

517.5

СД64

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Лаборатория математической физики

В.М. Долгополов, И.Н. Родионова, Э.Н. Рыкова

РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебное пособие



Самарский университет
№ 796498
БИБЛИОТЕКА

Самара
Издательство «Универс групп»
2011

Печатается по решению Редакционно-издательского совета

Самарского государственного университета

ББК 22.141

УДК 517.55

Д 64

Отв. редактор: к-т физ.-мат. наук, доц. М.В. Долгополов

Долгополов, В.М.

Д64 Ряды Фурье: учеб. пособие / В.М. Долгополов, И.Н. Родионова, Э.Н. Рыкова. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2011. – 92 с.

ISBN 978-5-467-00222-4

Учебное пособие включает в себя материал одного из важнейших разделов математического анализа, изложение которого в лекционном курсе требует много времени, а решение задач и упражнений которого часто вызывают значительные затруднения у студентов. Если же к этому добавить, что 1) согласно действующему в настоящее время учебному плану число часов, отводимых на лекционный курс математического анализа на физическом факультете СамГУ, заметно сокращено, в силу чего некоторые разделы этого курса студентам-физикам приходится изучать самостоятельно; 2) в различных учебниках по математическому анализу данный раздел излагается с самых различных точек зрения, так что студентам довольно сложно выбрать самостоятельно нужный подход к изучению и изложению материала данного раздела; 3) при изложении материала данного раздела студентам-физикам особенно важную роль играет его практическая направленность, умение составлять и решать конкретные задачи с использованием рядов Фурье, интегралов Фурье и преобразований Фурье, то становится совершенно очевидной необходимость подобных методических указаний. Настоящее пособие может быть использовано также студентами механико-математического, химического и биологического факультетов при изучении темы «Ряды Фурье».

Пособие подготовлено в рамках проекта № 3341 и 10854 Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ, а также поддержано фондом «Династия» и МЦФФМ.

ББК 22.141

УДК 517.55

ISBN 978-5-467-00222-4 © Долгополов В.М., Родионова И.Н., Рыкова Э.Н., 2011

© Самарский государственный университет, 2011

517.52(075)

27.23.23

Оглавление

1	ОБЩИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ	8
1.1	Периодические функции и их свойства	8
1.2	Ортогональные системы	9
1.3	Примеры ортогональных систем	12
1.4	Ряд Фурье по данной ортогональной системе	14
2	СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ	20
2.1	Задача о наилучшем приближении. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье	20
2.2	Сходимость в среднем ряда Фурье	22
2.3	Теоремы о сходимости рядов Фурье	24
2.4	Интеграл Дирихле	27
2.5	Основная лемма Римана	30
2.6	Общая теорема о сходимости ряда Фурье	31
2.7	Разложение непериодической функции в ряд Фурье	36
2.8	Разложение функций на сегменте $[0, l]$	38
2.9	Комплексная форма ряда Фурье	40
3	РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ	43
3.1	Система функций Бесселя	43
3.2	Признаки сходимости рядов Фурье-Бесселя	46
3.3	Спектральный анализ периодических сигналов	48
4	РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ЧЕБЫШЕВА	55
4.1	Многочлены Чебышева	56
4.2	Ряды Фурье по многочленам Чебышева	60
4.3	Сходимость рядов Фурье-Чебышева	61
5	ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	65
5.1	Представление функций в виде интеграла Фурье	65
5.2	Интеграл Фурье четной и нечетной функций	70

5.3	Примеры представления неперiodической функции интегралом Фурье	72
5.4	Интеграл Фурье в комплексной форме	75
5.5	Преобразование Фурье	76
5.6	Свойства преобразования Фурье	79

ВВЕДЕНИЕ

Ряды Фурье появились в XVIII веке в работах Д. Бернулли, посвященных изучению колебаний струны, в работах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, связанных с разложением периодических сигналов в ряд по синусоидальным функциям. Большой вклад в развитие теории тригонометрических рядов был внесен Ж. Фурье в работах по исследованию тепловых потоков (1822 г.). П. Дирихле, развивая идеи Ж. Фурье, в 1829 году установил и строго доказал достаточный признак разложимости функции в тригонометрический ряд. В разработку теории тригонометрических рядов и их практического применения к решению задач радиотехники и автоматики важный вклад внесли русские и советские ученые: Н.И. Лобачевский, А.И. Крылов, С.Н. Бернштейн, Н.И. Лузин, А.И. Колмогоров, Д.Е. Меньшов и др.

В приложениях рассмотрение тригонометрических рядов прежде всего связано с задачей представления данного движения, описываемого уравнением $y = \varphi(t)$, в виде суммы простейших гармонических колебаний, часто взятых в бесконечно большом числе.

Как известно, простое гармоническое колебание описывается функцией

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где ω – частота, связанная с периодом T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

При наложении двух гармонических колебаний

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

и

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

имеющих разные частоты и амплитуды, результирующее колебание не является гармоническим.

Его можно представить в следующей форме:

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)],$$

где

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[\psi(t) - \varphi],$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \psi(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \psi(t)}$$

и

$$\psi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2.$$

С физической точки зрения такое представление результирующего негармонического колебания имеет смысл только при наложении гармонических колебаний, частоты которых достаточно близки. В этом случае $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся функции времени, а колебательный процесс называется биением.

Величина $A(t)$ периодически изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$ с частотой

$$\nu_6 = |\nu_2 - \nu_1| = \frac{1}{2\pi} |\omega_2 - \omega_1|,$$

называемой частотой биения.

Если же сложить несколько величин вида:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \tag{2}$$

$$x_2 = A_2 \sin 2\omega t,$$

$$x_3 = A_3 \sin 2^2 \omega t,$$

...

$$x_n = A_n \sin 2^{n-1} \omega t,$$

то получим в результате периодическую функцию, существенно отличающуюся от каждой из величин вида (2) (рис. 1).

При сложении величин из бесконечного ряда, составленного по типу (2), эффект отличия результирующей периодической функции от синусоиды проявится еще больше.

Возникает обратная задача: представить определенную периодическую функцию $f(t)$ с периодом T в виде суммы конечного или бесконечного числа величин вида (1).

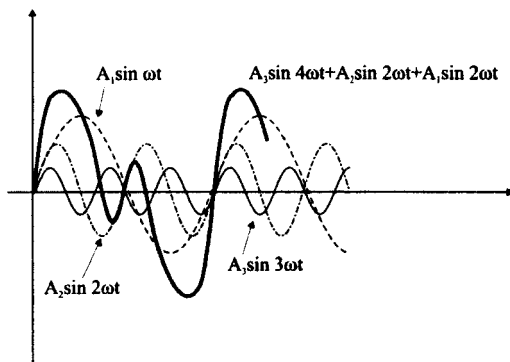


Рис. 1.

1 ОБЩИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

1.1 Периодические функции и их свойства

Определение. Функция $f(t)$ называется периодической, если найдется такое число $T \neq 0$, что для любого $t \in D(f)$ следует, что

$$f(t + T) = f(t). \quad (3)$$

T – период – математическая абстракция, так как периодических явлений в строгом смысле в действительности нет и быть не может.

1. Если периодическая функция имеет период T , то она имеет бесчисленное множество периодов: $2T, 3T, \dots, -T, -2T, \dots$. Наименьший из положительных периодов называется основным.

Следовательно, если периодическая функция имеет основной период T_0 , то любой другой ее период кратен T_0 .

2. Сумма, разность и произведение двух функций с одним и тем же периодом T являются функциями с периодом T .

3. Если $f(t)$ – периодическая функция с периодом T , то функция $f(at + b)$, где $a > 0$, также периодическая с периодом $\frac{T}{a}$:

$$f\left[a\left(t + \frac{T}{a}\right) + b\right] = f[(at + b) + T] = f(at + b).$$

4. Если $f(t)$ – периодическая функция с периодом T , интегрируемая на некотором сегменте $[t_0, t_0 + T]$, то величина интеграла $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$ остается одной и той же при любом t_0 , то есть

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt. \quad (4)$$

Для доказательства разобьем интеграл $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$ на сумму интегралов:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \int_{t_0}^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{t_0+T} f(t)dt. \quad (5)$$

Полагая в последнем интеграле $t = u + T$, найдем:

$$\int_T^{t_0+T} f(t)dt = \int_0^{t_0} f(u+T)du = \int_0^{t_0} f(u)du = - \int_{t_0}^0 f(u)du.$$

Так как величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то:

$$\int_{t_0}^0 f(u)du = \int_{t_0}^0 f(t)dt.$$

Подставляя в (5), получим (4).

В частности, если $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T = 2\pi$, то

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)dt.$$

1.2 Ортогональные системы

С задачами представления данной функции в виде рядов мы уже встречались, когда в качестве членов ряда рассматривались степенные функции $a_n(x - a)^n$. Во многих приложениях большое распространение получили ряды, членами которых являются функции ортогональных систем.

Дадим несколько определений.

Определение 1. Пространство называется линейным, если в нем введены операции сложения элементов и умножения элементов на число, удовлетворяющие ряду аксиом (коммутативность, ассоциативность и др.).

В линейном пространстве вводятся понятия линейной зависимости и размерности.

Определение 2. Линейное пространство \mathcal{L} называется евклидовым, если для его элементов введена операция скалярного умножения, ставящая в соответствие каждой паре элементов \bar{x} и \bar{y} число (\bar{x}, \bar{y}) , удовлетворяющее условиям:

1. $(\forall \bar{x} \in \mathcal{L}) (\forall \bar{y} \in \mathcal{L}) [(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})]$,
2. $(\forall \bar{x} \in \mathcal{L}) (\forall \bar{y} \in \mathcal{L}) (\forall \lambda \in \mathbb{R}) [(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})]$,
3. $(\forall \bar{x} \in \mathcal{L}) (\forall \bar{y} \in \mathcal{L}) (\forall \bar{z} \in \mathcal{L}) [(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})]$,
4. $(\forall \bar{x} \in \mathcal{L}) [(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0]; [(\bar{x}, \bar{x}) = 0] \Leftrightarrow (\bar{x} = 0)$.

Классическим и наиболее важным примером евклидова пространства является $\mathcal{L}_2[a, b]$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$, со скалярным произведением, вводимым соотношением:

$$(\bar{f}, \bar{g}) = \int_a^b \bar{f}(x)\bar{g}(x)dx. \quad (6)$$

Заметим, что если \bar{f} и $\bar{g} \in \mathcal{L}_2[a, b]$, то интеграл (6) существует, хотя бы как несобственный, в силу неравенства

$$|\bar{f}(x)\bar{g}(x)| \leq \frac{\bar{f}^2(x) + \bar{g}^2(x)}{2}.$$

Определение 3. Линейное пространство \mathcal{L} называется нормированным, если для его элементов введено понятие нормы, то есть каждому элементу \bar{x} поставлено в соответствие число $\|\bar{x}\| \geq 0$, называемое нормой, удовлетворяющее условиям:

1. $(\forall \bar{x} \in \mathcal{L}) (\|\lambda \bar{x}\| = \|\lambda\| \|\bar{x}\|, \lambda \in \mathbb{R})$,

2. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$,
3. $(\|\bar{x}\| = 0) \Leftrightarrow (\bar{x} = 0)$.

Легко проверить, что любое евклидово пространство становится нормированным, если ввести норму следующим образом:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}.$$

Действительно, из аксиом скалярного произведения легко получить неравенство Коши–Буняковского:

$$|(\bar{x}, \bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|. \quad (7)$$

Для доказательства рассмотрим квадрат нормы:

$$\begin{aligned} \|\lambda\bar{x} - \bar{y}\|^2 &= (\lambda\bar{x} - \bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= \lambda^2\|\bar{x}\|^2 - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2 \end{aligned}$$

и заметим, что этот квадратный трехчлен от λ неотрицателен для $\forall \lambda \in R$ и, следовательно, дискриминант его неположителен, так что:

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 - \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2 \leq 0,$$

откуда и следует (7). Из (7) получается неравенство Коши:

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\| &= \sqrt{(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y})} = \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + 2(\bar{x}, \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2} = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|. \end{aligned}$$

Определение 4. Элементы \bar{x} и \bar{y} евклидова пространства называются ортогональными, если

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Определение 5. Система отличных от $\bar{0}$ элементов евклидова пространства $E\{\bar{x}_n\}$ называется ортогональной, если входящие в нее элементы попарно ортогональны, то есть

$$(\forall n \wedge m) (m \neq n) [(\bar{x}_n, \bar{x}_m) = 0].$$

Если при этом $(\forall n) (\|\bar{x}_n\| = 1)$, то система $\{\bar{x}_n\}$ называется ортонормальной.

