

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им.С.П.Королева

И. С. А Х М Е Д Ъ Я Н О В

РАСЧЕТ ШПАНГОУТОВ

Учебное пособие

Издание второе, переработанное и дополненное

Утверждено
редакционно-
издательским
советом института
в качестве
учебного пособия

КУЙБЫШЕВ 1988

А х м е д њ я н о в И.С. Расчет шпангоутов. Учебное пособие. Изд. 2-ое, переработанное и дополненное. - Куйбышев: Куйбышевский авиационный институт, 1988. - 76 с.

Пособие посвящено методам расчета на прочность и жесткость круговых шпангоутов конструкции летательных аппаратов. Рассмотрены случаи нагружения шпангоутов в их плоскости. Кроме обычного, хорошо известного метода сил, в пособии изложен способ расчета, основанный на применении общего решения дифференциального уравнения изгиба кольца. Приведены числовые примеры, иллюстрирующие оба метода.

Пособие может быть использовано студентами при изучении курса "Расчет летательных аппаратов на прочность", а также при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Иллюстраций - 87, библиография - 4 назв.

Рецензенты: профессор Шклярчук Ф.Н. (Московский авиационный институт)

доцент Сеницкий Ю.Э. (Куйбышевский инженерно-строительный институт)

В В Е Д Е Н И Е

I. Шпангоуты являются одними из основных силовых элементов конструкции летательных аппаратов и по своему назначению разделяются на нормальные, усиленные и стыковые. Нормальные шпангоуты в основном служат для сохранения формы поперечного сечения корпуса летательного аппарата, усиленные (или силовые) - для передачи на обшивку больших сосредоточенных сил и, наконец, стыковые шпангоуты - для соединения отсеков корпуса летательного аппарата.

Характер нагружения шпангоутов может быть самым разнообразным. Так, нагрузки, действующие на нормальные шпангоуты со стороны стрингеров и обшивки, обычно лежат в плоскости осевой линии шпангоута (осевая линия - линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений шпангоута). Нагружение стыковых шпангоутов происходит нормально к плоскости стыка. Что касается нагрузок на силовые шпангоуты, то они могут действовать как в плоскости шпангоута, так и перпендикулярно к ней.

Шпангоуты в большинстве случаев можно рассматривать как плоские рамы, нагруженные плоской или пространственной системой сил, и применять для их расчета методы строительной механики стержневых систем.

Как известно, рама называется плоской, если ее осевая линия представляет собой плоскую кривую, в плоскости которой лежит также и одна из главных центральных осей инерции поперечных сечений рамы.

Внешняя сосредоточенная нагрузка, приложенная к силовым шпангоутам, уравнивается реакцией обшивки и продольных элементов конструкции корпуса летательного аппарата. При определении реакции обшивки ее обычно рассматривают как безмоментную. Тогда действие обшивки на нагруженный шпангоут будет представлять собой совокупность распределенных по его контуру касательных сил.

уравновешивающих внешнее воздействие. Эти силы приближенно можно найти как разность касательных усилий в обшивке по разные стороны от шпангоута.

2. Предлагаемое учебное пособие посвящено расчету силовых шпангоутов, рассматриваемых как плоские замкнутые рамы. При этом будут представлены только случаи нагружения шпангоута в его плоскости. При таком нагружении в поперечных сечениях шпангоута возникают изгибающий момент M , перерезывающая и нормальная силы Q и N (рис.1), действующие также в плоскости шпангоута. Так как шпангоут является замкнутой рамой, то для вычисления внутренних усилий в любом его сечении необходимо располагать значениями $M = M^0$, $Q = Q^0$ и $N = N^0$ в некотором его сечении, условно принятом за начальное (рис.2). Величины M^0 , Q^0 и N^0 в общем случае не могут быть найдены из уравнений равновесия отдельных частей шпангоута. Следовательно, задача расчета шпангоута при произвольном нагружении плоской системой сил будет трижды статически неопределимой. Решение этой задачи для шпангоутов с симметричной осевой линией (например, для круговых шпангоутов) можно значительно упростить, имея в виду следующее.

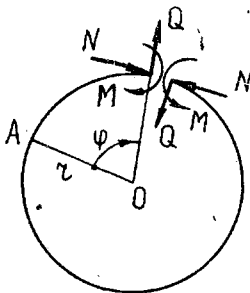


Рис. 1

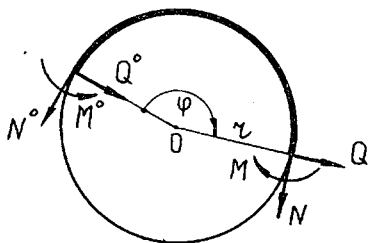


Рис. 2

Произвольную нагрузку, приложенную к симметричному шпангоуту, всегда можно представить в виде суммы симметричной и обратносимметричной нагрузок (рис.3). Поэтому, пользуясь принципом независимости действия сил, для исследования прочности симметричного шпангоута при произвольном нагружении достаточно провести расчет на соответствующие симметричную и обратносимметричную нагрузки и затем алгебраически просуммировать результаты этих двух расче-

тов. Таким образом можно получить значения внутренних усилий в любом сечении шпангоута при действии сложной системы нагрузок. Очевидно, что расчет шпангоута на симметричную и антисимметричную нагрузки значительно проще расчета на действие произвольной нагрузки.

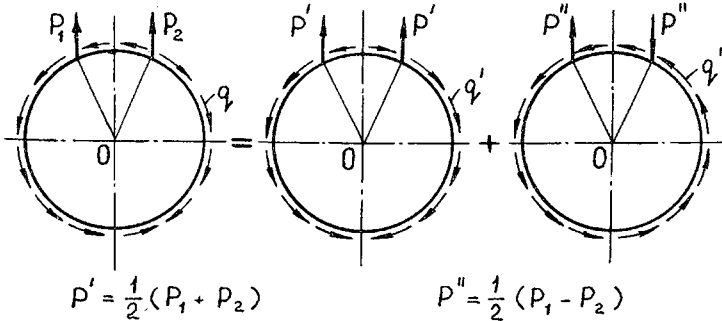


Рис. 3

3. Ниже на конкретных примерах будет показано применение хорошо известного в инженерной практике метода сил для расчета круговых шпангоутов с постоянным поперечным сечением /1,2,3/, хотя сам метод, вообще говоря, может быть использован и для раскрытия статической неопределенности шпангоутов с произвольной формой осевой линии и переменной жесткостью на изгиб. После определения методом сил внутренних силовых факторов в сечениях шпангоута в случае необходимости можно найти и его перемещения. Эта задача решается путем интегрирования дифференциального уравнения, связывающего радиальное перемещение точек осевой линии кругового кольца с изгибающим моментом.

Если рассматриваемый круговой шпангоут имеет постоянное поперечное сечение, то исследование его напряженно-деформированного состояния может быть выполнено и другим способом, который условно можно назвать методом перемещений. Он состоит в том, что, исходя из заданной внешней нагрузки на шпангоут, сначала определяются радиальные и касательные перемещения точек его осевой линии. Затем по этим перемещениям находят внутренние силовые факторы в сечениях шпангоута. При этом используются дифференциальные уравнения равновесия шпангоута и зависимость между радиальным

перемещением и изгибающим моментом.

Метод перемещений во многих случаях может оказаться более эффективным, чем метод сил, что в дальнейшем будет показано на достаточно убедительных примерах.

1. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНОГО ШПАНГОУТА НА СИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ

1.1. При симметричном нагружении симметричного шпангоута (рис.1.1) определение внутренних усилий при соответствующем выборе основной системы можно свести к решению задачи с двумя статически неопределимыми величинами.

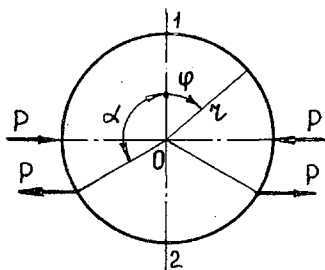


Рис. 1.1

В самом деле, при действии на симметричный шпангоут симметричной нагрузки распределение внутренних усилий (изгибающего момента, перерезывающей и нормальной сил) будет также симметричным. Поэтому в сечениях 1 и 2 шпангоута по оси симметрии перерезывающая сила Q должна равняться нулю (в противном случае деформиро-

ванное и напряженное состояние шпангоута было бы несимметричным относительно диаметра 1-0-2). Что касается изгибающего момента M и нормальной силы N в этих сечениях, то они заранее неизвестны и являются статически неопределимыми величинами.

Ввиду того, что из трех усилий в любом из сечений 1 и 2 одно равно нулю, для упрощения расчета шпангоута целесообразно выбрать основную систему, проведя разрез, например, через точку 1 (рис.1.2). Обозначим соответственно через X_1 и X_2 нормальную силу и изгибающий момент, действующие в этом сечении. Для их определения имеем два канонических уравнения метода сил /1, 2,3/

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{10} = 0, \quad (1.1)$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{20} = 0, \quad (1.2)$$

выражающих условия отсутствия взаимного линейного перемещения и поворота сечений I и I' (рис. I.2).

Коэффициенты уравнений (I.1) и (I.2) определяются формулами, известными из строительной механики стержневых систем /2,3/:

$$\Delta_{10} = \int_e \frac{M_1 M_0}{EJ} ds, \quad \Delta_{20} = \int_e \frac{M_2 M_0}{EJ} ds, \quad (I.3)$$

$$\delta_{11} = \int_e \frac{M_1^2}{EJ} ds, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_e \frac{M_1 M_2}{EJ} ds, \quad \delta_{22} = \int_e \frac{M_2^2}{EJ} ds. \quad (I.4)$$

В этих выражениях:

M_0 - изгибающий момент в основной системе от заданной внешней нагрузки (рис. I.3);

M_1 - изгибающий момент в основной системе от действия единичных сил $X_1 = I$ (рис. I.4);

M_2 - изгибающий момент в основной системе, вызванный действием единичных изгибающих моментов $X_2 = I$ (рис. I.5);

EJ - жесткость сечения шпангоута на изгиб.

Таким образом, для раскрытия статической неопределенности рассматриваемого шпангоута необходимо прежде всего построить для основной системы эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки, от единичных сил $X_1 = I$ и единичных моментов $X_2 = I$. Далее по

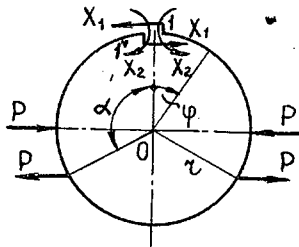


Рис. I.2

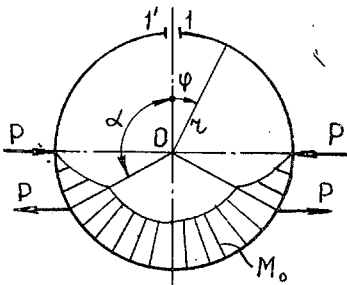


Рис. I.3

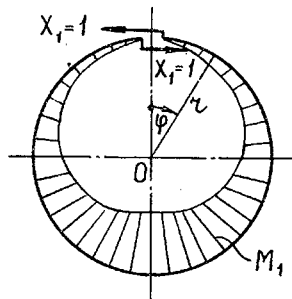


Рис. I.4

формулам (I.3) и (I.4) следует вычислить коэффициенты канонических уравнений и, наконец, решить систему (I.1) и (I.2) относительно „лишних“ неизвестных X_1 и X_2 .

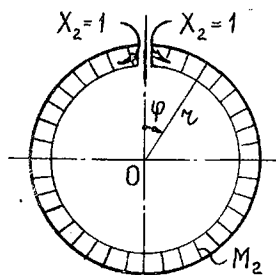


Рис. I.5

После этого величину изгибающего момента M в произвольном сечении шпангоута можно, на основании принципа независимости действия сил, определить по формуле /I,2,3/ (рис.I.6):

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2. \quad (I.5)$$

I.2. По значениям усилий X_1 и X_2 легко найти перерезывающую и нормальную силы Q и N в любом сечении шпангоута. Для этого достаточно воспользо-

ваться следующими общими зависимостями, аналогичными (I.5)/3,4/:

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1 + X_2 Q_2, \quad (I.6)$$

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2. \quad (I.7)$$

Здесь Q_0 и N_0 - перерезывающая и нормальная силы в основной системе, вызванные действием внешней нагрузки (рис.I.7 и I.8); Q_i и N_i ($i = 1,2$) - перерезывающая и нормальная силы в той же системе от единичных усилий $X_i = 1$ (рис.I.9 и I.I0).

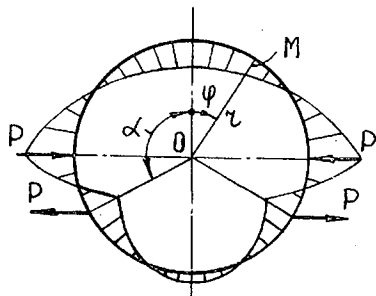


Рис. I.6

Моменты $X_2 = 1$ вызывает, как нетрудно в этом убедиться, усилия Q_2 и N_2 , равные нулю. Следовательно, формулы (I.6) и (I.7) для вычисления сил Q и N примут более простой вид (рис. I.II и I.I2)

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1, \quad (I.8)$$

$$N = N_0 + X_1 N_1. \quad (I.9)$$

I.3. Вычислив по формулам (I.5), (I.8) и (I.9) значения M , Q и N , легко найти распределение нормальных и касательных

напряжений в произвольном сечении шпангоута, воспользовавшись формулами сопротивления материалов:

$$\sigma = \frac{M}{J} y + \frac{N}{F}, \quad (\text{I.10})$$

$$\tau = \frac{Q}{J \beta} S, \quad (\text{I.11})$$

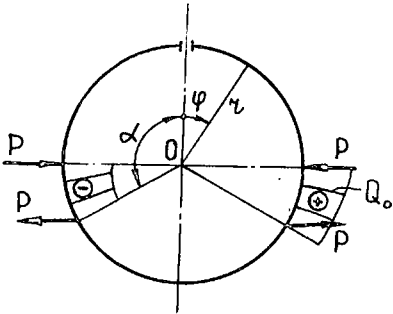


Рис. I.7

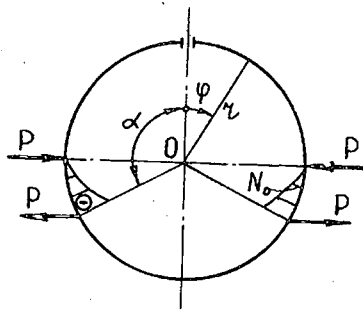


Рис. I.8

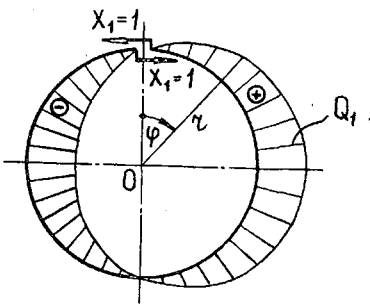


Рис. I.9

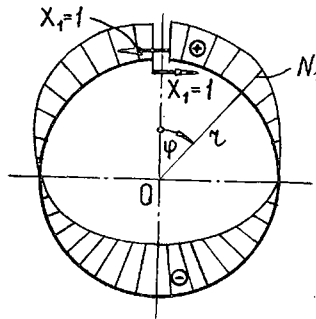


Рис. I.10

где J - момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно оси x (ось x нормальна к плоскости осевой линии шпангоута и проходит через центр тяжести O сечения шпангоута); F - площадь поперечного сечения шпангоута; S - статический момент отсеченной части сечения (рис. I.13). Размер β определяется так, как показано на рис. I.13.

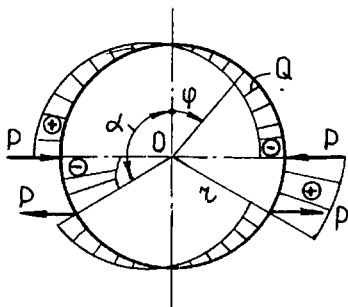


Рис. I.II

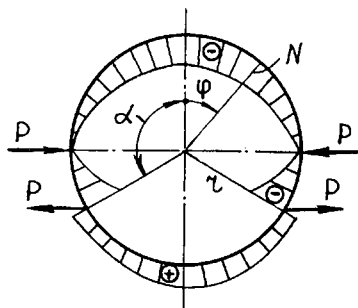


Рис. I.I2

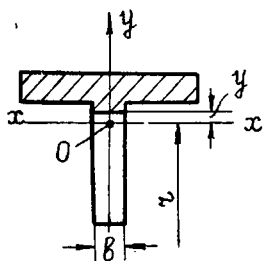


Рис. I.I3

2. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНОГО ШПАНГОУТА НА ОБРАТНОСИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ

Если на симметричный шпангоут действует обратносимметричная нагрузка, то распределение внутренних усилий в нем будет также обратносимметричным (рис.2.1). Следовательно, в сечении I шпангоута по оси симметрии отличной от нуля будет только перерезывающая сила Q , значение которой мы обозначим через X_1 (рис.2.2).

Для определения X_1 воспользуемся каноническим уравнением

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0, \quad (2.1)$$

в котором /2,3/

$$\Delta_{10} = \int_e \frac{M_1 M_0}{EJ} ds, \quad \delta_{11} = \int_e \frac{M_1^2}{EJ} ds. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) выражает отсутствие взаимного сдвига сечений I и I' в вертикальном направлении. В формулах (2.2):

M_0 - изгибающий момент в основной системе от действия обратносимметричной внешней нагрузки (рис.2.3);

M_1 - изгибающий момент в этой же системе от единичных сил $X_1 = 1$ (рис.2.4).

