

ГОСКОМИТЕТ РСФСР ПО ДЕЛАМ НАУКИ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ  
КУБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ  
ИНСТИТУТ им. акад. С.П.КОРОЛЕВА

М.В.Зацепина

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ  
КОНСТРУКЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Учебное пособие

Самара 1991

УДК 539.3:629.7.015

Расчет на устойчивость элементов конструкций летательных аппаратов: Учеб. пособие /М.В.Зацепина; Куйбышев. авиац. ин-т. Самара, 1991. 63 с.

ISBN 5-230-16878-1

Изложены основные положения теории устойчивости элементов конструкций летательных аппаратов в виде упругих стержней, пластин и оболочек. Рассмотрены методы решения задач устойчивости и расчета пластин при закритической нагрузке.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курсы "Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости" и "Расчет летательного аппарата на прочность". Учебное пособие подготовлено кафедрой прочности летательных аппаратов.

Ил. 43. Библиог. 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени акад. С.П.Королева.

Рецензенты: доц. В.В.Горбатенко,  
доц. А.К.Синельник

ISBN 5-230-16878-1 © Куйбышевский авиационный институт, 1991

## В В Е Д Е Н И Е

Силовая схема современного летательного аппарата состоит в основном из тонкостенных элементов. Это плоские или криволинейные панели, оболочки, подкрепленные тонкостенными стержнями. При эксплуатации летательного аппарата его элементы работают в условиях сложного нагружения. При больших уровнях нагрузок они могут потерять устойчивость.

В строительной механике устойчивым считается такое состояние упругой системы, при котором малое дополнительное возмущение и его последующее устранение не приводят к изменению начальной формы равновесия.

Вопросам расчета на устойчивость посвящено много работ. В некоторых разделах курсов "Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости" и "Расчет летательного аппарата на прочность" рассматриваются вопросы расчета на устойчивость отдельных элементов.

В данном пособии сделана попытка кратко изложить основные идеи методов расчета на устойчивость, проиллюстрировать их на конкретном примере и привить практические навыки определения критических нагрузок. Пособие предназначено для студентов дневного обучения, изучающих курсы "Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости" и "Расчет летательных аппаратов на прочность".

### І. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

#### І.І. Основные понятия

Под устойчивостью понимается свойство упругой системы сохранять свое состояние равновесия при внешних относительно небольших дополнительных воздействиях, или, как говорят, возмущениях. Если система обладает таким свойством, то она считается устойчивой, если нет - то неустойчивой. В равной мере можно говорить, что устойчивым или неустойчивым является ее состояние равновесия.

В реальных условиях всегда существуют какие-то причины, по

которым может произойти большое отклонение упругой системы от исходного равновесного состояния. В этом случае говорят, что произошла потеря устойчивости. Явление потери устойчивости можно наблюдать на целом ряде примеров. Обратимся к задаче о центрально-сжатом стержне, известной из курса сопротивления материалов (рис. I.1). При малых значениях силы  $P$  стержень будет сжиматься, оставаясь прямолинейным. При достаточно большой силе стержень не

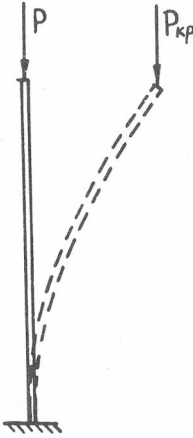


Рис. I.1. Центрально-сжатый стержень

может сохранить прямолинейную форму и изогнется. Произойдет потеря устойчивости. Нагрузка, при которой начальная форма равновесия перестает быть устойчивой, называется критической. Если сила  $P$ , сжимающая прямолинейный стержень, удовлетворяет условию  $P \geq P_{кр}$ , то, как показывает опыт, прямолинейная равновесная форма перестает быть единственно возможной формой равновесия и наряду с ней, оказывается, существуют и другие искривленные формы равновесия. Впервые задача о равновесии сжатого центрального стержня была поставлена и решена в середине XVIII века Л. Эйлером. Поэтому часто, когда говорят об устойчивости сжатого стержня, употребляют выражение "задача Эйлера" или "устойчивость по Эйлеру".

В зависимости от подхода к решению задачи устойчивости пользуются различными критериями устойчивости: статическим, динамическим, энергетическим. При использовании статического критерия устойчивости выясняют, при каких условиях наряду с первоначальным состоянием равновесия существуют другие формы равновесия. Для этого записывают дифференциальное уравнение равновесия деформированного состояния. Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям. Так как под критической понимают силу, при которой прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой, то из всех значений силы выбирают наименьшее.

С математической точки зрения рассматриваемая задача представляет собой задачу о собственных значениях линейного однородного уравнения. Тривиальное решение его относится к начальному, неискривленному равновесному состоянию системы. Нетривиальное решение

соответствует так называемым собственным функциям задачи.

Можно решить задачу устойчивости, исследуя движение системы, вызываемое некоторыми возмущениями равновесного состояния. Если малые возмущения вызывают динамические перемещения системы, лежащие в определенных пределах, то начальное состояние является устойчивым. Для решения задачи устойчивости записывают динамические уравнения движения системы и определяют частоты ее собственных колебаний. При малых значениях сжимающей нагрузки колебания системы являются гармоническими и движение носит устойчивый характер. С ростом нагрузки частота колебаний изменяется. Критическая нагрузка потери устойчивости находится из условия перехода системы к движению с нарастающей амплитудой. Такой критерий устойчивости называют динамическим. Для стержней моментом потери устойчивости будет обращение в нуль частоты собственных колебаний.

Следующий критерий устойчивости - энергетический. Критическая нагрузка с помощью этого критерия находится из условия минимума полной энергии системы для формы равновесия, возникающей при потере устойчивости рассматриваемой системы. Этот критерий позволяет относительно просто найти приближенное значение критической нагрузки для любых упругих систем. При переходе от начального равновесного состояния к искривленному упругая система приобретает дополнительную потенциальную энергию деформации, которая способствует возврату системы в исходное положение. Внешние силы совершают при этом работу. Если эта работа меньше дополнительной энергии деформации, то упругая система будет возвращаться в исходное состояние, т.е. система устойчива.

В неустойчивом состоянии системы картина будет противоположной: энергия деформации оказывается меньше работы внешних сил.

Можно привести еще одно энергетическое соотношение. При возможном отклонении системы от равновесного положения первая вариация полной энергии должна быть равна нулю.

Об устойчивости равновесного положения можно судить по знаку второй вариации от полной энергии. Если исходное положение устойчиво, то вторая вариация положительна, при этом энергия прямоугольной формы стержня будет минимальной по отношению к значениям энергии для близких к ней искривленных форм. Если вторая вариация полной энергии отрицательна, то рассматриваемая равновесная форма будет неустойчивой. Безразличному равновесию стержня соответствует равенство нулю второй вариации.

Этот метод особенно полезен тогда, когда точное определение критической нагрузки путем интегрирования дифференциального уравнения криволинейной формы оказывается сложным.

Энергетический метод определения критических нагрузок носит более общий характер, чем статический метод. Энергетический критерий устойчивости может применяться как в статических, так и в динамических задачах, в последнем случае необходимо учитывать еще и кинетическую энергию системы.

Вне зависимости от применяемых критериев устойчивости (статического, динамического или энергетического) задачи устойчивости делятся на два больших класса: линейные и нелинейные. В линейной постановке задачи критическая нагрузка определяется как точка разветвления (бифуркации) равновесных форм, т.е. как нагрузка, при которой наряду с начальным состоянием равновесия возможны другие равновесные формы.

В нелинейных задачах уравнения равновесия зависимости между перемещениями, деформациями и изменениями кривизны составляются с учетом того, что перемещения упругой системы являются большими, а также учитываются ее начальные несовершенства, в результате чего в разрешающих уравнениях появляются нелинейные члены. С помощью нелинейных уравнений исследуется послекритическое поведение системы. Для некоторых систем (например, для оболочек) значения критических нагрузок, полученные из решения линейной и нелинейной задач, сильно отличаются друг от друга. В этом смысле различают между собой устойчивость в малом (значение критических нагрузок при малых деформациях) и устойчивость в большом (значение критической нагрузки при больших деформациях).

Сказанное хорошо иллюстрируется зависимостью  $P(\Delta)$  для цилиндрической оболочки, где  $\Delta$  - смещение (сближение) торцов цилиндрической оболочки при сжатии,  $P$  - сжимающая нагрузка (рис. 1.2).

Выбрав тот или иной критерий устойчивости, необходимо дальше принять определенный метод решения задачи /1/.

Метод непосредственного интегрирования разрешающих дифференциальных уравнений возможен лишь в простейших случаях. В более сложных задачах применяются различные приближенные методы: конечно-разностный метод коллокаций, метод последовательных приближений.

При использовании энергетического критерия часто задача устойчивости решается с помощью метода Рунца. Искомая функция представляется в виде выражения, удовлетворяющего геометрическим гра-

ничным условиям задачи, а неизвестные параметры определяются из условия минимума полной энергии системы.

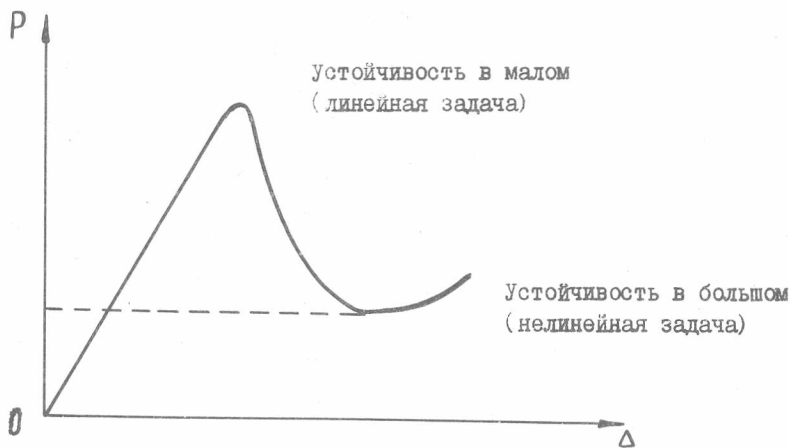


Рис. 1.2. График "нагрузка-смещение торцов"

В методе Бубнова-Галеркина искомая функция задается в виде, удовлетворяющем статическим и геометрическим граничным условиям задачи, а неопределенные параметры находятся из принципа возможных перемещений.

### 1.2. Статический критерий устойчивости

Рассмотрим балку с постоянным поперечным сечением, защемленную на одном конце и нагруженную сжимающей силой на свободном конце (рис. 1.3).

Будем считать, что сжимающая сила  $P$  приложена в центре тяжести сечения и направлена по вертикали во все время нагружения. Предположим, что переход от прямолинейной формы к изогнутой происходит без изменения величины силы. Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки  $/I/$  постоянной изгибной жесткостью  $EJ$  :

$$\frac{d^2 w}{dx^4} + \kappa^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (I.1)$$

Здесь  $\kappa^2 = \frac{P}{EJ}$ . (I.2)

Используя подстановку Эйлера  $w = e^{-\gamma x}$ , получим характеристическое уравнение

$$\gamma^4 + K^2 \gamma^2 = 0,$$

корни которого  $\gamma_{1,2} = 0$ ,  $\gamma_{3,4} = \pm iK$  дают решение дифференциального уравнения (I.1):

$$w = A \sin Kx + B \cos Kx + Cx + D. \quad (I.3)$$

Для рассматриваемой задачи имеем следующие граничные условия (рис. I.3):

$$w = 0, \quad w' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$M = -EJ w'' = 0,$$

$$Q = -EJ w''' = Pw'$$

$$\text{при} \quad x = l, \quad (I.4)$$

пользуясь которыми, находим:

$$B + D = 0,$$

$$Ak + C = 0, \quad (I.5)$$

$$Ak^2 \sin Kl + Bk^2 \cos Kl = 0. \quad (I.6)$$

Отсюда  $A = C = 0$ ,  $B = -D$ .

Пологая  $B \neq 0$ , получим

$$\cos Kl = 0, \quad (I.7)$$

что возможно при следующих значениях  $Kl$ :

$$Kl = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (I.8)$$

С учетом (I.2) имеем

$$P = \frac{\pi^2 (2n+1)^2 EJ}{4l^2}. \quad (I.9)$$

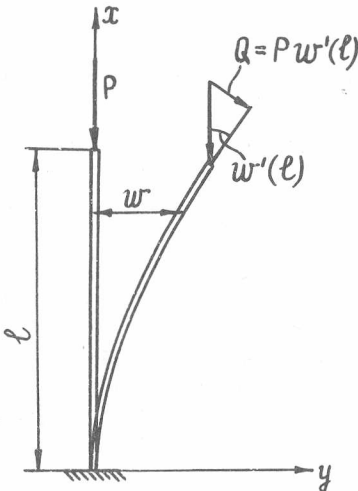


Рис. I.3. Схема нагружения балки



Изменяя  $n$ , получим ряд значений  $P$ , из которых выбираем наименьшее ( $n = 0$ ), являющееся критической нагрузкой  $P_{кр}$ :

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (I.10)$$

### 1.3. Энергетический критерий устойчивости

Рассмотрим применение энергетического критерия к расчету на устойчивость. Схема применения одной из разновидностей этого метода состоит в следующем. Вычисляем полную энергию системы  $V$ , определяемую как сумму потенциальной энергии деформации  $U$  и потенциала внешних сил  $\Pi$ :

$$V = U + \Pi, \quad (I.11)$$

представляя ее как функцию  $W$  -перемещений точек оси стержня при его искривлении:

$$V = F(w). \quad (I.12)$$

Задаются выражением для криволинейной формы равновесия (при малых отклонениях) в виде ряда

$$w = \sum_{i=1}^m \delta_i f_i(x), \quad (I.13)$$

где  $f_i(x)$  - функции, удовлетворяющие каждая в отдельности граничным условиям задачи. Подставляя (I.13) в (I.12), выражают полную энергию  $V$  через параметры ряда  $\delta_i$ . Необходимым и достаточным условием равновесия является наличие экстремума полной энергии системы, т.е. выполнение условий

$$\delta V = 0. \quad (I.14)$$

Вариацию полной энергии системы можно представить в виде суммы

$$\delta V = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial \delta_i} \delta \delta_i. \quad (I.15)$$

Так как вариации параметров  $\delta_i$  независимы, то условие (I.14) выполняется, если каждый из множителей при  $\delta \delta_i$  будет равен нулю, т.е.

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (I.16)$$

Эта система линейных однородных дифференциальных уравнений относительно параметров  $b_i$  имеет отличные от нуля решения только в том случае, если определитель ее равен нулю. Из этого условия и определяется критическое значение нагрузки, т.е. то значение, при котором становится возможным возникновение криволинейной формы равновесия.

Для иллюстрации метода применим его к определению критической нагрузки для стержня с силой  $P$  на свободном конце и заземленного на другом (рис. 1.3).

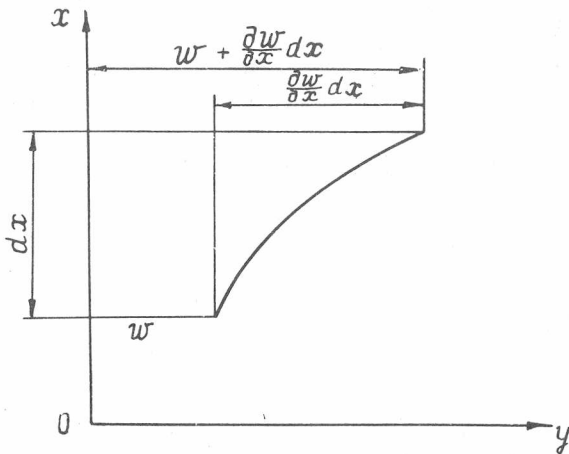


Рис. 1.4. Элемент изогнутой оси стержня

Воспользуемся известным выражением для потенциальной энергии деформации изогнутого стержня  $/I/$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (1.17)$$

Определим потенциал внешних сил  $\Pi$ :

$$\Pi = -Pe, \quad (1.18)$$

где  $e$  - проекция на направление силы  $P$  полного смещения свободного конца стержня.