Иначе говоря, для ортонормальной системы:

$$(\bar{x}_n, \bar{x}_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Если система $\{\bar{x}_n\}$ ортогональна, то система $\frac{\{\bar{x}_n\}}{\|\bar{x}_n\|}$ ортонормальна.

Легко заметить, что любая ортогональная система является линейно-независимой. Действительно, допустив противное, получим, что существует система чисел $\{\bar{c}_k\}$, среди которых есть отличные от 0 (например, $c_i \neq 0$), такая, что

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \dots + c_n\bar{x}_n = \bar{0}.$$

Умножив это равенство скалярно на \bar{x}_i , получим

$$c_i \|\bar{x}_i\|^2 = 0.$$

И так как $\|\bar{x}_i\| \neq 0$, то $c_i = 0$, что противоречит предположению.

1.3 Примеры ортогональных систем

а) Общая тригонометрическая система

$$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots$$

является ортогональной в \mathcal{L}_2 на любом отрезке длиной $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Для доказательства надо проверить, что

$$(\forall n) (\forall m) [(1, \cos n\omega_1 t) = (1, \sin n\omega_1 t) = (\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t) = 0]$$

и

$$(\forall n) (\forall m \neq n) [(\cos n\omega_1 t, \cos m\omega_1 t) = (\sin n\omega_1 t, \sin m\omega_1 t) = 0].$$

Для доказательства полезно вспомнить, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } f(t) \text{ — нечетная функция;} \\ 2 \int_0^{T/2} f(t) dt, & \text{если } f(t) \text{ — четная функция,} \end{cases}$$

очевидно

$$(1, \cos n\omega_1 t) = \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_1 t dt = 0.$$

Например:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t dt &= 2 \int_0^{T/2} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t dt = \\ &= \left(\frac{\sin(n-m)\omega_1 t}{n-m} - \frac{\sin(n+m)\omega_1 t}{n+m} \right) \Big|_0^{\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются другие неравенства.

б) Система функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

является ортогональной на любом отрезке длины 2π .

Вычислим нормы элементов:

$$\|\cos nt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nt) dt = \pi,$$

$$\|\cos nt\| = \sqrt{\pi}.$$

Аналогично

$$\|\sin nt\| = \sqrt{\pi}, \quad \|1\| = \sqrt{2\pi}.$$

Тогда система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

является ортонормальной в $\mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$.

в) Система функций

$$1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots$$

является ортогональной на любом отрезке длины $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$.

В дальнейшем будут даны другие примеры ортогональных систем.

1.4 Ряд Фурье по данной ортогональной системе

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана ортогональная система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{n=\infty}$ и задана последовательность чисел $\{c_n\}_{n=0}^{n=\infty}$.

Образованный из элементов этих последовательностей функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t) = c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \dots \quad (8)$$

называется ортогональным рядом.

Важным в приложениях является вопрос представления функции $f(t)$ в виде ряда по системе функций $\{\varphi_n(t)\}$, то есть в виде суммы сходящегося ряда

$$f(t) = c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \dots$$

Учитывая ортогональность системы $\{\varphi_n(t)\}$ на $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = c_n \int_a^b \varphi_n^2(t)dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда

$$c_n = \frac{(f(t), \varphi_n(t))}{\|\varphi_n(t)\|^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Тогда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[f(t), \varphi_k(t)]}{\|\varphi_k(t)\|^2} \cdot \varphi_k(t). \quad (10)$$

Коэффициенты (9) и ряд (10) называются соответственно коэффициентами Фурье и рядом Фурье для функции $f(t)$.

Таким образом, если $f(t)$ разлагается в ряд по ортогональной системе $\{\varphi_n(t)\}$, то этим рядом может быть только ряд Фурье и, следовательно, разложение единственно.

Мы не можем ответить на вопрос о разложимости $f(t)$, так как не только не знаем, сходится ли полученный ряд к $f(t)$, но даже не знаем, сходится ли он вообще.

Рассмотрим теперь тригонометрический ряд для интегрируемой функции $f(t)$ периода T :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \quad (11)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Соответствие между функцией $f(t)$ и ее тригонометрическим рядом Фурье запишем в виде:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (13)$$

Выражение

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

можно записать в виде гармоника:

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n)$$

с амплитудой

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

начальной фазой

$$\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

и частотой $\omega_n = n\omega_1$, где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Действительно, полагая $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

$$\left| \frac{a_n}{A_n} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{b_n}{A_n} \right| \leq 1, \quad \left(\frac{a_n}{A_n} \right)^2 + \left(\frac{b_n}{A_n} \right)^2 = 1,$$

получим, что найдется φ_n такое, что

$$\frac{a_n}{A_n} = \cos \varphi_n, \quad \frac{b_n}{A_n} = \sin \varphi_n.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t &= A_n \cos \varphi_n \cos n\omega_1 t + A_n \sin \varphi_n \sin n\omega_1 t = \\ &= A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n). \end{aligned}$$

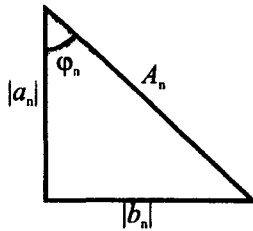


Рис. 2.

Тогда ряд (11) можно записать в виде:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n),$$

где $A_0 = \frac{a_0}{2}$.

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье представляет собой сумму бесконечного числа гармоник с частотами

$$\omega_n = n\omega_1 = n \frac{2\pi}{T},$$

амплитудами гармоник A_n и начальными частотами φ_n , определяемыми коэффициентами Фурье a_n и b_n . Все гармоники имеют общий период $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$.

Суммой сходящегося тригонометрического ряда Фурье является периодическая функция, период которой совпадает с периодом первой гармоники ряда.

Пример. Составить тригонометрический ряд Фурье для периодической функции с периодом T , заданной на $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ формулой

$$f(t) = \begin{cases} E & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ -E & \text{при } -\frac{T}{2} \leq t < 0, \end{cases}$$

и изобразить графически три частные суммы полученного ряда.

Решение. Для нахождения коэффициентов Фурье воспользуемся формулами (12):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0,$$

так как $f(t)$ и $f(t) \cos n\omega_1 t$ – нечетные функции.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \\ &= \frac{4E}{T} \int_0^{T/2} \sin n\omega_1 t dt = \frac{4E}{Tn\omega_1} \left(1 - \cos \frac{n\omega_1 t}{2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $T\omega_1 = 2\pi$, получим

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k; \\ \frac{4E}{\pi(2k-1)} & \text{при } n = 2k - 1. \end{cases}$$

Тогда ряд Фурье для заданной функции примет вид:

$$f(t) \sim \frac{4E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega_1 t}{2k-1} = \quad (14)$$

$$= \frac{4E}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots).$$

Изобразим графически частные суммы:

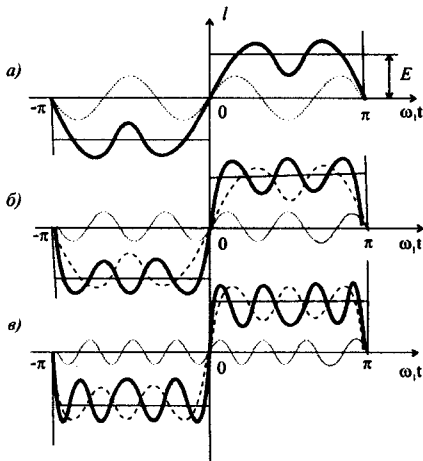


Рис. 3.

$$s_1(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega_1 t;$$

$$s_2(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega_1 t + \frac{4E}{3\pi} \sin 3\omega_1 t;$$

$$s_3(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega_1 t + \frac{4E}{3\pi} \sin 3\omega_1 t + \frac{4E}{5\pi} \sin 5\omega_1 t$$

для $T = 2\pi$ ($\omega_1 = 1$).

Из графиков видно, что s_1 , s_2 , s_3 колеблются относительно исходной функции $f(t)$, причем с прибавлением следующих гармоник эти колебания будут все более частыми.

С увеличением числа членов ряда сумма ряда приближается к $f(t)$ всюду, кроме точек разрыва функции.

Этот дефект сходимости носит название явления Гиббса.

2 СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

2.1 Задача о наилучшем приближении. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье

Пусть задана функция $f(x)$, интегрируемая на $[a, b]$. Поставим задачу отыскания наилучшего приближения этой функции при помощи линейной комбинации

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \varphi_k(x) \quad (15)$$

функций $\varphi_k(x)$, образующих на $[a, b]$ ортонормальную систему, где α_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) – действительные числа.

Задача состоит в отыскании таких чисел α_k , при которых величина

$$s_k^2 = \|s_n(x) - f(x)\|^2$$

была бы наименьшей.

Имеем:

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \int_a^b [s_n^2(x) - 2s_n(x)f(x) + f^2(x)]dx = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_a^b \alpha_k^2 \varphi_k^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx, \end{aligned}$$

так как в силу ортонормальности системы $\{\varphi_k(x)\}$

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0$$

для $k \neq l$.

В силу ортонормальности системы

$$\int_a^b \varphi_k^2(x) dx = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Тогда, обозначая

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x) dx = c_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

имеем:

$$s_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - c_k)^2 \geq 0,$$

то

$$s_n^2 \geq \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2, \quad (16)$$

причем равенство будет иметь место лишь при условии, что

$$\alpha_k = c_k.$$

При этом

$$s_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2.$$

Но при $\alpha_k = c_k$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x)$$

– есть n -я частичная сумма $s_n(x)$ ряда Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, составленного на $[a, b]$ для функции $f(x)$ по бесконечной ортонормированной системе $\varphi_k(x)$.

В этом и состоит экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

Учитывая неотрицательность левой части (16), получим неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx,$$

а так как оно справедливо для $\forall n$, то ряд, составленный из квадратов коэффициентов ряда Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, сходится, и имеет место неравенство:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (17)$$

Это – неравенство Бесселя.

Замечание 1. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k^2 = 0 \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0,$$

то есть последовательность $\{c_k\}$ коэффициентов ряда Фурье сходится к нулю.

2.2 Сходимость в среднем ряда Фурье

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, интегрируемых на $[a, b]$, называется сходящейся в среднем на этом отрезке к некоторой функции $f(x)$ (также интегрируемой на $[a, b]$), если имеет место равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx = 0.$$

Теорема. Чтобы ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$, сходиллся к ней в среднем на $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение условия (равенство Парсеваля):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx. \quad (18)$$

Доказательство. Необходимость.

Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$ вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = 0$.

Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \right] = 0,$$

откуда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 = \int_a^b f(x) dx.$$

Достаточность.

Из (18) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = 0,$$

так что по определению ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$.

2.3 Теоремы о сходимости рядов Фурье

Рассмотрим функцию $f(x) \in \mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$ и запишем для нее тригонометрический ряд Фурье по ортогональной системе

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (19)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Неравенство Бесселя для этого ряда имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Центральным вопросом теории тригонометрических рядов является вопрос о сходимости к $f(x)$. Как показал в 1877 году Дюбуа-Реймонд, существуют непрерывные функции $f(x)$, для которых ряды Фурье расходятся в отдельных точках. Естественна постановка вопросов: 1) каким условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы составленный для нее тригонометрический ряд Фурье сходился и его сумма совпадала с функцией $f(x)$, и, стало быть, в соотношении (19) можно поставить знак равенства; 2) как свойства функции $f(x)$ влияют на характер сходимости ряда?

Первое строгое доказательство теоремы о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье было дано П. Дирихле в 1829 году. Прежде чем сформулировать теоремы о сходимости рядов Фурье, рассмотрим вспомогательные вопросы.

