

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт им. С.П.Королева

И.С.АХМЕДЬЯНОВ

РАСЧЕТ ШПАНГОУТОВ

Учебное пособие по курсу
«Строительная механика самолета»

Утверждено редакционным
советом института
30 октября 1968 года

Куйбышев - 1969

Предлагаемое учебное пособие по курсу строительной механики самолета посвящено расчету шпангоутов фюзеляжа (с круговой осью и постоянным поперечным сечением) на действие симметричной и обратно-симметричной нагрузок, лежащих в плоскости осевой линии шпангоута. Кроме обычного, широко известного способа расчета шпангоутов с помощью канонических уравнений метода сил, в пособии рассмотрен еще один способ, основанный на применении уравнений деформированной осевой линии шпангоута. Этот способ во многих случаях оказывается более эффективным по сравнению с методом сил.

Пособие может быть использовано при изучении соответствующих разделов курса строительной механики самолета, а также для выполнения курсовых и дипломных проектов.

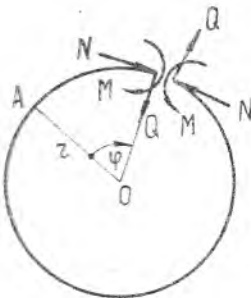
О НАГРУЖЕНИИ И РАСЧЕТЕ НА ПРОЧНОСТЬ ШПАНГОУТОВ ФУЗЕЛЯЖА

Шпангоуты являются основными силовыми элементами конструкции фюзеляжа современного самолета и по своему назначению разделяются на нормальные, усиленные и стыковые. Нормальные шпангоуты в основном служат для сохранения формы поперечного сечения фюзеляжа, усиленные (или силовые) - для передачи на обшивку больших сосредоточенных сил и, наконец, стыковые шпангоуты - для соединения отсеков фюзеляжа.

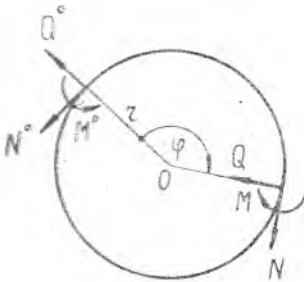
Характер нагружения шпангоутов может быть самым разнообразным. Так, нагрузки, действующие на нормальные шпангоуты (со стороны стрингеров и обшивки), обычно лежат в плоскости осевой линии шпангоута (осевая линия - линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений шпангоута). Нагружение стыковых шпангоутов в основном происходит нормально к плоскости стыка. Что касается нагрузок на силовые шпангоуты, то они могут действовать как в плоскости шпангоута, так и перпендикулярно к ней.

Шпангоуты фюзеляжа в большинстве случаев можно рассматривать как плоские рамы, нагруженные плоской или пространственной системой сил, и применять для их расчета методы строительной механики стержневых систем.

В настоящем учебном пособии мы ограничимся рассмотрением случаев нагружения шпангоута силами и моментами, действующими только в его плоскости. При этом будем предполагать, что одна из главных центральных осей инерции поперечных сечений шпангоута лежит в плоскости осевой линии. Тогда шпангоут может рассматриваться как плоская рама, и при плоском нагружении в его поперечных сечениях возникают изгибающий момент M , поперечная и продольная силы Q и N (фиг. I), действующие в плоскости шпангоута. Если шпангоут представляет собой замкнутую раму, то для вычисления внутренних усилий в любом его сечении достаточно иметь значения трех величин $M = M^*$, $Q = Q^*$ и $N = N^*$ в некотором произвольном се-



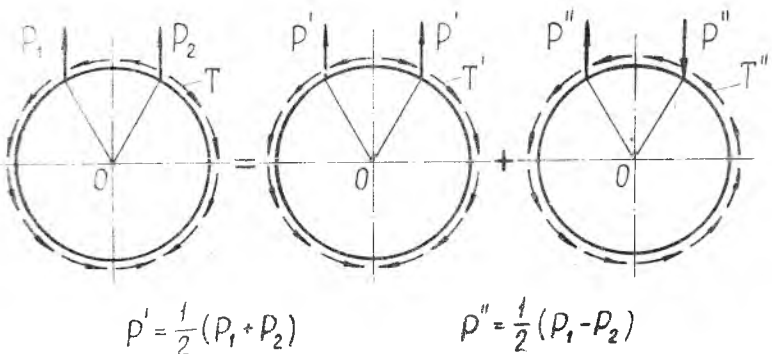
Фиг. 1.



Фиг. 2.

чении шпангоута, условно принятом за начальное (фиг.2). Величины M^0 , Q^0 и N^0 не могут быть найдены из уравнений равновесия отдельных частей шпангоута. Следовательно, задача расчета шпангоута при произвольном нагружении плоской системой сил будет являться трижды статически неопределимой. Однако решение этой задачи для симметричных шпангоутов можно значительно упростить следующим образом.

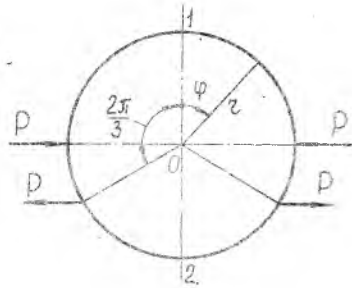
Произвольную нагрузку, приложенную к симметричному шпангоуту, всегда можно представить в виде суммы симметричной и обратно симметричной нагрузок (фиг.3). Поэтому, пользуясь принципом независимости действия сил, для исследования прочности шпангоута при произвольном нагружении достаточно провести расчет на соответствующие симметричную и обратно симметричную нагрузки и затем алгебраически просуммировать результаты этих расчетов. Таким образом можно получить окончательные значения внутренних усилий в любом сечении шпангоута при действии сложной системы нагрузок. Очевидно, что расчет шпангоута на симметричную и обратно симметричную нагрузки значительно проще расчета на действие произвольной нагрузки.



Фиг. 3.

§ I. Расчет шпангоута на симметричную нагрузку

При симметричном нагружении шпангоута (фиг.4) определение внутренних усилий при соответствующем выборе основной системы можно свести к решению дважды статически неопределимой задачи. В самом деле, при действии симметричной нагрузки на симметричный шпангоут распределение внутренних усилий (изгибающего момента, поперечной и продольной сил) будет также симметричным. Поэтому в сечениях I и 2 шпангоута (по оси симметрии) поперечная сила Q должна равняться нулю (в противном случае деформированное и напряженное состояние шпангоута было бы несимметричным). Что касается изгибающего момента M и осевой силы N в этих сечениях, то они заранее неизвестны и являются статически неопределимыми величинами. Ввиду того, что из трех усилий в любом из рассматриваемых сечений одно равно нулю, для упрощения расчета шпангоута целесообразно выбрать основную систему, проведя один разрез, например, через точку I (по оси симметрии шпангоута, фиг.5).

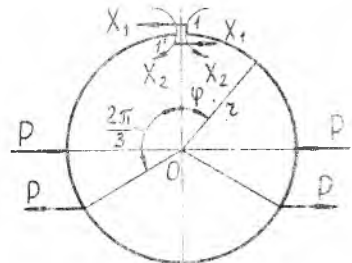


Фиг. 4.

Обозначим соответственно через X_1 и X_2 осевую силу и изгибающий момент, действующие в выбранном сечении. Для их определения имеем два канонических уравнения [2,3,4,5]:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{10} = 0, \quad (1)$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{20} = 0, \quad (2)$$



Фиг. 5.

выражающих условия отсутствия взаимного линейного перемещения и поворота сечений I и I'.

Коэффициенты уравнений (1)-(2) определяются формулами, известными из курса строительной механики [2,3,4,5]:

$$\Delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EJ} dS,$$

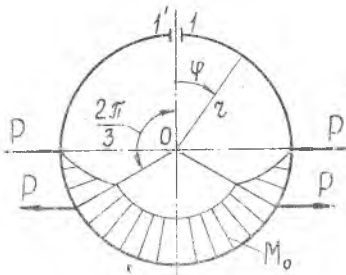
$$\Delta_{20} = \int \frac{M_2 M_0}{EJ} dS, \quad (3)$$

$$\delta_{11}^0 = \int_l \frac{M_1^2}{EJ} ds, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_l \frac{M_1 M_2}{EJ} ds, \quad \delta_{22} = \int_l \frac{M_2^2}{EJ} ds. \quad (4)$$

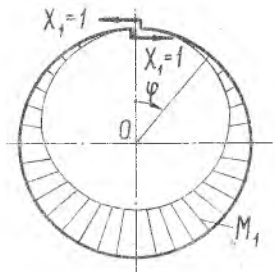
В этих выражениях

M_0 - изгибающий момент в основной системе от внешней нагрузки (фиг.6);

M_1 - изгибающий момент в основной системе от действия единичных сил $X_1 = 1$ (фиг.7);



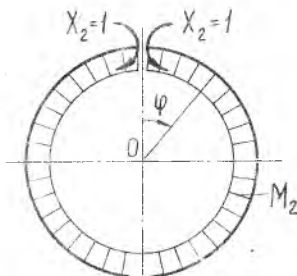
★ Фиг. 6.



Фиг. 7.

M_2 - изгибающий момент в основной системе, вызванный действием единичных моментов $X_2 = 1$ (фиг.8);

EJ - жесткость сечения шпангоута на изгиб.



Фиг. 8.

Таким образом, для раскрытия статической неопределенности шпангоута необходимо прежде всего построить эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки, от единичных сил $X_1 = 1$ и единичных моментов $X_2 = 1$. Далее по формулам (3)-(4) следует вычислить коэффициенты канонических уравнений и, наконец, решить систему (1)-(2) относительно лишних неизвестных X_1 и X_2 . Тогда величину изгибающего момента в произвольном сечении шпангоута, на основании принципа независимости действия сил,

можно найти по формуле (фиг.9):

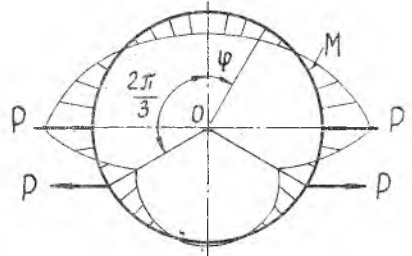
$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (5)$$

По значениям усилий X_1 и X_2 можно определить поперечную и продольную силы Q и N в любом сечении шпангоута. Для этого достаточно воспользоваться следующими общими зависимостями, аналогичными (5):

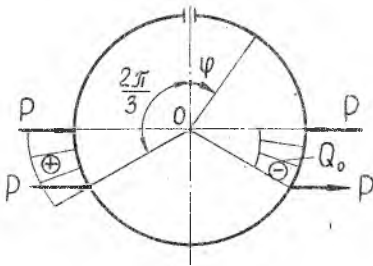
$$Q = Q_0 + X_1 Q_1 + X_2 Q_2, \quad (6)$$

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2. \quad (7)$$

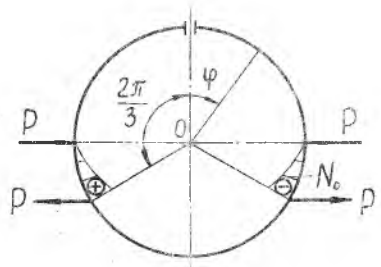
Здесь Q_0 и N_0 - поперечная и продольная силы в основной системе, вызванные действием внешней нагрузки (фиг. 10 и 11); Q_1 и N_1 - поперечная и продольная силы в той же системе от единичных сил $X_1 = 1$ (фиг. 12 и 13). Моменты $X_2 = 1$ вызывают, как нетрудно в этом убедиться, усилия Q_2 и N_2 , равные нулю.



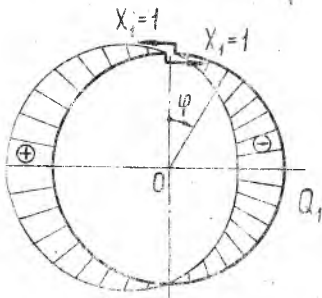
Фиг. 9.



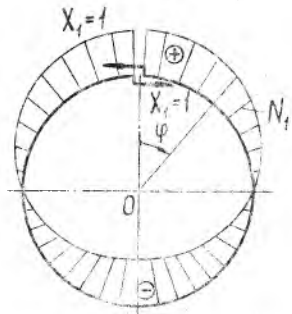
Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

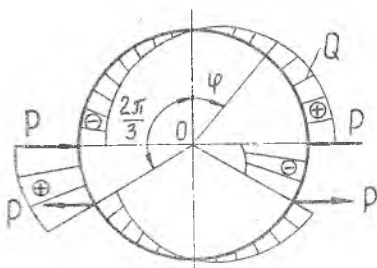


Фиг. 13.