Найдя из уравнения (2.1) величину силы X_1 , легко определить внутренние усилия M , Q и N в сечениях шпангоута по формулам /2,3,4/:

$$M = M_0 + X_1 M_1, \quad (2.3)$$

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1, \quad N = N_0 + X_1 N_1. \quad (2.4)$$

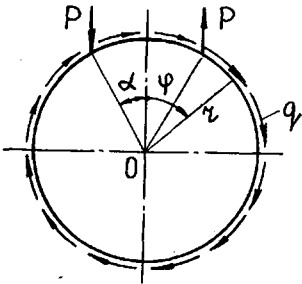


Рис. 2.1

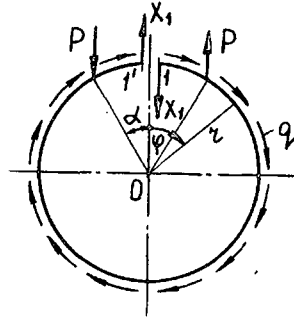


Рис. 2.2

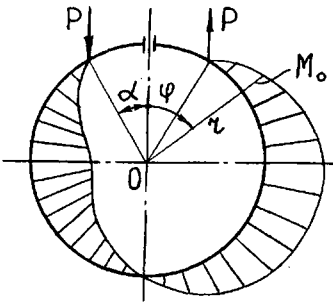


Рис. 2.3

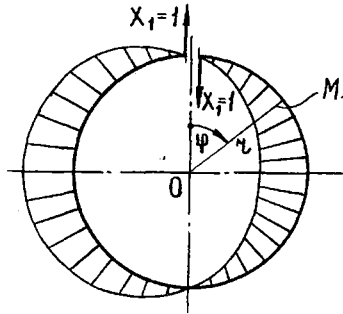


Рис. 2.4

В выражениях (2.4) через Q_0 и N_0 обозначены перерезывающие и нормальные силы в основной системе, вызванные внешней нагрузкой (рис.2.5 и 2.6);

Q_1 и N_1 - перерезывающие и нормальные силы от единичных сил $X_1 = 1$, приложенных в разрезе (рис.2.7 и 2.8).

Общий вид эпюр M , Q и N , построенных по формулам (2.3) и (2.4), показан на рис.2.9-2.11.

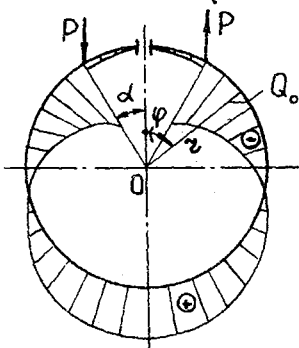


Рис. 2.5

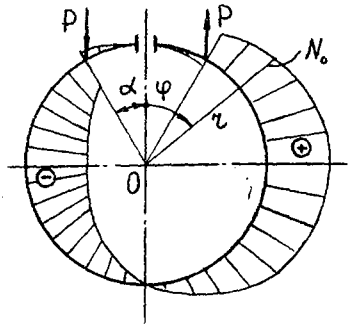


Рис. 2.6

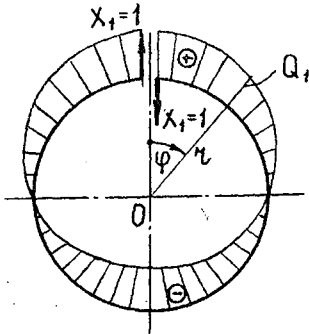


Рис. 2.7

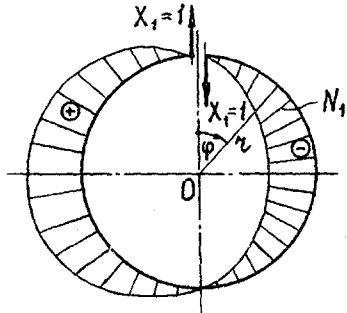


Рис. 2.8

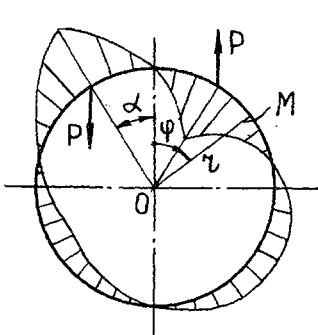


Рис. 2.9

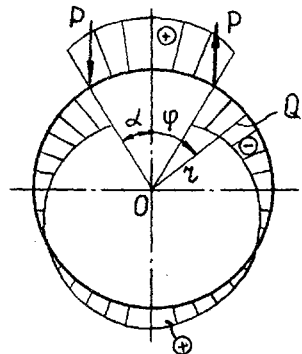


Рис. 2.10

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

3.1. Если шпангоут представляет собой кольцо с круговой осью радиуса r , то для вычисления перерезывающей и нормальной сил иногда бывает удобно воспользоваться дифференциальными зависимостями между M , Q и N /1,2,3/. Эти зависимости легко получить, рассматривая условия равновесия элемента кольца $m\pi$, показанного на рис.3.1. Здесь через q_t и q_n обозначены касательная и радиальная нагрузки, приложенные к кольцу и приходящиеся на единицу длины круговой оси кольца. Величина m_x представляет собой моментную нагрузку (погонный момент), действующую на единицу длины оси кольца.

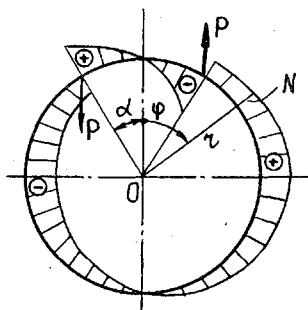


Рис. 2.II

На рис.3.1 показаны положительные направления внутренних усилий M , Q и N и внешних распределенных нагрузок q_t , q_n и m_x .

Составим уравнение равновесия сил, действующих на элемент $m\pi$, в проекции на касательную к оси элемента, полагая, ввиду малости угла $d\varphi$,

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}.$$

Будем иметь:

$$-N + (N + dN) + Q \frac{d\varphi}{2} + (Q + dQ) \frac{d\varphi}{2} + q_t r d\varphi = 0.$$

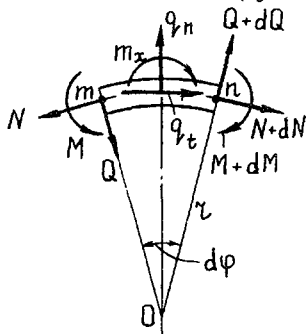


Рис. 3.I

Отсюда, пренебрегая величинами второго порядка малости, находим:

$$\frac{dN}{d\varphi} + Q = -r q_t. \quad (3.I)$$

Проекция всех сил на ось симметрии элемента дает:

$$-Q + (Q + dQ) - N \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \frac{d\varphi}{2} + q_n r d\varphi = 0$$

или

$$-\frac{dQ}{d\varphi} + N = r q_n. \quad (3.2)$$

Третье уравнение равновесия получим, составляя условие равновесия моментов относительно центра кольца 0:

$$-rN + r(N + dN) - M + (M + dM) + r^2 q_t d\varphi + r m_x d\varphi = 0.$$

или

$$r \frac{dN}{d\varphi} + \frac{dM}{d\varphi} = -r^2 q_t - r m_x. \quad (3.3)$$

Используя уравнение (3.1), из (3.3) устанавливаем связь между перерезывающей силой Q и изгибающим моментом M

$$Q = \frac{1}{r} \frac{dM}{d\varphi} + m_x. \quad (3.4)$$

3.2. Формулу (3.4) можно использовать для определения значений перерезывающей силы Q , исходя из аналитического выражения для изгибающего момента M в круговом шпангоуте.

Далее, из (3.2) находим:

$$N = \frac{dQ}{d\varphi} + r q_n. \quad (3.5)$$

В частном случае, когда круговой шпангоут нагружен со стороны обшивки только касательными усилиями q_t (т.е. когда $q_n = 0$, $m_x = 0$), из (3.4) и (3.5) получают следующие простые зависимости для определения Q и N :

$$Q = \frac{1}{r} \frac{dM}{d\varphi}, \quad (3.6)$$

$$N = \frac{dQ}{d\varphi}. \quad (3.7)$$

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА КРУГОВОГО ШПАНГОУТА НА СИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ

Рассмотрим примеры расчета шпангоута с круговой осью и постоянным поперечным сечением на действие симметричной нагрузки.

4.1. В качестве первого примера возьмем силовой шпангоут корпуса летательного аппарата, нагруженный двумя сосредоточенными силами P так, как показано на рис.4.1. Эта нагрузка будет уравновешиваться касательными силами q со стороны обшивки. Для приближенного определения этих сил примем рассматриваемый нами круговой шпангоут за абсолютно твердое тело. Кроме того, предположим, что осевая линия шпангоута лежит на срединной поверхности обшивки корпуса л.а.

Обозначим через v_0 вертикальное перемещение шпангоута под действием приложенной нагрузки. Тогда перемещение v произвольной точки m оои шпангоута в направлении, касательном к контуру обшивки, будет равно (рис.4.2)

$$v = v_0 \sin \varphi.$$

Такие же перемещения будет иметь и обшивка, связанная со шпангоутом. При этом в обшивке возникнут деформации сдвига и соответствующие касательные усилия по обе стороны шпангоута, пропорциональные перемещению v . Разница q этих усилий, очевидно, может быть представлена в следующем виде:

$$q = k \sin \varphi, \quad (4.1)$$

где k - некоторый коэффициент пропорциональности.

Для определения этого коэффициента составим условие равновесия шпангоута (рис.4.3):

$$2P = 2r \int_0^{\pi} q \sin \varphi d\varphi = k\pi r.$$

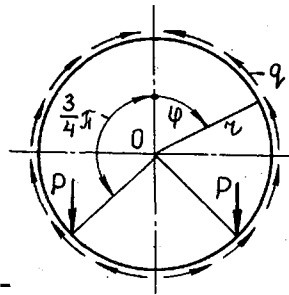


Рис. 4.1

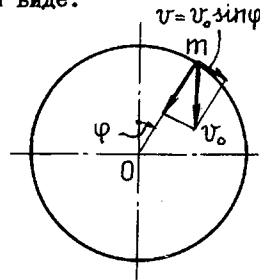


Рис. 4.2

Отсюда

$$K = \frac{2P}{\pi r}$$

и, следовательно,

$$q = \frac{2P}{\pi r} \sin \varphi. \quad (4.2)$$

К такому же результату можно прийти, рассматривая равновесие шпангоута под действием приложенной нагрузки и разности касательных усилий в обшивке по обеим сторонам шпангоута, которые можно найти по обычному правилу расчета однозамкнутой тонкостенной конструкции с круговой формой поперечного сечения.

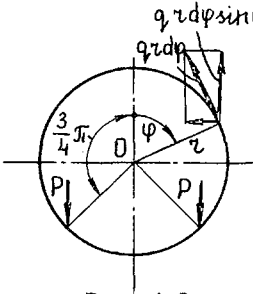


Рис. 4.3

Если осевая линия шпангоута не лежит на срединной поверхности обшивки, а отстоит от нее на некотором расстоянии $t = R - r$ (R - радиус обшивки), то на шпангоут, помимо нагрузки q будет действовать и распределенный момент m_x :

$$m_x = -q t.$$

4.2. Найдя распределение касательных усилий по контуру шпангоута, выбираем основную систему, проведя поперечный разрез шпангоута по сечению $\varphi = 0$ (рис.4.4). В этом сечении нам неизвестны нормальная сила X_1 и изгибающий момент X_2 . Их будем определять, воспользовавшись каноническими уравнениями (I.1) и (I.2).

Для вычисления коэффициентов этих уравнений найдем законы изменения изгибающих моментов от внешней нагрузки, от единичных сил $X_1 = 1$ и единичных моментов $X_2 = 1$, приложенных в разрезе.

Из рассмотрения рис.4.5 следует, что изгибающий момент M_q в произвольном сечении шпангоута от касательных усилий q будет равен (изгибающий момент считаем положительным, если он увеличивает кривизну осевой линии шпангоута):

$$\begin{aligned} M_q &= \int_0^\varphi q h r d\omega = r^2 \int_0^\varphi q [1 - \cos(\varphi - \omega)] d\omega = \\ &= \frac{2Pr}{\pi} \int_0^\varphi [1 - \cos(\varphi - \omega)] \sin \omega d\omega = \end{aligned}$$

$$= \frac{2Pr}{\pi} \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin\varphi \right). \quad (4.3)$$

Далее, в соответствии с характером нагружения основной системы имеем ($\alpha = \frac{3}{4} \pi$):
 для значений $0 \leq \varphi \leq \alpha$ (рис.4.6)

$$M_o = M_o^{(1)} = M_q = \frac{2Pr}{\pi} \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin\varphi \right); \quad (4.4)$$

для значений $\alpha \leq \varphi \leq \pi$:

$$M_o = M_o^{(2)} = M_q + M_p. \quad (4.5)$$

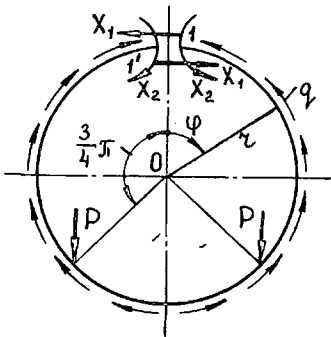


Рис. 4.4

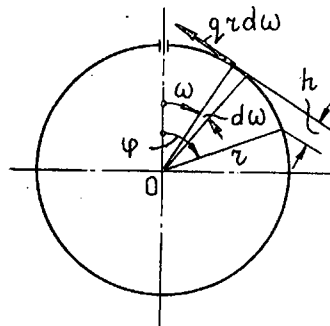


Рис. 4.5

Здесь M_p - изгибающий момент от силы P , равный (рис.4.7)

$$M_p = -Ph.$$

Но

$$h = r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right).$$

Поэтому

$$M_p = -Pr \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right) \quad (4.6)$$

и, согласно (4.5) и (4.3), (4.6) (рис.4.6):

$$M_o^{(2)} = \frac{2Pr}{\pi} \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin\varphi \right) - Pr \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right). \quad (4.7)$$

Моменты M_1 и M_2 будут равны (рис. I.4 и I.5):

$$M_1 = r(1 - \cos \varphi), \quad M_2 = 1. \quad (4.8)$$

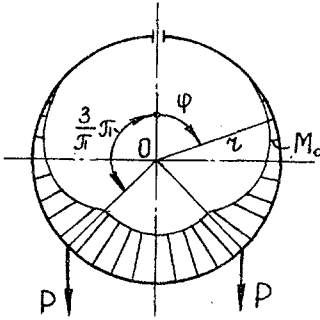


Рис. 4.6

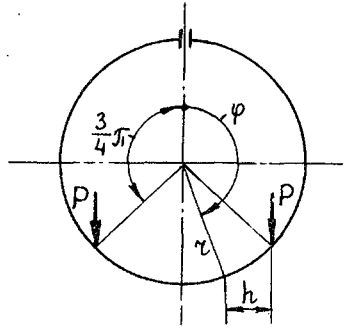


Рис. 4.7

Теперь, исходя из выражений (4.4), (4.7) и (4.8), можно определить коэффициенты канонических уравнений (I.1) и (I.2). Начнем с коэффициента Δ_{10} :

$$\Delta_{10} = \int_e \frac{M_1 M_0}{EY} ds = \frac{2r}{EY} \int_0^\pi M_1 M_0 d\varphi. \quad (4.9)$$

Имеем:

$$\int_0^\pi M_1 M_0 d\varphi = \int_0^\alpha M_1 M_0^{(1)} d\varphi + \int_\alpha^\pi M_1 M_0^{(2)} d\varphi = \int_0^\alpha M_1 M_q d\varphi +$$

$$\int_\alpha^\pi M_1 (M_q + M_p) d\varphi = \int_0^\pi M_1 M_q d\varphi + \int_\alpha^\pi M_1 M_p d\varphi.$$

Далее, вычисляем интегралы:

$$\int_0^\pi M_1 M_q d\varphi = \frac{2Pr^2}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) (1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi) d\varphi = \frac{7}{4} Pr^2,$$

$$\int_\alpha^\pi M_1 M_p d\varphi = -Pr^2 \int_\alpha^\pi (1 - \cos \varphi) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right) d\varphi =$$

$$= -Pr^2 \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4} \right).$$

Полученные результаты дают:

$$\Delta_{10} = \frac{Pr^3}{EJ} \left(5 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right). \quad (4.10)$$

Коэффициент Δ_{20} будет равен:

$$\Delta_{20} = \int_e \frac{M_2 M_0}{EJ} ds = \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi M_2 M_0 d\varphi. \quad (4.11)$$

Так как $M_2 = I$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\pi M_2 M_0 d\varphi &= \int_0^\pi M_0 d\varphi = \int_0^\alpha M_0^{(1)} d\varphi + \int_\alpha^\pi M_0^{(2)} d\varphi = \\ &= \int_0^\pi M_q d\varphi + \int_\alpha^\pi M_p d\varphi. \end{aligned}$$

После интегрирования будем иметь:

$$\int_0^\pi M_q d\varphi = \frac{2Pr}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin\varphi \right) d\varphi = Pr,$$

$$\int_\alpha^\pi M_p d\varphi = -Pr \int_\alpha^\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right) d\varphi = -Pr \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right),$$

$$\int_0^\pi M_0 d\varphi = Pr \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right).$$

Далее находим коэффициент Δ_{20} :

$$\Delta_{20} = \frac{2Pr^2}{EJ} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right). \quad (4.12)$$

Остальные коэффициенты имеют вид:

$$\delta_{11} = \int_e \frac{M_1^2}{EJ} ds = \frac{2r^3}{EJ} \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi r^3}{EJ}, \quad (4.13)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_e \frac{M_1 M_2}{EJ} ds = \frac{2r^2}{EJ} \int_0^\pi (1 - \cos\varphi) d\varphi = \frac{2\pi r^2}{EJ}, \quad (4.14)$$

$$\delta_{22} = \int_e \frac{M_2^2}{EJ} ds = \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi d\varphi = \frac{2\pi r}{EJ}. \quad (4.15)$$

Внося значения коэффициентов (4.10), (4.12) и (4.13)-(4.15) в уравнения (I.1) и (I.2), получаем после упрощений:

$$3\alpha X_1 + 2X_2 = -\frac{Pr}{\pi} \left(5 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right),$$

$$2\alpha X_1 + 2X_2 = -\frac{Pr}{\pi} \left(4 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right).$$

Отсюда выводим:

$$X_1 = -\frac{P}{\pi}, \quad X_2 = \frac{Pr}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right).$$

Теперь нетрудно записать окончательные выражения для изгибающего момента M . Будем иметь:
для $0 \leq \varphi \leq \alpha$

$$M = M^{(1)} = M_0^{(1)} + X_1 M_1 + X_2 M_2 =$$

$$= -\frac{Pr}{\pi} \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right); \quad (4.16)$$

для $\alpha \leq \varphi \leq \pi$:

$$M = M^{(2)} = M_0^{(2)} + X_1 M_1 + X_2 M_2 =$$

$$= -\frac{Pr}{\pi} \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right) - Pr \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right). \quad (4.17)$$

На рис.4.8 показана эпюра моментов, построенная по (4.16) и (4.17).