Определение 1. Функция $f(t)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$, на каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна, и существуют конечные предельные значения:

$$\lim_{t \rightarrow a+0} f(t) = f(a + 0), \quad \lim_{t \rightarrow b-0} f(t) = f(b - 0),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i \pm 0} f(t) = f(t_i \pm 0), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Определение 2. Функция $f(t)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[a, b]$, если она кусочно-непрерывна и в каждом интервале имеет кусочно-непрерывную производную.

Определение 3. Ортонормальная на данном сегменте $[a, b]$ система функций $\{\varphi_n(t)\}$ называется полной относительно данного класса функций, если для любой из функций $f(t)$ этого класса выполняется равенство Парсеваля.

Определение 4. Ортогональная система $\{\varphi_n(t)\}$ на данном сегменте $[a, b]$ кусочно-непрерывных функций называется замкнутой, если любая функция $f(t)$ в этом классе, ортогональная ко всем функциям данной системы $\{\varphi_n(t)\}$, тождественно равна нулю на множестве своих точек непрерывности.

Примером замкнутой ортонормальной системы является тригонометрическая система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},$$

рассмотренная на $[-\pi, \pi]$.

Замкнутость и полнота ортонормальной системы функций связаны между собой.

Теорема. Две кусочно-непрерывные на $[a, b]$ функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие относительно данной замкнутой ортонормальной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n(t)\}$ кусочно-непрерывных функций один и тот же ряд Фурье, совпадают между собой на этом сегменте, за исключением, может быть, конечного числа точек.

Доказательство. Составим функцию $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$.

Очевидно, что $f(t)$ снова кусочно-непрерывна на $[a, b]$. Обозначим коэффициенты Фурье функций $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ относительно системы $\{\varphi_n(t)\}$ соответственно c_n , c'_n , c''_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Тогда

$$c_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f_1(t) - f_2(t)]\varphi_n(t)dt = c'_n - c''_n.$$

Однако, по условию, у функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ один и тот же ряд Фурье относительно $\{\varphi_n(t)\}$ и, значит, $c_n = c'_n = c''_n$ для всех n , то есть

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = 0;$$

следовательно, функция $f(t)$ ортогональна ко всем функциям.

Отсюда получается, что $f_1(t) = f_2(t)$ для всех $t \in [a, b]$ за тем же возможным исключением.

Следствие. Если для непрерывной (кусочно-непрерывной) на сегменте $[a, b]$ функции $f(t)$ ее ряд Фурье, относительно замкнутой ортонормальной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n(t)\}$ непрерывных (кусочно-непрерывных) функций, равномерно сходится на этом сегменте $[a, b]$, то он сходится именно к данной функции $f(t)$.

Пример. Составить для функции $f(x) = x^2$ ее тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ и исследовать его сходимость.

Решение. Так как $f(x) = x^2$ четная функция, то для определения коэффициентов Фурье имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{4}{n\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right] \Bigg|_0^{\pi} = \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2}; \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} + \dots \right].$$

Ряд, стоящий в скобках, сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ (как мажорируемый рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), а функция $f(x)$ непрерывна.

Тогда по следствию

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} + \dots \right].$$

2.4 Интеграл Дирихле

Пусть дан тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

некоторой кусочно-непрерывной на $[-\pi, \pi]$ периодической функции $f(x)$ с периодом 2π . Его $(n+1)$ частичная сумма будет:

$$s_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Подставляя в $s_n(x, f)$ выражения для коэффициентов Фурье, получим:

$$\begin{aligned} s_n(x, f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz.$$

Тогда после замены $t-x = z$ получим:

$$s_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z) \mathcal{D}_n(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \mathcal{D}_n(z) dz \quad (20)$$

(в силу периодичности функции $f(t)$).

Функция $\mathcal{D}_n(z)$ называется ядром Дирихле, а интеграл, стоящий в правой части (20), называется интегралом Дирихле.

Применяя формулы Эйлера:

$$\cos kz = \frac{1}{2}(e^{ikz} + e^{-ikz}),$$

$$\sin kz = \frac{1}{2i}(e^{ikz} - e^{-ikz}),$$

получаем $\mathcal{D}_n(z)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(z) &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikz} + e^{-ikz}) \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikz} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1)z} - e^{-i(n+1)z}}{e^{iz} - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})z} - e^{-i(n+\frac{1}{2})z}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})z}{\sin \frac{z}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz = \frac{1 \sin(n + \frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}}. \quad (21)$$

Разобьем интеграл Дирихле на два:

$$\begin{aligned} s_n(x, f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \mathcal{D}_n(z) dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \mathcal{D}_n(z) f(x+z) dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(z) f(x+z) dz. \end{aligned}$$

Делаем замену переменной в первом интеграле $z = -t$:

$$\begin{aligned} s_n(x, f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(t) f(x-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(z) f(x+z) dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$s_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (22)$$

Положив в (22) $f(t) = 1$ и, учитывая, что для такой функции $s_n(1) = 1$, получим:

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (23)$$

2.5 Основная лемма Римана

Если функция $g(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin ptdt = 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos ptdt = 0.$$

Доказательство достаточно провести для первого из этих пределов, предполагая функцию $g(t)$ непрерывной. Разобьем $[a, b]$ на n частичных отрезков точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и представим рассматриваемый интеграл в виде

$$I = \int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin ptdt,$$

обозначим через m_i наименьшее значение $g(t)$ на i -том частичном отрезке, тогда:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \sin ptdt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin ptdt + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} m_i \sin ptdt = \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

Если ω_i есть колебание функции $g(t)$ на i -том частичном отрезке, то $g(t) - m_i \leq \omega_i$. Задавая $\forall \varepsilon > 0$, выберем дробление отрезка $[a, b]$ так, чтобы

$$\omega_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

(это можно сделать ввиду непрерывности $g(t)$ на $[a, b]$).

Оценим каждую из сумм:

$$|\Sigma_1| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_i |\sin pt| dt \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\Sigma_2| = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin ptdt < \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Выберем

$$p > \frac{4}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Тогда для этих значений p имеем:

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ptdt \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{p \rightarrow \infty} I = 0$.

Следствие. Коэффициенты Фурье a_m и b_m кусочно-непрерывной функции при $m \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

2.6 Общая теорема о сходимости ряда Фурье

Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-гладкая в промежутке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье в каждой точке $x = x_0$ сходится и имеет сумму

$$s_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

(Эта сумма в точке непрерывности $x = x_0$ равна $f(x_0)$).

Доказательство. Умножим обе части равенства (23) на постоянное число s_0 и вычтем полученный результат из (22). Получим

$$s_n(x_0) - s_0 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Надо доказать, что интеграл справа при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Представим его в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt, \quad (24)$$

где

$$g(t) = \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} - \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t} \right] \frac{t/2}{\sin t/2}. \quad (25)$$

Если мы докажем, что эта функция кусочно-непрерывна, то из доказанной леммы будет следовать, что $s_n - s_0$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. В промежутке $[0, \pi]$ функция $g(t)$ непрерывна, за исключением разве лишь конечного числа точек, где она может иметь скачки.

Вызывает сомнения лишь единственная точка $t = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль.

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} g(t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \right] \times \\ &\quad \times \frac{t/2}{\sin t/2} = f'_{\text{пр}} - f'_{\text{лев}}. \end{aligned}$$

Если x_0 — точка гладкости, то $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = 0$. Если же x_0 — точка стыка, то она может оказаться как точкой непрерывности, так и точкой разрыва. В последнем случае

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = k.$$

Следовательно, функция $g(t)$ кусочно-непрерывна на $[0, \pi]$.

Тогда по лемме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = s_0,$$

и теорема доказана.

Замечание 1. Пусть $f(x)$ – периодическая с периодом $T = 2l$ кусочно-гладкая функция на $[-l, l]$. Производя замену переменной $x = \frac{lt}{\pi}$, получим $F(t) = f(\frac{lt}{\pi})$ периодическую с периодом 2π кусочно-гладкую функцию на $[-\pi, \pi]$, для которой

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin ktdt.$$

Возвращаясь к старой переменной x , получим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}), \quad (26)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dt.$$

Пример. Функция $l(t)$ периода T определена на отрезке $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ равенством

$$l(t) = \frac{2E}{T} |t| \quad (-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}),$$

удовлетворяет доказанному признаку сходимости. Эта функция определяет последовательность треугольных импульсов (рис. 4).

Функция $l(t)$ непрерывна при любом t , кроме

$$t = n \frac{T}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

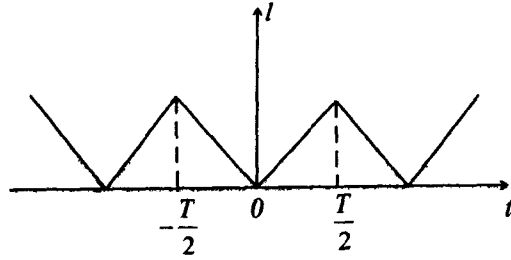


Рис. 4.

Так как $l(t)$ – функция четная, то ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2E}{T} t dt = \frac{4E T^2}{T^2} \frac{1}{4} = E,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2E}{T} \cos \omega t dt = \frac{8E}{T^2} \left(\frac{t}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \right) \Bigg|_0^{\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}} = \\ &= \frac{8E}{T^2} \frac{1}{n^2 \omega^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4E}{\pi^2 (2k-1)^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Согласно доказанной теореме,

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)}{(2k-1)^2} = \\ &= \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots \right]. \end{aligned}$$

Тот факт, что этот ряд сходится равномерно, следует и из общей теории функциональных рядов (по признаку Вейерштрасса).

Отметим, что данная функция $l(t)$ совпадает с функцией $y = \frac{8E}{T} |t|$ только на отрезке $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$.

Замечание 2. Помимо доказанного признака сходимости ряда Фурье существует целый ряд других признаков. Один из них – признак Дирихле:

если функция $f(t)$ кусочно-непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем не более чем конечное число точек разрыва первого рода, то ее ряд Фурье сходится на $[\pi, \pi]$ к $f(t)$ в каждой точке t_0 непрерывности $f(t)$ на $(-\pi, \pi)$ и к

$$s_0 = \frac{f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)}{2}$$

в каждой точке разрыва.

Этот признак не требует ни кусочной непрерывности производной $f'(t)$, ни даже ее существования.

Пример. Функция на отрезке $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ задана соотношением

$$f(t) = \frac{2E}{T} t \quad \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \right)$$

(пилообразное колебание).

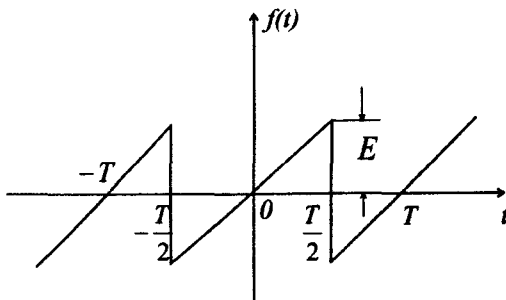


Рис. 5.

Функция удовлетворяет условиям Дирихле: $f(t)$ возрастает и ограничена на $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, и

$$f\left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{f\left(-\frac{T}{2} + 0\right) + f\left(-\frac{T}{2} - 0\right)}{2} = \frac{-E + E}{2} = 0,$$

$$f\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{T}{2} + 0\right) + f\left(\frac{T}{2} - 0\right)}{2} = \frac{-E + E}{2} = 0.$$

Функция $f(t)$ нечетная, поэтому:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2E}{T} \sin n\omega t dt = \frac{2E}{n\pi} (-1)^{n-1}$$

и

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin \omega t + \dots).$$

Как видим, амплитуда гармоник убывает по закону $\frac{1}{n}$.

2.7 Разложение непериодической функции в ряд Фурье

Мы уже отмечали, что сумма тригонометрического ряда Фурье данной функции $f(x)$ есть функция периодическая. Между тем, заданная функция может быть и непериодической. Поэтому, если мы хотим связать с $f(x)$ ту функцию, которую ее ряд Фурье выражает и вне сегмента $[-\pi, \pi]$, мы вынуждены для $f(x)$ построить ее периодическое продолжение.