Рассмотрим элемент изогнутой оси стержня (рис. 1.4). Запишем

соотношение между длиной элемента изогнутой линии  $ds$  и проекцией его  $dx$  на направление  $P$  :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}.$$

Воспользуемся формулой бинোма Ньютона, ограничиваясь первыми двумя его членами. В результате найдем

$$ds = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]. \quad (I.19)$$

Полная длина изогнутой линии, равная длине стержня до искривления, будет равна

$$l = l_1 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx.$$

Здесь через  $l_1$  обозначена длина проекции изогнутой линии на направление оси  $x$ .

Тогда смещение конца стержня  $e$  окажется равным

$$e = l - l_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx, \quad (I.20)$$

а для потенциала внешних сил по (I.18) имеем

$$П = -\frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \quad (I.21)$$

Запишем выражение для полной энергии системы:

$$V = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \quad (I.22)$$

Представим упругую линию стержня в виде ряда

$$w = \sum_{i=1}^m b_i f_i(x) = \sum_{i=1}^m b_i x^{2i}. \quad (I.23)$$

Легко убедиться, что функция  $f_i(x) = x^{2i}$  удовлетворяет геометрическим граничным условиям

$$w = w' = 0, \quad \text{при } x = 0. \quad (I.24)$$

Для простоты рассуждений ограничимся тремя членами ряда, т.е. примем  $i = 1, 2, 3$

$$w = b_1 x^2 + b_2 x^4 + b_3 x^6. \quad (I.25)$$

Вычислим энергию системы, подставив (I.25) в (I.22). После интегрирования получим

$$V = EJ \left( 2b_1^2 \ell - \frac{72}{5} b_2^2 \ell^5 + 50 b_3^2 \ell^9 + 8 b_1 b_2 \ell^3 + \right. \\ \left. + 12 b_1 b_3 \ell^5 + \frac{360}{7} b_2 b_3 \ell^3 \right) - P \left[ \frac{2}{3} b_1^2 \ell^3 + \frac{8}{7} b_2^2 \ell^7 + \right. \\ \left. + \frac{18}{11} b_3^2 \ell^{11} + \frac{8}{5} b_1 b_2 \ell^5 + \frac{12}{7} b_1 b_3 \ell^7 + \frac{24}{9} b_2 b_3 \ell^5 \right]. \quad (I.26)$$

Система уравнений  $\frac{\partial V}{\partial b_i} = 0$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (EJ - \frac{P}{3} \ell^3) b_1 + (2EJ \ell^2 - \frac{2}{5} P \ell^4) b_2 + (3EJ \ell^4 - \frac{3}{7} P \ell^6) b_3 &= 0, \\ (EJ - \frac{P}{5} \ell^2) b_1 + (\frac{18}{5} EJ \ell^2 - \frac{2}{7} P \ell^4) b_2 + (\frac{45}{7} EJ \ell^4 - \frac{3}{9} P \ell^6) b_3 &= 0, \\ (3EJ - \frac{3}{7} P \ell^2) b_1 + (\frac{90}{7} EJ \ell^2 - \frac{2}{3} P \ell^4) b_2 + (25EJ \ell^4 - \frac{9}{17} P \ell^6) b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (I.27)$$

Приравнявая нулю определитель системы (I.27) и решая полученное при этом кубическое уравнение, определим значение

$$P_{кр} = 2,48 \frac{EJ}{\ell^3}. \quad (I.28)$$

Точное решение дает коэффициент 2,467. Ошибка составляет 0,5%.

Рассмотрим теперь метод Буонова-Галеркина. Обозначим через  $\delta U$  изменение потенциальной энергии деформации при переходе стержня от одной искривленной формы к другой /I/:

$$\delta U = \int_0^{\ell} M \delta \alpha dx = - \int_0^{\ell} M \delta \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = - \int_0^{\ell} M \frac{d}{dx} \left[ \delta \left( \frac{dw}{dx} \right) \right] dx. \quad (I.29)$$

Проинтегрируем правую часть (I.29) по частям дважды:

$$\delta U = - \left[ M \delta \left( \frac{dw}{dx} \right) \right]_0^{\ell} + \left[ \frac{dM}{dx} \delta w \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{d^2 M}{dx^2} \delta w dx. \quad (I.30)$$

Учитывая, что

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad M = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2}$$

окончательно получим

$$\delta U = \int_0^{\ell} EJ \frac{d^4 w}{dx^4} \delta w dx + [Q \delta w]_0^{\ell} - [M \delta \left( \frac{dw}{dx} \right)]_0^{\ell}. \quad (I.31)$$

Работа внешних сил на возможных перемещениях с учетом (I.20) равна:

$$\delta A = \frac{1}{2} P \int_0^l \delta \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx = P \int_0^l \frac{dw}{dx} \delta \left( \frac{dw}{dx} \right) dx. \quad (I.32)$$

Интегрируя правую часть (I.32) по частям, имеем

$$\delta A = P \left[ \frac{dw}{dx} \delta w \right]_0^l - P \int_0^l \frac{d^2 w}{dx^2} \delta w dx. \quad (I.33)$$

Используем принцип возможных перемещений, согласно которому для равновесного состояния системы /2/

$$\delta U = \delta A. \quad (I.34)$$

Подставляя в (I.34) выражения (I.31) и (I.33), получим разрешающее уравнение задачи:

$$\left[ M \delta \left( \frac{dw}{dx} \right) - \left( Q - P \frac{dw}{dx} \right) \delta w \right]_0^l - \int_0^l \left( EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \delta w dx = 0. \quad (I.35)$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина, будем искать прогиб в форме (I.13), выбирая функции  $f_i(x)$  таким образом, чтобы они удовлетворяли не только геометрическим, но и статическим граничным условиям задачи. В этом случае внеинтегральные члены уравнения (I.35) обратятся в нуль. В результате будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \int_0^l \left( EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \right) f_i \delta b_i dx = 0. \quad (I.36)$$

Поскольку вариации  $\delta b_i$  произвольны и независимы, то получим систему  $n$  уравнений вида

$$\int_0^l \left( EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \right) f_i dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (I.37)$$

Возвращаясь к предыдущему примеру (рис. I.3), представим прогиб в виде

$$w = b (1 - \cos \kappa x), \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{\pi}{2l}. \quad (I.38)$$

При этом удовлетворяются геометрические и статические условия (I.4).

Подставим (I.38) в (I.37) и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} & b^2 \int_0^l (-EJk^4 \cos kx + Pk^2 \cos kx)(1 - \cos kx) dx = \\ & = [(-EJk^2 + P) \sin kx + (EJk^2 - P) \left( \frac{kx}{2} + \frac{\sin 2kx}{4} \right)]_0^l = \\ & = (EJk^2 - P) \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для критической силы

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (1.39)$$

Это значение совпало с точным.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Пластинки прямоугольного очертания являются широко распространенными конструктивными элементами летательных аппаратов. Они, как правило, выполняются в виде панелей обшивки, скрепленных с системой подкрепляющих ребер. Обшивка подвергается действию поперечной нагрузки и участвует в работе конструкции летательного аппарата на изгиб и кручение, воспринимая сжимающие нормальные и касательные усилия. Эти усилия могут привести к выпучиванию панелей обшивки.

Элементы тонкостенных профилей и балок, стенки высоких балок можно рассматривать как прямоугольные пластины.

Для расчета пластин на устойчивость используются те же методы, что и для стержней.

### 2.1. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с помощью статического критерия

Рассмотрим прямоугольную пластину, нагруженную сжимающей нагрузкой в направлении оси  $x$  (рис. 2.1). Будем полагать, что края пластины  $x = 0$ ,  $x = a$  шарнирно оперты, а края

$$y = 0, \quad y = b \quad \text{— заземлены.}$$

Для решения задачи устойчивости статическим методом воспользуемся дифференциальным уравнением продольно-поперечного изгиба [3]. Это уравнение для изотропной пластины будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\ & = P + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При выводе уравнения (2.1) принимались следующие зависимости между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (2.2)$$

где  $\varepsilon_{xx}^0$ ,  $\varepsilon_{yy}^0$ ,  $\varepsilon_{xy}^0$  - деформации срединной плоскости пластины.

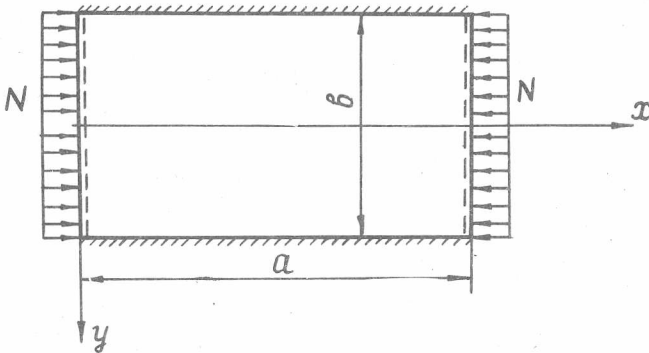


Рис. 2.1. Схема нагружения и закрепления пластины

Воспользуемся уравнением (2.1), приняв  $P = 0$ ,

$$N_y = T = 0, \quad N_x = -N,$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{N}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения, которое удовлетворяло бы граничным условиям на нагруженных шарнирно опертых краях пластины

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a, \quad (2.4)$$

можно искать в виде произведения

$$w = Y(y) \sin \frac{\pi m}{a} x. \quad (2.5)$$

Подставляя принятое выражение для  $w$  в разрешающее дифференциальное уравнение (2.3), получим

$$y^{IV} - 2\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 y'' + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \left[ \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{N}{D} \right] y = 0. \quad (2.6)$$

Введя обозначение  $\frac{\pi m}{a} = \alpha$ , решение уравнения (2.6) будем искать в виде  $y = e^{zi}$ . Для определения  $z$  получим характеристическое уравнение

$$z^4 - 2\alpha^2 z^2 + \alpha^2 \left( \alpha^2 - \frac{N}{D} \right) = 0,$$

корни которого определятся как

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha^2 + \alpha \sqrt{\frac{N}{D}}}, \quad z_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha \sqrt{\frac{N}{D}}}.$$

В соответствии с полученными значениями  $z$  общее решение уравнения (2.6) будет иметь вид

$$Y(y) = A_1 \operatorname{ch} \beta y + A_2 \operatorname{sh} \beta y + A_3 \cos \gamma y + A_4 \sin \gamma y, \quad (2.7)$$

где приняты обозначения:

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + \alpha \sqrt{\frac{N}{D}}}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \alpha \sqrt{\frac{N}{D}}}. \quad (2.8)$$

В силу симметрии упругой поверхности пластины по отношению к оси  $x$  в решении (2.7) отбросим слагаемые, содержащие нечетные функции:

$$Y(y) = A_1 \operatorname{ch} \beta y + A_3 \cos \gamma y. \quad (2.9)$$

Постоянные  $A_1$  и  $A_3$  определятся из граничных условий на защемленных краях пластины:

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = 0, \\ \frac{dw}{dy} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С учетом (2.5) и (2.9) эти условия примут вид

$$A_1 \operatorname{ch} \beta \frac{b}{2} + A_3 \cos \gamma \frac{b}{2} = 0,$$

$$A_1 \beta \operatorname{sh} \beta \frac{b}{2} - A_3 \gamma \sin \gamma \frac{b}{2} = 0. \quad (2.11)$$

Однородная система (2.11) будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:



$$\beta \operatorname{th} \beta \frac{b}{2} + \gamma \operatorname{tg} \gamma \frac{b}{2} = 0. \quad (2.12)$$

Из формул (2.8) имеем

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha \sqrt{\frac{N}{D}}, \quad (2.13)$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha^2 = 2 \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2. \quad (2.14)$$

Решая совместно (2.12) и (2.14), получим значения  $\beta$  и  $\gamma$ , из (2.13) найдем величину  $N$ :

$$N = \frac{D}{4} \left( \frac{a}{\pi m} \right)^2 (\beta^2 + \gamma^2)^2, \quad (2.15)$$

наименьшее значение которой и будет критической нагрузкой  $N_{кр}$ .

Переходя к критическому напряжению  $\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{\delta}$ , представим его в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \kappa \frac{\pi^2 D}{b^2 \delta}, \quad \text{где}$$

$$\kappa = \frac{b^4}{4\pi^4} \left( \frac{a}{m\delta} \right)^2 (\beta^2 + \gamma^2)^2. \quad (2.16)$$

Числовые расчеты показывают, что наименьшее значение  $\sigma_{кр}$  получается при  $\frac{a}{m\delta} = 0,662$ . При этом коэффициент  $\kappa = 6,97$ . Значения  $\kappa$  для различных отношений  $\frac{a}{\delta}$  приведены в табл. 2.1 /I/.

Таблица 2.1  
Зависимость коэффициента  $\kappa$  от соотношения сторон

$a/b$	:	0,4	:	0,5	:	0,6	:	0,7	:	0,8	:	0,9	:	1,0
$\kappa$	:	9,44		7,69		7,05		7,00		7,29		7,83		7,69

В /I/ приведены результаты расчетов пластин на устойчивость для различных случаев нагружения и закрепления краев.

Перейдем теперь к решению задач устойчивости пластин с помощью энергетического метода.

## 2.2. Исследование устойчивости прямоугольных пластин энергетическим методом

Получим выражения линейных  $\epsilon_{xx}^0$ ,  $\epsilon_{yy}^0$  и угловых  $\epsilon_{xy}^0$  деформаций срединной плоскости пластины. Для этого рассмотрим сечение пластины плоскостью, параллельной оси  $X$  и нормальной к ее

срединной плоскости (рис. 2.2) до и после деформации. Учитывая только перемещение  $w$ , выразим длину элемента искривленной срединной поверхности пластины  $ds$  в соответствии с формулой (I.19):

$$ds = \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (2.17)$$

При этом линейная деформация срединной поверхности, обусловленная перемещением  $w$ ,

$$\frac{ds - dx}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

При наличии перемещений  $u_x^0$  и  $w$  искомая линейная деформация  $\epsilon_{xx}^0$  в направлении оси  $x$  будет равна /I/

$$\epsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (2.18)$$

Аналогично деформация в направлении оси  $y$

$$\epsilon_{yy}^0 = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (2.19)$$

Для вычисления угловых деформаций срединной поверхности рассмотрим элемент срединной плоскости пластины  $abcd$ . До выпучивания его стороны  $ab$  и  $ad$  соответственно параллельны координатным осям  $x$  и  $y$ , а их длины равны  $dx$  и  $dy$  (рис. 2.3). Длина  $d\ell$  отрезка  $bd$  определится как

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Пусть при выпучивании пластины вершина прямого угла, точка  $a$ , перейдет в положение  $a_1$ , получив перемещение  $w$ , тогда перемещения двух других вершин  $b$  и  $d$  соответственно будут равны

$$dd_1 = w + \frac{\partial w}{\partial y} dy; \quad bb_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Длины отрезков  $a_1b_1$ ,  $a_1d_1$  и  $b_1d_1$  после выпучивания можно выразить следующим образом:

$$a_1b_1 = \sqrt{(ab)^2 + (bb_1 - aa_1)^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx.$$

$$a_1d_1 = \sqrt{(ad)^2 + (dd_1 - aa_1)^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} dy.$$

$$b_1d_1 = \sqrt{(bd)^2 + (bb_1 - dd_1)^2} = \sqrt{(d\ell)^2 + \left[ \frac{\partial w}{\partial x} dx - \frac{\partial w}{\partial y} dy \right]^2}. \quad (2.20)$$

