

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## *Часть 1*

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки: 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение, 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов, 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей и по специальностям: 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей, 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2018

УДК 539.3/6(075)  
ББК 30.121я7  
С 646

Авторы: **С.И. Иванов**, **В.Ф. Павлов**, **В.А. Кирпичёв**, **В.К. Шадрин**,  
**В.П. Сазанов**, **В.С. Вакулюк**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. СГТУ В.П. Радченко;  
канд. техн. наук, доц. В.А. Мехеда

**С646** **Сопротивление материалов:** учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 /  
**С.И. Иванов**, **В.Ф. Павлов**, **В.А. Кирпичёв** [и др.]. – Самара: Изд-во  
Самарского университета, 2018. – 144 с.

**ISBN 978-5-7883-1331-3 (Ч. 1)**  
**ISBN 978-5-7883-1333-7**

Рассмотрены разделы курса сопротивление материалов, относящиеся к простым деформациям и устойчивости сжатых стержней. Приведены примеры решения задач расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость.

Предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов»:

*Институт ракетно-космической техники:*

– по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

– направлениям подготовки: 15.03.01 Машиностроение, 15.03.03 Прикладная механика, 22.03.02 Металлургия, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 24.05.01 Ракетные комплексы и космонавтика.

*Институт двигателей и энергетических установок:*

– по специальности 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств; 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов; 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей;

– направлениям подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение, изучающих дисциплину «Механика материалов и конструкций» по направлению подготовки: 13.03.03 Энергетическое машиностроение.

*Институт авиационной техники:*

– по специальности 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение;

– направлениям подготовки: 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 24.03.04 Авиационное машиностроение, 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей, 27.03.02 Управление качеством.

Подготовлено на кафедре сопротивления материалов Самарского университета.

УДК 539.3/6(075)  
ББК 30.121я7

ISBN 978-5-7883-1331-3 (Ч. 1)  
ISBN 978-5-7883-1333-7

© Самарский университет, 2018

# Оглавление

|   |    |
|---|----|
| <b>1. Основные понятия</b> .....  | 7  |
| 1.1. Предмет сопротивления материалов .....   | 7  |
| 1.2. Изучаемые объекты .....  | 7  |
| 1.3. Основные гипотезы о деформируемом теле .....   | 8  |
| 1.4. Классификация внешних сил .....  | 9  |
| 1.5. Метод сечений. Понятие о напряжениях .....   | 10 |
| 1.6. Вопросы для самопроверки .....   | 12 |
| <b>2. Центральное растяжение и сжатие</b> .....   | 13 |
| 2.1. Напряжения при центральном растяжении и сжатии .....   | 13 |
| 2.2. Продольная деформация бруса при центральном<br>растяжении и сжатии. Закон Гука .....         | 14 |
| 2.3. Поперечная деформация бруса при центральном<br>Растяжении и сжатии. Закон Пуассона .....     | 15 |
| 2.4. Испытания на растяжение. Основные механические<br>характеристики материала. ....             | 15 |
| 2.5. Расчёты на прочность при центральном растяжении<br>и сжатии.....                             | 19 |
| 2.6. Статически неопределимые задачи при растяжении<br>и сжатии.....                              | 21 |
| 2.6.1. Решение трёх основных задач применительно<br>к статически неопределимым конструкциям ..... | 25 |
| 2.6.2. Монтажные напряжения в статически неопределимых<br>системах .....                          | 26 |
| 2.6.3. Температурные напряжения в статически<br>неопределимых системах .....                      | 28 |
| 2.6.4. Расчёт статически неопределимых систем<br>по предельным нагрузкам .....                    | 30 |
| 2.7. Учёт собственного веса в расчётах на прочность .....   | 34 |
| 2.8. Вопросы для самопроверки .....   | 36 |
| <b>3 Сдвиг</b> .....  | 37 |
| 3.1. Основные понятия о сдвиге .....  | 37 |
| 3.2. Вопросы для самопроверки .....   | 39 |
| <b>4. Теории напряжённого и деформированного состояний</b> .....                                  | 40 |
| 4.1. Основные сведения о напряжённом состоянии<br>детали в точке .....                            | 40 |

|  |    |
|--|----|
| 4.2. Напряжения на произвольной площадке при линейном напряжённом состоянии .....                  | 42 |
| 4.3. Напряжения на произвольной площадке при плоском напряжённом состоянии .....                   | 44 |
| 4.4. Графический способ определения напряжений при плоском напряжённом состоянии. Круги Мора ..... | 45 |
| 4.5. Напряжения на произвольной площадке при объёмном напряжённом состоянии.....                   | 49 |
| 4.6. Круги Мора при объёмном напряжённом состоянии .....   | 50 |
| 4.7. Закон Гука при объёмном напряжённом состоянии .....   | 51 |
| 4.8. Потенциальная энергия упругой деформации при объёмном напряжённом состоянии .....             | 53 |
| 4.9. Относительное изменение объёма тела.....  | 55 |
| 4.10. Теории предельных напряжённых состояний (теории прочности).....                              | 56 |
| 4.10.1. I теория предельных напряжённых состояний .....  | 58 |
| 4.10.2. II теория предельных напряжённых состояний.....  | 58 |
| 4.10.3. III теория предельных напряжённых состояний .....  | 59 |
| 4.10.4. IV теория предельных напряжённых состояний .....   | 60 |
| 4.11. Вопросы для самопроверки. ....   | 62 |

## **5. Геометрические характеристики поперечного**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>сечения бруса .....</b>   | <b>63</b> |
| 5.1. Основные понятия о геометрических характеристиках .....   | 63        |
| 5.2. Моменты инерции элементарных сечений .....  | 65        |
| 5.2.1. Прямоугольник .....   | 65        |
| 5.2.2. Круг.....   | 65        |
| 5.2.3. Кольцо .....  | 66        |
| 5.2.4. Треугольник .....   | 66        |
| 5.2.5. Прокатные профили .....   | 67        |
| 5.3. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, одни из которых центральные ..... | 67        |
| 5.4. Главные оси инерции и главные моменты инерции сечения .....   | 68        |
| 5.5. Зависимость между моментами инерции сечения при повороте от главных осей.....                         | 70        |
| 5.6. Определение главных моментов инерции и положения главных осей инерции сечения.....                    | 71        |
| 5.7. Исследование моментов инерции графическим способом....  | 72        |
| 5.8. Эллипс инерции .....  | 74        |

