МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.А. ЕНДУТКИНА

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение

Самара
Издательство Самарского университета
2021

УДК 517.91(075)
ББК 22.161.6я7
Е62

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. Е. В. Т и м ч е н к о,
канд. техн. наук Ю. А. К р ю к о в

Ендуткина, Екатерина Анатольевна
Е62 **Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков**: учебное пособие / *Е.А. Ендуткина*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 64 с.

ISBN 978-5-7883-1673-4

Данное учебное пособие предназначено для формирования у обучающихся очно-заочной формы обучения навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и высших порядков посредством приведённых соответствующих универсальных пошаговых алгоритмов решения указанных уравнений. Приведены также основные теоретические моменты, примеры решения уравнений, задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение, очно-заочной формы обучения Самарского университета при проведении занятий по курсу «Математика».

Подготовлено на кафедре высшей математики Самарского университета.

УДК 517.91(075)
ББК 22.161.6я7

ISBN 978-5-7883-1673-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка в общем виде записываются как [1]

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Решить (проинтегрировать) ДУ n-го порядка означает найти его общее или частное решение в зависимости от того, задано начальное условия или нет.

Начальное условия – условие вида [1]

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 .$$

Общее решение ДУ первого порядка является функцией вида [1]

$$y = \varphi(x, C),$$

содержащей не зависящую от x произвольную постоянную C .

Частным решением называется решение ДУ, получающееся из общего решения при конкретном значении постоянной $C = C^0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, то есть в виде уравнения $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется общим интегралом ДУ. Уравнение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ в этом случае называется частным интегралом уравнения [1].

Конкретное значение постоянной C^0 получается при совместном решении ДУ первого порядка и n начального условия (а точнее, при подстановке общего решения ДУ в начальное условие и последующем решении получившегося уравнения относительно C^0). Найденное значение коэффициента C^0 подставляется в общее решение вместо C; получившаяся функция $y = \varphi(x, C^0) = \varphi(x)$ и будет частным решением ДУ.

Далее рассмотрим только отдельные виды ДУ первого порядка, а именно ДУ с разделяющимися переменными, которые имеют вид [1]:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0,$$

а также

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

1.1. Пошаговый алгоритм решения

1. Подготовительный шаг.

- В уравнении вида $P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0$ второе слагаемое переносится в правую часть уравнения:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx = -P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy;$$

- в уравнении вида $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ расписывается производная $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

2. Производятся преобразования с тем, чтобы в одной части уравнения были функции только от переменной x, в другой части уравнения – функции только от переменной y.

- Уравнение вида $P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx = -P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy$ делится на $P_2(x) \cdot Q_1(y)$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy;$$

- уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ умножается на dx, делится на $f_2(y)$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx.$$

3. Интегрируются левая и правая части уравнений.

- Уравнение $\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy$ примет вид:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy;$$

- уравнение $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx$ примет вид:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) \cdot dx .$$

4. Записывается общее решение ДУ $y = \varphi(x, C)$.

1.2. Примеры решения

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y\,dx + \sqrt{x}\,dy = 0$.

1. Первое слагаемое переносится в правую часть уравнения:

$$\sqrt{x}\,dy = -y\,dx .$$

2. Производятся преобразования с тем, чтобы в одной части уравнения были функции только от переменной x, в другой части уравнения – функции только от переменной y, а именно уравнение делится на $y\sqrt{x}$:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

3. Интегрируются левая и правая части уравнений:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

После взятия интегралов:

$$\ln|y| - \ln C = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-3/2}$$

или

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = 2x^{-3/2},$$

откуда выражается y.

4. Записывается общее решение ДУ: $y = Ce^{2x^{-3/2}}$.

Пример 2. Найти общее решение ДУ

$$2(x^2+4)dy + x\sqrt{9-y^2}\,dx = 0.$$

1. Второе слагаемое переносится в правую часть уравнения:

$$2(x^2+4)dy = -x\sqrt{9-y^2}\,dx.$$

2. Производятся преобразования с тем, чтобы в одной части уравнения были функции только от переменной x, в другой части уравнения – функции только от переменной y, а именно уравнение делится на $(x^2+4)\sqrt{9-y^2}$:

$$2\frac{dy}{\sqrt{9-y^2}} = -\frac{x\,dx}{x^2+4}.$$

3. Интегрируются левая и правая части уравнений:

$$2\int \frac{dy}{\sqrt{9-y^2}} = -\int \frac{x\,dx}{x^2+4} \ .$$

Проводятся преобразования:

$$2\int \frac{dy}{\sqrt{9-y^2}} = -\int \frac{1/2 \cdot d(x^2+4)}{x^2+4} \ .$$

После взятия интегралов:

$$2\arcsin\frac{y}{3} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$$

или

$$\arcsin\frac{y}{3} = -\frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C \ ,$$

откуда выражается y.

