МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.А. ИЛЬИНА

РАЗРАБОТКА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика, 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 338(075)
ББК 65я7
И46

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. М. Н. Тюкавкин,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Радченко

Ильина, Елена Алексеевна
И46 **Разработка экономико-математических моделей методами линейной алгебры:** учебное пособие / *Е.А. Ильина*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 120 с. : с ил.

ISBN 978-5-7883-1798-4

В пособии представлены материалы лекций по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии. Подробно рассмотрены действия с матрицами, изложены основные методы решения систем линейных уравнений, действия с векторами, прямые и плоскости, канонические уравнения кривых второго порядка, линейные векторные пространства, евклидово пространство, линейные операторы, квадратичные формы и приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

Кроме того, рассмотрены приложения методов линейной алгебры и аналитической геометрии для расчетов экономических показателей предприятий. Рассмотрено применение систем линейных уравнений для прогноза выпуска продукции по запасам сырья, составление балансового соотношения, построение линейных моделей многоотраслевой экономики продуктивных моделей, моделей равновесных цен, линейные модели торговли.

Теоретический материал учебного пособия сопровождается набором примеров и практических задач по применению математических методов алгебры и аналитической геометрии в экономике.

Предназначено для бакалавров направлений подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.05 Бизнес-информатика.

Подготовлено на кафедре математики и бизнес-информатики.

УДК 338(075)
ББК 65я7

ISBN 978-5-7883-1798-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ К ЗАДАЧАМ В ЭКОНОМИКЕ

1.1. Понятие о матрице

При решении многих математических и прикладных задач возникает необходимость рассматривать совокупность чисел, расположенных в виде таблиц, что позволяет значительно упростить форму записи.

Например, информация о системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - y + z = 1, \\ x + y - z = 5 \end{cases}$$

может быть закодирована с помощью таблицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

а информация о коэффициентах системы – с помощью другой таблицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью таблиц можно задавать функции и другие объекты. Введем новое понятие.

Прямоугольной матрицей размера $m \times n$ называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов.

Числа a_{ik} называются **элементами матрицы**.

Первый индекс i – номер строки, в которой расположен элемент, а второй индекс k – номер столбца. На практике используются краткие обозначения матрицы: $A = (a_{ik})$ или $A = \|a_{ik}\|$.

Если размеры матрицы совпадают, т.е. $m = n$, она называется **квадратной матрицей n-го порядка**.

Квадратная матрица порядка n называется **диагональной**, если $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица порядка n называется **единичной матрицей**, если все ее элементы равны единице $(a_{ii} = 1,\ i = \overline{1,\ n})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю называется **нулевой матрицей**:

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица размера $m\times 1$ называется – **матрица-столбец**:

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}.$$

Матрица размера $1\times n$ называется – **матрица-строка**:

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}.$$

Две матрицы размера $m\times n$ $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ называются **равными** тогда и только тогда, когда $a_{ik}=b_{ik}$ при всех $i=\overline{1,\ m}$ и $k=\overline{1,\ n}$.

Равные матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ -2 & 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ -2 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица – это матрица, построенная из исходной матрицы путем замены строк на столбцы с сохранением их номеров.

Исходная матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Замечание: при транспонировании матриц элементы, стоящие на главной диагонали, не изменяют своего положения.

Симметричная (симметрическая) матрица – это квадратная матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали.

Примеры симметричных матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка этой матрицы называется число:

$$a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Обозначают определители следующим образом:

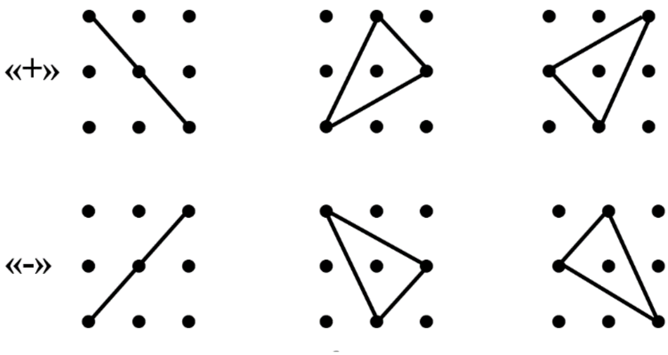
$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Для квадратной матрицы третьего порядка определитель вводится с помощью формулы:

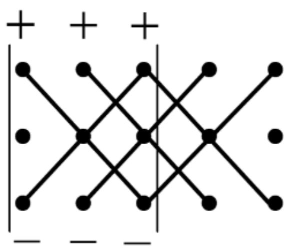
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}- \\ -a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}. \end{matrix} \tag{1.2.1}$$

Для вычисления определителей третьего порядка существует два правила – правило треугольников и правило дополнений.

Правило «треугольников»: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (1.2.1) со знаком «плюс» есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведение элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (1.2.1) со знаком «минус», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:



Метод дополнений (правило Саррюса). Справа от определителя дописывают первые два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком «плюс»; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком «минус»:



Пример 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &1\cdot 2\cdot 1+0\cdot 3\cdot 1+0\cdot 2\cdot(-1)-(-1)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 2\cdot 3-0\cdot 0\cdot 1= \\ &=2+0+0+2-6-0=-2. \end{aligned}$$

1.3. Основные свойства определителей

1. При замене в определителе строк столбцами величина определителя не изменяется:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. Если поменять местами две строки (столбца) определителя, то определитель изменит свой знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

5. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Имеет место формула:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменится, если ко всем элементам некоторой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.4. Минор и алгебраическое дополнение

Рассмотрим прямоугольную матрицу A размера $m \times n$. Выберем в ней какие-либо k строк и k столбцов $(k \le m,\ k \le n)$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Любой из таких определителей называется минором k-го порядка для данной матрицы.

Для матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

можно образовать миноры третьего, второго и первого порядков (определитель первого порядка – сам элемент). Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad |a_{24}|.$$

Рассмотрим теперь определитель n-го порядка.

Минором M_{ik} для элемента a_{ik} называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из исходного определителя вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером k.

Алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik} называется его минор M_{ik}, умноженный на $(-1)^{i+k}$:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}.$$

Например, минор для элемента c_2 в определителе $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ имеет вид $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, а алгебраическое дополнение равно: $(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

Очевидно, что знаки перед минорами при вычислении алгебраических дополнений, ставятся в шахматном порядке:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

1.5. Понятие об определителе любого порядка

Рассмотрим особенности формулы, выражающей величину определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}- \\ -a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}. \end{matrix} \quad (1.5.1)$$

Очевидно, что

1) в правой части слагаемыми являются произведения элементов определителя, взятых по одному из каждой его строки и каждого столбца;

2) половина из этих произведений взята со знаком «плюс», другая – со знаком «минус».

Если расположить элементы в произведениях в порядке возрастания первых индексов (как это сделано в формуле), то нетрудно обнаружить закономерность образования знаков для слагаемых. Будем говорить, что числа i, j образуют **инверсию**, если $i > j$.

Выпишем некоторые слагаемые из формулы (1.5.1) и подсчитаем для них число инверсий α в последовательности вторых индексов:

$$a_{12}a_{23}a_{31} \Rightarrow 2,3,1 \Rightarrow \alpha = 2;$$
$$a_{11}a_{23}a_{32} \Rightarrow 1,3,2 \Rightarrow \alpha = 1;$$
$$a_{13}a_{21}a_{32} \Rightarrow 3,1,2 \Rightarrow \alpha = 2;$$
$$a_{13}a_{22}a_{31} \Rightarrow 3,2,1 \Rightarrow \alpha = 3.$$

Очевидно, знак слагаемых в правой части равенства (1.5.1) определяется четностью и нечетностью числа инверсий a – при четном a соответствующее произведение берется со знаком «плюс», при нечетном a – со знаком «минус». Формула (1.5.1) принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k} (-1)^{\alpha} \cdot a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \,. \qquad (1.5.2)$$

Здесь суммирование выполняется при условии, что среди индексов i, j, k нет одинаковых.

Таким образом может быть введена формула для вычисления определителя любого порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} (-1)^{\alpha} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \cdots \cdot a_{ni_n} \,. \quad (1.5.3)$$

Следовательно, для квадратной матрицы n-го порядка **определителем n-го порядка** является число, равное сумме произведений элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы со знаком $(-1)^{\alpha}$, где α выражает число инверсий в последовательности вторых индексов элементов соответствующих произведений при условии, что первые расположены в порядке их возрастания.

Для определителя любого порядка справедливы все ранее рассмотренные свойства определителей.

1.6. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Теорема 1. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \ldots + a_{nk} \cdot A_{nk}$$

(разложение по элементам k-того столбца),

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

(разложение по элементам i-той строки).

Доказательство.

Для доказательства рассмотрим определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и покажем, например, что $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$.

По правилу треугольников (или правилу дополнений) имеем:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, получаем

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}. \qquad (1.6.1)$$

Пример 2. Разложить определитель по элементам второй строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= (-5) \cdot \left[1 \cdot 8 - (-2) \cdot (-2)\right] + 4 \cdot \left[3 \cdot 8 - (-2) \cdot 7\right] + (-6) \cdot \left[3 \cdot (-2) - 1 \cdot 7\right] =$$
$$= (-5) \cdot \left[8 - 4\right] + 4 \cdot \left[24 + 14\right] + (-6) \cdot \left[-6 - 7\right] = -20 + 152 + 78 = 210.$$

***Замечание*:** наиболее выгодным является разложение определителя по элементам того ряда, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю.

Если строк или столбцов с нулями нет, то их можно получить, используя элементарные преобразования, не изменяющие величины определителя.

Теорема 2. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов некоторой строки (столбца) определителя на соответствующие элементы другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство.

Для определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

имеем

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, с учетом (1.6.1) получаем следующую формулу:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{li} \cdot A_{lj} = \begin{cases} \Delta \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Пример 3. Проверим это свойство на примере, для этого составим сумму произведений элементов первой строки на алгебраические дополнения элементов второй строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & -2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-3)\cdot\left[1\cdot 8-(-2)\cdot(-2)\right]+1\cdot\left[3\cdot 8-(-2)\cdot 7\right]+2\cdot\left[3\cdot(-2)-1\cdot 7\right]=$$

$$=(-3)\cdot[8-4]+1\cdot[24+14]+2\cdot[-6-7]=-12+38-26=0.$$

1.7. Действия с матрицами

Суммой двух матриц A и B размера $m\times n$ называется новая матрица $C=A+B$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}.$$

Пример 4. Найти сумму матриц A и B: если:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4+(-2) & 2+4 & (-3)+5 \\ 0+1 & 5+3 & 1+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A размера $m\times n$ на число λ называется новая матрица $C=\lambda\cdot A$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ik}=\lambda\cdot a_{ik}.$$

Относительно введенных действий справедливы следующие свойства:

1. Коммутативность:

$$A+B=B+A;$$
$$\lambda\cdot A=A\cdot\lambda.$$

2. Ассоциативность:

$$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right);$$
$$\left(\lambda\cdot\beta\right)\cdot A=\lambda\cdot\left(\beta\cdot A\right)=\beta\cdot\left(\lambda\cdot A\right).$$

3. Дистрибутивность:

$$\lambda\cdot\left(A+B\right)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B;$$
$$\left(\lambda+\beta\right)\cdot A=\lambda\cdot A+\beta\cdot A.$$

Пример 5. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}$. Вычислить $5\cdot A$.

Решение:

$$C=5\cdot A=5\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[5\cdot(-2)\right] & \left[5\cdot 1\right]\\ \left[5\cdot 3\right] & \left[5\cdot 6\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 5\\ 15 & 30\end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A размера $m\times p$ на матрицу B размера $p\times n$ называется новая матрица $C=A\cdot B$ размера $m\times n$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{p}a_{is}\cdot b_{sk}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{ip}\cdot b_{pk}.$$

Имеют место следующие свойства:

1. Некоммутативность:

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

2. Ассоциативность:

$$\left(A \cdot B\right) \cdot C = A \cdot \left(B \cdot C\right).$$

3. Дистрибутивность:

$$\left(A + B\right) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C\ .$$

Пример 6. Вычислить произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1\right) = \left(3 + 4 + 3\right) = \left(10\right),$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3 \cdot 1] & [3 \cdot 2] & [3 \cdot 3] \\ [2 \cdot 1] & [2 \cdot 2] & [2 \cdot 3] \\ [1 \cdot 1] & [1 \cdot 2] & [1 \cdot 3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Этот пример демонстрирует некоммутативность произведения матриц. Если в отдельных случаях имеет место $A \cdot B = B \cdot A$, то такие матрицы называются **перестановочными**.

Очевидно, что квадратная единичная матрица и любая квадратная матрица того же порядка будут перестановочными:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧАМ В ЭКОНОМИКЕ

2.1. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей. Формулы Крамера

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Для вычисления x_1 умножим первое уравнение системы на A_{11}, второе – на A_{21}, третье – на A_{31}, а затем сложим полученные равенства:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) \cdot x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) \cdot x_2 + \\ +(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) \cdot x_3 = b_{11}A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

На основании теорем о разложении определителей по строкам и столбцам получаем:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1,$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – главный определитель системы, составленный из коэффициентов системы;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – вспомогательный определитель системы, полученный путем замены первого столбца главного определителя на столбец свободных членов.

Аналогично получаются еще две формулы:

$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2,$$

$$\Delta \cdot x_3 = \Delta_3,$$

где $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ – два других вспомогательных определителя системы, полученные из главного определителя путем замены столбца при соответствующей неизвестной столбцом свободных членов.

Полученные формулы:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 &= \Delta_2, \\ \Delta \cdot x_3 &= \Delta_3 \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

называются – **формулами Крамера**.

Замечания:

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2. Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система не имеет решения.

3. Если $\Delta = 0$ и все вспомогательные определители равны нулю, то система имеет бесчисленное множество решений.

Формулы (2.1.2) остаются справедливыми в случае системы n линейных уравнений с n неизвестными.

2.2. Метод Гаусса

Существует еще один эффективный метод решения систем линейных уравнений – **метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса)**.

При решении систем линейных уравнений с любым числом уравнений и неизвестных в системе уравнений и в расширенной матрице системы **можно**:

1) переставлять местами строки;

2) если в результате других преобразований появились равные или пропорциональные строки, их можно удалить, кроме одной;

3) удалять «нулевые» строки, где все коэффициенты равны нулю;

4) любую строку умножать или делить на некоторое число;

5) к любой строке прибавлять другую строку, умноженную на некоторое число.

В результате преобразований получаем систему линейных уравнений, эквивалентную данной.

Рассмотрим суть этого метода на примере 7.