|   |            |
|---|------------|
| 5.9. Определение моментов инерции сложных сечении.....                                | 76         |
| 5.10. Вопросы для самопроверки .....  | 78         |
| <b>6. Изгиб .....</b>   | <b>79</b>  |
| 6.1. Основные понятия об изгибе. Расчётная схема балки.....                           | 79         |
| 6.2. Поперечная сила и изгибающий момент.....   | 82         |
| 6.3. Дифференциальные зависимости между $q$ , $Q$ и $M$ .....                         | 84         |
| 6.4. Равнодействующая распределённой нагрузки<br>и её положение .....                 | 85         |
| 6.5. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих<br>моментов .....                    | 85         |
| 6.6. Контроль правильности построения эпюр $Q$ и $M$ .....                            | 88         |
| 6.7. Напряжения в балке при изгибе.....   | 89         |
| 6.7.1. Нормальные напряжения в балке при изгибе.....                                  | 89         |
| 6.7.2. Касательные напряжения в балке при изгибе.<br>Формула Журавского .....         | 93         |
| 6.8. Расчёт балок на прочность по допускаемым<br>Напряжениям.....                     | 97         |
| 6.9. Рациональная форма поперечного сечения балки.....                                | 101        |
| 6.10. Перемещения балок при изгибе .....  | 103        |
| 6.10.1. Прогиб и поворот поперечного сечения Балки .....                              | 103        |
| 6.10.2. Дифференциальное уравнение изогнутой<br>оси балки .....                       | 104        |
| 6.11. Балки переменного сечения.....  | 106        |
| 6.12. Балки равного сопротивления.....  | 108        |
| 6.13. Вопросы для самопроверки .....  | 109        |
| <b>7. Кручение.....</b>   | <b>110</b> |
| 7.1. Основные понятия о кручении. Крутящий момент.....                                | 110        |
| 7.1.1. Вычисление моментов, передаваемых на вал<br>по мощности и числу оборотов ..... | 111        |
| 7.2. Напряжения круглого вала при кручении и расчёт<br>на прочность .....             | 112        |
| 7.3. Перемещения при кручении круглого вала .....                                     | 117        |
| 7.4. Расчет винтовых цилиндрических пружин<br>с небольшим углом подъёма витка .....   | 118        |
| 7.5. Кручение брусьев некруглого сечения.....   | 121        |
| 7.6. Кручение тонкостенных брусьев (свободное кручение) .....                         | 122        |
| 7.6.1. Свободное кручение тонкостенных брусьев<br>с открытым профилем .....           | 123        |

|  |            |
|--|------------|
| 7.6.2. Общий случай свободного кручения тонкостенного бруса с открытым профилем .....                        | 123        |
| 7.6.3. Свободное кручение тонкостенных брусьев с замкнутым профилем.....                                     | 124        |
| 7.7. Вопросы для самопроверки .....  | 126        |
| <b>8. Устойчивость сжатых стержней .....</b>   | <b>128</b> |
| 8.1. Потеря устойчивости сжатым стержнем. Формула Эйлера для критической силы.....                           | 128        |
| 8.2. Влияние способа закрепления стержня на критическую силу .....   | 132        |
| 8.3. Пределы применимости формулы Эйлера. Полный график критических напряжений .....                         | 134        |
| 8.4. Расчёт сжатых стержней с помощью коэффициента снижения основного допускаемого напряжения .....          | 136        |
| 8.5. Выбор формы поперечного сечения и материала сжатого стержня на основании экономических соображений..... | 139        |
| 8.6. Вопросы для самопроверки .....  | 141        |
| <b>Список литературы.....</b>  | <b>142</b> |

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## 1.1. Предмет сопротивления материалов

Сопротивление материалов – дисциплина экспериментально-теоретическая. Она тесно связана с математикой и теоретической механикой. В отличие от теоретической механики, где тела (детали) считаются абсолютно жёсткими, в сопротивлении материалов детали считаются деформируемыми. В сопротивлении материалов изучается прочность, жёсткость и устойчивость элементов конструкций, имеющих форму бруса.

**Прочность** – это способность детали сопротивляться разрушению.

**Жёсткость** – это способность детали сопротивляться изменению формы и размеров.

**Устойчивость** – это способность детали сопротивляться быстро нарастающим изменениям формы и размеров при достижении силами, так называемых, критических значений.

## 1.2. Изучаемые объекты

Брус или стержень – это деталь (тело) (рис. 1.1), один размер которой значительно больше двух других. Большой размер называется длиной бруса. Меньшие – размеры поперечного сечения.

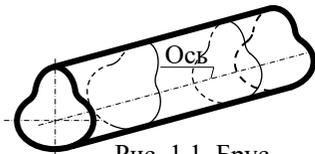


Рис. 1.1. Брус

Элементы бруса:

- ось бруса – линия, соединяющая центры тяжести сечений;
- поперечное сечение – сечение бруса плоскостью, перпендикулярной оси.

Эти понятия однозначны: для любого бруса одна ось и для любой точки оси – одно поперечное сечение.

Брусья бывают прямыми и кривыми. Если ось – прямая линия, то брус прямой, если ось кривая линия – брус кривой. Если радиус кривизны оси бруса значительно больше размеров поперечного сечения, то брус малой кривизны, если же радиус кривизны соизмерим с размерами поперечного сечения, – то брус большой кривизны.

Брусья бывают плоскими и пространственными. Если ось бруса плоская линия, то брус плоский; если же ось пространственная линия, то брус – пространственный.

Брусья бывают постоянного и переменного поперечного сечения.

Примеры брусьев: валы (различные); крыло самолёта и т.д.

Пластина – это тело, один размер которого (толщина) значительно меньше двух других. Пластина, имеющая искривления в одном или в двух направлениях, называется оболочкой.

Примеры: газовый баллон, бак ракеты, фюзеляж самолёта.

### 1.3. Основные гипотезы о деформируемом теле

1 **Гипотеза сплошности.** В сопротивлении материалов все тела (детали) считаются сплошной средой без пустот (пренебрегая атомным строением материала).

2 **Гипотеза идеальной упругости.** В сопротивлении материалов все материалы считаются идеально упругими.

*Упругость* – это способность тела (детали) восстанавливать свои форму и размеры после снятия нагрузки. Если форма и размеры восстанавливаются полностью, то это случай идеальной упругости.

Противоположное упругости свойство – пластичность. *Пластичность* – это способность тела (детали) получать исчезающие, остаточные изменения формы и размеров.

3 **Гипотеза однородности и изотропности.** Материал (тело, деталь) считается *однородным*, если его упругие свойства одинаковы во всех точках. Если упругие свойства не одинаковы – материал неоднороден.

Материал считается *изотропным*, если его упругие свойства одинаковы по всем направлениям. Если упругие свойства не одинаковы – материал анизотропен (пример: древесина).

