Э. И. Коломиец
Л. Н. Прокофьев
А. Ф. Тараскин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРОЦЕССАМ В АТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

1989

министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

Э.И.Коломиец, А.Н.Прокофьев
А.Ф.Тараскин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРОЦЕССАМ В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Куйбышев 1989

УДК 519.2 (075)

Коломиец Э.И., Прокофьев Л.Н., Тараскин А.Ф. Сборник задач по вероятностным процессам в автоматизированных системах управления/ Куйб.авиац.ин-т. Куйбышев, 1989. 102 с.

Сборник содержит задачи по всем разделам теории вероятностей, изучаемым в технических вузах. Большинство задач сопровождаются ответами, а часть из них - решениями или указаниями к решению. Перед каждой темой дается перечень основных теоретических положений. Приводятся необходимые для решения задач таблицы.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей "Прикладная математика" и "АСУ" и может быть использовано при изучении курсов "Теория вероятностей и математическая статистика", "Вероятностные процессы в АСУ" и "Математические модели в информационных процессах".

Ил. 2. Табл. 4. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С.П.Королева

Рецензенты: Д.Д.К л о в с к и й, В.М.К л и м к и н

I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

I.I. Случайный эксперимент и случайные события

В теории вероятностей рассматриваются случайные (стохастические) эксперименты, которые могут быть повторены сколько угодно раз, но результаты которых не могут быть наперед предсказаны. С каждым случайным экспериментом связывают пространство элементарных событий Ω – совокупность возможных исходов эксперимента. Случайные события, связанные с данным случайным экспериментом, – подмножества в пространстве элементарных событий Ω. Предполагается, что совокупность $\mathcal{F}$ всех подмножеств, которые мы интерпретируем как случайные события, связанные с данным экспериментом, является σ-алгеброй. При этом Ω – достоверное событие, Φ – невозможное событие. Включение $A \subset B$ обозначает, что событие A влечет событие B. Сумма событий $A \cup B$ (или $A+B$) есть событие, состоящее в том, что осуществляется по крайней мере одно из событий: A или B. Произведение событий $A \cap B$ (или AB) – событие, состоящее в том, что осуществляется и A, и B. $\bar{A}$ – событие, противоположное A, т.е. состоящее в том, что A не наступает. Если $A \cap B = \Phi$, то события A и B называют *несовместными*. Разность событий A и B – это событие, состоящее в том, что осуществляется A и не осуществляется B. Разность событий A и B обозначают так:

$$A \setminus B \text{ или } A - B.$$

Симметрической разностью событий A и B называется событие

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B.$$

Полной группой событий называется совокупность событий $A_1, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условиям: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ и $A_k \cap A_j = \Phi$ для всех $k \neq j$.

Пространство Ω элементарных событий называется **дискретным** (конечным или счетным), если множество Ω конечно или счетно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

ЗАДАЧИ

1.1.1. Бросаются две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что сумма очков четная, а B заключается в том, что выпала хотя бы одна единица. Описать пространство элементарных событий, события $AB, A+B, A\bar{B}$.

1.1.2. Описать пространство элементарных событий, соответствующих трем испытаниям, в каждом из которых может наступить успех $У$ или неуспех H.

Выразить через элементарные события: а) событие A – в первом испытании наступил успех; б) событие B – наступило ровно два успеха; в) событие C – наступило не больше двух успехов.

1.1.3. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный окажется юношей. Событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии: а) описать событие $AB\bar{C}$; б) при каком условии будет иметь место тождество $ABC = A$? в) когда будет справедливо соотношение $\bar{C} \subseteq B$? г) когда будет равенство $\bar{A} = B$, будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

1.1.4. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k $(k = 1, 2, \dots, 10)$, причем $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k. Что означают события $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$; $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$; $D = A_5 A_6$; $E = \bar{A}_1 A_2$?

1.1.5. Проверить следующие соотношения между случайными событиями:

а) $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$,

б) $(A+B)\setminus B = A \setminus AB = A\bar{B}$,

в) $AA = A + A = A$,

г) $(A+B)C = AC + BC$,

д) $\overline{\bar{A}+\bar{B}} = AB$,

е) $\bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = \overline{AB}$,

ж) $\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \bar{A}_k$,

з) $\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} A_k}$.

I.I.6. Найти простые выражения для событий:

а) $(A+B)(A+\bar{B})$, б) $(A+B)(\bar{A}+B)(A+\bar{B})$; в) $(A+B)(B+C)$.

I.I.7. Установить, какие из следующих соотношений правильны:

а) $(A+B)\setminus C = A+(B\setminus C)$; б) $A\bar{B}C \subset A+B$;

в) $ABC = AB(C+B)$; г) $\overline{(A+B)}C = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$,

д) $\overline{\bar{A}+\bar{B}} = A+B$.

I.I.8. Обязаны ли совпадать события A и B, если: а) $\bar{A}=\bar{B}$; б) $A\cup C = B\cup C$ (C - некоторое событие); в) $AC = BC$ (C - некоторое событие); г) $A(A\cup B) = B(A\cup B)$; д) $A(A\setminus B) = B(B\setminus A)$; е) $A(A\setminus B) = B(A\setminus B)$; ж) $A\setminus B = \varnothing$?

I.I.9. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: A_k (k = I,2) - исправлен k -й блок первого типа, B_j (j =I,2,3) - исправлен j -й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающее работу прибора, через A_k и B_j.

I.I.IO. Найти событие X из равенства

$$\overline{X+A} + \overline{X+\bar{A}} = B.$$

I.I.II. Когда возможны равенства

а) $A+B=\bar{A}$; б) $AB=\bar{A}$; в) $A+B=AB$?

I.I.I2. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A -выбранное число делится на 5; событие B - данное число оканчивается нулем. Что означают события $A-B$ и $A\bar{B}$?

I.I.I3. Пусть A, B, C - три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C произошли: а) только A; б) A и B, но C не произошло; в) все три события; г) по крайней мере, одно событие; д) одно и только одно событие; е) не произошло ни одного события; ж) не более двух событий.

I.I.I4. Пусть $A\subset B$. Упростить выражения:

а) AB; б) $A+B$; в) ABC; г) $A+B+C$.

I.I.I5. Доказать, что следующие события достоверны:

а) $(A+B)(A+\bar{B})+(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$; б) $(A+B)(\bar{A}+\bar{B})+(A+\bar{B})(\bar{A}+B)$

I.I.16. Доказать, что событие

$$(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$$ невозможно.

I.I.17. Пусть A, B, C – случайные события. Выяснить смысл равенств:

а) $ABC = A$;

б) $A+B+C = A$.

I.I.18. Игральная кость подбрасывается дважды. Описать вероятностное пространство. Описать события:

A – сумма очков равна 10;

B – по крайней мере один раз появится 6 очков.

I.I.19. Показать, что $\overline{(A+B)}C=\bar{A}C+\bar{B}C$ имеет место тогда и только тогда, когда $AC=BC$.

I.I.20. Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие $A_i\ (i=1,2,\dots,n)$ заключается в том, что i-я изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в следующем:

а) ни одна из деталей не имеет дефектов;

б) хотя бы одна деталь имеет дефект;

в) только одна деталь имеет дефект;

г) не более двух деталей имеют дефект;

д) по крайней мере две детали не имеют дефектов;

е) две детали дефектны.

I.I.21. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие A : мужу больше 30 лет; событие B : муж старше жены; событие C : жене больше 30 лет.

а) выяснить смысл событий ABC, $A-AB$, $A\bar{B}C$;

б) проверить, что $A\bar{C} \subset B$.

I.I.22. Два шахматиста играют одну партию. Событие A : выигрывает первый игрок; событие B : выигрывает второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

I.I.23. Сумма $A+B$ двух событий может быть выражена как сумма двух несовместных событий: $A+B=A+(B-AB)$.

Выразить аналогичным образом сумму трех событий A, B, C.

I.I.24. Пусть

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in A\end{cases}$$

(функцию $I_A(\omega)$ называют индикатором события A). Доказать, что:

а) $I_{AB}(\omega) = I_A(\omega) I_B(\omega)$;

б) $I_{A+B}(\omega) = I_A(\omega) + I_B(\omega) - I_A(\omega) I_B(\omega)$;

в) $I_{\bar{A}}(\omega) = 1 - I_A(\omega)$;

г) $I_{A-B}(\omega) = I_A(\omega)[1 - I_B(\omega)]$.

I.2. Классическое определение вероятности

Для многих случайных экспериментов с конечным пространством элементарных событий из соображений симметрии можно априори установить, что элементарные события равновозможны. Тогда вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{n}$ (n - число исходов), а вероятность события A вида

$$A = \sum_{i=1}^{m} \omega_{k_i}, \quad \omega_{k_i} \in \Omega, \quad k_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i = \overline{1, m}$$

определяется равенством $P(A) = \frac{m}{n}$.

Те из равновозможных элементарных событий ω, которые влекут A, называются благоприятствующими исходами.

При решении задач на классическое определение вероятности следует вычислить число всех равновозможных исходов в эксперименте, а затем - число благоприятствующих исходов. Обычно это можно сделать комбинаторными методами.

ЗАДАЧИ

I.2.I. Найти вероятность того, что в K выбранных наугад цифр не входит: а) 0; б) I; в) ни 0, ни I; г) или 0, или I.

I.2.2. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 "счастливых" и 20 "несчастливых". Студенты подходят за билетами по очереди. У кого больше вероятность вытащить счастливый билет: у того, кто подошел за билетами первым, или у того, кто подошел вторым?

I.2.3. Игральная кость подбрасывается шесть раз. Вычислить вероятность того, что выпадут все шесть граней.

I.2.4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

I.2.5. Из последовательности чисел I,2,...,n наугад выбирают два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше K, а другое больше K, где $1 < K < n$ - произвольное целое число?

V I.2.6. Числа I,2,3,4,5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

I.2.7. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5.

I.2.8. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго.

Найти: а) вероятность того,что все пассажиры выйдут на разных этажах; б) ошибку в предлагаемом ниже решении этой задачи.

Р е ш е н и е:

$$P = \frac{m}{n}; \quad n = 6^3 = 216; \quad m = C_6^3 = 20,$$

откуда $P = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$, что и требуется.

I.2.9. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом $(N>2)$. Найти вероятность P того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

I.2.I0. n человек, в том числе P и Q, становятся в ряд в случайном порядке. Найти вероятность того, что между P и Q окажется ровно m человек (событие A).

I.2.II. За круглый стол в случайном порядке садятся 5 мужчин и 5 женщин. Найти вероятность того, что два лица одинакового пола не окажутся рядом (событие A).

I.2.I2. Из урны, содержащей шары с номерами I,2,..., N, k раз вынимается шар и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность.

I.2.I3. Только один из n ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно k ключей для открывания этой двери (событие A).

I.2.I4. Числа I,2,..., n расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что числа I и 2 расположены рядом и притом в порядке возрастания.

I.2.I5. Случайно размещаются n шаров по N ящикам. При $n = N$ найти вероятность того, что ровно один ящик окажется пустым.

I.2.I6. Найти вероятность того, что дни рождения I2 человек придутся на разные месяцы года.

I.2.I7. В шкафу n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r<n$). Найти вероятность того, что: а) среди вынутых ботинок нет парных; б) имеется ровно одна пара.

I.2.I8. Показать, что при одновременном бросании четырех костей более вероятно получить хотя бы одну единицу, чем при 24 бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две единицы.

I.2.I9. Из колоды в 36 карт вынимаются наудачу 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется один туз.

I.2.20. Некоторые пассажиры считают номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета "счастливым", если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить "счастливый" билет.

I.2.2I. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, извлекается без возвращения n шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется m белых, $m \le \min(M, n)$.

I.2.22. Колода из 36 карт разделена на две равные части. Найти вероятность того, что каждая из полуколод будет одного цвета.

I.2.23. Батарея, состоящая из K орудий, ведет огонь по группе из ℓ самолетов ($K \le \ell$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что:

а) все K орудий будут стрелять по одной и той же цели;

б) все орудия будут стрелять по разным целям.

I.2.24. Имеются M шариков, которые случайным образом разбрасываются по N лункам $(N > M)$. Определить вероятность того, что в первых M лунках будет только по одному шарику.

I.2.25. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 0000I.

I.2.26. Колода из 36 карт четырех мастей после извлечения и возвращения одной карты перемешивается и снова из нее извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

I.2.27. В лотерее n билетов, из которых m выигрышные. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет K билетов?

I.2.28. Группа, состоящая из $2N$ мальчиков и $2N$ девочек, делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково. Вычислить эту вероятность, используя формулу Стирлинга.

I.2.29. Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет пустую коробку, в другой коробке окажется r спичек (r $=0,1,2,\dots,n$); n - число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок).

I.2.30. Каждая из n палок разламывается на две части - длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что: а) все обломки объединены в первоначальном виде; б) все длинные части соединены с короткими.

I.2.31. Найти вероятность того, что единицей окажется последняя цифра: а) квадрата; б) четвертой степени; в) результата умножения на произвольное целое число выбранного наудачу целого числа N.

I.2.32. Десять студентов условились ехать определенным электропоездом, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если в составе электропоезда 10 вагонов? Предполагается, что все возможности распределения студентов по вагонам равновероятны.

I.2.33. Участник лотереи спортлото "6 из 49" на первой карточке отметил номера (4,12,20,31,32,33), а на второй - (4,12,20,41, 42,43). Найти вероятность того, что участник получит ровно два минимальных выигрыша.

I.3. Геометрические вероятности

В приводимых задачах рассматривается такая схема: в некоторой области Ω n - мерного пространства наугад берут точку. При этом под выражением "точка взята наугад" понимается следующее: вероятность $P(A)$ того, что точка попадает в область $A\subset\Omega$ составляет $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$, где $m(\cdot)$- мера Лебега на Ω.

З А Д А Ч И

I.3.1. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше 1, не превзойдет 1, а их произведение будет не больше 2/9?

I.3.2. Спутник двигается по орбите между 60^0 северной широты и 60^0 южной широты. Считаем, что вероятность падения спутника в любую область пропорциональна площади этой области. Вычислить вероятность падения спутника севернее 30^0 северной широты.

1.3.3. К автобусной остановке в течение каждых 10 минут подходит один автобус A и один B. Оба автобуса прибывают на остановку в случайный момент времени на каждом 10-минутном интервале. Стоянка A – 1 мин, B – 1,5 мин. Какова вероятность того, что одному автобусу придется ожидать, пока другой покинет остановку?

1.3.4. В круг радиусом R наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до центра круга не превысит r?

1.3.5. На отрезке длины ℓ наугад взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше $k\ell$, если $0<k<1$?

1.3.6. В круг радиусом R вписан правильный n-угольник. В круг бросают наугад точку. Какова вероятность того, что точка попадет внутрь многоугольника?

1.3.7. На окружности радиуса R наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает r $(r \le 2R)$?

1.3.8. Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными линиями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2\ell\,(\ell<a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

1.3.9. На отрезок [0,1] наудачу брошено две точки, разбившие его на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?

У К А З А Н И Е. За множество Ω принять пары чисел, являющиеся координатами брошенных точек.

1.3.10. Задача о встрече. Двое договорились встретиться на отрезке времени $[0,T]$. Первый пришедший ждет второго время $\ell\,(\ell<T)$. Найти вероятность того, что встреча произойдет.

У К А З А Н И Е. За множество Ω принять точки квадрата

$$\{(t_1,t_2): 0\le t_1\le T,\ \ 0\le t_2\le T\},$$

где t_1 и t_2 – моменты прихода встречающихся.

1.3.11. В любые моменты интервала времени T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приемник будет перегружен, если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ. Определить вероятность $P(A)$ того, что приемник будет перегружен.

1.4. Аксиомы теории вероятностей. Независимость случайных событий

Пусть Ω – пространство элементарных событий, $\mathcal{F}$ – σ – алгебра подмножеств Ω (σ – алгебра случайных событий), так,что

$A_1)$ $\Omega \subset \mathcal{F}$,

$A_2)$ если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$,

$A_3)$ если $A_i \in \mathcal{F}$ $(i=1,2,\ldots)$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Предположим, что каждому случайному событию A поставлено в соответствие такое число $P(A)$, что для него выполнены условия:

$P_1)$ $P(A) \geq 0$ для каждого $A \in \mathcal{F}$

$P_2)$ $P(\Omega) = 1$

$P_3)$ если последовательность $\{A_n\}$ случайных событий такова, что $A_i \cap A_j = \phi$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Утверждения A_i, P_i, $i=1,2,3$ и составляют систему аксиом теории вероятностей. Измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – пространство Ω с мерой $P(\cdot)$ на σ – алгебре $\mathcal{F}$ называют в е р о я т н о с т н ы м п р о с т р а н с т в о м.

Случайные события A и B $(A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F})$ называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Случайные события $A_1, \ldots, A_n$ $(A_i \in \mathcal{F}, i=\overline{1,n})$ называются н е з а в и с и м ы м и в с о в о к у п н о с т и, если

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$$

для любых $k = 1, \ldots, n$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$

З А Д А Ч И

1.4.1. С помощью аксиом теории вероятностей доказать, что:
а) $P(\phi) = 0$; б) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; в) если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$ г) $P(A) \leq 1$ для каждого случайного события $A \in \mathcal{F}$.

1.4.2. Пусть A и B – случайные события. Доказать, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.4.3. Пусть A, B, C - случайные события. Доказать, что

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+$$
$$+P(A\cap B\cap C)$$

1.4.4. Доказать, что

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B);$$
$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

1.4.5. Показать, что для любых двух событий A и B

$$P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)\leq P(A)+P(B);$$
$$\max[P(A),P(B)]\leq P(A\cup B)\leq 2\max[P(A),P(B)]$$

1.4.6. Пусть вероятность каждого из событий A и B равна $1/2$. Доказать, что

$$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B}).$$

1.4.7. Известны вероятности событий $A, B, A\cap B$. Найти вероятность событий: а) $\bar{A}\cup\bar{B}$; б) $\bar{A}\cap\bar{B}$; в) $A\cup\bar{B}$; г) $A\cap\bar{B}$; д) $(\overline{A\cup B})$; е) $\overline{A\cap B}$; ж) $\bar{A}\cap(A\cup B)$; з) $A\cup(\bar{A}\cap B)$.

1.4.8. Пусть $\Omega=(-\infty,+\infty)$ и $\mathcal{F}$ - σ - алгебра всех подмножеств Ω. Для каждого $A\in\mathcal{F}$ положим

$$P(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{2^n},$$

где n принимает целые положительные значения. Является ли $(\Omega,\mathcal{F},P)$ вероятностным пространством?

1.4.9. Пусть $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$ - произвольное счетное множество, $\{p_n\}$ - последовательность таких неотрицательных чисел, что $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1$, $\mathcal{F}$ - система всех подмножеств Ω. Для каждого $A\in\mathcal{F}$ положим

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}p_i.$$

Доказать, что $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - вероятностное пространство.

1.4.10. Пусть Ω - область в n - мером эвклидовом пространстве R^n, которая имеет конечную меру Лебегу; $m(\cdot)$ - мера Лебега на Ω. Пусть для каждого множества $A\in\mathcal{F}$ выполняется равенство $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$. Доказать, что $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - вероятностное пространство.

I.4.II. Пусть A и B - случайные события, P_0 - вероятность того, что не наступает ни одно из них, P_1 - вероятность того, что наступает одно и только одно событие, P_2 - вероятность того, что наступят оба события. Выразить P_0, P_1, P_2 через $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

I.4.I2. Пусть P_n - вероятность того, что наступает n событий из событий A, B, C ($n = 0, 1, 2, 3$). Выразить P_n через $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$.