4. Записывается общее решение ДУ:

$$y = 3\sin\left(-\frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C\right).$$

Пример 3. Найти общее решение ДУ

$$x\,dy - \sqrt{4-y^2}\ln x\,dx = 0 \,.$$

1. Второе слагаемое переносится в правую часть уравнения:

$$x\,dy = (4 + y^2)\ln x\,dx\,.$$

2. Производятся преобразования с тем, чтобы в одной части уравнения были функции только от переменной x, в другой части уравнения – функции только от переменной y, а именно уравнение делится на $x(4 + y^2)$:

$$\frac{dy}{4 + y^2} = \frac{\ln x\,dx}{x}\,.$$

3. Интегрируются левая и правая части уравнений:

$$\int \frac{dy}{4 + y^2} = \int \frac{\ln x\,dx}{x}\,.$$

Проводятся преобразования:

$$\int \frac{dy}{4 + y^2} = \int \ln x\; d(\ln x)\,.$$

После взятия интегралов:

$$\frac{1}{2} arctg\,\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}C$$

или

$$arctg\,\frac{y}{2} = \ln^2 x + C,$$

откуда выражается y.

4. Записывается общее решение ДУ:

$$y = 2\,tg\left(\ln^2 x + C\right).$$

Пример 4. Найти общее решение ДУ $(1+e^x)\,y' = 2ye^x$.

1. Расписывается производная $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$(1+e^x)\frac{dy}{dx} = 2ye^x.$$

2. Производятся преобразования с тем, чтобы в одной части уравнения были функции только от переменной x, в другой части уравнения – функции только от переменной y, а именно уравнение умножается на dx, делится на $(1+e^x)\ y$:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

3. Интегрируются левая и правая части уравнений:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Проводятся преобразования:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{d(e^x+1)}{1+e^x}.$$

После взятия интегралов:

$$\ln|y| = 2\ln\left|e^x+1\right| + \ln|C|$$

или

$$\ln|y| = \ln\left(C\left(e^x+1\right)^2\right).$$

4. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C\left(e^x+1\right)^2.$$

1.3. Варианты домашнего задания

Варианты домашнего задания по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными» приведены в Приложении А.

Для цели практиковаться в решении ДУ на указанную тему можно использовать сборники заданий по высшей математике и сборники задач по курсу математического анализа [3, 4].

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

ДУ n-го порядка в общем виде записываются как

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,.$$

Решить (проинтегрировать) ДУ n-го порядка означает найти его общее или частное решение в зависимости от того, заданы начальные условия или нет [1].

Начальные условия – условия вида [2]

$$y\big|_{x=x_0} = y_0\,,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0'\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0'^{(n-1)}\,.$$

Общее решение ДУ n-го порядка является функцией вида [1]

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)\,,$$

содержащей n не зависящих от x произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частным решением называется решение ДУ, получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, …, $C_n = C_n^0$ [1].

Конкретные значения постоянных C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 получаются при совместном решении ДУ n-го порядка и n начальных условий (а точнее, при подстановке общего решения ДУ в n начальных условий и последующем решении получившейся системы n уравнений относительно C_1^0, C_2^0, …, C_n^0). Найденные значения n коэффициентов C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 подставляются в общее решение вместо C_1, C_2, …, C_n; получившаяся функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0) = \varphi(x)$ и будет частным решением ДУ.

Решить ДУ n-го порядка сложнее, чем ДУ первого порядка, поэтому далее рассмотрим только отдельные виды ДУ высших порядков, а именно линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

2.1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков, линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Определения

Уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x) \neq 0$, называется линейным ДУ n-го порядка [1].

Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, …, $a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$ называются коэффициентами уравнения, а функция $f(x)$ – правой частью уравнения.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, если $f(x) \neq 0$, то неоднородным.

Частным случаем линейных ДУ являются линейные ДУ с постоянными коэффициентами, они имеют вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n – постоянные коэффициенты.

2.2. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

Рассматриваются линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, они имеют вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

2.2.1. Пошаговый алгоритм решения

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Характеристическое уравнение для ДУ n-го порядка составляется путём замены производных $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, …, y', y на соответствующие степени, например, параметра λ, то есть:

- $y^{(n)}$ заменяется на λ^n,
- $y^{(n-1)}$ заменяется на λ^{n-1},
- …,
- y' заменяется на $\lambda^1 = \lambda$,
- y заменяется на $\lambda^0 = 1$.

Таким образом характеристическое уравнение имеет вид [2]:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

1.2. Характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n-го порядка (такого же порядка, что и ДУ), а следовательно, имеет n корней λ_1, λ_2, …, λ_n.