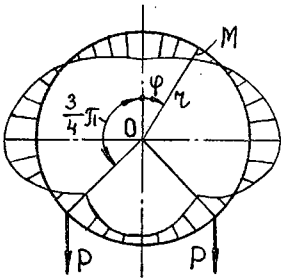


Рис. 4.8

4.3. Контролем правильности раскрытия статической неопределимости кольца могут служить следующие два равенства:

$$\int_e \frac{M_1 M}{EJ} ds = 0, \quad \int_e \frac{M_2 M}{EJ} ds = 0.$$

Они выражают условия отсутствия взаимного линейного перемещения и поворота сечений I и I' (рис.4.4). В случае $EJ = const$ эти условия запишутся в таком виде:

$$\int_0^{\pi} M_1 M d\varphi = 0, \quad \int_0^{\pi} M_2 M d\varphi = 0.$$

Внося сюда выражения (4.8) для моментов M_1 и M_2 придем к следующим общим формулам контроля правильности раскрытия статической неопределенности кругового шпангоута постоянного сечения (при симметричном нагружении):

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = 0, \quad \int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (4.18)$$

Первая из этих формул, очевидно, выражает условие равенства нулю площади эпюры изгибающих моментов M .

4.4. Обратившись к рассматриваемому нами примеру, записываем:

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = \int_0^{\alpha} M^{(1)} d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi} M^{(2)} d\varphi,$$

$$\int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\alpha} M^{(1)} \cos \varphi d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi} M^{(2)} \cos \varphi d\varphi.$$

Согласно (4.16) и (4.17):

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = -\frac{Pr}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \right) d\varphi -$$

$$- Pr \int_{\alpha}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right) d\varphi, \quad (4.19)$$

$$\int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = -\frac{Pr}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \right) \cos \varphi d\varphi -$$

$$- Pr \int_{\alpha}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right) \cos \varphi d\varphi. \quad (4.20)$$

Дальнейшие вычисления дадут:

$$\int_0^{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \right) d\varphi = -\pi \left(\frac{\pi \sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right),$$

$$\int_0^{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \right) \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right) d\varphi = \frac{\pi \sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1,$$

$$\int_{\alpha}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right) \cos \varphi d\varphi = -\frac{1}{4}.$$

Внося эти результаты в (4.19) и (4.20), убеждаемся в том, что условия (4.18) удовлетворяются. Это означает, что раскрытие статической неопределенности рассматриваемого нами шпангоута выполнено правильно.

4.5. Обратимся теперь к вычислению перерезывающей и нормальной сил в сечениях шпангоута.

Из рассмотрения рис. 4.9 приходим к выводу, что в основной системе перерезывающая Q_q и нормальная N_q силы от действия касательных усилий q будут равны:

$$Q_q = r \int_0^{\varphi} q \sin(\varphi - \omega) d\omega =$$

$$= \frac{2P}{\pi} \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \omega) \sin \omega d\omega = -\frac{P}{\pi} (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi), \quad (4.21)$$

$$N_q = r \int_0^{\varphi} q \cos(\varphi - \omega) d\omega =$$

$$= \frac{2P}{\pi} \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \omega) \sin \omega d\omega = \frac{P}{\pi} \varphi \sin \varphi. \quad (4.22)$$

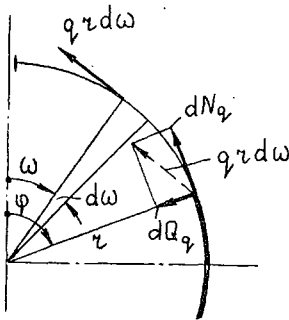


Рис. 4.9

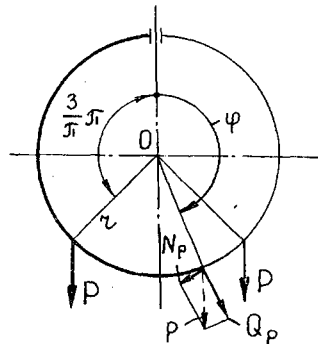


Рис. 4.10

От силы P для правой половины шпангоута имеем (рис.4.10):

$$Q_p = -P \cos(\pi - \varphi) = P \cos \varphi, \quad (4.23)$$

$$N_p = -P \sin(\pi - \varphi) = -P \sin \varphi. \quad (4.24)$$

Следовательно, для $0 \leq \varphi < \alpha$ будет (рис.4.11) и (4.12):

$$Q_o = Q_o^{(1)} = -\frac{P}{\pi} (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi), \quad (4.25)$$

$$N_o = N_o^{(1)} = \frac{P}{\pi} \varphi \sin \varphi. \quad (4.26)$$

Если $\alpha < \varphi \leq \pi$, то (рис.4.11 и 4.12)

$$Q_o = Q_o^{(2)} = Q_q + Q_p = \frac{P}{\pi} [(\pi - \varphi) \cos \varphi + \sin \varphi], \quad (4.27)$$

$$N_o = N_o^{(2)} = N_q + N_p = -\frac{P}{\pi} (\pi - \varphi) \sin \varphi, \quad (4.28)$$

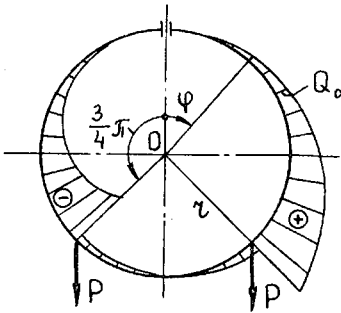


Рис. 4.11

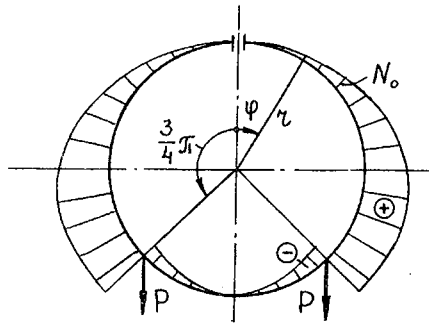


Рис. 4.12

Далее находим (рис.1.7 и 1.8):

$$Q_1 = \sin \varphi, \quad N_1 = \cos \varphi. \quad (4.29)$$

Тогда в соответствии с формулами (1.8) и (1.9) будем иметь следующие выражения для Q и N (рис.4.13 и 4.14):

$$Q^{(1)} = -\frac{P}{\pi} \varphi \cos \varphi, \quad (4.30)$$

$$N^{(1)} = \frac{P}{\pi} (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi), \quad (4.31)$$

$$Q^{(2)} = \frac{P}{\pi} (\pi - \varphi) \cos \varphi, \quad (4.32)$$

$$N^{(2)} = -\frac{P}{\pi} [(\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi]. \quad (4.33)$$

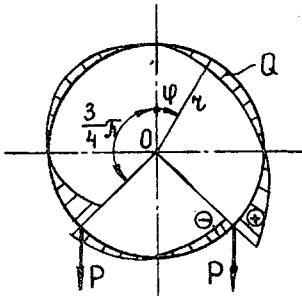


Рис. 4.13

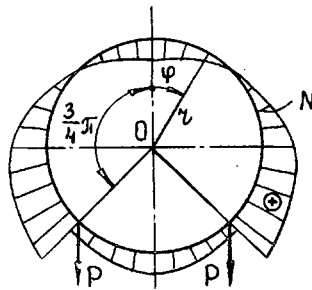


Рис. 4.14

Эти соотношения мы получили, исходя непосредственно из определения перерезывающей и нормальной сил и схемы нагружения кольца. К точно таким же зависимостям можно прийти и более простым путем, воспользовавшись формулами (3.6) и (3.7) и выражениями (4.16) и (4.17) для изгибающего момента M .

В самом деле, дифференцируя (4.16) и (4.17), получаем в соответствии с формулой (3.6):

$$Q^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{dM^{(1)}}{d\varphi} = -\frac{P}{\pi} \varphi \cos \varphi, \quad (4.34)$$

$$Q^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{dM^{(2)}}{d\varphi} = \frac{P}{\pi} (\pi - \varphi) \cos \varphi. \quad (4.35)$$

Чтобы найти нормальную силу N в произвольном сечении шпангоута обращаемся к формуле (3.7).

Имеем:

$$N^{(1)} = \frac{dQ^{(1)}}{d\varphi} = \frac{P}{\pi} (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi), \quad (4.36)$$

$$N^{(2)} = \frac{dQ^{(2)}}{d\varphi} = -\frac{P}{\pi} [(\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi]. \quad (4.37)$$

Сопоставляя выражения (4.34)-(4.37) с (4.30), (4.32), (4.31) и (4.33), убеждаемся в их тождественности.

4.6. При $\varphi = \frac{3}{4} \pi$ перерезывающая и нормальная силы терпят разрыв (изменяются скачкообразно). В самом деле, при $\varphi = \alpha = \frac{3}{4} \pi$ имеем:

$$Q(\alpha - 0) = Q^{(1)}(\alpha) = \frac{3\sqrt{2}}{8} P,$$

$$Q(\alpha + 0) = Q^{(2)}(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{8} P.$$

Отсюда

$$Q(\alpha + 0) - Q(\alpha - 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} P.$$

Аналогично

$$N(\alpha - 0) = N^{(1)}(\alpha) = \frac{P\sqrt{2}}{2\pi} \left(1 + \frac{3}{4} \pi\right),$$

$$N(\alpha + 0) = N^{(2)}(\alpha) = \frac{P\sqrt{2}}{2\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

или

$$N(\alpha + 0) - N(\alpha - 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} P.$$

На рис. 4.15 представлены графики распределения безразмерных величин $M/P\tau$, Q/P и N/P в зависимости от угла φ .

4.7. В качестве второго примера возьмем более простой случай симметричного нагружения кругового шпангоута сосредоточенной радиальной силой P , приложенной в сечении $\varphi = \pi$ (рис. 4.16). Касательные усилия q со стороны обшивки, уравновешивающие силу P , найдем тем же способом, что и в предыдущем случае. Будем иметь:

$$q = \frac{P}{\pi \tau} \sin \varphi. \quad (4.38)$$

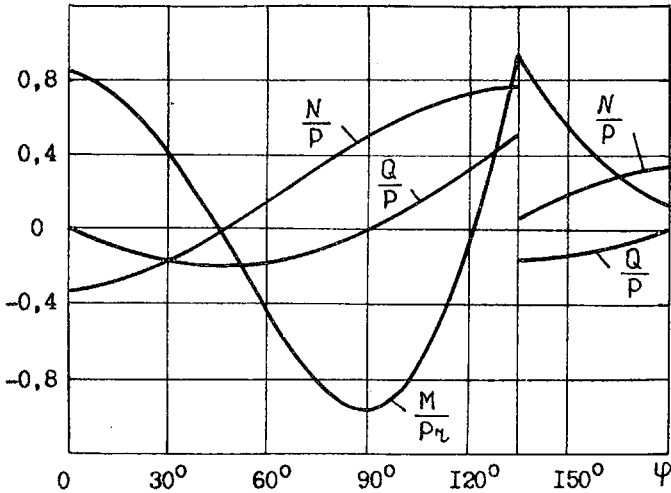


Рис. 4.15

Основную систему получим, проведя поперечный разрез шпангоута через точку I (рис.4.17). Для определения „лишних” неизвестных X_1 и X_2 используем уравнения (I.1) и (I.2) с коэффициентами (4.9), (4.11) и (4.13)–(4.15).

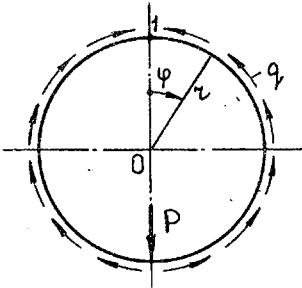


Рис. 4.16

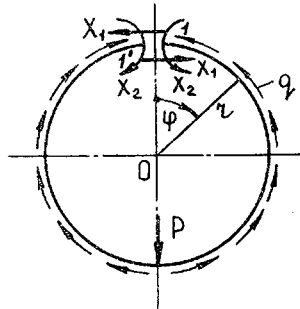


Рис. 4.17

Изгибающий момент M_0 вызывается только касательными усилиями q (рис.4.18):

$$M_0 = M_q = \frac{P r}{\pi} \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \right). \quad (4.39)$$

Так как моменты M_1 и M_2 от единичных воздействий имеют вид (4.8), то коэффициенты Δ_{10} и Δ_{20} получатся следующими:

$$\Delta_{10} = \frac{7Pr^3}{4EJ}, \quad \Delta_{20} = \frac{Pr^2}{EJ}.$$

Далее записываем канонические уравнения метода сил:

$$3r\chi_1 + 2\chi_2 + \frac{7}{4J} Pr = 0,$$

$$2r\chi_1 + 2\chi_2 + \frac{1}{J} Pr = 0.$$

Отсюда выводим:

$$\chi_1 = -\frac{3P}{4J}, \quad \chi_2 = \frac{Pr}{4J}.$$

При этом изгибающий момент M в рассматриваемом шпангоуте будет равен (рис.4.19)

$$M = \frac{Pr}{2J} (1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi). \quad (4.40)$$

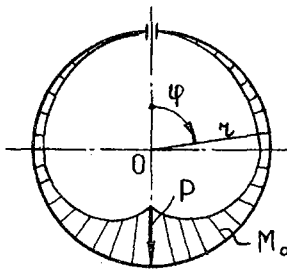


Рис. 4.18

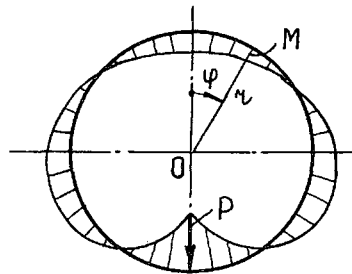


Рис. 4.19

Используя это выражение и формулы (3.6) и (3.7), находим (рис.4.20 и 4.21):

$$Q = -\frac{P}{2\pi} (\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi), \quad (4.41)$$

$$N = -\frac{P}{2\pi} (\frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi). \quad (4.42)$$

4.8. В заключение отметим, что для вычисления коэффициентов канонических уравнений, а также для определения внутренних усилий от нагрузок, распределенных по контуру кругового шпангоута,

можно пользоваться таблицей I, где приведены значения некоторых часто встречающихся интегралов.

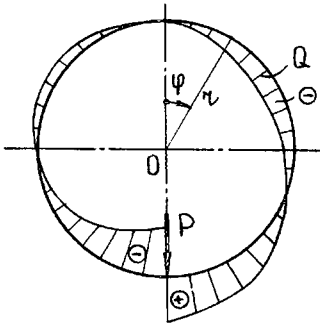


Рис. 4.20

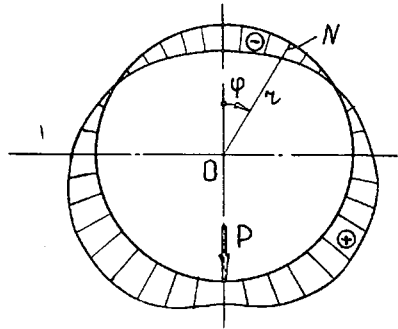


Рис. 4.21

5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА КРУГОВОГО ШПАНГОУТА НА ОБРАТНОСИММЕТРИЧНУЮ НАГРУЗКУ

5.1. Рассмотрим круговой шпангоут постоянной жесткости, нагруженный в сечении $\varphi = \pi$ сосредоточенной силой T , направленной по касательной к контуру шпангоута (рис.5.1). Касательные усилия со стороны обшивки, уравновешивающие эту нагрузку, найдем, предполагая шпангоут абсолютно жестким. Обозначим через q_0 касательные усилия, уравновешивающие момент силы T относительно центра O , и через q_1 - усилия, необходимые для уравновешивания самой силы T . Будем иметь:

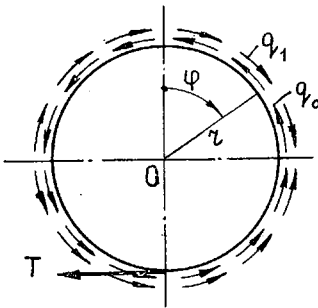


Рис. 5.1

$$Tr = \int_0^{2\pi} q_0 r^2 d\varphi, \quad (5.1)$$

$$T = \int_0^{2\pi} q_1 r \cos\varphi d\varphi. \quad (5.2)$$

Приняв гипотезу об абсолютной жесткости шпангоута, записываем, что

$$q_0 = \text{const}, \quad q_1 = k \cos\varphi,$$

Таблица I

Значения интегралов, встречающихся при расчете круговых шпангоутов

Подынтегральное выражение	Значение определенного интеграла в пределах от 0 до α
$\sin \varphi d\varphi$	$1 - \cos \alpha$
$\cos \varphi d\varphi$	$\sin \alpha$
$\sin^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha$
$\cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha$
$\sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$
$\varphi \sin \varphi d\varphi$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$
$\varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{8} \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \alpha \cos 2\alpha$
$\sin(\alpha - \varphi) d\varphi$	$1 - \cos \alpha$
$\cos(\alpha - \varphi) d\varphi$	$\sin \alpha$
$\sin(\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha$
$\sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha$
$\cos(\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha$
$\cos(\alpha - \varphi) \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha$

Тогда из (5.1) и (5.2) получаем:

$$q_0 = \frac{T}{2\pi r}, \quad k = \frac{T}{\pi r}.$$

Следовательно:

$$q_1 = \frac{T}{\pi r} \cos \varphi. \quad (5.3)$$

Суммарное касательное усилие q , действующее по контуру шпангоута, будет равно (рис.5.2)

$$q = q_0 - q_1 = -\frac{T}{2\pi r} (2 \cos \varphi - 1). \quad (5.4)$$

Из рис.5.2 видно, что нагружение шпангоута будет обратно-симметричным по отношению к вертикальной оси симметрии и, следовательно, в сечениях шпангоута по этой оси из трех усилий M , Q и N отличным от нуля будет только перерезывающая сила Q . Поэтому для упрощения расчета выбираем основную систему, проведя разрез через точку I (рис.5.3).