I.4.I3. Пусть $P(A) \geq 0{,}8$, $P(B) \geq 0{,}8$. Доказать, что $P(A \cap B) \geq 0{,}6$

I.4.I4. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ - случайные события. Доказать, что

а) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

б) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right)$

I.4.I5. Доказать, что для любых n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - (n-1)$$

I.4.I6. Доказать, что для двух любых событий A и B выполняется соотношение $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq 1/4$

I.4.I7. Получить формулу для вероятности суммы событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} P(A_k \cap A_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} P(A_k \cap A_j \cap A_i) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Записать эту формулу для случая, когда совпадают вероятности произведений при одинаковом числе перемножаемых событий.

I.4.I8. Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от I до M. Шары извлекают по одному без возвращения. Найти вероятность того, что не будет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Найти предельное значение вероятности при $M \to \infty$.

I.4.I9. Какова вероятность извлечь из колоды в 36 карт фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама или король)?

I.4.20. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, II черных и 8 красных, а во второй соответственно I0, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

I.4.21. Монету бросают до тех пор, пока два раза подряд она не упадет одной и той же стороной. Найти вероятность того, что: а) опыт окончится до пятого бросания; б) потребуется четное число бросаний; в) потребуется нечетное число бросаний.

I.4.22. Два стрелка, вероятность попадания в мишень каждого из которых 0,7 и 0,8, соответственно, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

I.4.23. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятности попаданий при этом равны 0,4; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что в мишени будет: а) ровно одна пробоина; б) хотя бы одна пробоина.

I.4.24. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7, для второго 0,8. Какова вероятность попадания в волка? Как изменится результат, если охотники сделают по два выстрела?

I.4.25. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более трех раз.

I.4.26. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

I.4.27. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка $p_1 = 0,2$, а для второго $p_2 = 0,3$. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов чем второй.

I.4.28. В электропоезд, состоящий из n вагонов, входят $k \, (k \geq n)$ пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.

I.4.29. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента K или двух элементов K_1 и K_2, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3, 0,2, 0,2 соответственно. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

I.4.30. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p. За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

I.4.3I. Вероятность выхода прибора из строя после того, как он применялся k раз, равна $P(k)$. Найти вероятность выхода прибора из строя при его последующих n применениях, если при предшествующих m применениях прибор из строя не вышел.

I.4.32. Электрическая цепь составлена из элементов I,2,3,4,5. Вероятности их отказов соответственно равны 0,5; 0,7; 0,9; 0,8;0,6.

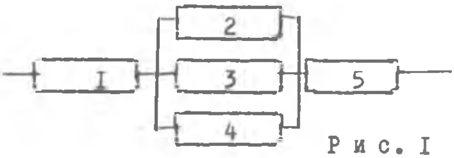


Рис. I

Найти вероятность отказа цепи, допуская, что элементы работают независимо друг от друга.

I.4.33. Вероятность хотя бы одного попадания в цепь при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

I.5. Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство и $P(B)>0$, $B \in \mathcal{F}$. Условной вероятностью события $A\ (A \in \mathcal{F})$ при условии, что осуществилось событие B, называется величина

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Если $P(B)>0$, то $P(A \cap B) = P(B)\,P(A/B)$

Это равенство называется формулой умножения вероятностей.

Если $H_1, \ldots, H_n$ - полная группа событий и $P(H_i)>0\ (i=\overline{1,n})$, то для любого события $A\ (A \in \mathcal{F})$ справедливо равенство

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A/H_i),$$

называемое формулой полной вероятности.

Если $H_1, \ldots, H_n$ полная группа событий, $P(H_i) > 0$ $(i=\overline{1,n})$, а B - данное случайное событие такое, что $P(B) > 0$, то

$$P(H_i/B) = \frac{P(H_i)\,P(B/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(B/H_k)}$$

Это равенство называется **формулой Байеса**.

Формулы полной вероятности и Байеса остаются справедливыми и тогда, когда события $H_1, \ldots, H_n$ попарно несовместны и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i$.

З А Д А Ч И

<u>I.5.I.</u> Три раза подбрасывается монета: а) описать пространство элементарных событий; б) описать события: A - дважды выпал герб, B - по крайней мере один раз выпал герб; в) вычислить $P(A \cap B)$, $P(B)$ и $P(A/B)$.

<u>I.5.2.</u> Известно, что при бросании IO-ти игральных костей появилась по крайней мере одна единица. Какова вероятность того, что появились две или более единиц?

<u>I.5.3.</u> Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпала единица, если на трех костях выпали разные грани?

<u>I.5.4.</u> Игральная кость подбрасывается два раза. Известно, что сумма очков равна IO. Какова вероятность, что при этом один раз появилось 6 очков?

<u>I.5.5.</u> Показать, что если A и B - несовместны и $P(A \cup B) \neq 0$, то $P(A/A \cup B) = \dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}$

<u>I.5.6.</u> Дано: $P(A/B) = 0.7$, $P(A/\overline{B}) = 0.3$, $P(B/A) = 0.6$. Найти $P(A)$

<u>I.5.7.</u> В урне 5 шаров, отличающихся только номерами I,2,3,4,5. Вынимается выбранный наугад шар и отмечается его номер. Вынутый шар возвращается в урну. После тщательного перемешивания из нее вновь наугад вынимается шар. Известно, что первый раз был выбран шар I. Какова вероятность во второй раз вынуть шар 2?

<u>I.5.8.</u> В урне находятся 5 шаров, отличающихся только номерами I,2,3,4,5. Вынимается выбранный наугад шар. Вынутый шар не возвращается в урну. Вновь наугад вынимается шар. Известно, что первый

раз был выбран шар I. Какова вероятность во второй раз вынуть шар 2?

I.5.9. Симметричная монета подбрасывается n = IO раз. Известно, что при третьем подбрасывании выпадает герб. Какова вероятность того, что этот герб выпал первый раз?

I.5.IO. Против самолета были пущены две ракеты. Самолет был сбит. Найти вероятность того, что при этом первая ракета попала в самолет, если вторая попадает в него с вероятностью 0,5, а совместный пуск обеспечивает поражение с вероятностью 0,8.

I.5.II. В ящике лежат 20 теннисных мячей, из них I2 новых и 8 игранных. Для игры берут наугад 2 мяча и после игры возвращают в ящик. Затем из ящика вынимают 2 мяча для следующей игры. Найти вероятность, что оба эти мяча будут новыми.

I.5.I2. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,4, 0,3 и 0,5.

I.5.I3. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции брак, а 75% небракованных изделий соответствуют требованиям первого сорта.

I.5.I4. Известно, что $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}6$, $P(A/B)=0{,}32$. Найти вероятности $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$, $P(A/\bar{B})$, $P(B/A)$, $P(\overline{A\cup B})$, $P(\overline{A\cap B})$.

I.5.I5. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1. При повышении напряжения вероятность аварии прибора равна p_2. Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

I.5.I6. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятность отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны p_1 = 0,2; p_2 = 0,4; p_3 = 0,3.

I.5.I7. При игре в бридж раздаются 52 карты. Каждый из четырех участников получает набор из I3 карт. При раздаче карт по ошибке одна карта перевернулась и оказалась тузом. Какова вероятность (условная) того, что в этом наборе карт будет ровно 3 туза?

I.5.I8. Из колоды в 52 карты вытаскивается черная карта. Из оставшихся 5I карты наугад выбираются I3 карт, причем оказывается, что все они одного цвета. Показать, что условная вероятность того, что они красные, равна 2/3.

I.5.I9. Пусть $P(A)=0{,}8$; $P(B)=0{,}6$; $P(A/B)=0{,}5$. Найти вероятность события $A\bar{B}$ и условную вероятность $P(\bar{B}/\bar{A})$.

I.5.20. Вероятность того, что прибор не откажет к моменту времени t_1, равна 0,8, а вероятность, что он не откажет к моменту времени $t_2 (t_2 > t_1)$ равна 0,6. Найти вероятность того, что прибор, не отказавший к моменту времени t_1, не откажет и к моменту времени t_2.

I.5.2I. Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A – появление туза,

B – появление карты красной масти,

C – появление бубнового туза,

D – появление десятки.

Определить, зависимы или независимы следующие пары событий:

а) A и B; б) A и C; в) B и C; г) B и D д) C и D.

I.5.22. События A и B несовместны, $P(A)\neq 0$ и $P(B)\neq 0$. Зависимы ли данные события?

I.5.23. Пусть $P(B)>0$ и выполняется равенство

$$P(A/B)+P(\bar{A})=1$$

Что можно сказать про события A и B?

I.5.24. События A и B несовместны и $P(B)>0$. Вычислить $P(A/B)$

I.5.25. Доказать, что если события A и B независимы, то события A и $\bar{B}$, а также $\bar{A}$ и $\bar{B}$ независимы.

I.5.26. Доказать, что если $P(A)>0$ и $P(B/\bar{A})=P(B/A)$, то события A и B независимы.

I.5.27. События A и B_1, а также A и B_2 независимы, а B_1 и B_2 – несовместны. Доказать, что события A и $B_1 \cup B_2$ независимы.

I.5.28. Вероятность попадания в самолет равна 0,4, а вероятность сбить самолет равна 0,I. Найти вероятность того, что при попадании в самолет он будет сбит.

I.5.29. Доказать, что если $P(A)=0{,}9$; $P(B)=0{,}8$, то

$$P(A/B)\geq 0{,}875$$

I.5.30. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток времени t равна $P_t(k)$. Считая числа вызовов за любые два соседних промежутка времени независимыми, определить вероятность $P_{2t}(s)$ поступления s вызовов за промежуток времени $2t$.

I.5.3I. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: АААА, ВВВВ, СССС. Известно, что вероятности каждой из последовательностей равны соответственно 0,3; 0,4;0,3. В результате шумов буква принимается правильно с вероятностью 0,6. Вероятность того, что переданная буква будет принята за каждую из двух оставшихся, равна 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано АААА, если на приемном устройстве получено АВСА.

I.5.32. В первой урне 2 белых шара и 3 черных шара, а во второй - I белый и 4 черных. Из первой урны во вторую переложили два шара. Найти вероятность того, что вынутый из второй урны шар окажется белым.

I.5.33. В стройотряде 70% первокурсников и 30% студентов второго курса. Среди первокурсников I0% девушек, а среди студентов второго курса - 5% девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

I.5.34. Передатчик на одной из позиций импульсного кода может передать "I"(импульс)вероятностью I/5 и "0"(отсутствие импульса) с вероятностью 4/5. Найти вероятность того, что эту позицию приемник примет как "I", если вероятность преобразования помехами "I" в "0" равна I/I0, а "0" в "I" - 3/I0.

I.5.35. Вероятности того, что во время работы ЭВМ возникает сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен.

I.5.36. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте - с вероятностью p_2; на третьем с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

I.5.37. Приборы изготавливаются двумя заводами. Первый изготавливает 2/3 всех изделий, второй - I/3. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна p_1, вторым p_2. Определить полную надежность p прибора, поступившего в производство.

I.5.38. Имеется n экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменующийся знает ответ не на все $2n$ вопросов, а только на $k < 2n$. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.

I.5.39. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

I.5.40. Три машины производят болты, причем первая машина производит 25% всей продукции, вторая машина - 35% и третья - 40%. Доля брака в продукции первой машины 5%, в продукции второй машины - 4%, в продукции третьей - 2%. а) Чему равна вероятность того, что наудачу взятый болт окажется дефектным? б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Каковы вероятности того, что он произведен первой, второй, третьей машинами?

I.5.41. В первой урне 2 белых и 3 черных шара, во второй - 2 белых и 2 черных, в третьей - 3 белых и I черный. Из первой урны переложен наугад один шар во вторую. После этого из второй урны также наугад переложен один шар в третью. Наконец, из третьей урны опять какой-то из шаров наугад переложен в первую. Какое распределение шаров в первой урне представляется наиболее вероятным? Что является более вероятным - сохранение первоначального состава первой урны или его изменение?

I.5.42. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Какова вероятность извлечь наудачу из урны белый шар?

I.5.43. Сообщение состоит из "точек" и "тире". Помехи искажают 2/5 "точек" и I/3 "тире" (при искажении каждый сигнал переходит в противоположный). В сообщении "точки" и "тире" встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принята: а) "точка"; б) "тире".

I.5.44. Два датчика посылают сигналы в общий канал связи, причем первый из них посылает вдвое больше сигналов, чем второй. Вероятность получить искаженный сигнал от первого датчика равна 0,06, от второго – 0,03. Какова вероятность получить искаженный сигнал в общем канале связи?

I.5.45. Предположим, что экзаменующийся отвечает на тест, выбирая ответ из пяти данных альтернатив. Вероятность того, что экзаменующийся знает ответ, равна 2/3, а вероятность того, что он будет отвечать, выбирая случайным образом одну из пяти альтернатив, равна I/3. Определить условную вероятность того, что экзаменующийся знал ответ, при условии, что из списка возможных ответов он выбрал правильный.

I.5.46. Две урны A и B содержат цветные шары в следующем составе: A – 5 зеленых и 7 красных, B – 4 зеленых и 2 красных. Какова вероятность вынуть зеленый шар, если: а) сначала случайно выбирается урна и затем вынимается из нее шар; б) шары из двух урн перекладываются в третью и шар вынимается из нее.

I.5.47. Известно, что 95% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

I.6. Последовательности независимых испытаний. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Схема Бернулли. На практике очень часто встречается следующая схема: производится n независимых (в теоретико-вероятностном смысле) испытаний (экспериментов), в каждом из которых с вероятностью p может произойти фиксированное событие A. Тогда вероятность того, что в серии из n испытаний событие A произойдет ровно m раз, определяется формулой Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

где $q = 1 - p$.

Если m изменяется от 0 до n, то вероятности $P_n(m)$ сначала возрастают, а затем убывают, достигая наибольшего значения при $m=[np+p]$, если число $np+p$ – не целое; если же $np+p$ – целое число, то имеются две максимальные вероятности:

$$P_n(np+p) \text{ и } P_n(np-q)$$

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Если $n\to\infty$, $p(0<p<1)$ постоянно, величина $x_m=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ ограничена равномерно по m и n, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{npq}\,P_n(m)}{\varphi(x_m)}=1,$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность вероятностей стандартного нормального закона, значения которой табулированы (табл. П1).

Из этой теоремы следует, что при больших n

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. В условиях предыдущей теоремы при $-\infty\le a<b\le\infty$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{a\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le b\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx .$$

Функция $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$ называется функцией Лапласа. Значения этой функции можно найти в таблицах. При этом следует иметь в виду, что $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$. Иногда вместо значений функции $\Phi(x)$ табулируются (табл.П2) значения функции $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$, которая связана с функцией $\Phi(x)$ равенством $\Phi(x)=\Phi_0(x)+\frac{1}{2}$. Из интегральной теоремы Муавра-Лапласа следует, что при больших n

$$P(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Теорема Пуассона. Если $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $0<\lambda<\infty$, то

$$P_n(m) \longrightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$.

при любом постоянном m, m =0,1,2,..... В этом случае для вычисления вероятностей $P_n(m)$ могут быть использованы табл.П3,П4.

Независимые испытания с несколькими исходами. Предположим, что в результате каждого из n независимых испытаний может произойти одно из m событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно, $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$. Через $P_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ обозначим вероятность того, что в n испытаниях событие A_i наступит k_i раз, $i=\overline{1,m}$.

Тогда

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} p_1^{k_1}\ldots p_m^{k_m}.$$

ЗАДАЧИ

1.6.1. Вероятность попадания в цель p =0,25. Сбрасывается единично 8 бомб. Найти вероятность того, что будет: а) не менее 7 попаданий; б) не менее одного попадания.

1.6.2. Монета бросается 20 раз. Найти наивероятнейшее число появления герба.

1.6.3. Производится 10 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Найти: а) наиболее вероятное число попаданий; б) вероятность того, что число попаданий будет не меньше 2 и не больше 4.

1.6.4. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры 5; б) двух пятерок. Известно, что все номера 4-значные, неповторяющиеся и равновозможные.

1.6.5. В некотором семействе имеется 10 детей. Вероятность рождения мальчика и девочки равна 1/2. Найти вероятность того, что: а) имеется 5 мальчиков и 5 девочек; б) число мальчиков заключено между 3 и 8.

1.6.6. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 из 8 (ничьих не бывает).

1.6.7. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал 6 очков (выигрыш - 1 очко, проигрыш и ничья - 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность P_k того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

1.6.8. Испытание заключается в бросании 3 игральных костей. Найти вероятность того, что при 10 испытаниях ровно в 4 испытаниях появится в точности по две "6".

1.6.9. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы цифра "6" появилась хотя бы один раз с вероятностью, не меньшей 0,9?

1.6.10. Во время тренировок установлено, что спортсмен может улучшить прежний результат с вероятностью p при каждой попытке. Какова вероятность того, что на очередных соревнованиях, где разрешается три попытки, спортсмен улучшит свой результат?

1.6.11. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятность отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равна 0,2; 0,5; 0,8.

1.6.12. Вероятность появления некоторого события в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере 3 раза.

1.6.13. Вероятность появления события A хотя бы один раз при четырех независимых испытаниях равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

1.6.14. На отрезок $[0, 10]$ наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в $[0,2]$, одна в $[2,3]$, две в $[3,10]$.

1.6.15. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три - в один сегмент и по одной - в оставшиеся три сегмента.

1.6.16. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в

99 случаев из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что зрители выбирают входы с равными вероятностями.

1.6.17. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в первых n испытаниях будет m успехов, а в последних n испытаниях – ℓ успехов, и при этом один из них наступит в испытании с номером $2n$.

1.6.18. Каждый из девяти шаров с одинаковой вероятностью может быть помещен в один из трех первоначально пустых ящиков. Определить вероятность того, что: а) в каждый ящик попало по три шара; б) в один ящик попало 4, в другой - 3, а в оставшийся - 2 шара.

1.6.19. В урне имеется три шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекают 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращают обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее, чем по 2 раза каждый.

1.6.20. Партия из 100 изделий подвергается выборочному контролю. Партия бракуется, если среди пяти проверяемых изделий обнаруживается хотя бы одно негодное. Какова вероятность того, что партия будет забракована, если в ней содержится 5% негодных изделий.

1.6.21. Брошено 6 правильных игральных костей. Какова вероятность выпадания цифры "1" а) хотя бы один раз; б) ровно один раз; в) ровно два раза. Найти точные значения и сравнить с результатом, полученным по формуле Пуассона.

1.6.22. Среди семян пшеницы 0,6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить: не менее 3 семян сорняков; не более 16 семян сорняков; ровно 6 семян сорняков? (Применить теорему Пуассона).

1.6.23. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами при залпе в 5000 выстрелов (применить теорему Пуассона).

1.6.24. Задача - шутка. Имеется тесто в количестве V для изготовления булок с изюмом, который берется в количестве n изюминок. Какова вероятность того, что в наугад выбранной булке будет хотя бы одна изюминка, если на каждую булку идет v теста. (Решить двумя способами: с использованием теоремы Пуассона и без нее.)

1.6.25. Некоторая машина состоит из 1000 деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью 0,0003. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти вероятность того, что машина не будет работать.

1.6.26. Найти вероятность того, что число выпаданий "1" при 12000 бросаний игральной кости заключено между 1900 и 2150.

1.6.27. На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, и вероятность того, что найдутся три студента с одним и тем же днем рождения.

Указание. Использовать локальную теорему Муавра-Лапласа.

1.6.28. В страховом обществе застраховано 10000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0,006. Каждый застрахованный вносит 1 января 12 рублей страховых. В случае смерти его родственники получают от общества 1000 рублей. Найти вероятность того, что: а) общество потерпит убыток; б) общество получит прибыль, не меньшую 40000, 60000, 80000 рублей.

1.6.29. Вероятность некоторого события в каждом из n испытаний равна p. Найти вероятность того, что: а) частота наступления события при $n=1500$ отклонится от $p=0,4$ в ту или другую сторону меньше чем на 0,02; б) число появлений события будет заключено между 570 и 630; 600 и 660; 620 и 680; 580 и 640 (при $n=1500$ и $p=0,4$).