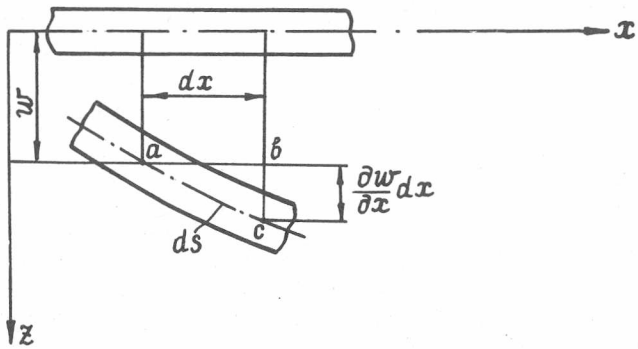


Рис. 2.2. Сечение пластины

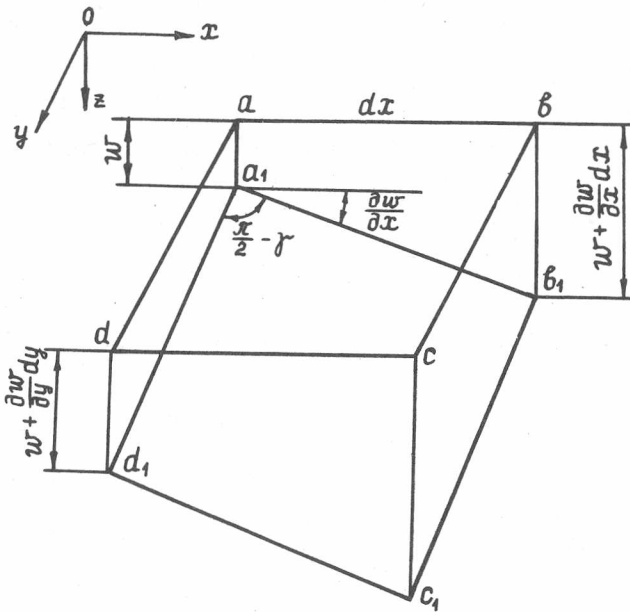


Рис. 2.3. Элемент срединной поверхности пластины после выпучивания

Как видно из рис. (2.3), прямой угол  $\beta ad$  искажается. Изменение этого угла и представляет собой угловую деформацию  $\gamma$  срединной поверхности. По теореме косинусов имеем

$$(\beta, d_1)^2 = (a, \beta_1)^2 + (a, d_1)^2 - 2(a, \beta_1)(a, d_1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right). \quad (2.21)$$

Подставив в (2.21) зависимости (2.20) и выполнив элементарные преобразования, получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \sin \gamma. \quad (2.22)$$

Заменяя в (2.22)  $\sin \gamma$  углом  $\gamma$  и пренебрегая ввиду малости квадратами производных  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , получим выражение для угловой деформации срединной поверхности пластины, вызванной перемещениями  $w$ :

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.23)$$

Добавляя к (2.23) угловые деформации от перемещений  $u_x$  и  $u_y$ , будем иметь

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.24)$$

Для нахождения деформаций пластинки можно использовать зависимости

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{yy}^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

в которых деформации срединной плоскости  $\epsilon_{xx}^0$ ,  $\epsilon_{yy}^0$  и  $\epsilon_{xy}^0$  определяются соответственно формулами (2.18), (2.19) и (2.24).

Напряжения в поперечных сечениях пластины выражаются через прогибы следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^0 - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^0 - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^0 - \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{xx}^{\circ}$ ,  $\sigma_{yy}^{\circ}$ ,  $\sigma_{xy}^{\circ}$  - напряжения в срединной плоскости пластины.

Рассмотрим тонкую упругую пластину, нагруженную в своей плоскости (рис. 2.4) силами  $N_x^{\circ}$ ,  $N_y^{\circ}$ ,  $T^{\circ}$ . Для определения критических нагрузок энергетическим способом необходимо записать

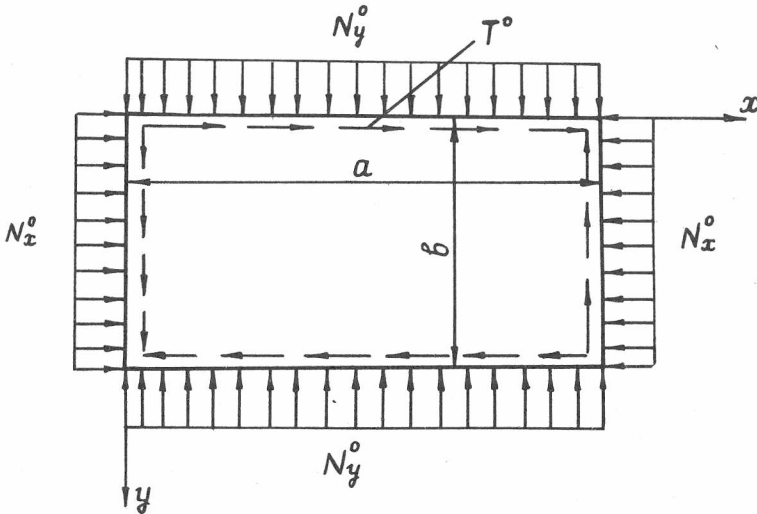


Рис. 2.4. Схема нагружения пластины

выражение потенциальной энергии пластины  $U$ , накопленной при переходе из плоской формы равновесия в криволинейную. Воспользуемся известной формулой [2], которая для пластины примет следующий вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \epsilon_{xy}) d\tau, \quad (2.27)$$

где через  $d\tau$  обозначен элемент объема пластины.

Подставим в подынтегральное выражение (2.27) зависимости (2.2) и представим интеграл в виде суммы двух следующих интегралов:

$$U = U_1 + U_2, \quad (2.28)$$

где

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}^{\circ} \epsilon_{xx}^{\circ} + \sigma_{yy}^{\circ} \epsilon_{yy}^{\circ} + \sigma_{xy}^{\circ} \epsilon_{xy}^{\circ}) d\tau - \quad (2.29)$$

изменение потенциальной энергии деформации срединной плоскости пластины при выпучивании;

$$U_2 = -\frac{1}{2} \int_{\tau} z \left( \sigma_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) d\tau \quad (2.30)$$

выражение для потенциальной энергии изгиба и кручения пластины.

Преобразуя выражение (2.29) с учетом формул (2.18), (2.19), (2.24) и (2.26), а также зависимостей  $N_x^0 = \bar{\sigma}_{xx}^0 \delta$ ,  $N_y^0 = \bar{\sigma}_{yy}^0 \delta$ ,  $T^0 = \bar{\sigma}_{xy}^0 \delta$ , получим

$$U_1 = \iint_0^a \iint_0^b \left[ N_x^0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial u_y}{\partial y} + T^0 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \iint_0^a \iint_0^b \left[ N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (2.31)$$

Преобразуем первый интеграл правой части (2.31), применяя правило интегрирования по частям:

$$\iint_0^a \iint_0^b \left[ N_x^0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial u_y}{\partial y} + T^0 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\ = \left[ \int_0^b (N_x^0 u_x + T^0 u_y) dy \right]_{x=0}^{x=a} + \left[ \int_0^a (N_y^0 u_y + T^0 u_x) dx \right]_{y=0}^{y=b} - \\ - \int_0^a \int_0^b u_x \left( \frac{\partial N_x^0}{\partial x} + \frac{\partial T^0}{\partial y} \right) dx dy - \int_0^a \int_0^b u_y \left( \frac{\partial T^0}{\partial x} + \frac{\partial N_y^0}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.32)$$

Первые два интеграла правой части выражения (2.32) представляют собой работу  $A$ , производимую внешними силами, приложенными к контуру пластины и действующими в срединной плоскости. Из уравнений равновесия элемента пластины вдоль осей  $x$  и  $y$  /3/ следует, что два последних интеграла в (2.32) обращаются в нуль. С учетом этого формулу (2.31) можно переписать в следующем виде:

$$U_1 = A + \frac{1}{2} \iint_0^a \iint_0^b \left[ N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2T^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy, \quad (2.33)$$

где

$$A = \left[ \int_0^b (N_x^0 u_x + T^0 u_y) dy \right]_{x=0}^{x=a} + \left[ \int_0^a (N_y^0 u_y + T^0 u_x) dx \right]_{y=0}^{y=b}.$$

Обратимся к выражению для потенциальной энергии изгиба и кручения пластины (2.30).

Воспользовавшись зависимостями (2.25) для напряжений и проведя

интегрирование по координате  $z$ , получим:

$$U_2 = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]^2 + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (2.34)$$

Запишем выражение для потенциала внешних сил  $\Pi/2$ :

$$\Pi = - \left[ \int_0^b (N_x^0 U_x + T^0 U_y) dy \right]_{x=0}^{x=a} - \left[ \int_0^a (N_y^0 U_y + T^0 U_x) dx \right]_{y=0}^{y=b}. \quad (2.35)$$

Полная энергия пластины складывается из потенциальной энергии деформации срединной плоскости при выпучивании  $U_1$ , потенциальной энергии изгиба и кручения пластины  $U_2$  и потенциала внешних сил  $\Pi$ :

$$V = U_1 + U_2 + \Pi. \quad (2.36)$$

Суммируя выражения (2.33), (2.34) и (2.35), получим полную энергию пластины, нагруженной усилиями в ее срединной плоскости:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2T^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.37)$$

Используя метод Ритца, рассмотрим расчет на устойчивость прямоугольной пластины, изображенной на рис. 2.5. Как видно из схемы нагружения, в пластине возникают внутренние усилия  $N_x^0 = -N$ ,

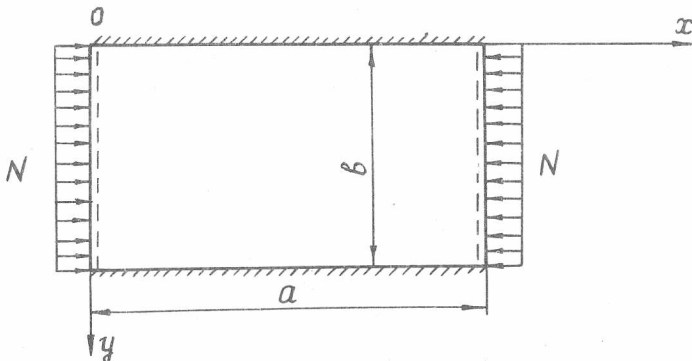


Рис. 2.5. Схема нагружения и закрепления пластины

$N_y^0 = T = 0$ . Граничные условия для сторон пластины будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=a, \\ w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=0, \quad y=b. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Зададимся уравнением срединной поверхности изогнутой пластины, взяв его в следующем виде:

$$w = B \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{b} y\right) \sin \frac{\pi m}{a} x. \quad (2.39)$$

Выражение (2.39) удовлетворяет всем сформулированным выше геометрическим граничным условиям для рассматриваемой пластины.

Введем для упрощения обозначения  $\alpha = \frac{\pi m}{a}$ ,  $\beta = \frac{\pi n}{b}$ , тогда функция прогиба  $w$  примет вид

$$w = B (1 - \cos 2\beta y) \sin \alpha x. \quad (2.40)$$

Подставив значения  $w$  в формулу (2.37), после преобразования придем к следующему выражению для полной энергии пластины:

$$V = \frac{B^2 a b D}{8} (3\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta^2 + 16\beta^4) - \frac{3B^2 \alpha^2 a b N_{кр}}{8}. \quad (2.41)$$

Запишем условие минимума полной энергии  $V$ :

$$\frac{\partial V}{\partial B} = \frac{B a b D}{4} (3\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta^2 + 16\beta^4) - \frac{3B \alpha^2 a b N_{кр}}{4} = 0. \quad (2.42)$$

Отсюда получаем

$$B \cdot \frac{a b}{4} [D (3\alpha^4 + 8\alpha^2 \beta^2 + 16\beta^4) - 3\alpha^2 N_{кр}] = 0. \quad (2.43)$$

Нас интересует нетривиальное решение, поэтому приравняем нулю выражение, стоящее в квадратных скобках, и определим значение критической силы  $N_{кр}$ :

$$N_{кр} = D \left( \alpha^2 + \frac{8}{3} \beta^2 + \frac{16}{3} \frac{\beta^4}{\alpha^2} \right). \quad (2.44)$$

Из анализа формулы (2.44) следует, что число  $n$ , входящее в выражение  $\beta = \frac{\pi n}{b}$ , следует положить равным 1, для того чтобы получить минимальное значение критической силы.

Для определения числа  $m$ , при котором критическая сила будет минимальна, полагаем

$$\frac{d N_{кр}}{d \alpha} = D \left( 2\alpha - \frac{32}{3} \frac{\beta^4}{\alpha^3} \right) = 0. \quad (2.45)$$



Отсюда 
$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{16}{3}} \beta ; \quad \alpha^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \beta^2. \quad (2.46)$$

Найденное значение  $\alpha^2$  подставим в формулу (2.44), получим

$$N_{кр} = D \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \beta^2 + \frac{8}{3} \beta^2 + \frac{16}{3} \beta^4 \frac{\sqrt{3}}{4\beta^2} \right) = D \beta^2 \frac{8}{3} (1 + \sqrt{3}). \quad (2.47)$$

Представим выражение (2.47) в следующем виде:

$$N_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{\beta^2}, \quad \text{где}$$

$$K = \frac{8}{3} (1 + \sqrt{3}) = 7,29. \quad (2.48)$$

Погрешность решения составляет 4,5%.

### 2.3. Устойчивость тонкостенных стержней

В конструкции летательного аппарата широко используются тонкостенные стержни. К ним относятся тонкостенные трубы, профили, полученные из тонкого листового материала или изготовленные прессованием. Профиль можно рассматривать как систему узких пластинок (полок, стенок), жестко соединенных вдоль ребер (рис. 2.6). Особенностью работы тонкостенного сжатого профиля является то, что он может разрушиться от искривления его оси (общая потеря устойчивости)

или от выпучивания какой-либо стенки (местная потеря устойчивости). Общая потеря устойчивости характерна для длинных, а местная — для коротких стержней (рис. 2.7). Оба вида потери устойчивости являются равноопасными, так как приводят к исчерпанию несущей способности элемента. Для тонкостенных стержней определяют значения критических напряжений общей  $\sigma_{кр. общ.}$  и местной  $\sigma_{кр. м.}$  потери устойчивости и для дальнейшего расчета принимают меньшее из них.

Местный характер выпучивания элементов профиля (рис. 2.7а) обусловлен локальными дефектами геометрии, поэтому точной постановки задачи, позволяющей выявить такую форму потери устойчивости, нет.

Приближенный подход к исследованию местной устойчивости профиля основан на определении критических напряжений для каждой из пластинок — полок в отдельности (рис. 2.6) с учетом закрепления ее краев. Наименьшее критическое напряжение принимается в качестве критического напряжения местной потери устойчивости всего стержня.

Если предположить, что критические напряжения местной потери устойчивости не превышают предела текучести (или условного предела текучести  $\sigma_{0,2}$ ) материала, то их значения могут быть найде-

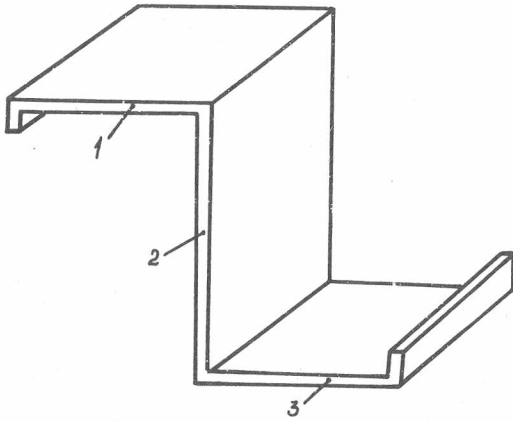


Рис. 2.6. Тонкостенный профиль

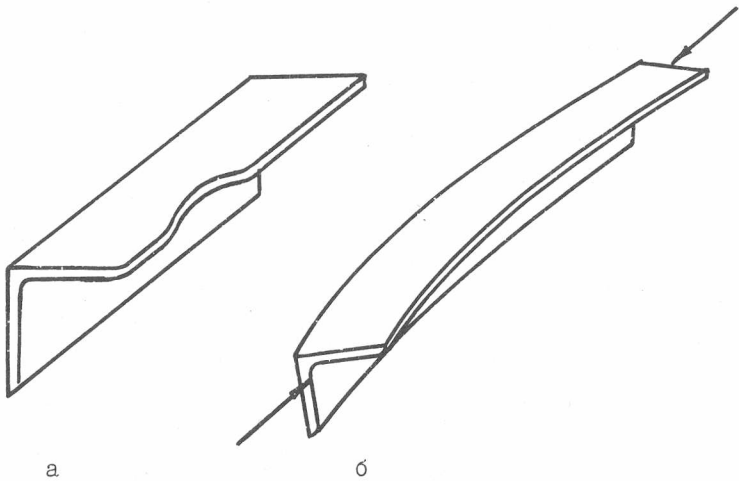


Рис. 2.7. Местная (а) и общая (б) потери устойчивости тонкостенного профиля

ны по следующей формуле:

$$\sigma_{кр.м.} = \sigma_{кр.м}^0 = \frac{0,9KE}{(b/h)^2}, \quad (2.49)$$

где  $b$  - ширина полки (пластинки), устойчивость которой проверяется;  $h$  - толщина полки;  $K$  - коэффициент, зависящий от условий опирания краев полки профиля.