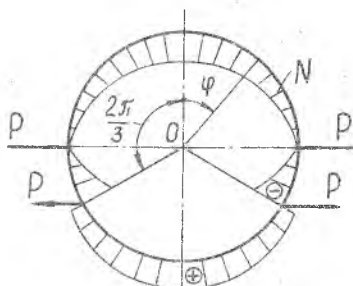
Следовательно, формулы (6)-(7) для вычисления усилий Q и N примут более простой вид (фиг.14 и 15):

$$Q = Q_0 + \chi_1 Q_1, \quad (8)$$

$$N = N_0 + \chi_2 N_1. \quad (9)$$



Фиг. 14.



Фиг. 15.

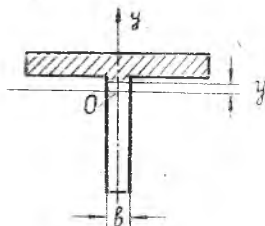
Вычислив по формулам (5), (8) и (9) значения M , Q и N , легко найти распределение нормальных и касательных напряжений в произвольном сечении шпангоута, воспользовавшись формулами сопротивления материалов:

$$\sigma = \frac{M}{J} y + \frac{N}{F}, \quad (10)$$

$$\tau = \frac{Q}{Jb} S. \quad (11)$$

Здесь J - момент инерции поперечного сечения шпангоута;
 F - площадь сечения шпангоута;
 S - статический момент отсеченной части сечения (фиг.16).

Размер b определяется так, как показано на фиг.16.



Фиг. 16

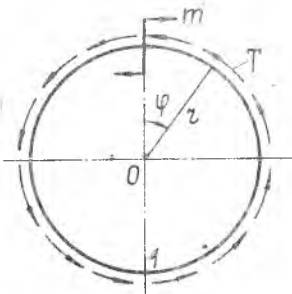
§ 2. Расчет шпангоута на обратно симметричную нагрузку

Если на симметричный шпангоут действует обратно симметричная нагрузка, то распределение внутренних усилий будет также обратно симметричным (фиг.17). Следовательно, в сечении I шпангоута по оси симметрии отличной от нуля будет лишь поперечная сила Q' , которую мы обозначим через X_1 (фиг.18). Для определения X_1 воспользуемся каноническим уравнением:

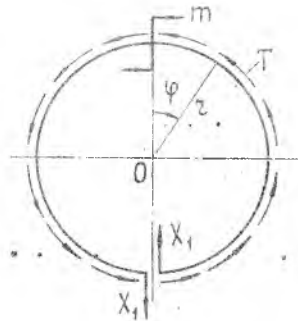
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0, \quad (12)$$

в котором

$$\Delta_{10} = \int_{\xi} \frac{M_1 M_0}{EJ} ds, \quad \delta_{11} = \int_{\xi} \frac{M_1^2}{EJ} ds. \quad (13)$$



Фиг. 17.



Фиг. 18.

Уравнение (12) выражает отсутствие взаимного сдвига сечений I и I' в вертикальном направлении. В формулах (13):

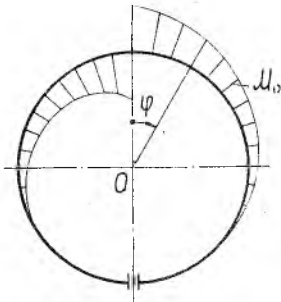
M_0 - изгибающий момент в основной системе от действия обратно симметричной внешней нагрузки (фиг.19);

M_1 - изгибающий момент в этой же системе от единичных сил $X_1 = 1$ (фиг.20).

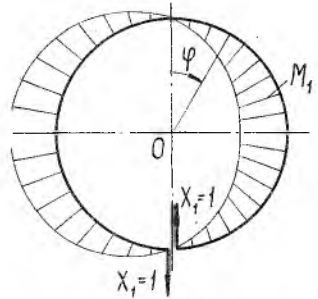
Найдя из уравнения (12) величину силы X_1 , легко определить внутренние усилия в шпангоуте по формулам:

$$M = M_0 + X_1 M_1, \quad (14)$$

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1, \quad N = N_0 + X_1 N_1. \quad (15)$$

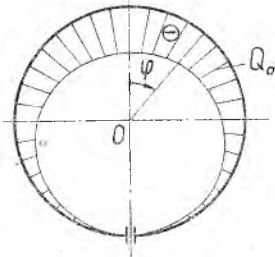


Фиг. 19.

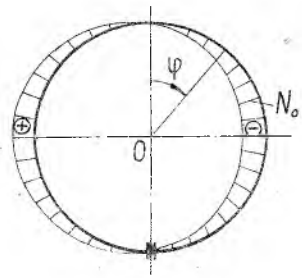


Фиг. 20.

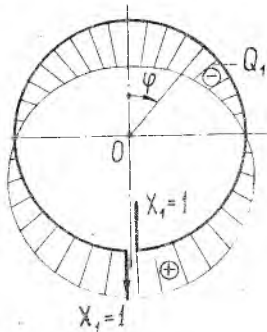
В выражениях (15) через Q_0 и N_0 обозначены поперечная и продольная силы в основной системе, вызванные внешней нагрузкой (фиг.21 и 22); Q_1 и N_1 - поперечная и продольная силы от единичных усилий $X_1 = 1$, приложенных в разрезе (фиг.23 и 24).



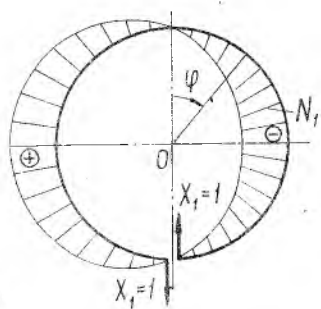
Фиг. 21.



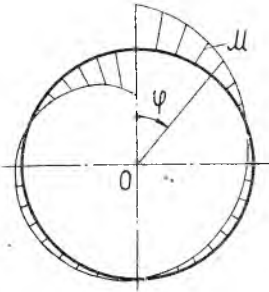
Фиг. 22



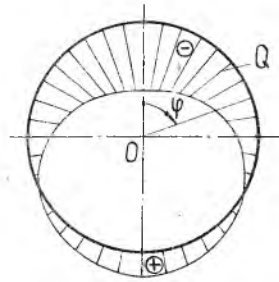
Фиг. 23.



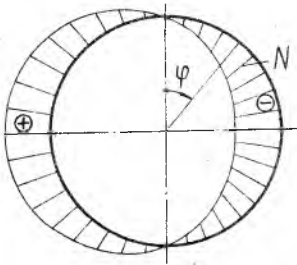
Фиг. 24.



Фиг. 25.



Фиг. 26.



Фиг. 27.

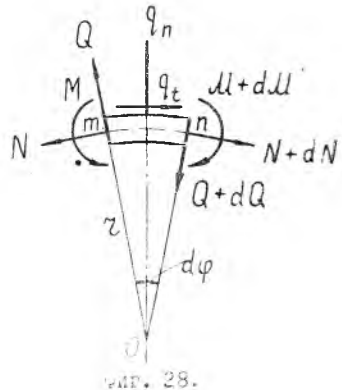
Общий вид эпюр M , Q и N , построенных по формулам (14)-(15), приведен на фиг. 25-27.

§ 3. Дифференциальные уравнения равновесия кругового кольца

Если шпангоут представляет собой кольцо с круговой осью радиуса r , то для вычисления поперечной и продольной сил удобно пользоваться дифференциальными зависимостями между M , Q и N [6]. Эти зависимости легко получить, рассматривая условия равновесия элемента кольца mn , показанного на фиг. 28. Здесь через q_t и q_n обозначены касательная и нормальная нагрузки, действующие на кольцо и отнесенные к единице длины круговой оси кольца. (На фиг. 28 показаны положительные направления внутренних усилий M , Q и N и нагрузок q_t и q_n).

Составим уравнение равновесия сил, действующих на элемент mn , в проекции на касательную к оси элемента, полагая, ввиду малости угла $d\varphi$,

$$\cos \frac{d\varphi}{2} = 1, \quad \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$$



Фиг. 28.

Будем иметь:

$$-N + (N + dN) - Q \frac{d\varphi}{2} - (Q + dQ) \frac{d\varphi}{2} + q_t \tau d\varphi = 0.$$

Отсюда, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, находим:

$$\frac{dN}{d\varphi} - Q = -\tau q_t \quad (16)$$

Проекция всех сил на ось симметрии элемента даёт:

$$Q - (Q + dQ) - N \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \frac{d\varphi}{2} + q_n \tau d\varphi = 0$$

или

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N = \tau q_n \quad (17)$$

Третье условие равновесия получим, составляя уравнение моментов относительно центра кольца O :

$$-\tau N + \tau (N + dN) - M + (M + dM) + \tau^2 q_t d\varphi = 0$$

или

$$\tau \frac{dN}{d\varphi} + \frac{dM}{d\varphi} = -\tau^2 q_t \quad (18)$$

Имея в виду уравнение (16), из (18) получаем связь между поперечной силой Q и изгибающим моментом M :

$$Q = -\frac{1}{\tau} \frac{dM}{d\varphi} \quad (19)$$

§ 4. Пример расчета шпангоута на симметричную нагрузку

Рассмотрим пример расчета шпангоута с круговой осью и постоянным поперечным сечением на действие симметричной нагрузки.

I. В качестве примера возьмем силовой шпангоут фюзеляжа, нагруженный двумя сосредоточенными силами P так, как показано на фиг.29. Эта нагрузка должна быть уравновешена касательными усилиями T со стороны обшивки. Обычно распределение этих усилий по контуру шпангоута принимает-

ся таким же, как и распределение касательных усилий в обшивке при изгибе фюзеляжа поперечной силой, лежащей в плоскости симметрии, т.е. [I]:

$$T = \frac{Q}{J} S. \quad (20)$$

Здесь Q - перерезывающая сила, S - статический момент отсеченной части обшивки приведенной толщины δ , J - момент инерции всего сечения обшивки фюзеляжа.

В нашем случае будет:

$$J = \pi \delta r^3, \quad S = \delta r^2 \sin \varphi.$$

Полагая $Q = 2P$, из (20) получаем:

$$T = \frac{2P}{\pi r} \sin \varphi. \quad (21)$$

К этому же результату можно прийти, исходя из предположения об абсолютной жесткости шпангоута в своей плоскости. Если обозначить через u_0 перемещение шпангоута как абсолютно жесткого тела под действием сил P , то перемещение u точки α по касательной к наружному контуру шпангоута будет равно (фиг.30)

$$u = u_0 \sin \varphi.$$

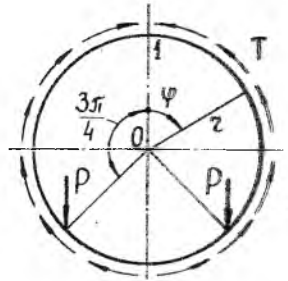
Этому перемещению соответствуют углы сдвига γ в обшивке, связанной с шпангоутом равные (x - координата вдоль образующей оболочки фюзеляжа)

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \sin \varphi.$$

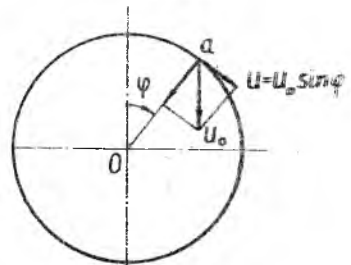
Отсюда следует, что возникшие в обшивке касательные напряжения будут пропорциональны $\sin \varphi$ и мы можем принять, что усилия взаимодействия T между обшивкой и абсолютно жестким шпангоутом определяются формулой.

$$T = k \sin \varphi,$$

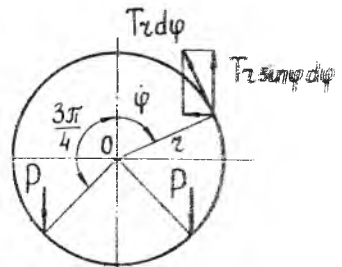
где k - коэффициент пропорциональности. Для его определения рассмотрим равновесие шпангоута (фиг.31):



Фиг. 29.



Фиг. 30.



Фиг. 31.

$$2P = 2\tau \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \sin \varphi d\varphi = 2\kappa\tau \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \kappa\pi\tau.$$

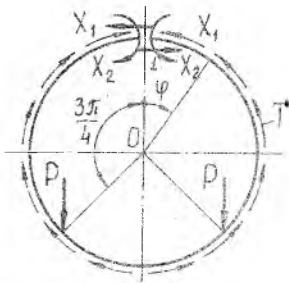
Отсюда

$$\kappa = \frac{2P}{\pi\tau}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{2P}{\pi\tau} \sin \varphi.$$

2. Найдя распределение усилий по контуру шпангоута, выбираем основную систему, проведя поперечный разрез шпангоута через верхнюю точку I. В этом сечении нам будут неизвестны продольная сила X_1 и изгибающий момент X_2 (фиг.32). Их будем определять, воспользовавшись каноническими уравнениями (1)-(2).