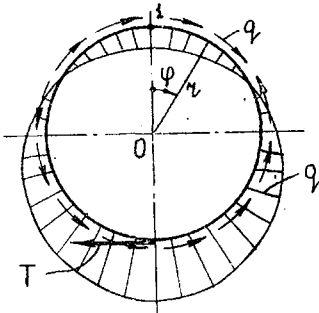


Рис. 5.2

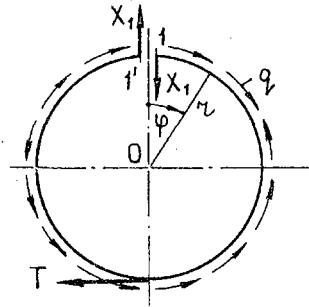


Рис. 5.3

Обозначая через X_1 перерезывающую силу в этом сечении, запишем каноническое уравнение для ее определения:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0. \quad (5.5)$$

Это уравнение выражает отсутствие взаимных вертикальных перемещений точек I и I'.

В уравнении (5.5) /2,3/

$$\delta_{11} = \int_e \frac{M_1^2}{EJ} ds, \quad \Delta_{10} = \int_e \frac{M_1 M_0}{EJ} ds. \quad (5.6)$$

В нашем случае ($EJ = \text{const}$):

$$\delta_H = \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi M_1^2 d\varphi, \quad (5.7)$$

$$\Delta_{10} = \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi M_1 M_0 d\varphi. \quad (5.8)$$

Для моментов M_1 и M_0 имеем (рис.5.4 и 5.5):

$$M_1 = r \sin\varphi, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} M_0 = M_\varphi &= \int_0^\varphi q r d\omega = r^2 \int_0^\varphi q [1 - \cos(\varphi - \omega)] d\omega = \\ &= -\frac{Tr}{2\pi} \int_0^\varphi (2\cos\omega - 1) [1 - \cos(\varphi - \omega)] d\omega = \\ &= -\frac{Tr}{2\pi} (2\sin\varphi - \varphi - \varphi \cos\varphi). \end{aligned} \quad (5.10)$$

При этом коэффициенты Δ_{10} и δ_H будут равны:

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi M_1 M_0 d\varphi = \\ &= -\frac{Tr^3}{\pi EJ} \int_0^\pi (2\sin\varphi - \varphi - \varphi \cos\varphi) \sin\varphi d\varphi = -\frac{Tr^3}{4EJ}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\delta_H = \frac{2r}{EJ} \int_0^\pi M_1^2 d\varphi = \frac{2r^3}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi r^3}{EJ}. \quad (5.12)$$

Тогда

$$\chi_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_H} = \frac{T}{4\pi}.$$

При этом изгибающий момент в произвольном сечении шпангоута определится формулой ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$):

$$M = M_0 + \chi_1 M_1 = \frac{Tr}{2\pi} (\varphi + \varphi \cos\varphi - \frac{3}{2} \sin\varphi). \quad (5.13)$$

Перерезывающую Q и нормальную силы N найдем, воспользовав-

пись соотношениями (3.6), (3.7) и (5.13):

$$Q = \frac{1}{r} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{T}{2\pi} (1 - \varphi \sin\varphi - \frac{1}{2} \cos\varphi), \quad (5.14)$$

$$N = \frac{dQ}{d\varphi} = -\frac{T}{2\pi} (\frac{1}{2} \sin\varphi + \varphi \cos\varphi). \quad (5.15)$$

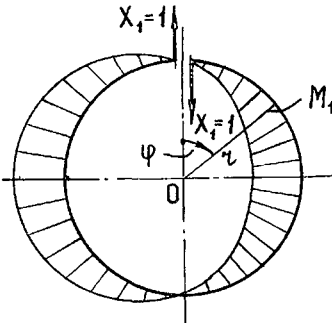


Рис. 5.4

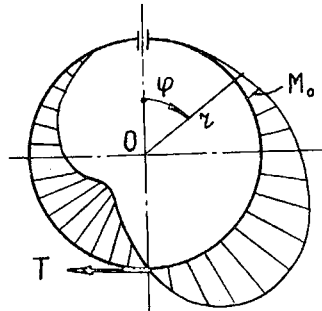


Рис. 5.5

Контролем правильности вычислений является равенство

$$\int_{\sigma} \frac{M_1 M}{EJ} ds = 0,$$

выражающее отсутствие взаимных вертикальных перемещений точек I и I' (рис.5.3). В нашем случае это равенство можно записать в форме

$$\int_0^{\pi} M_1 M d\varphi = 0$$

или

$$\int_0^{\pi} M \sin\varphi d\varphi = 0. \quad (5.16)$$

Внося сюда выражение (5.13), получаем:

$$\frac{T\pi}{2\pi} \int_0^{\pi} (\varphi + \varphi \cos\varphi - \frac{3}{2} \sin\varphi) \sin\varphi d\varphi = 0,$$

что означает правильность раскрытия статической неопределенности рассматриваемого шпангоута.

На рис.5.6-5.8 показаны эпюры изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил.

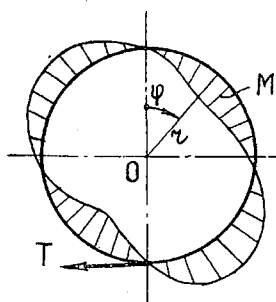


Рис. 5.6

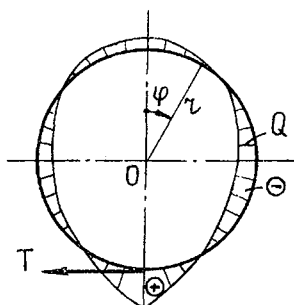


Рис. 5.7

5.2. Рассмотрим еще один пример расчета кругового шпангоута на действие обратнoсимметричной нагрузки, в качестве которой примем сосредоточенный изгибающий момент H , приложенный к шпангоуту в сечении $\varphi = \pi$ (рис. 5.9). Этот момент уравнивается равномерным потоком касательных усилий q_0 со стороны обшивки:

$$q_0 = \frac{H}{2\pi r^2} \quad (5.17)$$

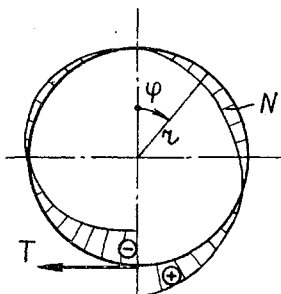


Рис. 5.8

Основную систему получим, проведя разрез кольца по сечению $\varphi = 0$ (рис. 5.10). Значение перерезывающей силы X_1 в этом сечении найдем из уравнения (5.5), в котором коэффициенты Δ_{10} и δ_{11} имеют вид, определяемый формулами (5.8) и (5.12).

Изгибающий момент M_0 в основной системе от действия касательных сил q_0 будет равен (рис. 5.11):

$$M_0 = M_q = \frac{H}{2\pi} (\varphi - \sin\varphi). \quad (5.18)$$

При этом, согласно (5.8) и (5.9):

$$\Delta_{10} = \frac{Hr^2}{2EJ} \quad (5.19)$$

Тогда

$$\chi_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{H}{2\pi r} \quad (5.20)$$

и (рис.5.12)

$$M = M_0 + \chi_1 M_1 = -\frac{H}{2\pi} (2 \sin\varphi - \varphi). \quad (5.21)$$

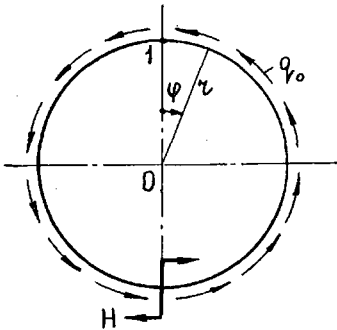


Рис. 5.9

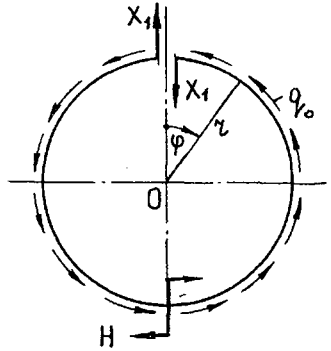


Рис. 5.10

Для перерезывающих и нормальных сил будем иметь (рис.5.13 и 5.14):

$$Q = \frac{1}{r} \frac{dM}{d\varphi} = -\frac{H}{2\pi r} (2 \cos\varphi - 1), \quad (5.22)$$

$$N = \frac{dQ}{d\varphi} = \frac{H}{\pi r} \sin\varphi. \quad (5.23)$$

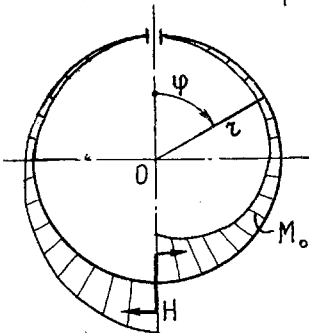


Рис. 5.11

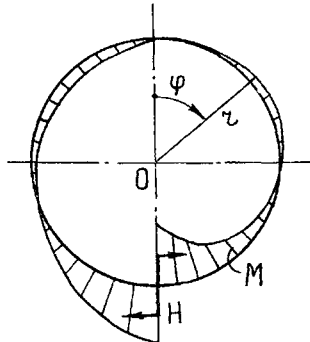


Рис. 5.12

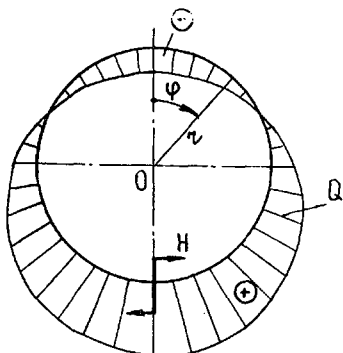


Рис. 5.13

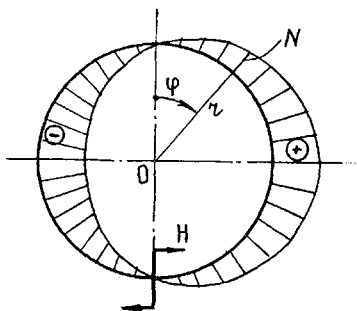


Рис. 5.14

6. О РАСЧЕТЕ КРУГОВЫХ ШПАНГУТОВ НА ДЕЙСТВИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

6.1. Если силовой шпангоут корпуса летательного аппарата нагружен сложной системой сосредоточенных сил и моментов, то его расчет может быть выполнен с помощью метода наложения так называемых элементарных решений, соответствующих действию на шпангоут простейших нагрузок.

На рис.6.1 показан силовой шпангоут с круговой осевой линией, нагруженный сосредоточенными силами P_i , T_i и моментами H_i , приложенными к нему в сечениях $\varphi = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Эта нагрузка уравновешивается касательными силами q_t , действующими на шпангоут со стороны обшивки корпуса л.а. Будем считать, что шпангоут обладает достаточно большой жесткостью на изгиб в своей плоскости. Тогда распределение сил q_t по контуру шпангоута можно принять в следующем виде:

$$q_t = q_0 + q_1 \sin \varphi + q_2 \cos \varphi. \quad (6.1)$$

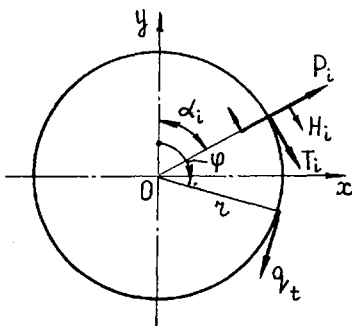


Рис. 6.1

Коэффициенты q_0 , q_1 и q_2 находятся из условий равновесия шпангоута как твердого тела:

$$q_0 = -\frac{M_0}{2\pi r^2}, \quad q_1 = \frac{P_y}{\pi r}, \quad q_2 = -\frac{P_x}{\pi r}. \quad (6.2)$$

Здесь: M_0 - момент всех внешних сосредоточенных нагрузок, действующих на шпангоут, относительно его центра O (считается положительным по часовой стрелке); P_x , P_y - суммы проекций всех сосредоточенных сил, приложенных к шпангоуту, на оси x и y .

Значения P_x , P_y и M_0 могут быть определены по формулам (n - число точек приложения сосредоточенных воздействий):

$$P_x = \sum_{i=1}^n (P_i \sin \alpha_i + T_i \cos \alpha_i), \quad P_y = \sum_{i=1}^n (P_i \cos \alpha_i - T_i \sin \alpha_i),$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n (H_i + T_i r). \quad (6.3)$$

На рис.6.1 показаны положительные направления сосредоточенных радиальных сил P_i , касательных сил T_i и изгибающих моментов H_i , а также и касательных усилий q_t .

6.2. При расчете произвольно нагруженного шпангоута постоянного сечения можно воспользоваться методом наложения (принципом независимости действия сил). Для этого необходимо располагать, как было сказано ранее, элементарными решениями, представляющими собой распределение внутренних усилий в шпангоуте при нагружении его простейшими нагрузками - радиальной силой P (рис.6.2), касательной силой T (рис.6.3) и сосредоточенным изгибающим моментом H (рис.6.4), приложенными порознь в сечении $\varphi = \pi$.

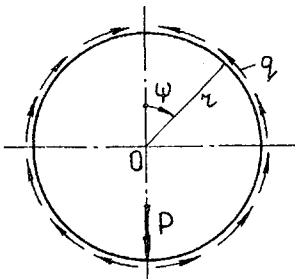


Рис. 6.2

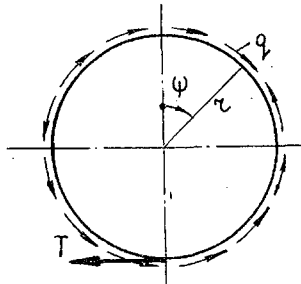


Рис. 6.3

Эти случаи нагружения шпангоута нами ранее были уже рассмотрены.

При нагружении шпангоута в сечении $\varphi = \pi$ радиальной силой P имеем, согласно формулам (4.40)-(4.42):

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= P r f_{11}(\varphi), & N(\varphi) &= P f_{21}(\varphi), \\ Q(\varphi) &= P f_{31}(\varphi). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь

$$f_{11}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi), \quad (6.5)$$

$$f_{21}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} (\frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi), \quad (6.6)$$

$$f_{31}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} (\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi). \quad (6.7)$$

При нагружении касательной силой T в соответствии с (5.13)-(5.15) будет:

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= T r f_{12}(\varphi), & N(\varphi) &= T f_{22}(\varphi), \\ Q(\varphi) &= T f_{32}(\varphi), \end{aligned} \quad (6.8)$$

причем:

$$f_{12}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (\varphi + \varphi \cos \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi), \quad (6.9)$$

$$f_{22}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} (\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi), \quad (6.10)$$

$$f_{32}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} (1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi). \quad (6.11)$$

Наконец, при действии сосредоточенного момента H имеем, согласно (5.21)-(5.23):

$$M(\varphi) = H f_{13}(\varphi), \quad N(\varphi) = \frac{H}{r} f_{23}(\varphi),$$

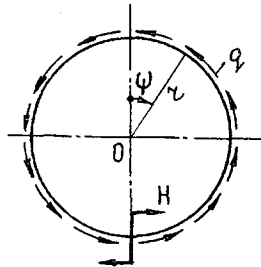


Рис. 6.4

$$Q(\varphi) = \frac{H}{r} f_{33}(\varphi), \quad (6.12)$$

где

$$f_{13}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} (2 \sin \varphi - \varphi), \quad (6.13)$$

$$f_{23}(\varphi) = \frac{1}{\pi} \sin \varphi, \quad (6.14)$$

$$f_{33}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} (2 \cos \varphi - 1). \quad (6.15)$$

В формулах (6.4)-(6.15):

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

В случае нагружения кругового шпангоута в сечениях $\varphi = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) сосредоточенными радиальными силами P_i , касательными силами T_i и моментами H_i можно, располагая элементарными решениями, записать, что в произвольном сечении шпангоута, определяемом углом φ , внутренние усилия M , N и Q будут равны:

$$M(\varphi) = \sum_{i=1}^n M_i(\varphi), \quad N(\varphi) = \sum_{i=1}^n N_i(\varphi),$$

$$Q(\varphi) = \sum_{i=1}^n Q_i(\varphi). \quad (6.16)$$

Здесь $M_i(\varphi)$, $N_i(\varphi)$ и $Q_i(\varphi)$ - изгибающий момент, нормальная и перерезывающая силы, вызываемые в сечении φ действием сосредоточенных нагрузок P_i , T_i , H_i , приложенных в сечении $\varphi = \alpha_i$.