Набор корней характеристического уравнения называется спектром $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

2. Каждому корню характеристического уравнения соответствует одно частное решение ДУ (то есть частных решений будет n): корням характеристического уравнения λ_1, λ_2, …, λ_n соответствуют частные решения y_1, y_2, …, y_n, при этом от кратности корня и от того, является корень действительным или комплексным, зависит вид соответствующего частного решения [2]:

- каждому действительному корню λ кратности $k = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda x}$;

- каждой паре комплексно сопряжённых корней кратности $k=1$ $\lambda_1=\alpha+i\beta$ и $\lambda_2=\alpha-i\beta$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ и $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$;

- каждому действительному корню λ кратности k соответствуют k частных решений $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, …, $x^{k-1}e^{\lambda x}$;

- каждой паре комплексно сопряжённых корней кратности k соответствуют $2k$ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x),\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots,+C_ny_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

2.2.2. Примеры решения

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y''+2y'=0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y'' заменяется на λ^2,
- y' заменяется на $\lambda^1=\lambda$,
- имеем $\lambda^2+2\lambda=0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda(\lambda+2)=0,$$

откуда $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$.

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1=0$ кратности $k=1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_1 x}=e^{0\,x}=1$;

- корню $\lambda_2=-2$ кратности $k=1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_2 x}=e^{-2x}$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\ y=C_1+C_2\,e^{-2\,x}.$$

Пример 2. Найти общее решение ДУ $2y'''-y'=0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y''' заменяется на λ^3,
- y' заменяется на $\lambda^1=\lambda$,
- имеем $2\lambda^3-\lambda=0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda(2\lambda^2-1)=0,$$

откуда $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}^2=0{,}5$,

откуда $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{0{,}5}$, $\lambda_3=-\sqrt{0{,}5}$.

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_1 x} = e^{0x} = 1$;

- корню $\lambda_2 = \sqrt{0{,}5}$ кратности $k = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_2 x} = e^{\sqrt{0{,}5}\,x}$;

- корню $\lambda_3 = -\sqrt{0{,}5}$ кратности $k = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_3 x} = e^{-\sqrt{0{,}5}\,x}$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,\ y = C_1 + C_2\, e^{\sqrt{0{,}5}\,x} + C_3\, e^{-\sqrt{0{,}5}\,x}.$$

Пример 3. Найти общее решение ДУ $y''' - 2y'' + y' = 0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y''' заменяется на λ^3,
- y'' заменяется на λ^2,
- y' заменяется на $\lambda^1 = \lambda$,
- имеем $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ или $(\lambda - 1)^2 = 0$,

откуда $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 1$, $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 2$.

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_1 x} = e^{0\,x} = 1$;

- корню $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 2$ соответствуют два частных решения $e^{\lambda_2 x} = e^{x}$, $x e^{\lambda_2 x} = x e^{x}$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,\ y = C_1 + C_2\, e^{x} + C_3 x\, e^{x}.$$

Пример 4. Найти общее решение ДУ $y^{IV} - y''' = 0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y^{IV} заменяется на λ^4,
- y''' заменяется на λ^3,
- имеем $\lambda^4 - \lambda^3 = 0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda^3(\lambda - 1) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 3$, $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 1$.

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 3$ соответствуют три частных решения $e^{\lambda_1 x} = e^{0\,x} = 1$, $x e^{\lambda_1 x} = x$, $x^2\, e^{\lambda_1 x} = x^2$;

- корню $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_2 x} = e^x$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4, \; y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x .$$

Пример 5. Найти общее решение ДУ $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y^{IV} заменяется на λ^4,
- y''' заменяется на λ^3,
- y'' заменяется на λ^2,
- имеем $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \text{ или } \lambda^2(\lambda - 1)^2 = 0 ,$$

откуда $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 2$, $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 2$.

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1 = 0$ кратности $k = 2$ соответствуют два частных решения $e^{\lambda_1 x} = e^{0x} = 1$, $xe^{\lambda_1 x} = x$;

- корню $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 2$ соответствуют два частных решения $e^{\lambda_2 x} = e^x$, $xe^{\lambda_2 x} = xe^x$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4,$$
$$y = C_1 + C_2\, x + C_3\, e^{x} + C_4 x\, e^{x}.$$

Пример 6. Найти общее решение ДУ $y'' + 4y = 0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y'' заменяется на λ^2,
- y заменяется на $\lambda^0 = 1$,
- имеем $\lambda^2 + 4 = 0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda^2 = -4 \text{ или } \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i = 0 \pm 2i.$$

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ: паре комплексно сопряжённых корней кратности $k = 1$ $\lambda_1 = \alpha + i\beta = 0 + 2i$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta = 0 - 2i$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{0x}\cos(2x)$ и $e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^{0x}\sin(2x)$ или $\cos(2x)$ и $\sin(2x)$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$
$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Пример 7. Найти общее решение ДУ $y'' - 4y' + 8y = 0$.