Определение. Пусть $f(x)$ задана на сегменте $[a, a + 2l]$. Функция $F(x)$ называется периодическим продолжением $f(x)$ на $(-\infty; \infty)$ с периодом $2l$, если $F(x)$ – периодическая функция (периода $2l$), совпадающая на $[a, a + 2l]$ с $f(x)$.

Периодическое продолжение $F(x)$ для $f(x)$ может быть построено различными способами. Например:

$$F = \begin{cases} f(x) & \text{при } a < x < a + 2l, \\ f(x - 2kl) & \text{при } a + 2kl < x < a + 2(k + 1)l \\ & (k = \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases} \quad (27)$$

Заметим, что в точках вида $x = a + 2kl$, и только в этих точках, $F(x)$ пока не определена. Часто бывает невозможно потребовать, чтобы $F(x)$ совпадала с $f(x)$ на концах сегмента $[a, a + 2l]$, так как $f(a + 2l)$ и $f(a)$, вообще говоря, разные числа. В то же время функция $F(x)$ должна быть периодической по определению и

$$F(a) = F(a + 2l).$$

Докажем, что $F(x)$ является периодической с периодом $2l$. В самом деле, если

$$2 + 2kl < x < a + 2(k + 1)l,$$

то

$$a - 2(k + 1)l < x + 2l < a + 2(k + 2)l,$$

поэтому из соотношения (27) имеем:

$$F(x + 2l) = f[x + 2l - 2(k + 1)l] = f(x - 2kl) = F(x).$$

К построенной таким образом функции $F(x)$ с периодом $2l$ применима теория разложения функции в ряд Фурье.

Пусть, например, $F(x)$ периодическая с периодом $T = b - a = 2l$ кусочно-гладкая функция. Тогда, согласно (26):

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b F(x) \cos \frac{2k\pi x}{b-a} dx,$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b F(x) \sin \frac{2k\pi x}{b-a} dx.$$

Так как на (a, b) $F(x) \equiv f(x)$, то и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

на (a, b) .

В точках же a и b сумма ряда равна

$$\frac{1}{2}[f(a+0) + f(b-0)].$$

Пример. $y = x^2$ на $[1, 2]$

$$x^2 = \frac{7}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos 2\pi kx}{\pi^2 k^2} - \frac{3 \sin 2\pi kx}{\pi k} \right).$$

2.8 Разложение функций на сегменте $[0, l]$

Пусть $f(x)$ кусочно-гладкая функция на $[0, l]$. Для получения искомого разложения можно продолжить заданную на $[0, l]$ функцию $f(x)$ как четную, так и нечетную на $[-l, l]$.

Для четного продолжения полагаем (рис. 6а):

$$F_1(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{при } -l \leq x < 0, \\ f(x) & \text{при } 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а для нечетного (рис. 6б) –

$$F_2(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{при } -l \leq x < 0, \\ f(x) & \text{при } 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются кусочно-гладкими на $[-l, l]$. Следовательно, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ можно разложить в ряд Фурье.

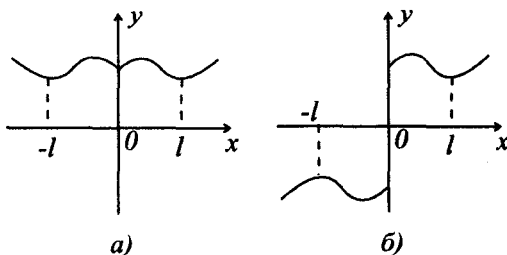


Рис. 6.

Но $F_1(x)$ – четная, а $F_2(x)$ – нечетная функции и соответствующие им ряды Фурье на $[-l, l]$ должны содержать только косинусы или только синусы.

Поскольку на $[0, l]$ $F_1(x)$ и $F_2(x)$ совпадают с $f(x)$, то мы получаем для $f(x)$ требуемое разложение на $[0, l]$. При этом для случая четного продолжения имеем:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

а для нечетного:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Таким образом, коэффициенты Фурье можно отыскивать прямо по $f(x)$. При этом для четного продолжения:

$$F_1(+0) = F_1(-0) = f(+0).$$

Аналогично, в точке $x = l$ ряд будет сходиться к $f(l - 0)$.

Для нечетного продолжения на концах сегмента $[0, l]$ ряд Фурье не будет сходиться к $f(x)$.

Пример. Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{4}(x - 2\pi)$ на $[0, \pi]$ по косинусам.

$$\frac{x}{4}(x - 2\pi) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Замечание. Если требуется разложить $f(x)$ на $[a, b]$, то предварительно делаем замену:

$$y = (x - a) \frac{\pi}{b - a},$$

переводящую $[a, b]$ в $[0, \pi]$.

2.9 Комплексная форма ряда Фурье

Пусть

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

– ряд Фурье функции $f(t)$ периода T , a_n и b_n определяются соотношениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos n\omega t = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2},$$

$$\sin n\omega t = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i},$$

запишем тригонометрический ряд Фурье в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{in\omega t} \end{aligned}$$

или короче

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt - \frac{i}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt, \\ c_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{in\omega t} dt. \end{aligned}$$

Выражения для c_n и c_{-n} можно записать в виде одной формулы:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (29)$$

Ряд (28), коэффициенты которого находятся по формуле (29), называется рядом Фурье в комплексной форме.

Пример. Представить на отрезке $[-\pi, \pi]$ рядом Фурье в комплексной форме функцию $f(t) = e^{\alpha t}$.

Решение. По формуле (29), полагая $T = 2\pi$, находим:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)t} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\alpha - in)} e^{(\alpha - in)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(\alpha - in)} [e^{(\alpha - in)\pi} - e^{-(\alpha - in)\pi}].$$

Заметим, что для любого целого n

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n,$$

поэтому

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(\alpha - in)} (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{(-1)^n \operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi(\alpha - in)}.$$

Тогда

$$e^{\alpha t} = \frac{\operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha - in)} e^{int} \quad (-\pi < t < \pi).$$

3 РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

3.1 Система функций Бесселя

Определение. Система функций $\{\varphi_n(t)\}$ называется ортогональной на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$, если:

а) интегралы

$$\int_a^b \varphi_n^2 \rho(t) dt$$

существуют для всех $n = 0, 1, 2, \dots$;

б) функции $\varphi_n(t)$ и $\varphi_m(t)$ ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$, то есть

$$\int_a^b \varphi_n \varphi_m(t) \rho(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \alpha_n \neq 0 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (30)$$

Для функции $f(t)$, заданной на $[a, b]$ по этой системе функций, можно составить ряд:

$$c_0 \varphi_0(t) + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \dots, \quad (31)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$c_n = \frac{\int_a^b f(t) \varphi_n \rho(t) dt}{\int_a^b \varphi_n^2 \rho(t) dt} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (32)$$

Ряд (30) называется рядом Фурье, а числа c_n , определяемые по формуле (32), называются коэффициентами Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_n(t)\}$ с весом $\rho(t)$.

Как и для ортогональных систем, для систем, ортогональных с весом, имеет место теорема.

Теорема 3.1. Если функция $f(t)$ разложена в равномерно сходящийся на $[a, b]$ ряд по функциям $\varphi_n(t)$ системы, ортогональной с весом $\rho(t)$ на $[a, b]$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad (33)$$

то коэффициенты c_n этого ряда находятся по формуле (32).

В самом деле, после почленного умножения ряда на $\rho(t)\varphi_n(t)$ его равномерная сходимость на $[a, b]$ не нарушается, и почленное интегрирование по t на $[a, b]$ в силу свойств (30) приведет к равенству:

$$\int_a^b \rho(t) \varphi_n f(t) dt = c_n \int_a^b \rho(t) [\varphi_n]^2 dt$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots),$$

отсюда и получаем (32).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ – занумерованные в порядке возрастания положительные корни функции Бесселя $J_p(t) (p > 1)$.

Рассмотрим систему функций:

$$J_p(\lambda_1 t), J_p(\lambda_2 t), \dots, J_p(\lambda_n t), \dots \quad (34)$$

Геометрическое представление о функциях системы (34) дают графики функций:

$$y = J_1(\lambda_1 t); y = J_1(\lambda_2 t); y = J_1(\lambda_3 t),$$

которые рассматриваются на $[0, 1]$ (рис. 7).

Графики функций $y = J_1(\lambda_n t) (n = 3, 4, \dots)$ для $[0, 1]$ будут иметь все более сложную природу – число «волн» будет возрастать.

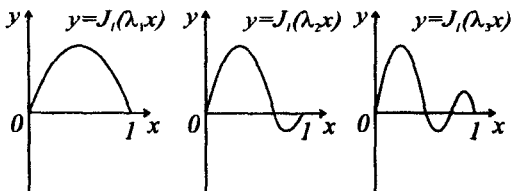


Рис. 7.

Можно доказать, что функции (34) образуют на $[0, 1]$ ортогональную систему с весом $\rho(t) \cdot t$, а именно:

$$\int_0^1 J_p(\lambda_n t) J_p(\lambda_m t) t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{[J'_p(\lambda_n)]^2}{2}, & m = n. \end{cases} \quad (35)$$

Кроме того,

$$\int_0^1 J_p^2(\lambda_n t) t dt = \frac{[J'_p(\lambda_n)]^2}{2} = \frac{J_{p+1}(\lambda_n)}{2}. \quad (36)$$

Определение. Функция $f(t)$ называется абсолютно интегрируемой на $[a, b]$, если интеграл

$$\int_a^b |f(t)| dt$$

существует.

Для данной функции $f(t)$, абсолютно интегрируемой на $[0, 1]$, можно составить ряд по ортогональной системе (34):

$$c_1 J_p(\lambda_1 t) + c_2 J_p(\lambda_2 t) + c_3 J_p(\lambda_3 t) + \dots, \quad (37)$$

называемый рядом Фурье-Бесселя. Коэффициенты c_n согласно (34) и (36) определяются соотношением:

$$c_n = \frac{\int_0^1 t f(t) J_p(\lambda_n t) dt}{\int_0^1 t J_p^2(\lambda_n t) dt} = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 t f(t) J_p(\lambda_n t) dt \quad (38)$$

и называются коэффициентами Фурье–Бесселя.

Запись

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n t)$$

означает лишь, что ряд Фурье–Бесселя составлен для функции $f(t)$, но остается открытым вопрос о сходимости его к $f(t)$.

3.2 Признаки сходимости рядов Фурье–Бесселя

Сформулируем без доказательства наиболее важные признаки сходимости ряда Фурье–Бесселя к функции, для которой он составлен.

Эти признаки аналогичны известным признакам сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Теорема 3.2. Ряд Фурье–Бесселя ($p \geq -\frac{1}{2}$) кусочно-гладкой на $[0, 1]$ функции $f(t)$ сходится в каждой точке на $0 < t < 1$, причем его сумма в каждой точке непрерывности равна этой функции и равна числу

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

в точках разрыва.

Для $t = 1$ всегда, а для $t = 0$ при $p > 0$ ряд сходится к нулю (поскольку при этих значениях все функции системы (34) обращаются в нули). Заметим, что для $p < 0$ все функции системы (34) принимают бесконечные значения при $t = 0$, и поэтому говорить о сходимости ряда в этой точке не имеет смысла.

Теорема 3.3. Ряд Фурье-Бесселя ($p \geq -\frac{1}{2}$) функций $f(t)$ абсолютно интегрируемой на $[0, 1]$, непрерывной и имеющей абсолютно интегрируемую производную на отрезке $[a, b]$ ($a \geq 0, b < 1$), сходится равномерно на каждом отрезке $[a + \delta, b - \delta]$ ($\delta > 0$).

Пример. Разложить в ряд Фурье-Бесселя по системе

$$J_p(\lambda_1 t), J_p(\lambda_2 t), \dots, J_p(\lambda_n t), \dots$$

функцию $f(t) = tp$ для $0 < t < 1$.