В каких границах находится та частота события при $n=1200$, вероятность отклонения которой от $p=\frac{2}{3}$ равна 0,985?

Сколько испытаний необходимо произвести, чтобы вероятность отклонения частоты от $p=\frac{2}{3}$ в ту или другую сторону меньше чем на 0,01 была равна 0,995?

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

2.1. Случайные величины. Распределение вероятностей и числовые характеристики

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство. Случайной величиной называется функция $X=X(\omega)$ на Ω, которая измерима относительно σ - алгебры, т.е. такая функция, для которой при каждом действительном x

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Ф у н к ц и е й   р а с п р е д е л е н и я   с л у ч а й н о й   в е л и ч и н ы X называется функция

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\}.$$

Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, то

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a), \quad (a < b).$$

Случайная величина X называется д и с к р е т н о й, если функция $X(\omega)$ имеет конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Набор чисел $P\{\omega : X(\omega) = x_i\} = p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots)$

называют р а с п р е д е л е н и е м   д и с к р е т н о й   с л у ч а й н о й   в е л и ч и н ы. Разумеется, $p_i \ge 0$ и $\sum_i p_i = 1$. Функция распределения дискретной случайной величины определяется равенством

$$F(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} p_i .$$

Случайная величина X называется н е п р е р ы в н о й, если ее функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy .$$

Функция $f(x)$ называется п л о т н о с т ь ю   р а с п р е д е л е н и я. Почти для всех x выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Плотность распределения неотрицательна, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ и для любых действительных a и b $(a < b)$

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Случайная величина $X(\omega)$ имеет математическое ожидание, если существует интеграл

$$MX(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)\,dP(\omega) = MX.$$

Если $F(x)$ – функция распределения X, то

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x).$$

В частности, для дискретной случайной величины X

$$MX = \sum_k x_k p_k,$$

а если X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx.$$

Если $g(x)$ – борелевская функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dF(x) < +\infty, \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

то

$$Mg(x) = \int g(x)\,dF(x).$$

Величина $\alpha_k = MX^k$ называется н а ч а л ь н ы м м о м е н т о м k -г о п о р я д к а, а величина $\mu_k = M(X-MX)^k$ ц е н т р а л ь н ы м м о м е н т о м k -г о п о р я д к а случайной величины X. Центральный момент μ_2 называется д и с п е р с и е й с л у ч а й н о й в е л и ч и н ы X и обозначается DX. Нетрудно проверить, что

$$DX = \mu_2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2.$$

З А Д А Ч И

2.1.1. Случайная величина X принимает значения: -1, 0, 1 с вероятностями, соответственно равными 1/4, 1/2, 1/4. Написать выражение и построить график функции распределения величины X.

2.1.2. Случайная величина X имеет следующее распределение вероятностей:

x	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти выражение и построить график функции распределения X.

Найти вероятность того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине "I".

2.I.3. Игральную кость бросают n раз. Найти функцию распределения числа выпадений шестерки.

2.I.4. Монету бросают n раз. Найти функцию распределения: а) числа выпадений герба; б) отношения числа выпадений герба к числу выпадений цифры.

2.I.5. Монету бросают, пока не выпадет цифра. Найти функцию распределения числа выпадений герба.

2.I.6. Случайная величина X распределена по следующему закону:

x	-I	0	I
p	0,2	0,3	0,5

Найти $M(X)$ и DX.

2.I.7. Монету бросают до первого выпадения герба. Найти среднее число бросаний.

2.I.8. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, извлекается по одному шару без возвращения до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание числа вынутых шаров.

2.I.9. В партии из IO деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию числа стандартных деталей среди отобранных.

2.I.IO. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров извлекается без возвращения n шаров. Число белых шаров X среди них имеет гипергеометрическое распределение:

$$P(X=m)=C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, \quad m=0,1,\ldots,\min(M,n)$$

Найти MX и DX

2.I.II. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков при одном бросании игральной кости и суммы очков при бросании двух игральных костей.

2.I.I2. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание числа таких бросаний, в каждом из которых выпадает ровно m шестерок, если общее число бросаний равно N.

2.I.I3. На пути движения автомашины 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Найти закон распределения числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки, записать в виде таблицы.

2.I.I4. Мишень состоит из круга № I и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № I дает IO очков, в кольцо № 2 – 5 очков, в кольцо № 3 – (–I) очко. Вероятности попадания в круг № I и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Найти закон распределения для случайной суммы выбитых очков в результате трех выстрелов.

2.I.I5. Стрелок имеет три патрона и стреляет в цель до первого попадания или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 2/3. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов.

2.I.I6. Случайная величина X полагается равной 0, если на правильной игральной кости в результате подбрасывания появляется нечетная грань, и I, если появляется четная грань. Найти функцию распределения случайной величины X. Вычислить вероятность событий:

$X < \frac{3}{2}$, $X < \frac{1}{2}$, $X > \frac{1}{3}$, $X < 1$, $X \geq 1$, $X < 1$

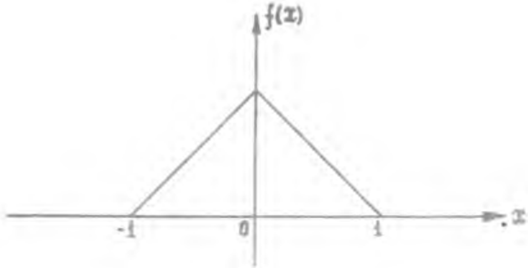
2.I.I7. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, x_3 с вероятностями $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$ и p_3.

Найти x_3 и p_3, зная, что $MX = 8$.

2.I.I8. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известно, что $MX = 0{,}1$, $MX^2 = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3

2.I.I9. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $MX = 2{,}6$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma_X = 0{,}8$.

2.I.20. Плотность случайной величины X имеет график, изображенный на рисунке. Написать выражения для плотности и функции распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание и дисперсию



Р и с. 2

2.I.2I. Случайная величина X имеет плотность (закон Коши):

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}$$

Найти: а) коэффициент A и функцию распределения X ; б) вероятность события $-1 < X < 1$; в) математическое ожидание случайной величины X .

2.I.22. Случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^{x}}$$

Найти постоянную величину a и вероятность того, что в двух независимых наблюдениях X примет значения меньше "I".

2.I.23. Плотность случайной величины X задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A и функцию распределения;
б) математическое ожидание и дисперсию X .

2.I.24. Плотность случайной величины X задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Найти коэффициент a и дисперсию величины X . Вычислить вероятность того, что уклонение X от ее математического ожидания будет не более 0,5.

2.I.25. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

а) построить график плотности;

б) вычислить вероятность $P\{0{,}5<X\le 1{,}5\}$,

в) найти среднее значение и дисперсию X.

2.I.26. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(4-x^2), & -2<x\le 0,\\ a(4+x^2), & 0<x\le 2.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) плотность и построить ее график;

в) $P(X\in(-1,1))$.

2.I.27. Плотность случайной величины X имеет вид

$f(x)=Ae^{-x}$ при $x\ge 0$;

$f(x)=0$ при $x<0$.

Найти коэффициент A, вычислить математическое ожидание и дисперсию X.

2.I.28. Точка брошена наудачу внутрь круга радиусом R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра круга.

2.I.29. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти функцию распределения и плотность X; построить их графики; найти математическое ожидание и дисперсию X.

2.I.30. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

2.I.31. Автобус некоторого маршрута идет строго по расписанию с интервалом 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

2.I.32. Поезда метро идут с интервалом в 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в произвольный момент времени. Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания поезда.

2.I.33. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данный момент часы покажут время, которое отличается от истинного не более, чем на 20 с.

2.I.34. Доказать, что если X и Y - независимые случайные величины, то

$$D(XY) = DX \cdot DY + m_2^2 DX + m_1^2 DY,$$

где $m_1 = MX$, $m_2 = MY$

2.I.35. Доказать, что центральный момент третьего порядка μ_3 связан с начальными моментами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равенством

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3.$$

2.I.36. Найти все центральные моменты нормально распределенной случайной величины X с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

2.I.37. Величина $S_x = \mu_3/(DX)^{3/2}$ называется асимметрией случайной величины X, а величина $E_x = \mu_4/(DX)^2 - 3$ эксцессом случайной величины X. Найти S_x и E_x, если:

а) X - нормально распределенная случайная величина с параметрами a и σ^2,

б) X - равномерно распределенная на отрезке $[-1, 1]$ случайная величина.

2.I.38. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Что больше:

$$P(-0{,}5 \le X \le -0{,}1) \quad \text{или} \quad P(1 \le X \le 2)?$$

2.I.39. Высотомер имеет случайные и систематические ошибки. Систематическая ошибка равна +20 м. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь прибор, чтобы с вероятностью 0,9452 ошибка измерения высоты была меньше 100 м.

2.I.40. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным IO м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м.

2.I.4I. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным "0". Вероятность попадания случайной величины на отрезок (-0,3; 0,3) равна 0,5. Найти σ_x, написать закон распределения.

2.I.42. Размер деталей, выпускаемых цехом, распределяется по нормальному закону с параметрами

$$MX = 5 см,\quad DX = 0{,}81 см^2$$

Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали: а) от 4 до 7 см; б) отличается от математического ожидания не более, чем на 2 см.

2.I.43. Размер диаметра втулок, изготавливаемых цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 2{,}5 см$ и дисперсией σ^2 = 0,000I см^2.

В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,997?

2.I.44. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2)$. При какой дисперсии σ^2 вероятность $P(0 < a < X < b)$ будет наибольшей?

2.I.45. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. Показать, что

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1,$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

2.I.46. По известному "Правилу трех сигма" вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала. Найти

$$P(|X - MX| < 3\sqrt{DX}),$$

если X имеет:

а) нормальное распределение;

б) показательное распределение;

в) равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$;

г) $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{1}{18}$, $P(X=0)=\frac{8}{9}$;

д) распределение Пуассона с $MX = 0{,}09$.

2.1.47. Показать, что вероятность попадания на интервал (a,b) нормально распределенной случайной величины X с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ не изменится, если каждое из чисел a, b, m и σ увеличить в λ раз ($\lambda > 0$).

2.1.48. Радиостанция ведет передачу информации в течение 10 мкс. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в одну секунду составляет 10^4. Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции. Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность срыва передачи информации.

2.1.49. При работе ЭВМ возникают неисправности (сбои). Поток сбоев можно считать простейшим пуассоновским. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности следующих событий: A – за двое суток не будет ни одного сбоя; B – в течение суток произойдет хотя бы один сбой; C – за неделю работы машины произойдет не менее трех сбоев.

2.1.50. Вероятность позвонить на коммутатор в течение часа для любого абонента равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

2.1.51. Время работы элемента до отказа подчинено показательному закону распределения с параметром $\lambda = 2 \cdot 10^{-5} \, 1/ч$. Найти среднее время между появлениями двух смежных отказов и вероятность безотказной работы к моменту среднего времени после включения технического устройства.

2.1.52. Вероятность того, что станок, работающий в момент t_0, не остановится до момента $t_0 + t$, задается формулой $P(t) = e^{-\alpha t}$. Найти математическое ожидание и дисперсию рабочего периода станка (между двумя последовательными остановками).

2.1.53. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, представляющие отдельные результаты наблюдений величины Y, одинаково распределены по закону:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-x}, & x>0\end{cases}$$

$$Y_n=\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Найти закон распределения случайной величины Y_n.

2.I.54. Число проведенных опытов X случайно и может изменяться в пределах от 0 до ∞. Вероятность $P(X=k)=\frac{a^k e^{-a}}{k!}$ Каждый опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $1-p$. Найти закон распределения числа успешных опытов.

2.I.55. В ящике имеется 1000 радиодеталей, характеризующихся некоторым параметром X (например величиной емкости конденсатора). Допустим, что 700 деталей изготовлены на одном заводе и 300 – на другом. На заводах применяется различная технология, поэтому в первом случае распределение параметра X есть $F_1(x)$, во втором $F_2(x)$. Найти функцию распределения $F(x)$ параметра X для детали, взятой из ящика наугад.

2.I.56. Доказать, что промежуток времени между двумя последовательными событиями пуассоновского потока распределен по показательному закону.

2.2. Случайные векторы. Условные распределения

Случайным вектором X со значениями в R^n называют совокупность $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ действительных случайных величин X_k, $k = 1,2,\ldots, n$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Величину X_k называют k-й координатой вектора X.

Функция распределения $F(x_1,\ldots, x_n)$ случайного вектора $X = (X_1,\ldots, X_n)$ определяется равенством

$$F(x_1,\ldots,x_n)=P(X_1<x_1,\ldots,X_n<x_n)$$

Если $F(x_1,\ldots,x_n)$ – функция распределения вектора $(X_1,\ldots,X_n)$, то вектор $(X_{k_1},\ldots,X_{k_m})$, $1\le k_1<k_2<\ldots<k_m\le n$ будет иметь функцию распределения

$$G(x_1,\ldots,x_m)=F(\underbrace{\infty,\ldots,\infty}_{k_1-1},x_1,\underbrace{\infty,\ldots,\infty}_{k_2-k_1-1},x_2,\ldots,x_m,\underbrace{\infty,\ldots,\infty}_{n-k_m})$$

Если возможные значения случайного вектора X образуют конечное или счетное множество $\mathcal{X}=\{x^{(k)}, k\in \mathcal{I}\}$, то он называется дискретным (или дискретно распределенным). В этом случае закон распределения вектора X задается совокупностью вероятностей $\{p_k, k\in \mathcal{I}\}$, где

$$p_k = P\{X=x^{(k)}\}=P\{X_1=x_1^{(k)}, X_2=x_2^{(k)}, \dots, X_n=x_n^{(k)}\}$$

Закон распределения дискретного вектора позволяет определить вероятность принятия в любом множестве $A\subset R^n$:

$$P\{X\in A\}=\sum_{\{k:x^{(k)}\in A\}} p_k,$$

в частности,

$$F(y_1,\dots,y_n)=\sum_{\{k:x_i^{(k)}<y_i, i=\overline{1,n}\}} p_k.$$

Из закона распределения дискретного вектора можно получить также распределение любой его координаты или группы координат. Если, например, i -я координата имеет множество возможных значений $\{z_j, j\in \mathcal{I}_i\}$, то

$$q_j=P\{X_i=z_j\}=\sum_{\{k:x_j^{(k)}=z_j\}} p_k, \quad j\in \mathcal{I}_i$$

Для получения условного распределения группы координат дискретного вектора при фиксированных значениях остальных координат достаточно воспользоваться определением условной вероятности. Так, например,

$$P\{X_1=y_1,\dots,X_m=y_m/X_{m+1}=z_1,\dots,X_n=z_{n-m}\}=$$
$$=P\{X_1=y_1,\dots,X_m=y_m, X_{m+1}=z_1,\dots,X_n=z_{n-m}\}/P\{X_{m+1}=$$
$$=z_1,\dots,X_n=z_{n-m}\}=$$
$$=\sum_{\{k:x_i^{(k)}=y_i, i=\overline{1,m}, x_{m+j}^{(k)}=z_j, j=\overline{1,n-m}\}} p_k \Big/ \sum_{\{k:x_{m+j}^{(k)}=z_j, j=\overline{1,n-m}\}} p_k .$$

Если функцию распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ вектора X можно представить в виде

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,\ldots,u_n)\,du_1 \ldots du_n,$$

то говорят, что случайный вектор X непрерывен (или непрерывно распределен) и имеет плотность распределения $f(x_1, \ldots, x_n)$. Плотность распределения $f(x_1,\ldots,x_n)$ является неотрицательной функцией и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = 1.$$

При этом почти всюду имеет место равенство

$$\frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = f(x_1,\ldots,x_n)$$

Если A - борелевское множество в R^n, а вектор X имеет плотность распределения $f(x_1,\ldots,x_n)$, то

$$P\{(X_1,\ldots,X_n) \in A\} = \int \ldots \int_A f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Если случайный вектор $(X_1,\ldots,X_n)$ имеет плотность распределения $f(x_1,\ldots,x_n)$, то вектор $(X_{k_1}, \ldots, X_{k_m})$ будет иметь плотность

$$g(x_1,\ldots,x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1,\ldots,u_{k_1-1}, x_1, u_{k_1+1},\ldots, x_m, u_{k_m+1},\ldots,u_n)\,du_1 \ldots$$
$$\ldots du_{k_1-1}\, du_{k_1+1} \ldots du_n$$

Плотность распределения "отрезка" $(X_1, \ldots, X_m)$ вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ при условии, что случайные величины $X_{m+1}, \ldots, X_n$ приняли определенные значения $X_{m+1} = x_{m+1} \ldots, X_n = x_n$, равна:

$$f(x_1,\ldots,x_m / x_{m+1},\ldots,x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{g(x_{m+1},\ldots,x_n)},$$

где $g(x_{m+1},\ldots,x_n)$ - плотность распределения вектора $(X_{m+1},\ldots,X_n)$. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются н е з а в и с и м ы м и, если

$$P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\} = P\{X_1 < x_1\} \ldots P\{X_n < x_n\}$$

Независимость координат дискретного вектора X означает, что

$$p_k = P\{X_1 = x_1^{(k)}\} \dots P\{X_n = x_n^{(k)}\}.$$

В случае непрерывного вектора с независимыми координатами выполняется равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n),$$

где $f_i(x_i)$, $i = \overline{1,n}$ – плотность распределения i -й координаты вектора X.

Важнейшими "числовыми" характеристиками случайного вектора X являются математическое ожидание вектора и его корреляционная матрица. По определению, математическим ожиданием вектора X называется неслучайный вектор, координаты которого представляют собой математические ожидания соответствующих координат вектора X : $MX = (MX_1, \dots, MX_n)$

Корреляционной матрицей вектора X называют матрицу $R = \| R_{ik} \|$, элементами которой являются корреляционные моменты координат:

$$R_{ik} = M(X_i - MX_i)(X_k - MX_k) = MX_i X_k - MX_i \cdot MX_k$$

Величину $MX_i X_k$ иногда называют ковариацией величин X_i и X_k и используют обозначение $\operatorname{cov}(X_i, X_k) = MX_i X_k$. Величина $r_{ik} = R_{ik} / \sqrt{R_{ii} R_{kk}}$ называется коэффициентом корреляции величин X_i и X_k.

Условные числовые характеристики (математические ожидания, дисперсии и др.) определяются и находятся также, как и безусловные, только для их вычисления вместо распределения (безусловного) в формулы входят условные распределения. Так, например,

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/y)\, dx,$$

$$D(X/Y = y) = M(X^2/Y = y) - [M(X/Y = y)]^2,$$

если существует условная плотность распределения $f(x/y)$ случайной величины X при фиксированном значении $Y = y$.

З А Д А Ч И

2.2.1. Совместный закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y) определяется таблицей $(p_i+q_i=1,\ i=1,2)$

$x \backslash y$	0	1
0	$q_1 q_2$	$p_1 q_2$
1	$q_1 p_2$	$p_1 p_2$

Найти совместную функцию распределения $F(x,y)$

2.2.2. Закон распределения случайного вектора (X,Y) зависит от неизвестного параметра:

$x \backslash y$	1	2	3
2	3λ	2λ	λ
4	λ	4λ	2λ
6	0	2λ	5λ

Найти λ, законы распределения случайных величин X и Y, и функцию распределения $F(x,y)$ вектора (X,Y).

2.2.3. Дано распределение вероятностей случайного вектора (X,Y):

$x \backslash y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0.2	0.3	0.2

Найти распределения вероятностей случайных величин X и Y, их математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции.