1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y'' заменяется на λ^2,
- y' заменяется на $\lambda^1 = \lambda$,
- y заменяется на $\lambda^0 = 1$,
- имеем $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$.

1.2. Решается характеристическое уравнение (корни квадратного уравнения с коэффициентами a, b, c вида $ax^2 + bx + c = 0$ находятся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$):

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} \text{ или } \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i.$$

2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ: паре комплексно сопряжённых корней кратности $k = 1$ $\lambda_1 = \alpha + i\beta = 2 + 2i$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta = 2 - 2i$ соответствуют два частных решения $e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{2x}\cos(2x)$ и $e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^{2x}\sin(2x)$.

3. Записывается общее решение ДУ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \; y = C_1 e^{2x}\cos(2x) + C_2 e^{2x}\sin(2x).$$

2.2.3. Варианты домашнего задания

Варианты домашнего задания по теме «Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами» приведены в Приложении Б.

Для цели практиковаться в решении ДУ на указанную тему можно использовать сборники заданий по высшей математике и сборники задач по курсу математического анализа [3, 4].

2.3. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассматриваются линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, они имеют вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

при этом правая часть специального вида представляет собой [1]

$$e^{\alpha x}[P_n(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_m(x) \cdot \sin(\beta x)],$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно; α и β – действительные числа; $\alpha \pm i\beta$ – контрольная пара.

2.3.1. Пошаговый алгоритм решения

1. Для решаемого линейного неоднородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами решается соответствующее линейное однородное ДУ $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ (линейное уравнение получается из нелинейного путём обнуления правой части). Подробный алгоритм решения линейного однородного ДУ описан в пункте 2.2.1 Пошаговый алгоритм решения (из которого п. 1, 2, 3 соответствуют пунктам 1.1, 1.2, 1.3 данного алгоритма).

1.1. Составляется и решается характеристическое уравнение $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$, и записывается спектр $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

1.2. Корням характеристического уравнения λ_1, λ_2, …, λ_n ставятся в соответствие частные решения y_1, y_2, …, y_n (с учётом кратности корней и того, являются ли они действительными или комплексными).

1.3. Записывается общее решение линейного однородного ДУ:

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots, + C_n y_n .$$

2. Для решаемого линейного неоднородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами определяются параметры.

2.1. Путём сопоставления его правой части $f(x)$ с общим видом правой части специального вида $e^{\alpha x}[P_m(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_n(x) \cdot \sin(\beta x)]$:

- выписываются α и β, составляется контрольная пара $\alpha \pm i\beta$;

- выписываются многочлены $P_m(x)$, $Q_n(x)$, а также их степени m, n.

2.2. Проверяется, принадлежит ли контрольная пара $\alpha \pm i\beta$ спектру $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

В случае такой принадлежности в системе, описываемой ДУ, имеет место резонанс, и определяется порядок резонанса k, в противном случае резонанса нет и порядок резонанса $k = 0$.

При этом, если контрольная пара $\alpha \pm i\beta$ совпала с корнем характеристического уравнения λ_i порядка k_i, то порядок резонанса также равен k_i (другими словами, со сколькими корнями характеристического уравнения совпала контрольная пара, таков порядок резонанса k).

3. Находится частное решение линейного неоднородного ДУ.

3.1. Частное решение линейного неоднородного ДУ записывается в виде [1]:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[U_l(x) \cdot \cos(\beta x) + V_l(x) \cdot \sin(\beta x)]x^k,$$

где $U_l(x)$, $V_l(x)$ – многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами; l – наивысшая степень многочленов $P_m(x)$, $Q_n(x)$, то есть $l = \max(m, n)$.

3.2. Записанное частное решение

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[U_l(x) \cdot \cos(\beta x) + V_l(x) \cdot \sin(\beta x)]x^k$$

(и найденные его производные тех порядков, которые входят в решаемое ДУ) подставляется в решаемое линейное неоднородное ДУ. Путём приравнивания многочленов перед одинаковыми тригонометрическими функциями составляется и решается система линейных уравнений относительно неопределённых коэффициентов многочленов $U_l(x)$, $V_l(x)$.

3.3. С учётом найденных значений неопределённых коэффициентов записывается частное решение линейного неоднородного ДУ в окончательном виде.

4. Общее решение линейного неоднородного ДУ записывается как сумма общего решения линейного однородного ДУ и частного решения линейного неоднородного ДУ:

$$y = y_{\text{одн}} + \tilde{y}\,.$$

5. Если правая часть линейного неоднородного ДУ $f(x)$ представляет собой сумму правых частей специального вида

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x), \text{ то } \tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_r \text{ [1],}$$

где $\tilde{y}_1$ – частное решение линейного неоднородного ДУ с правой частью специального вида $f_1(x)$; $\tilde{y}_2$ – частное решение линейного неоднородного ДУ с правой частью специального вида $f_2(x)$; …; $\tilde{y}_r$ – частное решение линейного неоднородного ДУ с правой частью специального вида $f_r(x)$.