Обычно стенку профиля, к краям которой примыкают две полки, например стенка швеллера (рис. 2.8), считают в запас устойчивости, принимая за пластинку с шарнирно опертыми краями, и полагают  $K=4$ , так как длина ее всегда больше ширины. Полку, имеющую свободный край, рассматривают как пластинку, шарнирно опертую по трем остальным краям, принимая  $K=0,46$ . Для левой или правой половины полки таврового профиля (рис. 2.9) или его стенки можно принять один край защемленным, другой край свободным, а остальные два края, к которым приложены сжимающие напряжения, - шарнирно опертыми. Для этого случая  $K=1,33/1$ .

На жесткость закрепления каждого элемента тонкостенного стержня сильно влияет не только его расположение относительно элементов, но и ширина примыкающих элементов /4/. На краях некоторых авиационных профилей имеются небольшие отгибы, которые значительно повышают устойчивость смежной стенки. Очень часто для подкрепления стенок профиля вдоль свободных краев делают утолщения - "бульбы", выполняющие ту же роль, что и отгибы (рис. 2.8). Все стенки бульбообразных профилей можно считать шарнирно опертыми по контуру и при определении критического напряжения следует принимать  $K=4$ .

В случае общей потери устойчивости профиля (рис. 2.7б) критические напряжения определяют по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр.общ.} = \sigma_{кр.общ.}^0 = C \frac{\pi^2 EJ}{l^2 F}, \quad (2.50)$$

где  $l$  - длина профиля;  $F$ ,  $J$  - площадь и момент инерции сечения профиля относительно оси, перпендикулярной к плоскости изгиба;  $C$  - коэффициент, учитывающий опорные условия.

Если профиль не изолированный, а связан с обшивкой, то в поперечное сечение должна быть включена и площадь сечения обшивки, работающая вместе со стрингером. Значение коэффициента  $C$  следует принимать равным 4 в случае жесткого защемления концов профиля и  $C=1$  в случае шарнирного опирания. В практических расчетах берут значение  $C=2$ , что соответствует приторцованным или полузащемленным опорам.

Если значения напряжений, подсчитанные по формулам (2.49) и

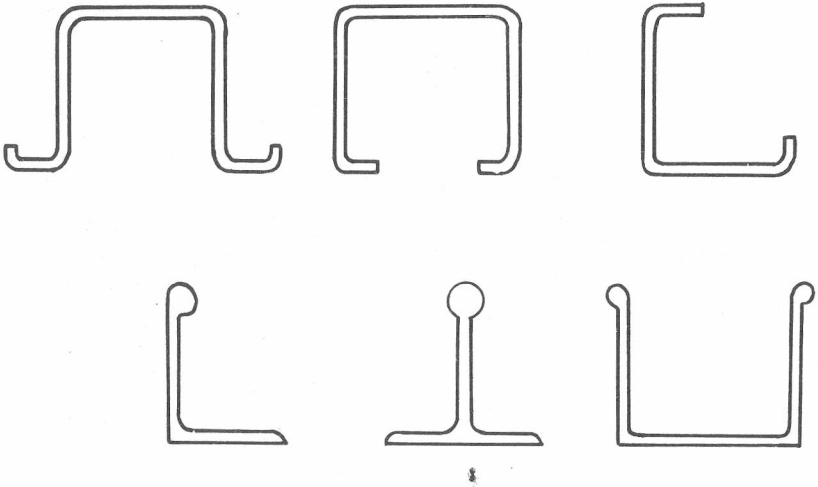


Рис. 2.8. Авиационные профили

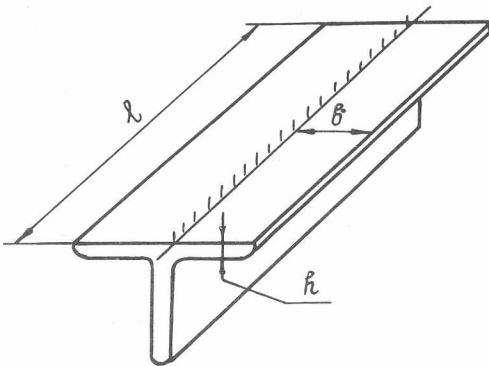


Рис. 2.9. Тавровый профиль

(2.50), окажутся меньше условного предела текучести, то их и принимают за фактические критические напряжения. В противном случае они требуют уточнения одним из следующих способов.

Во-первых, их можно определить по известной полуэмпирической формуле

$$\sigma_{кр} = \sigma_B \frac{1 + \nu}{1 + \nu + \nu^2}, \quad (2.51)$$

где  $\nu = \sigma_B / \sigma_{кр}^0$ ;  $\sigma_B$  - предел прочности материала;  $\sigma_{кр}^0$  - критическое напряжение, вычисленное по формулам (2.49) или (2.50).

Во-вторых, можно воспользоваться зависимостью критических напряжений от гибкости профиля  $\lambda$  (рис. 2.10), полученной с использованием формул Эйлера ( $\lambda > \lambda_0$ ) и Тетмайера-Ясинского ( $\lambda < \lambda_0$ ). Параметр  $\lambda$  при определении критических напряжений  $\sigma_{крM}$

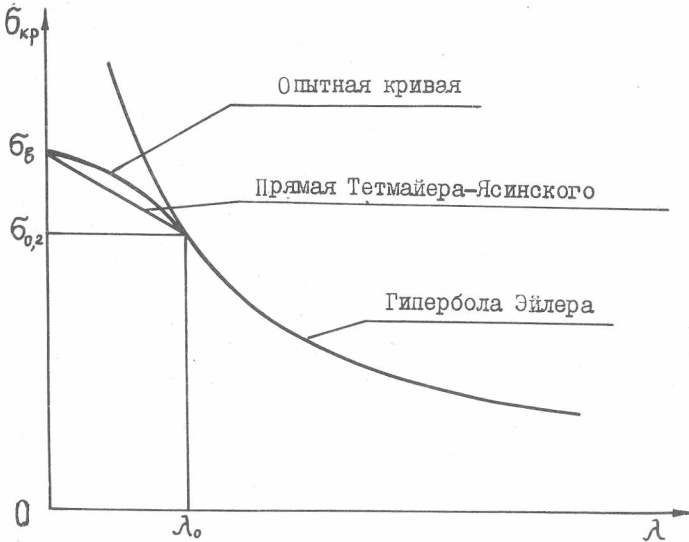


Рис. 2.10. Зависимость  $\sigma_{кр}$  от  $\lambda$

представляет собой отношение ширины полки  $b$  профиля к его толщине  $h$  (рис. 2.9), а при расчете  $\sigma_{кробш}$  - отношение длины  $l$  профиля к его радиусу инерции  $i = \sqrt{J/F}$ .

При напряжениях, превышающих напряжения  $\sigma_{0,2}$ , потеря устойчивости происходит при напряжениях, близких к  $\sigma_B$ . Значения

$\sigma_{кр}$  можно определить с помощью формулы Тетмайера-Ясинского:

$$\sigma_{кр} = \sigma_B - (\sigma_B - \sigma_{0,2}) \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (2.52)$$

Эта формула дает несколько заниженную величину критического напряжения. Значение параметра  $\lambda_0$  следует принимать равным

$\lambda_0 = \sqrt{\frac{0,9 \kappa E'}{\sigma_{0,2}}}$  для местной и  $\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{CE'}{\sigma_{0,2}}}$  для общей форм потери устойчивости.

### 3. РАСЧЕТ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПЛАСТИН ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Пластинки, подкрепленные по продольным краям, способны и после потери устойчивости воспринимать возрастающую нагрузку. Для некоторых конструкций считается допустимым наличие относительно мелких вмятин при условии, что подкрепляющие ее элементы являются достаточно жесткими. В этом случае представляет интерес не только само явление потери устойчивости пластинок, но и их закритическое поведение /4/.

#### 3.1. Расчет подкрепленной пластинки после потери устойчивости от сжатия

Рассмотрим прямоугольную панель, состоящую из тонкой пластинки, подкрепленной продольными ребрами. Панель подвергается сжатию в направлении ребер (рис. 3.1).

Будем полагать, что подкрепляющие ребра остаются прямолинейными, но края пластинки могут свободно скользить вдоль ребер. Рассмотрим сечение пластинки, перпендикулярное к направлению сжатия. Если до потери устойчивости пластинки напряжения сжатия равномерно распределялись по ее ширине (рис. 3.2а), то после выпучивания они более интенсивно возрастают у краев, в центральной же части напряжения мало отличаются от критического значения (рис. 3.2б), определяемого по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{0,9 \kappa E'}{(b/h)^2}. \quad (3.1)$$

Можно условно принять (схема Т.Кармана), что работающими частями пластинки являются только полосы, прилегающие к ее краям (рис. 3.2с). Суммарную ширину этих двух полос, называемую приведенной шириной, обозначим через  $b_{пр}$ . Таким образом, рассматривается пластинка шириной  $b_{пр}$ , эквивалентная по несущей способности данной пластине. Ширину этой пластинки можно найти из условия равенства ее критических напряжений максимальным напряжениям  $\sigma_{max}$  в исходной пластине:

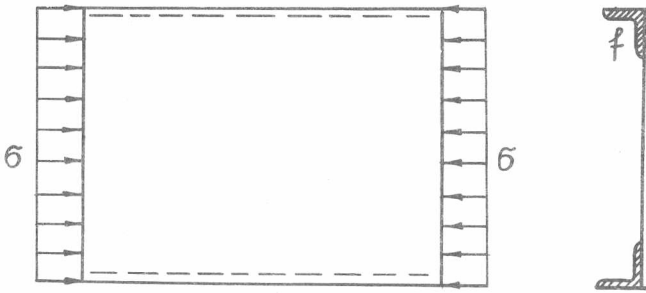


Рис. 3.1. Схема нагружения подкрепленной пластины

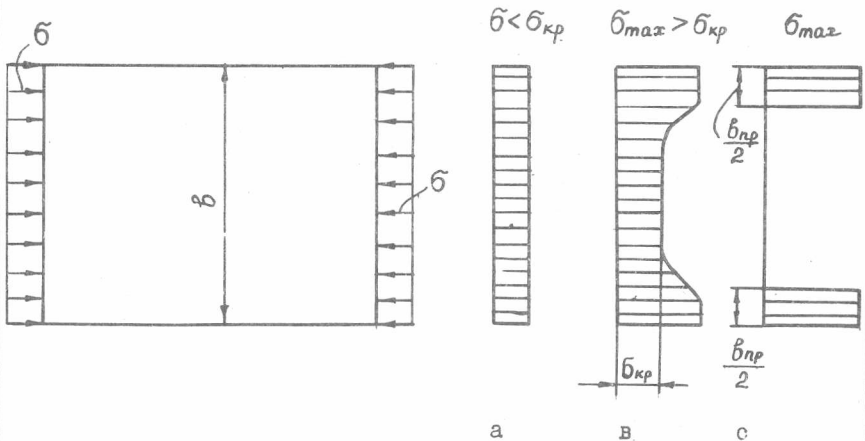


Рис. 3.2. Распределение напряжений в сечениях подкрепленной пластины при сжатии

$$\frac{0,9kE}{(\sigma_{np}/k)^2} = \sigma_{max}. \quad (3.2)$$

Если считать пластинку свободно опертой по всему контуру ( $K = 4$ ), то формула для приведенной ширины пластины получится в виде

$$\sigma_{np} = 1,9k\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}}. \quad (3.3)$$

Последнюю формулу можно записать иначе, если выполнить в (3.2) следующие преобразования:

$$\frac{0,9kE}{(b/k)^2(\sigma_{np}/b)^2} = \sigma_{кр} \left(\frac{b}{\sigma_{np}}\right)^2 = \sigma_{max}.$$

Здесь  $\sigma_{кр}$  - критическое напряжение заданной прямоугольной пластины, определяемое по формуле (3.1).

Таким образом,

$$\sigma_{np} = b\sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{max}}}. \quad (3.4)$$

Формулы (3.3) и (3.4) получены для случая, когда материал пластины и подкрепляющих элементов одинаковый. Если материалы их будут различными, то, как следует из равенства деформаций пластины и профиля (стрингера) в месте их соединения, приведенную ширину пластинки можно определять по следующей формуле:

$$\sigma_{np} = b\sqrt{\frac{\sigma_{кр} E}{\sigma_{стр} E_{стр}}}. \quad (3.5)$$

Здесь  $E_{стр}$ ,  $E$  - модули упругости материалов профиля и пластинки соответственно,  $\sigma_{стр}$  - напряжения в профиле.

Часто вместо понятия приведенной ширины обшивки вводят редуцированный коэффициент  $\varphi$ , равный

$$\varphi = \frac{\sigma_{np}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{стр}}}. \quad (3.6)$$

Редуцированный коэффициент  $\varphi$  показывает долю участия потерявшей устойчивость обшивки в работе всей панели, или, другими словами, какая часть пластинки может считаться работающей с теми же напряжениями, что и стрингер.

С учетом сказанного можно определить нагрузку на подкрепленную пластинку:

$$P = \sigma_{стр} (2f + b k \varphi). \quad (3.7)$$

Увеличение сжимающей нагрузки на панель приводит к уменьшению приведенной ширины пластинки. Приведенная ширина пластины зависит от величины сжимающих напряжений в профиле.

При определении несущей способности панели (максимальной нагрузки, которую панель способна выдержать до разрушения) в формулы



(3.6) и (3.7) подставляют вместо  $\sigma_{стр}$  величину критического напряжения профиля  $\sigma_{кр.стр}$ . Таким образом,

$$P_{пред.} = \sigma_{кр.стр} (2F + \sqrt{h} \varphi), \quad \varphi = \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{кр.стр}}} \quad (3.8)$$

Следует отметить, что для реальных конструкций в эксплуатации допустима потеря устойчивости обшивки-пластины. Для тонкой пластины ее выпучивание наступает при сравнительно небольших сжимающих напряжениях. В дальнейшем вмятины углубляются, увеличивается их число. Наконец, наступает потеря устойчивости всей конструкции (изгибаются стрингеры, потеря устойчивости).

### 3.2. Расчет подкрепленной пластины после потери устойчивости от сдвига

Рассмотрим конструкцию, состоящую из пластины, подкрепленной продольными и поперечными стержнями. Будем в дальнейшем именовать пластину стенкой, продольные стержни - поясами, а поперечные - стойками. Схема нагружения этой системы приведена на рис. 3.3. Считаем, что соединение стенки с поясами и стойками, а также поясов со стойками шарнирное. Полагаем, что стенка воспринимает перерезывающую силу, работая на сдвиг с равномерно распределенными по высоте касательными напряжениями  $\tau$ , а в поясах и стойках при этом возникают нормальные напряжения.

Если касательные напряжения в стенке будут больше критических  $\tau > \tau_{кр}$ , то тонкий лист потеряет устойчивость и стенка начнет работать в других условиях. Причем после потери устойчивости сила, действующая на балку, может быть значительно увеличена. При нагрузке, когда касательные напряжения по величине превосходят критические значения, стенка выпучивается, образуя диагональные волны, натяжением которых и будет восприниматься нагрузка (рис. 3.4а).