Фиг. 32.

Для вычисления коэффициентов уравнений найдем законы изменения изгибающих моментов от внешней нагрузки, от единичных сил $X_1 = 1$ и единичных моментов $X_2 = 1$, приложенных в разрезе.

Из рассмотрения фиг.33 следует, что изгибающий момент M^T в произвольном сечении шпангоута от касательных усилий T будет равен (изгибающий момент считаем положительным, если он увеличивает кривизну осевой линии шпангоута):

$$\begin{aligned} M^T &= \int_0^{\varphi} T h r d\omega = r^2 \int_0^{\varphi} T [1 - \cos(\varphi - \omega)] d\omega = \\ &= \frac{2Pr}{\pi} \int_0^{\varphi} [1 - \cos(\varphi - \omega)] \sin \omega d\omega = \frac{2Pr}{\pi} (1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

В соответствии с характером нагружения основной системы имеем: для значений $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$ (фиг.34)

$$M_n = M_n^{(1)} = M^T = \frac{2Pr}{\pi} (1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi); \quad (23)$$

для значений $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$

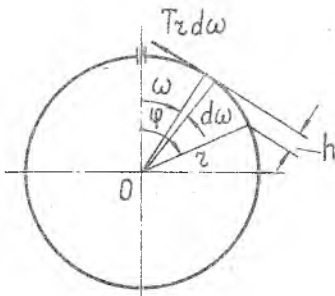
$$M_n = M_n^{(2)} = M^T + M^P.$$

Момент от силы P (фиг.35)

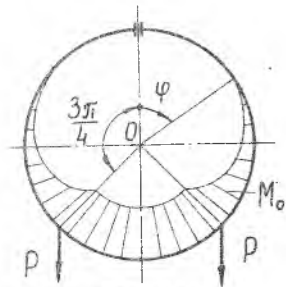
$$M^P = -Ph.$$

Ис

$$h = r \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right).$$



Фиг. 33.



Фиг. 34.

Отсюда

$$M^P = -Pz \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right)$$

и, следовательно (Фиг.34):

$$M_0^{(2)} = \frac{2Pz}{\pi} \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi \sin\varphi \right) - Pz \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right) \quad (24)$$

Моменты M_1 и M_2 соответственно равны (Фиг. 7 и 8):

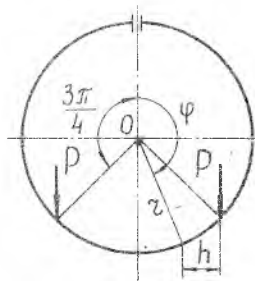
$$M_1 = z(1 - \cos\varphi), \quad M_2 = 1. \quad (25)$$

Далее, исходя из выражений (23)-(25), находим коэффициенты канонических уравнений. Начнем с коэффициента Δ_{10} :

$$\Delta_{10} = \int_{\Sigma} \frac{M_1 M_0}{EJ} ds = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_1 M_0 d\varphi$$

Вычисляем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} M_1 M_0 d\varphi &= \int_0^{\pi/4} M_1 M_0^{(1)} d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_1 M_0^{(2)} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/4} M_1 M^T d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_1 (M^T + M^P) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} M_1 M^T d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_1 M^P d\varphi; \end{aligned}$$



Фиг. 35.

$$\int_0^{\pi} M_1 M_1^r d\varphi = \frac{2Pz^2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi) \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi \sin\varphi\right) d\varphi = \frac{7}{4} Pz^2,$$

$$\int_{3\pi/4}^{\pi} M_1 M_1^p d\varphi = -Pz^2 \int_{3\pi/4}^{\pi} (1 - \cos\varphi) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi\right) d\varphi =$$

$$= -Pz^2 \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\right).$$

Отсюда

$$\Delta_{10} = \frac{Pz^3}{EJ} \left(5 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right).$$

Коэффициент Δ_{20} будет равен:

$$\Delta_{20} = \int_l^s \frac{M_2 M_0}{EJ} ds = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_2 M_0 d\varphi.$$

Так как $M_2 = I$, то

$$\int_0^{\pi} M_2 M_0 d\varphi = \int_0^{\pi} M_0 d\varphi = \int_0^{3\pi/4} M_0^{(1)} d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} M_0^{(2)} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} M^r d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} M^p d\varphi.$$

Вычисляем интегралы:

$$\int_0^{\pi} M^r d\varphi = \frac{2Pz}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi \sin\varphi\right) d\varphi = Pz,$$

$$\int_{3\pi/4}^{\pi} M^p d\varphi = -Pz \int_{3\pi/4}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi\right) d\varphi = -Pz \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right),$$

$$\int_0^{\pi} M_0 d\varphi = Pz \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta_{20} = \frac{2Pz^2}{EJ} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right).$$

Далее находим:

$$\delta_{11} = \frac{2z^3}{EJ} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi z^3}{EJ}, \quad (26)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2z^2}{EJ} \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{2\pi z^2}{EJ}, \quad (27)$$

$$\delta_{22} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{2\pi z}{EJ}. \quad (28)$$

Внося значения коэффициентов в уравнения (1)-(2), получаем после упрощений:

$$3z\chi_1 + 2\chi_2 = -\frac{Pz}{\pi} \left(5 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right),$$

$$2z\chi_1 + 2\chi_2 = -\frac{Pz}{\pi} \left(4 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right).$$

Отсюда

$$\chi_1 = -\frac{P}{\pi}, \quad \chi_2 = \frac{Pz}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right).$$

Теперь нетрудно записать окончательные выражения для изгибающего момента. Будем иметь:

для $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$

$$M = M^{(1)} = M_0^{(1)} + \chi_1 M_1 + \chi_2 M_2 =$$

$$= -\frac{Pz}{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right); \quad (29)$$

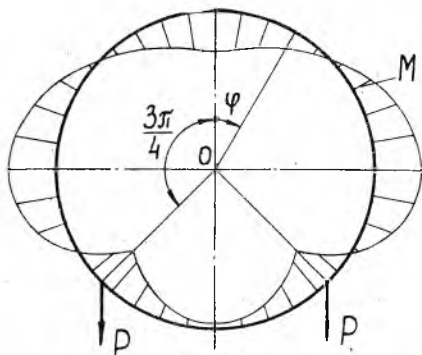
для $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$

$$M = M^{(2)} = M_0^{(2)} + \chi_1 M_1 + \chi_2 M_2 =$$

$$= -\frac{Pz}{\pi} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right) - Pz \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \right). \quad (30)$$

На фиг.36 показана эпюра моментов, построенная по (29) и (30).

Контролем правильности раскрытия статической неопределенности могут служить следующие два равенства:



Фиг. 36.

$$\int_l \frac{MM_1}{EJ} ds = 0, \quad \int_l \frac{MM_2}{EJ} ds = 0,$$

выражающие условия отсутствия взаимного линейного перемещения и поворота сечений I и I' (Фиг. 32). В нашем случае эти условия запишутся в следующем виде:

$$\int_0^\pi MM_1 d\varphi = 0, \quad \int_0^\pi MM_2 d\varphi = 0$$

или

$$\int_0^\pi MM_1 d\varphi = \int_0^{3\pi/4} M^{(1)} M_1 d\varphi + \int_{3\pi/4}^\pi M^{(2)} M_1 d\varphi = 0, \quad (31)$$

$$\int_0^\pi MM_2 d\varphi = \int_0^\pi M d\varphi = \int_0^{3\pi/4} M^{(1)} d\varphi + \int_{3\pi/4}^\pi M^{(2)} d\varphi = 0. \quad (32)$$

Используя выражения (25) и (29)-(30), находим

$$\int_0^{3\pi/4} M^{(1)} M_1 d\varphi = -\frac{Pz^2}{\pi} \left(\sqrt{2} + \frac{7}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi^2 \sqrt{2}}{32} \right),$$

$$\int_{3\pi/4}^\pi M^{(2)} M_1 d\varphi = \frac{Pz^2}{\pi} \left(\sqrt{2} + \frac{7}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi^2 \sqrt{2}}{32} \right),$$

$$\int_0^{3\pi/4} M^{(1)} d\varphi = -\frac{Pz}{\pi} \left(\sqrt{2} - \frac{3\pi^2 \sqrt{2}}{32} \right),$$

$$\int_{3\pi/4}^\pi M^{(2)} d\varphi = \frac{Pz}{\pi} \left(\sqrt{2} - \frac{3\pi^2 \sqrt{2}}{32} \right).$$

Внося полученные результаты в равенства (31)-(32), убеждаемся, что они удовлетворяются. Это означает, что раскрытие статической неопределенности рассматриваемого шлангоута сделано правильно.

3. Обратимся теперь к вычислению продольной и поперечной сил в се-

чениях шпангоута. Из рассмотрения фиг.37 следует, что в основной системе продольная и поперечная силы от касательных усилий будут равны:

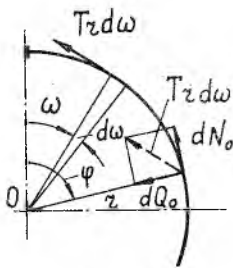
$$N^T = z \int_0^\varphi T \cos(\varphi - \omega) d\omega =$$

$$= \frac{2P}{\pi} \int_0^\varphi \cos(\varphi - \omega) \sin \omega d\omega = \frac{P}{\pi} \varphi \sin \varphi, \quad (33)$$

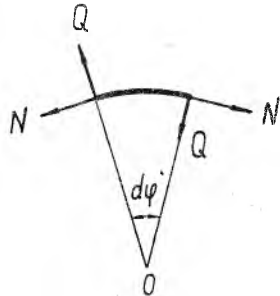
$$Q^T = -z \int_0^\varphi T \sin(\varphi - \omega) d\omega =$$

$$= -\frac{2P}{\pi} \int_0^\varphi \sin(\varphi - \omega) \sin \omega d\omega = \frac{P}{\pi} (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi). \quad (34)$$

Положительные направления N и Q показаны на фиг. 38.



Фиг. 37.



Фиг. 38.

От силы P для правой половины шпангоута будем иметь (фиг.39):

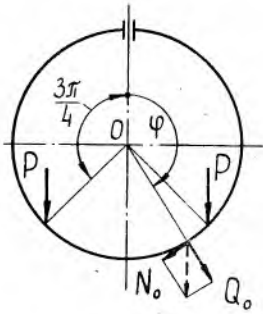
$$N^P = -P \sin(\pi - \varphi) = -P \sin \varphi, \quad (35)$$

$$Q^P = P \cos(\pi - \varphi) = -P \cos \varphi. \quad (36)$$

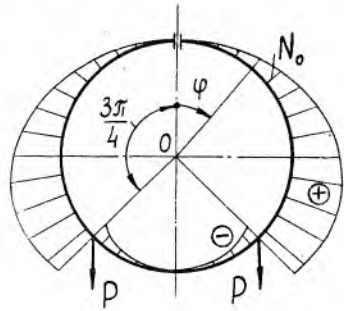
Следовательно, для $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4} \pi$ будет (фиг.40 и 41)

$$N_o = N_o^{(II)} = N^T = \frac{P}{\pi} \varphi \sin \varphi, \quad (37)$$

$$Q_o = Q_o^{(II)} = Q^T = \frac{P}{\pi} (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi). \quad (38)$$



Фиг. 39.



Фиг. 40.