Согласно принципу независимости действия сил, имеем:

$$\begin{bmatrix} M_i(\varphi) \\ N_i(\varphi) \\ Q_i(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r f_{11}(\varphi_i) & r f_{12}(\varphi_i) & f_{13}(\varphi_i) \\ f_{21}(\varphi_i) & f_{22}(\varphi_i) & \frac{1}{r} f_{23}(\varphi_i) \\ f_{31}(\varphi_i) & f_{32}(\varphi_i) & \frac{1}{r} f_{33}(\varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ T_i \\ Q_i \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Здесь

$$\varphi_i = \varphi - \alpha_i + \pi; \quad (6.18)$$

если $0 \leq \varphi \leq \alpha_i$ (рис.6.5) и

$$\psi_i = \varphi - \alpha_i - \pi \quad (6.19)$$

при $\alpha_i \leq \varphi \leq 2\pi$ (рис.6.6).

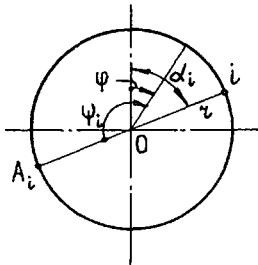


Рис. 6.5

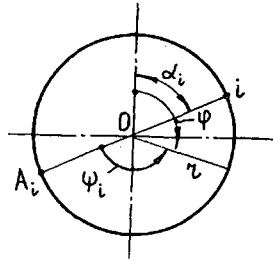


Рис. 6.6

Для сечений $\varphi = \alpha_i$ будут справедливы следующие соотношения:

$$M(\alpha_i - 0) = M(\alpha_i + 0) + H_i, \quad (6.20)$$

$$N(\alpha_i - 0) = N(\alpha_i + 0) + T_i, \quad (6.21)$$

$$Q(\alpha_i - 0) = Q(\alpha_i + 0) + P_i. \quad (6.22)$$

Здесь под $f(\alpha_i - 0)$ и $f(\alpha_i + 0)$ понимаются значения функции $f(\varphi)$ при подходе к сечению $\varphi = \alpha_i$ со стороны углов, меньших α_i и, соответственно, больших α_i .

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КРУГОВОГО ШПАНГОУТА

7.1. Под действием нагрузок, приложенных к шпангоуту, его осевая линия деформируется. Каждая точка оси шпангоута получает некоторое перемещение. Рассмотрим произвольную точку a осевой линии. Пусть $\vec{a}\vec{a}'$ - полное перемещение этой точки при деформации шпангоута. Его можно разложить на два направления (рис.7.1): по касательной к осевой линии (касательное перемещение v) и по нормали к этой линии (нормальное или радиальное перемещение w).

Для определения w обычно используют дифференциальное уравнение, связывающее это перемещение с изгибающим моментом M

(уравнение Буссинеска) /1,2,3,4/:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{\tau^2}{EJ} M. \quad (7.1)$$

Это уравнение выведено на основе гипотезы плоских сечений в предположении, что осевая линия кольца нерастяжима:

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) = 0. \quad (7.2)$$

Здесь ε - удлинение осевой линии кольца /1,2,3/.

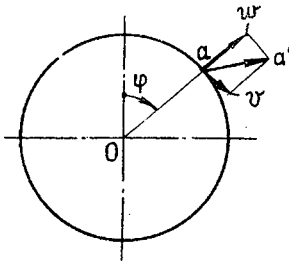


Рис. 7.1

Из (7.2) получается связь между перемещениями v и w :

$$\frac{dv}{d\varphi} = -w \quad (7.3)$$

или

$$v = -\int w d\varphi. \quad (7.4)$$

Дифференциальное уравнение (7.1) имеет следующее общее решение:

$$w = A \sin \varphi + B \cos \varphi + w^*. \quad (7.5)$$

Здесь A и B - произвольные постоянные, w^* - частное решение уравнения (7.1), соответствующее известному распределению изгибающих моментов в рассматриваемом шпангоуте.

Имея решение (7.5), находим, используя (7.4),

$$v = A \cos \varphi - B \sin \varphi + C + v^*, \quad (7.6)$$

где

$$v^* = -\int w^* d\varphi, \quad (7.7)$$

C - произвольная постоянная.

Решения, подобные (7.5)-(7.6), в общем случае можно записать для всех участков кольца, на которые оно разбивается точками приложения сосредоточенных нагрузок (с соответствующими произвольными постоянными A_i , B_i , C_i ; i - номер участка кольца). Постоянные A_i , B_i и C_i можно определить, исходя из характера деформированного состояния шпангоута (например, симметрии, прямой или обратной) и из условий непрерывности перемещений на границах участков.

Ниже рассмотрим примеры определения перемещений шпангоутов, для которых при действии заданной нагрузки уже известно распреде-

ление изгибающих моментов M .

7.2. В качестве первого примера возьмем шпангоут, рассмотренный нами в § 4 (рис.4.1).

Для первого участка шпангоута ($0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$) имеем:

$$M = -\frac{Pr^3}{\pi} \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right). \quad (7.8)$$

Внося это выражение в уравнение (7.1), получаем:

$$w_1'' + w_1 = \frac{Pr^3}{\pi EJ} \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right). \quad (7.9)$$

Здесь через w_1 обозначено радиальное перемещение произвольной точки первого участка осевой линии шпангоута.

Штрих означает производную по углу φ .

Запишем общее решение уравнения (7.9):

$$w_1(\varphi) = A_1 \sin\varphi + B_1 \cos\varphi + w_1^*, \quad (7.10)$$

где w_1^* - частное решение, A_1 , B_1 - произвольные постоянные.

Как известно, частное решение w_1^* уравнения (7.9) можно искать в форме:

$$w_1^* = a + b\varphi \sin\varphi + c\varphi^2 \cos\varphi. \quad (7.11)$$

Подставляя предполагаемую форму частного решения в (7.9), находим:

$$a = -\frac{\sqrt{2}Pr^3}{2\pi EJ} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right), \quad b = \frac{3Pr^3}{4\pi EJ}, \quad c = -\frac{Pr^3}{4\pi EJ}.$$

Тогда, имея в виду симметричное относительно вертикальной оси шпангоута распределение перемещений (т.е. полагая $A_1 = 0$), можем записать:

$$w_1(\varphi) = B_1 \cos\varphi - \frac{Pr^3}{\pi EJ} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4}\varphi \sin\varphi + \frac{1}{4}\varphi^2 \cos\varphi \right]. \quad (7.12)$$

Этим перемещениям (радиальным) соответствуют касательные перемещения v_1 ($v_1 = 0$ при $\varphi = 0$):

$$v_1(\varphi) = -\int_0^\varphi w_1 d\varphi = -B_1 \sin\varphi +$$

$$+ \frac{P r^3}{\pi E y} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi + \frac{5}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right]. \quad (7.13)$$

На втором участке правой половины шпангоута ($\frac{3}{4} \pi \leq \varphi \leq \pi$) изгибающий момент M равен:

$$M = - \frac{P r}{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \right) - P r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right). \quad (7.14)$$

При этом дифференциальное уравнение (7.1) для определения радиального перемещения w_2 на втором участке шпангоута будет иметь вид:

$$w_2'' + w_2 = \frac{P r^3}{\pi E y} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \right) + \frac{P r^3}{E y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right). \quad (7.15)$$

Общее решение этого уравнения:

$$w_2(\varphi) = A_2 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi + w_2^*. \quad (7.16)$$

Здесь w_2^* - частное решение, A_2 и B_2 - произвольные постоянные.

Частное решение w_2^* находится тем же способом, что и решение w_1^* .

В результате будем иметь:

$$w_2(\varphi) = A_2 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi - \frac{P r^3}{\pi E y} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \cos \varphi \right] + \frac{P r^3}{E y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi \right). \quad (7.17)$$

Далее, определяем соответствующее касательное перемещение v_2 :

$$v_2(\varphi) = A_2 \cos \varphi - B_2 \sin \varphi + C_2 + \frac{P r^3}{\pi E y} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi + \frac{5}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right] - \frac{P r^3}{E y} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \varphi + \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \right). \quad (7.18)$$

Для нахождения произвольных постоянных используем условия:

$$\omega_1 \left(\frac{3}{4} \pi \right) = \omega_2 \left(\frac{3}{4} \pi \right), \quad (7.19)$$

$$v_1 \left(\frac{3}{4} \pi \right) = v_2 \left(\frac{3}{4} \pi \right), \quad (7.20)$$

$$\gamma_1 \left(\frac{3}{4} \pi \right) = \gamma_2 \left(\frac{3}{4} \pi \right). \quad (7.21)$$

Первое и второе из этих условий означают равенство перемещений ω_1 , v_1 и ω_2 , v_2 при $\varphi = \frac{3}{4} \pi$ (на границе двух участков). Третье условие выражает равенство углов поворота γ_1 и γ_2 сечений кольца на стыке участков.

Как известно, угол γ поворота сечения кольца определяется формулой /1,2/ (рис.7.2):

$$\gamma = \frac{1}{r} \left(v - \frac{dw}{d\varphi} \right). \quad (7.22)$$

Таким образом

$$\gamma_1 = \frac{1}{r} (v_1 - w_1'), \quad \gamma_2 = \frac{1}{r} (v_2 - w_2'),$$

и, в силу равенства (7.20), условие (7.21) принимает вид:

$$\omega_1' \left(\frac{3}{4} \pi \right) = \omega_2' \left(\frac{3}{4} \pi \right). \quad (7.23)$$

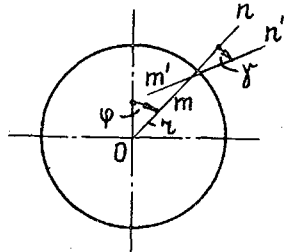


Рис. 7.2

Записав, исходя из выражений (7.12), (7.13) и (7.17), (7.18), условия (7.19), (7.20) и (7.23) и решив получившуюся при этом систему уравнений относительно постоянных интегрирования, будем иметь:

$$A_2 = -\frac{3Pr^3}{4E\gamma}, \quad B_2 = B_1 - \frac{Pr^3}{4E\gamma} \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right),$$

$$C_2 = \frac{Pr^3}{E\gamma} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{4} \pi - 1 \right). \quad (7.24)$$

Постоянная B_1 остается неопределенной. Она представляет собой перемещение шпангоута в вертикальном направлении в целом как твердого тела. Для определения этой константы необходимо задать вертикальное перемещение какой-либо точки оси шпангоута.

Внося значения (7.24) в (7.17) и (7.18), будем иметь следующую-

шее распределение перемещений w_2 и v_2 :

$$w_2(\varphi) = B_1 \cos \varphi - \frac{P r^3}{\pi E J} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \cos \varphi \right] + \frac{P r^3}{E J} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right) \cos \varphi \right], \quad (7.25)$$

$$v_2(\varphi) = -B_1 \sin \varphi + \frac{P r^3}{\pi E J} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi + \frac{5}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right] + \frac{P r^3}{E J} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{4} \pi - 1 \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi - \frac{5}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right) \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \right] \quad (7.26)$$

Полагая в (7.26) $\varphi = \pi$, находим

$$v_2(\pi) = 0. \quad (7.27)$$

Далее, продифференцировав формулу (7.25) и подставив в полученное выражение $\varphi = \pi$, приходим к равенству

$$w_2'(\pi) = 0. \quad (7.28)$$

Соотношения (7.27) и (7.28) находятся в полном согласии с симметричным характером деформированного состояния рассматриваемого шпангоута.

На рис. 7.3 представлено распределение перемещений w и v , вычисленных по формулам (7.12), (7.13) и (7.25), (7.26) с использованием обозначений

$$\tilde{w} = \frac{E J}{P r^3} w, \quad \tilde{v} = \frac{E J}{P r^3} v \quad (7.29)$$

$$(w(0) = 0).$$

7.3. Как второй пример, рассмотрим определение перемещений кругового шпангоута, нагруженного касательной силой T , приложенной в сечении $\varphi = \pi$ (рис. 5.1). Для этого шпангоута распре-

деление изгибающего момента M определяется формулой (5.13).
Внося это выражение в дифференциальное уравнение (7.1), получаем:

$$w'' + w = -\frac{T\tau^3}{2\pi E\gamma} \left(\varphi + \varphi \cos \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi \right). \quad (7.30)$$

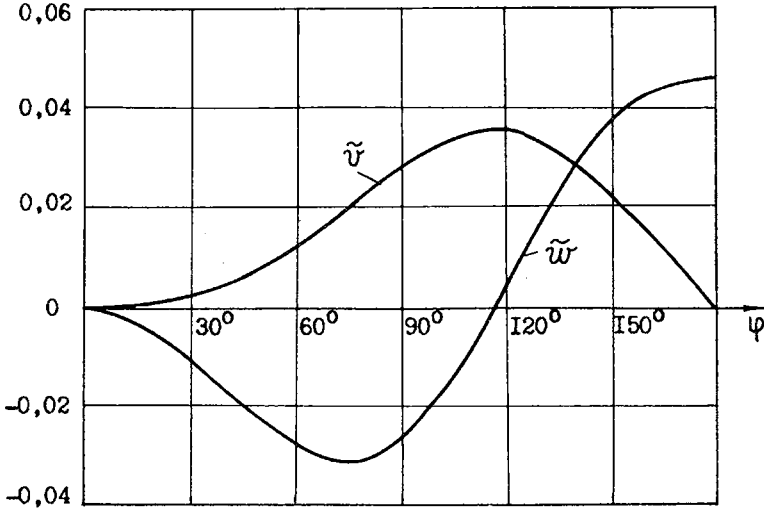


Рис. 7.3

Общее решение уравнения (7.30) имеет вид:

$$w(\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi + w^*, \quad (7.31)$$

где A и B - произвольные постоянные.

Частное решение w^* будем искать в форме:

$$w^* = a\varphi + b\varphi \cos \varphi + c\varphi^2 \sin \varphi. \quad (7.32)$$

Подстановка решения (7.32) в (7.30) дает:

$$a = -\frac{T\tau^3}{2\pi E\gamma}, \quad b = a, \quad c = \frac{1}{4} a.$$

При этом

$$w^* = -\frac{T\tau^3}{2\pi E\gamma} \left(\varphi + \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right). \quad (7.33)$$

В силу обратносимметричного характера нагружения кольца его деформированное состояние будет также обратносимметричным по отношению к сечению $\varphi = 0$. Поэтому

$$w(0) = 0$$

и, следовательно, постоянная B должна быть равна нулю.

Тогда для $w(\varphi)$ будем иметь следующее выражение:

$$w = A \sin \varphi - \frac{T r^3}{2 \pi E J} \left(\varphi + \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right). \quad (7.34)$$

При этом перемещение v будет равно:

$$v(\varphi) = C - \int w d\varphi$$

или, после интегрирования,

$$v(\varphi) = A \cos \varphi + C + \frac{T r^3}{4 \pi E J} \left(\varphi^2 + 3 \varphi \sin \varphi + 3 \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 \cos \varphi \right). \quad (7.35)$$

Входящие в (7.34) и (7.35) постоянные A и C остались неопределенными. Чтобы их найти, необходимо располагать горизонтальным перемещением какой-либо точки осевой линии шпангоута и углом поворота шпангоута как твердого тела.

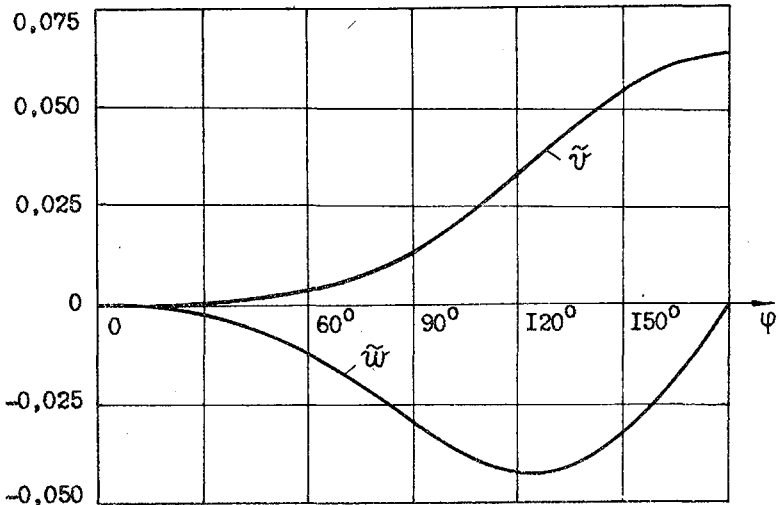


Рис. 7.4

На рис.7.4 представлены графики распределения перемещений рассматриваемого кольца с использованием обозначений

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{EJ}{Tr^3} w, & \tilde{v} &= \frac{EJ}{Tr^3} v, & (7.36) \\ (v(0) &= 0, & w'(0) &= 0).\end{aligned}$$

8. О РАСЧЕТЕ КРУГОВЫХ ШПАНГОУТОВ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

8.1. В предыдущих параграфах был описан и проиллюстрирован примерами широко применяемый на практике метод сил для расчета шпангоутов, рассматриваемых как статически неопределимые плоские рамы, нагруженные в плоскости осевой линии. Этот метод требует выбора основной системы для исследуемого шпангоута с последующим рассмотрением ее под воздействием заданной внешней нагрузки и единичных усилий. Для определения значений „лишних“ неизвестных используются канонические уравнения, по существу представляющие собой условия совместности деформаций кольца в месте проведения при образовании основной системы разреза. После решения канонических уравнений (раскрытия статической неопределимости) находятся внутренние усилия в сечениях шпангоута. Перемещения w шпангоута можно затем определить, интегрируя уравнение Буссинеска (7.1).