Пример 7. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных Гаусса. Найти общее, частное, базисное решения системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение: выпишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

За **базисную переменную** рекомендуется выбирать ту неизвестную, коэффициент при которой равен единице (во избежание дробных коэффициентов). Оставим без изменения третье уравнение (строку), а за базисную переменную примем x_1. Воспользуемся элементарными преобразованиями, а именно: умножим третью строку на (–1) и сложим со второй, затем умножим третью же строку на (–3) и сложим с первой. Тогда x_1 останется только в третьем уравнении (строке):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -4 & 2 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{1} & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)\cdot(-1);(-3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -1 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -1 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)\cdot(-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Оставим без изменения первую строку, переменную x_3 примем за базисную и исключим ее из третьей строки (во вторую строку x_3 не входит).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \boxed{1} & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)\cdot(-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Во второй строке переменную x_2 принимаем за базисную и исключаем из остальных строк:

$$\square \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)\cdot(-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1);(2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

В результате получаем систему с базисными переменными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Выражая базисные переменные через остальные (их называют **свободными переменными**), получим **общее решение системы**:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = -1 - x_4 + 2x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 + 2x_5. \end{cases}$$

Давая свободным переменным произвольные значения, получаем множество **частных решений**, например,

$$\begin{matrix} x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 1 + 4 = 2, \\ x_2 = -1 - 1 + 4 = 2, \\ x_3 = 3 - 3 + 4 = 4. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 1 + 2 = 2, \\ x_2 = -1 + 1 + 2 = 2, \\ x_3 = 3 + 3 + 2 = 8. \end{cases}$$

Частное решение, в котором все свободные переменные равны нулю, называют **базисным решением**:

$$\begin{matrix} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 0 + 0 = -1, \\ x_2 = -1 - 0 + 0 = -1, \\ x_3 = 3 - 0 + 0 = 3. \end{cases}$$

2.3. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Из нее можно выделить три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что система (2.3.1) эквивалентна одному матричному уравнению

$$A \cdot X = B. \tag{2.3.2}$$

Если умножить обе части этого равенства слева на некоторую матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

и подобрать эту матрицу A^{-1} так, что:

$$A^{-1} \cdot A = E, \tag{2.3.3}$$

то получим решение

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.3.4}$$

Матрица A^{-1}, удовлетворяющая условию (2.3.3), называется **обратной матрицей** для матрицы A.

Для отыскания обратной матрицы воспользуемся формулами Крамера, предполагая, что $\Delta \neq 0$.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \right),$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} \right), \quad (2.3.5)$$

$$x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} \right).$$

Легко увидеть, что формулы (2.3.4) и (2.3.5) будут совпадать только в том случае, если

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Таким образом решение системы (2.3.1) записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Из формулы (2.3.6) следует, что обратная матрица существует только в том случае, когда $\Delta \neq 0$. Если $\Delta = 0$, то обратной матрицы не существует, а исходная матрица A называется **вырожденной матрицей**.

2.4. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Метод Гаусса является поистине универсальным в решении систем линейных алгебраических уравнений. Продемонстрируем применение данного метода при вычислении обратных матриц.

Практически этот наиболее простой метод вычисления обратной матрицы состоит из следующих шагов:

1) к матрице A, по отношению к которой ищется обратная матрица, приписывается справа единичная матрица E;

2) путем преобразований методом Гаусса над строками расширенной матрицы $(A|E)$ матрица A приводится к виду единичной матрицы;

3) после окончания указанного вычислительного процесса, т.е. когда на месте исходной матрицы A будет сформирована единичная матрица, на месте приписанной справа единичной матрицы E будет находиться обратная матрица A^{-1}. Иными словами, вместо расширенной матрицы $(A|E)$ в итоге получается расширенная матрица $(E|A^{-1})$.

Правильность вычислений нетрудно проверить по определению обратной матрицы: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

2.5. Ранг матрицы и его вычисление с помощью элементарных преобразований

Рангом матрицы называется наибольший из порядков миноров, порожденных данной матрицей и отличных от нуля. Обозначается ранг матрицы A – $rang(A)$.

Если $rang(A) = r$, то это означает, что существует хотя бы один не равный нулю минор порядка r, а все миноры порядка $r+1$ и выше или равны нулю или не могут быть образованы.

Очевидно, что нахождение ранга матрицы сводится к вычислению большого количества определителей. Однако более эффективно решать эту задачу с помощью **метода элементарных преобразований** матрицы. Элементарными преобразованиями матрицы являются:

1) перестановка строк (столбцов);

2) исключение строки (столбца), состоящей целиком из нулей;

3) умножение всех элементов строки (столбца) на некоторое число, отличное от нуля;

4) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Из свойств определителей непосредственно следует, что элементарные преобразования не могут изменить ранг матрицы. Выполняя элементарные преобразования, нужно преобразовать данную матрицу в единичную матрицу так, чтобы величина ее ранга стала очевидной.

Рассмотрим суть этого метода на примере 8.

Пример 8. Вычислить ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

таким образом ранг исходной матрицы равен 4 $\left(rang\left(A\right)=4\right)$.

2.6. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

и введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица системы;

B – **расширенная матрица** системы.

Очевидно, что

$$rang\, A \leq rang\, B.$$

Теорема Кронекера-Капелли утверждает, что:

1) если $rang\, A = rang\, B = n$, то система имеет единственное решение;

2) если $rang\, A = rang\, B < n$, то система имеет бесчисленное множество решений;

3) если $rang\, A < rang\, B$, то система не имеет решений.

Пример 9. (*Прогноз выпуска продукции по запасам сырья*).

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в табл. 1. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Задачи такого рода типичны при прогнозах и оценках работы предприятий, экспертных оценках проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также в планировании экономических показателей предприятий.

Примечание: Составленную систему линейных уравнений решить с помощью обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы выполнить двумя способами: с помощью алгебраических дополнений и методом элементарных преобразований.

Таблица 1. **Характеристики производства**

Вид сырья	Расход сырья по вилам продукции, вес. ед./изм.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2700
2	5	3	1	1850
3	5	2	3	1800

Решение. Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2760, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 1900, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1850. \end{cases}$$

Чтобы найти решение системы при помощи обратной матрицы, нужно матрицу, обратную матрице из коэффициентов системы, умножить на матрицу-столбец свободных членов. В результате получится матрица-столбец, которая и будет решением данной системы.

Найдем определитель матрицы A, составленный из коэффициентов системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -23,$$

$\Delta = -23 \neq 0$, следовательно, матрица A обратима.

Первый способ нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений, вытекает из формулы, выражающей обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения для элементов данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 5) = -10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 15 = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 10) = -2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (18 - 25) = -7;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(12 - 20) = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 15) = -11;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(6 - 25) = 19;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (18 - 20) = -2.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & -11 \\ -10 & -7 & 19 \\ -5 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} & \frac{11}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{19}{23} \\ \frac{5}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}.$$

Необходимо сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}6&4&5\\5&3&1\\5&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{7}{23}&\frac{2}{23}&\frac{11}{23}\\\frac{10}{23}&\frac{7}{23}&-\frac{19}{23}\\\frac{5}{23}&-\frac{8}{23}&\frac{2}{23}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left[-\frac{42}{23}+\frac{40}{23}+\frac{25}{23}\right]&\left[\frac{12}{23}+\frac{28}{23}-\frac{40}{23}\right]&\left[\frac{66}{23}-\frac{76}{23}+\frac{10}{23}\right]\\\left[-\frac{35}{23}+\frac{30}{23}+\frac{5}{23}\right]&\left[\frac{10}{23}+\frac{21}{23}-\frac{8}{23}\right]&\left[\frac{55}{23}-\frac{57}{23}+\frac{2}{23}\right]\\\left[-\frac{35}{23}+\frac{20}{23}+\frac{15}{23}\right]&\left[\frac{10}{23}+\frac{14}{23}-\frac{24}{23}\right]&\left[\frac{55}{23}-\frac{38}{23}+\frac{6}{23}\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Находим решение системы по формуле: $X=A^{-1}\cdot B$.

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{7}{23}&\frac{2}{23}&\frac{11}{23}\\\frac{10}{23}&\frac{7}{23}&-\frac{19}{23}\\\frac{5}{23}&-\frac{8}{23}&\frac{2}{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2760\\1900\\1850\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left[-\frac{19320}{23}+\frac{3800}{23}+\frac{20350}{23}\right]\\\left[\frac{27600}{23}+\frac{13300}{23}-\frac{35150}{23}\right]\\\left[\frac{13800}{23}-\frac{15200}{23}+\frac{3700}{23}\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}210\\250\\100\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=210,\\x_2=250,\\x_3=100.\end{cases}$$

Второй способ основан на элементарных преобразованиях вспомогательной матрицы, которая получается путем приписывания к данной матрице единичной матрицы того же порядка.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-5);(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -19 & -11 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -7 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \textit{разделим на}\,(-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -19 & -11 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \cdot(-5);(19) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{23}{10} & 0 & 1 & \frac{7}{10} & -\frac{19}{10} \\ 0 & -\frac{5}{10} & 1 & 0 & -\frac{5}{10} & \frac{5}{10} \\ 1 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \cdot\left(\frac{10}{23}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{10}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{19}{23} \\ 0 & -\frac{5}{10} & 1 & 0 & -\frac{5}{10} & \frac{5}{10} \\ 1 & \frac{7}{10} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \cdot\left(\frac{5}{10}\right);\left(-\frac{7}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{10}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{19}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{2}{23} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} & \frac{11}{23} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} & \frac{11}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{23} & \frac{7}{23} & -\frac{19}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{2}{23} \end{array}\right).$$

Значения обратной матрицы, полученные вторым способом, совпадают со значениями обратной матрицы, вычисленной в первом способе.

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах):

$$x_1 = 210\,,\ x_2 = 250\,,\ x_3 = 100\,.$$

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Простейшие сведения о векторах

Выберем в пространстве две произвольные точки A и B и соединим их отрезком. Точку A назовем **началом**, точку B – **концом** отрезка. Такой направленный отрезок называется **вектором**. Обозначаются векторы:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \boldsymbol{a} .$$

Вектор, у которого начало и конец совпадают называется **нулевой** вектор или **нуль-вектор** и обозначается – $\boldsymbol{\theta}$. Его направление считается произвольным.

Длина отрезка AB называется **модулем** вектора. Модуль вектора обозначается

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \left|\vec{a}\right| = |\boldsymbol{a}| = a .$$

Вектор называется **единичным**, если $|\boldsymbol{a}| = 1$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены либо на параллельных прямых, либо на одной и той же прямой. Коллинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначаются – $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Векторы называются **компланарными**, если они параллельны одной плоскости, либо лежат в одной плоскости.

Очевидно, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеет место $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{\theta}$, а для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\theta}$ компланарны.

Существует три типа векторов:

1. Связанные векторы – начало таких векторов жестко зафиксировано (реакция опоры в механике).

2. Скользящие вектора – разрешается перемещение вдоль прямой, на которой лежит вектор (вектор силы).

3. Свободные векторы – свободное перемещение в пространстве коллинеарно самому себе с сохранением направления.

В дальнейшем мы будем рассматривать только свободные векторы.

Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются **равными**, если они имеют равные модули и одинаково направлены.

3.2. Действия с векторами

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется новый вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, который определяется по **правилу параллелограмма** или по **правилу треугольника**.

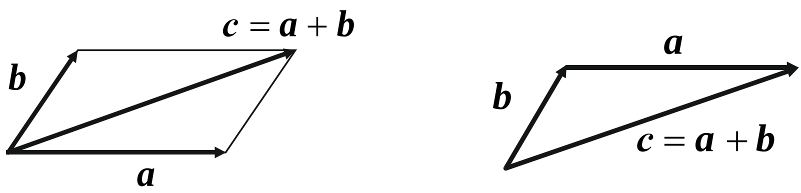


Рисунок 1 – Правило суммы векторов

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ называется новый вектор $\boldsymbol{c} = \lambda \cdot \boldsymbol{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Модуль вектора – $|\boldsymbol{c}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$.

2. Векторы коллинеарны – $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{a}$.

3. Если $\lambda > 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ сонаправлены, если $\lambda < 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ противонаправлены.

Вектор $(-1)\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$ называется **противоположным** вектором по отношению к вектору $\boldsymbol{b}$.

Очевидно, что $0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$; $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{\theta}$.

Разностью двух векторов называется выражение $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$**.**

Графически разность векторов представляет вторую диагональ правила параллелограмма.

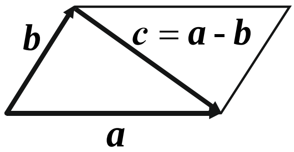


Рисунок 2 – Правило разности векторов

Относительно введенных действий сложения векторов и умножения вектора на число справедливы обычные законы алгебры:

1. Закон коммутативности:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$\lambda\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\lambda.$$

2. Закон ассоциативности:

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$

$$(\lambda\cdot\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{a}).$$

3. Закон дистрибутивности:

$$\lambda\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\lambda\cdot\boldsymbol{b},$$

$$(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\mu\cdot\boldsymbol{b}.$$

3.3. Проекция вектора на вектор, базис и координаты вектора

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется число

$$np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

Рисунок 3 – Проекция вектора на вектор

Возьмем в пространстве упорядоченную тройку взаимно ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и совместим ее с декартовой системой координат x, y, z.

Тройка векторов, в которой переход $\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{j} \to \boldsymbol{k}$ осуществляется против часовой стрелки, называется **правой** тройкой.

Тройка векторов, в которой переход $\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{j} \to \boldsymbol{k}$ осуществляется по часовой стрелке называется **левой**.

В дальнейшем мы будем рассматривать только правые тройки векторов.

Говорят, что вектора $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют **базис**.

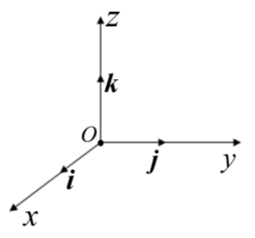


Рисунок 4 – Базис в R^3

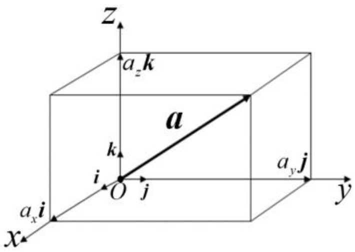


Рисунок 5 – Разложение вектора по базису

Наряду с правой тройкой векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и поместим его начало в начало координат.

Из его конца опустим перпендикуляры на три координатные плоскости и построим прямоугольный параллелепипед. Длины его сторон, расположенных на координатных осях, обозначим соответственно – a_x, a_y, a_z.

Таким образом, получаем три вектора – $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$, $a_z\boldsymbol{k}$.

