения и формулу первого замечательного предела.

Вычислите еще раз этот предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}$

и найдите на странице I7 правильные ответы.

(к странице 5)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,10x}{tg\,7x}=\dfrac{10}{7}$

Верно. Учитывая формулу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=1$, применим метод вычисления предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ к решению данного примера.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,10x}{tg\,7x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg\,10x}{x\cdot tg\,7x}=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,10x}{x}\cdot\frac{x}{tg\,7x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,10x}{10x}\cdot\frac{7x}{tg\,7x}\cdot\frac{10}{7}=$$ по теореме о пределе произведения

$$=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,10x}{10x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg\,7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{10}{7}=1\cdot 1\cdot\frac{10}{7}=\frac{10}{7}.$$

Теперь напомним некоторые формулы тригонометрии

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(Продолжение на следующей странице)

(к странице 16)

Эти формулы позволяют так преобразовать некоторые выражения, содержащие тригонометрические функции, чтобы можно было использовать первый замечательный предел.

Например, $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{mx}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\cdot 2\left(\frac{m}{2}\right)^2=$$

$$=2\left(\frac{m}{2}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}=\frac{m^2}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{m^2}{2}.$$

Вычислите теперь два следующих предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\operatorname{tg} 11x}$

Затем найдите комбинацию правильных ответов.

а) $\left.\begin{matrix}\infty\\ 2/11\end{matrix}\right\}$ страница 15

б) $\left.\begin{matrix}\frac{1-m^2}{2}\\ 2/11\end{matrix}\right\}$ страница 24

в) $\left.\begin{matrix}0\\ 8/11\end{matrix}\right\}$ страница 22

(к странице 23)

Ваш ответ.
Решение данного примера следует начинать так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Правильно. В самом деле, мы провели тождественные преобразования, которые не изменили функцию:

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\frac{\sin x\cdot\frac{(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}=$$

$$=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Теперь, вычислив предел каждого множителя, (а это, наверное, уже не вызовет затруднений), вы сможете решить этот пример.

Ответы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$ страница 28

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=8$ страница 25.

(к странице 24)

Ваш ответ.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}=\dfrac{\cos a}{2a}$

Совершенно верно. Данная функция $\dfrac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}$ не определена в точке $x=a$. Эта функция представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой при $x\to a$ стремятся к 0 (т.е. имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Никакие теоремы о пределах, в частности, теорема о пределе частного, здесь пока неприменимы. Т.к. дробь содержит тригонометрические функции, то попытаемся преобразовать ее к такому виду, чтобы можно было использовать первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)\cdot(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{x+a}\,\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{x+a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\frac{\cos\frac{a+a}{2}}{a+a}\cdot 1=\frac{\cos a}{2a},$$

т.к. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$ - первый замечательный предел (предел отношения синуса к своему аргументу, когда аргумент $\frac{x-a}{2}\to 0$).

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{x+a}=\frac{\cos\frac{a+a}{2}}{a+a},$$ т.к. функция $\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{x+a}$

элементарная и определена в точке $x=a$. Поэтому ее предел равен значению функции в точке $x=a$.

(Продолжение на следующей странице)

(к странице I9)

Теперь сформулируем теорему о замене переменной под знаком предела (или о пределе сложной функции).

Пусть $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, а $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=y_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=y_0$. т.е. имеет место формула

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)}$$

Эту формулу мы неявно применяли при решении многих выше приведенных примеров. Пользуясь этой формулой, докажем, например, что

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1}$$

Обозначим $\arcsin x=u$, тогда $x=\sin u$ и если $x\to 0$, то $u=\arcsin x\to 0$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$.

Аналогично, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\operatorname{tg} u}=1}$ (Здесь обозначили $\operatorname{arctg} x=u$)

Попробуйте теперь самостоятельно вычислить $\boxed{\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}}$

Сначала проанализируйте функцию, посмотрите, нельзя ли применить теоремы о пределах. Если никакие теоремы о пределах неприменимы, то функцию следует преобразовать. Например, постарайтесь так заменить переменную, чтобы аргумент тангенса стремился к 0. Решите этот пример и выберите нужный ответ.