Если $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$, то (фиг. 40 и 41)

$$N_0 = N_0^{(2)} = N^T + N^P = -\frac{P}{\pi} (\pi - \varphi) \sin \varphi, \quad (39)$$

$$Q_0 = Q_0^{(2)} = Q^T + Q^P = -\frac{P}{\pi} [(\pi - \varphi) \cos \varphi + \sin \varphi]. \quad (40)$$

Далее находим (фиг. 7, 12 и 13):

$$N_1 = \cos \varphi, \quad Q_1 = -\sin \varphi. \quad (41)$$

Тогда в соответствии с формулами (8)-(9) будем иметь следующие выражения для N и Q (фиг. 42 и 43):

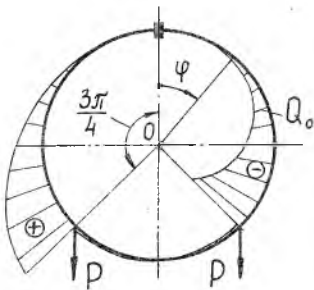
$$N^{(1)} = \frac{P}{\pi} (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi), \quad (42)$$

$$Q^{(1)} = \frac{P}{\pi} \varphi \cos \varphi, \quad (43)$$

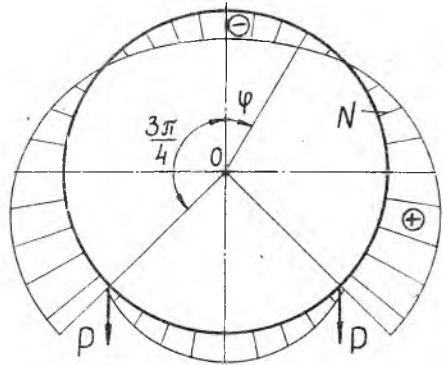
$$N^{(2)} = -\frac{P}{\pi} [(\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi], \quad (44)$$

$$Q^{(2)} = -\frac{P}{\pi} (\pi - \varphi) \cos \varphi. \quad (45)$$

Эти соотношения мы получили, исходя непосредственно из определений продольной и поперечной сил и схемы нагружения кольца. К точно таким же зависимостям можно прийти более простым путем, воспользовавшись уравне-



Фиг. 41.



Фиг. 42.

ниями равновесия кольца (I9) и (I7) и выражениями (29) и (30) для изгибающего момента M .

В самом деле, дифференцируя (29) и (30), будем иметь в соответствии с уравнением (I9):

$$Q^{(1)} = -\frac{1}{r} \frac{dM^{(1)}}{d\varphi} = \frac{P}{\pi} \varphi \cos \varphi, \quad (46)$$

$$Q^{(2)} = -\frac{1}{r} \frac{dM^{(2)}}{d\varphi} = -\frac{P}{\pi} (\pi - \varphi) \cos \varphi. \quad (47)$$

Чтобы найти продольную силу в произвольном сечении шпангоута, обращаемся к уравнению (I7), в котором полагаем $q_n = 0$ (радиальная нагрузка к кольцу не приложена).

Тогда

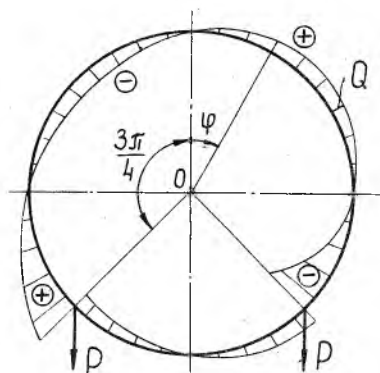
$$N = -\frac{dQ}{d\varphi}. \quad (48)$$

Дифференцирование равенств (46)-(47) дает:

$$N^{(1)} = -\frac{dQ^{(1)}}{d\varphi} = \frac{P}{\pi} (\varphi \sin \varphi - \cos \varphi), \quad (49)$$

$$N^{(2)} = -\frac{dQ^{(2)}}{d\varphi} = -\frac{P}{\pi} [(\pi - \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi]. \quad (50)$$

Сопоставляя выражения (46)-(47) и (49)-(50) соответственно с (43), (45) и (42), (44), убеждаемся в их тождественности.



Фиг. 43.

При $\psi = \frac{3\pi}{4}$ продольная и поперечная силы терпят разрыв (скачок). В самом деле, при $\psi = \frac{3\pi}{4}$ имеем:

$$\begin{aligned} N\left(\frac{3\pi}{4} - 0\right) &= N^{(1)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{P\sqrt{2}}{2\pi} \left(1 + \frac{3\pi}{4}\right), \\ N\left(\frac{3\pi}{4} + 0\right) &= N^{(2)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{P\sqrt{2}}{2\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$N\left(\frac{3\pi}{4} + 0\right) - N\left(\frac{3\pi}{4} - 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} P.$$

Аналогично

$$Q\left(\frac{3\pi}{4} - 0\right) = Q^{(1)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{8} P.$$

$$Q\left(\frac{3\pi}{4} + 0\right) = Q^{(2)}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8} P.$$

$$Q\left(\frac{3\pi}{4} + 0\right) - Q\left(\frac{3\pi}{4} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} P.$$

На фиг. 44 представлены графики распределения безразмерных величин $\frac{M}{Pz}$, $\frac{Q}{P}$ и $\frac{N}{P}$ в зависимости от угла ψ .

4. В заключение отметим, что для вычисления коэффициентов канонических уравнений, а также для расчета изгибающих моментов, продольной и поперечной сил от нагрузок, распределенных по контуру кругового шпангоута, можно пользоваться таблицами I и 2. В таблице I приведены значения некоторых интегралов, встречающихся при расчете круговых шпангоутов. Таблица 2 содержит значения функций $\psi \sin \psi$ и $\psi \cos \psi$ для $0 \leq \psi \leq 180^\circ$ (с интервалом 5°).

§ 5. Пример расчета шпангоута на обратно симметричную нагрузку

Рассмотрим шпангоут, нагруженный сосредоточенной силой P , направленной по касательной к контуру шпангоута (фиг. 45). Касательные усилия со стороны обшивки, уравновешивающие эту нагрузку, найдем, предполагая

шпангоут абсолютно жестким. Обозначим через T_0 касательные усилия, уравновешивающие момент силы P относительно точки O и через T_1 - усилия, необходимые для уравновешивания самой силы P .

Будем иметь:

$$Pz = \int_0^{2\pi} T_0 z^2 d\varphi, \quad (51)$$

$$P = \int_0^{2\pi} T_1 z \cos \varphi d\varphi. \quad (52)$$

Приняв гипотезу об абсолютной жесткости шпангоута, записываем, что

$$T_0 = const, \quad T_1 = k \cos \varphi.$$

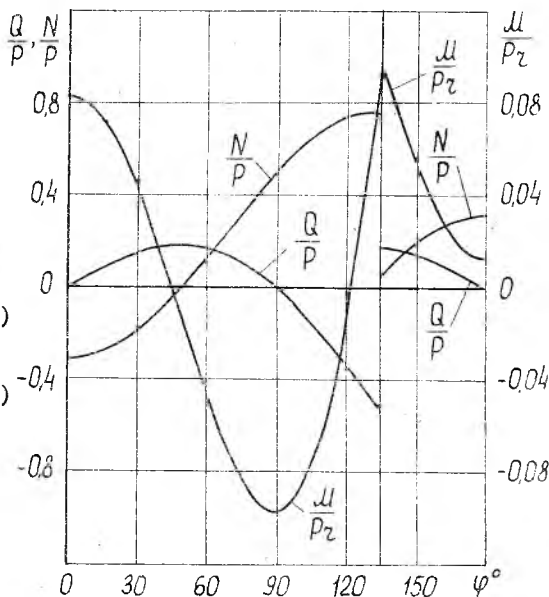
Тогда из (51)-(52), получаем

$$T_0 = \frac{P}{2\pi z}, \quad k = \frac{P}{\pi z}, \quad T_1 = \frac{P}{\pi z} \cos \varphi.$$

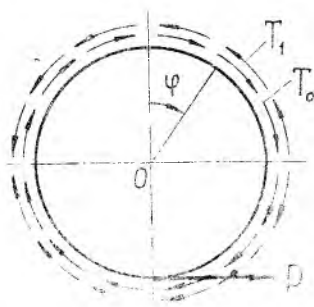
Суммарное касательное усилие T , приложенное к контуру шпангоута, будет равно (фиг.46)

$$T = T_1 - T_0 = \frac{P}{2\pi z} (2 \cos \varphi - 1). \quad (53)$$

Из фиг.46 видно, что нагружение шпангоута будет обратно симметричным по отношению к вертикальной оси симметрии и, следовательно, в сечениях шпангоута по оси симметрии из трех усилий (M , N , Q) отличным от нуля будет только перерезывающая сила. Поэтому для упрощения расчета выбираем основную систему, проводя разрез через точку 1 (фиг.47).



Фиг. 44.



Фиг. 45.

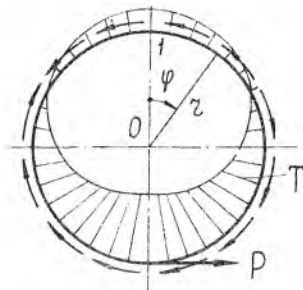
Таблица I

Значения интегралов, встречающихся при
расчете круговых шпангоутов

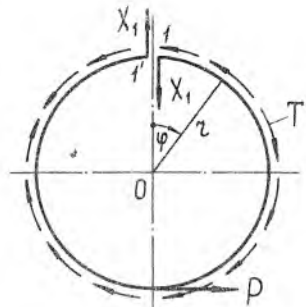
Подинтегральное выражение	Значение определенного интеграла в пределах от 0 до α
$\sin \varphi d\varphi$	$1 - \cos \alpha$
$\cos \varphi d\varphi$	$\sin \alpha$
$\sin^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha$
$\cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha$
$\sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$
$\varphi \sin \varphi d\varphi$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$
$\varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{8} \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \alpha \cos 2\alpha$
$\sin(\alpha - \varphi) d\varphi$	$1 - \cos \alpha$
$\cos(\alpha - \varphi) d\varphi$	$\sin \alpha$
$\sin(\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha$
$\sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha$
$\cos(\alpha - \varphi) \sin \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha$
$\cos(\alpha - \varphi) \cos \varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha$

Таблица 2

φ°	$\varphi \sin \varphi$	$\varphi \cos \varphi$	φ°	$\varphi \sin \varphi$	$\varphi \cos \varphi$	φ°	$\varphi \sin \varphi$	$\varphi \cos \varphi$
0	0	0	60	0,9069	0,5236	120	1,8138	-1,0472
5	0,0076	0,0869	65	1,0282	0,4794	125	1,7871	-1,2513
10	0,0303	0,1719	70	1,1481	0,4179	130	1,7381	-1,4584
15	0,0678	0,2529	75	1,2644	0,3588	135	1,6661	-1,6661
20	0,1194	0,3280	80	1,3750	0,2425	140	1,5706	-1,8718
25	0,1844	0,3955	85	1,4779	0,1293	145	1,4516	-2,0731
30	0,2618	0,4534	90	1,5708	0	150	1,3090	-2,2672
35	0,3504	0,5004	95	1,6518	-0,1445	155	1,1433	-2,4518
40	0,4488	0,5348	100	1,7188	-0,3031	160	0,9551	-2,6241
45	0,5554	0,5554	105	1,7702	-0,4743	165	0,7453	-2,7817
50	0,6685	0,5609	110	1,8041	-0,6566	170	0,5152	-2,9220
55	0,7863	0,5506	115	1,8191	-0,8482	175	0,2662	-3,0427
60	0,9069	0,5236	120	1,8138	-1,0472	180	0	-3,1416



Фиг. 46.



Фиг. 47.

Обозначая через X_1 перерезывающую силу в этом сечении, запишем каноническое уравнение для ее определения:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0, \quad (54)$$

означающее отсутствие взаимных вертикальных перемещений точек I и I'. Здесь

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EJ} ds, \quad \Delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EJ} ds \quad (55)$$

или, полагая $EJ = \text{const}$,

$$\delta_{11} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_1^2 d\varphi, \quad (56)$$

$$\Delta_{10} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_1 M_0 d\varphi, \quad (57)$$

причем (фиг. 48, 49)

$$M_1 = z \sin \varphi, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} M_0 = M^T &= \int_0^{\varphi} T r z d\omega = z^2 \int_0^{\varphi} T [1 - \cos(\varphi - \omega)] d\omega = \\ &= \frac{Pz}{2\pi} \int_0^{\varphi} (2 \cos \omega - 1) [1 - \cos(\varphi - \omega)] d\omega = \frac{Pz}{2\pi} (2 \sin \varphi - \varphi - \varphi \cos \varphi). \end{aligned} \quad (59)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_1 M_0 d\varphi = \\ &= \frac{Pz^3}{\pi EJ} \int_0^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi - \varphi \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{Pz^3}{4EJ}, \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_1^2 d\varphi = \frac{2z^3}{EJ} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi z^3}{EJ}$$

Тогда

$$\chi_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{P}{4\pi}$$

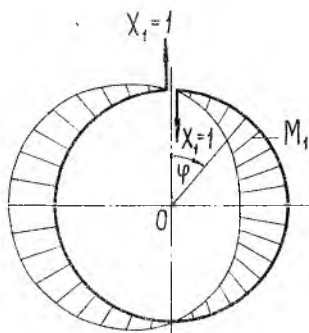
и, следовательно, изгибающий момент M в произвольном сечении шпангута будет равен ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$):

$$M = M_0 + \chi_1 M_1 = \frac{Pz}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \sin \varphi - \varphi - \varphi \cos \varphi \right) \quad (60)$$

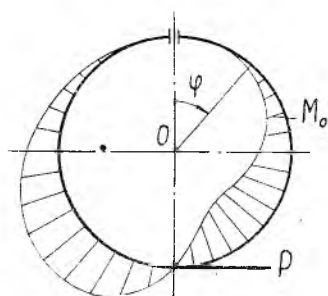
Поперечную и продольную силы найдем, воспользовавшись уравнениями (19) и (48):

$$Q = -\frac{1}{z} \frac{dM}{d\varphi} = -\frac{P}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1 \right), \quad (61)$$

$$N = -\frac{dQ}{d\varphi} = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi \right) \quad (62)$$



Фиг. 48.