Из рисунка видно, что по правилу параллелограмма вектор $\boldsymbol{a}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}\,. \qquad (3.3.1)$$

Формула (3.2.1) показывает, что, **любой** вектор может быть выражен через тройку векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Эти вектора являются основными (базисными), а остальные выражаются через них.

Числа a_x, a_y, a_z называются **координатами вектора $\boldsymbol{a}$** в заданном базисе.

Диагональ параллелепипеда (модуль вектора $\boldsymbol{a}$) равна квадратному корню из суммы квадратов трех его измерений. Таким образом, **модуль вектора** выражается через координаты формулой

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (3.3.2)$$

Обозначим углы между вектором $\boldsymbol{a}$ и векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – α, β, γ соответственно. Тогда

$$\begin{cases} a_x = a \cdot \cos\alpha, \\ a_y = a \cdot \cos\beta, \\ a_z = a \cdot \cos\gamma. \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\boldsymbol{a}$.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \qquad (3.3.4)$$

Возводя равенства (3.2.4) в квадрат и складывая, получаем **характеристическое свойство** направляющих косинусов

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (3.3.5)$$

Сумма векторов и произведение вектора на число выражаются через координаты по формулам

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) + (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) =$$
$$= (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{a} = \lambda \cdot (a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}) = (\lambda \cdot a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda \cdot a_y)\,\boldsymbol{j} + (\lambda \cdot a_z)\boldsymbol{k}.$$

Теперь можно дать новое (аналитическое) определение вектора.

Вектор – это математический объект, который в заданном базисе представляется тройкой чисел, называемых координатами вектора

$$\boldsymbol{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z),$$

при этом сложение векторов и умножение вектора на число выполняется по следующим правилам:

$$(a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x,\, a_y + b_y,\, a_z + b_z),$$
$$\lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda \cdot a_x,\, \lambda \cdot a_y,\, \lambda \cdot a_z).$$

3.4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right). \qquad (3.4.1)$$

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение равно произведению модуля одного из векторов на проекцию второго вектора на направление первого вектора:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot np_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\,.$$

2. Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\,.$$

3. Модуль вектора равен корню квадратному из **скалярного квадрата**

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\ge 0,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=0.$$

4. Коммутативность: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

5. Ассоциативность: $\lambda\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

6. Дистрибутивность: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

Доказательство:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\cdot np_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\cdot(np_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+np_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})=$$
$$=|\boldsymbol{c}|\cdot np_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\cdot np_{\boldsymbol{c}}|\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

7. Скалярные произведения векторов базиса:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

8. Выражение скалярного произведения в координатах

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z\,.$$

Доказательство:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(a_x i+a_y j+a_z k\right)\cdot\left(b_x i+b_y j+b_z k\right)=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$$

С помощью скалярного произведения можно вычислять угол между векторами

$$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\ ,$$

или через их координаты

$$\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,. \qquad (3.4.2)$$

В курсе физики работа постоянной силы $\boldsymbol{F}$, под действием которой осуществлено прямолинейное перемещение материальной точки, заданное вектором l выражается с помощью скалярного произведения:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\cdot l=\boldsymbol{F}\cdot l\cdot\cos\alpha\ .$$

3.5. Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется новый вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. Модуль вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right).$$

2. Вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

3. С вершины вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ поворот от первого сомножителя ко второму виден против часовой стрелки (векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов).

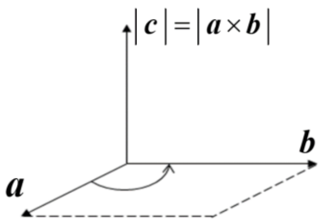


Рисунок 6 – Векторное произведение векторов

Рассмотрим простейшие свойства векторного произведения:

l. Для того, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно чтобы векторное произведение было равно нуль-вектору:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\theta} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}.$$

2. Антикоммутативность:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}).$$

3. Ассоциативность:

$$\lambda \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \cdot \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \cdot \boldsymbol{b}).$$

4. Дистрибутивность:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\,.$$

5. Векторные произведения векторов базиса:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\theta},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

6. Выражение векторного произведения через координаты:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{3.5.1}$$

Доказательство:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\right)\times\left(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}\right)=\\ =\boldsymbol{i}\cdot\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\boldsymbol{j}\cdot\left(a_zb_x-b_za_x\right)+\boldsymbol{k}\cdot\left(a_xb_y-a_yb_x\right)=\\ =\boldsymbol{i}\cdot\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.\end{gathered}$$

Из этой формулы получается условие коллинеарности векторов, заданных координатами

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\,. \tag{3.5.2}$$

3.6. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов называется число

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\,. \qquad (3.6.1)$$

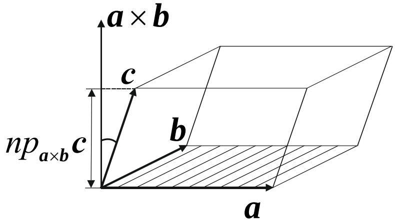


Рисунок 7 – Смешанное произведение векторов

Из рисунка видно, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ выражается соотношением:

$$V = S_{осн}\cdot h = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot np_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}).$$

Эта формула верна, если векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ образуют острый угол. Если этот угол тупой, то формула принимает вид:

$$V = S_{осн}\cdot h = -|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot np_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}).$$

Объединим эти формулы знаком абсолютной величины

$$V = |(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})|\,.$$

Таким образом, модуль смешанного произведения выражает объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах. При этом знак смешанного произведения будет положительным, если упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ является правой, и отрицательным – если левой.

Для смешанного произведения справедлива циклическая перестановка векторов:

$$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})=-(\boldsymbol{bac})=-(\boldsymbol{acb})=-(\boldsymbol{cba}).$$

Очевидно, что условие компланарности трех векторов эквивалентно равенству $V=0$:

$$(\boldsymbol{abc})=0.$$

Выражение смешанного произведения векторов через координаты имеет вид

$$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.6.2)$$

Отсюда следует **условие компланарности** трех векторов, заданных координатами

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0\ . \quad (3.6.3)$$

3.7. Аксиоматическое определение линейного векторного пространства

Рассмотренными выше свойствами векторов, касающихся операций сложения и умножения на число, обладают и другие математические объекты (числа, матрицы и т.д.). Обобщим свойства сложения векторов и умножения векторов на действительные числа на произвольные абстрактные объекты неизвестной природы. Свойства обычных векторов мы получали в качестве геометрических теорем. Для абстрактных объектов такой возможности нет, поэтому поступим наоборот – получаемые ранее свойства объявим новыми аксиомами.

Рассмотрим некоторое множество L, составленное из элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, которые мы, по-прежнему, условимся называть векторами.

Множество L называется **линейным векторным пространством (ЛВП)**, если выполняются следующие три группы аксиом.

I. Любым векторам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ сопоставлен вектор $\boldsymbol{z} \in L$, называемый **суммой векторов** $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, обозначаемый $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ и при этом имеют место следующие **аксиомы сложения**.

1. Коммутативность:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.$$

2. Ассоциативность:

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}).$$

3. Существование нулевого вектора:

$$\exists \boldsymbol{\theta} \in L : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{x}, \quad (\forall \boldsymbol{x} \in L).$$

4. Существование **противоположного** вектора:

$$\forall \boldsymbol{x} \in L \ \exists \ \boldsymbol{y} \in L : \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}.$$

II. Для любого $\boldsymbol{x} \in L$ и любого $\lambda \in R$ определено произведение $\lambda \cdot \boldsymbol{x}$ вектора на число, при этом выполняются следующие **аксиомы умножения** на число.

1. Умножение на единицу:

$$1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \ (\forall \, \boldsymbol{x} \in L).$$

2. Ассоциативность:

$$\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}) = \left(\lambda_1 \cdot \lambda_2\right) \cdot \boldsymbol{x}, \ \left(\forall \boldsymbol{x} \in L, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R\right).$$

Следует отметить, что произведения в левой и правой частях могут в общем случае определяться по-разному.

III. Относительно указанных действий имеют место две **аксиомы дистрибутивности**.

1. $\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{x} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}$. Следует отметить, что знаки сложения в левой и правой части равенства могут иметь разный смысл.

2. $\lambda \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y}$.

3.8. Примеры линейных векторных пространств

1. Пусть $L = R$. Тогда введенные аксиомы выражают обычные законы арифметики.

2. Пусть $L = R^3$ – множество всех векторов в пространстве. Тогда имеем обычные соотношения для векторов

$$\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in L, \ \boldsymbol{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in L, \ (\xi_i, \eta_i \in R);$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\xi_1 + \eta_1, \ \xi_2 + \eta_2, \ \xi_3 + \eta_3) \in L$$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (\lambda \cdot \xi_1, \lambda \cdot \xi_2, \lambda \cdot \xi_3) \in L, \ \boldsymbol{\theta} = (0,0,0).$$

3. Пусть $L = R^n$ – множество векторов в пространстве R^n. Тогда

$$\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n,$$

$$\boldsymbol{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in R^n.$$

По аналогии с пространством R^3 введем сумму векторов и произведение вектора на число

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\xi_1 + \eta_1, \ \xi_2 + \eta_2, \ldots, \ \xi_n + \eta_n),$$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (\lambda \cdot \xi_1,\ \lambda \cdot \xi_2,\ \ldots,\ \lambda \cdot \xi_n)\,.$$

Роль нулевого элемента играет вектор $\boldsymbol{\theta} = (0,\ 0,\ ...,0)$. Легко увидеть, что все аксиомы ЛВП выполняются и R^n – линейное пространство.

4. Пусть $L = C_{[a,b]}$ – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Элементами множества L являются функции $\boldsymbol{x} = x(t),\ \boldsymbol{y} = y(t),\ \boldsymbol{z} = z(t), \ldots$. Известно, что сумма непрерывных функций есть непрерывная функция, а произведение непрерывной функции на любое число тоже даёт непрерывную функцию. Все приведенные выше аксиомы соответствуют обычным законам арифметики для ординат. Роль нулевого элемента выполняет функция $\boldsymbol{\theta} = \theta(t) \equiv 0$.

5. Пусть $L = R^+$ – множество положительных чисел. Сумму элементов в L определим как произведение действительных чисел $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = x \cdot y$, а произведение вектора $\boldsymbol{x} \in L$ на число $\lambda \in R$ как $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = x^{\lambda}$. Все аксиомы ЛВП выполняются. Роль нулевого вектора играет единица, а роль противоположного для $\boldsymbol{x}$ элемента принадлежит числу $\dfrac{1}{x}$.

3.9. Линейная независимость системы векторов

Рассмотрим систему векторов $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2, \ldots,\ \boldsymbol{x}_n \in L$. Выражение

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \boldsymbol{x}_i\ ,\ (\lambda_i \in R) \qquad (3.9.1)$$

называется **линейной комбинацией** системы векторов ЛВП.

Векторы $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\theta}\ \ \boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{\theta}$$

выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. В противном случае, когда хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля, система векторов называется **линейно зависимой**.

Теорема 1. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то эта система векторов линейно зависима.

Доказательство: Рассмотрим систему векторов $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,$ $\boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{\theta}$. Тогда линейная комбинация

$$0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots 0 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} + 1 \cdot \boldsymbol{\theta}$$

будет равна нулевому вектору при значении $\lambda = 1 \neq 0$ что и доказывает теорему.

Теорема 2. Для того чтобы система векторов была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

1. Необходимость.

Пусть $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ – линейно зависимая система векторов и надо показать, что один из векторов является линейной комбинацией остальных. Согласно условию $\lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{\theta}$ не при всех λ_i равных нулю одновременно. Допустим, что $\lambda_n \neq 0$. Тогда после прибавления к обеим частям равенства $\left(-\lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 - \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 - \ldots - \lambda_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1}\right)$ и умножения равенства на $\dfrac{1}{\lambda_n}$ получим:

$$\boldsymbol{x}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{x}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{x}_{n-1}.$$

2.Достаточность.

Теперь один из векторов является линейной комбинацией остальных и нужно показать, что $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ – линейно зависимая система векторов. Согласно условию $\boldsymbol{x}_n = a_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1}$. Тогда после прибавления к обеим частям равенства $(-1)\cdot \boldsymbol{x}_n$, получим

$$a_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} + (-1)\cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{\theta} \Rightarrow a_n = -1 \neq 0.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 3. Для линейной зависимости векторов

$$\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ \boldsymbol{y} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),\ \boldsymbol{z} = (\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3)$$

в пространстве R^3 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \varsigma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.9.2}$$

Доказательство:

Для доказательства отметим, что это равенство выражает условие компланарности трех векторов в пространстве R^3, равносильное условию их линейной зависимости.

Теорема 4. Для линейной зависимости векторов

$$\boldsymbol{x}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}),\ i = \overline{1,n}$$

в пространстве R^n необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3.9.3)$$

Доказательство:

Для доказательства запишем условие линейной зависимости векторов в координатной форме

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}) = (0,0,\ldots,0)$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_{i1}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_{in} \right) = (0,0,\ldots,0) \ .$$

Сравнивая координаты векторов в левой и правой части равенства, получаем однородную систему n алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \cdots + \lambda_n \xi_{n1} = 0, \\ \lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{22} + \cdots + \lambda_n \xi_{n2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 \xi_{1n} + \lambda_2 \xi_{2n} + \cdots + \lambda_n \xi_{nn} = 0. \end{cases}$$

Эта система по теореме Кронекера-Капелли имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда её главный определитель равен нулю. Что и требовалось доказать.

Теорема 5. Для того чтобы функции $x_i(t) \in C^{n-1}_{[a,b]}$, $i = \overline{1,n}$ были линейно зависимы, необходимо выполнения условия

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (3.9.4)$$

Определитель $W(t)$ называется определителем Вронского (**вронскиан**). Следует отметить, что теорема формулирует лишь необходимое, но не достаточное условие линейной зависимости системы функций.

Доказательство:

Для доказательства теоремы запишем условие линейной зависимости функций

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \ldots + \lambda_n x_n(t) = 0 \, , \left(\exists \lambda_i \neq 0\right) .$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим однородную систему уравнений относительно λ_i

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + \ldots + \lambda_n x_n(t) = 0 \, , \\ \lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) + ... + \lambda_n x_n'(t) = 0 \, , \\ \lambda_1 x_1''(t) + \lambda_2 x_2''(t) + ... + \lambda_n x_n''(t) = 0 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x_1^{(n-1)}(t) + \lambda_2 x_2^{(n-1)}(t) + ... + \lambda_n x_n^{(n-1)}(t) = 0. \end{cases}$$

По теореме Кронекера-Капелли эта система имеет ненулевые решения в том случае, если главный определитель системы $W(t) = 0$. Что и требовалось доказать.