2.3.2. Примеры решения

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y'' - 3y' = e^x[2\sin(x) - \cos(x)]$.

1. Решается соответствующее линейное однородное ДУ (линейное уравнение получается из нелинейного путём обнуления правой части):

$$y'' - 3y' = 0\,.$$

1.1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y'' заменяется на λ^2,
- y' заменяется на $\lambda^1 = \lambda$,
- имеем $\lambda^2 - 3\lambda = 0$.

1.1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda(\lambda - 3) = 0,$$

$$\text{откуда } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3.$$

1.2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1 = 0$ кратности $k_1 = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_1 x} = e^{0\,x} = 1$;

- корню $\lambda_2 = 3$ кратности $k_2 = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_2 x} = e^{3x}$.

1.3. Записывается общее решение линейного однородного ДУ:

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2\,,\ y_{\text{одн}} = C_1 + C_2\, e^{3x}\,.$$

2. Для решаемого линейного неоднородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами определяются параметры.

2.1. Путём сопоставления правой части

$$f(x) = e^{x}[2\sin(x) - \cos(\beta x)]$$

или

$$f(x) = e^{x}[-\cos(\beta x) + 2\sin(x)]$$

с общим видом правой части специального вида $e^{\alpha x}[P_m(x)\cdot\cos(\beta x) + Q_n(x)\cdot\sin(\beta x)]$:

- выписываются $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, составляется контрольная пара $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$;

- выписываются многочлены $P_m(x) = -1$, $Q_n(x) = 2$, а также их степени $m = 0$, $n = 0$.

2.2. Контрольная пара $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ не принадлежит спектру $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 3\}$, следовательно, резонанса нет, и порядок резонанса $k = 0$.

3. Находится частное решение линейного неоднородного ДУ.

3.1. Частное решение линейного неоднородного ДУ записывается в виде:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[U_l(x)\cdot\cos(\beta x) + V_l(x)\cdot\sin(\beta x)]x^{k},$$

после подстановки значений $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0$, $l = \max(m, n) = \max(0, 0) = 0$ – наивысшая степень многочленов $P_m(x) = -1$, $Q_n(x) = 2$

$$\tilde{y} = e^{1x}[U_0(x)\cdot\cos(1x) + V_0(x)\cdot\sin(1x)]x^0$$

$$\text{или } \tilde{y} = e^{x}[A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x)],$$

где $U_0(x) = A$, $V_0(x) = B$ – многочлены степени $l = 0$ с неопределёнными коэффициентами A, B.

3.2. Находятся производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$:

$$\tilde{y}' = (e^{x})'[A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x)] + e^{x}[A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x)]' =$$
$$= e^{x}[A\cdot\cos(x) + B\cdot\sin(x) - A\cdot\sin(x) + B\cdot\cos(x)] =$$
$$= e^{x}[(A+B)\cdot\cos(x) + (B-A)\cdot\sin(x)],$$
$$\tilde{y}'' = (\tilde{y}')' = (e^{x})'[(A+B)\cdot\cos(x) + (B-A)\cdot\sin(x)] +$$
$$+ e^{x}[(A+B)\cdot\cos(x) + (B-A)\cdot\sin(x)]' =$$
$$= e^{x}[(A+B)\cdot\cos(x) + (B-A)\cdot\sin(x) - (A+B)\cdot\sin(x) + (B-A)\cdot\cos(x)] =$$
$$= e^{x}[2B\cdot\cos(x) - 2A\cdot\sin(x)].$$

Записанное частное решение $\tilde{y}$ и найденные производные $\tilde{y}''$, $\tilde{y}'$ подставляются в решаемое линейное неоднородное ДУ:

$$e^{x}[2B\cdot\cos(x) - 2A\cdot\sin(x)] - 3e^{x}[(A+B)\cdot\cos(x) + (B-A)\cdot\sin(x)] =$$
$$= e^{x}[2\sin(x) - \cos(x)].$$

Путём приравнивания многочленов перед одинаковыми тригонометрическими функциями составляется и решается система линейных уравнений относительно неопределённых коэффициентов A, B многочленов $U_0(x) = A$, $V_0(x) = B$:

- приравнивая коэффициенты перед $\cos(x)$, получаем $2B - 3(A+B) = -1$;

- приравнивая коэффициенты перед $\sin(x)$, получаем $-2A-3(B-A)=2$.