2.2.4. Совместное распределение величин X и Y определяется формулами

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0,Y=-1)=P(X=1,Y=0)=P(X=-1,Y=0)=\frac{1}{4}$$

Найти MX, MY и корреляционную матрицу R. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

2.2.5. Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей

$x \backslash y$	1	2	3
9	0.1	0.2	0.1
10	0.15	0.25	0.2

Найти: а) условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X принимает значение, равное 10. Вычислить $M(Y/X=10)$, $D(Y/X=10)$; б) условное распределение случайной величины X при условии, что $Y=2$; вычислить $M(X/Y=2)$, $D(X/Y=2)$

2.2.6. Случайные величины X, Y независимы, одинаково распределены и имеют дискретное распределение

$$P(X = x_k) = P(Y = x_k) = p_k$$

Найти $P(X = Y)$

2.2.7. Случайные величины X и Y независимы;

$$P(X = k) = P(Y = k) = pq^{k-1}, \quad q = 1-p, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Найти:

а) $P(X = Y)$, б) $P(X > Y)$; в) $P(X < Y)$;
г) $P(X = k / X > Y)$, д) $P(X = k / X < Y)$; е) $P(X = k / X = Y)$;
ж) $P(X = k / X + Y = \ell)$; з) $M(X / X + Y = \ell), \ell \geq 2$.

2.2.8. Дана функция распределения $F(x, y)$ пары случайных величин (X, Y). Найти $P(X > x, Y > y)$.

2.2.9. Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения $F(x, y)$ случайного вектора (X, X).

2.2.10. Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$. Найти функцию распределения $F(x, y)$ случайного вектора $(X, |X|)$.

2.2.11. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Положим $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Найти функцию распределения случайного вектора (X, Y).

2.2.12. Определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область, определенную неравенствами $(1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$, если функция распределения $(a > 0)$

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \min(x,y) < 0 \end{cases}$$

2.2.13. Задана функция распределения случайного вектора (X, Y).

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x\geq 0, y\geq 0,\\ 0 & , \min(x,y)<0\end{cases}$$

Найти плотность распределения вектора (X,Y).

2.2.14. Задана функция распределения случайного вектора (X,Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0,\\ 0 & , \min(x,y)<0\end{cases}$$

Найти: а) совместную плотность распределения вектора (X,Y);
б) вероятность попадания вектора (X,Y) в треугольник с вершинами в точках A(1;3), B(3;3), C(2;8).

2.2.15. Определить плотность распределения, математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X,Y), если его функция распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } \min(x,y)\leq 0,\\ \sin x\cdot\sin y, & \text{если } (x,y)\in(0,\frac{\pi}{2}]\times(0,\frac{\pi}{2}],\\ \sin x, & \text{если } (x,y)\in(0,\frac{\pi}{2}]\times(\frac{\pi}{2},\infty),\\ \sin y, & \text{если } (x,y)\in(\frac{\pi}{2},\infty)\times(0,\frac{\pi}{2}],\\ 1 & \text{если } \min(x,y)>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

2.2.16. Дана плотность распределения случайного вектора (X,Y)

$$f(x,y)=0{,}5\sin(x+y)\quad \left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

Определить: а) функцию распределения вектора; б) математические ожидания X и Y; в) корреляционную матрицу.

2.2.17. Случайный вектор (X,Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину A ; б) найти функцию распределения $F(x,y)$

2.2.18. Плотность распределения случайного вектора (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases} 24x^2y(1-x), & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0 & , \min(x,y)<0,\ \max(x,y)>1. \end{cases}$$

Вычислить: а) плотность распределения X ; б) плотность распределения Y . Доказать, что X и Y независимы.

2.2.19. Плотность распределения вектора (X,Y) равна

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy(1-x^2), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказать, что X и Y независимы.

2.2.20. Плотность распределения вектора (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases} x e^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить: а) плотность распределения X ; б) плотность распределения Y . Являются ли X и Y независимыми?

2.2.21. Плотность распределения вектора (X,Y) равна

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}e^{-y}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}, & \text{при } 0<x<y, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти плотности распределения X и Y .

2.2.22. Для системы случайных величин (X_1, X_2, X_3, X_4) дана плотность распределения

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{384\pi^2}e^{-\frac{5}{96}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+\frac{1}{48}(x_1x_3+x_2x_4)}$$

Найти плотности распределения подсистем $f_{X_1X_3}(x_1,x_3)$, $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$

2.2.23. Определить математическое ожидание и корреляционную матрицу случайного вектора (X, Y), если плотность

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi(x^2+y^2+1)^3}.$$

2.2.24. Случайный вектор (X, Y) распределен равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям. Найти совместную плотность распределения вектора (X,Y) и плотности распределения его координат.

2.2.25. Дана плотность распределения вектора (X,Y)

$$f(x,y) = Kxye^{-(x^2+y^2)}, \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Определить $K, f_X(x), f_Y(y), f(x/y), f(y/x)$, первые и вторые моменты распределения.

2.2.26. Случайный вектор (X, Y) распределен с постоянной плотностью внутри квадрата с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(0;a)$, $C(a,a)$, $D(a,0)$

Написать выражение плотности $f(x,y)$ и совместной функции распределения вектора (X, Y). Написать выражения $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Определить, являются ли случайные величины X, Y независимыми или зависимыми.

2.2.27. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в квадрате со стороной, равной единице, и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти коэффициент корреляции величин X, Y.

2.2.28. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен внутри прямоугольного треугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(0;8)$, $C(8;0)$. Найти совместную плотность распределения вектора (X,Y); найти плотности и условные плотности распределения составляющих.

2.2.29. Случайный вектор (X, Y) имеет постоянную плотность распределения внутри квадрата с диагоналями, совпадающими с осями координат и равными двум. Написать выражение совместной плотности $f(x,y)$. Найти выражение плотностей распределения $f_X(x), f_Y(y)$ и условных плотностей $f(x/y)$, $f(y/x)$. Зависимы или независимы случайные величины X, Y? Коррелированы они или нет?

2.2.30. Пусть (X,Y) – случайный вектор, у которого координата X распределена по показательному закону с параметром λ :

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad x>0,$$

а координата Y при заданном значении $X=x>0$ распределена по показательному закону с параметром x :

$$f(y/x)=x e^{-xy},\quad y>0$$

Найти совместную плотность $f(x,y)$ вектора (X,Y) ; найти плотность $f_Y(y)$ случайной величины Y ; найти условную плотность $f(x/y)$.

2.2.31. Поверхность распределения $f(x,y)$ случайного вектора (X,Y) представляет собой прямой круговой цилиндр, центр основания которого совпадает с началом координат, а высота равна h . Определить радиус R цидиндра, найти $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f(x/y)$, $f(y/x)$, MX ,DX, R_{XY}.

2.2.32. Для случайного вектора (X,Y) известны $f_Y(y)$, $M(X/Y=y)$,$D(X/Y=y)$. Определить MX,DX

2.2.33. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в круге радиуса R с центром в начале координат. Доказать, что X и Y зависимы, но некоррелированы.

2.2.34. Коэффициент корреляции случайных величин X и Y равен единице. Может ли случайный вектор (X,Y) иметь плотность распределения?

2.2.35. Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин MX =26, MY =-I2 и их корреляционная матрица

$$R=\begin{pmatrix}196 & -91\\ -91 & 169\end{pmatrix}$$

Определить плотность распределения случайного вектора (X,Y).

2.2.36. Дана плотность распределения координат случайной точки на плоскости

$$f(x,y)=c\,e^{-[4(x-5)^2+2(x-5)(y-3)+5(y-3)^2]}$$

Требуется: а) определить c ; б) определить корреляционную матрицу.

2.2.37. Дана корреляционная матрица системы трех случайных величин (X, Y, Z):

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

математические ожидания $MX = MY = MZ = 0$.

Найти плотность распределения $f(x, y, z)$ нормального вектора (X, Y, Z).

2.2.38. Координаты случайной точки на плоскости подчиняются нормальному закону распределения

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Определить: а) плотность распределения компонент вектора (X, Y); б) условные плотности распределения $f(y/x)$ и $f(x/y)$; в) условные математические ожидания; г) условные дисперсии.

2.2.39. Случайный вектор (X, Y) подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x,y) = k \exp\left\{-\frac{1}{0{,}72\sigma^2}\left[(x-5)^2 + 0{,}8(x-5)(y+2) + 0{,}25(y+2)^2\right]\right\}$$

Определить: а) условные математические ожидания и дисперсии; б) плотность вероятности каждой из случайных величин, входящих в систему; в) условные плотности распределения $f(y/x)$ и $f(x/y)$.

2.2.40. Случайный вектор (X, Y) распределен по нормальному закону с параметрами $MX = 1$, $MY = -1$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$, $r_{xy} = 0$. Найти вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет внутрь области D, ограниченной эллипсом $(x-1)^2 + (y+1)^2/4 = 1$.

2.2.41. Имеются независимые случайные величины X, Y. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $MX = 0$, $\sigma_X = 1/\sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале (0,1). Написать выражение для совместной плотности $f(x,y)$ и функции распределения $F(x,y)$ вектора (X,Y).

2.2.42. Случайная величина X – дискретная величина с двумя значениями x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$, имеющими вероятности p_1 и p_2. Случайная величина Y – непрерывная величина, ее условным распределением при $X=x_i$ служит нормальный закон с математическим ожиданием, равным x_i, и дисперсией $\sigma^2 (i=1,2)$. Найти совместную функцию распределения $F(x,y)$ вектора (X,Y). Найти плотность $f_Y(y)$ случайной величины Y.

2.2.43. Пусть $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – две плотности двумерных гауссовских распределений на плоскости с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и равными коэффициентами корреляции. Доказать, что: а) функция $f(x,y)=\frac{1}{2}[f_1(x,y)+f_2(x,y)]$ является плотностью распределения некоторого случайного вектора (X,Y); б) вектор (X,Y) не является гауссовским; в) каждая из величин X и Y имеет гауссовское распределение $\mathcal{N}(0,1)$.

2.2.44. Пусть $u(x)$ – нечетная непреывная функция на интервале $(-\infty,\infty)$, которая равна нулю вне промежутка $(-1,1)$ и $|u(x)|<(2\pi e)^{-1/2}$. Пусть $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Доказать, что: а) функция $\varphi(x)\varphi(y)+u(x)u(y)$ является плотностью распределения некоторого случайного вектора (X,Y); б) вектор (X,Y) не является гауссовским; в) каждая из величин X и Y имеет гауссовское распределение.

2.3. Функции от случайных величин и векторов

Пусть X – случайная величина с множеством значений $\mathcal{X}$ и функцией распределения $F_X(x)$, а $g(x)$ – измеримая функция, определенная на множестве $\mathcal{D}\subset\mathcal{X}$. Тогда функция распределения случайной величины $Y=g(X)$ определяется формулой

$$F_Y(y)=\int\limits_{\{x:g(x)<y\}} dF_X(x)$$

Если X – дискретная случайная величина с множеством значений $\mathcal{X}=\{x_k, k\in I\}$ и распределением вероятностей

$$p_k=P\{X=x_k\},\quad k\in I,$$

а $\mathcal{Y}=\{y_j, j\in J\}$ – множество значений случайной величины $Y=g(X)$, то распределение вероятностей случайной величины Y находится по формуле

$$q_j=P\{Y=y_j\}=\sum_{\{k:g(x_k)=y_j\}} p_k .$$

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью $f_X(x)$, $g(x)$ – монотонная дифференцируемая функция. Тогда $Y=g(X)$ – также непрерывная случайная величина, и ее плотность определяется формулой

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))|[g^{-1}(y)]'|,$$

где $g^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к функции $g(\cdot)$. Если же $g(x)$ кусочно-монотонная дифференцируемая функция, то

$$f_Y(y)=\sum_i f_X(g_i^{-1}(y))|[g_i^{-1}(y)]'|,$$

где $g_i^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная к сужению функции $g(\cdot)$ на i-й промежуток монотонности.

Для вычисления математического ожидания функции от случайной величины X достаточно знать ее распределение: если она дискретна, то

$$Mg(X)=\sum_{k\in I} g(x_k)p_k,$$

а если непрерывна с плотностью $f_X(x)$, то

$$Mg(X)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

Пусть теперь $X=(X_1,\dots,X_n)$ – случайный вектор и $g(x)=g(x_1,\dots,x_n)$ – измеримая функция со значениями в R^m $(g=(g_1,\dots,g_m))$. Функция распределения случайного вектора

$$Y=g(X) \quad (Y=(Y_1,\dots,Y_m),\ Y_j=g_j(X_1,\dots,X_n),\ j=\overline{1,m})$$

связана с функцией распределения вектора X формулой

$$F_Y(y_1,\dots,y_m)=\int\limits_{\{x:\,g_j(x)<y_j,\ j=\overline{1,m}\}}\cdots\int dF_X(x_1,\dots,x_n).$$

Если $m=n$ и преобразование g взаимно однозначно, причем известен якобиан этого преобразования

$$\mathcal{D} = \frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)} = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\|_{i,j=1}^{n},$$

а случайный вектор X непрерывен с плотностью $f_X(x_1,\dots,x_n)$, то плотность преобразованного вектора определяется формулой

$$f_Y(y_1,\dots,y_n) = |\mathcal{D}|\, f_X(g^{-1}(y_1,\dots,y_n)),$$

где $g^{-1}(\cdot)$ – преобразование, обратное к $g(\cdot)$.

Пусть (X,Y) – двумерный случайный вектор с плотностью $f_{XY}(x,y)$. Часто приходится рассматривать сумму координат вектора: $Z=X+Y$. Плотность распределения этой случайной величины находится по формулам:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)\,dx.$$

Если дополнительно известно, что координаты X и Y независимы и имеют плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно, то

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx.$$

З А Д А Ч И

2.3.I. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x	-2	-I	I	2
p	0.I	0.3	0.2	0.4

Найти закон распределения случайной величины $Y=X^2$.

2.3.2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
p	0.1	0.2	0.1	0.2	0.4

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

2.3.3. Случайная величина X имеет распределение $p_k = P(X=k) = pq^k$, $k=0,1,2,\ldots$ $(p+q=1,\ p>0,\ q>0)$. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $Y = 2X-3$.

2.3.4. Случайная величина X имеет распределение $p_k = P(X=k) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k=0,1,2,\ldots$. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $Y=(X-1)^2$.

2.3.5. Случайная величина X имеет распределение $P(X=k) = \frac{1}{ek!}$, $k=0,1,2,\ldots$ и $Y=(3X-2)^2$. Найти распределение случайной величины Y.

2.3.6. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{tg} X$.

2.3.7. Случайная величина X равномерно распределена на интервале (0,1). Найти плотности распределения случайных величин:

а) $Y = X^2$; б) $Y = \frac{1}{X}$; в) $Y = e^X$ и построить графики.

2.3.8. Случайная величина X равномерно распределена на интервале $(0, 2\pi)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

2.3.9. Пусть X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1,1]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |X|$.

2.3.10. Случайная величина X нормально распределена с параметрами (0,1). Найти плотности распределения случайных величин:

а) $Y = AX+B$; б) $Y = \frac{1}{1+X^2}$; в) $Y = e^X$, г) $Y = \operatorname{arctg} X$, д) $Y = \sqrt[3]{|X|}$.

2.3.11. Случайная величина $X \sim N(a, \sigma^2)$. Найти: а) плотность распределения случайной величины $Y = X^2$ при $a=0$; б) плотность распределения случайной величины $Z = e^X$ при произвольных a, σ.

2.3.12. Найти MX и DX, если случайная величина $Y=\ln X$ имеет нормальное распределение с параметрами (a,σ^2).

Примечание. В этом случае говорят, что случайная величина X имеет логарифмически нормальное распределение.

2.3.13. Случайная величина $X \sim N(0,1)$. Найти: а) закон распределения случайной величины

$$Y=\begin{cases} X, & |X|\le 1, \\ -X, & |X|>1; \end{cases}$$

б) закон распределения случайной величины $Z=X+Y$ и MZ.

2.3.14. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x)=\begin{cases} \cos x, & x\in(0,\pi/2) \\ 0, & x\notin(0,\pi/2). \end{cases}$$

Найти дисперсию случайной величины $Y=X^2$.

2.3.15. Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Найти плотности распределения случайных величин:

а) $Y=X^3+2$; б) $Y=\operatorname{arctg} X$.

2.3.16. Случайная величина X имеет распределение Коши. Доказать, что случайные величины $\frac{1}{X}$, $\frac{2X}{1-X^2}$, $\frac{3X-X^3}{1-3X^2}$ также имеют распределение Коши.

2.3.17. Задана плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X. Найти плотность распределения $f_Y(y)$ случайной величины Y, если: а) $Y=AX+B$; б) $Y=|X|$; в) $Y=\frac{1}{X^2}$; г) $Y=\sin X$.

2.3.18. Задана функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины $Y=3X+2$.

2.3.19. Задана функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Найти функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины $Y=-\frac{2}{3}X+2$.

2.3.20. Диаметр круга – случайная величина X, которая равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Найти функцию распределения площади круга.

2.3.21. Пусть X – случайная величина с непрерывной функцией распределения $F_X(x)$ и $Y=F_X(X)$. Найти функцию распределения случайной величины Y.

2.3.22. Дискретные случайные величины X и Y имеют законы распределения:

x	10	12	16
p	0,4	0,1	0,5

y	1	2
p	0,2	0,8

Найти закон распределения случайной величины $Z=X+Y$.

2.3.23. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

$x \backslash y$	-1	1
-1	1/8	5/24
0	1/12	1/6
1	7/24	1/8

Найти: а) совместный закон распределения $q_{i,j}=P(Z_1=i, Z_2=j)$ случайных величин $Z_1=X+Y$ и $Z_2=XY$; б) закон распределения $p_i=P(Z_1=i)$ случайной величины $Z_1=X+Y$; в) закон распределения $q_j=P(Z_2=j)$ случайной величины $Z_2=XY$.

2.3.24. Пусть величина X принимает значения -1,0,1 с вероятностями соответственно 1/4, 1/2, 1/4, а величина Y принимает значения 1,2,3 с вероятностями 1/3, 1/3, 1/3. Величины X и Y независимы. Найти распределение случайной величины $Z=X+Y$.

2.3.25. Величина X принимает значения -1,1 с вероятностями 1/2 и 1/2. Случайная величина Y равномерно распределена в отрезке $[0,1]$; X и Y независимы. Найти распределение случайной величины $Z=X+Y$.

2.3.26. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0,1]$, а случайная величина Y имеет показательное распределение, т.е.

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

величины X и Y независимы. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X+Y$.

2.3.27. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$, если: а) задана плотность вероятности $f(x,y)$ случайного вектора (X,Y); б) случайный вектор (X,Y) подчиняется нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

2.3.28. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = XY$, если: а) задана плотность вероятности $f(x,y)$ случайного вектора (X,Y); б) X и Y – независимые нормальные случайные величины с математическими ожиданиями, равными "0", дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно.

2.3.29. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти функцию распределения случайной величины $\frac{X}{X+Y} = Z$.

2.3.30. Пусть X и Y – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X+Y$.

2.3.31. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Найти плотность распределения случайных величин: а) $Z = XY$, б) $Z = X-Y$, в) $|X-Y| = Z$

2.3.32. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти: а) плотность распределения $X-Y$; б) плотность распределения $|X-Y|$.

2.3.33. Пусть X и Y – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X+Y$.

2.3.34. Случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0. \end{cases}$$

Доказать, что случайная величина XY имеет нормальное распределение.

2.3.35. Случайные величины X и Y нормально распределены $N(0,\sigma^2)$ и независимы. Доказать, что отношение $Z=\frac{X}{Y}$ имеет распределение Коши.

2.3.36. Пусть (X,Y) – гауссовский случайный вектор $N(0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$. Найти плотность распределения случайной величины $Z=\frac{X}{Y}$

2.3.37. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальные распределения $N(a_1,\sigma_1^2)$ и $N(a_2,\sigma_2^2)$

Доказать, что случайная величина $Z=X+Y$ имеет нормальное распределение $N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

2.3.38. Пусть X и Y – независимые случайные величины, которые имеют нормальные распределения $N(0,1)$. Доказать, что случайные величины $X-Y$ и $X+Y$ независимы.