3.10. Базис и размерность линейного пространства

В пространстве R^3 понятия базиса и разложение в нем вектора были введены из геометрических соображений. В линейном векторном пространстве таких соображений нет, поэтому здесь приходится вводить аналогичные понятия аналитическими методами.

Упорядоченная система n линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ называется **базисом** в линейном пространстве L, если любой вектор $\boldsymbol{x} \in L$ является их линейной комбинацией

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\xi_2\cdot\boldsymbol{e}_2+\ldots+\xi_n\cdot\boldsymbol{e}_n. \qquad (3.10.1)$$

Это выражение называют разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису, числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называют **координатами** вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а сам вектор кратко обозначают

$$\boldsymbol{x}=\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right). \qquad (3.1.2)$$

Таким образом, при наличии базиса произвольное линейное пространство может рассматриваться как n-мерное пространство R^n.

Теорема 1. Координаты вектора в заданном базисе единственны.

Доказательство:

Для доказательства предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ имеет два различных разложения

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\xi_2\cdot\boldsymbol{e}_2+\ldots+\xi_n\cdot\boldsymbol{e}_n=\eta_1\cdot\boldsymbol{e}_1+\eta_2\cdot\boldsymbol{e}_2+\ldots+\eta_n\cdot\boldsymbol{e}_n.$$

Тогда

$$\left(\xi_1-\eta_1\right)\cdot\boldsymbol{e}_1+\left(\xi_2-\eta_2\right)\cdot\boldsymbol{e}_2+\ldots+\left(\xi_n-\eta_n\right)\cdot\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{\theta}.$$

В силу линейной независимости базисных векторов, получаем

$$\xi_i-\eta_i=0\text{ , }(\forall i=\overline{1,n})$$

или

$$\xi_i=\eta_i\text{ ,}$$

что и требовалось доказать.

Примеры базисов в ЛВП

1. Базисом в пространстве R^3 является система векторов

$$\boldsymbol{i} = (1,\ 0,\ 0),$$
$$\boldsymbol{j} = (0,\ 1,\ 0),$$
$$\boldsymbol{k} = (0,\ 0,\ 1).$$

2. В пространстве R^n можно образовать аналогичный базис

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),$$
$$\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\boldsymbol{e}_n = (0,0,0,\ldots,1).$$

Существуют и другие варианты выбора базиса в пространстве R^n, например

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$\boldsymbol{e}_2 = (1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\boldsymbol{e}_n = (1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1).$$

3. В линейном векторном пространстве $C^n_{[a,b]}$ в качестве векторов базиса можно взять систему функций $\left(1,\ t,\ t^2,\ldots,\ t^n\right)$. Легко показать, что при любом n эта система линейно независима, $\left(W(t) \neq 0\right)$. Число векторов базиса бесконечно.

Размерностью линейного пространства L называется такое натуральное число $n \in N$, что в L существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов являются линейно зависимыми.

Таким образом, размерность пространства – это максимальное число линейно независимых векторов в этом пространстве.

Понятия базиса и размерности связаны между собой следующими теоремами.

Теорема 2. В линейном пространстве L размерности n существует базис, содержащий ровно n векторов.

Доказательство:

Согласно определению размерности в L существует n линейно независимых векторов – $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и для любого вектора $\boldsymbol{x} \in L$ система векторов – $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x}$ является линейно зависимой

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{e}_n + \lambda \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta},$$

причём $\lambda \neq 0$, в противном случае векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x}$ были бы линейно независимы.

Выразим отсюда вектор $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\boldsymbol{e}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\boldsymbol{e}_n.$$

Таким образом, произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, которые можно считать базисными векторами.

Очевидно, что в качестве базиса в n-мерном пространстве можно взять произвольную систему, состоящую из n линейно независимых векторов.

Теорема 3. Если в линейном пространстве L существует базис, то размерность L равна числу базисных векторов.

Доказательство: (Можно на лекции не доказывать.)

Пусть в пространстве L задан базис – $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Следовательно размерность L – не менее, чем n. Для доказательства нужно установить линейную зависимость любых $n+1$ векторов. Обозначим их – $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1} \in L$.

Представим векторы $\boldsymbol{x}_i$ в координатной форме

$$\boldsymbol{x}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Рассмотрим условие

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{\theta} \qquad (3.10.3)$$

или

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{x}_n = -\lambda_{n+1} \cdot \boldsymbol{x}_{n+1}.$$

В координатной форме это соотношение сводится к системе n линейных уравнений относительно λ_i

$$\begin{cases} \lambda_1\xi_{11} + \lambda_2\xi_{21} + \ldots + \lambda_n\xi_{n1} = -\lambda_{n+1}\xi_{(n+1)1}, \\ \lambda_1\xi_{12} + \lambda_2\xi_{22} + \ldots + \lambda_n\xi_{n2} = -\lambda_{n+1}\xi_{(n+1)2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1\xi_{1n} + \lambda_2\xi_{2n} + \ldots + \lambda_n\xi_{nn} = -\lambda_{n+1}\xi_{(n+1)n}. \end{cases} \qquad (3.10.4)$$

Главный определитель системы (3.10.4) отличен от нуля (в противном случае векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ были бы линейно зависимы, а теорема очевидна).

Формулы Крамера

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n},$$

при любом $\lambda_{n+1} \neq 0$ показывают, что в условии (3.10.3) не все λ_i равны нулю и, следовательно, любые векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ являются линейно зависимыми. Что и требовалось доказать.

3.11. Аксиоматическое определение скалярного произведения

В пространстве R^3 скалярное произведение было введено с помощью понятий модуля вектора и угла между векторами

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right).$$

В абстрактном линейном векторном пространстве L нет понятий модуля вектора и угла между векторами. Поэтому ввести понятие скалярного произведения можно только аксиоматически, сохраняя при этом основные особенности скалярного произведения пространства R^3.

Пусть каждой паре векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ по некоторому правилу поставлено действительное число – $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и при этом выполняются следующие аксиомы.

1. Аксиома коммутативности:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

2. Аксиома ассоциативности:

$$(\lambda \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

3. Аксиома дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}).$$

4. Аксиома неотрицательности:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0,$$

причём $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

Тогда величина (x, y) называется **скалярным произведением** векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Примеры скалярных произведений в ЛВП

1. В пространстве $L = R^3$ скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3. \qquad (3.11.1)$$

Аксиомы выполняются автоматически.

2. В пространстве $L = R^n$ скалярное произведение можно определить с помощью аналогичной формулы

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \ . \qquad (3.11.2)$$

Выполнение аксиом здесь очевидно.

3. Скалярное произведение в $C_{[a,b]}$ можно ввести с помощью определенного интеграла

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \qquad (3.11.3)$$

Легко увидеть, что и здесь все аксиомы скалярного произведения остаются справедливыми.

3.12. Евклидово пространство

Линейное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, называется **евклидовым пространством**.

В скалярное произведение в евклидовом пространстве E позволяет ввести в нем метрические соотношения, характерные для геометрического пространства R^3.

Величина

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

называется **модулем** или длиной вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве. Очевидно, что $|\boldsymbol{x}| \geq 0$, причем $|\boldsymbol{x}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

Если $|\boldsymbol{x}| = 1$, то вектор $\boldsymbol{x}$ называется **нормированным** или единичным вектором. При этом всякий ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ можно нормировать – поставить ему в соответствие единичный вектор $\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$.

В пространстве R^3 справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$\left|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right| \le |\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|, \qquad (3.12.1)$$

которое основано на известном неравенстве $\left|\cos\left(\boldsymbol{x}\hat{,}\boldsymbol{y}\right)\right| \le 1$.

Покажем, что это неравенство остается справедливым для произвольного евклидова пространства.

Рассмотрим скалярный квадрат

$$(\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \ge 0,$$

$$\lambda^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - 2\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \ge 0.$$

Вычислим дискриминант:

$$D = 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 - 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \le 0.$$

Таким образом

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \le |\boldsymbol{x}|^2\cdot|\boldsymbol{y}|^2$$

или окончательно

$$\left|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right| \le |\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|,$$

что и требовалось доказать.

В пространстве R^n неравенство Коши-Буняковского принимает вид:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2}, \qquad (3.12.2)$$

где $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

В пространстве $C_{[a,b]}$ неравенство Коши-Буняковского принимает вид:

$$\left|\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt\int_a^b y^2(t)\,dt}, \qquad (3.12.3)$$

где $\boldsymbol{x} = x(t),\ \boldsymbol{y} = y(t)$.

Неравенство Коши-Буняковского позволяет ввести понятие угла между векторами в абстрактном евклидовом пространстве

$$\cos\left(\boldsymbol{x} \hat{,} \boldsymbol{y}\right) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\,\boldsymbol{x}\,| \cdot |\,\boldsymbol{y}\,|} . \qquad (3.12.4)$$

При этом будет выполнятся обычное неравенство – $\left|\cos\left(\boldsymbol{x} \hat{,} \boldsymbol{y}\right)\right| \le 1$.

Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются **ортогональными** тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Теорема 1. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Доказательство:

$$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Теорема 2. Взаимно ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.

Доказательство:

Рассмотрим систему взаимно ортогональных векторов $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2, \ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ – $\boldsymbol{x}_i \perp \boldsymbol{x}_k$, $(i \ne k)$.

Умножим соотношение

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{\theta}$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{x}_i$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n,\ \boldsymbol{x}_i) = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}_i).$$

В силу взаимной ортогональности от этого произведения останется только скалярный квадрат

$$\lambda_i\left(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_i\right)=0.$$

Таким образом, все коэффициенты $\lambda_i=0$ и система векторов $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ldots,\ \boldsymbol{x}_n$ – линейно независима. Что и требовалось доказать.

Доказанное свойство означает, что в пространстве R^n всякая система из n ортогональных векторов образует базис.

Теорема 3. (Теорема Пифагора). Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны, то

$$|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2.$$

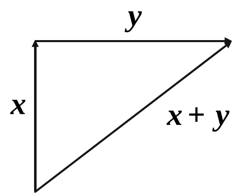


Рисунок 8 – Теорема Пифагора

Доказательство:

По условию теоремы имеем: $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0$. Вычислим

$$|\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\ |^2=\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)+2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\right)=|\ \boldsymbol{x}\ |^2+|\ \boldsymbol{y}\ |^2.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 4. В евклидовом пространстве справедливы неравенства треугольника

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\le|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|,$$

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\ge\big||\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}|\big|.$$

Доказательство: Возведем в квадрат левую часть первого неравенства

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+|\boldsymbol{y}|^2\le|\boldsymbol{x}|^2+2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|+|\boldsymbol{y}|^2\le$$
$$\le|\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2=(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2$$

или

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2\le(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2.$$

Извлекая квадратный корень, получим первое неравенство треугольника. Что и требовалось доказать.

Второе неравенство треугольника доказать самостоятельно.

В n-мерном евклидовом пространстве можно ввести так называемый **ортонормированный** базис – $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, i=k\\ 0, i\ne k\end{cases},$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Координаты вектора

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\xi_n\boldsymbol{e}_n$$

в ортонормированном базисе называются **коэффициентами Фурье** и выражаются с помощью скалярного произведения

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)=(\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\xi_n\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_i)\Rightarrow(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)=\xi_i.$$

Таким образом

$$\xi_i=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i). \tag{3.12.5}$$

В ортонормированном базисе скалярное произведение записывается обычным образом

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=(\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\xi_n\boldsymbol{e}_n,\ \eta_1\boldsymbol{e}_1+\eta_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\eta_n\boldsymbol{e}_n)=\\&=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n.\end{aligned} \tag{3.12.6}$$

Для не ортонормированного базиса формула вычисления скалярного произведения (3.12.6) может существенно усложниться.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Плоскость и гиперплоскость

Рассмотрим в пространстве R^3 декартову систему координат. Каждой точке этого пространства $M(x,y,z)$ можно поставить в соответствие радиус-вектор $r = (x,y,z)$, начало которого всегда находится в начале координат $O(x,y,z)$. Положение любой плоскости в пространстве однозначно определяется единичным вектором $\boldsymbol{n}$, перпендикулярным плоскости и расстоянием p от точки O до плоскости.

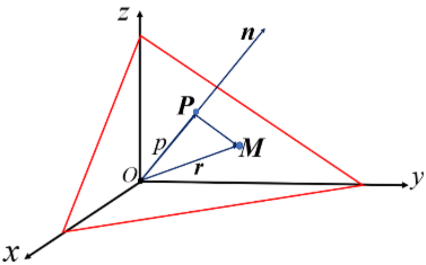


Рисунок 9 – Плоскость в R^3

Обозначим:

$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r} = (x,y,z)$,

$\overrightarrow{OP} = p \cdot \boldsymbol{n}$,

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM}$,

$\overrightarrow{PM} = \boldsymbol{r} - p \cdot \boldsymbol{n}$.

Точка M будет лежать на заданной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{OP}$ будут ортогональны и их скалярное произведение будет равно нулю

$$(\boldsymbol{r} - p \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

или

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} - p = 0. \tag{4.1.1}$$

Соотношение (4.1.1) называется **векторным уравнением** плоскости.

Подставляя в уравнение (4.1.1) координаты векторов

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z), \quad \boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

получаем **нормальное уравнение** плоскости

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0. \tag{4.1.2}$$

Уравнение (4.1.2) представляет собой линейное уравнение относительно трех переменных.

Линейное уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4.1.3}$$

называется **общим уравнением** плоскости. Его легко свести к уравнению (4.2.2) умножением на коэффициент μ

$$\mu Ax+\mu By+\mu Cz+\mu D=0\ .$$

Коэффициент μ подбирается так, чтобы получилось уравнение вида (4.1.2)

$$\mu A=\cos\alpha, \quad \mu B=\cos\beta, \quad \mu C=\cos\gamma, \quad \mu D=-p.$$

Характеристическое свойство направляющих косинусов дает

$$\mu^2A^2+\mu^2B^2+\mu^2C^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

или

$$\mu^2(A^2+B^2+C^2)=1.$$

Таким образом

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.1.4}$$

Поскольку расстояние $p\geq 0$ и, соответственно, величина $\mu D\leq 0$, то знак коэффициента μ выбирают противоположным знаку коэффициента D. Коэффициент μ называется – **нормирующий множитель**.

Коэффициенты уравнения (4.1.3) образуют вектор

$$\boldsymbol{N} = \left(A, B, C\right). \tag{4.1.5}$$

Вектор $\boldsymbol{N} = \mu \boldsymbol{n},\ \left(\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{n}\right)$ перпендикулярен рассматриваемой плоскости и называется **главным вектором** плоскости.