Однако, возможен и другой путь решения задачи об определении внутренних усилий и перемещений в круговых шпангоутах, который в целом ряде практически важных случаев может оказаться более удобным и менее громоздким по сравнению с методом сил. Этот способ основан на использовании общего решения дифференциального уравнения изгиба кругового кольца, непосредственно связывающего прогиб w кольца с распределенными по его контуру силами q_{vt} и q_{vn} (рис.3.1). Располагая решением этого уравнения, можно получить и распределение внутренних усилий в кольце, используя соотношение (7.1) и дифференциальные уравнения равновесия кругового кольца. Такой способ расчета круговых колец условно можно назвать методом перемещений (или решением задачи о кольце в перемещениях).

8.2. Рассмотрим основные соотношения метода перемещений для расчета круговых шпангоутов. С этой целью обратимся сначала к выводу дифференциального уравнения изгиба кольца. Для этого из

уравнений (3.1) и (3.2) находим (штрих означает производную по углу φ):

$$Q'' + Q = -\nu(q_t + q_n')$$

или, на основании (3.4),

$$M''' + M' = -\nu^2(q_t + q_n') - \nu(m_x'' + m_x).$$

Подставив сюда выражение

$$M = -\frac{EJ}{\nu^2} (w'' + w), \quad (8.1)$$

следующее из (7.1), приходим к искомому дифференциальному уравнению для радиального перемещения w :

$$w^v + 2w''' + w' = \frac{\nu^4}{EJ} (q_t + q_n') + \frac{\nu^3}{EJ} (m_x'' + m_x). \quad (8.2)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$w(\varphi) = A_0 + A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + w_q, \quad (8.3)$$

где w_q - частное решение, определяемое характером распределения нагрузок q_t , q_n и m_x ; A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 - произвольные постоянные.

Подставляя выражение (8.3) в (7.4) и интегрируя, получаем касательное перемещение v :

$$v(\varphi) = A_5 - \int w d\varphi$$

или

$$v(\varphi) = -A_0 \varphi + A_1 \cos \varphi - A_2 \sin \varphi - A_3 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + A_5 + v_q \quad (8.4)$$

Здесь

$$v_q = -\int w_q d\varphi, \quad (8.5)$$

A_5 - постоянная интегрирования.

В частном случае, когда правая часть уравнения (8.2) имеет вид

$$\frac{\nu^4}{EJ} (q_t + q_n') + \frac{\nu^3}{EJ} (m_x'' + m_x) =$$

$$= a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi), \quad (8.6)$$

его частным решением будет выражение:

$$w_q(\varphi) = a_0 \varphi - \frac{1}{8} a_1 \varphi^2 \sin \varphi + \frac{1}{8} b_1 \varphi^2 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m^2-1)^2} (a_m \sin m\varphi - b_m \cos m\varphi). \quad (8.7)$$

Этому решению соответствует перемещение v_q :

$$v_q(\varphi) = -\frac{1}{2} a_0 \varphi^2 + \frac{1}{8} a_1 (2\varphi \sin \varphi - \varphi^2 \cos \varphi + 2 \cos \varphi) - \frac{1}{8} b_1 (2\varphi \cos \varphi + \varphi^2 \sin \varphi - 2 \sin \varphi) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2(m^2-1)^2} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi). \quad (8.8)$$

8.3. Располагая выражением (8.3) для радиального перемещения W , можно сравнительно просто получить следующую формулу, определяющую изгибающий момент M в сечениях кольца:

$$M = -\frac{EJ}{r^2} (A_0 - 2A_3 \sin \varphi + 2A_4 \cos \varphi) + M_q, \quad (8.9)$$

где

$$M_q = -\frac{EJ}{r^2} (w_q'' + w_q). \quad (8.10)$$

Далее, используя общие зависимости (3.4) и (3.2), находим:

$$Q = \frac{2EJ}{r^3} (A_3 \cos \varphi + A_4 \sin \varphi) + Q_q, \quad (8.11)$$

$$N = -\frac{2EJ}{r^3} (A_3 \sin \varphi - A_4 \cos \varphi) + N_q. \quad (8.12)$$

Здесь

$$Q_q = \frac{1}{r} M_q' + m_x, \quad (8.13)$$

$$N_q = Q'_q + r q_{pn}. \quad (8.14)$$

8.4. Выражения, подобные (8.3), (8.4) и (8.9)-(8.14), записываются для всех частей кольца, на которые оно разбивается точками приложения сосредоточенных сил и моментов с соответствующими произвольными постоянными. Эти постоянные определяются из условий сопряжения частей кольца между собой. В некоторых частных случаях могут быть использованы свойства симметрии напряженного и деформированного состояния рассматриваемого кольца.

В общем виде условия сопряжения двух частей кольца в некотором сечении $\varphi = \alpha$ записываются следующим образом:

$$w(\alpha - 0) = w(\alpha + 0), \quad (8.15)$$

$$v(\alpha - 0) = v(\alpha + 0), \quad (8.16)$$

$$\gamma(\alpha - 0) = \gamma(\alpha + 0). \quad (8.17)$$

Эти выражения характеризуют одинаковость перемещений при подходе к сечению $\varphi = \alpha$ с двух сторон.

Для записи условия (8.17) необходимо иметь формулу для γ . Она может быть получена в следующем виде, исходя из (7.22) и (8.3), (8.4):

$$r\gamma = -A_0\varphi - 2A_3\cos\varphi - 2A_4\sin\varphi + A_5 + r\gamma_q. \quad (8.18)$$

Здесь

$$r\gamma_q = v_q - w'_q. \quad (8.19)$$

Помимо геометрических условий (8.15)-(8.17), в сечении $\varphi = \alpha$ должны выполняться также и статические условия. Если в этом сечении к кольцу приложены сосредоточенные силы P и T и момент H (рис.8.1), то здесь внутренние усилия будут связаны соотношениями:

$$M(\alpha - 0) = M(\alpha + 0) + H, \quad (8.20)$$

$$N(\alpha - 0) = N(\alpha + 0) + T, \quad (8.21)$$

$$Q(\alpha - 0) = Q(\alpha + 0) + P. \quad (8.22)$$

Условий сопряжения вида (8.15)-(8.17) и (8.20)-(8.22) вместе с некоторыми другими возможными условиями, описывающими деформированное состояние кольца, должно быть столько, сколько всего имеется искомым произвольных постоянных. Однако, если кольцо не закреплено, то из всей совокупности произвольных постоянных останутся неопределенными три константы, описывающие перемещения кольца как твердого тела (например, постоянные A_1 , A_2 и A_5 , относящиеся к первому участку).

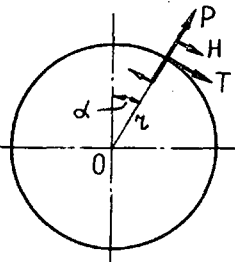


Рис. 8.1

В связи с этим с целью определения всех произвольных постоянных следует рассматриваемое кольцо закрепить на опорах статически определенным образом, лишив его в плоскости осевой линии всех трех степеней свободы как твердого тела. При этом характер закрепления кольца не отразится на его напряженном состоянии, так как все реакции опор будут равны нулю (внешняя нагрузка, приложенная к кольцу, уравновешивается касательными усилиями со стороны обшивки). Далее, записав в аналитическом виде три условия закрепления, нужно добавить их к ранее составленным уравнениям, связывающим искомые константы. В результате получится полная система уравнений для определения всех произвольных постоянных. В практических расчетах эту систему целесообразно решать численно.

В тех случаях, когда целью расчета является только определение внутренних силовых факторов, то константы, определяющие перемещения кольца как твердого тела, можно положить равными нулю.

9. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА КРУГОВЫХ ШПАНГУТОВ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим примеры использования метода перемещений для определения внутренних усилий и перемещений в шпангутах с круговой осевой линией.

9.1. Обратимся еще раз к шпангуту, показанному на рис.4.1. Согласно принятому правилу знаков для касательных сил q_t , имеем:

$$q_t = -\frac{2P}{\pi r} \sin \varphi.$$

Далее записываем дифференциальное уравнение изгиба кольца:

$$w'' + 2w'' + w' = -\frac{2Pr^3}{\pi EJ} \sin \varphi. \quad (9.1)$$

В соответствии с (8.7) частным решением этого уравнения будет выражение

$$w_\varphi = -\frac{Pr^3}{4\pi EJ} \varphi^2 \cos \varphi, \quad (9.2)$$

справедливое для обоих участков правой половины кольца.

Обозначим через w_1 и v_1 перемещения на первом участке шпангоута ($0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$), а через w_2 и v_2 - перемещения на втором участке ($\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$).

Согласно (8.3), (8.4) и (8.8) для w_1 и v_1 будем иметь следующие выражения (в силу симметрии деформированного состояния шпангоута по отношению к сечению $\varphi = 0$):

$$w_1 = A_0 + A_2 \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi - \frac{Pr^3}{4\pi EJ} \varphi^2 \cos \varphi; \quad (9.3)$$

$$v_1 = -A_0 \varphi - A_2 \sin \varphi - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{Pr^3}{4\pi EJ} (2\varphi \cos \varphi + \varphi^2 \sin \varphi - 2 \sin \varphi). \quad (9.4)$$

Далее, используя (7.22), находим:

$$r\gamma_1 = -A_0 \varphi - 2A_4 \sin \varphi + \frac{Pr^3}{2\pi EJ} (2\varphi \cos \varphi - \sin \varphi). \quad (9.5)$$

Внутренние усилия на первом участке кольца обозначим через M_1 , Q_1 и N_1 . Они будут иметь вид, согласно (8.9), (8.II) и (8.I2):

$$M_1 = -\frac{EJ}{r^2} (A_0 + 2A_4 \cos \varphi) + \frac{Pr}{2\pi} (\cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi), \quad (9.6)$$

$$Q_1 = \frac{2EJ}{r^3} A_4 \sin \varphi - \frac{P}{2\pi} (3 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi), \quad (9.7)$$

$$N_1 = \frac{2EJ}{r^3} A_4 \cos \varphi - \frac{P}{2\pi} (5 \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi). \quad (9.8)$$

Для второго участка кольца имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} w_2 = & B_0 + B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi + \\ & + B_3 \varphi \cos \varphi + B_4 \varphi \sin \varphi - \frac{P r^3}{4 \pi E J} \varphi^2 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} v_2 = & -B_0 \varphi + B_1 \cos \varphi - B_2 \sin \varphi - \\ & - B_3 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - B_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + B_5 + \\ & + \frac{P r^3}{4 \pi E J} (2 \varphi \cos \varphi + \varphi^2 \sin \varphi - 2 \sin \varphi), \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} r y_2 = & -B_0 \varphi - 2 B_3 \cos \varphi - 2 B_4 \sin \varphi + B_5 + \\ & + \frac{P r^3}{2 \pi E J} (2 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi), \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} M_2 = & -\frac{E J}{r^2} (B_0 - 2 B_3 \sin \varphi + 2 B_4 \cos \varphi) + \\ & + \frac{P r}{2 \pi} (\cos \varphi - 2 \varphi \sin \varphi), \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & \frac{2 E J}{r^3} (B_3 \cos \varphi + B_4 \sin \varphi) - \\ & - \frac{P}{2 \pi} (3 \sin \varphi + 2 \varphi \cos \varphi), \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & -\frac{2 E J}{r^3} (B_3 \sin \varphi - B_4 \cos \varphi) - \\ & - \frac{P}{2 \pi} (5 \cos \varphi - 2 \varphi \sin \varphi). \end{aligned} \quad (9.14)$$

В этих формулах B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 - произвольные постоянные для второго участка. Для их определения используем условия сопряжения первого и второго участков кольца

при $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и симметричный характер распределения перемещений на втором участке по отношению к сечению $\varphi = \pi$:

$$1) \omega_1\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \omega_2\left(\frac{3}{4}\pi\right), \quad 2) \nu_1\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \nu_2\left(\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$3) \tau\gamma_1\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \tau\gamma_2\left(\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$4) M_1\left(\frac{3}{4}\pi\right) = M_2\left(\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$5) N_1\left(\frac{3}{4}\pi\right) = N_2\left(\frac{3}{4}\pi\right) - P \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$6) Q_1\left(\frac{3}{4}\pi\right) = Q_2\left(\frac{3}{4}\pi\right) - P \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$7) \nu_2(\pi) = 0,$$

$$8) \tau\gamma_2(\pi) = 0.$$

В развернутой форме эти условия запишутся в виде следующей системы уравнений:

$$(B_0 - A_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} B_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} (B_2 - A_2) - \\ - \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} B_3 + \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} (B_4 - A_4) = 0;$$

$$\frac{3\pi}{4} (B_0 - A_0) + \frac{\sqrt{2}}{2} B_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (B_2 - A_2) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{\pi}\pi - 1\right) B_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right) (B_4 - A_4) - B_5 = 0;$$

$$\frac{3\pi}{4} (B_0 - A_0) - \sqrt{2} B_3 + \sqrt{2} (B_4 - A_4) - B_5 = 0;$$

$$(B_0 - A_0) - \sqrt{2} B_3 - \sqrt{2} (B_4 - A_4) = 0;$$

$$B_3 + (B_4 - A_4) = \frac{P\alpha^3}{2EJ};$$

$$-B_3 + (B_4 - A_4) = -\frac{P\alpha^3}{2EJ};$$

$$-\pi B_0 - B_1 + B_3 - \pi B_4 + B_5 = \frac{Pr^3}{2E\mathcal{J}};$$

$$-\pi B_0 + 2B_3 + B_5 = \frac{Pr^3}{E\mathcal{J}}.$$

Решив эту систему, будем иметь такие значения искомым произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \frac{Pr^3}{E\mathcal{J}}, & A_4 &= \frac{3Pr^3}{4\pi E\mathcal{J}}, \\ B_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\pi - 1\right) \frac{Pr^3}{E\mathcal{J}}, & B_1 &= -\frac{3Pr^3}{4E\mathcal{J}}, \\ B_2 &= A_2 - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\pi - 1\right) \frac{Pr^3}{E\mathcal{J}}, & B_3 &= \frac{Pr^3}{2E\mathcal{J}}, \\ B_4 &= A_4 = \frac{3Pr^3}{4\pi E\mathcal{J}}, & B_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{4}\pi - 1\right) \frac{Pr^3}{E\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Постоянная A_2 осталась неопределенной. Она представляет собой вертикальное перемещение кольца как твердого тела.

Подставляя величины (9.15) в (9.3), (9.4) и (9.9), (9.10), получаем перемещения точек осевой линии рассматриваемого шпангоута на первом и втором участках:

$$\begin{aligned} w_1 &= A_2 \cos \varphi - \\ & - \frac{Pr^3}{\pi E\mathcal{J}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= -A_2 \sin \varphi + \\ & + \frac{Pr^3}{\pi E\mathcal{J}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi + \frac{5}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right], \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} w_2 &= A_2 \cos \varphi - \\ & - \frac{Pr^3}{\pi E\mathcal{J}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \cos \varphi \right] + \\ & + \frac{Pr^3}{E\mathcal{J}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\pi - 1\right) \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$v_2 = -A_2 \sin \varphi +$$

$$+ \frac{P r^3}{\pi E J} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \varphi - \frac{5}{4} \sin \varphi + \frac{5}{4} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right] +$$

$$+ \frac{P r^3}{E J} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{4} \pi - 1 \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi - \frac{5}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right) \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \right]. \quad (9.19)$$

Эти выражения совпадают с соотношениями (7.12), (7.13) и (7.25), (7.26).

Далее, используя формулы (9.6)–(9.8) и (9.12)–(9.14) в сочетании с (9.15), приходим к выражениям для изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил, тождественным ранее полученным соотношениям (4.16), (4.17), (4.30)–(4.33).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Выражения (4.16), (4.17) и (4.30)–(4.33) найдены путем раскрытия статической неопределенности кольца, причем коэффициенты канонических уравнений вычислялись только с учетом изгибающих моментов. Перемещениями от перерезывающих и нормальных сил пренебрегалось.

Выражения (9.16)–(9.19) для перемещений точек осевой линии кольца получены на основе гипотезы плоских сечений и условия нерастяжимости осевой линии кольца. Эти перемещения приводят к тем же внутренним усилиям, что и метод сил. Таким образом, можно сказать, что гипотеза плоских сечений вместе с условием нерастяжимости оси кольца эквивалентны пренебрежению влиянием перерезывающих и нормальных сил на величины коэффициентов канонических уравнений метода сил.