Решение. По формуле (38)

$$c_n = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 t^{p+1} J_p(\lambda_n t) dt \quad (n = -1, 2, \dots).$$

Но

$$\int_0^1 t^{p+1} J_p(\lambda_n t) dt = \frac{1}{\lambda_n^{p+2}} \int_0^{\lambda_n} x^{p+1} J_p(x) dx \quad [(\lambda_n t) = x].$$

В силу свойств функции Бесселя

$$\frac{d}{dt} [t^{p+1} J_{p+1}(t)] = t^{p+1} J_p(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_n} x^{p+1} J_p(x) dx &= \int_0^{\lambda_n} [x^{p+1} J_{p+1}(x)]' dx = \\ &= [x^{p+1} J_{p+1}(x)]_{x=0}^{x=\lambda_n} = \lambda_n^{p+1} J_{p+1}(\lambda_n) \end{aligned}$$

и

$$\int_0^1 t^{p+1} J_p(\lambda_n t) dt = \frac{1}{\lambda_n} J_{p+1}(\lambda_n).$$

Поэтому

$$c_n = \frac{2}{\lambda_n J_{p+1}(\lambda_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Вследствие теоремы 3.2 при $p \geq -\frac{1}{2}$ имеем:

$$t^p = 2 \left[\frac{J_p(\lambda_1 t)}{\lambda_1 J_{p+1}(\lambda_1)} + \frac{J_p(\lambda_2 t)}{\lambda_2 J_{p+1}(\lambda_2)} + \dots \right]$$

для $0 < t < 1$.

3.3 Спектральный анализ периодических сигналов

В радиотехнике, радиолокации, автоматическом управлении и других областях техники основными проблемами являются получение, передача и обработка информации. Носителями информации являются сигналы. Сигналы – это физические процессы, протекающие в системе.

Электро- и радиосигналами называются электромагнитные процессы, несущие информацию.

При теоретическом исследовании используют, как правило, математическую модель сигнала. В зависимости от способа описания сигнала она может быть построена по-разному. Важнейшими формами представления сигналов являются временное и спектральное представления.

В первом случае сигнал описывается как функция времени, во втором – как сумма ортогональных составляющих. Сигнал может быть представлен этими способами в области как действительных, так и комплексных величин.

Для спектрального представления периодических сигналов применяется разложение в тригонометрический ряд Фурье.

Пусть для функции $f(t)$ периода T ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) =$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n),$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n.$$

Здесь ω_1 – основная частота, $\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$ – начальная фаза.

Как видим, периодический сигнал можно рассматривать как результат наложения постоянной составляющей A_0 и бесконечно большого числа гармонических колебаний с частотами

$$\omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots, \omega_n = n\omega_1, \dots, \quad (39)$$

амплитудами

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, \quad (40)$$

начальными фазами

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (41)$$

Представление периодической функции (сигнала) с помощью спектра частот (39), спектра амплитуд (40), фаз (41), называется спектральным.

При спектральных методах анализа линейных электрорадиотехнических цепей широко используется понятие амплитудно-частотного (АЧС) и фазо-частотного (ФЧС) спектров.

Определение. Распределение амплитуды и фазы гармоник в зависимости от частоты называется соответственно амплитудно-частотным и фазо-частотным спектром (АЧС и ФЧС).

АЧС и ФЧС удобно изображать графически в виде отдельных линий.

На оси абсцисс откладывают значения частоты $0, \omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots$ и в точках $\omega_n = n\omega_1$ откладывают на перпендикулярах отрезки длиной A_n (рис. 8а) в выбранном масштабе.

Аналогично строится график ФЧС (рис. 8б).

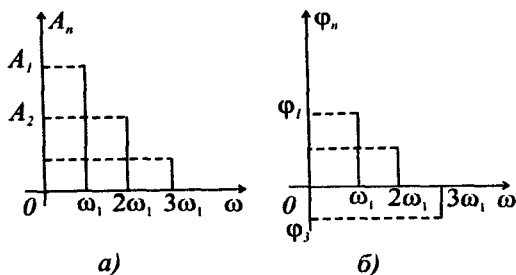


Рис. 8.

Спектр периодической функции называется линейчатым или дискретным, так как он состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам.

Для четной функции $f(t)$ $b_n = 0$, а для нечетной — $a_n = 0$. Следовательно, АЧС и ФЧС четной периодической функции $A_n = |a_n|$, $\varphi_n = 0$, а для нечетной периодической функции $A_n = |b_n|$, $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$.

В зависимости от конкретного вида сигнала (функции) в его разложении могут отсутствовать некоторые гармоники, общее число гармоник может оказаться конечным. Однако всегда гармоничность спектра (то есть расстояние между соседними линиями спектра) сохраняется, так как частоты имеющихся гармоник всегда находятся в простых кратных соотношениях. Относительно отсутствующих гармоник нужно иметь в виду, что амплитудам их приписаны нулевые значения. Кривая, соединявшая концы линий спектра, называется огибающей спектра амплитуд (фаз) (рис. 9).

Для комплексной записи ряда Фурье

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}$$

комплексные амплитуды вычисляются так:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt \right| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

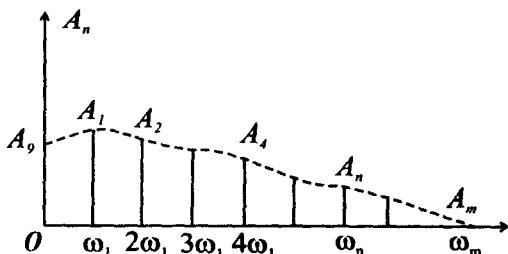


Рис. 9.

В этом случае шкала частот дополняется отрицательной полуосью. Амплитудный и фазовый спектры изображаются парами отрезков соответствующих положительным и отрицательным значениям частот $n\omega_1$ и $-n\omega_1$. При этом АЧС становится симметричным относительно оси ординат, а ФЧС — относительно начала координат.

Следует иметь в виду, что отрицательная частота $-n\omega_1$ лишена физического смысла. Это математическая абстракция. Представление вещественной гармоникой в виде суммы двух комплексных слагаемых применяется лишь из-за более удобной и простой математической записи при обработке задач спектрального анализа электрических цепей.

Временной и спектральный способы представления сигналов равноправны и взаимозаменяемы: периодическая функция $f(t)$ полностью определяет ее спектры, и, наоборот, зная спектры, можно указать какой периодической функции они принадлежат. Эти способы являются различными способами описания реально существующих процессов. Благодаря взаимно однозначному соответствию между временным и спектральным способами представления сигнала, в

ряде технических задач оказывается удобным операции над периодическими процессами заменять операциями над спектрами, характеризующими эти процессы.

Пример. Пусть $u(t)$ определяет периодическую последовательность прямоугольных импульсов с амплитудами u_m , длительностью t_n и периодом следования $t = \frac{2\pi}{\omega_1}$ (рис. 10). Такие импульсы применяются, например, в радиолокации, телевидении, автоматике.

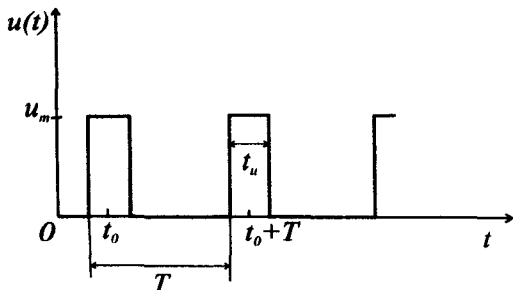


Рис. 10.

Функция $u(t)$ в пределах периода может быть описана как

$$u(t) = \begin{cases} u_m, & (t_0 - \frac{t_n}{2}) < t < (t_0 + \frac{t_n}{2}), \\ 0, & (t_0 + \frac{t_n}{2}) < t < (t_0 - \frac{t_n}{2} + T). \end{cases}$$

Переходя к спектральному представлению, определим коэффициенты ее разложения в ряд Фурье.

В комплексной форме имеем:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega_1 t} dt = \frac{u_m}{T} \int_{t_0 - \frac{t_n}{2}}^{t_0 + \frac{t_n}{2}} e^{-in\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{u_m}{-in\omega_1 T} e^{-in\omega_1 t} \Big|_{t_0 - \frac{t_n}{2}}^{t_0 + \frac{t_n}{2}} = \frac{u_m}{\pi n} \frac{1}{2i} [e^{in\omega_1(-t_0 + \frac{t_n}{2})} - e^{in\omega_1(-t_0 - \frac{t_n}{2})}] = \end{aligned}$$

$$= \frac{u_m}{q} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{n\pi/q} e^{-in\omega_1 t_0},$$

где $q = \frac{T}{T_n}$ называется скважностью импульсной последовательности ($T = \frac{2\pi}{\omega_1}$).

Получаем ряд Фурье для $u(t)$ в комплексной форме

$$u(t) = \frac{u_m}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} e^{-in\omega_1(t-t_0)}.$$

Используя формулы Л.Эйлера, перейдем к вещественной форме:

$$u(t) = \frac{u_m}{q} + \frac{2u_m}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos n\omega_1(t-t_0).$$

Здесь $A_0 = \frac{u_m}{q}$ – постоянная составляющая.

$$A_n = \frac{u_m}{q} \left| \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \right| \quad (42)$$

– амплитуда n -ой гармоники.

При больших значениях q амплитудный спектр содержит очень большое число медленно убывающих по амплитуде гармоник (рис. 11).

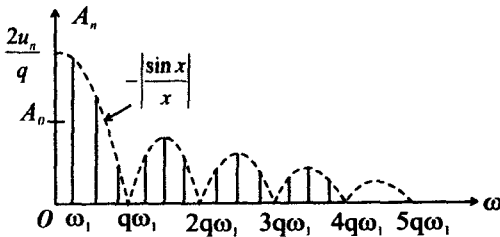


Рис. 11.

Расстояние между спектральными линиями очень мало, а амплитуды соседних гармоник близки по величине. Это видно из формулы (42).

При малых n можно считать:

$$A_n \approx \frac{2u_m}{q}.$$

Построение ФЧС этого сигнала аналогично.

4 РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ЧЕБЫШЕВА

Мы уже отмечали, что в тех случаях, когда требуется аппроксимировать заданную функцию $f(x)$ с помощью ограниченного числа членов ряда, применяются различные ортогональные системы специальных, негармонических функций.

Для представления непрерывных сигналов наиболее употребительны ортогональные полиномы Лежандра, Лагерра, Чебышева, Эрмита и др.

Рассмотрим простейшие свойства многочленов Чебышева и вопросы разложения функций в ряд Чебышева. Многочлены Чебышева заняли исключительное положение в математике последних десятилетий как важнейшее средство теоретических и практических исследований.

В 20-х-30-х годах двадцатого столетия выяснилось, что среди очень большого числа разложений функции по различным ортогональным системам особое положение занимает разложение функции в ряды по многочленам Чебышева. Оказалось, что замечательные свойства многочленов Чебышева первого рода заключаются, прежде всего, в том, что эти многочлены наименее отклоняются от нуля на отрезке $[-1, 1]$, обеспечивают, обычно, более быструю сходимость разложений функций в ряд по многочленам Чебышева по сравнению с их разложениями в степенной ряд или в ряд по другим специальным многочленам или функциям. Широко применяются многочлены Чебышева в прикладных вопросах, например, они эффективны при аппроксимации амплитудно-частотных характеристик различных фильтров.

Перейдем к определению и изучению простейших свойств многочленов Чебышева.

4.1 Многочлены Чебышева

Вспомним, что $y = \arccos x$ есть функция с областью определения $[-1, 1]$, график которой представлен на рис. 12. Его мы получим, построив график функции $x = \cos y$ и вырезав из него отрезок от $y = 0$ до $y = \pi$. Итак, по определению $\arccos x$ — это дуга, заключенная на отрезке от 0 до π , косинус которой равен x .

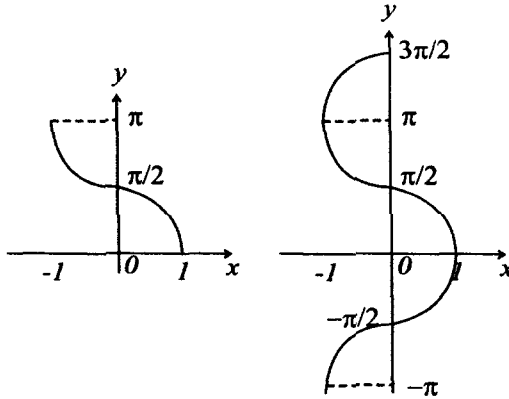


Рис. 12.