<u>Ответы</u>: а) I страница 26

б) π страница 23

(к странице 23)

Ваш ответ. Решение данного примера следует начинать так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$$

Неправильно. Сначала мы почленно делим числитель на знаменатель. В этом месте мы не допускаем ошибки, но такое тождественное преобразование проводим для того, чтобы применить затем теорему о пределе алгебраической суммы. Вот здесь и допускается ошибка

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3}\right)\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$$

Теорема о пределе алгебраической суммы неприменима, т.к. слагаемые не имеют конечных пределов.

В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}}=\infty$

Точно так же $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\infty$

Таким образом, данную функцию следует преобразовать по-другому.

Преобразуйте числитель и вернитесь к странице 23.

(к странице I7)

Ваши ответы.

I) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}=0$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\mathrm{tg}\,11x}=\dfrac{8}{11}$

Оба предела вычислены неверно

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}$ Здесь и числитель и знаменатель стремятся к 0, т.е. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поэтому без дополнительного исследования сразу нельзя ничего сказать о пределе данной функции.

Проведем некоторые тождественные преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{mx+x}{2}\cdot\sin\frac{mx-x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-2\,\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}}{\frac{(m+1)x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(m-1)x}{2}}{\frac{(m-1)x}{2}}\cdot\frac{(m+1)(m-1)}{4}=\ldots$$

Дорешайте этот пример.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\mathrm{tg}\,11x}=$ (Возможно, вы допустили ошибку, неправильно преобразовав числитель: $\sin 5x-\sin 3x \overset{?}{=} 2\sin 4x\cos x$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{5x+3x}{2}\cdot\sin\frac{5x-3x}{2}}{\mathrm{tg}\,11x}=\lim_{x\to 0}2\cos 4x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\mathrm{tg}\,11x}\ldots$$

Завершите решение этого примера, вернитесь к странице I7 и найдите комбинацию правильных ответов.

(к странице 20)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}=\pi$

Правильно. Данная функция $\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$ представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой стремятся к 0 при $x\to -2$. Поэтому неприменимы никакие теоремы о пределах (в частности, непригодна теорема о пределе частного).

Заменим переменную: $x+2=y$, тогда $x=y-2$ и если $x\to -2$, то $y\to 0$. В результате получим

$$\lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi(y-2)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\pi y-2\pi)}{y}=$$

В силу периодичности тангенса

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi y}{\pi y}\cdot\pi=1\cdot\pi=\pi$$

В заключение вычислите самостоятельно $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}}$

Как, по вашему, следует начать решение этого примера ?

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x^3}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$

страница 2I

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$

(к странице I7)

Ваши ответы.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos x}{x^2}=\dfrac{1-m^2}{2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\operatorname{tg} 11x}=\dfrac{2}{11}$

Правильно. Вы получили верные ответы. Но порой к верному ответу можно придти путем ошибочных рассуждений. Посмотрите, правильно ли вы рассуждали, решая эти примеры.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{mx+x}{2}\cdot\sin\frac{mx-x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(-2)\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}}{\frac{(m+1)x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(m-1)x}{2}}{\frac{(m-1)x}{2}}\cdot\frac{m^2-1}{4}=$$ по теореме о пределе произведения

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(m+1)x}{2}}{\frac{(m+1)x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(m-1)x}{2}}{\frac{(m-1)x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{m^2-1}{4}=-2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{m^2-1}{4}=\frac{1-m^2}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\operatorname{tg} 11x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x-3x}{2}\cdot\cos\frac{5x+3x}{2}}{\operatorname{tg} 11x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cos 4x\,\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} 11x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x\,\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{11x}{\operatorname{tg} 11x}\cdot\frac{1}{11}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{11x}{\operatorname{tg} 11x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{11}=2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{11}=\frac{2}{11}.$$

Теперь попробуйте сами найти $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}}$

Ответы: а) $\dfrac{\cos a}{2a}$ страница I9

б) $\dfrac{1}{2}$ страница 27

(к странице I8)

Ваш ответ.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=8$

Неверно.