Для того, чтобы понять, почему образуются диагональные волны, вырежем из пластины элементарный прямоугольник, который до потери устойчивости нагружен чистым сдвигом  $\tau$ . Этим касательным напряжениям соответствуют главные нормальные напряжения  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ , действующие в площадках, направленных под углом  $45^\circ$  к сторонам рассматриваемого элемента (рис. 3.4б).

Если сжимающее напряжение  $\sigma_2$  превзойдет некоторое значение, то тонкая стенка потеряет устойчивость, т.е. образуются волны в направлении  $\sigma_2$ . При дальнейшем нагружении балки в тонкой стенке будут увеличиваться только напряжения  $\sigma_1$ . Эти напряжения нап-

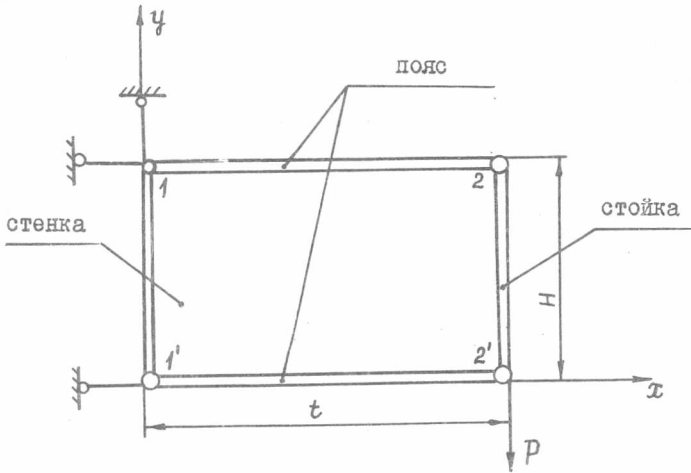


Рис. 3.3. Схема подкрепленной пластины .

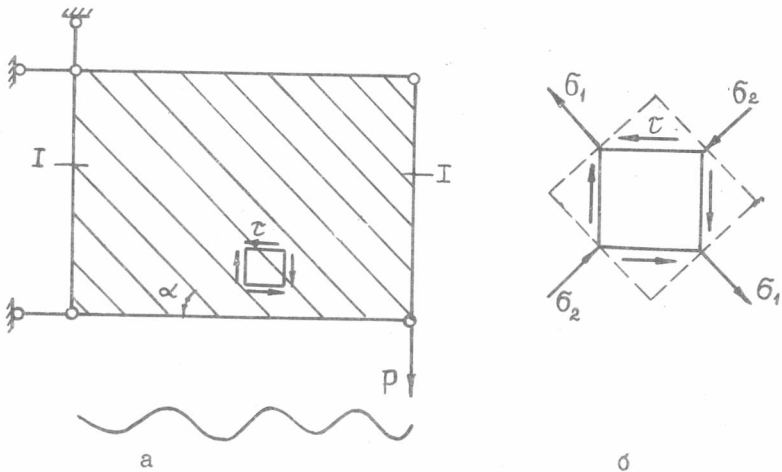


Рис. 3.4. Расчетная схема подкрепленной пластины

равлены по образующим волн, составляющим с горизонтальной осью  $X$  угол, близкий к  $45^\circ$ . Очень тонкая стенка теряет устойчивость при малых нагрузках. В этом случае, принимая  $\sigma_2 \approx 0$ , получим напряженное состояние стенки с главным напряжением:

$$\sigma_1 = \sigma.$$

Когда напряжения  $\sigma$  достигнут разрушающего значения, то будет исчерпана несущая способность системы.

Выясним, как будут работать элементы окантовки после потери устойчивости стенки. Выделим из пластинки малый элемент (рис. 3.5а) и рассмотрим его равновесие. Спроектируем усилия на ось  $y$ :

$$\tau dF = \sigma dF \cos \alpha \sin \alpha.$$

Отсюда, сокращая на  $dF$ , получим

$$\tau = \sigma \cos \alpha \sin \alpha. \quad (3.9)$$

При расчете стенки после потери устойчивости интерес представляют напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , которые создадут дополнительную нагрузку на пояса и стойки.

Записав уравнение равновесия рассматриваемого элемента в направлении оси  $X$ , получим

$$\sigma_{xx} = \sigma \cos^2 \alpha. \quad (3.10)$$

Из уравнения равновесия в проекции на вертикальную ось, записанного для элемента, изображенного на рис. 3.5б, имеем

$$\sigma_{yy} = \sigma \sin^2 \alpha. \quad (3.11)$$

Так как поперечная сила воспринимается только стенкой, то

$$\tau = \frac{P}{Hh}. \quad (3.12)$$

С учетом (3.12) зависимости (3.9)–(3.11) примут следующий вид:

$$\sigma = \frac{P}{Hh \sin \alpha \cos \alpha},$$

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{Hh} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{yy} = \frac{P}{Hh} \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.13)$$

Рассмотрим, как работают пояса и стойки после потери устойчивости стенки. Выделим элемент верхнего пояса длиной  $dx$  и часть прилегающей к нему стенки и покажем усилия взаимодействия между ними (рис. 3.6). Из схемы видно, что пояс нагружается погонной осе-

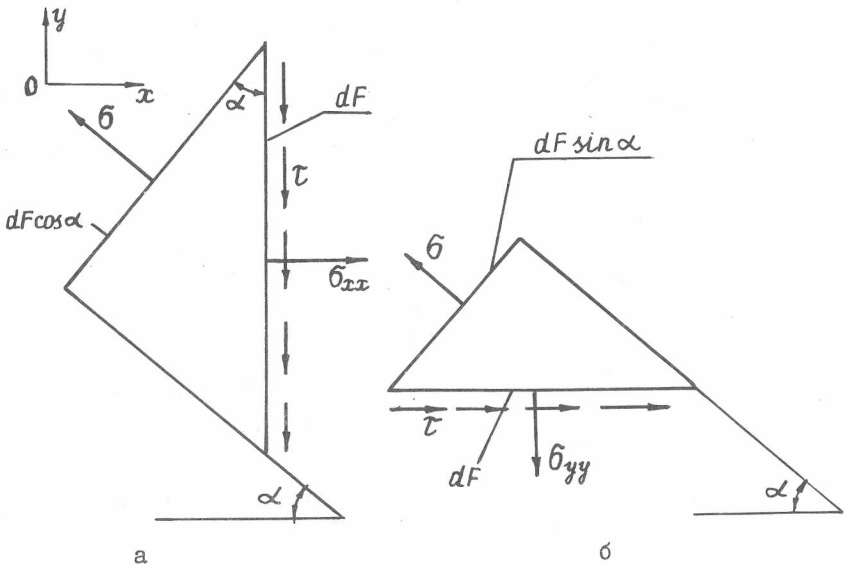


Рис. 3.5. К составлению уравнений равновесия стенки

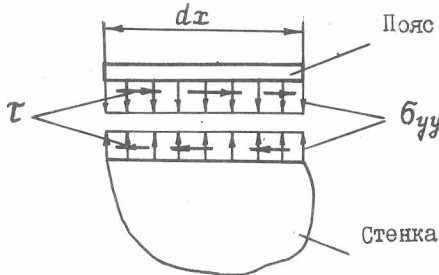


Рис. 3.6. К определению усилий взаимодействия между поясом и стенкой

вой силой  $q_r = \tau h$  и поперечной нагрузкой  $q_b = \sigma_{yy} h$ , которые будут равны (рис. 3.7)

$$q_r = \frac{P}{H}, \quad q_b = \frac{P}{H} \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.14)$$

Аналогично для стоек будет

$$q'_b = \frac{P}{H}, \quad q'_r = \frac{P}{H} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.15)$$

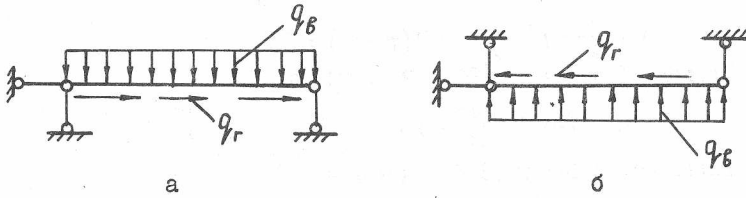


Рис. 3.7. Схема нагружения верхнего (а) и нижнего (б) поясов

Схема нагружения стоек приведена на рис. 3.8. Стойки рассматриваются как балки, опирающиеся на верхний и нижний поясы.

Получим выражения для осевых усилий в поясах. Для этого проведем сечение на расстоянии  $X$  от левого конца стенки и рассмотрим равновесие правой части (рис. 3.9).

Запишем уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось

$$N_b + N_n + \sigma_{xx} H k = 0$$

или

$$N_b - N_n + P \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

(3.16)

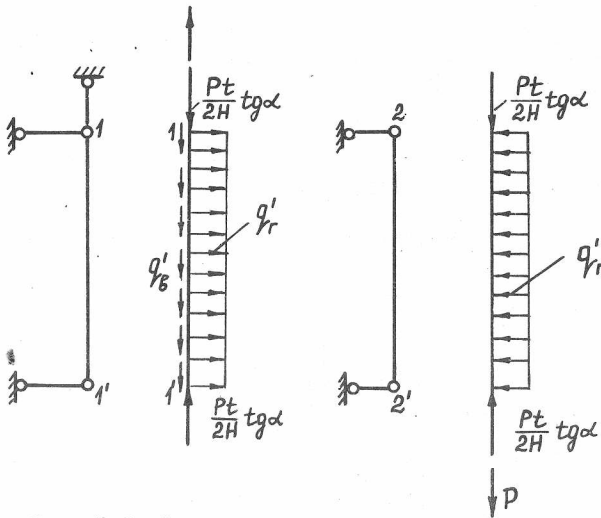


Рис. 3.8. Схема нагружения стоек

Уравнение равновесия моментов относительно точки  $a$

$$N_b \frac{H}{2} - N_n \frac{H}{2} - P(t-x) = 0.$$

Введем обозначение  $M = -P(t-x)$ . Тогда

$$N_b - N_n + \frac{2M}{H} = 0. \quad (3.17)$$

Далее из (3.16) и (3.17) находим

$$N_b = -\frac{M}{H} - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha; \quad (3.18)$$

$$N_n = \frac{M}{H} - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.19)$$

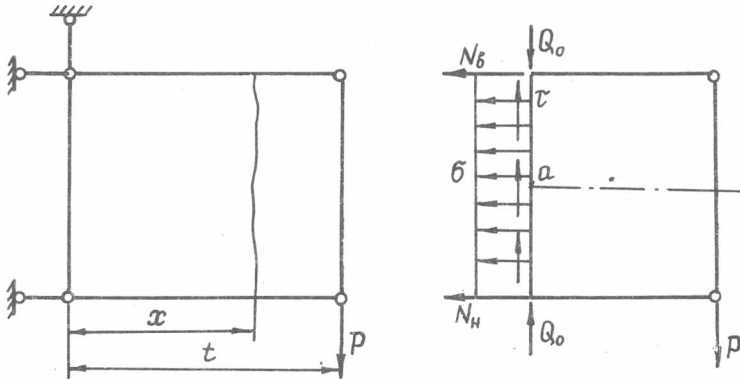


Рис. 3.9. К определению осевых сил в поясах

Эпюры осевых сил в верхнем и нижнем поясах приведены на рис. 3.10.

Верхний пояс

Нижний пояс

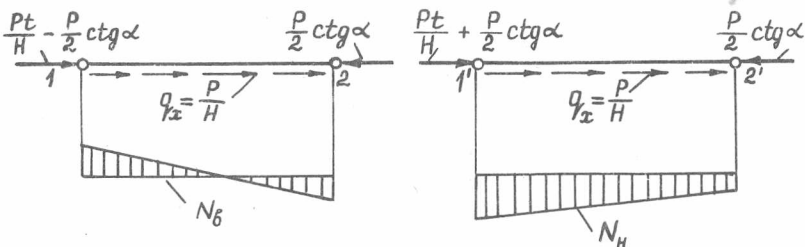


Рис. 3.10. Схемы нагружения и эпюры осевых сил в поясах

Угол наклона волны потерявшей устойчивость обшивки зависит от жесткости поясов и стоек. Для определения этого угла можно воспользоваться условием минимума потенциальной энергии системы, что даст следующую формулу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{E}{E_n} \frac{H h}{2 F_n}}{1 + \frac{E}{E_{cm}} \frac{t h}{F_{cm}}}}, \quad (3.20)$$

где  $E_n$ ,  $F_n$  - модуль упругости и площадь поперечного сечения пояса,  $E_{cm}$ ,  $F_{cm}$  - модуль упругости и площадь поперечного сечения стойки,  $E$  - модуль упругости материала стенки. При одинаковом материале обшивки и окантовки ( $E = E_n = E_{cm}$ ) из (3.20) получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{H h}{2 F_n}}{1 + \frac{t h}{F_{cm}}}}. \quad (3.21)$$

### 3.3. Расчет балки с тонкой стенкой типа лонжерона крыла самолета после потери устойчивости стенки

Рассмотрим конструкцию, состоящую из тонкой стенки с параллельными поясами и рядом промежуточных стоек (рис. 3.II). В дальнейшем будем называть ее балкой с тонкой стенкой. Исследуем напряженное состояние этой балки при нагружении ее сосредоточенными силами, приложенными в тех сечениях, где расположены стойки. Будем считать, что под действием касательных сил стенка теряет устойчивость. Если пояса и крайние стойки абсолютно жестки на изгиб, то в стенке появятся диагональные волны с постоянным углом наклона  $\alpha$  и постоянным по величине напряжением  $\sigma$  /4/. Со стороны потерявшей устойчивость стенки на пояса и стойки будут действовать усилия, вызывающие их местный изгиб.

Для того, чтобы найти напряжения, возникающие в элементах конструкции, воспользуемся методом сечений. Проведем поперечное сечение балки на расстоянии  $x$  от свободного конца, покажем силы, которые будут действовать на отсеченную часть: на обшивку - диагональные напряжения  $\sigma$ , дающие равнодействующую силу  $Z$ , проходящую через середину высоты балки; на верхний и нижний пояса - осевые силы  $N_g$  и  $N_n$ ; местные перерезывающие силы  $Q_g$  и  $Q_n$  и соответствующие им изгибающие моменты  $M_g$  и  $M_n$ , возникающие за счет натяжения обшивки между поясами (рис. 3.I2).

Величина равнодействующей силы  $Z$  равна (рис. 3.I3)

$$Z = \sigma H h \cos \alpha, \quad (3.22)$$

где  $h$  - толщина обшивки.

Из условия равновесия отсеченной части балки с учетом того, что  $Q_B = Q_H$ , а  $M_B = M_H$ , запишем сумму проекций всех сил на вертикальную ось  $y$ :

$$Z \sin \alpha - Q = 0,$$

отсюда находится значение перерезывающей силы в сечении балки

$$Q = Z \sin \alpha. \quad (3.23)$$

Выразив напряжения  $\sigma$  из уравнения (3.22) и используя (3.23), получим

$$\sigma = \frac{Z}{H h \cos \alpha} = \frac{|Q|}{H h \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (3.24)$$

В формуле (3.24) значение перерезывающей силы  $Q$  следует подставлять по абсолютной величине, так как независимо от знака перерезывающей силы  $Q$  напряжение  $\sigma$  всегда положительно (растягивающее).