Решается система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3A-B=-1, \\ A-3B=2 \end{cases}$$

путём умножения второго уравнения на 3:

$$\begin{cases} 3A-B=-1, \\ 3A-9B=6, \end{cases}$$

далее путём сложения полученных уравнений:

$$-10B=5 \text{ или } B=-0{,}5.$$

Тогда из исходного второго уравнения $A=3B+2$, $A=3\cdot(-0{,}5)+2$, $A=0{,}5$.

3.3. С учётом найденных значений неопределённых коэффициентов $A=0{,}5$, $B=-0{,}5$ записывается частное решение линейного неоднородного ДУ в окончательном виде:

$$\tilde{y}=e^{x}[0{,}5\cdot\cos(x)-0{,}5\cdot\sin(x)].$$

4. Общее решение линейного неоднородного ДУ записывается как сумма общего решения линейного однородного ДУ и частного решения линейного неоднородного ДУ:

$$y=y_{\text{одн}}+\tilde{y},\ y=C_1+C_2\,e^{3x}+e^{x}[0{,}5\cdot\cos(x)-0{,}5\cdot\sin(x)].$$

Пример 2. Найти общее решение ДУ $y''' + 2y'' = 4x$.

1. Решается соответствующее линейное однородное ДУ (линейное уравнение получается из нелинейного путём обнуления правой части):

$$y''' + 2y'' = 0.$$

1.1. Составляется и решается характеристическое уравнение.

1.1.1. Составляется характеристическое уравнение:

- y''' заменяется на λ^3,
- y'' заменяется на λ^2,
- имеем $\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$.

1.1.2. Решается характеристическое уравнение (находятся его корни):

$$\lambda^2(\lambda + 2) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$ кратности $k_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ кратности $k_2 = 1$.

1.2. Каждому корню характеристического уравнения ставится в соответствие одно частное решение ДУ:

- корню $\lambda_1 = 0$ кратности $k_1 = 2$ соответствуют два частных решения $e^{\lambda_1 x} = e^{0x} = 1$, $xe^{\lambda_1 x} = x$;

- корню $\lambda_2 = 1$ кратности $k_2 = 1$ соответствует частное решение $e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$.

1.3. Записывается общее решение линейного однородного ДУ:

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + + C_3 y_3, \; y_{\text{одн}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}.$$

2. Для решаемого линейного неоднородного ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами определяются параметры.

2.1. Путём сопоставления правой части $f(x) = 4x$ с общим видом правой части специального вида

$$e^{\alpha x}[P_m(x)\cdot\cos(\beta x) + Q_n(x)\cdot\sin(\beta x)]:$$

- выписываются $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, составляется контрольная пара $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i\cdot 0$;

- выписываются многочлены $P_m(x) = 4x$, $Q_n(x) = 0$, а также их степени $m = 1$, $n = 0$.

2.2. Контрольная пара $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i\cdot 0$ принадлежит спектру $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 0, -2\}$, следовательно, резонанс есть.

При этом контрольная пара $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i\cdot 0$ совпала с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$ кратности $k_1 = 2$, следовательно, порядок резонанса $k = k_1 = 2$ (другими словами, контрольная пара $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i\cdot 0$ совпала с двумя корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 = 0$, следовательно, порядок резонанса $k = 2$).

3. Находится частное решение линейного неоднородного ДУ.

3.1. Частное решение линейного неоднородного ДУ записывается в виде

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}[U_l(x)\cdot\cos(\beta x) + V_l(x)\cdot\sin(\beta x)]x^k,$$

после подстановки значений $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 2$, $l = \max(m,n) = \max(1,0) = 1$ – наивысшая степень многочленов $P_m(x) = 4x$, $Q_n(x) = 0$

$$\tilde{y} = e^{0x}[U_1(x)\cdot\cos(0x) + V_1(x)\cdot\sin(0x)]x^2$$

$$\text{или } \tilde{y} = [A\cdot x + B]x^2 \text{ или } \tilde{y} = A\cdot x^3 + Bx^2,$$

где $U_1(x) = A\cdot x + B$ – многочлен степени $l = 1$ с неопределёнными коэффициентами A, B.

3.2. Находятся производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$:

$$\tilde{y}' = (A\cdot x^3 + Bx^2)' = 3Ax^2 + 2Bx,$$

$$\tilde{y}'' = (\tilde{y}')' = (3Ax^2 + 2Bx)' = 6Ax + 2B,$$

$$\tilde{y}''' = (\tilde{y}'')' = (6Ax + 2B)' = 6A.$$

Записанное частное решение $\tilde{y}$ и найденные производные $\tilde{y}'''$, $\tilde{y}''$ подставляются в решаемое линейное неоднородное ДУ:

$$6A + 2(6Ax + 2B) = 4x \text{ или } 12Ax + 6A + 4B = 4x.$$

Путём приравнивания многочленов составляется и решается система линейных уравнений относительно неопределённых коэффициентов A, B многочлена $U_1(x) = A\cdot x + B$:

- приравнивая коэффициенты перед $x^1 = x$, получаем $12A = 4$;

- приравнивая коэффициенты перед $x^0 = 1$, получаем $6A + 4B = 0$.