4 **Гипотеза Сен-Венана.** Если к некоторой части тела приложена самоуравновешенная система сил, то действие этой системы быстро убывает по мере удаления от места её приложения (рис. 1.2).

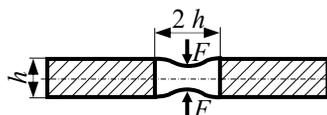


Рис. 1.2. Влияние системы самоуравновешенных сил

*Следствие.* Если систему самоуравновешенных сил, приложенную в некоторой части детали, заменить статически эквивалентной системой, приложенной в этой же части детали, то эта замена скажется только в области приложения сил.

**Гипотеза неизменности начальных размеров.** Даже при максимально допустимых действующих силах изменение формы и размеров деталей настолько малы, что при составлении уравнений равновесия ими можно пренебречь. Например: шарнирно-стержневой кронштейн. В соответствии с этой гипотезой  $l' = l$ ,  $\alpha' = \alpha$  (рис 1.3).

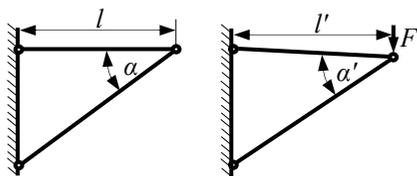


Рис. 1.3. Неизменность начальных размеров

6. **Гипотеза плоских сечений.** Сечение бруса, плоское и перпендикулярное оси, до нагружения, остаётся плоским и перпендикулярным оси и после нагружения.

#### 1.4. Классификация внешних сил

Внешними называются силы, с которыми соседние детали (тела) действуют на изучаемую деталь. Внешние силы бывают поверхностными и объёмными.

Поверхностные силы – силы, приложенные к поверхности детали (пример: подъёмная сила крыла самолёта).

Объёмные силы – силы, приложенные к каждому элементу детали (тела) (пример: сила веса, инерционные силы).

Внешние силы бывают распределёнными и сосредоточенными.

Распределённые силы – силы, приложенные ко всей детали или к её части.

Сосредоточенные силы - силы, приложенные к небольшой части поверхности детали (пример: сила взаимодействия шарика (подшипника) и беговой дорожки).

Силы бывают постоянными и временными.

Постоянные силы – силы, действующие в течение длительного промежутка времени.

Временные силы – силы, действующие в течение небольшого промежутка времени

Силы бывают статическими и динамическими. Статические силы – силы, которые медленно изменяются от нуля до конечного значения и далее не изменяются (силы тяжести зданий, при строительстве).

Динамические силы разделяют на ударные и циклически изменяющиеся.

Ударные силы – силы, при которых возникают большие ускорения. Пример: сила взаимодействия шасси самолёта и полосы в момент посадки.

Циклические силы – это силы, периодически изменяющиеся от одного крайнего значения до другого и обратно. Пример: сила, испытываемая шатуном двигателя внутреннего сгорания.

### 1.5. Метод сечений. Понятие о напряжениях

Под действием внешних сил, в теле возникают внутренние силы – силы взаимодействия отдельных частей детали. Именно внутренними силами определяется прочность деталей, поэтому определение внутренних сил является важнейшей задачей сопротивления материалов.

Внутренние силы определяются в два этапа:

- на первом этапе определяется сумма внутренних сил в поперечном сечении детали;
- на втором этапе решается вопрос о том, как эта сумма распределена по поперечному сечению.

Первый этап – статически определяемая задача, второй этап – статически неопределимая задача.

Сумма внутренних сил находится с помощью метода сечений – основного метода определения внутренних сил в сопротивлении материалов.

Суть метода сечений.

Изобразим тело произвольной формы, нагруженное системой самоуравновешенных сил  $F_1, F_2, F_3, F_4, M$  (рис 1.4, а). Мысленно проводим сечение, левую часть тела отбрасываем, изображаем правую часть. Покажем внешние силы, действующие на оставшуюся часть, и внутренние силы, распределённые каким-то образом (рис 1.4, б).

Приведём внутренние силы к какой-нибудь точке  $C$  (рис 1.4, в).

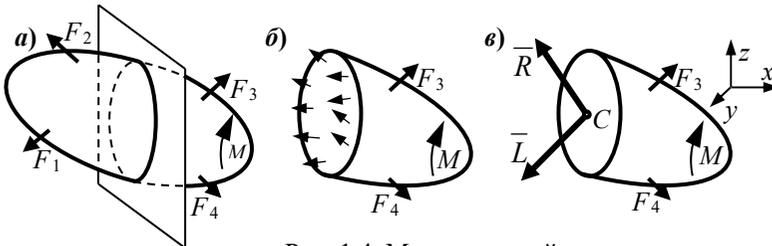


Рис. 1.4. Метод сечений

Получим главный вектор  $\bar{R}$  и главный момент  $\bar{L}$  внутренних сил.  $R$  и  $L$  – сумма внутренних сил в поперечном сечении тела.

Для определения  $\bar{R}$  и  $\bar{L}$  покажем оси координат и составим уравнения статики (уравнения равновесия)

$$\begin{cases} \Sigma F_x + R_x = 0, \\ \Sigma F_y + R_y = 0, \\ \Sigma F_z + R_z = 0, \\ \Sigma M_x + L_x = 0, \\ \Sigma M_y + L_y = 0, \\ \Sigma M_z + L_z = 0. \end{cases}$$

Имеем 6 уравнений статики и 6 неизвестных ( $R_x, R_y, R_z, L_x, L_y, L_z$ ), то есть задача статически определима.

Внутренние силы  $\bar{R}$  и  $\bar{L}$  не могут служить для оценки прочности тела (детали), т.к. зависят от размеров поперечного сечения. Поэтому переходим к напряжениям.

**Напряжение** – это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади сечения.

Выделим в сечении площадку конечного размера  $\Delta A$  (рис. 1.5, а). На площадке действуют распределённые, каким-то образом, внутренние силы. Покажем  $\Delta R$  – равнодействующую внутренних сил на площадке. Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta R}{\Delta A} = p_{cp}$  – среднее напряжение на площадке.

Этой характеристикой пользоваться неудобно, так как она зависит от размера площадки, Поэтому  $p_{cp}$  рассматривается в пределе,  $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$  – полное напряжение в исследуемой точке сечения

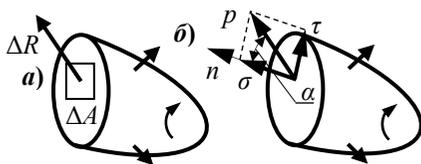


Рис. 1.5. Внутренние силы, напряжения

детали.

На практике в расчётах на прочность пользуются не полными напряжениями  $p$ , а его составляющими на нормаль к сечению и на плоскость сечения.