Определение. Функция

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (43)$$

называется многочленом Чебышева первого рода.

Из тригонометрического тождества

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi \approx 2 \cos \varphi \cos n\varphi,$$

полагая в нем $\varphi = \arccos x$ для функций $T_n(x)$, находим рекуррентное соотношение:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (44)$$

Поскольку $T_0(x) = \cos 0 = 1$, $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$ при любом n , $T_n(x)$ – есть алгебраический многочлен степени n .

Таким образом, многочлен Чебышева первого рода $T_n(x)$ – это многочлен от x степени n , заданный на отрезке $[-1, 1]$. С помощью формулы (44) можно вычислить последовательно:

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = x;$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;$$

...

Графики $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$, $T_5(x)$, $T_6(x)$ приведены на рис. 13.

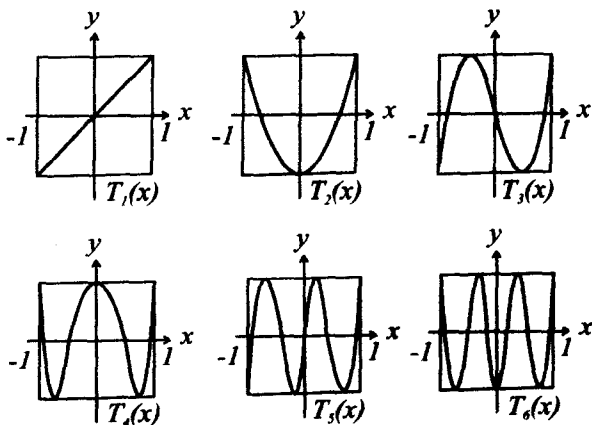


Рис. 13.

Отметим некоторые свойства многочленов Чебышева:

1. Коэффициент при старшем члене многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$ равен 2^{n-1} .
2. На интервале $[-1, 1]$ многочлен $T_n(x)$ имеет n различных действительных корней.
3. Для многочлена Чебышева имеет место соотношение:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

Действительно, пусть $\varphi = \arccos x$. Тогда

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi; \quad \sqrt{x^2 - 1} = i \sin \varphi, \\ \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} &= \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{2} + \\ + \frac{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n}{2} &= \frac{(e^{i\varphi})^n + (e^{-i\varphi})^n}{2} = \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2} = \\ &= \cos n\varphi = \cos(n \arccos x) = T_n(x). \end{aligned}$$

4. Можно доказать, что степени переменной x выражаются в виде линейных комбинаций многочленов Чебышева.

$$\begin{aligned} 1 &= T_0(x), \\ x &= T_1(x), \\ x^2 &= \frac{1}{2}[T_2(x) + T_0(x)], \\ x^3 &= \frac{1}{4}[T_3(x) + 3T_1(x)], \\ x^4 &= \frac{1}{8}[T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)], \\ &\dots \end{aligned} \tag{45}$$

Особое значение имеют многочлены Чебышева с коэффициентом при старшем члене равном 1. Они могут быть записаны в виде:

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_n^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Эти многочлены дают решение следующей задачи, поставленной в 1854 году Чебышевым:

среди многочленов $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1 определить многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Именно Чебышев показал, что имеет место соотношение

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n^*| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)|,$$

то есть при любом $n > 1$ из всех многочленов степени n с коэффициентом 1 при старшем члене наименее уклоняется от нуля на $[-1, 1]$ многочлен $T_n^*(x)$, причем наименее уклоняющийся от нуля многочлен единственен. Этим свойством многочлены Чебышева выделяются среди всех многочленов.

Докажем еще одно важное свойство многочленов Чебышева.

Теорема 4.1. Многочлены Чебышева первого рода ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \rho(x) dx &= \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} x = \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \\ T_n(x) = T_n(\cos x) = \cos n\varphi \\ T_m(x) = T_m(\cos x) = \cos m\varphi \end{array} \right] = \int_{\pi}^0 \cos n\varphi \cos m\varphi \frac{-\sin \varphi}{|\sin \varphi|} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases}$$

Получим:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi,$$

$$\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (46)$$

Таким образом, многочлены Чебышева первого рода

$$T_0(x), T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x), \dots \quad (47)$$

образуют ортогональную систему функций на $[-1, 1]$ и интегрируемы с весом

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.2 Ряды Фурье по многочленам Чебышева

Пусть функция $f(x)$ задана на $[-1, 1]$ и интегрируема с весом

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Построим для этой функции ортогональный ряд по системе (47)

$$c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots, \quad (48)$$

коэффициенты которого ищутся в виде:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (49)$$

Ряд (48) называется рядом Фурье по многочленам Чебышева (или просто рядом Чебышева), а числа c_0, c_n , определяемые по формуле (49) – коэффициентами Фурье–Чебышева для функции $f(x)$.

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(x). \quad (50)$$

Прежде чем рассмотреть примеры рядов Чебышева, отметим, что если в формулах (49) произвести подстановку $x = \cos t$, то получим равносильные, а часто более удобные формулы

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) dt,$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) \cos ntdt.$$

4.3 Сходимость рядов Фурье–Чебышева

Исследуем вопрос, когда в соотношение (50) можно поставить знак равенства, то есть когда ряд Фурье–Чебышева для функции $f(x)$ сходится к этой функции?

Сформулируем без доказательства две теоремы.

Теорема 4.2. Для функции $f(x)$, дифференцируемой на $[-1, 1]$, производная которой ограничена на $[-1, 1]$, ее ряд Чебышева (48) сходится к $f(x)$ равномерно на этом отрезке.

Теорема 4.3. Для произвольной функции $f(x)$, непрерывной и монотонной на $[-1, 1]$, ее ряд Чебышева (48) сходится к $f(x)$ равномерно на этом отрезке.

Рассмотрим примеры разложения функций в ряд Фурье-Чебышева.

Заметим, что разложение по многочленам Чебышева можно практически реализовать исходя из разложения функции в ряд Тейлора, сходящегося на $[-1, 1]$, заменяя x^n на многочлены Чебышева по формулам (45).

Пример.

$$e^x = 1 + x + 0,5x^2 + 0,16667x^3 + 0,04167x^4 + R_5(x) = P_n(x) + R_5(x).$$

Разложение по многочленам Чебышева:

$$P_n(x) = 1,2656T_0 + 1,1250T_1 + 0,2708T_2 + 0,0417T_3 + 0,0052T_4.$$

На этом примере видно важное свойство разложения по многочленам Чебышева: если отыскиваем приближение 3-го порядка, то

$$P_3(x) = 1,2656T_0 + 1,1250T_1 + 0,2708T_2 + 0,0417T_3.$$

Метод разложения функций в ряд Чебышева с помощью степенного ряда применяется в приближенных вычислениях.

Рассмотрим еще один пример разложения функций в ряд Чебышева.

Пусть требуется разложить в ряд Чебышева функцию $f(x)$, удовлетворяющую на $[-1, 1]$ условиям теоремы 4.2.

Пусть $x = \cos t$, введем четную функцию

$$F(t) = f(\cos t)$$

и рассмотрим ее разложение в ряд Фурье по косинусам:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + \dots + a_n \cos nt + \dots$$

Подставляя $t = \arccos x$, то есть по существу используя определение многочлена Чебышева, получим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x) + \dots$$

Таким образом, коэффициенты разложения функции $f(x)$ по многочленам Чебышева совпадают с коэффициентами Фурье вспомогательной функции $F(x) = f(\cos t)$. А так как известно, что разложение по многочленам Чебышева единственно, то коэффициенты совпадают с коэффициентами c_i , вычисленными по формуле (49).

В качестве примера применения этого метода разложения в ряд Чебышева разложим на $[-1, 1]$ функцию $f(x) = |x|$. Пусть $x = \cos t$. Вспомогательная функция $F(t) = |\cos t|$.

Разложение функции $F(t) = |\cos t|$ в ряд Фурье имеет вид:

$$F(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1}.$$

Подставляя в это разложение $t = \arccos x$, получим разложение функции $f(x) = |x|$ в ряд Чебышева:

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{T_{2k}(x)}{4k^2 - 1} \quad (-1 < x < 1).$$

Аналогично рассуждая и учитывая, что

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

можно получить разложение:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} T_{2k-1}(x).$$

Коэффициенты Чебышева многих элементарных и специальных функций выражаются с помощью функций Бесселя. Например, для функций e^{ax} , $\cos ax$, $\sin ax$ имеют место следующие разложения в ряд Чебышева:

$$e^{ax} = J_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(a) T_{2n}(x),$$

$$\cos ax = J_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(a) T_{2n}(x),$$

$$\sin ax = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a) T_{2n+1}(x),$$

где $J_n(a)$ - функция Бесселя первого рода порядка n .

Следует заметить, что функция Бесселя и многие другие специальные функции, которые не выражаются в виде суммы конечного числа элементарных функций, а определяются как решения некоторых дифференциальных уравнений, разлагаются в ряд Чебышева и имеют большое практическое значение.

5 ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Теория интеграла Фурье широко используется в различных областях техники. Особенно важным оказалось применение этой теории при исследовании и электротехнических и радиотехнических цепей, систем автоматического регулирования. При помощи рядов Фурье периодическая функция $f(t)$ или функция, заданная на конечном промежутке, разлагается на гармонические составляющие.

Теория интеграла Фурье позволяет разложить на гармонические составляющие непериодическую функцию $f(t)$, заданную на всей числовой оси.

5.1 Представление функций в виде интеграла Фурье

Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy, \quad (51)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ytdt,$$
$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ytdt.$$

Подставляя значения $a(y)$ и $b(y)$ в интеграл, преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos ty \cos xy + \sin ty \sin xy) dt = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos y(x - t) dt. \quad (52)
\end{aligned}$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье при определенных условиях дает значение самой функции, интеграл Фурье также дает представление исходной функции.

Докажем следующую основную теорему о представимости функции интегралом Фурье.

Теорема 5.1. Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и кусочно-гладкая на любом конечном отрезке $[a, b]$ вещественной оси, то она представима интегралом Фурье, то есть имеет место равенство:

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau \right\} d\omega. \quad (53)$$

Доказательство. Надо доказать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau = f(t).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau$$

равномерно сходится по признаку Вейерштрасса, то можем изменить порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}
 J(t, l) &= \frac{1}{\pi} \int_0^l d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^l \cos \omega(\tau - t) d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\sin l(\tau - t)}{\tau - t} d\tau.
 \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $\tau - t = y$ и получим:

$$J(t, l) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + y) \frac{\sin ly}{y} dy.$$

Теорема будет доказана, если докажем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t + y) \frac{\sin ly}{y} dy = \frac{f(t + 0)}{2}, \quad (54)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(t + y) \frac{\sin ly}{y} dy = \frac{f(t - 0)}{2}.$$

Докажем первое равенство (второе доказывается аналогично). Для этого рассмотрим разность между

$$J_1(t, l) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t + y) \frac{\sin ly}{y} dy$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t+0) \frac{\sin ly}{y} dy &= \frac{f(t+0)}{\pi} \int_0^l \frac{\sin ly}{y} dy = \\ &= \frac{f(t+0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{f(t+0)}{2} \quad (ly = u), \\ J_1(t, l) - \frac{f(t+0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(t+y) - f(t+0)] \frac{\sin ly}{y} dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(t, y) \sin ly dy, \quad \text{где } g(t, y) = \frac{f(t+y) - f(t+0)}{y}. \end{aligned}$$

Разобьем интеграл в правой части на два:

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(t, y) \sin ly dy = \frac{1}{\pi} \int_0^A g(t, y) \sin ly dy + \frac{1}{\pi} \int_A^{\infty} g(t, y) \sin ly dy.$$

Второй интеграл сходится как разность двух сходящихся интегралов:

$$\left| \int_A^{\infty} \frac{f(t+y) \sin ly}{y} dy \right| < A \int_A^{\infty} |f(t+y)| dy$$

и

$$\int_A^{\infty} \frac{f(x+0) \sin ly}{y} dy = f(x+0) \int_A^{\infty} \frac{\sin ly}{y} dy$$

и, следовательно, для достаточно больших A может быть сделан сколь угодно малым.