Решается система линейных уравнений

$$\begin{cases} 12A = 4, \\ 6A + 4B = 0, \end{cases}$$

в которой из первого уравнения $A = 1/3$.

Тогда из второго уравнения $B = -3/2 \cdot A$, $B = -3/2 \cdot 1/3$, $B = -1/2$.

3.3. С учётом найденных значений неопределённых коэффициентов $A = 1/3$, $B = -1/2$ записывается частное решение линейного неоднородного ДУ в окончательном виде:

$$\tilde{y} = 1/3 \cdot x^3 - 1/2 \cdot x^2 .$$

4. Общее решение линейного неоднородного ДУ записывается как сумма общего решения линейного однородного ДУ и частного решения линейного неоднородного ДУ:

$$y = y_{\text{одн}} + \tilde{y}\,,\ y = C_1 + C_2\, x + C_3 e^{-2x} + 1/3 \cdot x^3 - 1/2 \cdot x^2 .$$

2.3.3. Варианты домашнего задания

Варианты домашнего задания по теме «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида» приведены в Приложении В.

Для цели практиковаться в решении ДУ на указанную тему можно использовать сборники заданий по высшей математике и сборники задач по курсу математического анализа [3, 4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 668 с.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: учебное пособие для вузов / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчёты) / Л. А. Кузнецов. – Москва: Высшая школа, 1983. – 238 с.
4. Берман, Г. Н. Сборник заданий по курсу математического анализа: учебное пособие / Г. Н. Берман. – Санкт-Петербург: Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Домашнее задание №1
«Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными»

Вариант 1

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $4(x^2y+y)\,dy+\sqrt{9+y^2}\,dx=0$.

Вариант 2

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $4(xy+y)\,dy+\sqrt{9+y^2}\,dx=0$.

Вариант 3

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $2(x^2+4)\,dy+x\sqrt{9+y^2}\,dx=0$.

Вариант 4

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $2y(\sqrt{x^2+4})dy+(9+y^2)dx=0$.

Вариант 5

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $2y(\sqrt{x^2+4})dy+(x+xy^2)dx=0$.

Вариант 6

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $2y(x^2-4)dy+(x+xy^2)dx=0$.

Вариант 7

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y\,dx+(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dy=0$.

Вариант 8

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $3y\,dx+(x\sqrt{y}-x)dy=0$.

Вариант 9

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\sqrt{y}\,dx + (x\sqrt{y} - x)dy = 0$.

Вариант 10

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y\,dx + 2(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dy = 0$.

Вариант 11

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $3\,x\,y^2 dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dy = 0$.

Вариант 12

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\frac{1}{y}dx + (x\sqrt{y} - x)\,dy = 0$.

Вариант 13

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1 + e^x)y' = y^2\,e^x$.

Вариант 14

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(3-e^{x})y' = ye^{x}$.

Вариант 15

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1+e^{x})y' = \dfrac{e^{x}}{y}$.

Вариант 16

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(2+e^{x})y' = \dfrac{e^{x}}{1+y}$.

Вариант 17

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1+e^{x})y' = \dfrac{e^{x}}{y^{2}}$.

Вариант 18

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1+e^{2x})y' = \dfrac{e^{x}}{2-y}$.

Вариант 19

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $dx + y\sqrt{x}\,dy = 0$.

Вариант 20

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+6x+5}$.

Вариант 21

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y'\sqrt{x^2+1} = y$.

Вариант 22

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y'\sqrt{x^2+1} = x\,(1+y^2)$.

Вариант 23

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x + xy^2 + y'(y + xy) = 0$.

Вариант 24

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x - xy^2)dx + (y + x^2 y)dy = 0$.

Вариант 25

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' - xy^2 = 2xy$.

Вариант 26

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' - x^2 y = 2x^2$.

Вариант 27

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' - x^2 y = y$.

Вариант 28

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' \sin^2 x - y = 0$.

Вариант 29

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' - \dfrac{\sin x}{y} = 0$.

Вариант 30

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\,y' + y = 0$.

Вариант 31

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y\,y' + x = 0$.

Вариант 32

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x^2 - 1)\,y' + 2\,x\,y^2 = 0$.

Вариант 33

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = (2y+1)\cos x$.

Вариант 34

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\dfrac{y'}{1+y^2}=\sin x$.

Вариант 35

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y'y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Вариант 36

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $2^y y'+2x=0$.