Пример 10. Рассмотрим общее уравнение плоскости $2x - y - 2z + 9 = 0$.

Главный вектор плоскости – $\boldsymbol{N} = \left(2, -1, -2\right)$.

Вычислим нормирующий множитель: $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{4+1+4}} = -\dfrac{1}{3}$.

Определим направляющие косинусы и расстояние p :

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3},\quad \cos\beta = \frac{1}{3},\quad \cos\gamma = \frac{2}{3},\ \ p = 3 .$$

Запишем нормальное уравнение плоскости:

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 3 = 0 .$$

Рассмотрим частные случаи расположения плоскости относительно системы координат.

1. $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат.

2. $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0,\ \boldsymbol{N} = \left(0, B, C\right)$ – перпендикулярен оси Ox , плоскость параллельна оси Ox .

3. $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0,\ \boldsymbol{N} = \left(A, 0, C\right)$ – перпендикулярен оси Oy , плоскость параллельна оси Oy .

4. $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0,\ \mathbf{N}=(A,B,0)$ – перпендикулярен оси Oz, плоскость параллельна оси Oz.

5. $A=0,\ D=0 \Rightarrow By+Cz=0$ – плоскость проходит через ось Ox.

6. $B=0,\ D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0$ – плоскость проходит через ось Oy.

7. $C=0,\ D=0 \Rightarrow Ax+By=0$ – плоскость проходит через ось Oz.

8. $A=0,\ B=0 \Rightarrow Cz+D=0$ – плоскость перпендикулярна оси Oz.

9. $A=0,\ C=0 \Rightarrow By+D=0$ – плоскость перпендикулярна оси Oy.

10. $B=0,\ C=0 \Rightarrow Ax+D=0$ – плоскость перпендикулярна оси Ox.

Если плоскость проходит через заданную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то уравнение такой плоскости имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4.1.6)$$

Такое уравнение иногда называют уравнением связки плоскостей.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_i(x_i,y_i,z_i),\ i=\overline{1,3}$, получается из условия компланарности трех векторов

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$$

и записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.1.7)$$

Полученные результаты можно обобщить на пространство с произвольным числом измерений – $\boldsymbol{R}^n$.

Так общим уравнением гиперплоскости называют уравнение

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + B = 0. \qquad (4.1.8)$$

Его главным вектором является вектор

$$\boldsymbol{N} = \left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right). \qquad (4.1.9)$$

Нормирующий множитель имеет вид

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2}}, \quad \mu B \le 0. \qquad (4.1.10)$$

Направляющие косинусы и величина p вычисляются по формулам

$$\cos\alpha_i = \mu A_i\ ,\ p = -\mu B\ . \qquad (4.1.11)$$

Нормальное уравнение гиперплоскости принимает вид

$$x_1\cos\alpha_1 + x_2\cos\alpha_2 + \ldots + x_n\cos\alpha_n - p = 0\ . \qquad (4.1.12)$$

Векторное уравнение гиперплоскости записывается также, как уравнение обычной плоскости

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} - p = 0,$$

где $\boldsymbol{r} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ – радиус-вектор;

$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ – нормированный (единичный) вектор ортогональный к гиперплоскости.

Очевидно, что гиперплоскость в пространстве R^n тоже является пространством и имеет размерность $n-1$.

4.2. Прямая линия

Прямая линия в пространстве R^3 однозначно определяется точкой $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, через которую проходит и вектором $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$, которому она коллинеарна. Из рисунка видно, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ коллинеарны и отличаются числовым множителем t.

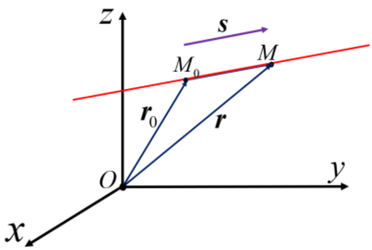


Рисунок 10 – Прямая в R^3

Векторный треугольник OM_0M дает:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M},$$

$$\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0),$$

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z).$$

Таким образом, $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 \parallel \mathrm{s} \Rightarrow \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\cdot\boldsymbol{s}$ и **векторное уравнение** прямой принимают вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\cdot\boldsymbol{s}. \tag{4.2.1}$$

Запишем векторное уравнение (4.2.1) в координатах

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Система (4.2.2) называется – **параметрические уравнения** прямой линии.

Исключив из уравнений (4.2.2) параметр t, получим **канонические уравнения** прямой линии

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{4.2.3}$$

Соотношения (4.2.3) представляют собой три уравнения. Если какое-либо из чисел m, n, p окажется равным нулю (например, $m=0$), это будет означать, что соответствующий числитель тоже равен нулю (в нашем случае $x-x_0=0$).

Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то уравнением такой прямой будут соотношения

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4.2.4}$$

Если прямая (4.2.3) и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ перпендикулярны, то их коэффициенты удовлетворяют условию

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{4.2.5}$$

Если прямая (4.2.3) и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ параллельны, то их коэффициенты удовлетворяют условию

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{4.2.6}$$

Если прямая (4.2.3) и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ пересекаются, то их координаты точки пересечения находятся по формулам

$$\begin{cases} x^*=x_0+mt^*, \\ y^*=y_0+nt^*, \\ z^*=z_0+pt^*, \end{cases} \tag{4.2.7}$$

$$t^*=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

В пространстве R^n векторное уравнение прямой имеет тот же вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{s}, \qquad (4.2.8)$$

где $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, $\boldsymbol{s} = (m_1, m_2, ..., m_n)$.

Параметрические уравнения прямой записываются

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + tm_1, \\ x_2 = x_{02} + tm_2, \\ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ x_n = x_{0n} + tm_n. \end{cases} \qquad (4.2.9)$$

Исключение параметра t дает канонические уравнения прямой

$$\frac{x_1 - x_{01}}{m_1} = \frac{x_2 - x_{02}}{m_2} = \ldots = \frac{x_n - x_{0n}}{m_n}. \qquad (4.2.10)$$

Из элементарной геометрии известно, что прямая линия является пересечением двух плоскостей. Поэтому система уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (4.2.11)$$

тоже представляет некоторую прямую в пространстве. Система (4.2.11) называется – **общие уравнения прямой**.

5. ОПЕРАТОРЫ

5.1. Линейные операторы

Рассмотрим два множества X и Y. Если задан закон, согласно которому всякому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, то этот закон называется **отображением** множества X на множество Y. Обозначается **отображение**

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ либо } y = f(x)$$

и представляет собой самый общий случай функциональной зависимости. Здесь f – символ отображения.

Если множество $L = X$ и множество $L' = Y$ являются линейными векторными пространствами, то их отображение называется **оператором**. Обозначается **оператор**

$$L \xrightarrow{A} L' \text{ либо } \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

Оператор A называется линейным оператором, если выполнены следующие условия:

1. Аддитивность

$$A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}x_2, \left(\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L\right). \qquad (5.1.1)$$

2. Однородность

$$A(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x}, \quad (\forall \boldsymbol{x} \in L, \ \lambda \in R). \qquad (5.1.2)$$

При $\lambda = 0$ условие (5.1.2) показывает, что линейный оператор $L \xrightarrow{A} L'$ переводит нулевой вектор пространства L в нулевой вектор пространства L'.

Соотношения (5.1.1) и (5.1.2) легко обобщить на произвольное число слагаемых

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, A\boldsymbol{x}_i \ . \tag{5.1.3}$$

5.2. Матрица линейного оператора в заданном базисе

Выясним механизм действия на векторы линейного оператора $L \xrightarrow{A} L'$. Предположим сначала, что $L = L' = R^2$ и обозначим вектора базиса в R^2 – $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Пусть два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{x} \in R^2, \ \ \boldsymbol{y} \in R^2 . \tag{5.2.1}$$

Обозначим разложения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в заданном базисе

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2 , \\ \boldsymbol{y} &= \eta_1 \boldsymbol{e}_1 + \eta_2 \boldsymbol{e}_2 . \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Установим связь между координатами векторов η_i и ξ_i.

Подставим формулы (5.2.2) в оператор (5.2.1)

$$\boldsymbol{y} = A\left(\xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2\right) = \xi_1 \, A\boldsymbol{e}_1 + \xi_2 A\boldsymbol{e}_2 . \tag{5.2.3}$$

Разложим вектора $A\boldsymbol{e}_1, \, A\boldsymbol{e}_2 \in R^2$ по векторам базиса $\boldsymbol{e}_1, \, \boldsymbol{e}_2$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e}_1 &= a_{11} \boldsymbol{e}_1 + a_{21} \boldsymbol{e}_2 , \\ A\boldsymbol{e}_2 &= a_{12} \boldsymbol{e}_1 + a_{22} \boldsymbol{e}_2 . \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Подставляя формулы (5.2.4) в соотношения (5.2.3), находим

$$\boldsymbol{y}=\eta_1\boldsymbol{e}_1+\eta_2\boldsymbol{e}_2=\xi_1\left(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2\right)+\xi_2\left(a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2\right)=$$
$$=\left(a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2\right)\boldsymbol{e}_1+\left(a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2\right)\boldsymbol{e}_2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получаем систему

$$\begin{cases}\eta_1=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2,\\ \eta_2=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2.\end{cases} \tag{5.2.5}$$

Система (5.2.5) равносильна матричному уравнению

$$Y=AX\,, \tag{5.2.6}$$

где

$$Y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}. \tag{5.2.7}$$

Таким образом, механизм действия линейного оператора $R^2\xrightarrow{A}R^2$ однозначно определяется матрицей линейного оператора в заданном базисе A.

Рассмотрим теперь оператор $R^n\xrightarrow{A}R^n$. Выберем в пространстве R^n базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ и в этом базисе установим связь между координатами векторов

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+...+\xi_n\boldsymbol{e}_n\,,\\ \boldsymbol{y}&=\eta_1\boldsymbol{e}_1+\eta_2\boldsymbol{e}_2+...+\eta_n\boldsymbol{e}_n\,.\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Подстановка формул (5.2.8) в оператор $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{y}=A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,A\boldsymbol{e}_i\,, \tag{5.2.9}$$

и разложение векторов $A\boldsymbol{e}_i$ по векторам базиса

$$A\boldsymbol{e}_i = \sum_{s=1}^{n} a_{si}\,\boldsymbol{e}_s\ , \tag{5.2.10}$$

приводит к системе

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n\,, \\ \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\,. \end{cases} \tag{5.2.11}$$

Система (5.2.11) равносильна матричному уравнению

$$Y = AX\ ,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{5.2.12}$$

Таким образом и в этом общем случае механизм действия линейного оператора $R^n \xrightarrow{A} R^n$ однозначно определяется матрицей линейного оператора в заданном базисе A.

5.3. Простейшие разновидности операторов

Нулевой оператор

Оператор, преобразующий любой вектор линейного векторного пространства в нулевой вектор, называется **нулевым** оператором

$$O\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}\,. \tag{5.3.1}$$

Матрицей такого оператора будет нулевая матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тождественный оператор

Оператор, преобразующий любой вектор линейного векторного пространства в самого себя, называется **тождественным** оператором

$$E\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,. \tag{5.3.2}$$

Матрицей такого оператора будет единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор проектирования

Оператор, преобразующий любой вектор $\boldsymbol{x} = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)$ линейного векторного пространства в вектор $\boldsymbol{y} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$, 0, 0, ..., 0) $\left(m < n\right)$, называется оператором **проектирования**

$$\boldsymbol{y} = P\,\boldsymbol{x}\,. \tag{5.3.3}$$

Матрицей такого оператора будет матрица вида

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор гомотетии (подобия)

Оператор, преобразующий любой вектор $\boldsymbol{x}$ линейного векторного пространства в вектор $\lambda\boldsymbol{x}$, называется оператором **гомотетии (подобия)**.

$$H\,\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad (\lambda \in R). \qquad (5.3.4)$$

Матрицей такого оператора будет матрица вида

$$H = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

5.4. Действия с операторами

Рассмотрим два оператора $L \xrightarrow{A} L$ и $L \xrightarrow{B} L$, отображающих линейное пространство само на себя.

Равенство операторов

Операторы $L \xrightarrow{A} L$ и $L \xrightarrow{B} L$ считаются **равными**, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in L$ имеет место

$$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}. \qquad (5.4.1)$$

Сложение операторов

Суммой операторов A и B называется оператор $C = A + B$, определяемый равенством

$$(A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}, \quad (\forall\boldsymbol{x} \in L). \qquad (5.4.2)$$

Очевидно, что оператор $C = A + B$ является линейным и матрица суммы линейных операторов равна сумме матриц слагаемых.

Умножение оператора на число

Произведением оператора A на число $\lambda \in R$ называется оператор $C = \lambda A$, определяемый равенством

$$(\lambda A)\boldsymbol{x} = \lambda(A\boldsymbol{x}). \tag{5.4.3}$$

Очевидно, что оператор $C = \lambda A$ является линейным и матрица произведения оператора на число равна произведению матрицы исходного оператора на это число.

Произведение операторов

Произведением оператора A на оператор B называется оператор $C = AB$, определяемый равенством

$$(AB)\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x}). \tag{5.4.4}$$

Можно показать, что оператор $C = AB$ является линейным и матрица произведения операторов равна произведению соответствующих матриц исходных операторов. Умножать можно только такие операторы, которые допускают перемножение своих матриц.

Произведение операторов подчиняется тем же законам, что и произведение матриц.

1. Некоммутативность:

$$AB \neq BA.$$

2. Ассоциативность:

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B.$$

3. Дистрибутивность:

$$(A+B)C = AC + BC,$$

$$A(B+C) = AB + AC.$$

5.5. Сопряженный оператор, сопряженная матрица

Рассмотрим линейный оператор $E \xrightarrow{A} E$, отображающий евклидово пространство само на себя. Оператор A^* называется **сопряженным** по отношению к исходному если для любых двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеет место равенство

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}). \tag{5.5.1}$$

Выясним как связаны матрицы сопряженных операторов в n-мерном евклидовом пространстве.