К первому интегралу

$$\int_0^A g(t, y) \sin ly dy$$

применима основная лемма Римана (19), так как $g(t, y)$ кусочно-непрерывна на $[0, A]$ при фиксированном t и для достаточно больших l первый интеграл также сколь угодно мал.

Теорема доказана.

Замечание. Условия кусочной гладкости функции на любом конечном отрезке числовой оси в теореме можно заменить условиями Дирихле.

Получим выражение для интеграла Фурье в виде, отличном от (53). Так как

$$\cos \omega(\tau - t) = \cos \omega t \cos \omega \tau + \sin \omega t \sin \omega \tau,$$

то

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(\tau - t) d\tau \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega t \cos \omega \tau d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega t \sin \omega \tau d\tau \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Обозначим

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (\omega \geq 0). \quad (55)$$

Получим:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t\} d\omega. \quad (56)$$

Выражение (56) называется интегралом Фурье.

Из формул (55) и (56) видна определенная аналогия между интегралом Фурье и рядом Фурье.

В самом деле, подынтегральная функция в формуле (56) напоминает общий член

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

ряда Фурье, а формулы (55) напоминают формулы для вычисления a_n и b_n – коэффициентов ряда Фурье.

В обоих случаях функция раскладывается на сумму гармонических составляющих. Однако в ряде Фурье суммирование проводится по индексу n , принимающему дискретные значения $n = 1, 2, \dots$, вследствие чего смежные гармоники ряда имеют частоты, образующие арифметическую прогрессию с разностью $\Delta\omega_n = \frac{2\pi}{T}$.

В интеграле Фурье проводится интегрирование по непрерывной переменной ω . Функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ напоминают коэффициенты ряда Фурье. Однако они зависят от ω , изменяющейся не дискретно, а непрерывно.

5.2 Интеграл Фурье четной и нечетной функций

Представление неперiodической функции $f(t)$ интегралом Фурье значительно упрощается, если рассматриваемая функция является четной или нечетной.

1. Пусть $f(t)$ – четная функция. Тогда, вычисляя $A(\omega)$ и $B(\omega)$ по формуле (55), получим:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau = 0.$$

Следовательно, для четной функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 5.1, интеграл Фурье имеет вид:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (57)$$

где

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

2. Если $f(t)$ – нечетная функция, то рассуждая аналогично, получим:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 0,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Тогда для нечетной функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 5.1, интеграл Фурье имеет вид:

$$\frac{f(t+0) - f(t-0)}{2} = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (58)$$

где

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Формула (56) и ее частные случаи (57) и (58) характеризуют разложение непериодической функции $f(t)$ на сумму гармонических составляющих с частотами ω , непрерывно изменяющимися от 0 до ∞ .

Заметим, что если функция $f(t)$ задана лишь на интервале $(0, \infty)$, то формула (57) продолжает эту функцию четным образом, а формула (58) – нечетным образом на всю ось $0t$.

При $t > 0$ обе формулы дают один и тот же результат.

5.3 Примеры представления непериодической функции интегралом Фурье

1. Представить интегралом Фурье одиночный прямоугольный импульс высотой A_u и длительностью T (рис. 14).

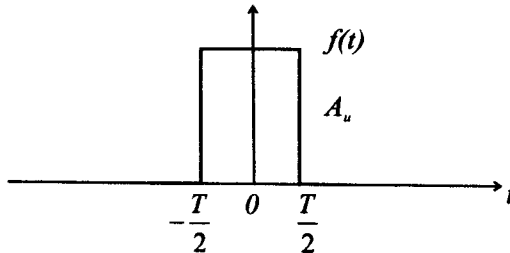


Рис. 14.

Решение. Функция, характеризующая этот импульс,

$$f(t) = \begin{cases} A_u & \text{при } |t| < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

абсолютно интегрируема на всей числовой оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-T/2}^{T/2} A_u dt = A_u T$$

и на любом отрезке удовлетворяет условиям Дирихле.

Значит, функцию можно представить интегралом Фурье. Так как $f(t)$ – четная функция, то по формуле (57) имеем:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

где

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A_u \cos \omega \tau d\tau =$$

$$\frac{2A_u}{\pi} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \Big|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} A_u \frac{\sin \omega T/2}{\omega}.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\pi} A_u \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega T/2}{\omega} \cos \omega t d\omega = \begin{cases} A_u & \text{при } |t| < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{T}{2}, \\ \frac{A_u}{2} & \text{при } |t| = \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Точки $t = \pm \frac{T}{2}$ – точки разрыва функции $f(t)$.

2. Представить интегралом Фурье функцию $f(t) = e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$, $t > 0$).

Решение. а) Продолжим эту функцию четным образом (рис. 15).

По формуле (57) получим:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau} \cos \omega \tau d\tau =$$

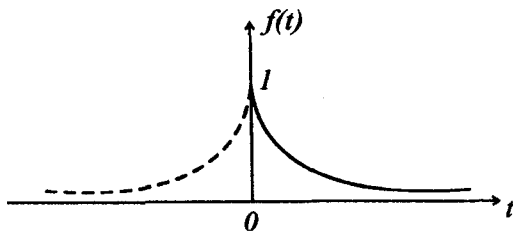


Рис. 15.

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \cos \omega\tau + \omega \sin \omega\tau) \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \cos \omega t d\omega = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0, \\ e^{\alpha t} & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

б) Продолжим теперь эту функцию нечетным образом (рис. 16).

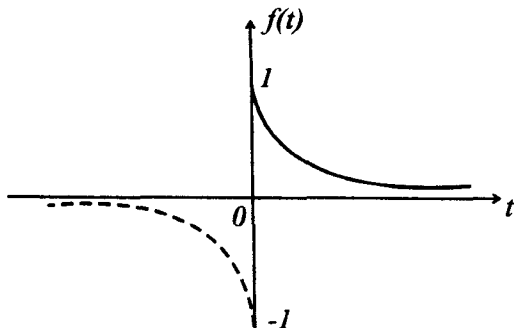


Рис. 16.

По формуле (58) имеем:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau d\tau =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2 + \omega^2} (-\alpha \sin \omega\tau - \omega \cos \omega\tau) \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{2\omega}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2\omega}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \sin \omega t d\omega = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ e^{\alpha t} & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

5.4 Интеграл Фурье в комплексной форме

Функция

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\tau$$

является четной функцией от ω . Поэтому

$$\int_0^{\infty} c(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) d\omega.$$

Следовательно, формулу (53) можно переписать в виде:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega. \quad (59)$$

Функция

$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

является нечетной функцией от ω . Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega = 0. \quad (60)$$

Умножим (60) на $\frac{i}{2\pi}$ и сложим с (59), получим:

$$\begin{aligned} \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [\cos \omega(t-\tau) + i \sin \omega(t-\tau)] d\tau \right\} d\omega. \end{aligned}$$

По формуле Эйлера

$$\cos \omega(t-\tau) + i \sin \omega(t-\tau) = e^{i\omega(t-\tau)}.$$

Тогда

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \right] d\omega. \quad (61)$$

Формула (61) называется интегральной формулой Фурье в комплексной форме, а интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Фурье в комплексной форме.

5.5 Преобразование Фурье

Перепишем формулу (61) следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

Мы воспользовались тем, что множитель $e^{i\omega t}$ не зависит от переменной интегрирования τ , и вынесли его за знак внутреннего интеграла. Таким образом мы получили:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (62)$$

где

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (63)$$

Комплексная функция $F(i\omega)$, определяемая формулой (63), называется спектральной плотностью, или преобразованием Фурье функции $f(t)$.

Иногда функцию $F(i\omega)$ называют спектральной характеристикой функции $f(t)$ или просто спектром.

Формула (63) позволяет по функции $f(t)$ найти ее спектральную плотность $F(i\omega)$, а формула (62), наоборот, по спектральной плотности $F(i\omega)$ – восстановить исходную функцию $f(t)$.

Выражение (63) называют прямым преобразованием Фурье, а (62) – обратным преобразованием Фурье.

Эти формулы имеют смысл, если $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном отрезке (или кусочно-гладкая).

В точке разрыва функции $f(t)$ в формуле (62) значение левой части равно

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)].$$

В ряде задач автоматического регулирования функция $f(t)$ характеризует процесс, имеющий место лишь начиная с некоторого момента времени t , который можно принять за нулевой. В этом случае $f(t) = 0$ при $t < 0$, а формула (63) примет вид:

$$F(i\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (64)$$

Преобразование, определяемое формулой (64), называется прямым односторонним преобразованием Фурье.

Обратное преобразование Фурье, соответствующее прямому одностороннему преобразованию, остается двусторонним по переменной ω и дается равенством:

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (t > 0). \quad (65)$$

При $t = 0$ значение правой части равенства (65):

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \frac{1}{2} f(t + 0),$$

при $t < 0$, $f(t) \equiv 0$.

Функция $P(\omega) = |F(i\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой; $A(\omega) = \Re F(i\omega)$ – вещественной частотной характеристикой; $B(\omega) = \Im F(i\omega)$ – мнимой частотной характеристикой непериодического сигнала (функции).

Вместо слова «характеристика» часто употребляют слово «спектр».

Спектральная плотность $F(i\omega)$ является комплексной функцией одной переменной – вещественной частоты ω . Поэтому ее характеристики – функция $F(\omega)$, $\psi(\omega)$, $A(\omega)$, $B(\omega)$ – можно изобразить в

виде графиков-спектров, которые охватывают всю область как положительных, так и отрицательных частот.

Отметим, что из формулы (63) следует, что $F(-i\omega) = F(i\omega)$, так как $f(t)$ принимает только вещественные значения. Поэтому $F(-i\omega) = |F(i\omega)|$, то есть амплитудно-частотная характеристика есть четная функция от ω ; так как $\arg F(-i\omega) = -\arg F(i\omega)$, то фазо-частотная характеристика есть функция нечетная от ω .

5.6 Свойства преобразования Фурье

Пусть $f(t)$ – абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, удовлетворяющая на любом конечном отрезке условиям Дирихле.

Прямое и обратное преобразования Фурье этой функции будут записываться символически следующим образом:

$$F(i\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad (66)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(i\omega)\}. \quad (67)$$

Рассмотрим наиболее важные для практических приложений свойства преобразований Фурье.

1. Линейность.

Пусть $F_1(i\omega), F_2(i\omega), \dots, F_n(i\omega)$ являются спектральными плотностями для $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – величины, независимые от t и ω , то справедливо равенство:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathcal{F} \{f_k(t)\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(i\omega). \quad (68)$$

Для краткости записи при доказательстве ограничимся случаем $n = 2$.

По формуле (63):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
&= \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega\tau} d\tau + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
\lambda_1 \mathcal{F}\{f_1(t)\} + \lambda_2 \mathcal{F}\{f_2(t)\} &= \lambda_1 F_1(i\omega) + \lambda_2 F_2(i\omega).
\end{aligned}$$

Доказанное свойство характеризует линейность преобразования Фурье, то есть показывает, что линейной комбинации функций соответствует линейная комбинация их спектральных плотностей.

2. Теорема дифференцирования.

Если производная $f'(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и на каждом конечном отрезке удовлетворяет условиям Дирихле, а $f(t)$ имеет спектральную плотность $F(i\omega)$, то есть, если

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega),$$

то

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(i\omega). \quad (69)$$

Преобразование Фурье производной находится по формуле

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = f(\tau) e^{-i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Так как $f(t)$ интегрируема на всей числовой оси, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} f(\tau) = 0,$$

откуда получаем:

$$f(\tau)e^{-i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\omega\tau} d\tau = F(i\omega),$$

находим

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(i\omega),$$

и теорема доказана.

3. Теорема интегрирования.

Если

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0,$$

то спектральная плотность интеграла $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ находится по формуле:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(i\omega)}{i\omega}. \quad (70)$$

Найдем преобразование Фурье интеграла $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\} e^{-i\omega t} dt.$$

Интеграл в правой части вычисляем по частям, тогда

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = -\frac{1}{i\omega\tau} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

так как по условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = 0,$$

то первое слагаемое в правой части обратится в нуль, и мы получим:

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{F(i\omega)}{i\omega}.$$

Из последних двух свойств видно, что спектральная плотность производной получается умножением, а спектральная плотность интеграла – делением спектральной плотности функции на $i\omega$.