Вариант 37

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y'=\dfrac{2^x}{y^2}$.

Вариант 38

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $e^x y'=y^2+1$.

Вариант 39

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}\, tg\, x$.

Вариант 40

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' + y\sqrt{1 + x^2} = 0$.

Вариант 41

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(e^x + 2)\,dy + ye^x dx = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Домашнее задание №2
«Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами»

Вариант 1

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 0$.

Вариант 2

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 3y'' + 2y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = 0$.

Вариант 3

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Вариант 4

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$.

Вариант 5

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$.

Вариант 6

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 0$.

Вариант 7

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$.

Вариант 8

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' + 3y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 0$.

Вариант 9

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Вариант 10

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - y''' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$.

Вариант 11

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 8y = 0$.

Вариант 12

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$.

Вариант 13

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - 2y''' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$.

Вариант 14

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$.

Вариант 15

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Вариант 16

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - y''' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$.

Вариант 17

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $2y''' - y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Вариант 18

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $3y^{IV} + y''' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y' = 0$.

Вариант 19

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $4y''' - y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$.

Вариант 20

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' = 0$.

Вариант 21

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 0$.

Вариант 22

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' - 3y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 0$.

Вариант 23

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 9y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$.

Вариант 24

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y = 0$.

Вариант 25

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$.

Вариант 26

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 2y''' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 0$.

Вариант 27

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $2y''' - y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y = 0$.

Вариант 28

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y'' - 6y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $4y'' + y' = 0$.

Вариант 29

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 5y'' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 12y = 0$.

Вариант 30

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 6y'' + 9y' = 0$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 16y = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В
Домашнее задание №3
«Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида»

Вариант 1

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' + y' = 2x + 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 4e^{x}(\cos x + \sin x)$.

Вариант 2

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = e^{2x} + e^{-2x}$.

Вариант 3

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y' = 3x + 2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 2x$.

Вариант 4

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2\mathrm{e}^x$.

Вариант 5

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + y' = 2x^2 + 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = -\mathrm{e}^x(\cos 2x + \sin 2x)$.

Вариант 6

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y' = x^2 + x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 2e^x + \cos x$.

Вариант 7

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' = 2x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 2\cos 3x + \sin 3x$.

Вариант 8

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' + 3y' = 2x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = e^{3x} + e^{-3x}$.

Вариант 9

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' = 4$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

Вариант 10

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - y''' = x^2 + 4$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 3\sin 2x + \cos 2x + e^{2x}$.

Вариант 11

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + y'' = 3x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + \cos x)$.

Вариант 12

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 2\sin x + \cos x + 3\mathrm{e}^{x}$.

Вариант 13

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - 2y''' = 2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 4\mathrm{e}^{x}(\cos x - \sin x)$.

Вариант 14

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^{2} + x - 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = \mathrm{e}^{4x} + 2\mathrm{e}^{-4x}$.

Вариант 15

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y' = 3x - 2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}\sin 3x$.

Вариант

1 На ение дифференциального уравнения $y^{IV} - y''' = 2x + 3$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 9y = -2\sin 3x - 4e^{3x}$.

Вариант 17

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $2y''' - y' = x + 3$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x$.

Вариант 18

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - 4y' = 3e^{2x} - 4\cos 2x + \sin 2x$.

Вариант 19

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $4y''' - y' = 4x^2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

Вариант 20

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' = \mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{-5x}$.

Вариант 21

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' = 4x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' = \mathrm{e}^{x}\left(2\sin x - \cos x\right)$.

Вариант 22

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' - 3y' = 1 + 2x^2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 3\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$.

Вариант 23

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 9y' = x^2 - 2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = \mathrm{e}^{x}\sin 4x$.

Вариант 24

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} - y'' = x^2 - 2x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y = \cos 3x + 2\sin 3x + \mathrm{e}^x$.

Вариант 25

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + y'' = 2x + 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 2\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)$.

Вариант 26

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 2y''' = 3x - 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = \sin x + 3\mathrm{e}^x$.

Вариант 27

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $2y''' - y' = x^2 + 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y = \mathrm{e}^x + \cos 2x$.

Вариант 28

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 3y'' - 10y' = 1 + x$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y = \mathrm{e}^{x}(\cos 3x + \sin 3x)$.

Вариант 29

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 4y' = 3x^2 + 1$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 9y = \sin 2x + \mathrm{e}^{x}$.

Вариант 30

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV} + 16y'' = x^2 - 2$.

2 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = \cos x + \sin 3x$.

Учебное издание

Ендуткина Екатерина Анатольевна

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Учебное пособие

Редактор А.С. Никитина
Компьютерная вёрстка А.С. Никитиной

Подписано в печать 25.10.2021. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,0.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 5(Р3У)/2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА» (САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.