Обозначим проекции (составляющие)  $p$  (рис. 1.5, б) на нормаль к сечению через  $\sigma$  и на плоскость сечения –  $\tau$ ;  $\sigma$  – нормальное напряжение,  $\tau$  – касательное напряжение. Выразим  $\sigma$  и  $\tau$  через  $p$

$$\sigma = p \cdot \cos \alpha, \quad \tau = p \cdot \sin \alpha, \quad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Напряжения  $p$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  в системе СИ измеряются в Па (Па = Н/ м<sup>2</sup>).

### 1.6. Вопросы для самопроверки

Что изучает сопротивление материалов и каково значение науки в общем цикле инженерных дисциплин? Что понимается под прочностью, жёсткостью, устойчивостью конструкций? Основные гипотезы сопротивления материалов. В чём суть принципа Сен-Венана? Какие силы называют внешними, а какие – внутренними, их различие? Внутренние силовые факторы и их определение. Что такое напряжение в точке – полное, нормальное, касательное?

## 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 2.1. Напряжения при центральном растяжении и сжатии

Прямой брус испытывает **центральное растяжение или сжатие**, если он нагружен силами, приложенными по оси бруса.

Изобразим брус, испытывающий центральное растяжение (рис 2.1, а).

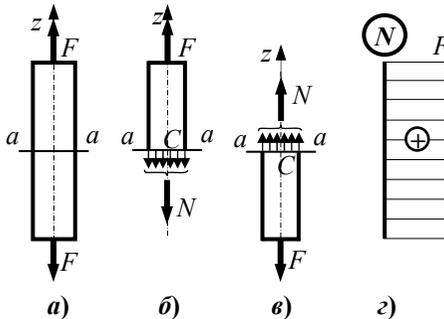


Рис. 2.1. Внутренние силы в брус  
при центральном растяжении

Применим метод сечений: рассечём брус плоскостью  $a - a$ , перпендикулярной оси бруса. Отбросим нижнюю часть (рис 2. 1, б). Приведём внутренние силы к центру тяжести  $C$  поперечного сечения. Из уравнений равновесия получим только силу  $N$ , пары сил нет, так как нет внешних сил, вызывающих эту пару.

$N$  – нормальная (продольная) сила;  $N$  – величина алгебраическая (может быть как положительной, так и отрицательной). При растяжении –  $N > 0$ , при сжатии –  $N < 0$ .

Составим уравнение статики:  $\Sigma z = 0, \Rightarrow N - F = 0 \Rightarrow N = F$ . К такому же результату придём, если будем рассматривать равновесие нижней части бруса (рис 2.1, в).

Таким образом, **нормальная сила в любом поперечном сечении бруса равна сумме проекций на нормаль к этому сечению внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.**

График изменения нормальной силы по длине бруса называется эпюрой нормальных сил. Изобразим эпюру нормальных сил (рис 2.1, г).

Теперь, необходимо определить напряжения. Задача по определению напряжений, является статически неопределимой и для её решения, следует установить закономерность деформаций.

При центральном растяжении или сжатии, справедлива гипотеза плоских сечений, при этом, ось бруса не искривляется. Поэтому любые волокна, находящиеся между двумя поперечными сечениями,

удлиняются на одну и ту же величину. Следовательно, деформации по сечению одинаковы и поэтому напряжения распределены по сечению равномерно, то есть

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения (конечная, но она мало отличается от начальной). При растяжении  $\sigma > 0$ , при сжатии –  $\sigma < 0$ .

В соответствии с гипотезой Сен-Венана полученная формула справедлива на некотором расстоянии от точки приложения силы.

Касательные напряжения (в поперечном сечении) равны нулю, так как нет сдвига. А в наклонных сечениях бруса, есть и нормальные и касательные напряжения. В продольном сечении, нет ни нормальных, ни касательных напряжений.

## 2.2. Продольная деформация бруса при центральном растяжении и сжатии. Закон Гука

Изобразим брус, до и после нагружения (рис. 2.2, а, б), где  $\Delta l$  – абсолютная деформация (абсолютное удлинение) бруса. При растяжении  $\Delta l > 0$ , при сжатии –  $\Delta l < 0$ .

Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$  относительная продольная деформация: при растяжении –  $\varepsilon > 0$ , при сжатии –  $\varepsilon < 0$ .

Деформация связана с напряжениями экспериментально полученной зависимостью:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

– закон Гука, где  $E$  – модуль продольной упругости.

Для стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, для алюминиевых сплавов –  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа.

Запишем закон Гука в другом виде: так как  $\sigma = \frac{N}{A}$ ,  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , то

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

– закон Гука, записанный через действующую силу и размеры бруса, где  $E \cdot A$  – жёсткость бруса при центральном растяжении и сжатии.

Запишем закон Гука в общем случае нагружения бруса, когда

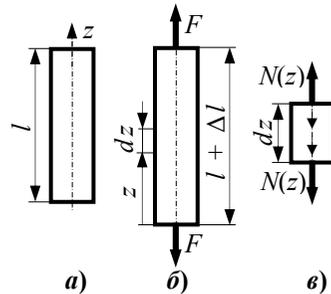


Рис. 2.2. Продольная деформация бруса

нормальная сила изменяется по его длине. Выделим из бруса элемент длиной  $dz$  и покажем его отдельно (рис. 2.2, в). Удлинение элемента определяется по формуле  $d(\Delta l) = \frac{N(z)}{E \cdot A} dz$ , интегрируя, получим

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z) \cdot dz}{E \cdot A}$$

– закон Гука в общем случае нагружения бруса.

### 2.3. Поперечная деформация бруса при центральном растяжении и сжатии. Закон Пуассона

Изобразим брус, до и после нагружения (рис. 2.3, а, б),  $\Delta b$  – абсолютная поперечная деформация: при растяжении,  $-\Delta b < 0$ , при сжатии  $-\Delta b > 0$ . Отношение  $\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_{\text{поп}}$  – относительная поперечная деформация.

Экспериментально получена зависимость

$$\varepsilon_{\text{поп}} = -\mu \cdot \varepsilon$$

– закон Пуассона, где  $\varepsilon$  – продольная деформация,  $\mu$  – коэффициент Пуассона или коэффициент поперечной деформации ( $\mu = 0 \dots 0,5$ ).

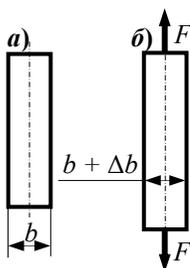


Рис. 2.3. Поперечная деформация бруса

### 2.4. Испытания на растяжение.

#### Основные механические характеристики материала

Для выявления способности материалов деталей сопротивляться разрушению проводятся испытания стандартных лабораторных образцов на растяжение, вплоть до разрушения. Существуют также испытания на срез, изгиб, кручение, сжатие.