Проектируя силу  $Z$  на ось  $x$ , получим

$$X = Z \cos \alpha.$$

Подставляя сюда значение  $Z$  из (3.23), будем иметь

$$X = |Q| \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.25)$$

Отметим, что сила  $X$  всегда направлена от сечения и воспринимается сжатием поясов, и так как проходит через середину сечения балки, то

$$N'_B = N'_H = -\frac{|Q|}{2} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.26)$$

Кроме того, в поясах будут действовать осевые силы, создающие пару с плечом  $H$ , вызванную изгибающим моментом  $M$ , т.е.

$$N''_H = -N''_B = \frac{M}{H}. \quad (3.27)$$

Следовательно, каждый из поясов будет нагружаться следующим образом:

$$\text{верхний пояс: } N_B = N'_B + N''_B = \frac{M}{H} - \frac{|Q|}{2} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\text{нижний пояс: } N_H = N'_H + N''_H = -\frac{M}{H} - \frac{|Q|}{2} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.28)$$

Итак, после потери устойчивости стенки в поясах возникают дополнительные сжимающие усилия. Для того, чтобы определить значение осевой силы в любом сечении балки, необходимо знать в этом сечении величину изгибающего момента и перерезывающей силы. Рассматривая



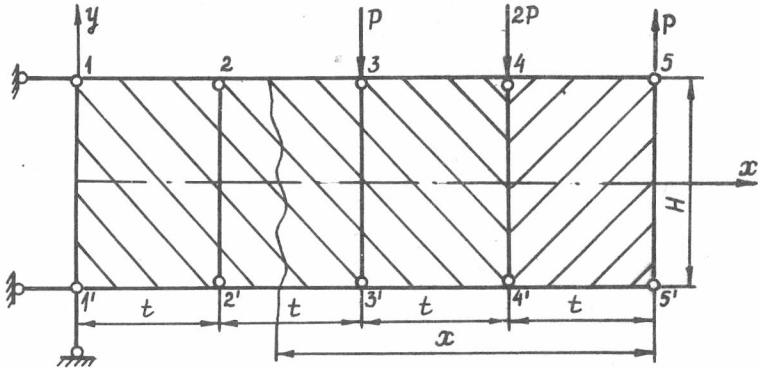


Рис. 3.11. Схема балки с тонкой стенкой

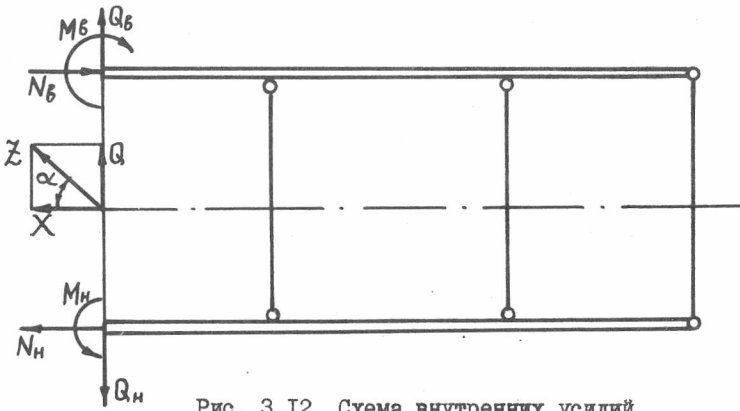


Рис. 3.12. Схема внутренних усилий в сечении балки

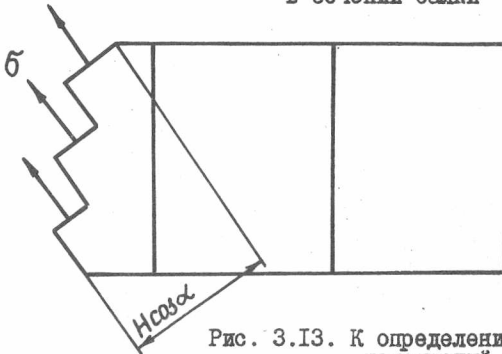


Рис. 3.13. К определению нормальных напряжений

конструкцию (рис. 3.11) как балку, строят для нее эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 3.14), используя которые, по формулам (3.28) можно легко определить значения осевых сил в верхнем и нижнем поясах. Отметим, что если до потери устойчивости стенки значения осевых сил в верхнем и нижнем поясах были одинаковы, то после потери устойчивости осевые силы будут различными. Примерный вид эпюр осевых сил в поясах после потери устойчивости стенки показан на рис. 3.15.

Определим нагрузку, действующую на пояса и стойки после потери устойчивости стенки. Как видно из рис. 3.16а, со стороны стенки на пояса действуют нормальные усилия под углом  $\alpha$ , нагружая их распределенными силами

$$q = 1 \cdot h \cdot \sigma \sin \alpha = \frac{|Q|}{H \cos \alpha}. \quad (3.29)$$

Горизонтальная составляющая этой нагрузки

$$q_r = q \cos \alpha = \frac{|Q|}{H}. \quad (3.30)$$

создает изменение осевой силы в поясе, величина которой определяется формулой (3.28).

Вертикальная составляющая

$$q_e = q \sin \alpha = \frac{|Q|}{H} \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.31)$$

вызывает местный изгиб поясов и сжатие стоек. Сила  $N$ , сжимающая стойку, при равных расстояниях  $t$  между ними будет равна

$$N = q t = \frac{|Q| t}{H} \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.32)$$

Со стороны стенки на стойку (рис. 3.16б) действует распределенная нагрузка

$$q' = \sigma h \cos \alpha = \frac{|Q|}{H \sin \alpha}.$$

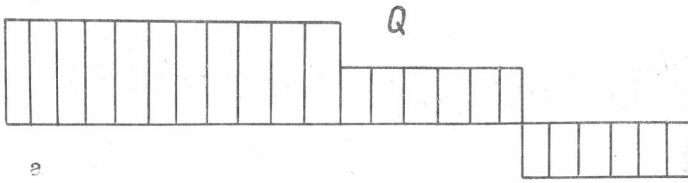
Ее вертикальная составляющая  $q'_e$  вызывает изменение осевой силы в стойке

$$q'_e = q' \sin \alpha = \frac{|Q|}{H}. \quad (3.33)$$

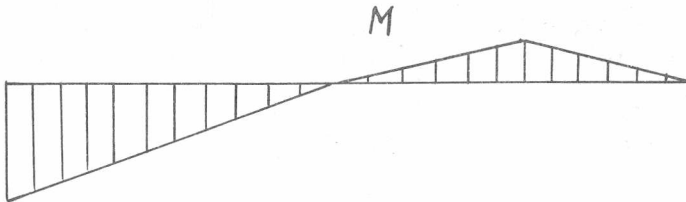
Горизонтальная же составляющая  $q'_r$  вызывает изгиб стойки и дополнительное сжатие поясов

$$q'_r = q' \cos \alpha = \frac{|Q|}{H} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (3.34)$$

Сказанное выше будет относиться только к крайним стойкам, ко-

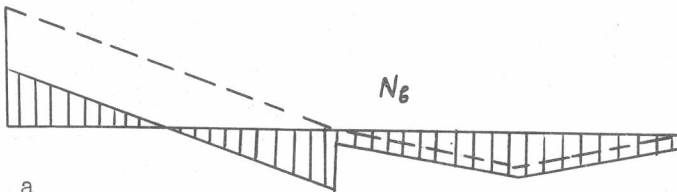


а

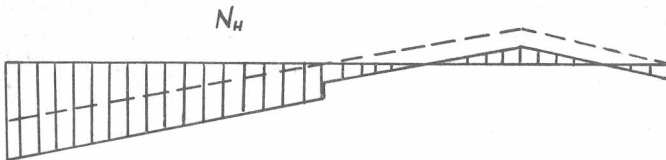


б

Рис. 3.14. Эпюры поперезывающих сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  для тонкостенной балки



а



б

Рис. 3.15. Эпюры осевых сил в верхнем и нижнем поясах

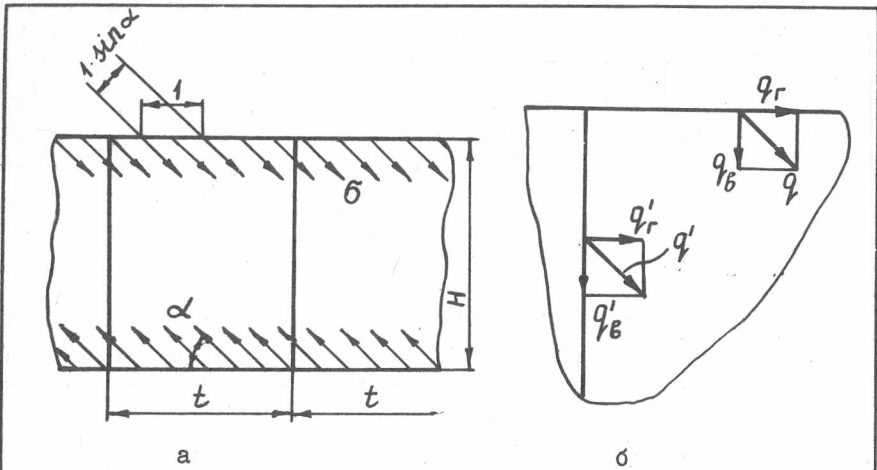


Рис. 3.16. Схема нагружения поясов и стоек.

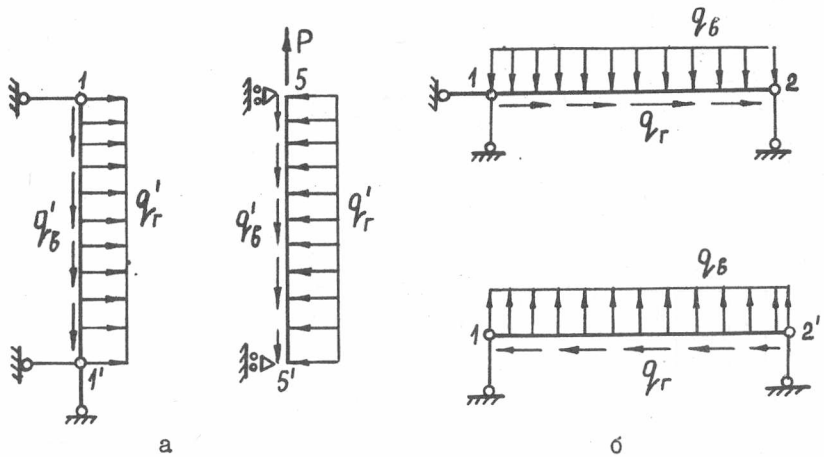


Рис. 3.17. Схема нагружения крайних стоек и поясов

торне нагружаются лишь с одной стороны (рис. 3.17а). Внутренние стойки нагружаются с двух сторон. Величина нагрузки будет зависеть от величины и знака перерезывающих сил  $Q$  слева и справа от стойки, а именно: если перерезывающая сила справа и слева от стойки одного знака, то потоки  $q'_6$  и  $q'_r$  вычитаются, если они разного знака, то силы  $q'_6$  складываются, а  $q'_r$  вычитаются. Если перерезывающие силы слева и справа от какой-либо стойки равны по величине и по знаку, то эта стойка не нагружается распределенными силами  $q'_6 = q'_r = 0$ .

Для расчета верхнего и нижнего поясов после потери устойчивости стенки их представляют как многопролетные неразрезные балки, опертые на стойках. Проведя расчет с помощью уравнений трех моментов, определяют величины опорных моментов и реакций опор. Силы, равные по величине реакциям опор и противоположно им направленные, будут сжимать стойки.

В результате всего изложенного можно заключить, что пояса и стойки работают после потери устойчивости стенки в условиях продольно-поперечного изгиба.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

Круговые шпангоуты, являющиеся подкрепляющими элементами корпуса летательного аппарата, могут испытывать сжимающие равномерные или неравномерные нагрузки, от действия которых возможна потеря устойчивости (рис. 4.1). Рассмотрим метод определения критической нагрузки для кольца с помощью статического критерия.

##### 4.1. Дифференциальные уравнения изгиба тонкого кругового кольца

Рассмотрим тонкое кольцо, у которого размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом  $R$ . Пусть кольцо нагружено в своей плоскости радиальными  $q_n$  и касательными  $q_t$  нагрузками.

Обозначим через  $w$  и  $v$  радиальные и касательные перемещения точек осевой линии кольца, а через  $\vartheta$  - угол поворота сечения кольца. Их положительные направления показаны на рис. 4.2. Если предположить, что точки осевой линии кольца получают только касательные перемещения, то угол поворота сечения кольца  $\vartheta_v$ , обусловленный этими перемещениями, будет равен (рис. 4.3а)

$$\vartheta_v = \frac{v}{R} \quad (4.1)$$

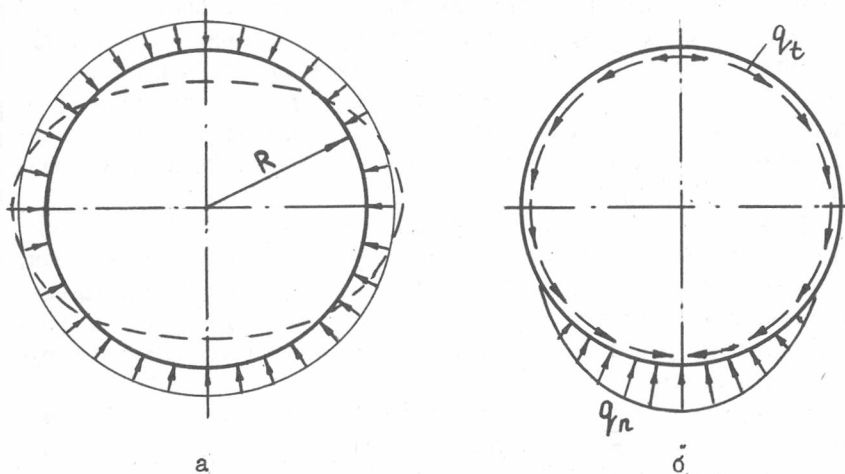


Рис. 4.1. Нагружение кольца сжимающей нагрузкой (а) равномерной, (б) неравномерной

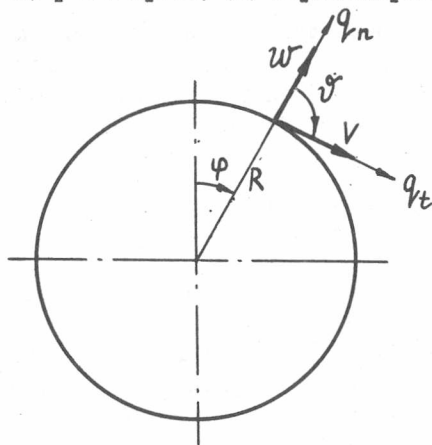


Рис. 4.2. Положительные направления нагрузок и перемещений

Из рассмотрения элемента кольца, точки которого получили только нормальные перемещения  $w$  (рис. 4.3б), видно, что угол поворота, обусловленный ими,

$$\vartheta_w = -\frac{1}{R} \frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{R} w' \quad (4.2)$$

Здесь и в дальнейшем производную по углу  $\varphi$  будем обозначать штрихом.