Выберем в этом пространстве ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n,$ так, что $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{ik}$. Элементы матрицы оператора A обозначим – a_{ik}, а элементы матрицы сопряженного оператора A^* обозначим – a^*_{ik}. Тогда

$$A\boldsymbol{e}_i = \sum_{s=1}^{n} a_{si}\, \boldsymbol{e}_s\ ,\ A^*\boldsymbol{e}_k = \sum_{p=1}^{n} a^*_{pk}\, \boldsymbol{e}_p\ . \tag{5.5.2}$$

Запишем условие сопряженности (5.5.1) для базисных векторов

$$(A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = (\boldsymbol{e}_i, A^*\boldsymbol{e}_k). \tag{5.5.3}$$

Подставляя формулы (5.5.2) в условие (5.5.3), получаем

$$\left(\sum_{s=1}^{n} a_{si}\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_k\right) = \left(\boldsymbol{e}_i, \sum_{p=1}^{n} a^*_{pk}\boldsymbol{e}_p\right)$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} a_{si}(\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_k) = \sum_{p=1}^{n} a^*_{pk}(\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_i).$$

Учитывая, что в силу ортонормированности базиса – $(\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{sk}$ и $(\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_k) = \delta_{pk}$, находим

$$a_{ki} = a_{ik}^{*}. \tag{5.5.4}$$

Таким образом, матрица сопряженного оператора A^* является транспонированной матрицей по отношению к матрице исходного оператора A.

5.6. Самосопряженные операторы, симметричные матрицы

Если исходный оператор совпадает с сопряженным оператором

$$A = A^*,$$

то его называют **самосопряженным** оператором. В этом случае условие (5.5.1) принимает вид

$$\left(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = \left(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\right). \tag{5.6.1}$$

Очевидно, что матрицей такого самосопряженного оператора будет симметричная матрица.

$$a_{ki} = a_{ik}. \tag{5.6.2}$$

5.7. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор $L \xrightarrow{A} L'$. Под действием этого оператора произвольный вектор $x \in L$ изменяет как длину, так и направление. Выясним, существуют ли у оператора векторы, которые меняют только длину оставаясь коллинеарными по отношению к исходному

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}, \quad \left(\lambda \in R\right). \tag{5.7.1}$$

Векторы, удовлетворяющие условию (5.7.1), называются собственными векторами оператора, а числа λ называются собственными значениями оператора.

Из условия (5.7.1) видно, что собственный вектор определяется с точностью до числового множителя и нулевой вектор всегда является собственным вектором.

Введем в уравнение (5.7.1) тождественный оператор

$$A\boldsymbol{x} = \lambda E\, \boldsymbol{x}$$

или

$$\left(A - \lambda E\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}.$$

Матричная форма последнего уравнения имеет вид

$$\left(A - \lambda E\right) X = O, \tag{5.7.2}$$

где

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (5.7.2) эквивалентно однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0. \end{cases} \tag{5.7.3}$$

Эта система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.7.4}$$

Уравнение (5.7.4) называется характеристическим уравнением для матрицы линейного оператора. Это алгебраическое уравнение степени n, оно может иметь не более n действительных различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственных значений оператора A.

Таким образом, для отыскания собственных значений и собственных векторов линейного оператора следует:

1. Составить характеристическое уравнение.
2. Вычислить все корни характеристического уравнения.
3. Для каждого корня характеристического уравнения решить соответствующую систему линейных алгебраических уравнений.
4. Найти все собственные вектора.

Рассмотрим три важные свойства для собственных векторов самосопряженного оператора. Представим их в виде теорем.

Теорема 1. В евклидовом пространстве собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

Доказательство:

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ – различные собственные значения самосопряженного оператора A, а $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ – соответствующие им собственные векторы. Тогда

$$(A\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2) \Rightarrow (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),$$

отсюда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Для всякого самосопряженного оператора в n-мерном евклидовом пространстве существуют n взаимно ортогональных собственных векторов.

(Без доказательства).

Замечание:

Из этой теоремы следует, что собственные векторы самосопряженного оператора образуют ортогональный базис.

Теорема 3. Всякий самосопряженный оператор в n-мерном евклидовом пространстве имеет в базисе из собственных векторов матрицу диагонального вида, причем на главной диагонали ее стоят собственные значения оператора.

Доказательство:

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ матрица самосопряженного оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По теореме 2 собственные векторы такого оператора, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно ортогональны. Возьмем их в качестве нового базиса, который обозначим – $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$.

Поскольку $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ – собственные векторы, то

$$A\,\boldsymbol{f}_k = \lambda_k \boldsymbol{f}_k, \ \left(k = \overline{1, n}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} A\,\boldsymbol{f}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{f}_2 + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{f}_n \\ A\,\boldsymbol{f}_2 = 0 \cdot \boldsymbol{f}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 + \dots + 0 \cdot \boldsymbol{f}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\,\boldsymbol{f}_n = 0 \cdot \boldsymbol{f}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{f}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{f}_n \end{cases},$$

и матрица самосопряженного оператора в базисе из собственных векторов принимает диагональный вид

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 11. Найти собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора, матрица которого имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

и записать эту матрицу в базисе из собственных векторов.

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение и вычислим собственные значения самосопряженного оператора

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=7,\ \lambda_2=2\,.$$

2. Составим соответствующую систему линейных уравнений для координат собственных векторов самосопряженного оператора

$$\begin{cases} (6-\lambda)\xi_1+2\xi_2=0 \\ 2\xi_1+(3-\lambda)\xi_2=0 \end{cases}.$$

3. Вычислим собственные вектора для каждого собственного значения.

Для корня $\lambda=7$, получаем

$$\begin{cases} -\xi_1+2\xi_2=0, \\ 2\xi_1-4\xi_2=0 \end{cases}$$

или

$$\xi_1 = 2\xi_2 .$$

Полагая $\xi_2 = 1$, находим первый собственный вектор

$$\boldsymbol{x}_1 = (2,1) .$$

Для корня $\lambda = 2$, получаем

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$2\xi_1 = -\xi_2 .$$

Полагая $\xi_2 = 2$, находим второй собственный вектор

$$\boldsymbol{x}_2 = (-1,2) .$$

Отметим, что полученные собственные вектора ортогональны

$$\left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\right) = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 .$$

Нормируя собственные векторы

$$\left|\boldsymbol{x}_1\right| = \left|\boldsymbol{x}_2\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} ,$$

получаем ортонормированный базис

$$\boldsymbol{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \quad \boldsymbol{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) .$$

По теореме 3 матрица самосопряженного оператора в базисе из собственных векторов принимает простейшую (диагональную) форму

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.8. Изменение матрицы линейного оператора при преобразовании базиса

Линейный оператор как отображение, как закон преобразования одних векторов в другие, не зависит от выбора векторов базиса в линейном пространстве. Но в каждом базисе он проявляется в виде матрицы линейного оператора. Эта матрица зависит от выбора базисных векторов, и при изменении базиса будет изменяться. Выясним механизм такого изменения.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ – старый базис в линейном векторном пространстве L, а $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ – новый базис этого же пространства.

Вектора нового базиса можно разложить по векторам старого базиса

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = t_{11}\boldsymbol{e}_1 + t_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + t_{1n}\boldsymbol{e}_n, \\ \boldsymbol{f}_2 = t_{21}\boldsymbol{e}_1 + t_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + t_{2n}\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \boldsymbol{f}_n = t_{n1}\boldsymbol{e}_1 + t_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + t_{nn}\boldsymbol{e}_n. \end{cases} \tag{5.8.1}$$

Система (5.8.1) может быть записана в матричной форме

$$\boldsymbol{F} = T \cdot \boldsymbol{E}, \tag{5.8.2}$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}, \quad T = (t_{ij}).$$

Определитель матрицы T – матрицы перехода от старого базиса к новому – отличен от нуля, поскольку векторы старого базиса должны однозначно выражаться через векторы нового базиса и наоборот.

Системы (5.8.1) и (5.8.2) могут быть записаны в эквивалентной индексной форме

$$\boldsymbol{f}_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ki}\boldsymbol{e}_i \, . \tag{5.8.3}$$

Разложим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ по векторам старого и нового базисов

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{f}_i = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \boldsymbol{f}_k \, . \tag{5.8.4}$$

Подставим формулы (5.8.3) в соотношения (5.8.4)

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \sum_{i=1}^{n} t_{ki}\boldsymbol{e}_i \, .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, находим

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} t_{k\,i}\eta_k$$

или

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^{*}\eta_k \, . \tag{5.8.5}$$

Запишем матричную форму соотношения (5.8.5)

$$X_e = T^{*} X_f \, , \tag{5.8.6}$$

где

$$X_e = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad X_f = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (5.8.6), находим

$$X_f = \left(T^*\right)^{-1} X_e. \qquad (5.8.7)$$

Матрицу $\left(T^*\right)^{-1}$ называют контраградиентной по отношению к матрице перехода T.

С помощью полученных формул (5.8.6) и (5.8.7) запишем формулу преобразования матрицы линейного оператора при изменении базиса

$$\begin{gathered} Y_e = A_e X_e, \\ T^* Y_f = A_e T^* X_f, \\ Y_f = (T^*)^{-1} A_e T^* X_f, \\ Y_f = A_f X_f, \end{gathered} \qquad (5.8.8)$$

где

$$A_f = (T^*)^{-1} A_e T^* \qquad (5.8.9)$$

– матрица линейного оператора в новом базисе.

5.9. Преобразование ортонормированного базиса в ортонормированный базис

Пусть теперь $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ – ортонормированные старый и новый базисы в евклидовом пространстве

$$\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k\right) = \delta_{ik}, \ \left(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_k\right) = \delta_{ik}. \qquad (5.9.1)$$

Подставляя в формулы (5.9.1) соотношения (5.8.3) получаем

$$\begin{gathered} \left(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_k\right) = \left(\sum_{s=1}^{n} t_{is}\boldsymbol{e}_s, \sum_{p=1}^{n} t_{kp}\boldsymbol{e}_p\right) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} t_{is}t_{kp}\left(\boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_p\right) = \\ = \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} t_{is}t_{kp}\delta_{sp} = \sum_{s=1}^{n} t_{is}t_{ks} = \delta_{ik}. \end{gathered} \qquad (5.9.2)$$

Таким образом, матрица перехода T обладает свойством ортонормированности по строкам

$$\sum_{s=1}^{n} t_{is} t_{ks} = \delta_{ik} . \qquad (5.9.3)$$

Умножим соотношения (5.8.1) скалярно на базисный вектор $\boldsymbol{e}_k$

$$\left(\boldsymbol{f}_i , \boldsymbol{e}_k \right) = t_{ik} = \cos\left(\boldsymbol{f}_i \hat{,} \boldsymbol{e}_k \right). \qquad (5.9.4)$$

Выразим теперь из системы (5.8.1) старые базисные вектора через новые базисные вектора

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = s_{11} \boldsymbol{f}_1 + s_{12} \boldsymbol{f}_2 + \ldots + s_{1n} \boldsymbol{f}_n , \\ \boldsymbol{e}_2 = s_{21} \boldsymbol{f}_1 + s_{22} \boldsymbol{f}_2 + \ldots + s_{2n} \boldsymbol{f}_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \boldsymbol{e}_n = s_{n1} \boldsymbol{f}_1 + s_{n2} \boldsymbol{f}_2 + \ldots + s_{nn} \boldsymbol{f}_n . \end{cases} \qquad (5.9.5)$$

Система (5.9.5) может быть записана в матричной форме

$$E = S\,F , \qquad (5.9.6)$$

где $S = T^{-1}$ – матрица перехода от нового базиса к старому.

Системы (5.9.4) и (5.9.6) могут быть записаны и в индексной форме

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} s_{ik} \boldsymbol{f}_k . \qquad (5.9.7)$$

Умножим соотношение (5.9.7) скалярно на базисный вектор $\boldsymbol{f}_k$

$$\left(\boldsymbol{e}_i , \boldsymbol{f}_k \right) = s_{ik} = \cos\left(\boldsymbol{e}_i \hat{,} \boldsymbol{f}_k \right). \qquad (5.9.8)$$

Сравнивая равенства (5.9.6) и (5.9.8), получим

$$s_{ik} = t_{ki} .$$

Значит матрицы прямого и обратного переходов связаны соотношением

$$S = T^*,$$

или

$$T^{-1} = T^*. \qquad (5.9.9)$$

Матрица S, как и матрица T будет ортогональна по строкам, а матрица T в силу соотношения (5.9.9) будет ортогональна по столбцам.

Таким образом, матрица T является одновременно ортогональной и по строкам, и по столбцам. Такие матрицы называются ортогональными матрицами.

Теорема 1. При преобразовании ортонормированного базиса в ортонормированный скалярные произведения векторов не изменяются.

Доказательство:

Рассмотрим координаты двух произвольных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в старом и новом базисе

$$\boldsymbol{x}_e = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right), \qquad \boldsymbol{y}_e = \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right),$$
$$\boldsymbol{x}_f = \left(\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'\right), \quad \boldsymbol{y}_f = \left(\eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_n'\right).$$

Связь координат вектора в старом и новом базисе определяется формулой (5.8.5), которая с учетом (5.9.9) принимает вид

$$X_f = TX_e, \quad Y_f = TY_e$$

или

$$\xi_i' = \sum_{s=1}^{n} t_{is}\xi_s, \quad \eta_i' = \sum_{p=1}^{n} t_{ip}\eta_p. \qquad (5.9.10)$$

Вычислим скалярное произведение в новом базисе

$$\left(\boldsymbol{x}_f,\boldsymbol{y}_f\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i'\eta_i'=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}t_{is}\xi_s\right)\left(\sum_{p=1}^{n}t_{ip}\eta_p\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\xi_s\eta_p\sum_{i=1}^{n}t_{is}t_{ip}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\xi_s\eta_p\delta_{sp}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i=\left(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{y}_e\right).$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, в ортогональном изменении базиса вместе со скалярным произведением сохраняются модули векторов и углы между ними.

Такое изменение базисов называют преобразованием поворота (возможно еще преобразование симметрии).

Пример 12. Пусть в R^2 ортогональная система координат поворачивается на угол α.

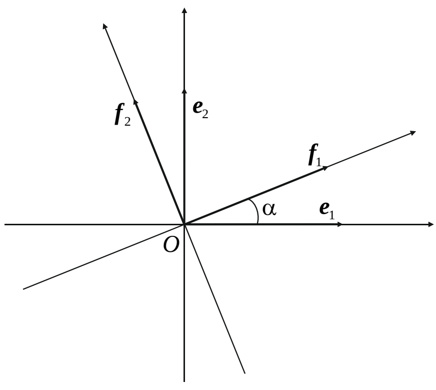


Рисунок 11 – Поворот ортогональной системы координат

Согласно формуле (5.9.4)

$$t_{ik}=\cos\left(\widehat{\boldsymbol{f}_i,\boldsymbol{e}_k}\right).$$

Матрица перехода принимает вид

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица запишется

$$T^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

С помощью (5.8.4) запишем выражение координат вектора в старом базисе через его координаты в новом базисе

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Теорема 2. Если самосопряженному оператору в ортонормированном базисе соответствует матрица A, то существует ортогональное изменение базиса с матрицей T, приводящее матрицу A к диагональному виду

$$TAT^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Для доказательства достаточно выбрать в качестве новых базисных векторов нормированные собственные векторы оператора. Тогда матрица T может быть построена в соответствии с (5.9.4). В новом базисе оператор A будет задавать отображение вектора $\boldsymbol{x}' = \left(\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_n'\right)$ на вектор $\boldsymbol{y} = \left(\lambda_1\xi_1', \lambda_2\xi_2', \dots, \lambda_n\xi_n'\right)$, и матрица оператора в новом базисе будет диагональной.