2.3.39. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие показательные распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что случайные величины $X-Y$ и $\min(X,Y)$ независимы.

2.3.40. Пусть X и Y – независимые, нормально распределенные $N(0,\sigma^2)$ случайные величины. Показать, что случайные величины X^2+Y^2 и X/Y независимы.

2.3.41. Пусть (X,Y) – гауссовский случайный вектор $N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$ и

$$X_1=X\cos\alpha+Y\sin\alpha,$$
$$Y_1=-X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

Найти плотность распределения случайного вектора (X_1,Y_1)

При каком α X_1 и Y_1 независимы?

2.3.42. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – независимые случайные величины, имеющие гауссовские распределения $N(0,1)$. Пусть $Y_1=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k$ и $Y_2=\sum_{k=1}^{n}b_kX_k$. Доказать, что Y_1 и Y_2 независимы тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=0$

2.3.43. По плотности распределения $f(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y) найти плотность распределения $g(x_1,y_1)$ вектора (X_1,Y_1) с

$$X_1=X\cos\alpha+Y\sin\alpha,$$
$$Y_1=-X\sin\alpha+Y\cos\alpha,\quad 0<\alpha<\pi/2$$

2.3.44. Определить плотность распределения длины радиус-вектора, если сам вектор имеет нормальное распределение с плотностью

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2}}$$

2.3.45. Координаты случайной точки (X, Y) на плоскости подчинены нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi a b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Определить совместную плотность распределения $f_1(r, \varphi)$ полярных координат этой точки (R, Φ).

2.3.46. Точка P равномерно распределена в круге радиусом R. Пусть X – расстояние от точки до центра круга. Найти функцию распределения $F_X(x)$ и плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X. Построить графики $F_X(x)$ и $f_X(x)$. Вычислить MX и DX.

2.3.47. На отрезок $[0,1]$ наугад брошены две точки. Пусть X – расстояние между ними. Найти функцию распределения случайной величины X и вычислить MX, DX, MX^n.

2.3.48. Случайная точка (X, Y, Z) в пространстве подчинена нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} abc} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}$$

Определить совместную плотность распределения вероятности сферических координат этой точки (R, Θ, Φ).

2.3.49. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что случайная величина $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ имеет плотность распределения

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

П р и м е ч а н и е. Закон распределения случайной величины S_n называется р а с п р е д е л е н и е м Э р л а н г а.

2.3.50. Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют нормальное распределение $N(0,1)$. Доказать, что плотность распределения случайной величины $\chi^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Примечание. Закон распределения случайной величины χ^2 называется распределением хи-квадрат с n степенями свободы.

2.3.51. Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0,1)$. Доказать, что плотность распределения случайной величины

$$T = \frac{X}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}$$ равна

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1/2}}$$

Примечание. Закон распределения случайной величины T называется распределением Стьюдента с n степенями свободы.

2.3.52. Найти плотность распределения случайной величины $\Phi = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$, где X и Y – независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат с n_1 и n_2 степенями свободы соответственно.

Примечание. Закон распределения случайной величины Φ называется распределением Фишера с $(n_1; n_2)$ степенями свободы.

2.3.53. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – гауссовский вектор с $MX = a$ и корреляционной матрицей R; A – матрица размерности $n \times m$. Показать, что вектор $Y = XA$ также гауссовский.

2.3.54. Пусть $Y = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$ – сумма независимых случайных величин X_k, имеющих показательное распределение с параметрами λ_k, $k = 0, 1, \ldots$. Доказать, что $Y = \infty$ с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда $MY = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$.

3. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

3.1. Неравенство Чебышева и закон больших чисел

Пусть $X = X(\omega) \geq 0$ при любом $\omega \in \Omega$. Если MX существует, то при любом $\varepsilon > 0$ $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$.

В частности, для любой случайной величины X, имеющей конечную дисперсию, и для любого $\varepsilon > 0$ $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$.
Это неравенство носит имя Чебышева.

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n, n \geq 1\}$ по вероятности сходится к случайной величине X, если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$$

Сходимость по вероятности последовательности X_n к X записывают в виде

$$X = P\text{-}\lim X_n \quad \text{или} \quad X_n \xrightarrow{P} X.$$

Считают, что последовательность случайных величин $\{X_n, n \geq 1\}$ с $M|X_n| < \infty$, $n \geq 1$ подчиняется закону больших чисел, если

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

Т е о р е м а 1. Последовательность $\{X_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин, для которых существуют MX_n и DX_n и

$$\frac{DX_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty,$$

подчиняется закону больших чисел.

С л е д с т в и е (теорема Чебышева). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых случайных величин, $MX_n = a$, $DX_n \leq c$.
Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty$$

Т е о р е м а 2 (Хинчина). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ последовательность независимых, одинаково распределенных величин, для которых существует $MX_n = a$. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} a \quad \text{при } n \to \infty$$

Т е о р е м а 3 (Маркова). Если для последовательности случайных величин $\{X_n, n \geq 1\}$ выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0,$$

то она подчиняется закону больших чисел.

З А Д А Ч И

3.I.I. Показать, что если существует MX^2, то

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} MX^2$$

3.I.2. Показать, что если существует MX^2 и $MX = a$, то $P\{|X - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$ (неравенство Чебышева).

3.I.3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - MX| < 0{,}2$.

3.I.4. Пусть $MX = 1$, $DX = 0{,}04$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $0{,}5 \leq X \leq 1{,}5$

3.I.5. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,I. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не меньше 49,5 и не больше 50,5 см.

3.I.6. Длина изготовляемых изделий представляет случайную величину, среднее значение которой равно 90 см. Дисперсия этой величины равна 0,0225. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что:

а) отклонение длины изготовленного изделия от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4;

б) длина изделия выразится числом, заключенным между 89,7 и 90,3 см.

3.I.7. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания: а) менее чем на три средних квадратичных отклонения; б) не менее, чем на два средних квадратичных отклонения.

3.I.8. $P\{|X-MX|<\varepsilon\}\geq 0{,}9$ и $DX=0{,}009$. Пользуясь неравенством Чебышева, найти ε.

3.I.9. Устройство состоит из I0-ти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется меньше двух.

3.I.I0. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение $N(a,\sigma^2)$. Оценить с помощью неравенства Чебышева

$$P\{|X-a|>2\sigma\}.$$

Сравнить с точным значением этой вероятности.

3.I.II. Предполагается провести I0 измерений $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ неизвестной величины a. Считая $X_1, \ldots, X_{10}$ независимыми, нормально распределенными случайными величинами с $MX_k=a$, $DX_k=0{,}01$, найти наименьшее Δ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$P\left\{\left|\frac{1}{10}(X_1+X_2+\ldots+X_{10})-a\right|<\Delta\right\}\geq 0{,}99$$

У к а з а н и е . Найти точное значение Δ и сравнить с оценкой, полученной с помощью неравенства Чебышева.

3.I.I2. Пусть случайная величина X такова, что Me^{aX} существует ($a>0$ - постоянная). Доказать, что тогда

$$P\{X\geq\varepsilon\}\leq\frac{Me^{aX}}{e^{a\varepsilon}}$$

3.I.13. Пусть $f(x)$ - неотрицательная неубывающая функция. Доказать, что если существует $Mf(X)$, то

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{Mf(X)}{f(\varepsilon)}$$

3.I.14. Показать, что если существует $M|X|^k$, то справедливо неравенство

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M|X|^k}{\varepsilon^k}$$ (неравенство Маркова).

3.I.15. Допуская существование $Mf(X)$, доказать, что имеют место следующие оценки сверху и снизу для $P\{|X| \geq \varepsilon\}$:

а) $P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Mf(X)}{f(\varepsilon)}$, если $f(x)$ неотрицательная, четная, неубывающая на $[\varepsilon, +\infty)$ функция;

б) $P\{|X| \geq \varepsilon\} \geq \frac{Mf(X)-f(\varepsilon)}{C}$, если $f(x)$ неотрицательная, четная, неубывающая на интервале $[0, \infty)$ и ограниченная $(|f(x)| \leq C)$ функция.

3.I.16. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ задана законом распределения:

x_n	a	$-a$
P	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

3.I.17. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$. Случайная величина $X_n (n=1,2,\ldots)$ может принимать только три значения: $-\sqrt{n}$, 0, $\sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n}$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

3.I.18. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задана законом распределения

x_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

3.I.19. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит I см, оценить вероятность того, что при 1000 измерениях отклонение принятого значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 0,I см.

3.I.20. Сколько нужно произвести измерений, чтобы с вероятностью не менее 0,99 можно было утверждать, что отклонение частоты от вероятности события 0,35 будет не более 0,01?

3.I.21. Сколько следует произвести испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}06$ превысила 0,79? Считать вероятность появления данного события в отдельном испытании равной 0,7.

3.I.22. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k \ldots$, если

$$P\{X_k=\sqrt{k}\}=P\{X_k=-\sqrt{k}\}=\frac{1}{2\sqrt{k}},\quad P\{X_k=0\}=1-\frac{1}{\sqrt{k}}\ ?$$

3.I.23. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$, если $MX_k=0$, $DX_k=Ck^{\alpha}$, где $c>0$, $\alpha>0$ – некоторые постоянные?

3.I.24. Подчиняется ли закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_k, \ldots$, если

$$P\{X_k=(-1)^{m-1}m\}=\frac{6}{\pi^2 m^2},\quad (m=1,2,\ldots)\ ?$$

3.I.25. Пусть $\{X_k,\ k\geq 1\}$ – последовательность случайных величин такая, что X_k может зависеть только от X_{k-1} и X_{k+1}, но не зависит от всех других X_i. Показать, что закон больших чисел выполняется, если $DX_k<C<\infty$.

3.I.26. Показать, что если последовательность случайных величин $\{X_k,\ k\geq 1\}$ такова, что $DX_k<C$ и $R_{ik}=M(X_i-MX_i)(X_k-MX_k)\leq 0$, то она подчиняется закону больших чисел.

3.I.27. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и если последовательность случайных величин $X_n \xrightarrow{P} a$, то $f(X_n)\xrightarrow{P} f(a)$.

3.I.28. Доказать, что если $|X_k|\leq C$ и $X_n \xrightarrow{P} a$, то и $MX_n \to a$.

3.I.29. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\ldots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n,$$

если $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$.

3.I.30. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\ldots\int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1\ldots x_n})dx_1\ldots dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right),$$

где $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$.

3.I.3I. Последовательность $\{X_n, n\geqslant 1\}$ независимых случайных величин удовлетворяет условиям

$$\frac{DX_n}{n}\to 0,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\to x,\quad n\to\infty.$$

Доказать, что для произвольной непрерывной и ограниченной на всей числовой оси функции f имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} Mf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=f(x).$$

3.2. Характеристические и производящие функции

Пусть X - целочисленная,неотрицательная случайная величина с распределением вероятностей

$$P\{X=k\}=p_k,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Производящей функцией случайной величины X называется сумма ряда

$$p(z)=Mz^X=\sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k,\quad |z|\leq 1.$$

Распределение вероятностей случайной величины однозначно определяется ее производящей функцией:

$$p_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0), \quad p^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dz^k} p(z) \Big|_{z=0}, \quad k \geq 0$$

Величину $M X(X-1)\dots(X-k+1)$ называют k-м факториальным моментом. Если конечен k-й факториальный момент, то существует левосторонняя производная $p^{(k)}(1)$ и

$$M X(X-1)\dots(X-k+1) = p^{(k)}(1);$$

в частности

$$MX = p'(1), \quad DX = p''(1) + p'(1) - [p'(1)]^2.$$

Производящая функция $p_X(z)$ суммы $X = X_1 + \dots + X_n$ независимых случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых: $p_X(z) = p_{X_1}(z) p_{X_2}(z) \dots p_{X_n}(z)$.

Характеристической функцией случайной величины X с функцией распределения $F(x) = P\{X < x\}$ называется комплекснозначная функция

$$\varphi(t) = Me^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

определенная для вещественных t. В частности, если X непрерывная случайная величина с плотностью $f(x) = F'(x)$, то характеристическая функция есть преобразование Фурье плотности распределения:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Для дискретной случайной величины, принимающей значения x_k с вероятностями p_k, характеристическая функция представляется рядом

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Характеристическая функция обладает следующими основными свойствами:

I. $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\leq 1$, $-\infty<t<+\infty$.

2. $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на числовой оси.

3. $\varphi(t)$ положительно определена, т.е. для любых комплексных чисел $z_1,\dots,z_n$ и любых действительных чисел $t_1,\dots,t_n (n\geq 1)$ выполняется неравенство

$$\sum_{l,k=1}^{n} z_l \bar{z}_k \varphi(t_l-t_k)\geq 0.$$

4. Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ суммы $X=X_1+\dots+X_n$ независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых: $\varphi_X(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\dots\varphi_{X_n}(t)$

5. Если существует момент порядка n у случайной величины X, то характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет n непрерывных производных и

$$\varphi^{(n)}(0)=i^n MX^n.$$

Функция распределения $F(x)$ однозначно определяется своей характеристической функцией $\varphi(t)$. Имеет место формула обращения:

$$F(x)-F(y)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)dt$$

для любых точек x и y, являющихся точками непрерывности функции $F(x)$.

Если $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема: $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, то существует плотность распределения $f(x)=F'(x)$ и

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Характеристической функцией случайного вектора $X=(X_1,\dots,X_n)$ называют функцию

$$\varphi(t)=Me^{i(t,X)}=\int\underset{R^n}{\dots}\int e^{i(t,x)}dF(x_1,\dots,x_n),$$

где $(t,X)=\sum_{k=1}^{n}t_kX_k$, $F(x_1,\dots,x_n)$ – функция распределения вектора X.

З А Д А Ч И

3.2.1. Найти производящую функцию числа "успехов" X в схеме независимых испытаний Бернулли и с ее помощью найти MX и DX.

3.2.2. Найти производящую функцию пуассоновской случайной величины X и с ее помощью найти MX и DX.

3.2.3. С помощью производящих функций доказать, что:

а) сумма независимых пуассоновских величин имеет пуассоновское распределение;

б) сумма независимых биномальных величин, связанных со схемами Бернулли с одинаковыми вероятностями "успеха", является биномальной случайной величиной.

3.2.4. Пусть N и N_m - число испытаний в схеме Бернулли до появления первого успеха и m-го успеха соответственно. Найти производящие функции величин N и N_m и MN, DN, MN_m, DN_m

3.2.5. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции

а) $\frac{1}{4}(1+z)^2$; б) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}z)^{-1}$;

в) $e^{2(z-1)}$; г) $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}z)^n$

3.2.6. Пусть X - неотрицательная целочисленная величина с производящей функцией $p(z)$. Найти производящие функции величин $X+1$, $2X$ и $3X+2$.

3.2.7. Пусть U_n - вероятность того, что число успехов в последовательности n испытаний Бернулли четно. Доказать рекуррентную формулу $U_n = qU_{n-1} + p(1-U_{n-1})$. Вывести отсюда производящую функцию, а из нее точную формулу для U_n $(U_0=1)$.

3.2.8. Найти характеристическую функцию числа "успехов" X в схеме Бернулли и с ее помощью найти MX и DX.

3.2.9. Найти характеристическую функцию пуассоновской случайной величины X и с ее помощью найти MX и DX.

3.2.10. С помощью характеристических функций доказать, что:

а) сумма независимых пуассоновских величин имеет пуассоновское распределение;

б) сумма независимых биномальных величин, связанных со схемами Бернулли с одинаковыми вероятностями "успеха", является биномальной случайной величиной.

3.2.11. Найти характеристические функции следующих законов распределения:

а) равномерного на отрезке $[a, b]$;

б) показательного с параметром $a > 0$;

в) нормального $N(a, \sigma^2)$;

г) закона Коши с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)},$$

д) закона распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|};$$

е) χ^2 с n степенями свободы.

3.2.12. Найти законы распределения, соответствующие характеристическим функциям: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos kt$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt$, где $a_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$.

3.2.13. Случайная величина X имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Найти плотность распределения этой случайной величины.

3.2.14. Характеристическая функция имеет вид $\varphi(t) = e^{-a|t|}$, $(a > 0)$. Определить соответствующую ей плотность.

3.2.15. Даны характеристические функции:

$$\varphi_1(t) = \frac{1+it}{1+t^2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{1-it}{1+t^2}.$$

Определить соответствующие им плотности распределения.

3.2.16. Характеристическая функция случайной величины имеет вид $\varphi(t) = \dfrac{1}{2e^{-it} - 1}$. Найти закон распределения этой случайной величины.

3.2.17. Величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют нормальные распределения $N(1,1)$, $N(0,4)$ и $N(-1,1)$ соответственно. Найти: а) $P\{X_1+X_2+X_3<0\}$; б) $P\{|2X_1-X_2+X_3|<3\}$.

3.2.18. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальные распределения $N(a_1,\sigma_1^2)$ и $N(a_2,\sigma_2^2)$.

Найти закон распределения суммы $X+Y$.

3.2.19. Величины X и Y независимы и одинаково распределены, их характеристическая функция равна $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию величины X_1-X_2.

3.2.20. Пусть $X_1,\dots,X_n$ - независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения I и -I с вероятностями I/2. Вычислить характеристическую функцию случайной величины

$$S_n = X_1+\dots+X_n$$

3.2.21. Доказать, что при каждом натуральном n функция $\varphi(t)=\cos^n t$ является характеристической.

3.2.22. Показать, что если $\varphi(t)$ - характеристическая функция, то и $|\varphi(t)|^2$ также является характеристической функцией.

3.2.23. Доказать, что если $\varphi(t)$ - характеристическая функция случайной величины X, то случайная величина $Y=a+bX$ имеет характеристическую функцию $e^{iat}\varphi(bt)$.

3.2.24. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & |x|>a, \\ \frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & |x|\leq a. \end{cases}$$

Показать, что характеристическая функция X равна:

$$\varphi(t)=2\,\frac{1-\cos at}{a^2t^2}.$$

3.2.25. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1-\cos ax}{ax^2}.$$

Доказать, что характеристическая функция X равна :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & |t| > a, \\ 1 - \dfrac{|t|}{a}, & |t| \leq a \end{cases}$$

3.2.26. Доказать, что функция $\varphi(t)$ с периодом $2a$ и $\varphi(t) = 1 - \dfrac{|t|}{a}$ при $|t| \leq a$ является характеристической.

3.2.27. Дать теоретико-вероятностную интерпретацию равенства

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2}$$

3.2.28. Дать теоретико-вероятностную интерпретацию равенства

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^k}.$$

3.2.29. Являются ли характеристическими функции:

а) $\cos t$; б) $\sin t$; в) $\frac{1}{2}(1+\cos t)$, г) e^{-t^4};

д) $\dfrac{\sin t}{t}$, е) $\dfrac{1}{1+t^2}$, ж) $\cos t^2$?

3.2.30. Доказать, что функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

не является характеристической.

3.2.31. Пусть X_1, X_2, X_3 – независимые случайные величины, имеющие нормальное $N(0,1)$ распределение. Найти совместную характеристическую функцию величин

$$Y_1 = X_1 + X_2 \quad и \quad Y_2 = X_1 + X_3.$$

3.2.32. Случайные величины X_1, X_2, X_3, X_4 имеют совместное нормальное распределение, причем $MX_i = 0,\ i=\overline{1,4}$ и $MX_iX_k = r_{ik}$, $i,k = \overline{1,4}$. Найти:

а) $MX_1X_2X_3X_4$; б) $MX_1X_2X_3$; в) $M(X_1X_2X_3)^2$.

3.3. Предельные теоремы

Говорят, что последовательность $\{F_n(x)\}$ функций распределения слабо сходится к функции распределения $F(x)$ при $n \to \infty$, если $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$. Слабая сходимость обозначается так: $F_n \Rightarrow F$. Доказательство слабой сходимости распределений часто основывается на теоремах "непрерывности".