4. Теорема сложения.

Пусть задана функция $f(t-a)$, которая отличается от функции $f(t)$ тем, что первая смещена по отношению ко второй на время a (рис. 17 а,б).

Сформулируем теорему: если $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$ и $a > 0$, то

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a} F(i\omega). \quad (71)$$

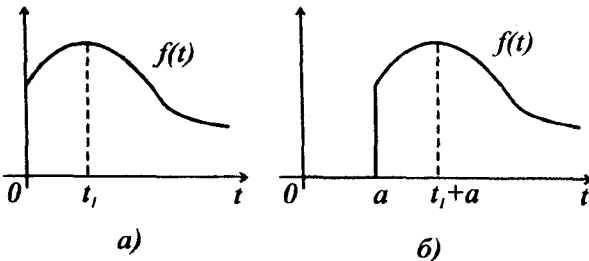


Рис. 17.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau-a)e^{-i\omega\tau}d\tau = |\tau-a=t| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega(t+a)}dt = e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(i\omega).\end{aligned}$$

Заменяя a на $-a$, получим спектральную плотность функции $f(t+a)$:

$$\mathcal{F}\{f(t+a)\} = e^{i\omega a}F(i\omega).$$

Таким образом, сдвиг во времени функции $f(t)$ на величину a приводит к умножению ее спектральной плотности на $e^{\pm i\omega a}$. Отсюда следует, что амплитудно-частотная характеристика (модуль спектральной плотности) не зависит от положения непериодического колебания на оси времени. Действительно:

$$|e^{\pm i\omega a}F(i\omega)| = |e^{\pm i\omega a}||F(i\omega)| = |F(i\omega)|,$$

так как

$$|e^{\pm i\omega a}| = |\cos \omega a \pm i \sin \omega a| = \sqrt{\cos^2 \omega a + \sin^2 \omega a} = 1.$$

Сдвиг во времени функции $f(t)$ на величину $\pm a$ приводит к изменению фазо-частотной характеристики на величину $\pm \omega a$.

5. Если $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$, то для любого вещественного неотрицательного a

$$\mathcal{F}\{e^{-iat}f(t)\} = F[i(\omega+a)]. \quad (72)$$

Исходя из формулы

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-iat} f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-ia\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i(\omega+a)\tau} d\tau = F[i(\omega + a)].\end{aligned}$$

Заменяя a на $-a$, получим:

$$\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\} = F[i(\omega - a)].$$

Пример. Пусть $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$. Найти $\mathcal{F}\{f(t) \cos at\}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f(t) \frac{e^{-iat} + e^{iat}}{2}\right\} &= \\ = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i(\omega+a)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i(\omega-a)\tau} d\tau \right\} &= \\ = \frac{1}{2} [F(i(\omega + a)) + F(i(\omega - a))].\end{aligned}$$

6. Пусть график функций (импульса) $f_1(t)$, изображенный на рис. 18 сплошной линией, подвергся сжатию по оси $0t$.

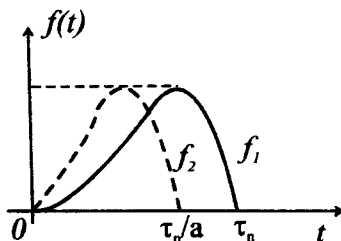


Рис. 18.

Новая функция $f_2(t)$ (пунктирная кривая на рис. 18) связана с исходной функцией соотношением:

$$f_2(t) = f_1(a, t), \quad a > 1.$$

Длительность импульса $f_2(t)$ в a раз меньше, чем у исходного импульса, и равна τ_n/a . Очевидно, при $0 < a < 1$ график функции $f_2(t) = f_1(a, t)$ будет растянут вдоль оси $0t$, а длительность импульса $f_2(t)$ будет больше, чем у исходного импульса.

Теорема подобия.

Если $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$, то для любого положительного вещественного a справедливо равенство:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{i\omega}{a}\right). \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \left[u = a\tau, \tau = \frac{u}{a}, du = a d\tau \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{i\omega u}{a}} \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{i\omega u}{a}} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{i\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Из формулы (73) видно, что при растяжении (сжатии) в a раз графика функции $f(t)$ вдоль оси времени, график ее амплитудно-частотной характеристики $|F(i\omega)|$, во-первых, снижается (растягивается) вдоль оси частот в a раз, и, во-вторых, увеличивается (уменьшается) в a раз его значение.

Следовательно, чем короче импульс, тем шире график его амплитудно-частотной характеристики.

7. Дуальность.

Сравнивая выражения (62) и (63) можно отметить существенно симметричную природу прямого и обратного преобразования Фурье. Это свойство основано на дуальности частоты и времени.

Если в преобразованиях Фурье произвести взаимную замену переменных, а именно: заменить $i\omega$ на t и t на $i\omega$, а затем заменить $i\omega$ на $-i\omega$, то получим, что функция $2\pi i \mathcal{F}(i\omega)$ будет спектром функ-

ции $F(t)$, а функция $F(t)$ – обратным преобразованием функции $-2\pi i\mathcal{F}(i\omega)$:

$$2\pi i\mathcal{F}(i\omega) = \int_{-i\omega}^{i\omega} F(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

$$F(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\omega}^{i\omega} 2\pi i\mathcal{F}(i\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Иными словами, если спектром функции $f(t)$ является $F(i\omega)$, то спектром функции $F(t)$ будет $2\pi f(\omega)$. Указанное свойство часто используется в теории сигналов.

Приведем без доказательства следующее свойство преобразования Фурье.

8. Если $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(i\omega)$, $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(i\omega)$, причем интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega)d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_2(i\omega)d\omega$$

сходятся абсолютно, то справедливо равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega)F_2(i\omega)d\omega. \quad (74)$$

Это утверждение носит название теоремы Парсеваля.

Если $f_1(t)$ характеризует мгновенное значение напряжения, а $f_2(t)$ – мгновенное значение силы тока в электрической цепи, то произведение $f_1(t)f_2(t)$ есть мгновенная мощность, а $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt$ – энергия.

Таким образом, зная спектральные плотности $F_1(i\omega)$ и $F_2(i\omega)$ соответственно напряжения и тока, можно с помощью формулы (74) вычислить энергию, выделяемую током за время $-\infty < t < \infty$.

Если положить $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, то $F_1(i\omega) = F_2(i\omega) = F(i\omega)$, и соотношение (74) превратится в равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(i\omega)d\omega, \quad (75)$$

выражающее теорему Релея.

Теорема Релея устанавливает связь между энергией непериодического сигнала и его спектром. Она показывает, что энергия может быть вычислена двояким способом: интегрированием квадрата функции времени или интегрированием квадрата его амплитудно-частотной характеристики. Величина $\frac{1}{\pi}|F(i\omega)|^2d\omega$ является энергией, соответствующей гармоникам сигнала $f(t)$, частоты которых расположены в полосе $d\omega$, содержащей частоту ω . Следовательно, по виду функции $|F(i\omega)|^2$ можно судить о распределении энергии в спектре непериодического сигнала.

Например, в случае единичного прямоугольного импульса длительности t_n интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/t_n} |F(i\omega)|^2 d\omega$$

составляет примерно 90% интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega.$$

Поэтому в случае рассматриваемого сигнала около 90% его полной энергии сосредоточено в полосе частот от 0 до $\omega = \frac{2\pi}{t_n}$.

Таким образом, чем короче прямоугольный импульс, тем шире полоса частот, в которой сосредоточена основная доля энергии сигнала.

Пример. Пусть $f(t)$ – прямоугольный одиночный видео-импульс, сдвинутый относительно начала координат на отрезок t_0 , и имеющий длительность t_n .

Аналитически его можно представить в виде

$$f(t) = \begin{cases} U_m & \text{при } t_0 - \frac{t_n}{2} < t < t_0 + \frac{t_n}{2}, \\ 0 & \text{при } t_0 - \frac{t_n}{2} > t, \quad t > t_0 + \frac{t_n}{2}. \end{cases}$$

Соответствующий график приведен на рис. 19.

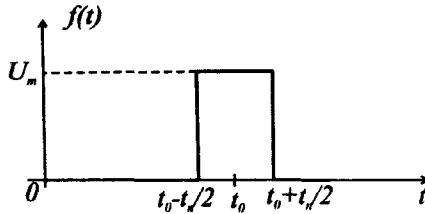


Рис. 19.

Найдем спектральную плотность сигнала $f(t)$:

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{t_0 - \frac{t_n}{2}}^{t_0 + \frac{t_n}{2}} U_m e^{-i\omega\tau} d\tau = -\frac{U_m}{i\omega} e^{-i\omega\tau} \Big|_{t_0 - \frac{t_n}{2}}^{t_0 + \frac{t_n}{2}} = \\ &= \frac{U_m}{i\omega} [e^{-i\omega(t_0 - \frac{t_n}{2})} - e^{-i\omega(t_0 + \frac{t_n}{2})}] = \\ &= \frac{U_m}{i\omega} (e^{-i\omega t_0} e^{i\omega \frac{t_n}{2}} - e^{-i\omega t_0} e^{-i\omega \frac{t_n}{2}}) = \\ &= \frac{U_m}{i\omega} e^{-i\omega t_0} (e^{i\omega \frac{t_n}{2}} - e^{-i\omega \frac{t_n}{2}}). \end{aligned}$$

Используя формулу Эйлера, окончательно получим:

$$F(i\omega) = \frac{2U_m}{\omega} e^{-i\omega t_0} \sin \frac{\omega t_n}{2} = U_m t_n \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\omega t_n / 2} e^{-i\omega t_0} \quad (76)$$

Для нахождения амплитудно-частотной $F(\omega) = |F(i\omega)|$ и фазо-частотной $\psi(\omega) = \arg |F(i\omega)|$ характеристик спектральной плотности существенными являются свойства функции

$$\mathcal{S}_a(x) = \frac{\sin x}{x},$$

называемой арочным синусом. График функции

$$\mathcal{S}_a(x) = \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}}$$

приведен на рис. 20.

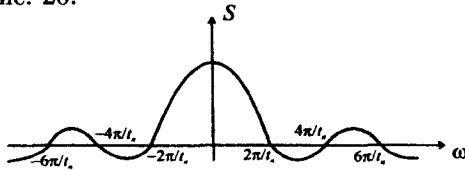


Рис. 20.

Такая функция имеет арочную структуру и меняет знак при переходе от одной арки к другой, что соответствует изменению фазо-частотной характеристики на $\pm\pi$. С учетом этого спектральную плотность можно записать в показательной форме:

$$F(i\omega) = U_m t_n \left| \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}} \right| e^{-i[\omega t_0 \pm \pi(k-1)]},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ - номер арки.

Теперь получаем следующие соотношения для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик рассматриваемого сигнала:

$$F(\omega) = |F(i\omega)| = U_m t_n \left| \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}} \right|, \quad (77)$$

$$\psi(\omega) = \omega t_0 \pm \pi(k-1). \quad (78)$$

Соответствующие графики даны на рис. 21.

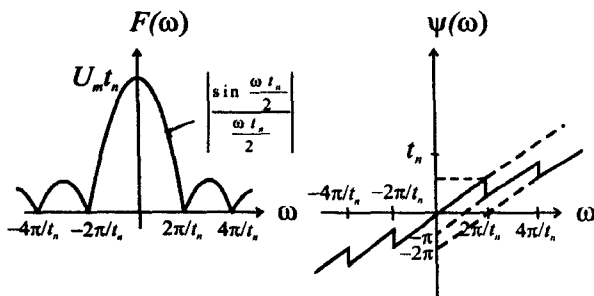


Рис. 21.

Из соотношений (77) и (78) следует, что характер амплитудно-частотной характеристики рассматриваемого сигнала зависит от длительности импульса и не связан с его сдвигом во времени, а его фазо-частотная характеристика, наоборот, определяется сдвигом импульса и не зависит от его длительности.

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1972.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.2. М.: Высшая школа, 1973.
4. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Наука, 1969.