Фиг. 49.

Контролем правильности вычислений является равенство

$$\int_0^{\pi} \frac{MM_1}{EJ} ds = 0, \quad (63)$$

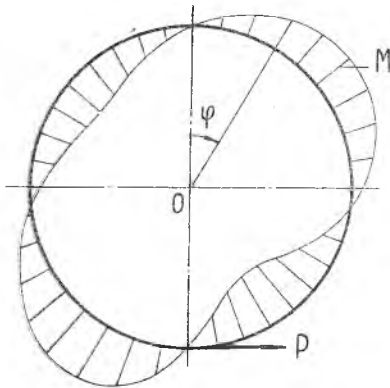
выражающее отсутствие взаимных вертикальных перемещений точек I и I' . В нашем случае это равенство можно записать в форме

$$\int_0^{\pi} MM_1 d\varphi = 0. \quad (64)$$

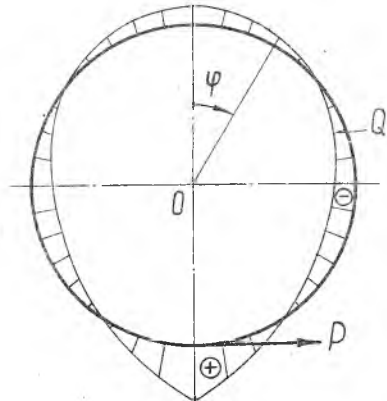
Внося сюда выражения (60) и (58), получаем:

$$\int_0^{\pi} M M, d\varphi = \frac{P r^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} \sin\varphi - \varphi - \varphi \cos\varphi \right) \sin\varphi d\varphi = 0,$$

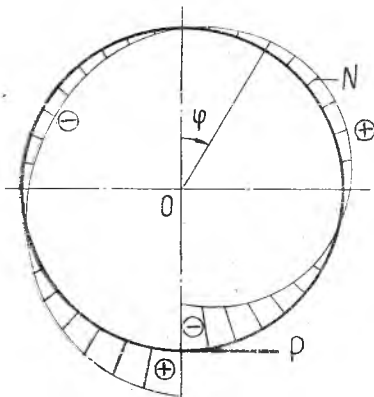
что означает правильность раскрытия статической неопределенности рассматриваемого шпангоута. На фиг.50, 51 и 52 показаны эпюры моментов, перерезывающих и продольных сил. Графики распределения безразмерных величин M/Pr , Q/P , N/P приведены на фиг. 53.



Фиг. 50.



Фиг. 51.



Фиг. 52.

§ 6. Расчет шпангоута, нагруженного радиальными силами

Рассмотрим порядок расчета шпангоута, нагруженного одинаковыми радиальными силами P , точки приложения которых делят осевую линию шпангоута на равные части (фиг.54). Через m обозначим количество сил P , приложенных к шпангоуту. Тогда угол 2β между линиями действия двух ближайших соседних сил будет равен:

$$2\beta = \frac{2\pi}{m}$$

Рассматривая фиг. 54, можно прийти к выводу, что для определения внутренних усилий достаточно рассмотреть часть шпангоута, заключенную между двумя соседними силами P (с центральным углом 2β) и показанную на фиг. 55. Здесь через X_1 обозначен неизвестный изгибающий момент, значение которого можно найти из уравнения

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0, \quad (65)$$

выражающего равенство нулю

взаимного угла поворота сечений $\varphi = -\beta$ и $\varphi = \beta$ (ввиду симметрии деформации)

Здесь

$$\delta_{11} = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{M_1^2}{EJ} r d\varphi = \frac{2r}{EJ} \int_0^{\beta} M_1^2 d\varphi,$$

$$\Delta_{10} = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{M_1 M_0}{EJ} r d\varphi = \frac{2r}{EJ} \int_0^{\beta} M_1 M_0 d\varphi,$$

M_1 - изгибающий момент в произвольном сечении рассматриваемой части кольца от единичных моментов $X_1 = 1$, приложенных в сечениях $\varphi = -\beta$ и $\varphi = \beta$;

M_0 - изгибающий момент от сил $P/2$ и N° .

Величину продольной силы N° определим из условия равновесия:

$$P \cos \beta = 2N^\circ \sin \beta.$$

Откуда

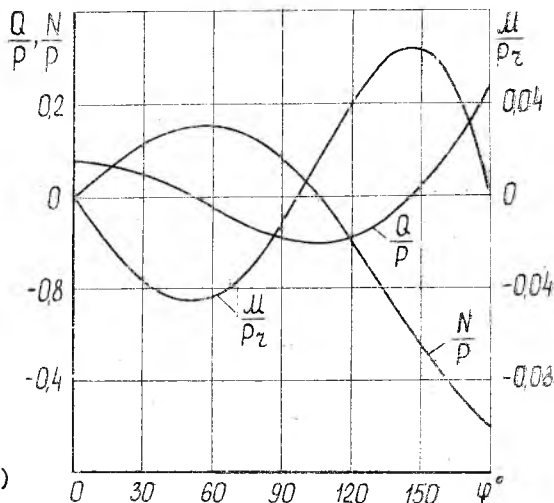
$$N^\circ = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \beta.$$

Далее находим:

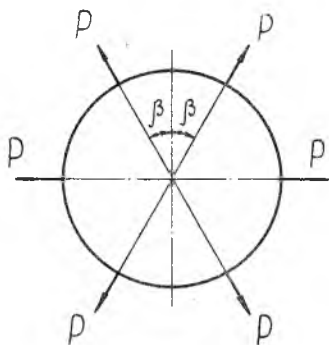
$$M_0 = \frac{Pz}{2} [1 - \cos(\beta - \varphi)] \operatorname{ctg} \beta - \frac{Pz}{2} \sin(\beta - \varphi) =$$

$$= \frac{Pz}{2} \left(\operatorname{ctg} \beta - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta} \right).$$

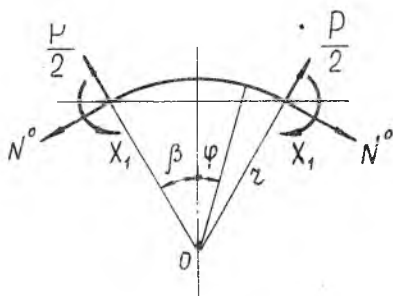
(66)



Фиг. 53.



Фиг. 54.



Фиг. 55.

Так как $M_1 = I$, то

$$\delta_{11} = \frac{2z}{EJ} \int_0^\beta M_1^2 d\varphi = \frac{2\beta z}{EJ},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \frac{2z}{EJ} \int_0^\beta M_1 M_0 d\varphi = \frac{Pz^2}{EJ} \int_0^\beta \left(\operatorname{ctg} \beta - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta} \right) d\varphi = \\ &= -\frac{Pz^2}{EJ} (1 - \beta \operatorname{ctg} \beta). \end{aligned}$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{Pz}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \operatorname{ctg} \beta \right).$$

Отсюда будем иметь, что

$$M = M_0 + X_1 M_1 = \frac{Pz}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta} \right). \quad (67)$$

и, далее,

$$Q = -\frac{1}{z} \frac{dM}{d\varphi} = -\frac{P}{2 \sin \beta} \sin \varphi, \quad (68)$$

$$N = -\frac{dQ}{d\varphi} = \frac{P}{2 \sin \beta} \cos \varphi \quad (69)$$

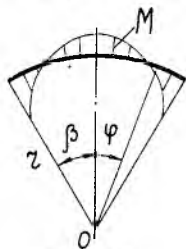
К этим же результатам можно прийти, рассматривая совокупность двух моментов M_1 , приложенных в сечениях $\varphi = -\beta$ и $\varphi = \beta$, как одну результирующую нагрузку.

Вычисление интеграла

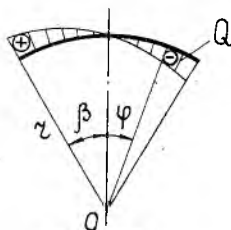
$$\frac{z}{EJ} \int_{-\beta}^{\beta} M M_1 d\varphi = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\beta} M d\varphi = \frac{Pz^2}{EJ} \int_0^{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta} \right) d\varphi = 0$$

убеждает нас в правильности решения задачи.

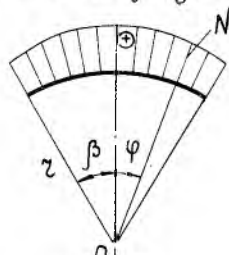
На фиг. 56, 57 и 58 представлены эпюры M , Q и N для $\beta = \frac{\pi}{6}$ ($m=6$).



Фиг. 56.



Фиг. 57.



Фиг. 58.

В заключение вычислим радиальные перемещения Δ точек приложения сил P . Для этого можно воспользоваться, например, теоремой Кастилиано, согласно которой перемещение Δ_i точки приложения силы P_i по направлению этой силы равно:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad (70)$$

где U - потенциальная энергия деформации рассматриваемой упругой системы. В нашем случае все силы P_i , приложенные к шпангоуту одинаковы и равны P , одинаковыми будут также и радиальные перемещения точек приложения этих сил, вследствие чего формула (70) для вычисления искомого перемещения примет несколько иной вид. Обозначим через U потенциальную энергию деформации шпангоута, нагруженного m силами P (фиг. 54).

Очевидно, что

$$U = \frac{m}{2} P \Delta.$$

Так как

$$\Delta = c P,$$

где c - коэффициент пропорциональности, то

$$U = \frac{mc}{2} P^2.$$

Отсюда

$$\frac{dU}{dP} = mc P = m \Delta$$

и, следовательно,

$$\Delta = \frac{1}{m} \frac{dU}{dP} \quad (71)$$

Найдем потенциальную энергию деформации шпангоута, выражая ее через работу внутренних сил. Будем иметь, пренебрегая энергией деформации растяжения и сдвига:

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M^2}{2EJ} r d\varphi = \frac{mz}{EJ} \int_0^{\beta} M^2 d\varphi.$$

Подставляя сюда выражение (67), получим:

$$U = \frac{mP^2 z^3}{4EJ} \int_0^{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta} \right)^2 d\varphi$$

или, после интегрирования,

$$U = \frac{mP^2 z^3}{4EJ} \left(\frac{\beta}{2 \sin^2 \beta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{\beta} \right). \quad (72)$$

Этот результат совместно с (71) дает:

$$\Delta = \frac{Pz^3}{2EJ} \left(\frac{\beta}{2 \sin^2 \beta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{\beta} \right). \quad (73)$$

Отсюда, в частности, при $\beta = \frac{\pi}{2}$ получаем известную формулу для удлинения диаметра кольца, по концам которого приложены две противоположно направленные силы P [7]:

$$2\Delta = \frac{Pz^3}{EJ} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = 0,149 \frac{Pz^3}{EJ}.$$

§ 7. Расчет шпангоута, подкрепленного поперечной балкой

Рассмотрим шпангоут, подкрепленный поперечной балкой так, как показано на фиг. 59.

Пусть на него действует симметричная нагрузка в виде двух вертикальных сил P , приложенных в точках A и B (такой случай нагружения будет, например, иметь место, если к балке приложена произвольная симметричная нагрузка с равнодействующей, равной $2P$). Наличие поперечной балки повышает степень статической неопределимости системы до трех. Статически неопреде-

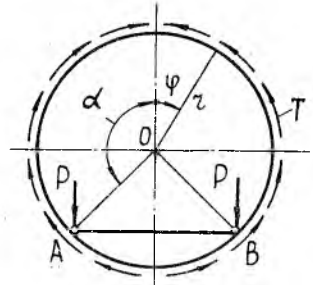
лимыми величинами будут продольная сила X_1 , и изгибающий момент X_2 в сечении $\varphi = 0$ и, кроме того, силы взаимодействия X_3 между шпангоутом и стержнем АВ (фиг.60).