9.2. В качестве второго примера возьмем круговой шпангоут, нагруженный одинаковыми радиальными силами P . Пусть точки приложения сил делят осевую линию шпангоута на равные части (рис.9.1). Через m обозначим количество сил P , приложенных к шпангоуту. Тогда угол 2β между линиями действия двух ближайших сил будет равен:

$$2\beta = \frac{2\pi}{m}.$$

Для расчета этого шпангоута, очевидно, можно ограничиться рассмотрением только одной его части, заключенной между двумя соседними точками приложения сил P (рис.9.2). Так как эта

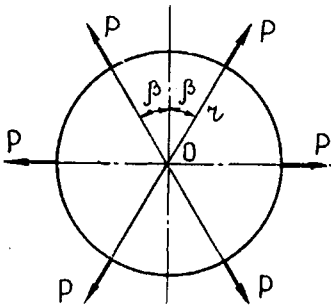


Рис. 9.1

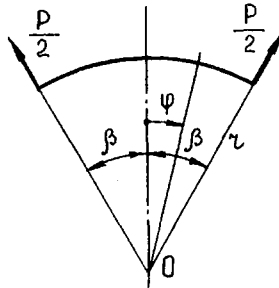


Рис. 9.2

часть шпангоута симметрична относительно сечения $\varphi = 0$ и несет симметричную нагрузку, то в выражении (8.3) для w оставляем только четные функции угла φ (распределение прогибов w будет симметричным и, следовательно, будет описываться четными относительно φ функциями), а в формуле (8.4) для касательного перемещения v - соответственно только нечетные функции. Кроме того, полагаем:

$$w_q = 0, \quad v_q = 0,$$

так как на кольцо не действуют никакие распределенные нагрузки (т.е. $q_n = 0, q_t = 0$).

В результате будем иметь:

$$w = A_0 + A_2 \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi, \quad (9.20)$$

$$v = -A_0 \varphi - A_2 \sin \varphi - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \quad (9.21)$$

Для определения постоянных A_0, A_2 и A_4 имеем следующие три условия:

при $\varphi = \beta$ 1) $w' = 0$, 2) $v = 0$, 3) $Q = \frac{P}{2}$.

Первое и второе условия непосредственно следуют из симметрии деформированного состояния кольца. В развернутом виде они запишутся так:

$$-A_2 \sin \beta + A_4 (\beta \cos \beta + \sin \beta) = 0, \quad (9.22)$$

$$A_0 \beta + A_2 \sin \beta + A_4 (\sin \beta - \beta \cos \beta) = 0. \quad (9.23)$$

Для записи третьего условия используем формулу (8.II).

В нашем случае она примет вид

$$Q = \frac{2EJ}{r^3} A_4 \sin\varphi. \quad (9.24)$$

Полагая здесь $\varphi = \beta$ и $Q = \frac{P}{2}$, получаем уравнение

$$\frac{2EJ}{r^3} A_4 \sin\beta = \frac{P}{2}. \quad (9.25)$$

Отсюда

$$A_4 = \frac{Pr^3}{4EJ \sin\beta}.$$

Далее, из (9.22) и (9.23) находим:

$$A_0 = -\frac{Pr^3}{2\beta EJ}, \quad A_2 = \frac{Pr^3}{4EJ} \frac{\beta \operatorname{ctg}\beta + 1}{\sin\beta}.$$

Теперь нетрудно вывести выражения для изгибающего момента, перерезывающей и нормальной сил:

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\cos\varphi}{\sin\beta} \right), \quad (9.26)$$

$$Q = \frac{P}{2 \sin\beta} \sin\varphi, \quad (9.27)$$

$$N = \frac{P}{2 \sin\beta} \cos\varphi. \quad (9.28)$$

Подставляя значения постоянных A_0 , A_2 и A_4 в (9.20), будем иметь:

$$w = \frac{Pr^3}{4EJ \sin\beta} \left[(1 + \beta \operatorname{ctg}\beta) \cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{2 \sin\beta}{\beta} \right]. \quad (9.29)$$

Полагая здесь $\varphi = \beta$, получаем радиальное перемещение Δ точки приложения силы P :

$$\Delta = w(\beta) = \frac{Pr^3}{4EJ \sin\beta} \left(\frac{\beta}{\sin\beta} + \cos\beta - \frac{2 \sin\beta}{\beta} \right).$$

Касательное перемещение v определится равенством:

$$v = -\frac{Pr^3}{4EJ \sin\beta} \left[(2 + \beta \operatorname{ctg}\beta) \sin\varphi - \varphi \cos\varphi - \frac{2 \sin\beta}{\beta} \varphi \right]. \quad (9.30)$$

На рис. 9.3, 9.4 и 9.5 представлены эпюры M , Q и N для случая $\beta = \frac{\pi}{6}$ ($m = 6$).

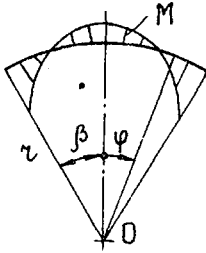


Рис. 9.3

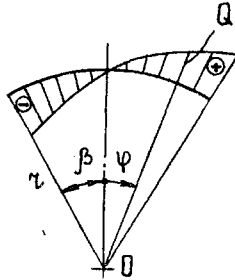


Рис. 9.4

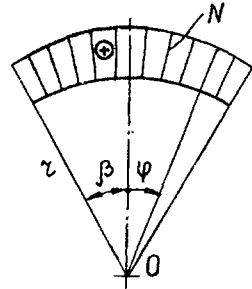


Рис. 9.5

10. УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ШПАНГОУТА И ОБОЛОЧКИ

10.1. До сих пор при определении касательных усилий, действующих на шпангоут со стороны обшивки и уравновешивающих внешнюю сосредоточенную нагрузку, мы шпангоут принимали абсолютно жестким. Это будет вполне справедливо, если рассматриваемый шпангоут обладает достаточно большой жесткостью на изгиб в своей плоскости. В тех же случаях, когда шпангоут имеет сравнительно небольшие размеры поперечного сечения, принятие модели абсолютно жесткого шпангоута для нахождения реакции обшивки может привести к значительным погрешностям. Для количественной оценки влияния изгибной жесткости шпангоута на распределение реакции обшивки вдоль его осевой линии рассмотрим приближенное решение задачи о передаче через упругий шпангоут радиальной сосредоточенной силы P на цилиндрическую оболочку длины $2l$. Шпангоут будем считать расположенным посередине оболочки (рис.10.1), которую принимаем безмоментной.

Нагружение системы является симметричным, и касательные усилия, действующие на шпангоут со стороны обшивки, будем искать в виде одинарного тригонометрического ряда:

$$q(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\varphi.$$

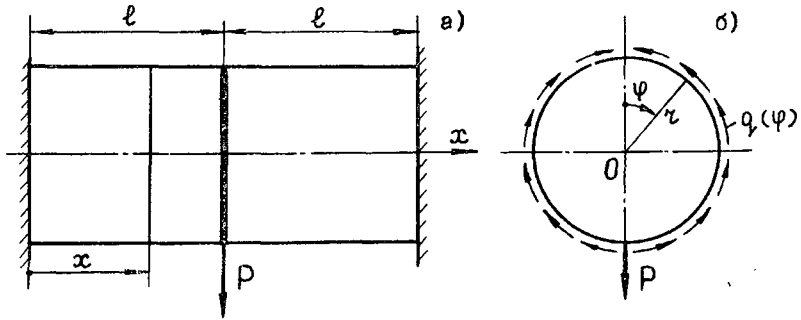


Рис. 10.1

Коэффициент b_1 этого разложения может быть найден из условия равновесия шпангоута:

$$P = 2 \int_0^{\pi} q \sin \varphi r d\varphi =$$

$$= 2r \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin \varphi d\varphi = \pi r b_1.$$

Отсюда

$$b_1 = \frac{P}{\pi r}.$$

Поэтому

$$q(\varphi) = \frac{P}{\pi r} \sin \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} b_m \sin m\varphi. \quad (10.1)$$

Остальные коэффициенты b_m ($m \geq 2$) определяют самоуравновешенные потоки касательных усилий со стороны оболочки. Их можно определить из условия совместности деформаций оболочки и шпангоута. *) При этом, как и раньше, будем считать радиусы срединной поверхности цилиндрической оболочки и осевой линии кольца одинаковыми.

10.2. Для записи условия совместности деформаций кольца и оболочки необходимо располагать выражениями для касательных перемещений U осевой линии кольца и окружных перемещений U_{φ}

*) В работе /4/ коэффициенты b_m определяются из условия минимума потенциальной энергии системы шпангоут-оболочка.

точек срединной поверхности оболочки в сечении $x = \ell$ (рис.10.1).

Начнем с определения касательных перемещений v точек осевой линии кольца, нагруженного радиальной сосредоточенной силой P и касательными усилиями q со стороны обшивки.

Согласно принятому правилу знаков для касательных сил q_t имеем:

$$q_t(\varphi) = -q(\varphi),$$

где $q(\varphi)$ определяется по формуле (10.1). При этом дифференциальное уравнение (8.2) для прогиба кольца w запишется в следующем виде:

$$w^v + 2w''' + w' = -\frac{P\tau^3}{\pi E\gamma} \sin\varphi - \frac{\tau^4}{E\gamma} \sum_{m=2}^{\infty} b_m \sin m\varphi. \quad (10.2)$$

Согласно (8.3) и (8.7), общим решением этого уравнения будет выражение:

$$w = A_0 + A_2 \cos\varphi + A_4 \varphi \sin\varphi - \frac{P\tau^3}{8\pi E\gamma} \varphi^2 \cos\varphi + \frac{\tau^4}{E\gamma} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{b_m}{m(m^2-1)^2} \cos m\varphi. \quad (10.3)$$

Здесь в силу симметрии деформированного состояния шпангоута сохранены лишь четные функции угла φ .

В соответствии с (8.4) и (8.8), касательные перемещения определяются следующим соотношением:

$$v = -A_0 \varphi - A_2 \sin\varphi - A_4 (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi) + \frac{P\tau^3}{8\pi E\gamma} (2\varphi \cos\varphi + \varphi^2 \sin\varphi - 2\sin\varphi) - \frac{\tau^4}{E\gamma} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{b_m}{m^2(m^2-1)^2} \sin m\varphi. \quad (10.4)$$

Для определения постоянных A_0 и A_4 имеем условия:

$$w'(\pi) = 0, \quad v(\pi) = 0.$$

Отсюда, используя выражения (10.3) и (10.4), находим:

$$A_4 = \frac{P\tau^3}{4\pi E\gamma}, \quad A_0 = -\frac{P\tau^3}{2\pi E\gamma}.$$

Внося значения постоянных в (10.3) и (10.4), приходим к следующему распределению перемещений w и v вдоль осевой линии кольца:

$$w = A_2 \cos \varphi - \frac{p r^3}{4 \pi E \gamma} \left(2 - \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 \cos \varphi \right) + \frac{r^4}{E \gamma} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{m(m^2-1)^2} \cos m \varphi, \quad (10.5)$$

$$v = -A_2 \sin \varphi + \frac{p r^3}{2 \pi E \gamma} \left(\varphi + \varphi \cos \varphi - \sin \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right) - \frac{r^4}{E \gamma} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{m^2(m^2-1)^2} \sin m \varphi. \quad (10.6)$$

В дальнейшем нам понадобится представление перемещения v в виде тригонометрического ряда:

$$v(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin m \varphi. \quad (10.7)$$

Для этого воспользуемся разложениями

$$\varphi = 2 \sin \varphi - 2 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin m \varphi}{m}, \quad (10.8)$$

$$\varphi \cos \varphi = -\frac{1}{2} \sin \varphi + 2 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{m}{m^2-1} \sin m \varphi, \quad (10.9)$$

$$\varphi^2 \sin \varphi = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi - 8 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{m}{(m^2-1)^2} \sin m \varphi, \quad (10.10)$$

справедливыми для $-\pi < \varphi < \pi$.

Внося ряды (10.8)–(10.10) в (10.6), придем к разложению (10.7), в котором будет:

$$v_1 = -A_2 + \frac{p r^3}{8 \pi E \gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{3}{2} \right), \quad (10.11)$$

$$v_m = -\frac{Pr^3}{\pi E \mathcal{J}} \frac{(-1)^m}{m(m^2-1)^2} - \frac{r^4}{E \mathcal{J}} \frac{b_m}{m^2(m^2-1)^2} \quad (10.12)$$

10.3. Обратимся теперь к определению перемещений точек срединной поверхности цилиндрической оболочки, принимаемой нами безмоментной.

Обозначим через N_x и S меридиональное и сдвигающее усилия в оболочке, возникающие в ней при нагружении шпангоута (рис.10.2). Усилия N_x и S связаны между собой уравнением равновесия сил в проекции на ось x (рис.10.3):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0. \quad (10.13)$$

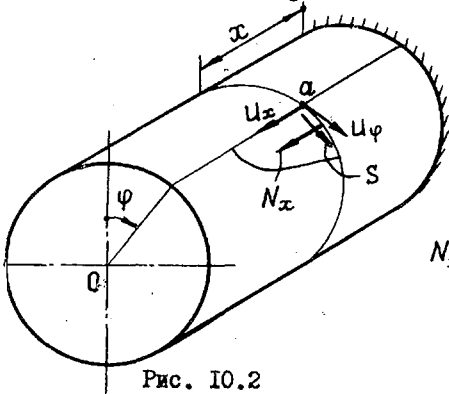


Рис. 10.2

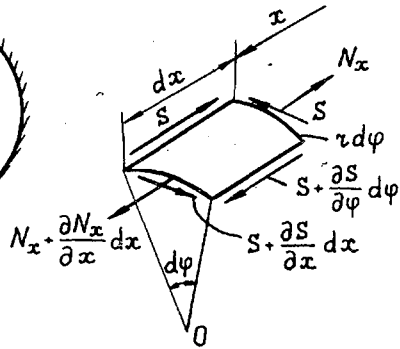


Рис. 10.3

Условие равновесия сил в окружном направлении дает:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (10.14)$$

Зависимость между усилием N_x и меридиональным перемещением u_x точки срединной поверхности оболочки (рис.10.2) имеет вид /1/:

$$N_x = E \delta \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (10.15)$$

Здесь δ - толщина оболочки, E - модуль упругости материала оболочки (считаем, что кольцо и оболочка изготовлены из одного и того же материала).

Для сдвигающего усилия S имеем /1/:

$$S = G\delta \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \right), \quad (10.16)$$

где u_φ - окружное перемещение точки срединной поверхности цилиндрической оболочки (рис.10.2), G - модуль сдвига материала оболочки.

Если шпангоут расположен посередине оболочки, то, как следует из рассмотрения рис.10.1, сдвигающее усилие S в оболочке будет равно ($0 \leq x \leq \ell$):

$$S = S(\varphi) = \frac{1}{2} q(\varphi)$$

или, по (10.1):

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{\pi r} \sin \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} b_m \sin m\varphi \right). \quad (10.17)$$

Располагая этим выражением, находим по (10.13):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{1}{2r} \left(\frac{P}{\pi r} \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right).$$

Отсюда

$$N_x = -\frac{x}{2r} \left(\frac{P}{\pi r} \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right) + f(\varphi), \quad (10.18)$$

где $f(\varphi)$ - произвольная функция угла φ .

Далее, из (10.15) имеем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{N_x}{E\delta}$$

или, используя (10.18):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{x}{2E\delta r} \left(\frac{P}{\pi r} \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right) + \frac{f(\varphi)}{E\delta}.$$

Интегрирование этого выражения дает:

$$u_x(x, \varphi) = -\frac{x^2}{4E\delta r} \left(\frac{P}{\pi r} \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right) + x \frac{f(\varphi)}{E\delta} + g(\varphi), \quad (10.19)$$

$g(\varphi)$ - произвольная функция φ .

Для определения функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ принимаем, что цилиндрическая оболочка заземлена при $x = 0$ и $x = 2\ell$ (т.е. точки параллелей $x = 0$ и $x = 2\ell$ не имеют меридиональных и окружных перемещений). Тогда рассматриваемая нами система будет симметрична относительно плоскости $x = 0$ и мы можем записать, что

- 1) $u = 0$ при $x = 0$
- 2) $u = 0$ при $x = \ell$.

Первое условие дает: $g(\varphi) = 0$.

Второе условие приводит к выражению:

$$f(\varphi) = \frac{\ell}{4\gamma} \left(\frac{P}{\pi\gamma} \cos\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right). \quad (10.20)$$

Внося формулу (10.20) в (10.18), будем иметь следующую зависимость для вычисления меридиональных усилий N_x в цилиндрической оболочке

$$N_x(x, \varphi) = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \left(\frac{P}{\pi\gamma} \cos\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right). \quad (10.21)$$

При этом меридиональное перемещение оболочки $u_x(x, \varphi)$ определяется формулой:

$$u_x(x, \varphi) = \frac{x(\ell-x)}{4E\delta\gamma} \left(\frac{P}{\pi\gamma} \cos\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m b_m \cos m\varphi \right). \quad (10.22)$$

Окружное перемещение u_φ оболочки найдем, используя зависимости (10.10), (10.17) и (10.22).