Теорема непрерывности для характеристических функций

Последовательность функций распределения $F_n(x)$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$ тогда и только тогда, когда последовательность их характеристических функций $\varphi_n(t)$ сходится к непрерывной предельной функции $\varphi(t)$. При этом $\varphi(t)$ есть характеристическая функция предельной функции $F(x)$ и сходимость $\varphi_n(t)$ к $\varphi(t)$, равномерная в каждом конечном интервале.

Теорема непрерывности для производящих функций

Пусть $p_k^{(n)}$ – последовательность распределений вероятностей целочисленных случайных величин X_n с производящими функциями $P_n(z)$. Для сходимости распределения при каждом конечном $k \geqslant 0$:

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом s из интервала $0 \le s < 1$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(s) = P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k .$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины и $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geqslant 1$. При достаточно общих условиях предельное распределение для соответствующим образом центрированных и нормированных сумм $\frac{S_n - A_n}{B_n}$ является нормальным, а точнее, при $n \to \infty$ для любого x

$$P\left\{ \frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x)$$

Теоремы, которые утверждают нормальность предельного распределения сумм независимых величин S_n, называется центральными предельными теоремами.

Теорема Ляпунова

Если для последовательности взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M|X_k - a_k|^{2+\delta} = 0,$$

где $a_k = MX_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D} X_k$, то для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы

$$y_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)$$

имеем $F_n \Rightarrow \Phi$

Теорема Линдеберга-Феллера

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - последовательность взаимно независимых случайных величин. Для того чтобы для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы y_n выполнялось соотношение $F_n \Rightarrow \Phi$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x - a_k| < \varepsilon B_n} (x - a_k)^2 dG_k(x) = 0,$$

где $G_k(x)$ - функции распределения случайных величин X_k, $k \geq 1$.

З А Д А Ч И

3.3.1. Используя производящие функции, показать, что при $np \to \lambda (n \to \infty)$ биномальное распределение сходится к пуассоновскому с параметром λ.

3.3.2. Используя характеристические функции, показать, что при $\lambda \to \infty$

$$\sum_{\lambda + a\sqrt{\lambda} \le k < \lambda + b\sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

3.3.3. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что соотношение $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} c$ при некоторой постоянной c выполняется тогда и только тогда, когда характеристическая функция X_k дифференцируема в точке $t=0$.

3.3.4. Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$, если ее плотность

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Пусть X_n - случайная величина, имеющая гамма-распределение, и $MX_n = \frac{n}{\alpha}$, $DX_n = \frac{n}{\alpha^2}$

Доказать, что распределение величины $\sqrt{n}\left(\frac{\alpha X_n}{n} - 1\right)$ сходится при фиксированном α и $n \to \infty$ к нормальному $N(0,1)$

3.3.5. Установить, будут ли выполнены закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин $\{X_k\}$ с распределениями, задаваемыми следующим образом $(k \geqslant 1)$:

а) $P\{X_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$;

б) $P\{X_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}$; $P\{X_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$;

в) $P\{X_k = \pm k\} = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}$; $P\{X_k = 0\} = 1 - k^{-\frac{1}{2}}$.

3.3.6. Игральная кость бросается 1000 раз. Найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0,99, будет находиться число выпавших очков.

3.3.7. Складывается 10^4 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагается, что ошибки от округления независимы и равномерно распределены в интервале $\left(-\frac{1}{2}10^{-m}, \frac{1}{2}10^{-m}\right)$. Найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет суммарная ошибка.

3.3.8. Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,5; в девятку - 0,3; в восьмерку - 0,1; в семерку - 0,05; в шестерку - 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более 980 очков; более 950 очков?

3.3.9. Пусть V - область m - мерного пространства, имеющая единичный объем, а $|f(x_1,\dots,x_m)|<C$ - функция, определенная всюду в области V. Для того, чтобы методом Монте-Карло подсчитать

$$I = \int\limits_V \dots \int f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m,$$

поступают следующим образом: бросают в область V наудачу независимо одна от другой n точек $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ и за приближенное значение интеграла принимают сумму

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(k)},\dots,x_m^{(k)}).$$

Чему равно MI_n ? Оценить DI_n. Найти при $n\to\infty$ предельное распределение для $\sqrt{n}(I_n - I)$.

3.3.10. Вычисление интеграла $I=\int_0^1 x^2dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины I не превзойдет 0,01.

3.3.11. Сколько опытов надо поставить при вычислении интеграла

$$I=\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью $P \geq 0{,}99$ можно было считать абсолютную погрешность вычисленного значения интеграла не превосходящей 0,1% от I ?

3.3.12. На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей с вероятностью 1/3 покупает газету. Пусть X означает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газеты. Найти распределение X .

3.3.13. Независимые величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют одинаковые распределения с $MX_k = 0$ и $DX_k = 1$. Показать, что величины

$$Y = \sqrt{n}\,\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \quad и \quad Z = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}$$

асимптотически нормальны $N(0,1)$

3.3.14. Пусть $X_k\ (k = 1, 2, \ldots, n+1)$ – независимые, нормально распределенные $N(0,1)$ случайные величины. Положим

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \quad и \quad \tau_n = \frac{X_{n+1}}{\frac{1}{n}\chi_n^2} .$$

Найти предельные при $n \to \infty$ распределение χ_n^2 и τ_n .

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

1.1.1. $\Omega = \{\omega_{ij},\ i = \overline{1,6}\ ,\ j = \overline{1,6}\}$, где i, j – число очков на первой и второй костях соответственно; $AB = \{\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{31}, \omega_{51}\}$; $A+B = \{\omega_{ij} : i = 1\} \cup \{\omega_{ij} : j = 1\} \cup \{\omega_{ij} : i+j$ – четное;

$A\bar{B} = \{\omega_{ij} : i+j$ – четное $, i \neq 1, j \neq 1\}$

1.1.2. Ω = {УУУ, УУН, УНУ, НУУ, УНН, НУН, ННУ, ННН} ;
A = {УУУ, УУН, УНУ} ; B = {УУН, УНУ, НУУ} ;
C = {УУН, УНУ, НУУ, УНН, НУН, ННУ, ННН}.

I.I.3. а) Выбран юноша, который не живет в общежитии и не курит;

б) когда все юноши живут в общежитии и не курят;

в) когда курящие живут только в общежитии;

г) когда ни одна девушка не курит, а все юноши курят.

Нет, так как могут курить и девушки.

I.I.4. $B = A_6$; $C = A_{10}$; $D = A_5$; $E = \{(x,y): r_1 < \sqrt{x^2+y^2} < r_2\}$

I.I.6. а) A; б) AB; в) $B + AC$.

I.I.7. а), б), г), д) – не верны; в) – верно.

I.I.8. В случаях а), г), д), ж) – да, в остальных – нет.

I.I.9. $C = (A_1 + A_2)(B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3)$.

I.I.10. $X = \bar{B}$.

I.I.11. а) $A = \varnothing$, $B = \Omega$; б) $A = \Omega$, $B = \varnothing$; в) $A = B$.

I.I.12. Выбранное число оканчивается цифрой 5.

I.I.13. а) $A\bar{B}\bar{C}$; б) $AB\bar{C}$; в) ABC; г) $A+B+C$;

д) $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$; е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; ж) $(A+B+C) - ABC$;

I.I.14. а) $AB = A$; б) $A + B = B$; в) $ABC = AC$;

г) $A+B+C = B+C$.

I.I.17. См. задачу I.I.14.

I.I.19. I. Покажем, что $(\overline{A+B})C = \bar{A}C + \bar{B}C \Rightarrow AC = BC$.

Переходя к дополнениям в левой части соотношения, имеем:

$$(A+B)+\bar{C} = (A+\bar{C})(B+\bar{C}) \Rightarrow (A+B)+\bar{C} = AB + A\bar{C} + B\bar{C} + \bar{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+B = AB + (A+B)\bar{C} \Rightarrow (A+B)C = ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC + BC = AC \cdot BC \Rightarrow AC = BC.$$

2. Покажем, что $AC = BC \Rightarrow (\overline{A+B})C = \bar{A}C + \bar{B}C$.

$$(\overline{A+B})C = (\Omega - (A+B))C = C - (AC + BC) = C - AC;$$

$$\bar{A}C + \bar{B}C = (\Omega - A)C + (\Omega - B)C = (C - AC) + (C - BC) = C - AC.$$

Следовательно, $(\overline{A+B})C = \bar{A}C + \bar{B}C$.

I.I.20. а) $\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$;   б) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$;   в) $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap(\bigcap_{j=1,j\neq i}^{n}\bar{A}_j))$;

г) $\bigcup_{i_1\neq\ldots\neq i_{n-2}}\bar{A}_{i_1}\ldots\bar{A}_{i_{n-2}}$; д) $\bigcup_{i,j=1,i\neq j}^{n}\bar{A}_i\bar{A}_j$;   е) $\bigcup_{i,j=1,i\neq j}^{n}[(A_iA_j)(\bigcap_{k=1,k\neq i,j}^{n}\bar{A}_k)]$

I.I.21. а) ABC – оба супруга старше 30 лет, причем муж старше жены; $A-AB=A$, но не AB, т.е. мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены; $A\bar{B}C$ – оба супруга старше 30 лет, причем муж не старше своей жены;

б) $A\bar{C}$ – совмещение событий: мужу больше 30 лет и жене не больше 30 лет, следовательно, муж старше жены – B, т.е. $A\bar{C}\subset B$.

I.I.22. C – ничейный исход. I.I.23. $A+(B-AB)+(C-(A+B)C)$

I.2.I. а) $9^k/10^k$; б) $9^k/10^k$; в) $8^k/10^k$; г) $(2\cdot 9^k-8^k)/10^k$

I.2.2. Одна и та же вероятность, равная I/5.

I.2.3. 5/324. I.2.4. 0.096. I.2.5. $2(k-1)(n-k)/n(n-1)$

I.2.6. 2/5. I.2.7. I/9. I.2.9. $2/(N-1)$.

I.2.I0. $2(n-m-1)/n(n-1)$ I.2.II. I/I26. I.2.I2. C_N^k/N^k

I.2.I3. $1/n$. I.2.I4. $1/n$. I.2.I5. $C_n^2\,n!/n^n$

I.2.I6. $12!/12^{12}$. I.2.I7. а) $2^{2r}C_n^{2r}/C_{2n}^{2r}$; б) $n\,2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}$.

I.2.I8. $1-(5/6)^4$; $1-(35/36)^{24}$. I.2.I9. $C_4^1C_{32}^2/C_{36}^3$.

I.2.20. 0,055. I.2.2I. $C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$. I.2.22. $2/C_{36}^{18}$.

I.2.23. а) $1/l^{k-1}$; б) $C_l^k k!/l^k$. I.2.24. $M!/N^M$.

I.2.25. $\approx$ 0,302. I.2.26. 0,25. I.2.27. $1-C_{n-m}^k/C_n^k$.

I.2.28. $C_{2N}^N C_{2N}^N/C_{4N}^{2N}\approx e^{3N}\cdot 4^{4N+\frac{1}{2}}$. I.2.29. $C_{2n-r}^n(1/2)^{2n-r}$

I.2.30. а) $1/1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)=2^n n!/(2n)!$; б) $n!/1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)$.

I.2.3I. Указание. Лишь последняя цифра влияет на последнюю цифру квадрата и четвертой степени его, а на последнюю цифру произведения чисел – их последние цифры. Поэтому можно рассматривать только однозначные числа. а) 0,2; б) 0,4; в) 0,04.

I.2.32. $10!/10^{10}$=0,00036288. I.2.33. 29II/I 27I 256=0,00228986...

I.3.I. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2$. I.3.2. $(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{3}$. I.3.3. $\approx$ 0,23.

I.3.4. $(\tau/R)^2$. I.3.5. $\kappa(2-\kappa)$. I.3.6. $\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}$.

I.3.7. $2\arcsin\frac{2}{2R}/\pi$. I.3.8. $2\ell/a\pi$. I.3.9. I/4.

I.3.10. $1-(T-\ell)^2/T^2$. I.3.11. $P(A)=1-(T-\tau)^2/T^2$.

I.4.7. а) $1-P(AB)$; б) $1-P(A)-P(B)+P(AB)$; в) $1-P(B)+P(AB)$;
г) $P(A)-P(AB)$; д) $1-P(A)-P(B)+P(AB)$; е) $1-P(AB)$;
ж) $P(B)-P(AB)$; з) $P(A)+P(B)-P(AB)$.

I.4.11. $p_0=1-P(A)-P(B)+P(AB)$, $p_1=P(A)+P(B)-2P(AB)$;
$p_2=P(AB)$.

I.4.12. $p_0=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)$;

$$p_1=P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC);$$

$$p_2=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC);$$

$$p_3=P(ABC)$$

I.4.17. $P\left(\bigcup\limits_{\kappa=1}^{n}A_\kappa\right)=C_n^1P(A_1)-C_n^2P(A_1A_2)+C_n^3P(A_1A_2A_3)-\ldots+$
$+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap\limits_{\kappa=1}^{n}A_\kappa\right)$.

I.4.18. $\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^M}{M!}\right]$; $1/e$.

У к а з а н и е. Беспорядком называется такая перестановка элементов, при которой ни один элемент не остается в первоначальном положении. Число таких перестановок (число беспорядков) равно

$$n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

I.4.19. I/2. I.4.20. 31/96. I.4.21. а) 7/8; б) 2/3; в) I/3.

I.4.22. 0,94. I.4.23. а) 0,324; б) 0,928. I.2.24. 0,94; 0,9964.
I.4.25. 0,3. I.4.26. 2/3; I/3. I.4.27. 0,455.

I.4.28. $p=1-C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^\kappa+C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^\kappa-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^\kappa$.

I.4.29. 0,328. I.4.30. $1-[1-(1-p)^m]^k$

I.4.3I. $p(n/m)=\dfrac{p(n+m)-p(m)}{1-p(m)}$. I.4.32. 0,9008. I.4.33. 0.8.

I.5.I. $P(AB)$ =3/8; $P(B)$ =7/8; $P(A/B)$ = 3/7.

I.5.2. $1-10\cdot 5^9/(6^{10}-5^{10})$. I.5.3. 0,5. I.5.4. 2/3.

I.5.6. 2I/46. I.5.7. I/5. I.5.8. I/4. I.5.9. I/4.

I.5.I0. 3/4. I.5.II. Пусть гипотеза H_k (k =0,I,2) - для первой игры взять k новых мячей. Событие A - для второй игры взять два новых мяча. Тогда

$$P(H_k)=\frac{C_{12}^k C_8^{2-k}}{C_{20}^2};\quad P(A/H_k)=\frac{C_{12-k}^2}{C_{20}^2};\quad p=0,2797229.$$

I.5.I2. 20/29. I.5.I3. 0,72. I.5.I4. 0,572; 0,I28; 0,21333...; 0,42666...; 0,428; 0,872. I.5.I5. p_1p_2. I.5.I6. 56/I85.

I.5.I7. $C_3^2C_{48}^{10}/C_{51}^{12}$. I.5.I9. $P(AB)$ =0,3; $P(\bar{B}/\bar{A})$ = 0,5.

I.5.20. 0,75. I.5.22. События зависимы. I.5.23. События A и B независимы. I.5.24. 0. I.5.28. I/4. I.5.29. См. задачу I.4.I5

I.5.30. $\sum_{k=0}^{s}p_1(k)p_2(s-k)$. I.5.3I. 9/I6. I.5.32. 9/35.

I.5.33. I4/I7. I.5.34. 2I/50. I.5.35. 0.87.

I.5.36. $p=\dfrac{p_1(1-p_1)^2}{\sum_{i=1}^{3}p_i(1-p_i)^2}$. I.5.37. $\frac{2}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2$.

I.5.38. $p=\dfrac{k(k-1)}{2n(2n-1)}+\dfrac{2k(2n-k)}{2n(2n-1)}\cdot\dfrac{k-1}{2n-2}$. I.5.39. 7/I8.

I.5.40. а) 0,0345; б) I25/345; I40/345; 80/345.

I.5.4I. 3 белых и 2 черных; изменение. I.5.42. M/N.

I.5.43. а) 3/4; б) 0,5. I.5.44. 0,05. I.5.45. I0/II.

I.5.46. а) I3/24; б) I/2. I.5.47. 0,9968.

I.6.I. а) $P_8(m \geq 1) = 0{,}00038$; б) $P_8(m \geq 1) = 0{,}8999$.

I.6.2. I0. I.6.3. а) 2; б) $P_{10}(2 \leq m \leq 4) = 0{,}59I$.

I.6.4. а) 0,656; б) 0,948. I.6.5. а) $\approx 0{,}25$; б) $\approx 0{,}867$ (применить интегральную теорему Муавра-Лапласа). I.6.6. 8/32; 7/32.

I.6.7. $P_K = C_{5+K}^{K}\, 2^{-5-K}$. I.6.8. $C_{10}^{4}(5/72)^4(1-5/72)^6$

I.6.9. $n \geq 22$. I.6.I0. $1-(1-p)^3$. I.6.II. 0,28I6.

I.6.I2. 0,73. I.6.I3. 0,2. I.6.I4. 0,0588.

I.6.I5. $(5^2 \cdot 7 \cdot 9/4)(1/\pi)^4(1-2/\pi)^6$ I.6.I6. а) 558; б) 54I.

I.6.I7. $C_n^m C_{n-1}^{\ell-1} p^{m+\ell} q^{2n-m-\ell}$. I.6.I8. а) $p = 0{,}085$; б) 0,385.

I.6.I9. 50/243. I.6.22. 0,93803; 0,99983; 0,I6062.

I.6.23. 0,95957. I.6.24. $1-e^{-nv/V}$; $1-\left(1-\frac{v}{V}\right)^n$.

I.6.25. $I - I{,}3\, e^{-0{,}3}$. I.6.26. 0,99. I.6.27. 2; 0,2I92.

I.6.28. а) ≈ 0 (с точностью более чем до I0-го знака после запятой); б) $\approx 0{,}99534$; 0,5; 0,00466.

I.6.29. а) $\approx 0{,}8859$; б) 0,8859; 0,499I; $\approx 0{,}I468$; 0,8353, $764 < m < 836$ (применить интегральную теорему Муавра-Лапласа). $n = I8500$.

2.I.3.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1} C_n^m 5^{n-m}, & \text{если } 0 < x \leq n \text{ и } x \text{ - целое}, \\ \frac{1}{6^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]} C_n^m 5^{n-m}, & \text{если } 0 < x \leq n \text{ и } x \text{ - нецелое}, \\ 1, & \text{если } x > n. \end{cases}$$

2.I.4.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{x-1} C_n^m, & \text{если } 0 < x \leq n \text{ и } x \text{ - целое}, \\ \frac{1}{2^n}\sum\limits_{m=0}^{[x]} C_n^m, & \text{если } 0 < x \leq n \text{ и } x \text{ - нецелое}, \\ 1, & \text{если } x > n. \end{cases}$$

2.I.5. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0,\\ \sum_{m=0}^{x-1}\frac{1}{2^{m+1}}=1-\frac{1}{2^x}, & \text{если } x \text{ - целое и } x>0,\\ 1-\frac{1}{2^{[x]+1}}, & \text{если } x \text{ - нецелое и } x>0.\end{cases}$$

2.I.6. $MX = 0,3$; $\mathcal{D}X = 0,6I$. 2.I.7. 2.

2.I.8. $$1\cdot\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}+2\,\frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{m}{n+m-2}+\ldots+ n\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{(n+m)(n+m-1)\ldots(m+1)}\cdot\frac{m}{n}.$$

2.I.9.

x	0	I	2
p	I/45	I6/45	28/45

; MX = I,6; $\mathcal{D}X$ =0,284.

2.I.I0. $MX=n\frac{M}{N}$; $\mathcal{D}X=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

2.I.II. Пусть X – число очков при бросании одной кости. Тогда MX = 3,5; $\mathcal{D}X$ = 35/I2.