Для их определения необходимо составить три уравнения, выражающие условия совместности деформаций отдельных частей рассматриваемой системы:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{10} = 0, \quad (74)$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{20} = 0, \quad (75)$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{30} = 0. \quad (76)$$



Фиг. 59.

$$\text{Здесь } \delta_{11} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_1^2 d\varphi, \quad \delta_{22} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_2^2 d\varphi; \quad \delta_{33} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_3^2 d\varphi + \frac{2\ell}{EF_0},$$

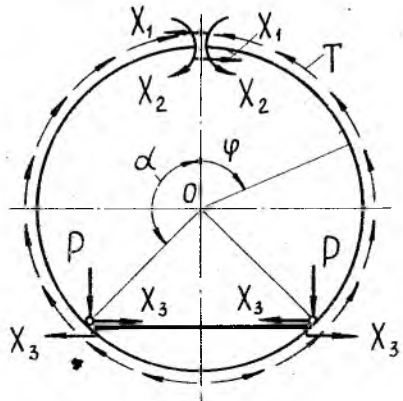
$$\delta_{i\kappa} = \delta_{\kappa i} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_i M_{\kappa} d\varphi, (i = 1, 2, 3; \kappa = 1, 2, 3; i \neq \kappa),$$

$$\Delta_{i0} = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_i M_0 d\varphi, (i = 1, 2, 3).$$

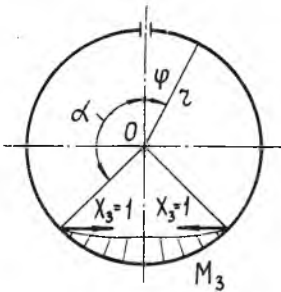
В этих выражениях M_3 - изгибающий момент в основной системе (фиг.61), вызываемый силами $X_3 = I$. Второе слагаемое в формуле для δ_{33} учитывает удлинение стержня АВ под действием единичных сил $X_3 = I$ (2ℓ - длина стержня, F_0 - площадь его поперечного сечения).

Вычислив коэффициенты уравнений (74)-(76) и решив последние относительно неизвестных X_1 , X_2 и X_3 , можно определить изгибающий момент в любом сечении шпангоута:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3.$$

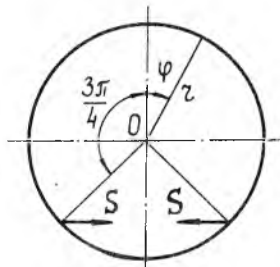


Фиг. 60.



Фиг. 61.

состоит в том, что мы рассмотрим шпангоут (без подкрепляющего стержня АВ) сначала под действием заданной вертикальной нагрузки, а затем - под действием двух, пока неизвестных, самоуравновешенных сил S , приложенных в точках А и В по направлению оси стержня АВ (фиг.62). Значения неизвестных сил S при этом способе решения будут определяться из условия, что горизонтальные перемещения Δ точек А и В равны половине удлинения стержня АВ под действием сил S :



Фиг. 62.

где Δ_p и Δ_s - горизонтальные перемещения точки А (или В) от сил P и S соответственно;

c - перемещение от силы $S = 1$.

Подставляя (78) в (77), получаем:

$$\Delta_p - cS = \frac{Sl}{EF_0},$$

откуда

$$S = \frac{\Delta_p}{c + \frac{l}{EF_0}}. \quad (79)$$

Так как действие сил P на рассматриваемый шпангоут нами было уже изучено в § 4, то нам остается решить сравнительно простую задачу о вычислении усилий и моментов при действии самоуравновешенной системы сил S (фиг.62). Для этого выбираем основную систему (фиг.63) и запи-

Для вычисления поперечной и продольной сил следует воспользоваться дифференциальными зависимостями между M , Q и N .

Мы изложили общий путь решения задачи о расчете кругового кольца, усиленного поперечной балкой АВ и нагруженного в точках А и В двумя вертикальными сосредоточенными силами P (угол α произволен).

Рассмотрим теперь частный случай, когда $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Для этого случая решение задачи можно упростить, воспользовавшись полученными ранее результатами (§ 4). Упрощение

решения будут определяться из условия, что горизонтальные перемещения Δ точек А и В равны половине удлинения стержня АВ под действием сил S :

$$\Delta = \frac{Sl}{EF_0}. \quad (77)$$

Перемещение Δ можно представить в виде суммы:

$$\Delta = \Delta_p - \Delta_s = \Delta_p - cS, \quad (78)$$

связем канонические уравнения:

$$\delta_{11} Y_1 + \delta_{12} Y_2 + \Delta_{10} = 0, \quad (80)$$

$$\delta_{21} Y_1 + \delta_{22} Y_2 + \Delta_{20} = 0 \quad (81)$$

для определения неизвестных Y_1 и Y_2 .

Имеем:

$$M_1 = rz(1 - \cos \varphi), \quad M_2 = 1,$$

$$M_0 = -Sz \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \varphi \right).$$

Далее вычисляем коэффициенты:

$$\Delta_{10} = \frac{Sz^3}{EJ} \left(\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\Delta_{20} = \frac{\sqrt{2} Sz^2}{EJ} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\delta_{11} = \frac{3\pi z^3}{EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2\pi z^2}{EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{2\pi z}{EJ}$$

и решаем уравнения (80)-(81):

$$Y_1 = -\frac{S}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right),$$

$$Y_2 = \frac{Sz}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} - 1 \right).$$

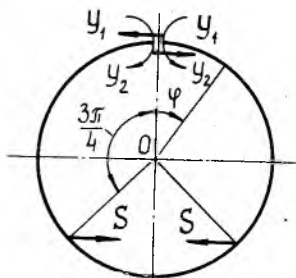
В соответствии с полученным решением находим изгибающие моменты от сил S (фиг.64):

$$M^{(1)} = -\frac{Sz}{2\pi} \left[\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \varphi \right] \quad (82)$$

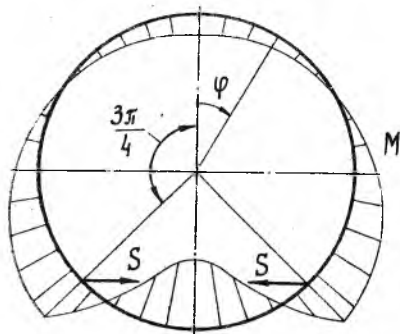
для $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$ и

$$M^{(2)} = -\frac{Sz}{2\pi} \left[\sqrt{2} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \cos \varphi \right] \quad (83)$$

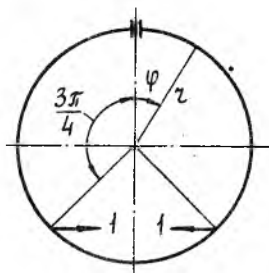
для $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$.



Фиг. 63.



Фиг. 64.



Фиг. 65.

Для вычисления горизонтального перемещения точки приложения силы S воспользуемся формулой Мора, известной из курса строительной механики [2]. Применительно к нашему случаю эта формула будет иметь вид:

$$2 \Delta_s = \int_l \frac{M_s \bar{M}}{EJ} z d\varphi = \frac{2z}{EJ} \int_0^{\pi} M_s \bar{M} d\varphi. \quad (84)$$

Здесь M_s - изгибающий момент, определяемый выражениями (82)-(83);

\bar{M} - изгибающий момент от единичных сил $S = 1$, приложенных к рассматриваемому статически неопределимому шпангоуту или к основной системе (фиг.65). Имея в виду, что в последнем случае вычисление интеграла (84) значительно упрощается, запишем:

при $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$ и

$$\bar{M} = 0$$

$$\bar{M} = -z \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \varphi \right) \quad (85)$$

при $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \frac{z}{EJ} \int_{3\pi/4}^{\pi} M^{(2)} \bar{M} d\varphi = \\ &= \frac{Sz^3}{2\pi EJ} \int_{3\pi/4}^{\pi} \left[\sqrt{2} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \cos \varphi \right] \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{Sz^3}{16\pi EJ} (3\pi^2 - 6\pi - 10). \end{aligned}$$

Отсюда

$$c = \frac{\Delta_s}{S} = \frac{z^3}{16\pi EJ} (3\pi^2 - 6\pi - 10). \quad (86)$$

Теперь нам остается вычислить перемещение Δ_P . И здесь используем формулу Мора. Для перемещения Δ'_P по направлению силы S будем иметь:

$$2\Delta'_P = \int_z \frac{M_P \bar{M}}{EJ} \tau d\varphi = \frac{2z}{EJ} \int_0^\pi M_P \bar{M} d\varphi, \quad (87)$$

где M_P - изгибающий момент в шпангоуте, вызванный силами P и определяемый выражениями (29)-(30); \bar{M} - момент от единичных сил $S = 1$, приложенных к основной системе (фиг.65).

Внося в (87) выражение (30), получаем:

$$2\Delta'_P = \frac{2z}{EJ} \int_{3\pi/4}^\pi M_P^{(2)} \bar{M} d\varphi = \frac{Pz^3}{16\pi EJ} (3\pi^2 - 8\pi - 4)$$

или

$$\Delta'_P = \frac{Pz^3}{32\pi EJ} (3\pi^2 - 8\pi - 4).$$

Тогда

$$\Delta_P = -\Delta'_P = -\frac{Pz^3}{32\pi EJ} (3\pi^2 - 8\pi - 4). \quad (88)$$

Теперь из формулы (79) по (86) и (88) находим ($l = z/\sqrt{2}$):

$$S = -\frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{2(3\pi^2 - 6\pi - 10) + \frac{16\sqrt{2}\pi J}{F_0 z^2}} P \quad (89)$$

или

$$S = -\frac{0,47606}{1,5185 + 71,086 K} P, \quad K = \frac{J}{F_0 z^2}.$$

Окончательные выражения для изгибающего момента получим, суммируя (29)-(30) и (82)-(83):

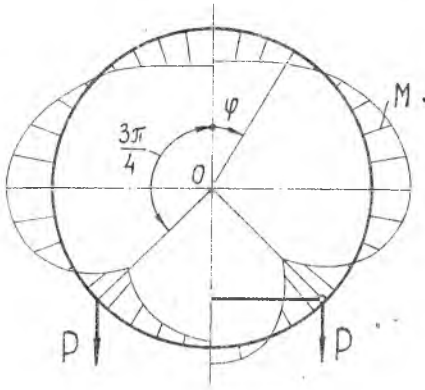
$$M = -\frac{Pz}{\pi} \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right) - \frac{Sz}{2\pi} \left[\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos\varphi \right] \quad (90)$$

для $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$ и

$$M = -\frac{Pz}{\pi} \left(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right) -$$

$$-Pz \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\varphi \right) - \frac{Sz}{2\pi} \left[\sqrt{2} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \cos\varphi \right] \quad (91)$$

для $\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \pi$.



Фиг. 66.

ющей балки (см. фиг. 36, 42 и 43).

На фиг. 66, 67 и 68 приведены эпюры M , Q и N , построенные на основании $(90) - (91)$ (правые половины рисунков) для значения

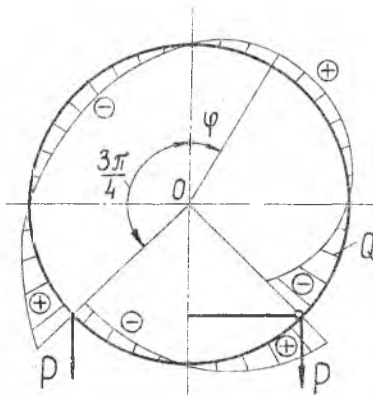
$$k = \frac{\gamma}{F_0 \cdot z^2} = 2 \cdot 10^{-4}$$

При этом

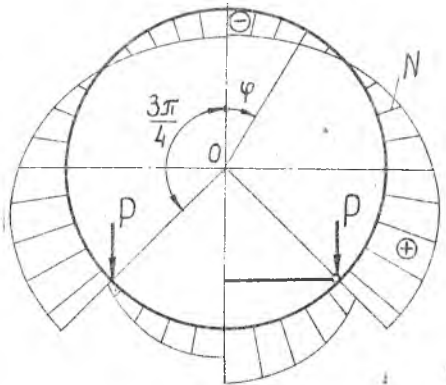
$$S = -0,3106 P.$$

Графики отношений M/Pz , Q/P и N/P представлены на фиг. 69.

Для сравнения на фиг. 66-68 (левые половины рисунков) показаны эпюры M , Q и N , построенные для шпангоута без подкрепляющей балки



Фиг. 67.



Фиг. 68.

§ 8. Расчет шпангоутов с использованием уравнения Буссинеска

I. Для исследования деформированного состояния, а также для решения вопросов устойчивости круговых шпангоутов используют уравнение Буссинеска, устанавливающее связь между изгибающим моментом M и радиальным перемещением u точек осевой линии (фиг. 70):

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{Mz^2}{EJ} \quad (92)$$

Это уравнение, полученное на основе гипотез плоских сечений и нерастяжимости осевой линии, по существу является дифференциальным уравнением деформированной оси кругового кольца [8].