5.10. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичной формой относительно n переменных называется однородный многочлен второй степени

$$k(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\ . \qquad (5.10.1)$$

Коэффициенты a_{ik} образуют матрицу, которая называется матрицей квадратичной формы. При $n=2$ из формулы (5.10.1) получается квадратичная форма относительно двух переменных

$$k(x,y)=a_{11}x^2+(a_{12}+a_{21})xy+a_{22}y^2\ .$$

Эта формула показывает, что, не ограничивая общности, можно считать $a_{ik}=a_{ki}$

$$k(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\ .$$

Таким образом, матрица квадратичной формы всегда принимается симметричной. Этой матрице в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ будет соответствовать самосопряженный оператор A, а переменные квадратичной формы образуют некоторый вектор – $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$. Тогда вектор $A\boldsymbol{x}$ вычисляется по формуле

$$A\boldsymbol{x}=\left(\xi_1',\xi_2',\ldots,\xi_n'\right),\quad \xi_i'=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k\ ,$$

а скалярное произведение $(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})$ имеет вид

$$(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xi_i'=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\ .$$

Таким образом, формула (5.10.1) принимает вид

$$k\left(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n\right) = \left(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\right). \qquad (5.10.2)$$

Соотношение (5.10.2) показывает, что при переходе от ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису квадратичная форма (как скалярное произведение) не изменится. Можно подобрать новый базис так, что матрица квадратичной формы примет самый простой (диагональный) вид. Для этого в качестве векторов нового базиса нужно выбрать собственные ортонормированные вектора самосопряженного линейного оператора.

Переход от старого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ к новому $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$ приводит матрицу A к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad (5.10.3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A. Вектору $A\boldsymbol{x}$ в новом базисе будет соответствовать вектор

$$A_f \boldsymbol{x}_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\eta_1 \\ \lambda_2\eta_2 \\ \vdots \\ \lambda_n\eta_n \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма принимает **канонический** вид

$$k\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right) = \left(\boldsymbol{x}_f, A_f \mathrm{x}_f\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2 . \qquad (5.10.4)$$

Схема приведения квадратичной формы к каноническому виду

1. Составить симметричную матрицу A квадратичной формы.

2. Составить характеристическое уравнение $\det\left(A-\lambda E\right)=0$ для матрицы A.

3. Вычислить собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ самосопряженного оператора матрицы A.

4. Составить однородную систему уравнений $(A-\lambda E)X = O$.

5. Для каждого собственного значения найти собственные векторы матрицы A.

6. Образовать новый ортонормированный базис из собственных векторов.

7. Записать канонический вид квадратичной формы.

Классификация квадратичных форм

1. Если все $\lambda_i > 0$, то квадратичная форма называется положительно определенной.

2. Если все $\lambda_i < 0$, то квадратичная форма называется отрицательно определенной.

3. Если все $\lambda_i \geq 0$ или все $\lambda_i \leq 0$, то квадратичная форма называется знакопостоянной.

4. Если среди λ_i есть и положительные и отрицательные значения, то квадратичная форма называется знакопеременной.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $k\left(x,y\right)=2xy$.

Решение:

1. Составим симметричную матрицу A квадратичной формы.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Составим характеристическое уравнение $\det\left(A-\lambda E\right)=0$ для матрицы A.

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

3. Вычислим собственные значения.

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1..$$

4. Составим однородную систему уравнений.

$$\left(A-\lambda E\right)X=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda x+y=0 \\ x-\lambda y=0 \end{cases}.$$

5. Найдем собственные векторы.

$$\lambda_1=1 \Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1=(1,1) \Rightarrow \boldsymbol{f}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\lambda_2=-1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2=(-1,1) \Rightarrow \boldsymbol{f}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Образуем новый ортонормированный базис из собственных векторов.

$$\boldsymbol{f}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \boldsymbol{f}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

7. Запишем канонический вид квадратичной формы.

$$k\left(x',y'\right)=x'^2-y'^2.$$

5.11. Канонические уравнения кривых второго порядка

Самый общий вид уравнения кривой второго порядка можно записать следующим образом

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \qquad (5.11.1)$$

Всего существует три вида кривых второго порядка – **эллипс, гипербола и парабола**. Какая именно кривая записана уравнением (5.11.1) определяется его коэффициентами, но вид уравнения (5.11.1) не позволяет автоматически диагностировать – с чем мы имеем дело. Это связано с тем, что «плохо» выбрана система координат. Рассмотрим уравнения кривых второго порядка в «правильных» координатах.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

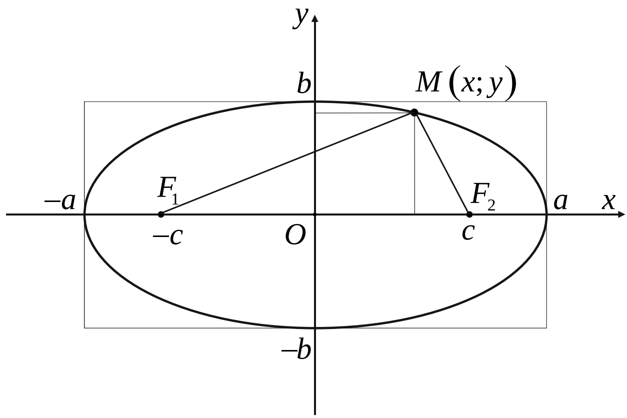


Рисунок 12 – Эллипс

Обозначим – $2a$ сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов F_1 и F_2, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$, причем $a > c$. Расположим фокусы на оси Ox симметрично начала координат. Тогда условие постоянства суммы расстояний принимает вид

$$F_1M + F_2M = 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\,.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и возведем в квадрат

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2\,.$$

Преобразуем к виду

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc\,.$$

Возводя еще раз в квадрат, получаем

$$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2xca^2+x^2c^2\,.$$

Приводя подобные члены и вводя обозначение $b^2=a^2-c^2$, находим

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

или окончательно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (5.11.2)$$

Уравнение (5.11.2) называется **каноническим уравнением эллипса**. Числа a и b называются полуосями эллипса, при $a=b=r$ эллипс превращается в окружность. Форму эллипса описывают безразмерным числом $\varepsilon=\frac{c}{a},\ (0\le\varepsilon<1)a$, называемым эксцентриситетом.

Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности каждой из которых от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

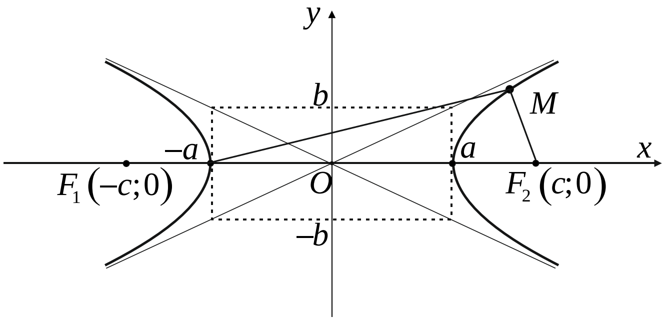


Рисунок 13 – Гипербола

Снова обозначим – $2a$ сумму расстояний от любой точки гиперболы до фокусов F_1 и F_2, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$, причем на это раз $a < c$. Расположим фокусы на оси Ox симметрично начала координат. Тогда условие постоянства абсолютной величины разности расстояний принимает вид

$$F_1M - F_2M = \pm 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Повторяя описанную выше процедуру вычислений, получаем **каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5.11.3)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

График гиперболы имеет две асимптоты $y = \pm \frac{b}{a} x$, форма гиперболы описывается эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $(\varepsilon > 1)$.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой.

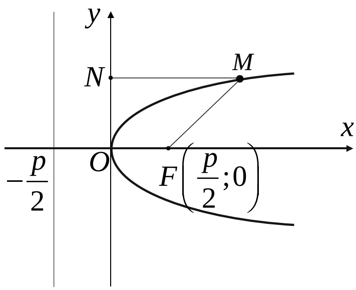


Рисунок 14 – Парабола

Обозначим буквой p – расстояние от фокуса F параболы до директрисы. Расположим фокус на оси Ox в точке $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. Тогда условие равенства расстояний между фокусом и директрисой принимает вид $MN = FM$, или в координатах

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Возведем это соотношение в квадрат

$$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2\,.$$

Окончательно находим

$$2px = y^2\,. \qquad (5.11.4)$$

Уравнение (5.11.4) называется **каноническим уравнением параболы**. Величина p называется параметр параболы.

5.12. Приведение общего уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

Правая часть общего уравнения кривой второго порядка (5.11.1) состоит из квадратичной формы

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

линейных слагаемых (линейной формы)

$$Dx + Ey,$$

и константы F.

Квадратичная форма приводится к каноническому виду методами, описанными в разделе 5.10. От линейной формы можно избавиться с помощью замены переменой, после выделения полных квадратов. Рассмотрим методику приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду на примере.

Пример 13. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$2xy + 4x + 1 = 0.$$

Решение:

1. Составим симметричную матрицу A квадратичной формы $2xy$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ для матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

3. Вычислим собственные значения

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1.$$

4. Составим однородную систему уравнений

$$(A - \lambda E)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases}.$$

5. Найдем собственные векторы

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = (1, 1) \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = (-1, 1) \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

6. Образуем новый ортонормированный базис из собственных векторов

$$\boldsymbol{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \ \boldsymbol{f}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

7. Учитывая, что векторами старого базиса являются вектора

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \ \ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1).$$

составим по формуле (5.8.3) матрицу перехода T

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

8. С помощью этой матрицы по формуле (5.8.6): $X_e = T^* X_f$, выразим старые координаты (x, y) через новые координаты (x', y')

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$$

9. Подставим эти формулы в уравнение кривой

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 1 = 0$$

или

$$x'^2 - y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{4}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0 .$$

10. Выделим полные квадраты в правой части уравнения

$$\left(x'^2 + 2\sqrt{2}x' + 2\right) - 2 - \left(y'^2 + 2\sqrt{2}y' + 2\right) + 2 + 1 = 0$$

или

$$\left(x' + \sqrt{2}\right)^2 - \left(y' + \sqrt{2}\right)^2 + 1 = 0 .$$

11. Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x'' = x' + \sqrt{2} \\ y'' = y' + \sqrt{2} \end{cases}$$

получаем каноническое уравнение гиперболы.

$$y''^2 - x''^2 = 1.$$

6. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ

6.1. Уравнения линейного межотраслевого баланса

Функционирование и развитие многоотраслевого хозяйства невозможно без балансовых соотношений между отдельными отраслями.

Любая отрасль такого хозяйства проявляет в своей деятельности определенную двойственность. С одной стороны, она выступает в роли производителя собственной продукции, с другой стороны она является потребителем продукций, выпускаемых другими отраслями.

Таким образом, для расчета соотношений между выпусками и потреблениями продукций различных отраслей необходима экономико-математическая модель. Разработка такого рода моделей опирается на матричные методы линейной алгебры. Впервые такого рода модель была получена известным экономистом В. В. Леонтьевым для анализа причин экономической депрессии США 1929-1932 гг.

Пусть производственная сфера рассматриваемого хозяйства состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт.

Очевидно, что для обеспечения собственного производства каждая отрасль нуждается в производственном потреблении продукции других отраслей.

Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев таким периодом служит год.

Обозначим:

x_i – общий объем валового выпуска продукции i-й отрасли;

x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;

y_i – объем продукции i-й отрасли, предназначенный для потребления в непроизводственной сфере. Это продукт конечного потребления, к которому относятся личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов, экспорт и т.д.

Очевидно, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. Следовательно, соотношения баланса для i-й отрасли имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_1 , \ \left(i = 1, 2, ..., n\right). \qquad (6.1.1)$$

Следует отметить, что все величины рассматриваемых моделей имеют одну и ту же денежную форму размерности.

Объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью x_{ij} можно всегда выразить через общий объем валового выпуска продукции x_j с помощью коэффициента

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j . \qquad (6.1.2)$$

Подстановка формул (6.1.2) в соотношения (6.1.1) дает

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \qquad (6.1.3)$$

В общем случае выражения $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, которые называются коэффициентами прямых затрат, являются переменными величинами. Система (6.1.3) является нелинейной, методы линейной алгебры к ней неприменимы.

Однако практика показывает, что во многих случаях эти величины меняются очень слабо. Это объясняется тем, что технология производства довольно длительное время остается на одном и том же уровне. Объем потребления j-й отраслью продукции i-й отрасли при производстве продукции объема x_j есть технологическая константа. Например, практически не изменяется потребление энергоресурсов на единицу выпускаемой продукции сырья.

Таким образом, во многих случаях коэффициенты прямых затрат a_{ij} можно считать постоянными величинами. Такое допущение называется гипотезой линейности. Система уравнений (6.1.3) становится линейной, и к ней можно применять матричные методы линейной алгебры.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad (6.1.4)$$

где матрица-столбец X – матрица-столбец объемов произведенной продукции или матрица-столбец валового выпуска;

матрица-столбец Y – матрица-столбец объемов продукции конечного потребления или матрица-столбец конечного потребления;

матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ – матрица коэффициентов прямых затрат или технологическая матрица.

Теперь систему уравнений (6.1.3) можно записать в матричной форме

$$X = A \cdot X + Y\,. \tag{6.1.5}$$

Уравнение (6.1.5) называется уравнением линейного межотраслевого баланса или моделью Леонтьева.

С помощью матричного уравнения (6.1.5) можно решать различные балансовые задачи. Приведем здесь две классические задачи.

Задача 1. Известна матрица коэффициентов прямых затрат (технологическая матрица) A и матрица-столбец валового выпуска X.

Вычислить матрицу-столбец объемов продукции конечного потребления (матрицу-столбец конечного потребления) Y.

Задача 2. Для некоторого периода времени T задана матрица коэффициентов прямых затрат (технологическая матрица) A и матрица-столбец объемов продукции конечного потребления (матрица-столбец конечного потребления) Y.

Определить матрицу-столбец валового выпуска X.

Легко видеть, что для решения первой задачи достаточно простых матричных вычислений, тогда как для решения второй задачи необходимо будет решать систему линейных уравнений (6.1.3) или матричное уравнение (6.1.5).

Следует отметить, что в силу специфики экономических задач все элементы матриц A, X и Y должны быть неотрицательными.