Имеем из (10.10):

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial x} = \frac{S}{G\delta} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u_x}{\partial \varphi}$$

или, по (10.17) и (10.22),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial x} = & \frac{1}{2G\delta} \left(\frac{P}{\pi\gamma} \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} b_m \sin m\varphi \right) + \\ & + \frac{x(\ell-x)}{4E\delta\gamma^2} \left(\frac{P}{\pi\gamma} \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m^2 b_m \sin m\varphi \right). \end{aligned}$$

После интегрирования по x , получаем, имея в виду, что $u_\varphi = 0$ при $x = 0$:

$$u_\varphi(x, \varphi) = \frac{x}{2G\delta} \left(\frac{P}{\pi r} \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} b_m \sin m\varphi \right) + \frac{1}{4E\delta r^2} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \left(\frac{P}{\pi r} \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m^2 b_m \sin m\varphi \right). \quad (10.23)$$

При $x = \ell$:

$$u_\varphi(\ell, \varphi) = V(\varphi) = \frac{\ell}{2G\delta} \left(1 + \frac{G\ell^2}{12E r^2} \right) \frac{P}{\pi r} \sin\varphi + \frac{\ell}{2G\delta} \sum_{m=2}^{\infty} b_m \left(1 + m^2 \frac{G\ell^2}{12E r^2} \right) \sin m\varphi \quad (10.24)$$

или

$$V(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m \sin m\varphi, \quad (10.25)$$

где

$$V_1 = \frac{\ell}{2G\delta} \left(1 + \frac{G\ell^2}{12E r^2} \right) \frac{P}{\pi r}, \quad (10.26)$$

$$V_m = b_m \frac{\ell}{2G\delta} \left(1 + m^2 \frac{G\ell^2}{12E r^2} \right). \quad (10.27)$$

10.4. Располагая выражениями (10.7) и (10.25) для касательных перемещений v оси кольца и окружных перемещений V оболочки, можно записать условие совместности деформаций кольца и оболочки в месте их сопряжения:

$$v(\varphi) = V(\varphi)$$

или

$$v_1 = V_1,$$

$$v_m = V_m.$$

В развернутом виде будем иметь:

$$\frac{P\tau^3}{8\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{3}{2} \right) - A_2 = \frac{\ell}{2G\delta} \left(1 + \frac{G\ell^2}{12E\tau^2} \right) \frac{P}{\pi\tau}, \quad (10.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P\tau^3}{\pi E\gamma} \frac{(-1)^{m+1}}{m(m^2-1)^2} - \frac{\tau^4}{E\gamma} \frac{b_m}{m^2(m^2-1)^2} = \\ & = b_m \frac{\ell}{2G\delta} \left(1 + m^2 \frac{G\ell^2}{12E\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Соотношение (10.28) позволяет найти величину произвольной постоянной A_2 . Из уравнения (10.29) можно определить оставшиеся пока неизвестными значения коэффициентов b_m ($m \geq 2$), входящих в разложение (10.1):

$$\begin{aligned} & \left[1 + m^2(m^2-1)^2 \left(\frac{E}{2G} + m^2 \frac{\ell^2}{24\tau^2} \right) \frac{\gamma\ell}{\delta\tau^4} \right] b_m = \\ & = (-1)^{m+1} \frac{mP}{\pi\tau}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

10.5. Воспользовавшись формулой (8.1) и выражением (10.5) для радиального перемещения w точек осевой линии кольца, выводим следующую формулу для изгибающего момента M в сечениях кольца:

$$\begin{aligned} M = & \frac{P\tau}{2\pi} \left(1 - \varphi \sin\varphi - \frac{1}{2} \cos\varphi \right) + \\ & + \tau^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{b_m}{m(m^2-1)} \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Далее получаем выражения для определения перерезывающих и нормальных сил в кольце:

$$Q = -\frac{P}{2\pi} \left(\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2} \sin\varphi \right) - \tau \sum_{m=2}^{\infty} \frac{b_m}{m^2-1} \sin m\varphi, \quad (10.32)$$

$$N = -\frac{P}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right) - \nu \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m \beta_m}{m^2 - 1} \cos m \varphi. \quad (10.33)$$

10.6. Приведем результаты числового расчета системы шпангоут-оболочка при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} r &= 100 \text{ см}, & \mathcal{J} &= 100 \text{ см}^4, \\ \ell &= 100 \text{ см}, & \delta &= 0,3 \text{ см}. \end{aligned}$$

Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, так что отношение

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu = 1,3.$$

Параметр

$$K = \frac{\delta r^4}{\mathcal{J} \ell} = 3000.$$

Значения коэффициентов β_m , найденных по формуле (10.30) ($m = 2 \dots 10$), приведены в таблице:

m	$\frac{\pi r}{P} \beta_m$	m	$\frac{\pi r}{P} \beta_m$
1	1	6	-0,14231
2	-1,96541	7	0,05523
3	2,26998	8	-0,02375
4	-1,19048	9	0,01113
5	0,40850	10	-0,00560

Результаты расчетов, выполненных по формулам (10.1), (10.31) -(10.33), показаны на рис.10.4 и 10.5.

На рис.10.5 пунктиром представлено распределение внутренних усилий в кольце в том случае, когда оно при определении реакции обшивки принимается абсолютно жестким.

Расчеты были выполнены с удержанием в бесконечном ряду (10.1) 8 слагаемых ($m_{max} = 8$).

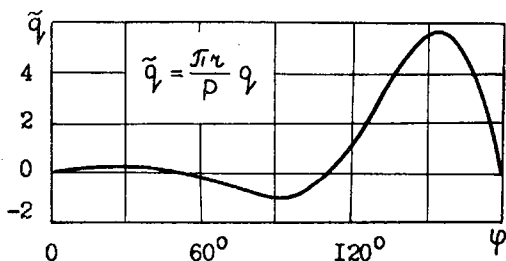


Рис. 10.4

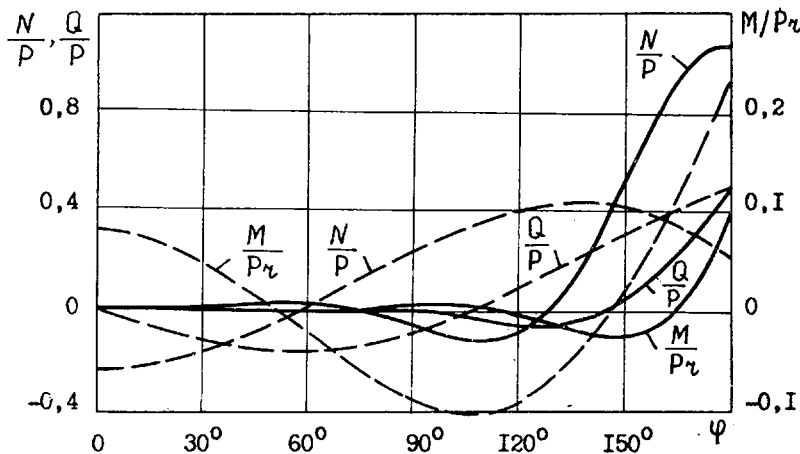


Рис. 10.5

Из представленных результатов видно, что расчет кругового шпангоута с учетом его совместной работы с обшивкой приводит к распределению внутренних усилий, значительно отличающемуся от того распределения, которое получается в том случае, когда шпангоут при определении реакции обшивки принимается абсолютно жестким.

10.7. Теперь обратимся к случаю нагружения рассматриваемой нами конструкции касательной силой T и сосредоточенным моментом H , приложенными к кольцу в сечении $\varphi = \pi$ (рис.10.6).

Здесь, очевидно, поток касательных сил q со стороны оболочки можно представить в виде такого бесконечного ряда:

$$q(\varphi) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m \cos m\varphi. \quad (10.34)$$

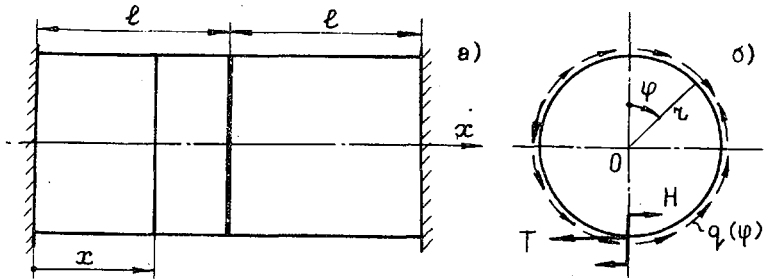


Рис. 10.6

Коэффициенты α_0 и α_1 легко находятся из уравнений равновесия кольца как твердого тела:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi r} (T + \frac{H}{r}), \quad \alpha_1 = -\frac{T}{\pi r}. \quad (10.35)$$

Остальные коэффициенты α_m ($m \geq 2$) ряда (10.34) определяются из условий совместной работы кольца с цилиндрической оболочкой.

Аналогично предыдущему случаю нагружения, касательные усилия S в оболочке будут равны ($0 \leq x \leq l$):

$$S = S(\varphi) = \frac{1}{2} q(\varphi)$$

или, по (10.34)

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} (\alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m \cos m\varphi). \quad (10.36)$$

Используя уравнение равновесия (10.13) и соотношение (10.36) находим:

$$N_x = \frac{x}{2r} (\alpha_1 \sin \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m \alpha_m \sin m\varphi) + f(\varphi). \quad (10.37)$$

Далее, исходя из (10.15) и (10.37), выводим:

$$u_x = \frac{x^2}{4E\delta r} (a_1 \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m a_m \sin m\varphi) + x \frac{f(\varphi)}{E\delta} + g(\varphi).$$

Условия

$$u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \ell$$

позволяют определить функции $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ и прийти к следующему выражению для меридиональных перемещений точек срединной поверхности оболочки:

$$u_x(x, \varphi) = -\frac{x(\ell-x)}{4E\delta r} (a_1 \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m a_m \sin m\varphi). \quad (10.38)$$

Теперь обращаемся к соотношению (10.16). Оно совместно с (10.36) и (10.38) дает после интегрирования

$$u_\varphi(x, \varphi) = \frac{x}{2G\delta} (a_0 + a_1 \cos\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} a_m \cos m\varphi) + \frac{1}{4E\delta r^2} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) (a_1 \cos\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} m^2 a_m \cos m\varphi). \quad (10.39)$$

При $x = \ell$:

$$u_\varphi(\ell, \varphi) = V(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos m\varphi. \quad (10.40)$$

Здесь будет:

$$V_0 = \frac{\ell}{4\pi G \delta r} \left(T + \frac{H}{r} \right), \quad (10.41)$$

$$V_1 = -\frac{T}{\pi r} \left(\frac{\ell}{2G\delta} + \frac{\ell^3}{24E\delta r^2} \right), \quad (10.42)$$

$$V_m = a_m \left(\frac{\ell}{2G\delta} + m^2 \frac{\ell^3}{24E\delta r^2} \right). \quad (10.43)$$

10.8. Погонная касательная нагрузка на кольцо равна

$$q_t(\varphi) = -q(\varphi)$$

или

$$q_t(\varphi) = -(\alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m \cos m\varphi). \quad (10.44)$$

Далее составляем дифференциальное уравнение изгиба кольца (8.2) и записываем его общее решение, используя (8.3) и (8.7):

$$w(\varphi) = A_1 \sin \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi - \frac{\alpha_0 r^4}{EJ} \varphi + \\ + \frac{\alpha_1 r^4}{8EJ} \varphi^2 \sin \varphi - \frac{r^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m(m^2-1)^2} \sin m\varphi. \quad (10.45)$$

В этом решении сохранены лишь нечетные по отношению к углу φ функции.

Решению (10.45) отвечает следующее выражение для касательного перемещения v точек оси кольца:

$$v(\varphi) = A_1 \cos \varphi - A_3 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) + A_5 + \\ + \frac{\alpha_0 r^4}{2EJ} \varphi^2 - \frac{\alpha_1 r^4}{8EJ} (2\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi - \varphi^2 \cos \varphi) - \\ - \frac{r^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m^2(m^2-1)^2} \cos m\varphi. \quad (10.46)$$

Постоянную A_3 находим из условия

$$w(\pi) = 0.$$

Будем иметь:

$$A_3 = -\frac{\alpha_0 r^4}{EJ} = -\frac{r^3}{2\pi EJ} \left(T + \frac{H}{r} \right).$$

Таким образом:

$$w(\varphi) = A_1 \sin \varphi - \frac{Tr^3}{2\pi EJ} \left(\varphi + \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \sin \varphi \right) - \\ - \frac{Hr^2}{2\pi EJ} (\varphi + \varphi \cos \varphi) - \frac{r^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\alpha_m}{m(m^2-1)^2} \sin m\varphi, \quad (10.47)$$

$$\begin{aligned}
 v(\varphi) &= A_4 \cos \varphi + A_5 + \\
 &+ \frac{T\tau^3}{4\pi E\gamma} (\varphi^2 + 3\varphi \sin \varphi + 3 \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 \cos \varphi) + \\
 &+ \frac{H\tau^2}{4\pi E\gamma} (\varphi^2 + 2\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi) - \\
 &- \frac{\tau^4}{E\gamma} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m}{m^2(m^2-1)^2} \cos m\varphi. \quad (10.48)
 \end{aligned}$$

Постоянные A_3 и A_5 остаются пока неопределенными.

Представим, далее, выражение (10.48) для перемещения v в виде тригонометрического ряда:

$$v(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \cos m\varphi. \quad (10.49)$$

Для этого воспользуемся известными разложениями

$$\varphi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos \varphi + 4 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos m\varphi}{m^2}, \quad (10.50)$$

$$\varphi \sin \varphi = 1 - \frac{1}{2} \cos \varphi - 2 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos m\varphi}{m^2 - 1}, \quad (10.51)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^2 \cos \varphi &= -2 + \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cos \varphi - \\
 &- 4 \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{m^2 + 1}{(m^2 - 1)^2} \cos m\varphi. \quad (10.52)
 \end{aligned}$$

Внося ряды (10.50)–(10.52) в (10.48), приходим к разложению (10.49), в котором

$$v_0 = A_5 + \frac{T\tau^3}{4\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + 4\right) + \frac{H\tau^2}{4\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + 2\right), \quad (10.53)$$

$$v_1 = A_1 - \frac{T\tau^3}{8\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{2} \right) - \frac{3H\tau^2}{4\pi E\gamma}, \quad (10.54)$$

$$v_m = \frac{T\tau^3}{\pi E\gamma} \frac{(-1)^m}{m^2(m^2-1)^2} - \frac{H\tau^2}{\pi E\gamma} \frac{(-1)^m}{m^2(m^2-1)} - \\ - \frac{\tau^4}{E\gamma} \frac{a_m}{m^2(m^2-1)^2}. \quad (10.55)$$

Для определения коэффициентов a_m ($m \geq 2$), а также произвольных постоянных A_1 и A_5 составляем условие совместности деформаций кольца и оболочки:

$$v(\varphi) = V(\varphi)$$

или, по (10.49) и (10.40) ($m \geq 0$)

$$v_m = V_m. \quad (10.56)$$

В развернутом виде будем иметь

$$A_5 + \frac{T\tau^3}{4\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + 4 \right) + \frac{H\tau^2}{4\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + 2 \right) = \\ = \frac{\ell}{4\pi G\delta\tau} \left(T + \frac{H}{\tau} \right), \quad (10.57)$$

$$A_1 - \frac{T\tau^3}{8\pi E\gamma} \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{2} \right) - \frac{3H\tau^2}{4\pi E\gamma} = \\ = -\frac{T}{\pi\tau} \left(\frac{\ell}{2G\delta} + \frac{\ell^3}{24E\delta\tau^2} \right), \quad (10.58)$$

$$\left[1 + m^2(m^2-1)^2 \left(\frac{E}{2G} + m^2 \frac{\ell^2}{24\tau^2} \right) \frac{\gamma\ell}{\delta\tau^4} \right] a_m = \\ = (-1)^m \frac{T}{\pi\tau} + (-1)^{m+1} \frac{H}{\pi\tau^2} (m^2-1). \quad (10.59)$$

Из выражений (10.57) и (10.58) можно найти произвольные постоянные A_4 и A_5 . Уравнение (10.59) служит для определения коэффициентов a_m ($m \geq 2$) ряда (10.34), описывающего распределение по контуру шпангоута касательных усилий со стороны обшивки.

10.9. Для расчета внутренних усилий в сечениях кольца выводим, используя (8.1), (3.6), (3.7) и (10.47):

$$M = \frac{T\tau}{2\pi} (\varphi + \varphi \cos \varphi - \frac{3}{2} \sin \varphi) - \frac{H}{2\pi} (2 \sin \varphi - \varphi) - \tau^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m}{m(m^2-1)} \sin m\varphi, \quad (10.60)$$

$$Q = \frac{T}{2\pi} (1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi) - \frac{H}{2\pi\tau} (2 \cos \varphi - 1) - \tau \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m}{m^2-1} \cos m\varphi, \quad (10.61)$$

$$N = -\frac{T}{2\pi} (\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi) + \frac{H}{\pi\tau} \sin \varphi + \tau \sum_{m=2}^{\infty} \frac{ma_m}{m^2-1} \sin m\varphi. \quad (10.62)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усьюкин В.И. Строительная механика ракет. - М.: Высшая школа, 1984. - 391 с.
2. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. - М.: Машиностроение, 1973. - 456 с.
3. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов / И.Ф.Образцов, Л.А.Бульчев, В.В.Васильев и др. / Под редакцией И.Ф.Образцова. - М.: Машиностроение, 1986. - 536 с.
4. Фигуровский В.И. Расчет на прочность беспилотных летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1973. - 356 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Введение	3
1. Расчет симметричного шпангоута на симметричную нагрузку	6
2. Расчет симметричного шпангоута на обратносимметричную нагрузку	10
3. Дифференциальные уравнения равновесия кругового кольца	13
4. Примеры расчета кругового шпангоута на симметричную нагрузку	15
5. Примеры расчета кругового шпангоута на обратносимметричную нагрузку	28
6. О расчете круговых шпангоутов на действие произвольной нагрузки	35
7. Определение перемещений кругового шпангоута	39
8. О расчете круговых шпангоутов методом перемещений	47
9. Примеры расчета круговых шпангоутов методом перемещений	51
10. Уточненный расчет с учетом упругости шпангоута и оболочки	59
Список литературы	75

Св. тем. план 1988, поз. 76

Исхак Саидович Ахмедьянов

РАСЧЕТ ШПАНГОУТОВ

Редактор Л.М. Карпова

Подписано в печать 12.05.88 г. Б0 00187.

Формат 60x84 1/16 . Оперативная печать

Бумага оберточная белая. Усл.п.л. 4,4. Уч.-изд.л. 4,0

Т. 600 экз. Заказ № 5318 Цена 20 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. академика С.П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. им. В.П. Мяги Куйбышевского полиграфического
объединения, 443099 г. Куйбышев, ул. Венцева, 60.