Учитывая, что полный угол поворота  $\vartheta$  сечения кольца складывается из двух составляющих  $\vartheta_v$  и  $\vartheta_w$ , получим следующее выражение для угла поворота сечения через перемещения точек осевой линии:

$$\vartheta = \frac{1}{R} (v - w') \quad (4.3)$$

Обратимся к определению деформаций осевой линии, выразив их через перемещения  $V$  и  $W$  (рис. 4.4а). Так деформации, обусловленные касательными перемещениями  $V$ , будут равны

$$\varepsilon_v = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{1}{R} \frac{dV}{d\varphi} = \frac{1}{R} V' \quad (4.4)$$

Деформации  $\varepsilon_w$ , вызванные радиальными перемещениями, как видно из рис. 4.4б, определим следующим образом:

$$\varepsilon_w = \frac{(R+w)d\varphi - R d\varphi}{R d\varphi} = \frac{w}{R} \quad (4.5)$$

Полная относительная деформация осевой линии кольца  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{1}{R} (w + V') \quad (4.6)$$

Рассмотрим, как изменяются перемещения и деформации в произвольной точке  $m$  сечения кольца. Как видно из рис. 4.5, перемещения этой точки в осевом направлении и вдоль оси  $z$  будут равны (принимая гипотезу плоских сечений)

$$\begin{aligned} V^{(z)} &= V + z \vartheta, \\ w^{(z)} &= w. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Относительные же деформации будут равны:

$$\varepsilon^{(z)} = \frac{1}{R+z} [w^{(z)} + V^{(z)'}] = \frac{1}{R(1+\frac{z}{R})} [w + V' + z \vartheta'] \quad (4.8)$$

Так как кольцо тонкое ( $z/R \ll 1$ ), то последнее выражение можно записать в следующем виде:

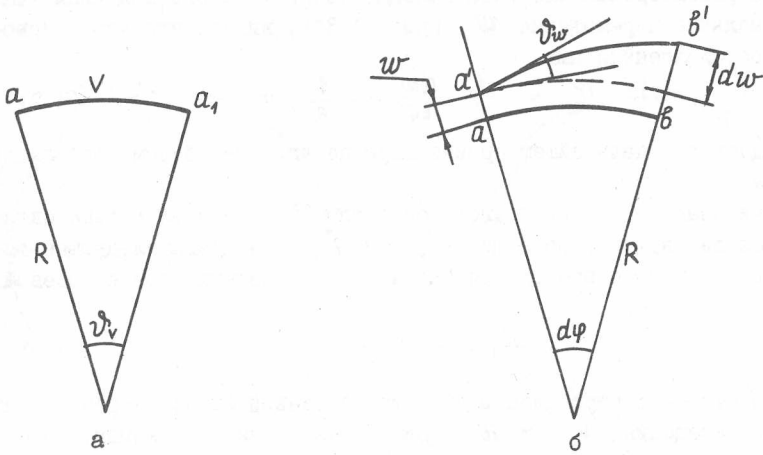


Рис. 4.3. К определению угла поворота сечения кольца

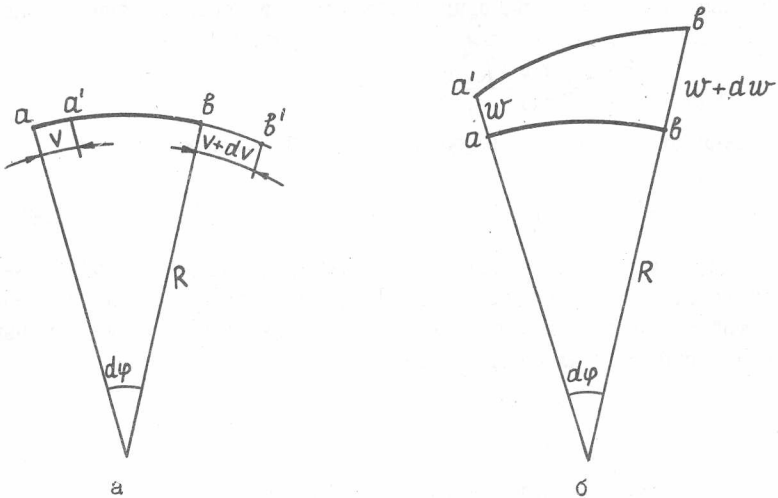


Рис. 4.4. К определению деформаций осевой линии кольца



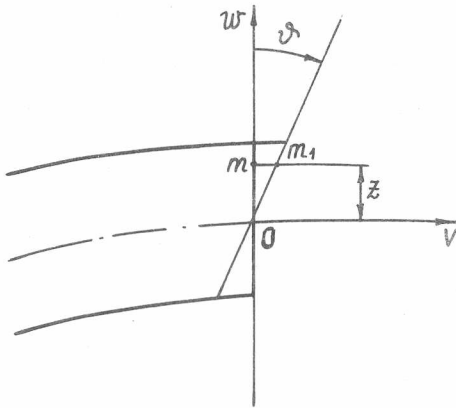


Рис. 4.5. К определению деформаций в произвольной точке сечения кольца

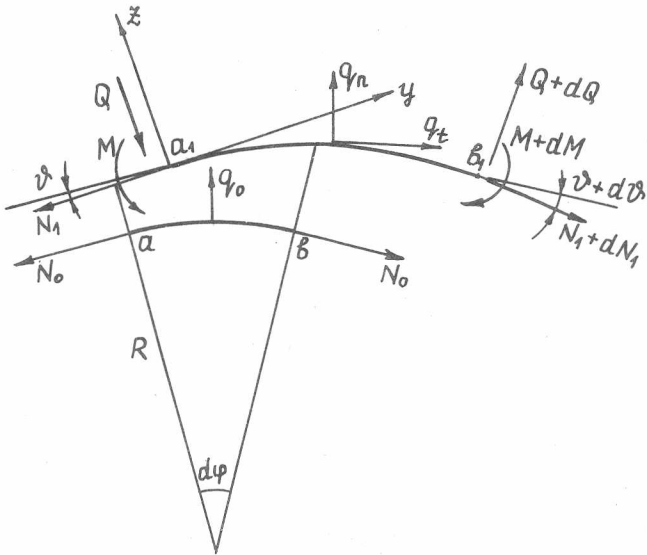


Рис. 4.6. Элемент кольца в деформированном состоянии

$$\varepsilon^{(z)} = \frac{1}{R} (w + v' + z v''). \quad (4.9)$$

До деформации кривизна кольца равнялась  $\frac{1}{R}$ . Изменение кривизны оси кольца при деформации

$$\varkappa = \frac{1}{R} v'' \quad (4.10)$$

С учетом зависимостей (4.6) и (4.10) можем записать

$$\varepsilon^{(z)} = \varepsilon + z \varkappa. \quad (4.11)$$

Используя закон Гука, запишем выражение для нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения кольца:

$$\sigma = E \varepsilon^{(z)} = E (\varepsilon + z \varkappa). \quad (4.12)$$

Эти напряжения дадут результирующую осевую силу  $N$  и изгибающий момент  $M$  :

$$N = \int_F \sigma dF = E F \varepsilon, \quad (4.13)$$

$$M = \int_F \sigma z dF = \int_F E (\varepsilon + z \varkappa) z dF = E \left[ \varepsilon \int_F z dF + \varkappa \int_F z^2 dF \right]. \quad (4.14)$$

Интеграл  $\int_F z dF = 0$ , так как представляет собой статический момент сечения кольца, а  $\int_F z^2 dF = J$  - момент инерции этого же сечения. Тогда

$$M = E J \varkappa. \quad (4.15)$$

В дальнейших рассуждениях для вывода дифференциального уравнения равновесия будем предполагать, что деформации растяжения средней линии кольца равны нулю ( $\varepsilon = 0$ ). Из этого условия по формуле (4.6) следует, что

$$-w = v'. \quad (4.16)$$

Тогда с учетом зависимостей (4.3) и (4.10) имеем

$$\varkappa = \frac{1}{R} v'' = \frac{1}{R^2} (v' - w'') = -\frac{1}{R^2} (w'' + w). \quad (4.17)$$

При этом для изгибающего момента

$$M = -\frac{E J}{R^2} (w'' + w). \quad (4.18)$$

Это уравнение изгиба криволинейных стержней известно как уравнение Буссинеска.

Воспользуемся дифференциальными уравнениями равновесия кольца /5,6/:

$$\frac{dN}{d\varphi} + Q = -Rq_t, \quad -\frac{dQ}{d\varphi} + N = Rq_n, \quad Q = -\frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi}. \quad (4.19)$$

Из этих зависимостей выводим

$$Q = -\frac{EJ}{R^3} (w'''' + w'), \quad N = -\frac{EJ}{R^3} (w'''' + w'') + Rq_n, \\ -\frac{EJ}{R^3} (w'''' + w''''') + Rq_n' - \frac{EJ}{R^3} (w'''' + w'') + Rq_t = 0. \quad (4.20)$$

Введем обозначение

$$\ell(w) = \frac{EJ}{R^3} \left( \frac{d^5 w}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \frac{dw}{d\varphi} \right), \quad (4.21)$$

тогда последнее из уравнений (4.20) примет вид

$$\ell(w) = R(q_n' + q_t). \quad (4.22)$$

Получили линейное дифференциальное уравнение изгиба кольца.

Для решения задачи об устойчивости необходимо записать уравнения для деформированного состояния кольца (рис. 4.6). После преобразований получим

$$\ell(w) = \tau q_t - \tau q_n' - \frac{d^2(N\vartheta)}{d\varphi^2} - \tau \frac{d(\vartheta q_t)}{d\varphi}. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) является линейным. Схема решения задачи будет выглядеть следующим образом. В момент потери устойчивости кольца возможны две формы равновесия: исходная докритическая и новая некруговая.

Обозначим через  $w^0$ ,  $v^0$ ,  $N^0$  величины, относящиеся к докритическому состоянию в тот момент, когда нагрузки приобретают значения  $q_{tкр}$  и  $q_{nкр}$ . При этих же значениях нагрузок возможно новое равновесное состояние, в котором и становятся равными  $w^0 + w^*$ ,  $v^0 + v^*$ ,  $\vartheta^0 + \vartheta^*$ ,  $N^0 + N^*$ .

Запишем уравнение равновесия для момента, когда выпучивания еще не произошло:

$$\ell(w) = Rq_{tкр} - Rq_{nкр}' - \frac{d^2(N^0\vartheta^0)}{d\varphi^2} - \frac{Rd(\vartheta^0 q_{tкр})}{d\varphi}, \quad (4.24)$$

и для искривленного состояния:

$$\ell(w^0 + w^*) = Rq_{tкр} + Rq_{nкр}' - \frac{d^2[(N^0 + N^*)(\vartheta^0 + \vartheta^*)]}{d\varphi^2} - R \frac{d[(\vartheta^0 + \vartheta^*) q_{tкр}]}{d\varphi}. \quad (4.25)$$

Вычтем (4.24) из (4.25) и отбросим при этом члены высшего порядка малости. В результате получим

$$\ell(w^*) = -\frac{d^2(N^0 \vartheta^*)}{d\varphi^2} - \frac{d^2(N^* \vartheta^0)}{d\varphi^2} - R \frac{d(\vartheta^* q_{ткр})}{d\varphi}. \quad (4.26)$$

С помощью уравнения (4.26) может быть решена задача устойчивости кольца. Решение выполняется в два этапа. На первом из них решается обычная задача, в которой из линейных уравнений определяются величины  $N^0$ ,  $\vartheta^0$ . Эти функции подставляются в дифференциальное уравнение устойчивости и устанавливаются условия, при которых эти уравнения имеют ненулевое решение. Это условие и определяет критическое состояние кольца.

#### 4.2. Устойчивость кольца, нагруженного равномерно распределенной радиальной сжимающей нагрузкой

Рассмотрим кольцо, нагруженное равномерной сжимающей нагрузкой  $q$  (рис. 4.7). Найдем усилия в кольце в докритическом состоянии. Из уравнения равновесия элемента кольца можно получить

$$N^0 = -qR. \quad (4.27)$$

Поскольку касательная нагрузка  $q_t$  отсутствует, а угол поворота сечения кольца  $\vartheta^0 = 0$ , то уравнение (4.26) примет вид

$$\ell(w^*) = qR \frac{d^2 \vartheta^*}{d\varphi^2}.$$

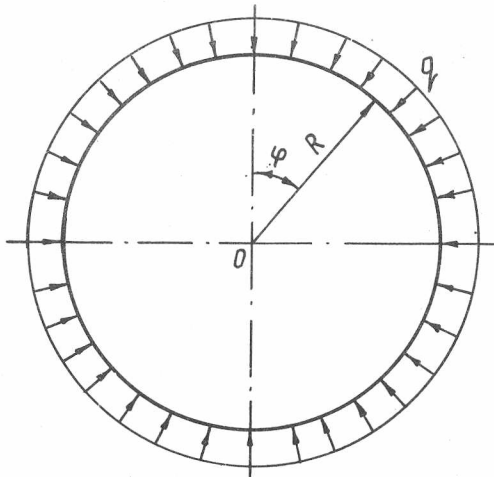


Рис. 4.7. Схема нагружения кольца

С учетом зависимостей (4.17) и (4.21) имеем

$$\frac{d^2 \vartheta^*}{d\varphi^2} = -\frac{1}{R} (w^{*''''} + w^{*'})$$

$$\frac{EJ}{R^3} (w^{*v} + 2w^{*''''} + w^{*'}) + q (w^{*''''} + w^{*'}) = 0 \quad (4.28)$$

Найдем значение нагрузки  $q$ , при котором возможно появление новой, отличной от круговой, формы равновесия. Для этого будем искать решение уравнения (4.28) в следующем виде:

$$w^* = A \sin n\varphi \quad (4.29)$$

Подстановка (4.29) в (4.28) дает

$$A \left[ \frac{EJ}{R^3} (n^5 - 2n^3 + n) + q_{кр} (-n^3 + n) \right] \cos n\varphi = 0 \quad (4.30)$$

Случай  $A = 0$  не представляет интереса, поэтому в (4.30) приравняем нулю выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$\frac{EJ}{R^3} (n^5 - 2n^3 + n) + q_{кр} (-n^3 + n) = 0.$$

Отсюда следует

$$q_{кр} = \frac{EJ}{R^3} (n^2 - 1). \quad (4.31)$$

Минимальное значение  $q_{кр}$  будет иметь место при  $n = 2$ , поэтому

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}. \quad (4.32)$$

## 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК

### 5.1. Постановка задачи

Задачи устойчивости оболочек представляют значительный интерес при конструировании и расчетах летательных аппаратов. Можно сказать, что корпус летательного аппарата состоит главным образом из оболочек. Отсюда и возникают многочисленные задачи расчета устойчивости оболочек различной формы, гладких и подкрепленных, изотропных и анизотропных, деформируемых в пределах упругости и за ее пределами.

Поведение оболочек при потере устойчивости существенно отличается от поведения стержней и пластин. Выпучивание оболочек, как правило, сопровождается появлением не только напряжений изгиба, но и дополнительных напряжений в срединной поверхности. Для того, чтобы можно было проследить это отличие, рассмотрим диаграммы зависимости между нагрузкой  $P$  и прогибом  $w$  в задачах устойчивости

стержня, пластины и оболочки.

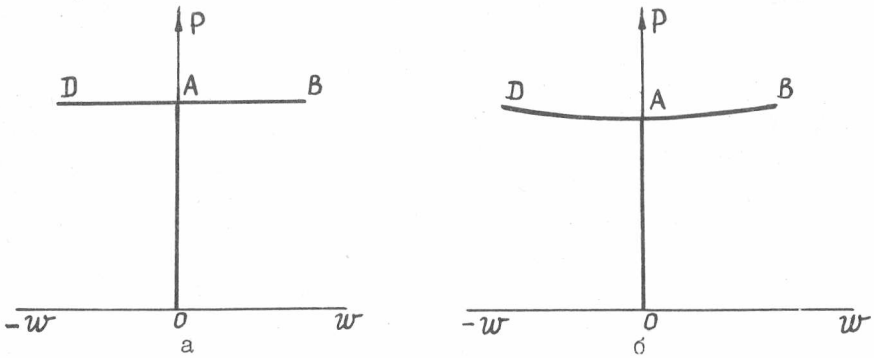


Рис. 5.1. Диаграмма "нагрузка-прогиб" для стержня и пластины

В случае стержня диаграмма имеет вид (рис. 5.1а). Здесь участок  $DA$  можно отнести к исходному, равновесному состоянию, а участки  $AB$  и  $AD$  - к изогнутым моментным состояниям.

Для стержня диаграмма  $P(w)$  имеет вид горизонтальной линии, что соответствует "безразличному" равновесию. Для пластинки (рис. 5.1б) кривая критических устойчивых состояний симметрична относительно оси  $\psi$ . Для идеально плоской пластинки и идеально прямого стержня оба направления прогиба  $(+w)$  и  $(-w)$  являются равноправными.