Все материалы, условно делятся, на пластичные и хрупкие. Разрушению первых, предшествуют большие пластические деформации, вторых – малые.

Для испытаний на растяжение существуют специальные разрывные машины. Испытания проводятся на образцах, форма, размеры и каче-

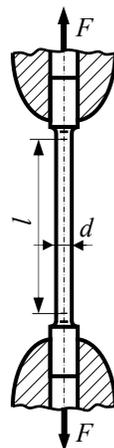


Рис. 2.4. Образец в захватах

ство обработки которых оговорены в соответствующем ГОСТе. Изобразим цилиндрический образец (рис. 2.4) диаметром  $d$  и длиной рабочей части  $l$ .

В процессе испытаний автоматически записывается график зависимости удлинения образца  $\Delta l$  от действующей силы  $F$  – машинная диаграмма (диаграмма растяжения). Изобразим диаграмму растяжения для малоуглеродистой стали (рис. 2.5).

До точки  $A$  – зависимость между  $\Delta l$  и  $F$  – линейная. Это, область действия закона Гука. В этой области работают все детали машин. До точки  $B$  деформации упругие. В точке  $C$  наблюдается площадка текучести (когда удлинение образца растёт без увеличения силы). Далее начинается кривая упрочнения. Перед точкой  $D$  в рабочей части образца образуется, так называемая шейка, и дальнейший рост деформаций всего образца, обусловлен деформациями в шейке. После точки  $D$  нагрузка снижается, так как резко уменьшается площадь поперечного сечения образца и в точке  $K$ , наступает разрушение.

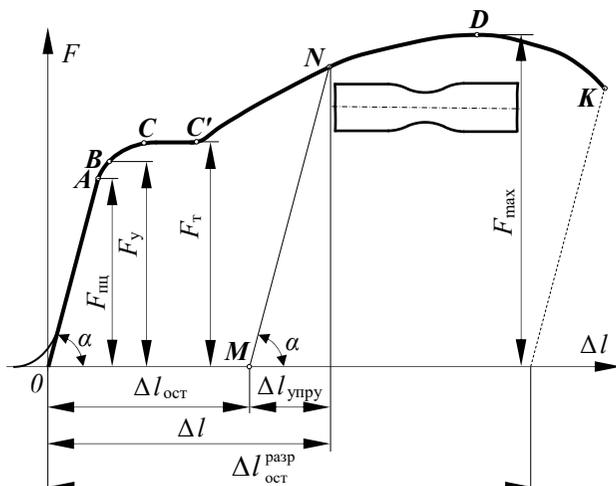


Рис. 2.5. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

*О законе разгрузки и повторного нагружения.* Образец нагружаем до точки  $N$ , а затем разгружаем. Разгрузка идёт по прямой, параллельной прямой действия закона Гука. Повторное нагружение происходит по той же прямой до точки  $N$ , а затем воспроизводится

оставшаяся часть диаграммы. Полное удлинение образца  $\Delta l$  состоит из упругой  $\Delta l_{\text{упру}}$  и остаточной  $\Delta l_{\text{ост}}$  деформаций,  $\Delta l = \Delta l_{\text{упру}} + \Delta l_{\text{ост}}$ .

Измерив длину рабочей части после разрушения  $l_{\text{к}}$  (состыковав части), определим  $\Delta l = l_{\text{к}} - l$  – абсолютное остаточное удлинение после разрушения и введём первую механическую характеристику

$$\delta = \frac{l_{\text{к}} - l}{l} \cdot 100\%,$$

где  $\delta$  – относительное остаточное удлинение образца после разрушения.

Характеристика  $\delta$  никогда не определяется по диаграмме, а определяется на образце на расчётной длине  $l$ . Обычно  $l = 10d$ ; для укороченных образцов  $l = 5d$  ( $\delta_5 > \delta_{10}$ ).

После разрушения образца замеряется диаметр шейки  $d_{\text{к}}$ , вычисляется площадь шейки  $A_{\text{к}}$  и определяется следующая характеристика материала

$$\psi = \frac{|A_{\text{к}} - A|}{A} \cdot 100\%,$$

где  $\psi$  – относительное остаточное сужение после разрушения,  $A$  – начальная площадь.

Эти две характеристики  $\delta$  и  $\psi$  определяют пластичность материала и называются деформационными.

На диаграмме растяжения ординаты и абсциссы зависят от размеров образца, поэтому её перестраивают. Вместо  $\Delta l$  рассматривают  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , а вместо  $F - \sigma = \frac{F}{A}$ . В результате получим график, называемый диаграммой условных напряжений (рис. 2.6).

Характерные ординаты этой диаграммы являются механическими характеристиками материала (характеристики прочности).

$\sigma_{\text{пц}}$  – **предел пропорциональности** – наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука.

$\sigma_{\text{у}}$  – **предел упругости** – наибольшее напряжение, до которого практически не возникают ( $\varepsilon_{\text{ост}} \leq 0,05\%$ ) пластические деформации.

$\sigma_{\text{т}}$  – **предел текучести** – напряжение, при котором наблюдается рост деформаций без увеличения нагрузки.

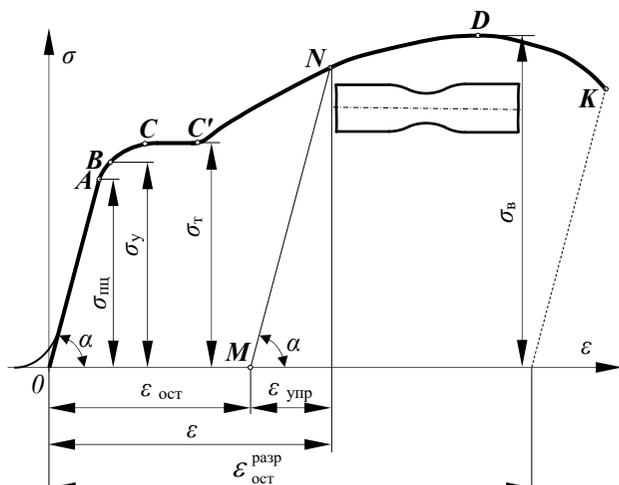


Рис. 2.6. Диаграмма условных напряжений малоуглеродистой стали

$\sigma_B$  – **предел прочности (временное сопротивление)** – условное напряжение равное отношению наибольшей нагрузки, которую выдерживает образец до разрушения, к первоначальной площади его поперечного сечения.