6.2. Продуктивные модели Леонтьева

Пусть задана матрица A, все элементы которой представляют собой неотрицательные числа, а матрица-столбец Y состоит из произвольных неотрицательных элементов. Если существует решение матричного уравнения (6.1.5) матрица-столбец X, все эле-менты которого являются неотрицательными, то матрица коэффициентов прямых затрат (технологическая матрица) A называется продуктивной. Сама модель Леонтьева в этом случае также называется продуктивной.

Умножим уравнение (6.1.5) справа на единичную матрицу E

$$E \cdot X = E \cdot A \cdot X + E \cdot Y .$$

Тогда

$$(E - A) \cdot X = Y . \tag{6.2.1}$$

Можно показать, что для продуктивных матриц определитель $\det(E - A)$ всегда отличен от нуля, существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$ и существует единственное решение матричного уравнения (6.2.1)

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \tag{6.2.2}$$

Рассмотрим бесконечную сумму степеней матрицы A

$$S = E + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = E + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots . \tag{6.2.3}$$

Умножим обе части формулы (6.2.3) на матрицу A справа:

$$S \cdot A = E \cdot A + \sum_{k=1}^{\infty} A^{k+1} = A + \sum_{k=1}^{\infty} A^{k+1} = \sum_{m=1}^{\infty} A^m . \tag{6.2.4}$$

Сравнивая формулы (6.2.3) и (6.2.4), находим

$$S \cdot A = \sum_{m=1}^{\infty} A^m = S - E = S \cdot E - E . \tag{6.2.5}$$

Из соотношения (6.2.5) следует:

$$E = S \cdot E - S \cdot A = S \cdot (E - A). \tag{6.2.6}$$

Решая матричное уравнение (6.2.6) относительно S, получаем

$$S = \left(E - A\right)^{-1}. \qquad (6.2.7)$$

Таким образом матрица полных затрат может быть представлена в виде:

$$\left(E - A\right)^{-1} = E + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = E + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots. \qquad (6.2.8)$$

Подставляя формулу (6.2.8) в соотношение (6.2.2), находим:

$$X = Y + A \cdot Y + A^2 \cdot Y + \ldots + A^n \cdot Y + \ldots. \qquad (6.2.9)$$

Выясним экономический смысл формулы (6.2.9). Для производства продукции объемов конечного потребления Y необходимы затраты в сфере производства.

Эти затраты на выпуск объемов для внутрипроизводственного потребления составляют матрицу $A \cdot Y$.

В свою очередь для производства объемов продукции $A \cdot Y$ необходимо внутри производства затратить объемы $A \cdot \left(A \cdot Y\right) = A^2 \cdot Y$.

Для производства продукции объемов $A^2 \cdot Y$ необходимо внутри производства затратить объемов $A \cdot \left(A^2 \cdot Y\right) = A^3 \cdot Y$ и т.д.

Таким образом, валовый выпуск X состоит из бесконечной суммы таких слагаемых и выражается формулой (6.2.9).

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется **матрицей полных затрат**, матрица-столбец $(E - A)^{-1} \cdot Y$ называется **матрица-столбец полных затрат**.

Таким образом равенство (6.2.9) выражает экономическое правило, согласно которому матрица-столбец валового выпуска и матрица-столбец полных затрат совпадают.

6.3. Модель равновесных цен

Рассмотрим производственную сферу многоотраслевого хозяйства, каждая отрасль которой производит свой однородный продукт. Число отраслей составляет n, A – матрица коэффициентов прямых затрат, X – матрица-столбец валового выпуска, Y – матрица-столбец конечного потребления.

Обозначим p_1, p_2, …, p_n – цены для продукций отраслей и составим из них матрицу-строку

$$P = \left(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n \right). \tag{6.3.1}$$

Определенную часть своего дохода каждая отрасль с номером i истратит на закупку продукции у других отраслей.

Для производства одной единицы продукции отрасли с номером i требуется a_{1i} продукции первой отрасли, a_{2i} продукции второй отрасли, ... , a_{ni} продукции n-й отрасли.

Всего на покупку этой продукции отраслью с номером i будет затрачена сумма:

$$a_{1i} \cdot p_1 + a_{2i} \cdot p_2 + \ldots + a_{ni} \cdot p_n,$$

а для выпуска продукции объемом x_i отраслью с номером i необходимо истратить на закупку продукции других отраслей сумму производственных расходов

$$x_i \cdot \left(a_{1i} \cdot p_1 + a_{2i} \cdot p_2 + \ldots + a_{ni} \cdot p_n \right).$$

Оставшуюся часть дохода, которая называется добавленной стоимостью и идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции, обозначим W_i. Очевидно, что величины W_i и y_i связаны соотношением

$$W_i = y_i \cdot p_i .$$

Таким образом, для производства одной единицы продукции отрасли с номером i требуются затраты

$$p_i \cdot x_i = x_i \cdot \left(a_{1i} \cdot p_1 + a_{2i} \cdot p_2 + ... + a_{ni} \cdot p_n \right) + W_i . \qquad (6.3.2)$$

Сократив обе части равенства (6.3.2) на величину x_i, получаем:

$$p_i = a_{1i} \cdot p_1 + a_{2i} \cdot p_2 + ... + a_{ni} \cdot p_n + w_i$$

или

$$p_i = \sum_{s=1}^{n} a_{si} \cdot p_s + w_i , \qquad (6.3.3)$$

где $w_i = \dfrac{W_i}{x_i}$ – норма добавленной стоимости продукции i-й отрасли.

Составим норму добавленной стоимости матрицу-строку

$$W = \left(w_1 , w_1 ,\ldots, w_1 \right). \qquad (6.3.4)$$

Тогда соотношения (6.3.3) можно записать в матричной форме

$$P = A^T \cdot P + W . \qquad (6.3.5)$$

Здесь матрица $A^* = \left\| a_{ji} \right\|$ является транспонированной матрицей по отношению к матрице полных затрат $A = \left\| a_{ij} \right\|$.

Матричное уравнение (6.3.5) представляет собой модель равновесных цен:

$$X = A \cdot X + Y . \qquad (6.3.6)$$

Структура уравнений модели равновесных цен (6.3.5) и модели межотраслевого баланса (6.3.6) одинакова.

При переходе от одной модели к другой достаточно произвести замены матриц

$$\begin{cases} X \leftrightarrow P\ , \\ A \leftrightarrow A^*, \\ Y \leftrightarrow W\ . \end{cases}$$

Уравнение (6.3.5) модель равновесных цен применяется:

1) для прогноза цен на продукцию отраслей при известных нормах добавленной стоимости;

2) для прогноза норм добавленной стоимости при заранее известных ценах на продукцию отраслей.

6.4. Линейная модель международной торговли

Рассмотрим n стран $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен соответственно $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим безразмерными коэффициентами a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_j.

Если принять, что весь национальный доход любой страны тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, то безразмерные коэффициенты a_{ij} будут удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \left(j = 1, 2, ..., n \right). \qquad (6.4.1)$$

Безразмерные коэффициенты a_{ij} образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (6.4.2)$$

которая называется **структурной матрицей международной торговли**.

В соответствии с соотношениями (6.4.1) сумма элементов любого столбца этой матрицы равна единице.

Для любой страны S_i общая выручка от внутренней и внешней торговли составит:

$$p_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot x_s \ . \qquad (6.4.3)$$

Для сбалансированной торговли каждой страны S_i должно выполняться условие ее бездефицитности. Выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода $p_i \geq x_i$:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \geq x_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \geq x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n \geq x_n. \end{cases} \qquad (6.4.4)$$

Складывая все неравенства (6.4.4), получим:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{i1} \cdot x_1 + \sum_{s=1}^{n} a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + \sum_{s=1}^{n} a_{in} \cdot x_n \geq \sum_{s=1}^{n} x_s \ . \qquad (6.4.5)$$

Подставляя формулы (6.4.1) в неравенства (6.4.5), находим:

$$\sum_{s=1}^{n} x_s \geq \sum_{s=1}^{n} x_s \ . \qquad (6.4.6)$$

Соотношение (6.4.6) показывает, что в системе (6.4.4) возможен только знак равенства.

Таким образом, условия (6.4.4) принимают вид:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=x_1, \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\ldots+a_{nn}\cdot x_n=x_n. \end{cases} \qquad (6.4.7)$$

Систему уравнений (6.4.7) можно записать в матричной форме

$$A\cdot X=X\ , \qquad (6.4.8)$$

где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец национальных доходов.

Уравнения (6.4.7) и (6.4.8) можно записать в виде:

$$\left(A-E\right)\cdot X=O\,, \qquad (6.4.9)$$

$$\begin{cases} \left(a_{11}-1\right)\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0, \\ a_{21}\cdot x_1+\left(a_{22}-1\right)\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\ldots+\left(a_{nn}-1\right)\cdot x_n=0, \end{cases} \qquad (6.4.10)$$

где $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль-матрица-столбец.

Легко видеть, что уравнение (6.4.8) представляет собой матричную форму для собственных значений и собственного вектора линейного оператора с матрицей A в заданном базисе. Собственное значение матрицы A в рассматриваемом случае равно единице $(\lambda=1)$. Таким образом, мы установили, что собственный вектор структурной матрицы *A*, отвечающий се собственному значению $\lambda=1$, образован национальными доходами X стран бездефицитной международной торговли.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Бугров, Я.С. Высшая математика : в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 7-е изд., стер. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 281 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-03009-9. – URL: https://urait.ru/bcode/488877

2 Бурмистрова, Е.Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 421 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-3588-2. – URL: https://urait.ru/bcode/508147

3 Гисин, В.Б. Математика. Практикум : учебное пособие для вузов / В.Б. Гисин, Н.Ш. Кремер. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 204 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-8785-0. – URL: https://urait.ru/bcode/489744

4 Клюшин, В.Л. Высшая математика для экономистов : учебное пособие для вузов / В.Л. Клюшин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 412 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08689-8. – URL: https://urait.ru/bcode/488775

5 Красс, М.С. Математика в экономике. Базовый курс : учебник для бакалавров / М.С. Красс. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 470 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – ISBN 978-5-9916-3137-2. – URL: https://urait.ru/bcode/487773

6 Красс, М.С. Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; ответственный редактор М.С. Красс. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 541 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-3138-9. – URL: https://urait.ru/bcode/508865

7 Кремер, Н.Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман, И.М. Тришин; под редакцией Н.Ш. Кре-

мера. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 422 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08547-1. – URL: https://urait.ru/bcode/488965

8 Лубягина, Е.Н. Линейная алгебра : учебное пособие для вузов / Е.Н. Лубягина, Е.М. Вечтомов. – 2-е изд. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 150 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-10594-0. – URL: https://urait.ru/bcode/495162

9 Малугин, В.А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для вузов / В.А. Малугин, Я.А. Рощина. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 478 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02976-5. – URL: https://urait.ru/bcode/489532

10 Орлова, И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов : учебник и практикум для вузов / И.В. Орлова, В.В. Угрозов, Е.С. Филонова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 370 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-9556-5. – URL: https://urait.ru/bcode/489189

11 Пахомова, Е.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учебное пособие для вузов / Е.Г. Пахомова, С.В. Рожкова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 110 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08428-3. – URL: https://urait.ru/bcode/490366

12 Плотникова, Е.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е.Г. Плотникова, А.П. Иванов, В.В. Логинова, А. В. Морозова; под редакцией Е. Г. Плотниковой. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 340 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-01179-1. – URL: https://urait.ru/bcode/489170

13 Попов, А.М. Высшая математика для экономистов. В 2 ч. Часть 1 : учебник и практикум для вузов / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 271 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08550-1. – URL: https://urait.ru/bcode/494458

14 Попов, А.М. Высшая математика для экономистов. В 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для вузов / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 295 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08552-5. – URL: https://urait.ru/bcode/494459

15 Попов, В.Л. Аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / В.Л. Попов, Г.В. Сухоцкий. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 232 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-03003-7. – URL: https://urait.ru/bcode/490156

16 Потапов, А.П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / А.П. Потапов. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 309 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-01232-3. – URL: https://urait.ru/bcode/489949

17 Привалов, И.И. Аналитическая геометрия : учебник для вузов / И.И. Привалов. – 40-е изд., стер. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 233 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-01262-0. – URL: https://urait.ru/bcode/490111

18 Резниченко, С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах : в 2 ч. Часть 1 : учебник и практикум для вузов / С.В. Резниченко. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 302 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02936-9. – URL: https://urait.ru/bcode/491081

19 Резниченко, С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах : в 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для вузов / С.В. Резниченко. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 288 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02938-3. – URL: https://urait.ru/bcode/497744

20 Сабитов, И.Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для вузов / И.Х. Сабитов, А.А. Михалев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 258 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08941-7. – URL: https://urait.ru/bcode/493221

21 Сборник задач по высшей математике : в 4 ч. Часть 1 : учебное пособие для вузов / А.С. Поспелов [и др.] ; под редакцией А.С. Поспелова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 355 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02075-5. – URL: https://urait.ru/bcode/490873

22 Сборник задач по высшей математике : в 4 ч. Часть 2 : учебное пособие для вузов / А.С. Поспелов [и др.] ; под редакцией А.С. Поспелова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 253 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-7929-9. – URL: https://urait.ru/bcode/490874

23 Сборник задач по высшей математике : в 4 ч. Часть 3 : учебное пособие для вузов / А.С. Поспелов [и др.] ; под редакцией А.С. Поспелова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 395 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-7930-5. – URL: https://urait.ru/bcode/490871
24 Сборник задач по высшей математике : в 4 ч. Часть 4 : учебное пособие для вузов / А.С. Поспелов [и др.] ; под редакцией А.С. Поспелова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 218 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-7931-2. – URL: https://urait.ru/bcode/490872
25 Татарников, О.В. Математика для экономистов. Практикум : учебное пособие для вузов / О.В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О.В. Татарникова. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 285 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-8868-0. – URL: https://urait.ru/bcode/489292
26 Татарников, О.В. Линейная алгебра : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / О.В. Татарников, А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев; под общей редакцией О.В. Татарникова. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 334 с. – (Бакалавр. Прикладной курс). – ISBN 978-5-9916-3568-4. – URL: https://urait.ru/bcode/482664
27 Шилин, И.А. Линейная алгебра. Задачник : учебное пособие для вузов / И.А. Шилин. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 118 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-14382-9. – URL: https://urait.ru/bcode/496646

Учебное издание

Ильина Елена Алексеевна

РАЗРАБОТКА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка Л. Р. Дмитриенко

Подписано в печать 26.10.2022. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 7,5.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ . Арт. – 14(Р2У)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.