Условие нерастяжимости оси кольца можно записать в виде равенства нулю ее относительного удлинения ε [8]:

$$\varepsilon = \frac{1}{z} \left(\frac{dw}{d\varphi} + w \right) = 0. \quad (93)$$

Здесь w - касательное перемещение точки осевой линии кольца (фиг. 70). Отсюда легко получить связь между перемещениями v и w :

$$\frac{dw}{d\varphi} = -w. \quad (94)$$

2. Исходя из уравнения Буссинеска (92) и уравнений равновесия (I6), (I7) и (I9), можно получить дифференциальное уравнение деформированной оси кольца, не содержащее изгибающего момента M . Для этого из уравнений (I6) и (I7) находим (штрих означает производную по φ):

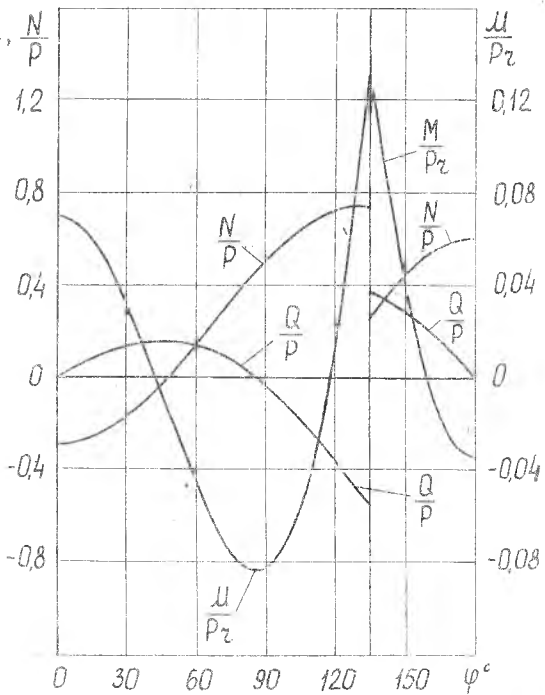
$$Q'' + Q = z(q_t' + q_n')$$

или, на основании (I9):

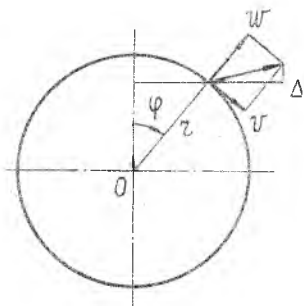
$$M''' + M' = -z^2(q_t' + q_n').$$

Подставив сюда выражение

$$M = -\frac{EJ}{z^2} (w'' + w), \quad (95)$$



Фиг. 69.



Фиг. 70.

полученное из уравнения Буссинеска, приходим к искомому дифференциальному уравнению для w :

$$w'' + 2w''' + w' = \frac{z^4}{EJ} (q_t + q_n') \quad (96)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$w = A_0 + A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + w_q, \quad (97)$$

где w_q - частное решение, определяемое характером распределенных нагрузок q_t и q_n' ; A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 - произвольные постоянные.

Подставляя выражение (97) в (94) и интегрируя, получаем перемещение v :

$$v = A_5 - \int w d\varphi = -A_0 \varphi + A_1 \cos \varphi - A_2 \sin \varphi - A_3 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + A_5 + v_q \quad (98)$$

Здесь

$$v_q = - \int w_q d\varphi, \quad (99)$$

A_5 - постоянная интегрирования.

В частном случае, когда правая часть уравнения (96) имеет вид

$$\frac{z^4}{EJ} (q_t + q_n') = a_0 + a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} (a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi), \quad (100)$$

его частным решением будет:

$$w_q = a_0 \varphi + \frac{a_1}{8} \varphi^2 \cos \varphi - \frac{b_1}{8} \varphi^2 \sin \varphi - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m^2-1)} (a_m \cos m\varphi - b_m \sin m\varphi). \quad (101)$$

Этому решению соответствует функция v_q :

$$v_q = - \frac{a_0}{2} \varphi^2 - \frac{1}{8} (a_1 \varphi^2 \cos \varphi + b_1 \varphi^2 \sin \varphi - \dots)$$

$$+ \frac{\beta_1}{8} (\varphi \sin \varphi - \varphi^3 \cos \varphi + 2 \cos \varphi) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2(m^2-1)^2} (a_m \sin m\varphi + \beta_m \cos m\varphi). \quad (102)$$

3. Выражения (97) и (98) совместно с уравнениями равновесия (16), (17) и (19) позволяют решить любую статически неопределимую задачу о расчете шпангоута с круговой осью и постоянным поперечным сечением без использования канонических уравнений метода сил.

В качестве примера применения этого способа рассмотрим еще раз шпангоут, показанный на фиг. 54. Для расчета этого шпангоута, как было показано в § 6, можно ограничиться рассмотрением части кольца, заключенной между двумя соседними точками приложения сил P (фиг. 55). Так как эта часть кольца симметрична относительно сечения $\varphi = 0$, и несет симметричную нагрузку, то в выражении (97) для w оставляем только четные функции (распределение прогибов w будет симметричным и, следовательно, будет описываться четными относительно φ функциями), а в формуле (98) для v — соответственно только нечетные функции. Кроме того полагаем:

$$w_q = 0, \quad v_q = 0,$$

так как на кольцо не действуют никакие распределенные нагрузки ($q = 0$, $q_n = 0$).

В результате будем иметь:

$$w = A_0 + A_2 \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi, \quad (103)$$

$$v = -A_0 \varphi - A_2 \sin \varphi - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \quad (104)$$

Для определения постоянных A_0 , A_2 и A_4 имеем следующие три условия: при $\varphi = \beta$ $w' = 0$, $v = 0$, $Q = -\frac{P}{2}$.

Первое и второе условия непосредственно следуют из симметрии деформированного состояния кольца. В развернутом виде они запишутся так:

$$-A_2 \sin \beta + A_4 (\beta \cos \beta + \sin \beta) = 0, \quad (105)$$

$$-A_0 \beta - A_2 \sin \beta - A_4 (\sin \beta - \beta \cos \beta) = 0. \quad (106)$$

Для записи третьего условия заметим, что

$$Q = -\frac{1}{r} M' = \frac{EJ}{r^3} (w''' + w') \quad (107)$$

или, на основании (I03),

$$Q = -\frac{2EJ}{r^3} A_4 \sin \varphi.$$

Отсюда, полагая $\varphi = \beta$ и $Q = -\frac{P}{2}$:

$$\frac{2EJ}{r^3} A_4 \sin \beta = \frac{P}{2}. \quad (I08)$$

Решая уравнения (I05)-(I06) и (I08), находим:

$$A_4 = \frac{Pr^3}{4EJ \sin \beta},$$

$$A_2 = \frac{Pr^3}{4EJ} \frac{\beta \operatorname{ctg} \beta + 1}{\sin \beta},$$

$$A_0 = -\frac{Pr^3}{2EJ \beta}.$$

Теперь нетрудно найти выражения для изгибающего момента M и поперечной силы Q :

$$M = \frac{Pr}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta} \right), \quad (I09)$$

$$Q = -\frac{P}{2 \sin \beta} \sin \varphi. \quad (I10)$$

Продольную силу N находим из уравнения равновесия (48):

$$N = -Q' = \frac{P}{2 \sin \beta} \cos \varphi. \quad (I11)$$

Подставляя значения постоянных A_0 , A_2 и A_4 в (I03), будем иметь:

$$w = \frac{Pr^3}{2EJ} \left(\frac{\beta \operatorname{ctg} \beta + 1}{2 \sin \beta} \cos \varphi + \frac{1}{2 \sin \beta} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{\beta} \right).$$

Полагая здесь $\varphi = \beta$, получаем радиальное перемещение Δ точки приложения силы P :

$$\begin{aligned} \Delta = w(\beta) &= \frac{Pr^3}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \beta \operatorname{ctg}^2 \beta + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta + \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{\beta} \right) = \\ &= \frac{Pr^3}{2EJ} \left(\frac{\beta}{2 \sin^2 \beta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (I12)$$

Сопоставляя выражения (I09)-(I12) с (67)-(69) и (73), убеждаемся,

что они в точности совпадают между собой. Отсюда следует, что пренебрежение энергией деформации растяжения и сдвига равносильно принятию гипотезы плоских сечений и гипотезы о нерастяжимости осевой линии шпангоута.

4. Рассмотрим пример применения уравнения Буссинеска для вычисления перемещений точек осевой линии шпангоута. Ранее (§ 7), в процессе расчета шпангоута, подкрепленного поперечной балкой, нам потребовалось вычислить горизонтальное перемещение точек А и В, вызванное вертикальными силами Р. Эту величину мы определили, пользуясь формулой Мора (87). Покажем, что той же цели можно достигнуть и другим путем.

Запишем уравнение Буссинеска для верхней части шпангоута ($-\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$), используя выражение (29) для изгибающего момента М:

$$w'' + w = \frac{Pr^3}{\pi EJ} \left(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \right). \quad (II3)$$

Общим решением этого уравнения будет выражение (A_1, A_2 - произвольные постоянные):

$$w = A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + w^*, \quad (II4)$$

где w^* - частное решение, которое можно искать в следующем виде:

$$w^* = A + B\varphi \sin \varphi + C\varphi^2 \cos \varphi. \quad (II5)$$

Подставляя предполагаемую форму частного решения w^* в (II3), находим

$$A = -\frac{\sqrt{2} Pr^3}{2\pi EJ} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right), \quad B = \frac{3Pr^3}{4\pi EJ}, \quad C = -\frac{Pr^3}{4\pi EJ}.$$

Тогда, имея в виду симметричное относительно вертикальной оси распределение перемещений (т.е. полагая $A_1 = 0$), можем записать:

$$w = A_2 \cos \varphi - \frac{Pr^3}{\pi EJ} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \cos \varphi \right]. \quad (II6)$$

Этим перемещениям (радиальным) соответствуют касательные перемещения v :

$$v = - \int_0^\varphi w d\varphi = -A_2 \sin \varphi + \frac{Pr^3}{\pi EJ} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi - \frac{3}{4} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{4} (2\varphi \cos \varphi + \varphi^2 \sin \varphi - 2 \sin \varphi) \right] \quad (II7)$$

Теперь, зная v и w (с точностью до постоянной A_2), можно определить и горизонтальные перемещения Δ точек оси шпангоута (фиг.70):

$$\Delta = w \sin \varphi + v \cos \varphi. \quad (II8)$$

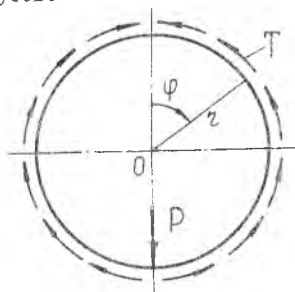
Полагая в (II6) и (II7) $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и подставляя результат в (II8), получаем перемещение точки В (или точки А) в горизонтальном направлении:

$$\Delta = -\frac{Pz^3}{32\pi E J} (3\pi^2 - 8\pi - 4). \quad (II9)$$

Знак минус указывает на то, что перемещение Δ направлено к оси симметрии шпангоута (вовнутрь). Полученный результат полностью совпадает с формулой (88).

Заметим, что в формулу (II8) для горизонтального перемещения постоянная A_2 не входит, так как она определяет вертикальное поступательное перемещение всего шпангоута в целом как твердого тела. Отсюда следует, что для определения этой постоянной необходимо задание вертикального перемещения какой-либо точки осевой линии шпангоута.

5. Продолжаем рассмотрение примеров применения формул (97)-(98) и уравнений равновесия кольца к расчету статически неопределимых шпангоутов.



Фиг. 71.