Следует обратить внимание на то, что на участке  $OA$  выполняется закон Гука  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , откуда следует геометрический смысл модуля продольной упругости  $E$  – это тангенс угла наклона прямолинейного участка  $OA$ . Кроме этого, если  $\varepsilon = 1$ , то  $l_k = 2l$ , следовательно, физический смысл  $E$  – это напряжение, которое понадобилось бы для увеличения длины образца в два раза.

О законе разгрузки и повторного нагружения применительно к диаграмме напряжений. Образец нагружается до точки  $N$ , а затем разгружается (см. рис. 2.6). Разгрузка происходит по прямой, параллельной прямолинейному участку диаграммы (модуль упругости не меняется). После предварительного нагружения, материал образца будет иметь другие механические характеристики, которые обусловлены наклёпом.

**Наклёп или нагартовка** – это увеличение прочностных (кроме  $\sigma_B$ ) и уменьшение деформационных характеристик материала в результате предварительного нагружения выше предела текучести.

Пример: прочностные характеристики для малоуглеродистой стали 20:  $\sigma_{\text{пл}} = 200$  МПа;  $\sigma_y = 220$  МПа;  $\sigma_T = 240$  МПа;  $\sigma_B = 400$  МПа.

Диаграммы напряжений большинства конструкционных материалов не имеют площадки текучести (рис. 2.7).

Для таких материалов вводится понятие **условного предела текучести** ( $\sigma_{0,2}$ ) – это напряжение, при котором относительная остаточная деформация равна 0,2%.

Деление материалов на пластичные и хрупкие – довольно условное.

Хрупкие материалы, как правило, неравнопрочны. Сжатию они сопротивляются лучше, чем растяжению (рис. 2.8), то есть  $\sigma_{\text{вс}} > \sigma_{\text{вр}}$ .

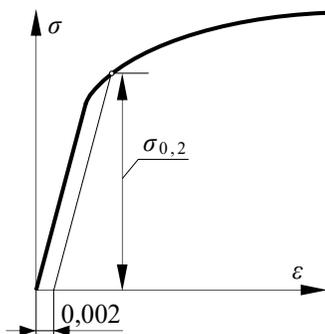


Рис. 2.7. Диаграмма напряжений материалов, не имеющих площадку текучести

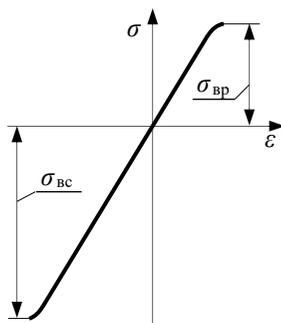


Рис. 2.8. Диаграмма напряжений хрупкого материала

## 2.5. Расчёты на прочность при центральном растяжении и сжатии

**Об опасных напряжениях.** Опасные напряжения обозначают через  $\sigma_L$  – это те напряжения, при которых материал либо разрушается, либо получает недопустимые пластические деформации.

Для деталей из пластичных материалов  $\sigma_L = \sigma_T$ , так как при достижении предела текучести, деталь получает пластические деформации и нарушается её нормальная работоспособность. Для деталей из хрупких материалов  $\sigma_L = \sigma_B$ , так как при достижении предела прочности, деталь разрушается. Такие напряжения в деталях допускать нельзя.

Наибольшие напряжения в деталях, обеспечивающие безопасную работу материала, называются **допускаемыми напряжениями** и обозначаются через  $[\sigma]$ . Если материал деталей неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то соответственно  $[\sigma]_p$  – допускаемое напряжения на растяжение,  $[\sigma]_c$  – допускаемое напряжения на сжатие.

Допускаемые напряжения определяются как часть опасных:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_L}{n_L},$$

где  $n_L$  – коэффициент запаса прочности.

Конкретизируем. Для пластичных материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где  $n_T$  – коэффициент запаса прочности по пределу текучести.

Для хрупких материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B},$$

где  $n_B$  – коэффициент запаса прочности по пределу прочности.

Необходимо отметить, что  $n_B > n_T$ .

Из каких соображений назначается коэффициент запаса? Запишем обстоятельства, которые необходимо учитывать, при назначении коэффициента запаса.

1 Силы, действующие на деталь, известны не точно.

2 Механические характеристики, используемые в расчётах на прочность ( $\sigma_T$  и  $\sigma_B$ ) имеют рассеяние, а в справочной литературе приведены средние значения.

3 Расчётная схема, используемая в расчётах на прочность, отражает реальную деталь приближённо.

4 Методы (формулы) сопротивления материалов не являются абсолютно точными.

С учётом этих обстоятельств в авиапромышленности назначают коэффициент запаса  $n_T = 1,2 \dots 3,0$  (в зависимости от ответственности деталей).

### ***Расчёт на прочность***

При расчётах на прочность рассматриваются 3 задачи:

1 *Проверка прочности.*

Для того, чтобы работа детали была безопасной, необходимо

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|N|_{\text{наиб}}}{A} \leq [\sigma].$$

Эта формула устанавливает условие прочности при центральном растяжении и сжатии. Если  $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$ , то в правой части условия прочности должно быть соответствующее допускаемое напряжение.

### 2 Назначение размеров поперечного сечения.

Разрешим условие прочности относительно площади

$$A \geq \frac{|N|_{\text{наиб}}}{[\sigma]}.$$

Эта формула используется при определении размеров поперечного сечения детали.

### 3 Определение грузоподъемности.

Разрешим условие прочности относительно  $|N|_{\text{наиб}}$

$$|N|_{\text{наиб}} \leq [\sigma] \cdot A.$$

Эта формула используется при определении допустимых внешних сил. Для определения  $|N|_{\text{наиб}}$  применяется метод сечений, определяются нормальные силы и строится эпюра нормальных сил по длине детали.

## 2.6. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии

Статически неопределимыми называются конструкции, определение усилий в элементах которых, является статически неопределимой задачей. Статически неопределимые – это задачи, в которых число неизвестных усилий (внутренних усилий в стержнях и реакций опор) превышает число уравнений статики. Статически определимая

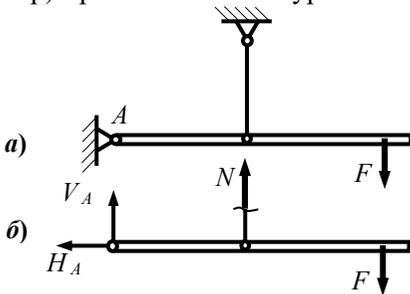


Рис. 2.9. Статически определимая система

конструкция, в отличие от статически неопределимой, при выходе из строя одного элемента превращается в механизм.

Рассмотрим статически определимую конструкцию (рис. 2.9). В реальных условиях шарнирное закрепление встречается редко, но многие случаи на практике можно привести к такому закреплению.