Давайте разберемся.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$ (по теореме о пределе произведения)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\ldots$$

Вы, наверно, нашли свою ошибку.

Завершите решение примера и найдите на странице I8 верный ответ.

(к странице 20)

Ваш ответ.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\,\pi x}{x+2}=1$

Неправильно. Для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ в данном примере сделаем преобразования.

Например, обозначим $x+2=y$, тогда $x=y-2$ и если $x\to -2$, то $y\to 0$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\mathrm{tg}\,\pi x}{x+2}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,\pi(y-2)}{y}=$$ в силу периодичности тангенса

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,\pi y}{y}=\ \ldots\ldots\ldots$$ А пределы такого типа мы уже вычисляли.

Вам следует закончить решение этого примера и затем вернуться к странице 20, чтобы выбрать верный ответ.

(к странице 24)

Ваш ответ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2}$

Неверно. Видимо, этот предел вы вычисляли так:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x+a}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{1}{2}=$$ по теореме о пределе произведения

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x+a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{2}\overset{?}{=}1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Вы верно подметили, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$, т.к. это первый замечательный предел.

А вот

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x+a}{2}}\neq 1$$

В этом и заключалась ваша ошибка.

Вычислите снова $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x+a}{2}}$ и найдите на странице 24 нужный ответ.

(к странице I8)

Ваш ответ. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}}$

<u>Правильно</u>.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{4}=$$

$$=1\cdot 1\cdot 1^2\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\text{, т.к. }\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{, }\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

по формуле первого замечательного предела.

На этом работу с пособием можно считать почти законченной. Однако каждому, кто серьезно занимался, наверно, интересно знать, чему он научился.

Поэтому для самопроверки и для закрепления изученного материала на стр. 29 предлагаются дополнительные задачи. Попробуйте решить их.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

(для самопроверки)

I. Справедливо ли равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$?

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} 9x$

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{x-\pi}$

5. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{2}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x-\operatorname{arctg} x}{4x+\arcsin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

Ответы находятся на странице 30.

ОТВЕТЫ к дополнительным задачам

1. Нет. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. Функция $\frac{\sin x}{x}$ есть бесконечно малая величина при $x\to\infty$, т.к. она представляет собой произведение ограниченной функции $\sin x$ на б.м. $\frac{1}{x}$

2. 0

3. $1/9$

4. 0 (Указание: сделать замену $x-\pi=y$).

5. $-\frac{5}{4}$

6. 2

7. $3/5$ (Указание: разделить почленно числитель и знаменатель на x и воспользоваться формулами

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1\ )$$

8. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Т.Скотт. Основы программирования. Перевод с английского „Советское радио", Москва, I965.

2. Г.И.Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу , "Высшая школа", Москва, I966.

3. И.А.Каплан. Практические занятия по высшей математике, часть П, ХГУ, Харьков, I963.

4. Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа, Москва, I959.

Владимир Владимирович КУЛИКОВ

ПРОГРАММИРОВАННОЕ РУКОВОДСТВО
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Редактор - И.С.КОЛЫШЕВА
Корректор - А.Б.НИКИТИН

Подписано в печать 23/УШ-67 г. ЕО 00393

Формат 60 х 84 $^{I}/_{I6}$. Объем 2 печ. листа.

Тираж 500 экз. Заказ № 6120

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С.П.Королева, г.Куйбышев, обл., ул.Молодогвардейская, I5I.

Ротапринтный цех типографии им. Мяги управления по печати при Куйбышевском Облисполкоме, г.Куйбышев, обл., ул.Венцека, 60.

Цена 20 коп.