Пусть к некоторому круговому шпангоуту в нижней его точке приложена вертикальная сосредоточенная сила P (фиг.71). Для решения задачи будем исходить из уравнения (96):

$$w'' + 2w''' + w' = \frac{z^4}{EJ} (q_t + q_n').$$

В нашем случае

$$q_n = 0, \quad q_t = -T = -\frac{P}{\pi z} \sin \varphi,$$

так что

$$w'' + 2w''' + w' = -\frac{Pz^3}{\pi EJ} \sin \varphi. \quad (I20)$$

Имея в виду симметрию нагружения, запишем общее решение этого уравнения:

$$w = A_0 + A_2 \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + w_q.$$

Частное решение w_q найдем, сопоставив правую часть уравнения (I20) с выражением (I00). Тогда, в соответствии с (I01), будем иметь

$$w_q = -\frac{Pz^3}{8\pi EJ} \varphi \cos \varphi.$$

Поэтому

$$w = A_0 + A_2 \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi - \frac{Pz^3}{8\pi EJ} \varphi^2 \cos \varphi. \quad (I21)$$

Этому распределению прогибов w соответствуют касательные перемещения v :

$$v = - \int_0^{\varphi} w d\varphi = -A_0 \varphi - A_2 \sin \varphi - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{Pz^3}{8\pi EJ} (2\varphi \cos \varphi + \varphi^2 \sin \varphi - 2 \sin \varphi). \quad (I22)$$

Для определения постоянных A_0 и A_4 имеем два условия: при $\varphi = \pi$ $w' = 0$, $v = 0$.

Используя ^{их}, получаем:

$$A_4 = \frac{Pz^3}{4\pi EJ}, \quad A_0 = -\frac{Pz^3}{2\pi EJ}$$

Тогда

$$w = -\frac{Pz^3}{2\pi EJ} + A_2 \cos \varphi + \frac{Pz^3}{4\pi EJ} \varphi \sin \varphi - \frac{Pz^3}{8\pi EJ} \varphi^2 \cos \varphi. \quad (I23)$$

В этом выражении постоянная A_2 (вертикальное перемещение шпангоута как твердого тела) осталась неопределенной.

На величину изгибающих моментов, поперечной и продольной сил значение этой постоянной не будет оказывать никакого влияния, так как вертикальное перемещение шпангоута как твердого тела не вызывает никаких внутренних усилий. В случае необходимости постоянную A_2 можно найти, задав вертикальное перемещение какой-либо точки осевой линии шпангоута.

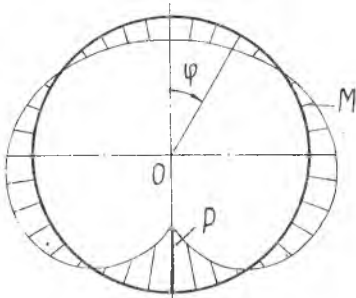
Подставляя выражение (I23) в формулу (95), получаем (фиг.72):

$$M = \frac{Pz}{2\pi} (1 - \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi). \quad (I24)$$

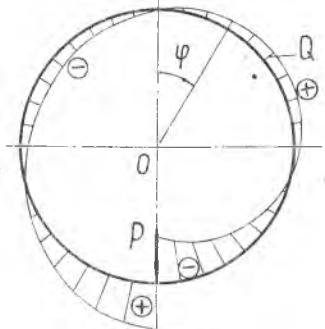
Далее находим Q и N (фиг.73 и 74):

$$Q = -\frac{1}{2} M' = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin \varphi + \varphi \cos \varphi \right), \quad (I25)$$

$$N = -Q' = \frac{P}{2\pi} \left(\varphi \sin \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi \right). \quad (I26)$$



Фиг. 72.



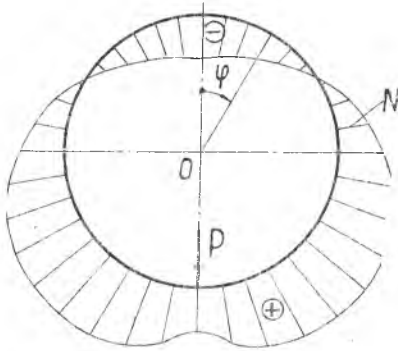
Фиг. 73.

На фиг. 75 приведены графики отношений M/Pr , Q/P и N/P .

6. Завершая рассмотрение примеров расчета шпангоутов, обратимся к случаю, когда шпангоут нагружен касательными и нормальными усилиями q_t и q_n , распределенными по закону

$$q_t = q_1 \sin \varphi, \quad (I27)$$

$$q_n = q_0 + q_1 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} q_m \cos m\varphi. \quad (I28)$$



Фиг. 74.

Нетрудно проверить, что под действием этой нагрузки кольцо в целом будет находиться в равновесии.

Внося (I27) и (I28) в (96), получим:

$$w'' + 2w''' + w' = -\frac{r^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} m q_m \sin m\varphi. \quad (I29)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$w = A_0 + A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + \frac{r^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{(m^2 - 1)} \cos m\varphi. \quad (I30)$$

Далее, по (130) и (98), находим:

$$v = -A_0 \varphi + A_1 \cos \varphi - A_2 \sin \varphi - A_3 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + A_5 - \frac{\tau^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m(m^2-1)^2} \sin m\varphi \quad (131)$$

Формулу для вычисления изгибающего момента M получим, подставляя выражение (130) в (95). В результате будем иметь:

$$M = -\frac{EJ}{\tau^2} (A_0 - 2A_3 \sin \varphi + 2A_4 \cos \varphi) + \tau^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m^2-1} \cos m\varphi \quad (132)$$

Отсюда, на основании (107), следует:

$$Q = -\frac{2EJ}{\tau^3} (A_3 \cos \varphi + A_4 \sin \varphi) + \tau \sum_{m=2}^{\infty} \frac{mq_m}{m^2-1} \sin m\varphi \quad (133)$$

Наконец, по (17) и (133), получаем формулу для вычисления продольной силы N :

$$N = -\frac{2EJ}{\tau^3} (A_3 \sin \varphi - A_4 \cos \varphi) + \tau (q_0 + q_1 \cos \varphi) - \tau \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m^2-1} \cos m\varphi \quad (134)$$

Произвольные постоянные A_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), входящие в формулы (130) - (131), определим для частного случая, когда шпангоут замкнут ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$), не имеет шарниров и может свободно перемещаться в вертикальном направлении. Тогда, ввиду симметрии нагружения, определяемого зависимостями (127) и (128), в равенствах (130) и (131) можно положить, что

$$A_1 = A_3 = A_5,$$

так как распределение радиальных перемещений W будет описываться четными по отношению к φ функциями, а распределение касательных перемещений v - нечетными функциями. Для вычисления остальных постоянных (A_0, A_2 и A_4) имеем следующие два условия:

при $\varphi = \pi$ 1) $v = 0$, 2) $w' = 0$

или, в развернутом виде,

$$\pi A_0 + \pi A_4 = 0,$$

$$\pi A_4 = 0$$

Отсюда

$$A_0 = A_4 = 0$$

Следовательно, для рассматриваемого шпангоута будут иметь место такие соотношения:

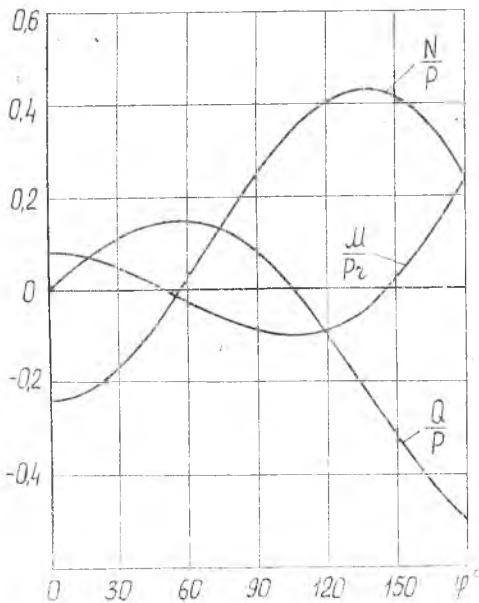
$$w = A_2 \cos \varphi + \frac{z^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{(m^2-1)^2} \cos m\varphi, \quad (I35)$$

$$v = -A_2 \sin \varphi - \frac{z^4}{EJ} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m(m^2-1)^2} \sin m\varphi, \quad (I36)$$

$$M = z^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m^2-1} \cos m\varphi, \quad (I37)$$

$$Q = z \sum_{m=2}^{\infty} \frac{mq_m}{m^2-1} \sin m\varphi, \quad (I38)$$

$$N = z(q_0 + q_1 \cos \varphi) - z \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m^2-1} \cos m\varphi. \quad (I39)$$



Фиг. 75.

Постоянная A_2 (вертикальное перемещение кольца как твердого тела) осталась неопределенной, но ее значение, как видно из формул (I37) - (I39), не влияет на напряженное состояние кольца.

7. В заключение приведем общие формулы для вычисления перемещений и внутренних усилий в шпангоуте (с шарнирами или без шарниров), нагруженном произвольной, но плоской системой сил (распределенных или сосредоточенных) и моментов (сосредоточенных):

$$w = A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi +$$

$$+ A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + w_q, \quad (I40)$$

$$v = -A_0 \varphi + A_1 \cos \varphi - A_2 \sin \varphi -$$

$$- A_3 (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - A_4 (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + A_5 + v_q, \quad (I41)$$

$$M = -\frac{EJ}{z^2} (A_0 - 2A_3 \sin \varphi + 2A_4 \cos \varphi) + M_q, \quad (I42)$$

$$Q = -\frac{2EJ}{z^3} (A_3 \cos \varphi + A_4 \sin \varphi) + Q_q, \quad (I43)$$

$$N = -\frac{2EJ}{z^3} (A_3 \sin \varphi - A_4 \cos \varphi) + N_q. \quad (I44)$$

Здесь

$$M_q = -\frac{EJ}{z^2} (w_q'' + w_q), \quad (I45)$$

$$Q_q = -\frac{1}{z} M_q' = \frac{EJ}{z^3} (w_q''' + w_q'), \quad (I46)$$

$$\begin{aligned} N_q &= z q_n - Q_q' = \\ &= z q_n - \frac{EJ}{z^3} (w_q^{IV} + w_q''), \end{aligned} \quad (I47)$$

$$v_q = -\int w_q d\varphi. \quad (I48)$$

w_2 - частное решение неоднородного уравнения (96).

Совокупность выражений (I40) - (I44) записывается отдельно для каждой части кольца, на которые оно разделяется шарнирами и точками приложения сосредоточенных сил и моментов, причем каждая такая совокупность будет иметь свои произвольные постоянные A_k (определяемые из геометрических и статических условий).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н.КАН, И.А.СВЕРДЛОВ, Расчет самолета на прочность. "Машиностроение", 1966.
2. И.М.РАБИНОВИЧ. Основы строительной механики стержневых систем. Гостройиздат, 1956.
3. А.И.ДЫХОВИЧНЫЙ. Строительная механика, Углетехиздат, 1959.
4. Б.Н.ЖЕМОЧКИН, Д.П.ПАЩЕВСКИЙ. Статика сооружений. Гостройиздат, 1959.
5. М.Ф.АСТАХОВ, А.В.КАРАВАЕВ, С.Я.МАКАРОВ, Я.Я.СУЗДАЛЬЦЕВ. Справочная книга по расчету самолета на прочность. Оборонгиз, 1954.
6. С.Д.ПОНОМАРЕВ, В.Л.БИДЕРМАН, К.К.ЛИХАРЕВ, В.М.МАКУШИН, Н.Н.МАЛИНИН, В.И.ФЕОДОСЬЕВ. Расчеты на прочность в машиностроении. Машгиз, т.1, 1956; т.2, 1959.
7. С.П.ТИМОШЕНКО. Сопротивление материалов, т.1, Физматгиз, 1960.
8. С.П.ТИМОШЕНКО. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1955.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	2
О нагружении и расчете на прочность шпангоутов фюзеляжа	3
§ 1. Расчет шпангоута на симметричную нагрузку	5
§ 2. Расчет шпангоута на обратно симметричную нагрузку	9
§ 3. Дифференциальные уравнения равновесия кругового кольца	11
§ 4. Пример расчета шпангоута на симметричную нагрузку	12
§ 5. Пример расчета шпангоута на обратно симметричную нагрузку	22
§ 6. Расчет шпангоута, нагруженного радиальными силами	28
§ 7. Расчет шпангоута, подкрепленного поперечной балкой	32
§ 8. Расчет шпангоутов с использованием уравнения Буссинеска	38
Использованная литература	51

Исхак Саидович АХМЕДЬЯНОВ

РАСЧЕТ ШПАНГОУТОВ

Учебное пособие по курсу
«Строительная механика самолета»

Редактор - А.И.КОНДРАТЬЕВА
Технический редактор - Н.М.ЗЕМСКОВА
Корректор - И.Б.ГРИДИНА

ВО 00142 Подписано в печать 13/II-1969 г. Объем 3,25 л.
Тираж 750 экз. Цена 25 коп.

г.Куйбышев, обл., ул.Молодогвардейская, 151, Куйбышевский
авиационный институт им. С.П.Королева.

Ротационный Цех типографии им. Жиги управления по печати
при Куйбышевском Облисполкоме, г.Куйбышев, ул.Вензская, 60.
Заказ № 2573