Слабым звеном системы является вертикальный стержень. Нормальная сила в стержне определяется методом сечений.

Конструкция находится в равновесии, поэтому для плоской системы можно записать три уравнения статики. Незвестных усилий тоже три, следовательно, система (конструкция) статически определима.

Теперь изобразим статически неопределимую систему такого же типа (рис. 2.10). Горизонтальный брус поддерживается двумя стержнями. В реальных конструкциях горизонтальный брус имеет большое сечение и считается абсолютно жёстким, то есть, недеформируемым.

Слабыми элементами системы являются вертикальные стержни 1 и 2, поэтому необходимо найти нормальные силы в этих стержнях. Применим метод сечений. Верхнюю часть мысленно отбросим и изобразим оставшуюся. Покажем силы взаимодействия оставшейся части с отброшенной частью.

Неизвестных сил четыре, уравнений статики – три, то есть это, один раз статически неопределимая задача (система). Если бы было три вертикальных стержня, то система была бы два раза статически неопределимая и так далее.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями статики. Будем их составлять так, чтобы  $H_A$  и  $V_A$  не вошли в уравнения. Таким образом мы лишаемся двух уравнений, но и двух неизвестных и остаётся только одно уравнение

$$\sum M_A = N_1 \cdot b + N_2 \cdot c - F \cdot a = 0. \quad (2.1)$$

Это уравнение, с точки зрения статики, является неразрешимым.

Недостающее уравнение составим на основании закономерности деформации конструкции, выразив которую математически, получим дополнительное уравнение. Закономерность деформаций в рассматриваемом случае заключается в том, что горизонтальный брус не деформируется. После нагружения, горизонтальный брус остаётся прямым – это закономерность деформации данной конструкции (рис. 2.11).

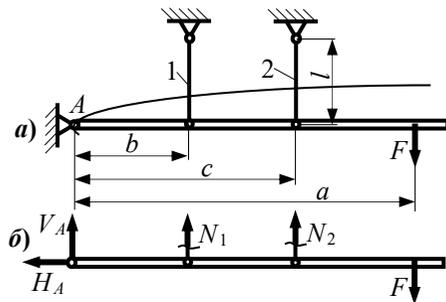


Рис. 2.10. Статически неопределимая стержневая система

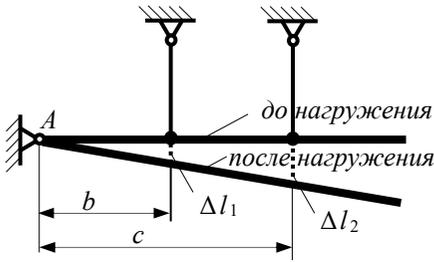


Рис. 2.11. Исследование закономерности деформаций

Вертикальные стержни, не только удлиняются, но и поворачиваются, но эти повороты чрезвычайно малы и ими можно пренебречь.

Абсолютные удлинения вертикальных стержней являются катетами подобных треугольников, поэтому можно записать

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{b}{c}$$

– это математическое выражение закономерности деформации конструкции, а по существу – недостающее второе уравнение.

Необходимо перейти от удлинений к усилиям. Воспользуемся законом Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2}.$$

Считается, что стержни изготовлены из различных материалов и имеют различные площади поперечного сечения. Подставим удлинения в уравнение 2.2:

$$\frac{N_1 \cdot E_2 \cdot F_2}{N_2 \cdot E_1 \cdot F_1} = \frac{b}{c}. \quad (2.3)$$

Это уравнение перемещений или уравнение совместности деформаций. Оно выражает тот факт, что горизонтальный брус не деформируется.

Теперь имеем два неизвестных и два уравнения (2.1 и 2.3). Решаем их совместно и после математических преобразований получаем

$$N_1 = \frac{a}{b + \frac{c^2}{b} \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1}} F, \quad N_2 = \frac{a}{c + \frac{b^2}{c} \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}} F. \quad (2.4)$$

Необходимо обратить внимание на то, что внутренние силы пропорциональны внешним силам. Это результат того, что для материала справедлив закон Гука и перемещения малы. Кроме этого внутренние силы зависят также, от соотношения жёсткостей элементов.

Используя формулы (2.4) рассмотрим особенности сопротивления статически неопределимых конструкций.

1. Пусть жёсткость первого стержня  $E_1 \cdot A_1$  увеличится, тогда  $N_1$  увеличится, а  $N_2$  – уменьшится, т.е. в статически неопределимых конструкциях при увеличении жёсткости какого-либо элемента возрастает нагрузка на этот элемент за счёт разгрузки других элементов. Следовательно, изменение жёсткости одного или нескольких элементов приводит к перераспределению внутренних усилий в элементах конструкции. В статически определимых конструкциях такого не наблюдается – там внутренние усилия не зависят от жёсткости, а определяются только геометрией, положением элемента в системе и внешними силами.

2. В статически неопределимых конструкциях часть элементов недогружены. Это нежелательное явление. Заметим, что элемент конструкции считается полностью загруженным, если в этом элементе  $\sigma_i = [\sigma]$ . Это условие выполняется только для части элементов и никаким перераспределением жёсткостей невозможно добиться полной загрузки всех элементов. Докажем это.

Пусть в рассмотренной выше системе стержни выполнены из одного материала, тогда  $E_1 = E_2 = E$ ;  $[\sigma_1] = [\sigma_2] = [\sigma]$ .

Из рис. 2.11, выражающего совместность деформаций, следует:

$\Delta l_2 > \Delta l_1$  в  $c/b$  раз, поделим обе части неравенства на  $l$ ;

$$\frac{\Delta l_2}{l} > \frac{\Delta l_1}{l} \text{ в } c/b \text{ раз;}$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  в  $c/b$  раз, умножим обе части неравенства на  $E$ :

$E \cdot \varepsilon_2 > E \cdot \varepsilon_1$  в  $c/b$  раз, следовательно, в соответствии с законом Гука напряжение  $\sigma_2 > \sigma_1$  в  $c/b$  раз, то есть, если стержни изготовлены из одного материала, то напряжение во втором стержне в  $c/b$  раз больше, чем в первом стержне.

Таким образом, возможности материала конструкции полностью не используется. Это неприятная особенность статически неопределимых систем. Однако статически неопределимые конструкции имеют и большие преимущества – они более надёжны (большая живучесть – до выхода из строя наименее нагруженного элемента). Поэтому эти системы широко применяются для наиболее ответственных узлов машин и сооружений.

3. В статически неопределимых конструкциях внутренние напряжения могут возникать и при отсутствии внешних сил – это температурные и монтажные напряжения. В статически определимых конструкциях такого не бывает.