Для двух костей: $Y=X_1+X_2$; $MY=7$; $\mathcal{D}Y=35/6$.

2.I.I2. $MX=NC_n^m(1/6)^m(5/6)^{n-m}$

2.I.I3.

x	0	I	2	3	4
p	I/I6	I/4	3/8	I/4	I/I6

2.I.I4.

x	–3	3	8	9	I4	I5	I9	20	25	30
p	0,008	0,036	0,060	0,054	0,I80	0,027	0,I50	0,I35	0,225	0,I25

2.I.I5.

x	I	2	3
p	2/3	2/9	I/9

; MX =II/9; $\mathcal{D}X$=68/8I.

2.I.I6. $p(X<\frac{3}{2})=1$, $p(X<\frac{1}{2})=p(X>\frac{1}{3})=p(X<1)=p(X\geqslant 1)=p(X=1)=\frac{1}{2}$.

2.I.I7. $x_3 = 21$; $p_3 = 0{,}2$.

2.I.I8. $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}1$; $p_3 = 0{,}5$.

2.I.20.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ \dfrac{(x+1)^2}{2} & \text{при } -1 < x \le 0, \\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2} & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases};$$

$MX = 0$; $DX = 1/6$.

2.I.2I. а) $A = 1/\pi$; $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; б) $P(-1<X<1) = \frac{1}{2}$;

в) математического ожидания не существует.

2.I.22. $a = 2/\pi$; $[F(1)]^2 = \frac{4}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2 e$

2.I.23. а) $A = \frac{1}{2}$,
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

б) $MX = 0$; $DX = \frac{\pi^2}{4} - 2$

2.I.24. $a = \frac{1}{2}$; $MX = \frac{4}{3}$; $DX = \frac{2}{9}$; $P(|X-MX|<0{,}5) = \frac{2}{3}$

2.I.25. в) $MX = \frac{4}{3}$; $P(0{,}5 < X < 1{,}5) = \frac{1}{2}$

2.I.26.
$$a = \frac{1}{8}; \quad f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ -\frac{1}{4}x & \text{при } -2 < x \le 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases} \quad P(-1<X<1) = \frac{1}{4}$$

2.I.27. $A = 1$; $MX = 1$.

2.I.28.

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \le 0, \\ (r/R)^2 & \text{при } 0 < r \le R, \\ 1 & \text{при } r > R; \end{cases}$$

$$MX = \frac{2}{3}R; \quad DX = R^2/18$$

2.I.29. $MX = 0,5$; $DX = 1/12$. 2.I.30. а) 0,4; б) 0,5.

2.I.31. 0,6. 2.I.32. MX = 60 с; DX = 1200 $с^2$.

2.I.33. p = 2/3. 2.I.36. $\mu_{2k+1} = 0$; $\mu_{2k} = (2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1\cdot \sigma^{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$. В частности, $\mu_4 = 3\sigma^4$.

2.I.37. а) $S_X = E_X = 0$; б) $S_X = 0$; $E_X = -12/5$.

2.I.38. $P(-0,5 \le X \le -0,1) \approx$ 0,1516; $P(1 \le X \le 2) \approx$ 0,1359.

2.I.39. 50 м. 2.I.40. 0,3413. 2.I.41. σ_X = 0,674490.

2.I.42. а) 0,853; б) 0,973. 2.I.43. (2,47; 2,53).

2.I.44. $\sigma = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{2(\ln b - \ln a)}}$. 2.I.46. а) 0,99730; б) 0,98168...;
в) 1; г) 8/9 = 0,88888...; д) 0,91393... .

2.I.48. 0,09516. 2.I.49. $P(A)$ = 0,050; $P(B)$ = 0,777;
$P(C)$ = 0,998. 2.I.50. 0,1681. 2.I.51. 50000; p = 0,3679.

2.I.52. $MX = \frac{1}{\alpha}$; $DX = \frac{1}{\alpha^2}$.

2.I.53.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ (1-e^{-x})^n & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

2.I.54. $P(X=m) = \dfrac{(ap)^m}{m!} e^{-ap}$ для всех $m \ge 0$, если X – число успешных опытов.

2.1.55. $F(x)=0{,}7F_1(x)+0{,}3F_2(x)$.

2.2.1.
$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } \min(x,y)\le 0,\\ q_1q_2, & \text{если } (x,y)\in(0,1]\times(0,1],\\ q_2, & \text{если } (x,y)\in(0,1]\times(1,+\infty),\\ q_1, & \text{если } (x,y)\in(1,+\infty)\times(0,1],\\ 1, & \text{если } (x,y)\in(1,+\infty)\times(1,+\infty)\end{cases}$$

2.2.2. $\lambda=0{,}05$. 2.2.3. $MX=0{,}7$; $MY=-0{,}1$; $DX=0{,}21$; $DY=0{,}49$; $r_{XY}=0{,}218$

2.2.4. $MX=MY=0$; $DX=DY=\frac{1}{2}$; $R_{XY}=\operatorname{cov}(X,Y)=0$; X и Y зависимы.

2.2.5. $M(Y/X=10)=25/12$; $D(Y/X=10)=191/144$.

2.2.6. $\sum\limits_k p_k^2$. 2.2.7. а) $\frac{p}{1+q}$; б) $\frac{q}{1+q}$; в) $\frac{q}{1+q}$.

г) $(1+q)\frac{p}{q}q^{k-1}(1-q^{k-1})$, $(k=2,3,\ldots)$; д) $(1+q)pq^{2(k-1)}$, $(k=1,2,3,\ldots)$;

е) $p(1+q)q^{2(k-1)}$, $(k=1,2,\ldots)$; ж) $\frac{1}{\ell-1}$, $(1\le k\le \ell-1)$; з) $\ell/2$.

2.2.8. $1+F(x,y)-\lim\limits_{z\to+\infty}(F(x,z)+F(z,y))$.

2.2.9. $F(x,y)=F(\min(x,y))$

2.2.10.
$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le -y,\ y<0,\\ F(x)-F(-y), & \text{если } -y<x<y,\ y\ge 0,\\ F(y)-F(-y), & \text{если } x\ge y,\ y\ge 0.\end{cases}$$

2.2.11. $F(x,y)=(F(y))^n-(F(y)-F(x))^n$ при $x<y$,

$F(x,y)=(F(y))^n$ при $x\ge y$.

2.2.12. $p=a^{-3}-a^{-6}-a^{-9}+a^{-12}$ 2.2.13. $f(x,y)=8e^{-4x-2y}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

2.2.14. $f(x,y)=\ln^2 2\cdot 2^{-x-y},\ x\geq 0,\ y\geq 0;\ P=5/(3\cdot 2^{12})$

2.2.15.
$$f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & \text{если } (x,y)\in(0,\frac{\pi}{2}]\times(0,\frac{\pi}{2}],\\ 0 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$MX=MY=\frac{\pi}{2}-1;\quad R=\begin{pmatrix}\pi-2 & 0\\ 0 & \pi-2\end{pmatrix}.$$

2.2.16.
$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{если } \min(x,y)\leq 0,\\ 0{,}5[\sin x+\sin y-\sin(x+y)], & \text{если } (x,y)\in(0,\frac{\pi}{2}]\times(0,\frac{\pi}{2}],\\ 0{,}5[\sin x-\cos x+1], & \text{если } (x,y)\in(0,\frac{\pi}{2}]\times(\frac{\pi}{2},+\infty),\\ 0{,}5[\sin y-\cos y+1], & \text{если } (x,y)\in(\frac{\pi}{2},+\infty)\times(0,\frac{\pi}{2}],\\ 1, & \text{если } (x,y)\in(\frac{\pi}{2},+\infty)\times(\frac{\pi}{2},+\infty);\end{cases}$$

$$MX=MY=\frac{\pi}{4};\quad DX=DY=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2;$$

$$R_{XY}=\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16};\quad R=\begin{pmatrix}0{,}188 & -0{,}046\\ -0{,}046 & 0{,}188\end{pmatrix}$$

2.2.17. а) $A=20$; б) $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$

2.2.18. а) $f_X(x)=12x^2(1-x),\ x\in(0,1)$; б) $f_Y(y)=2y;\ y\in(0,1)$

2.2.20. $f_X(x)=e^{-x},\ x>0;\quad f_Y(y)=(1+y)^{-2},\ y>0$

2.2.21. $f_X(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-x},\ x>0;\ f_Y(y)=\frac{1}{\Gamma(q)}y^{q-1}e^{-y},\ y>0$

2.2.22.
$$f_{X_1X_3}(x_1,x_3)=\frac{1}{2\pi\sqrt{96}}\exp\left\{-\frac{1}{96}(5x_1^2-2x_1x_3+5x_3^2)\right\},$$

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{20\pi}\exp\left\{-\frac{1}{20}(x_1^2+x_2^2)\right\}$$

2.2.23. $MX=MY=0;\quad R=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}.$

2.2.24. $$f(x,y)=\begin{cases}1/4ab, & \text{если } |x|\le a,\ |y|\le b,\\ 0 & \text{иначе;}\end{cases}$$

$f_X(x)=1/2a,\ |x|\le a;\ f_Y(y)=1/2b,\ |y|\le b$

2.2.25. $K=4;\ f_X(x)=2xe^{-x^2},\ x\ge 0;\ f_Y(y)=2ye^{-y^2},\ y\ge 0;$

$f_X(x/y)=f_X(x);\ f_Y(y/x)=f_Y(y);\quad MX=MY=\sqrt{\pi}/2,$

$DX=DY=1-\pi/4;\ R_{XY}=0.$

2.2.26. $f(x,y)=1/a^2,\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le a;$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } \min(x,y)\le 0,\\ xy/a^2, & \text{если } 0<x\le a,\ 0<y\le a,\\ x/a, & \text{если } 0<x\le a,\ y>a,\\ y/a, & \text{если } x>a,\ 0<y\le a,\\ 1, & \text{если } x>a,\ y>a,\end{cases}$$

$f_X(x)=1/a,\ 0\le x\le a;\quad f_Y(y)=1/a,\ 0\le y\le a.$

Величины X и Y независимы.

2.2.27. 0.

2.2.28. $$f(x,y)=\begin{cases}1/32, & \text{если } x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 8,\\ 0 & \text{иначе;}\end{cases}$$

$f_X(x)=\frac{1}{32}(8-x),\ 0\le x\le 8,\quad f_Y(y)=\frac{1}{32}(8-y),\ 0\le y\le 8;$

$f_X(x/y)=1/(8-y),\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 8;\ f_Y(y/x)=1/(8-x),\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 8.$

2.2.29. $f_X(x)=1-|x|,\ |x|<1;\ f_Y(y)=1-|y|,\ |y|<1;$

$f_X(x/y)=\frac{1}{2(1-|y|)},\ |x|<1-|y|;\ f_Y(y/x)=\frac{1}{2(1-|x|)},\ |y|<1-|x|$

Величины X и Y зависимы, но некоррелированы.

2.2.30. $f(x,y)=\lambda x e^{-(\lambda+y)x},\ x>0,\ y>0;\ f_Y(y)=\lambda/(\lambda+y)^2,\ y>0;$

$$f_X(x/y)=x(\lambda+y)^2 e^{-(\lambda+y)x},\ x>0,\ y>0.$$

2.2.31. $r=\sqrt{1/\pi h};\ f_X(x)=2h\sqrt{r^2-x^2},\ |x|<r;\ f_Y(y)=2h\sqrt{r^2-y^2},\ |y|<r,$

$$f_X(x/y)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}},\ |x|<\sqrt{r^2-y^2};\ f_Y(y/x)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$|y|<\sqrt{r^2-x^2};\quad MX=0;\ DX=r^2/4;\ R_{XY}=0$$

2.2.32. $MX=\int_{-\infty}^{\infty}M(X/Y=y)f_Y(y)dy;\quad DX=\int_{-\infty}^{\infty}D(X/Y=y)f_Y(y)dy+$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}[MX-M(X/Y=y)]^2 f_Y(y)dy$$

2.2.34. Нет.

2.2.35. $f(x,y)=\frac{1}{182\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196}+\frac{(x-26)(y+12)}{182}+\frac{(y+12)^2}{169}\right]\right\}$

2.2.36. а) $C=1{,}39;$ б) $R=\begin{pmatrix}0{,}132 & -0{,}026\\ -0{,}026 & 0{,}105\end{pmatrix}$

2.2.37. $f(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{230}(39x^2+36y^2+26z^2-44xy+\right.$

$$\left.+36xz-38yz)\right\}.$$

2.2.38. а) $f_X(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\};\ f_Y(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\};$

б) $f_X(x/y)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{[x-m_1-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)]^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\right\};$

$$f_Y(y/x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{[y-m_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)]^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\right\};$$

в) $M(Y/X=x)=m_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1);$

$M(X/Y=y)=m_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2);$

г) $D(Y/X=x)=\sigma_1^2(1-r^2)$; $D(X/Y=y)=\sigma_2^2(1-r^2)$.

2.2.39. а) $M(X/Y=y)=5-0{,}4(y+2)$; $M(Y/X=x)=6-1{,}6x$;

$\sigma_{X/Y=y}=0{,}6\sigma$; $\sigma_{Y/X=x}=1{,}2\sigma$;

б) $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}}$; $f_Y(y)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+2)^2}{8\sigma^2}}$.

в) $f_X(x/y)=\frac{1}{0{,}6\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x+0{,}4y-4{,}2)^2}{0{,}72\sigma^2}\right\}$;

$$f_Y(y/x)=\frac{1}{1{,}2\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y+1{,}6x-6)^2}{2{,}88\sigma^2}\right\}$$

2.2.40. $p=1-e^{-1/2}\simeq 0{,}393$.

2.2.41. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $y\in(0,1)$;

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le 0,\\ y\Phi(x\sqrt{2}), & \text{если } 0<y\le 1,\\ \Phi(x\sqrt{2}), & \text{если } y>1\end{cases}$$

2.2.42. $F(x,y)=P(X<x)P(Y<y\,/X<x)$. Пусть $x\le x_1$, тогда $P(X<x)=0$ и $F(x,y)=0$; пусть $x_1<x\le x_2$, тогда $P(X<x)=p_1$ и $F(x,y)=p_1P(Y<y\,/X=x_1)=p_1\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right)$.

При $x>x_2$ по формуле полной вероятности

$$F(x,y)=p_1\Phi\left(\frac{y-x_1}{\sigma}\right)+p_2\Phi\left(\frac{y-x_2}{\sigma}\right).$$

Далее, полагая $x=\infty$ и дифференцируя по y, получаем

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F(\infty,y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[p_1e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2\sigma^2}}+p_2e^{-\frac{(y-x_2)^2}{2\sigma^2}}\right].$$

2.3.3. $p_k=P(Y=2k-3)=pq^k$, $k=0,1,2,\ldots$; $MY=2q/p-3$

2.3.4. $q_0=P(Y=0)=\frac{1}{4}$; $q_1=P(Y=1)=\frac{5}{8}$; $q_k=P(Y=k^2)=\frac{1}{2^{k+2}}$, $k=2,3,\ldots$; $MY=2$.

2.3.5. $q_0 = P(Y=1) = \frac{1}{e}$; $q_1 = P(Y=4) = \frac{3}{2e}$; $q_k = P(Y=(3k-2)^2) = \frac{1}{ek!}$,

$k = 2, 3, \ldots$.

2.3.6. $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $|y|<1$.

2.3.7. а)

$$F_Y(y) = P(X^2 < y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 0, \\ \sqrt{y}, & \text{если } 0 < y \le 1, \\ 1, & \text{если } y > 1; \end{cases} \quad f_Y(y) = F_Y'(y);$$

б)

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{X} < y\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 1, \\ 1 - \frac{1}{y}, & \text{если } y > 1, \end{cases} \quad f_Y(y) = F_Y'(y);$$

в)

$$F_Y(y) = P(e^X < y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 1, \\ \ln y, & \text{если } 1 < y \le e, \\ 1, & \text{если } y > e. \end{cases} \quad f_Y(y) = F_Y'(y).$$

2.3.8. $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $|y|<1$.

2.3.9.

$$F_Y(y) = P(|X| < y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 0, \\ y, & \text{если } 0 < y \le 1, \\ 1, & \text{если } y > 1, \end{cases} \quad f_Y(y) = 1, y \in [0, 1].$$

2.3.10. б) $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi y(1-y)}} e^{-\frac{1-y}{2y}}$, $y \in (0, 1)$;

в) $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp[-\ln^2 y/2]$, $y > 0$;

г) $f_Y(y) = \frac{1}{\cos^2 y\sqrt{2\pi}} \exp[-\operatorname{tg}^2 y/2]$, $|y| < \frac{\pi}{2}$;

д) $f_Y(y) = \frac{6y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp[-y^6/2]$, $y \ge 0$.

2.3.12. $MX = e^{a+\sigma^2/2}$; $DX = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$

2.3.13. а) $Y \sim N(0,1)$; б) $f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4}$, $|z| \le 2$.

2.3.14. $DY = 20 - 2\pi^2$. 2.3.15. б) $f_Y(y) = \frac{1}{\pi}$, $|y| \le \frac{\pi}{2}$

2.3.16. Указание. Так как $X = tg\,\varphi$, где φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, то
$\frac{1}{X} = tg(\frac{\pi}{2} - \varphi)$, $\frac{2X}{1-X^2} = tg\,2\varphi$; $\frac{3X - X^3}{1-3X^2} = tg\,3\varphi$

2.3.17. а) $\frac{1}{|A|} f_X\left(\frac{y-B}{A}\right)$; б) $f_X(y) + f_X(-y)$;

в) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_X(\pi k + (-1)^k \arcsin y)$, $|y| \le 1$.

2.3.18. $F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$ 2.3.19. $1 - F_X\left(\frac{3}{2}(2-y)\right)$

2.3.20.

$$F_Y(y) = P(Y<y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le \pi a^2; \\ \frac{\sqrt{y/\pi} - a}{b-a}, & \text{если } \pi a^2 < y \le \pi b^2; \\ 1, & \text{если } y > \pi b^2; \end{cases}$$

где Y – площадь круга с диаметром X.

2.3.21. Пусть $0 < y < 1$. Тогда $P(Y<y) = P(F_X(X)<y) =$
$= P(X < F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$

При $y \le 0$ $P(Y \le y) = 0$, при $y > 1$ $P(Y<y) = 1$.

Таким образом, Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$

12-5746

2.3.23. а) $q_{-2,1} = \frac{1}{8}$; $q_{-1,0} = 1/12$; $q_{0,-1} = 1/2$; $q_{1,0} = 1/6$;

$q_{2,1} = 1/8$; остальные $q_{i,j} = 0$;

б) $p_{-2} = 1/8$; $p_{-1} = 1/12$; $p_0 = 1/2$; $p_1 = 1/6$; $p_2 = 1/8$;

в) $q_{-1} = 1/2$; $q_0 = q$; $q_1 = 1/4$.

2.3.24.

$Z = X+Y$	0	1	2	3	4
P	1/12	1/4	1/3	1/4	1/12

2.3.25.

$$F_Z(z) = \frac{1}{2}F_Y(z+1) + \frac{1}{2}F_Y(z-1) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \le -1, \\ \frac{z+1}{2}, & \text{если } -1 < z \le 0, \\ 1/2, & \text{если } 0 < z \le 1, \\ z/2, & \text{если } 1 < z \le 2, \\ 1, & \text{если } z > 2; \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}f_Y(z+1) + \frac{1}{2}f_Y(z-1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } z \in [-1,0], z \in [1,2], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Примечание. Сумма $Z = X+Y$ является непрерывной случайной величиной, если хотя бы одно из слагаемых непрерывная случайная величина.

2.3.26.

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \le 0, \\ 1-e^{-z}, & \text{если } 0 < z \le 1, \\ e^{-z}(e-1), & \text{если } z > 1 \end{cases}$$

2.3.27. а) $f_Z(z) = \int_0^{\infty} y f(zy,y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} y f(zy,y)\,dy$;

б) $f_Z(z) = \dfrac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\pi(\sigma_2^2 z^2 - 2rz\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}$

При $r=0$ $f_Z(z) = \dfrac{\sigma_1/\sigma_2}{\pi[z^2 + (\sigma_1/\sigma_2)^2]}$ – закон распределения Коши.