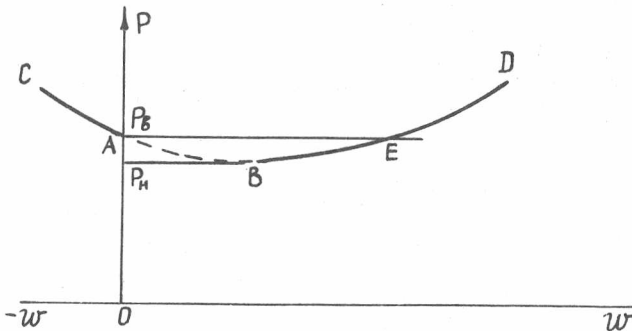


Рис. 5.2. Диаграмма "нагрузка-прогиб" для оболочки

Для оболочки диаграмма  $P(w)$  представлена на рис. 5.2. Здесь прогиб к центру кривизны оболочки отложен вправо от оси абсцисс. На участке  $AB$  равновесные формы являются неустойчивыми, а участок  $BE$  - устойчивым. Участки  $AC$  и  $ED$  соответствуют устойчивым состояниям.

В теории устойчивости оболочек применяются понятия верхней и нижней критических нагрузок  $/I/$ . Под верхней критической нагрузкой  $P_B$  понимается наибольшая нагрузка, до которой начальное равновесное состояние является устойчивым в малом, т.е. по отношению к соседним равновесным состояниям (точка  $A$  на рис. 5.2). Под нижней критической нагрузкой  $P_H$  - та нагрузка, до которой начальное состояние является единственным устойчивым состоянием. При нагрузках ниже  $P_H$  обеспечивается устойчивость оболочки в большом.

Реальные оболочки всегда имеют те или иные начальные неправильности, отклонения от заданной формы. Они приводят к сильному снижению верхней критической нагрузки. Поэтому экспериментальные данные, относящиеся к критическим нагрузкам для оболочек, отличаются большим разбросом. Само выпучивание оболочек на практике во многих случаях сопровождается резким хлопком. Исследование устойчивости оболочек связано большей частью с применением довольно громоздкого вычислительного аппарата. Поэтому при изучении вопросов устойчивости широко применяются различные упрощающие гипотезы о характере применения формы оболочки при потере устойчивости. Одним из общих упрощающих приемов является разделение устойчивости оболочек на общую и местную.

Под общей потерей устойчивости понимается возникновение новых устойчивых форм равновесия оболочки, обусловленных изгибом по всей поверхности. Так, на рис. 5.3,а показана в качестве примера форма общей потери устойчивости цилиндрической оболочки.

При местной потере устойчивости изгиб оболочки происходит в пределах малых участков поверхности (рис. 5.3б).

Если изгиб оболочки происходит по всей поверхности, но с большим числом волн, то такую форму потери устойчивости также относят к местной. Принципиального различия между общей и местной потерями устойчивости нет. Обе формы являются равноопасными. Указанное деление обусловлено тем, что поведение оболочки при местной потере устойчивости может быть проанализировано с помощью определенного класса уравнений так называемых "пологих оболочек".

Мы остановимся лишь на вопросах общей потери устойчивости применительно к цилиндрическим оболочкам, наиболее часто встречающимся

в качестве конструктивных элементов.

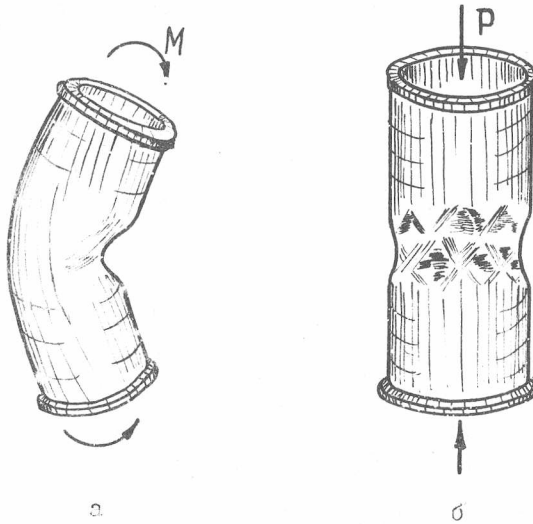


Рис 5.3. Общая (а) и местная (б) потеря устойчивости оболочки

### 5.2. Устойчивость цилиндрической оболочки при сжатии

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, подвергнутую равномерному сжатию вдоль образующей усилиями  $N$  (рис. 5.4). Для определения критической нагрузки воспользуемся статическим критерием. Составим уравнение продольно-поперечного изгиба цилиндрической оболочки с учетом зависимостей, приведенных в /7/. Для этого следует рассмотреть равновесие деформированного элемента оболочки (рис. 5.5). Проекция всех сил на ось  $x$  равна

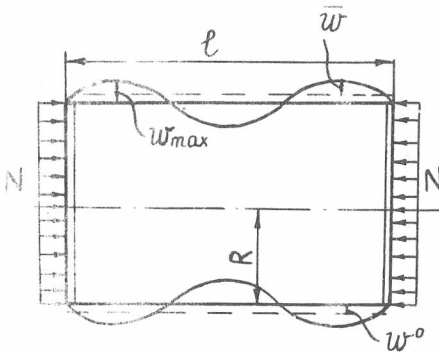


рис. 5.4. Схема нагружения цилиндрической оболочки



$$\frac{dQ_1}{dx} + N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{N_2}{R} + P = 0. \quad (5.1)$$

Из уравнения равновесия моментов следует

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (5.2)$$

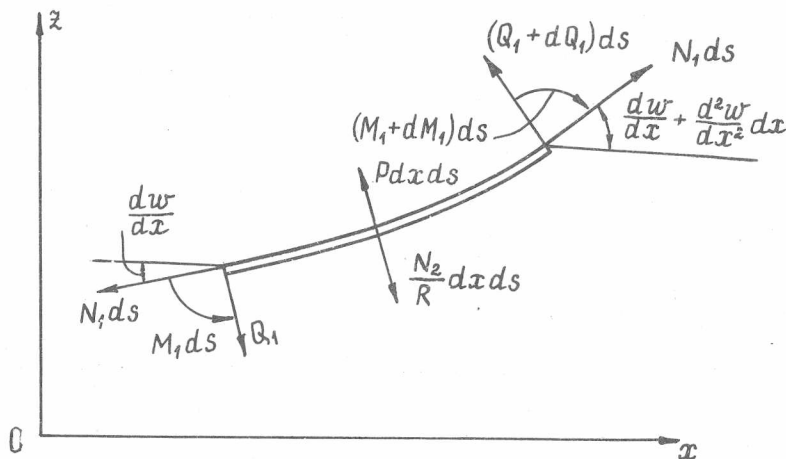


Рис. 5.5. Вид сбоку на деформированный элемент оболочки

Усилия  $N_1$  и  $N_2$  связаны между собой зависимостью

$$N_2 = \frac{Eh}{R} w + \mu N_1. \quad (5.3)$$

С учетом зависимостей (5.1)-(5.3) дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба оболочки примет следующий вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} w = P - \frac{\mu N_1}{R}. \quad (5.4)$$

Теперь вернемся к оболочке, изображенной на рис. 5.4. Запишем уравнение (5.4) для рассматриваемой задачи, полагая  $P = 0$ ,  $N_1 = -N$ :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} w = \frac{\mu N}{R}. \quad (5.5)$$

Представим перемещение  $w$  состоящим из двух слагаемых, одно из которых  $w^0$  соответствует докритическому состоянию, а второе  $\bar{w}$  - малая добавка, возникающая вследствие отклонения оболочки от исходного равновесного состояния:

$$w = w^0 + \bar{w}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим поведение оболочки по мере роста нагрузки. При малой нагрузке образующие оболочки остаются прямолинейными (рис.5.4), т.е.  $w^0 = const$ . Из уравнения (5.5) следует

$$\frac{Eh}{R^2} w^0 = \mu \frac{N}{R}. \quad (5.7)$$

До потери устойчивости имеет место устойчивая форма упругого равновесия. При устранении какого-либо возмущения система вернется в исходное положение. При критическом значении нагрузки образующие могут иметь либо прямолинейную, либо криволинейную форму.

При  $N = N_{кр}$  перемещение складывается из двух слагаемых:

$$w = w_{max}^0 + \bar{w}. \quad (5.8)$$

Подставим (5.8) в (5.5):

$$D \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + N_{кр} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} \bar{w} + \frac{Eh}{R^2} w_{max}^0 = \frac{\mu N_{кр}}{R}. \quad (5.9)$$

С учетом (5.7) получим

$$D \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + N_{кр} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} \bar{w} = 0. \quad (5.10)$$

Имеем однородное дифференциальное уравнение относительно дополнительного прогиба  $\bar{w}$  при критической нагрузке.

Решение (5.10) будем отыскивать в следующем виде:

$$\bar{w}(x) = A_m \sin \frac{\pi m}{\ell} x, \quad (5.11)$$

где  $\ell$  - длина оболочки;  $m$  - число полуволн в направлении образующей оболочки.

Подставив (5.11) в (5.10), получим

$$D \left( \frac{\pi m}{\ell} \right)^4 - N_{кр} \left( \frac{\pi m}{\ell} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} = 0,$$

отсюда

$$N_{кр} = D \left( \frac{\pi m}{\ell} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \left( \frac{\ell}{\pi m} \right)^2. \quad (5.12)$$

Из формулы (5.12) видно, что критическая нагрузка  $N_{кр}$  зависит от числа  $m$ . Определим, чему равно  $m$ , соответствующее минимальной критической силе. Для этого представим  $N_{кр}$  как непрерывную функцию  $m$  и запишем

$$\frac{\partial N_{кр}}{\partial m} = 0$$

или

$$2D \frac{\pi^2 m}{l^2} - \frac{Eh}{R^2} \frac{2l^2}{\pi^2 m^3} = 0, \text{ или}$$

$$\left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 = \frac{Eh}{DR^2}, \quad \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{Eh}{D}}.$$

При этом для критической нагрузки получим выражение

$$N_{кр} = \frac{D}{R} \sqrt{\frac{Eh}{R}} + \frac{Eh}{R} \sqrt{\frac{D}{Eh}} = \frac{2\sqrt{EhD}}{R} \quad (5.13)$$

Если воспользоваться выражением для жесткости  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ , то (5.13) примет следующий вид:

$$N_{кр} = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}.$$

Положив в этой формуле  $\mu = 0,3$ , получим

$$N_{кр} = \frac{0,6Eh^2}{R}. \quad (5.14)$$

Наконец, переходя к напряжениям, имеем

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{h} = \frac{0,6Eh}{R}. \quad (5.15)$$

Из формулы (5.15) видно, что критические напряжения в оболочке зависят от материала и соотношения  $R/h$ . Следует отметить, что реальные оболочки имеют значительно меньшие значения критического напряжения  $1/1$ .

### 5.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при действии равномерного внешнего давления

Рассмотрим простейшую задачу об устойчивости длинной цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением (рис. 5,6а). Будем полагать, что длина оболочки такова, что характер закрепления ее торцов не влияет на поведение оболочки при потере устойчивости. Такая оболочка может деформироваться без удлинения и сдвигов срединной поверхности. Для определения критического внешнего давления и формы потери устойчивости такой оболочки можно воспользоваться решением задачи об устойчивости кругового кольца под действием равномерного давления. Для кольца в соответствии с решением (4.32) имеем

$$q_{кр} = \frac{3E\gamma}{R^3}. \quad (5.16)$$

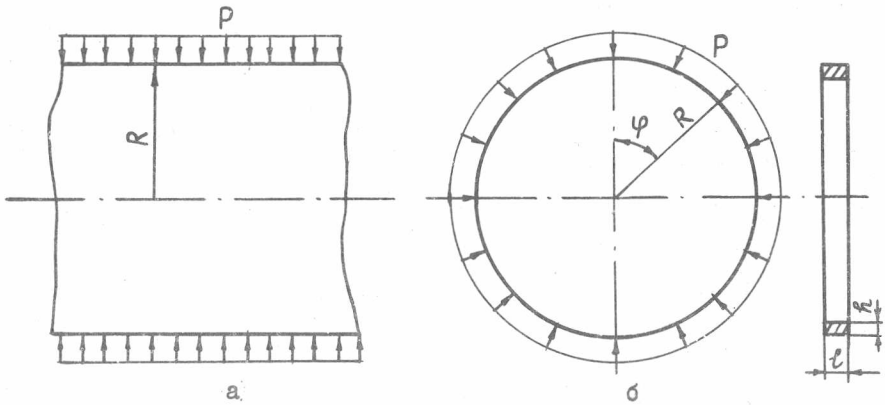


Рис. 5.6. Схема нагружения цилиндрической оболочки внешним давлением

Выделим мысленно из оболочки кольцо единичной ширины (рис.5.6,б) и, приняв для него  $EJ = 1 \cdot D$  и  $q = 1 \cdot p$ , где  $D$  - изгибная жесткость оболочки, можем записать, используя (5.16):

$$P_{кр} = \frac{3Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3} = \frac{1}{4(1-\mu^2)} E \left( \frac{h}{R} \right)^3. \quad (5.17)$$

Здесь  $P_{кр}$  - критическое давление, при котором наряду с исходной круговой формой равновесия существуют некруговые равновесные формы.

Например, для оболочки, изготовленной из материала с модулем упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа, коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ , толщиной  $h = 3$  мм и радиусом  $R = 1200$  мм, получаем

$$P_{кр} = 0,275 \cdot 7 \cdot 10^4 \left( \frac{3}{1200} \right)^3 = 3,01 \cdot 10^{-4} \text{ МПа.}$$

Отсюда видно, что внешнее критическое давление для рассмотренной оболочки весьма мало.

Формулой (5.17) обычно пользуются для определения критического внешнего давления для длинных цилиндрических оболочек.

Библиографический список

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967. 984 с.
2. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. школа, 1985. 392 с.
3. Леонов В.И. Расчет элементов авиаконструкций типа ортотропных и трехслойных пластин: Учеб. пособие /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1983. 87 с.
4. Уманский А.А. Строительная механика самолета. М.: Оборонгиз, 1961. 530 с.
5. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 310 с.
6. Ахмедьянов И.С. Расчет шпангоутов: Учеб. пособие /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. 76 с.
7. Леонов В.И. Строительная механика элементов конструкций летательных аппаратов в виде оболочек вращения: Учеб. пособие /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1987. 87 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ . . . . .	3
1.1. Основные понятия . . . . .	3
1.2. Статический критерий устойчивости . . . . .	7
1.3. Энергетический критерий устойчивости . . . . .	9
2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН . . . . .	14
2.1. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с помощью статического критерия . . . . .	14
2.2. Исследование устойчивости прямоугольных пластин энергетическим методом . . . . .	17
2.3. Устойчивость тонкостенных стержней . . . . .	25
3. РАСЧЕТ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПЛАСТИН ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ . . . . .	30
3.1. Расчет подкрепленной пластины после потери устойчивости от сжатия . . . . .	30
3.2. Расчет подкрепленной пластины после потери устойчивости от сдвига . . . . .	33
3.3. Расчет балки с тонкой стенкой типа лонжерона крыла самолета после потери устойчивости стенки . . . . .	39
4. УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ . . . . .	45
4.1. Дифференциальное уравнение изгиба тонкого кругового кольца . . . . .	45
4.2. Устойчивость кольца, нагруженного радиальной сжимающей нагрузкой . . . . .	52
5. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК . . . . .	53
5.1. Постановка задачи . . . . .	53
5.2. Устойчивость цилиндрической оболочки при сжатии . . . . .	56
5.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при действии равномерного внешнего давления . . . . .	59
Библиографический список . . . . .	61

З а ц е п и н а    М а р г а р и т а    В и к т о р о в н а

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Редактор Л.М.К а р п о в а  
Техн.редактор Г.А.У с а ч е в а  
Корректор Н.С.К у п р и я н о в а  
Свод. тем. план № 20

Подписано в печать 1.04.91.  
Формат 60x84 1/16.  
Бумага оберточная. Оперативная  
печать. Усл. печ. л. 3,72. Усл.кр.-отт.3,84.  
Уч.-изд.л. 3,62. Тираж 1000 экз.  
Заказ № 1774. Цена 20 к.

Куйбышевский ордена Трудового  
Красного Знамени авиационный  
институт им.академика С.П.Королева.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34

---

Типография им. В.П.Мяги Самарского  
полиграфического объединения.  
443099 Самара, ул.Венцека, 60