2.3.28. а) $f_Z(z)=\int\limits_0^\infty \frac{1}{x} f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx-\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$,

б) $f_Z(z)=\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2}e^{-|z|/\sigma_1\sigma_2}$.

2.3.29. Равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

2.3.30.

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{если } |z|>1,\\ 1-|z|, & \text{если } |z|\le 1\end{cases}$$

2.3.31.

а) $$f_Z(z)=\begin{cases}-\ln z, & \text{если } 0<z<1,\\ 0, & \text{если } z\notin(0,1),\end{cases}$$

б) $$f_Z(z)=\begin{cases}1-|z|, & \text{если } |z|\le 1,\\ 0, & \text{если } |z|>1,\end{cases}$$ в) $$f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z), & \text{если } 0\le z\le 1,\\ 0, & \text{если } z\notin[0,1]\end{cases}$$

2.3.32. а) $f_Z(z)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}$ (закон Лапласа);

б) $f_Z(z)=\lambda e^{-\lambda z}$, $z\ge 0$

2.3.33. $f_Z(z)=\frac{1}{4}e^{-|z|}(1+|z|)$

2.3.36. $f_Z(z)=\dfrac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\pi(\sigma_2^2z^2-2r\sigma_1\sigma_2 z+\sigma_1^2)}$.

2.3.38. Требуется доказать равенство

$$P(X-Y<z_1,\ X+Y<z_2)=P(X-Y<z_1)P(X+Y<z_2).$$

Для этого в интеграле $\iint\limits_{\{u-v<z_1,\ u+v<z_2\}} e^{-\frac{(u^2+v^2)^2}{2}}du\,dv$

сделаем замену переменных $u-v=t$, $u+v=s$ и воспользуемся тем, что каждая из величин $X-Y$ и $X+Y$ имеет нормальное распределение $N(0,2)$.

2.3.39. Рассмотрим для произвольных $z_1 \geq 0$ и $z_2 \geq 0$ вероятность

$$P(X-Y \geq z_1,\ \min(X,Y) \geq z_2) = J$$

Учитывая независимость X и Y, имеем

$$J = \iint\limits_{\{u-v\geq z_1,\ \min(u,v)\geq z_2\}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}\,du\,dv = \lambda_1\lambda_2 \int_{z_1+z_2}^{\infty} e^{-\lambda_1 u}\left\{\int_{z_2}^{u-z_1} e^{-\lambda_2 v}dv\right\}du =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_{z_1}^{\infty} e^{-\lambda_1(z_2+u)}\left\{\int_{z_2}^{u+z_2-z_1} e^{-\lambda_2 v}dv\right\}du =$$

$$= e^{-\lambda_1 z_2} e^{-\lambda_2 z_2}\lambda_1\lambda_2 \int_{z_1}^{\infty} e^{-\lambda_1 u}\left\{\int_{0}^{u-z_1} e^{-\lambda_2 v}dv\right\}du =$$

$$= P(X-Y \geq z_1)\,P(\min(X,Y) \geq z_2)$$

Следовательно, события $(X-Y<z_1)$ и $(\min(X,Y)<z_2)$ независимы в этом случае. Аналогично рассматривается случай $z_1<0$.

2.3.41.

$$g(x_1,y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[Ax_1^2-2Bx_1y_1+Cy_1^2\right]\right\},$$

где $$A = \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1^2} - 2r\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_2^2};$$

$$B = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1^2} - r\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_2^2};$$

$$C = \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1^2} + 2r\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2^2}$$

Случайные величины X_1 и Y_1 будут независимы, если α выбрать так, чтобы $$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}.$$

2.3.42. Указание. $Y_1 \sim N(0, \sum_{k=1}^{n} a_k^2)$, $Y_2 \sim N(0, \sum_{k=1}^{n} b_k^2)$.

Поэтому Y_1 и Y_2 независимы тогда и только тогда, когда $r_{Y_1Y_2}=0$, а $r_{Y_1Y_2}=0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = 0$.

2.3.43. $g(x_1,y_1) = f(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$.

2.3.44. $f(r) = \dfrac{r}{a^2} e^{-r^2/2a^2}$ (распределение Релея).

2.3.45. $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;$

$$f_1(r,\varphi) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \frac{r}{2\pi a b} e^{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}$$

2.3.46.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x^2/R^2, & \text{если } 0 < x \le R, \\ 1, & \text{если } x > R; \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2}, & \text{если } 0 < x < R, \\ 0, & \text{если } x \notin (0,R), \end{cases}$$

$$MX = \frac{2}{3}R;\quad DX = R^2/18$$

2.3.47.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1 - \dfrac{(T-x)^2}{T^2}, & \text{если } 0 < x \le T, \\ 1, & \text{если } x > T. \end{cases}$$

2.3.48.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \le r < \infty, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \le \theta \le \pi, \\ z &= r\cos\theta, & 0 < \varphi < 2\pi; \end{aligned}$$

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{r^2\sin\theta}{(2\pi)^{3/2}abc}\exp\left[-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\right]$$

2.3.52.

$$f_{\Phi(n_1,n_2)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{(n_1+n_2)/2}},$$

$$0 \le x < \infty$$

2.3.54. Указание. Воспользоваться равенством $Me^{-Y} = \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n} Me^{-X_k}$, где $Me^{-Y} = 0$ тогда и только тогда, когда $Y = \infty$ с вероятностью I.

3.I.3. $P(|X-MX| < 0{,}2) \ge 0{,}64.$ 3.I.4. $P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) \ge 0{,}84.$

13-3746

3.I.5. $P(49{,}5 \le X \le 50{,}5) \ge 0{,}6$. 3.I.6. а) $P \ge 0{,}86$; б) $P \ge 0{,}75$.

3.I.7. а) 0,888...; б) 0,25. 3.I.8. $\varepsilon \ge 0{,}3$.

3.I.9. $P \ge$ 0,88I5. 3.I.I0. $P \le$ 0,25; $P = 2\Phi(-2) = 0{,}0456$.

3.I.II. $\Delta \ge 1/\sqrt{10}$. 3.I.I2. $P(X \ge \varepsilon) = P(e^{aX} \ge e^{a\varepsilon}) < \dfrac{Me^{aX}}{e^{a\varepsilon}}$.

3.I.I3. $P(X \ge \varepsilon) = P(f(X) \ge f(\varepsilon)) \le \dfrac{Mf(X)}{f(\varepsilon)}$.

3.I.I4. См.задачу 3.I.I3.

3.I.I5. а) $P(|X| \ge \varepsilon) = P(f(X) \ge f(\varepsilon)) \le \dfrac{Mf(X)}{f(\varepsilon)}$,

б) Пусть $F(x)$ - функция распределения величины X. Тогда

$$P(|X| \ge \varepsilon) = \int\limits_{|x| \ge \varepsilon} dF(x) \ge \frac{1}{C} \int\limits_{|x| \ge \varepsilon} f(x)\,dF(x) =$$

$$= \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF(x) - \frac{1}{C}\int\limits_{|x|<\varepsilon} f(x)\,dF(x) \ge$$

$$\ge \frac{Mf(X)}{C} - \frac{1}{C} f(\varepsilon) = \frac{1}{C}\left(Mf(X) - f(\varepsilon)\right).$$

3.I.I6. Применима, т.к. $MX_n = -\dfrac{a}{2n+1}$ и $DX_n \le a^2$ для всех n.

3.I.I7. Применима, т.к. $MX_n = 0$, $DX_n = 2$ для всех n.

3.I.I8. Применима, т.к. $MX_n = 0$, $DX_n = \alpha^2$ для всех n.

3.I.I9. $P \ge$ 0,99. 3.I.20. $n \ge 227500$. 3.I.2I. $n \ge 60000$.

3.I.22. Подчиняется. 3.I.23. Подчиняется при $\alpha < 1$; не подчиняется при $\alpha \ge 1$. 3.I.24. Не подчиняется.

3.I.28. Указание. Воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости.

3.I.29. Пусть $\{X_n,\ n \ge 1\}$ - последовательность независимых, равномерно распределенных на отрезке $[0, I]$ случайных величин.

по закону больших чисел

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} MX_1 = \frac{1}{2} \quad \text{при } n \to \infty$$

Из непрерывности $f(x)$ имеем

$$f(S_n) \xrightarrow{P} f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{при } n \to \infty,$$

и в силу ограниченности $f(x)$

$$Mf(S_n) \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Теперь достаточно выразить $Mf(S_n)$, пользуясь независимостью величин X_n, $n \geq 1$.

3.2.4. $\frac{pz}{1-qz}$, $MN = \frac{1}{p}$, $\mathcal{D}N = \frac{q}{p^2}$; $\left(p\frac{z}{1-qz}\right)^m$, $MN_m = \frac{m}{p}$,
$\mathcal{D}N_m = \frac{mq}{p^2}$

3.2.5. а) $\frac{1}{4}(1+z)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2$. Дискретное распределение со скачками в точках 0,1,2, соответственно равными 1/4, 1/2, 1/4; б) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \ldots$. Дискретное распределение: значение $k \geq 0$ принимается с вероятностью $2^{-(k+1)}$; в) распределение Пуассона с параметром λ; г) биномальное распределение с вероятностью успеха $p = \frac{2}{3}$.

3.2.7. $P(z) = \frac{1-(1-p)z}{(1-z)[1-(q-p)z]}$; $u_n = \frac{1}{2}[1+(q-p)^n]$

3.2.11. а) $\varphi(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$; б) $\frac{a}{a-it}$; в) $e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

г) $e^{-a|t|}$; д) $\frac{1}{1+t^2}$; е) $(1-2it)^{\frac{n}{2}}$

3.2.15. Заметим, что $\varphi_2(t)=\frac{1}{1+t^2}(1-it)$ – характеристическая функция суммы $X+Y$, где X и Y независимы, причем X имеет распределение с плотностью $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, а $Y=\frac{1}{2}\chi_2^2$, где χ_2^2 имеет хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы.

Теперь плотность распределения соответствующая $\varphi_2(t)$ найдется как свертка плотностей случайных величин X и Y.

3.2.16. Целочисленная случайная величина, принимающая значение $k=(k=1,2,\ldots)$ с вероятностью $\frac{1}{2^k}$.

3.2.17. а) 0,5; б) 0,6568. 3.2.19. $|\varphi(t)|^2$. 3.2.20. $\cos^n t$.

3.2.24. Воспользоваться интегрированием по частям.

3.2.29. а) ДА; б) НЕТ; в) ДА; г) НЕТ, так как $e^{-t^4}=1+o(t^2)$, и если бы e^{-t^4} была характеристической функцией случайной величины X, то $MX=0$, $DX=0$ и $\varphi_X(t)\equiv 1$; д) ДА; е) ДА; ж) НЕТ.

3.2.31. $\varphi(t_1,t_2)=e^{-(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)}$

3.2.32. а) $z_{12}z_{34}+z_{13}z_{34}+z_{14}z_{23}$; б) 0;

в) $8z_{12}z_{13}z_{23}+2(z_{12}^2+z_{13}^2+z_{23}^2)+1$.

Библиографический список

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.

Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1982.

Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.

Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1980.

Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица I

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	[illegible]	3973
0,I	3970	3965	396I	3956	395I	3945	3939	3932	[illegible]	[illegible]
0,2	39I0	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	[illegible]	[illegible]
0,3	38I4	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	[illegible]	[illegible]
0,4	3683	3668	3653	3637	362I	3605	3589	3572	[illegible]	[illegible]
0,5	352I	3503	3485	3467	3448	3429	34I0	339I	3372	[illegible]
0,6	3332	33I2	3292	327I	325I	3230	3209	3I87	3I66	3I44
0,7	3I23	3I0I	3079	3056	3034	30II	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	266I	2637	26I3	2589	2565	254I	25I6	2492	2468	2444
I,0	0,2420	2396	237I	2347	2323	2299	2275	225I	2227	2203
I,I	2I79	2I55	2I3I	2I07	2083	2059	2036	20I2	I989	I965
I,2	I942	I9I9	I895	I872	I849	I826	I804	I78I	I758	I736
I,3	I7I4	I69I	I669	I647	I626	I604	I582	I56I	I539	I5I8
I,4	I497	I476	I456	I435	I4I5	I394	I374	I354	I334	I3I5
I,5	I295	I276	I257	I238	I2I9	I200	II82	II63	II45	II27
I,6	II09	I092	I074	I057	I040	I023	I006	0989	0973	0957
I,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	08I8	0804
I,8	0790	0775	076I	0748	0734	072I	0707	0694	068I	0669
I,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	055I
2,0	0,0540	0529	05I9	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,I	0440	043I	0422	04I3	0404	0396	0387	0379	037I	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	03I7	03I0	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	024I	0235	0229
2,4	0224	02I9	02I3	0208	0203	0I98	0I94	0I89	0I84	0I80
2,5	0I75	0I7I	0I67	0I63	0I58	0I54	0I5I	0I47	0I43	0I39
2,6	0I36	0I32	0I29	0I26	0I22	0II9	0II6	0II3	0II0	0I07
2,7	0I04	0I0I	0099	0096	0093	009I	0088	0086	0084	008I
2,8	0079	0077	0075	0073	007I	0069	0067	0065	0063	006I
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	005I	0050	0048	0047	0046

Продолжение п р и л.
Продолжение т а б л.I

x	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,I	0033	0032	003I	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	002I	0020	0020	00I9	00I8	00I8
3,3	00I7	00I7	00I6	00I6	00I5	00I5	00I4	00I4	00I3	00I3
3,4	00I2	00I2	00I2	00II	00II	00I0	00I0	00I0	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	000I	000I

Т а б л и ц а 2

Таблица значений функции $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$(\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x))$

x	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	0II97	0I595	0I994	02392	02790	03I88	03586
0,I	03983	04380	04776	05I72	05567	05962	06356	06749	07I42	07535
0,2	07926	083I7	08706	09095	09483	087I	I0257	I0642	II026	II409
0,3	II79I	I2I72	I2552	I2930	I3307	I3683	I4058	I443I	I4803	I5I73
0,4	I5542	I59I0	I6276	I6640	I7003	I7364	I7724	I8082	I8439	I8793
0,5	I9I46	I9497	I9847	20I94	20540	20884	2I226	2I566	2I904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	2389I	242I5	24537	24857	25I75	25490
0,7	25804	26II5	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	288I4	29I03	29389	29673	29955	30234	305II	30785	3I057	3I327
0,9	3I594	3I859	32I2I	3238I	32639	32894	33I47	33398	33646	3389I
I,0	34I34	34375	346I4	34850	35083	353I4	35543	35769	35993	362I4
I,I	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38I00	38298
I,2	38493	38686	38877	39065	3925I	39435	396I7	39796	39973	40I47
I,3	40320	40490	40658	40824	40988	4II49	4I309	4I466	4I62I	4I774
I,4	4I924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43I89
I,5	433I9	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44I79	44295	44408

Продолжение прил.
Продолжение табл.2

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45I54	45254	45352	45449
I,7	45543	45637	45728	458I8	45907	45994	46080	46I64	46246	46327
I,8	46407	46485	46562	46638	467I2	46784	46856	46926	46995	47062
I,9	47I28	47I93	47257	47320	4738I	4744I	47500	47558	476I5	47670
2,0	47725	47778	4783I	47882	47932	47982	48030	48077	48I24	48I69
2,I	482I4	48257	48300	4834I	48382	48422	4846I	48500	48537	48574
2,2	486I0	48645	48679	487I3	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	490I0	49036	4906I	49086	49III	49I34	49I58
2,4	49I80	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	4936I
2,5	49379	49396	494I3	49430	49446	4946I	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	4962I	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	497II	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	4978I	49788	49795	4980I	49807
2,9	498I3	498I9	49825	4983I	49836	4984I	49846	4985I	49856	4986I

3,0	0,49865	3,I	49903	3,2	4993I	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Таблица 3

Таблица значений функции $P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k \ λ	0,I	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,8I873	0,74082	0,67032	0,60653
I	0,09048	0,I6375	0,22225	0,268I3	0,30327
2	0,00452	0,0I638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,000I5	0,00I09	0,00333	0,007I5	0,0I264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00I58

Продолжение т а б л. 3

K \ λ	0,I	0,2	0,3	0,4	0,5
5			0,00002	0,00006	0,000I6
6					0,0000I

K \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,5488I	0,49659	0,44933	0,40657
I	0,32929	0,3476I	0,35946	0,3659I
2	0,09879	0,I2I66	0,I4379	0,I6466
3	0,0I976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,0III2
5	0,00036	0,00070	0,00I23	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,000I6	0,00030
7		0,0000I	0,00002	0,00004

K \ λ	I,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,I3534	0,04979	0,0I832	0,00674
I	0,36788	0,27067	0,I4936	0,07326	0,03369
2	0,I8394	0,27067	0,22404	0,I4653	0,08422
3	0,06I3I	0,I8045	0,22404	0,I9537	0,I4037
4	0,0I533	0,09022	0,I6803	0,I9537	0,I7547
5	0,00307	0,03609	0,I0082	0,I5629	0,I7547
6	0,0005I	0,0I203	0,0504I	0,I04I9	0,I4622
7	0,00007	0,00344	0,02I60	0,05954	0,I0445
8	0,0000I	0,00086	0,008I0	0,02977	0,06528
9		0,000I9	0,00270	0,0I323	0,03627
I0		0,00004	0,0008I	0,00529	0,0I8I8
II		0,0000I	0,00022	0,00I93	0,00824
I2			0,00006	0,00064	0,00343
I3			0,0000I	0,00020	0,00I32
I4				0,00006	0,00047
I5				0,00002	0,000I6
I6					0,00005
I7					0,0000I

Окончание прил.
Таблица 4

Таблица значений функции $\sum_{m=0}^{K} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

K \ λ	0,I	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,8I873I	0,7408I8	0,670320	0,60653I	0,5488I2
I	0,99532I	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996390	0,992074	0,9856I2	0,977885
3	0,999996	0,999943	0,999724	0,999224	0,998248	0,997642
4	I,000000	0,999998	0,999974	0,999939	0,999828	0,999606
5	I,000000	I,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	I,000000	I,000000	I,000000	I,000000	0,999999	0,999997
7	I,000000	I,000000	I,000000	I,000000	I,000000	I,000000

K \ λ	0,7	0,8	0,9	I,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,I35335	0,049787
I	0,844I95	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,I99I48
2	0,965858	0,952577	0,937I44	0,9I9699	0,676677	0,423I90
3	0,994246	0,990920	0,988542	0,98I0I2	0,857I24	0,647232
4	0,9992I4	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,8I5263
5	0,999909	0,9998I6	0,999658	0,999406	0,983437	0,9I6082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,9999I7	0,995467	0,96649I
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	I,000000	I,000000	I,000000	0,999999	0,999763	0,996I96
9				I,000000	0,999954	0,998897
I0					0,999992	0,999707
II					0,999999	0,999928
I2					I,000000	0,999983
I3						0,999996
I4						0,999999
I5						I,000000

О Г Л А В Л Е Н И Е

Эдуард Иванович К о л о м и е ц,
Леонтий Николаевич П р о к о ф ь е в,
Александр Фролович Т а р а с к и н

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРОЦЕССАМ
В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор Е.Д.А н т о н о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Н.Д.Ч а й н и к о в а

Свод.тем.пл. № 150

Подписано в печать 24.08.89. ЕО 00277.
Формат 60x84 I/16. Бумага оберточная белая.
Печать офсетная. Усл.п.л. 5,5. Уч.-изд.л. 5,0.
Т. 500 экз. Заказ № 5746. Цена 25 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
443086 г.Куйбышев, Московское шоссе, 34.

Тип.им.В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического
объединения, 443099, г. Куйбышев,ул.Венцека,60.