## 2.6.1. Решение трёх основных задач применительно к статически неопределимым конструкциям

### 1) Проверка прочности.

Необходимо проверить прочность каждого элемента. Для  $i$ -ого элемента

$$\frac{|N|_i}{A_i} \leq [\sigma]_i.$$

Такую проверку необходимо сделать для всех  $n$  элементов конструкции. Если условие прочности будет выполняться для всех элементов системы, то работа конструкции в целом, будет безопасной.

### 2) Назначение размеров поперечных сечений элементов.

Для  $i$ -ого элемента

$$A_i \geq \frac{|N|_i}{[\sigma]_i}.$$

На первый взгляд, кажется всё просто, однако задача намного сложнее, т. к.  $N_i = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$  – есть функция от площадей всех элементов, поэтому, в явном виде, это неравенство не разрешимо. В статически неопределимых конструкциях часть элементов будет всегда недогружена. Задача назначения размеров поперечных сечений элементов неопределённая, то есть, имеет бесчисленное множество решений. На практике, обычно задаются соотношениями искомых площадей  $A_1 : A_2 : \dots : A_n$  и задача становится определённой. Далее задача решается методом попыток. В первой попытке берут любой элемент  $i$  и применяют к нему формулу назначения площади:

$A_i \geq \frac{|N|_i}{[\sigma]_i}$ . Площади остальных  $n - 1$  элементов определяются из за-

данного соотношения площадей в первом приближении. Но остаётся неизвестным, удовлетворяются ли условия прочности в этих  $n - 1$  элементах. Поэтому нужно проверить выполнение условий прочности во всех  $n - 1$  элементах. Для  $m$ -ого элемента

$$\frac{|N|_m}{A_m^{(1)}} \leq [\sigma]_m.$$

Если для всех элементов удовлетворяются условия прочности, то задача завершена. Но обычно, часть неравенств не удовлетворяется и поэтому приходится делать вторую, третью и т.д. попытки. Однако,

если во второй попытке исходить из наиболее нагруженного стержня, то эта попытка будет окончательной.

Наиболее нагруженный элемент имеет наибольшее отношение

$$\left( \frac{\frac{|N|_k}{A_k} - [\sigma]_k}{[\sigma]_k} \right)_{\text{наиб}}$$

тогда второе приближение запишется в виде

$$A_k^{(2)} \geq \frac{|N|_k}{[\sigma]_k} \dots \text{По } A_k^{(2)}, \text{ ис-}$$

пользуя соотношение площадей, находятся  $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \dots, A_n^{(2)}$ . Эти площади будут окончательными, так как условия прочности во всех стержнях будут выполнены автоматически.

### 3) Определение грузоподъемности.

Для определения грузоподъемности запишем формулу

$$|N|_i \leq [\sigma]_i \cdot A_i \dots$$

Из этого условия нужно определить допускаемую силу для каждого элемента. Получим совокупность  $n$  допускаемых сил. За допустимую силу для всей конструкции принимается наименьшая из них.

## 2.6.2. Монтажные напряжения в статически неопределимых системах

В статически неопределимых системах внутренние силы могут возникать даже при отсутствии внешних сил.

Изобразим систему, рассмотренную в предыдущем параграфе. Пусть второй стержень изготовлен несколько короче. Так бывает всегда, т. к. изготовить деталь абсолютно точно невозможно, здесь  $\delta$  – монтажная неточность (рис. 2.12).

Для того, чтобы собрать систему, второй стержень необходимо растянуть, а первый – сжать. После сборки в элементах системы возникнут внутренние усилия при отсутствии внешних.

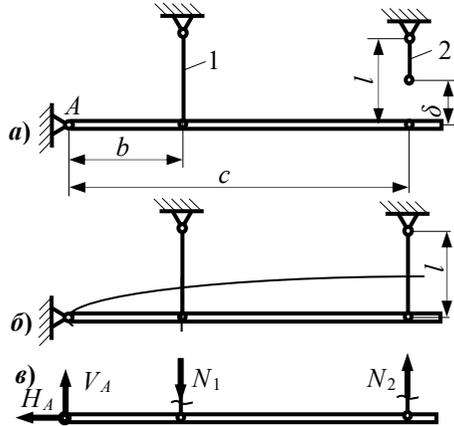


Рис. 2.12. Определение монтажных напряжений

Изобразим систему после сборки. Усилия в стержнях определяются методом сечений. Необходимо показать кинематически возможные направления системы сил. Если заранее известно направление сил (как в нашем случае), такое направление и нужно показывать.

Для расчётов на прочность, нужно знать силы  $N_1$  и  $N_2$ . У нас четыре неизвестных и три уравнения статики. Следовательно, задача один раз статически неопределима.  $H_A$  и  $V_A$  нас не интересуют, поэтому

$$-N_1 \cdot b + N_2 \cdot c = 0,$$

то есть из трёх уравнений статики мы используем только одно – это первое уравнение.

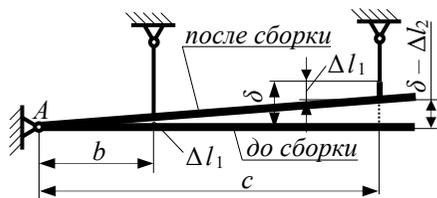


Рис. 2.13. Закономерность деформаций при монтаже

Установим закономерность деформаций системы (рис. 2.13): горизонтальный брус остаётся прямым и после сборки. Из подобия двух прямоугольных треугольников можно записать

$$\frac{\Delta l_1}{\delta - \Delta l_2} = \frac{b}{c}.$$

– уравнение совместности деформаций: оно выражает тот факт, что горизонтальный брус остаётся прямым.

Перейдём к нормальным силам:

$$\frac{\frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot A_1}}{\delta - \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot A_2}} = \frac{b}{c}.$$

– это второе уравнение.

Строго говоря, в последней формуле вместо  $l$  должно быть  $l + \Delta l$ , но в соответствии с гипотезой неизменности начальных размеров мы используем  $l$ .

Решая систему из двух уравнений, находим нормальные силы  $N_1$  и  $N_2$ , а затем  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В стержне 1 они будут сжимающими (отрицательными), а в стержне 2 – растягивающими (положительными).

Возникает вопрос: полезны или вредны, монтажные напряжения?

Они полезны, если в наиболее нагруженном элементе, складываясь с наибольшими напряжениями от внешних сил, уменьшают эти напряжения. Это происходит тогда, когда монтажные напряжения и наибольшие напряжения от внешних сил различны по знаку. Но они могут быть и вредны, если знаки монтажных и наибольших напряжений от внешних сил совпадают. В этом случае грузоподъёмность конструкции снижается.

В нашем случае, если внешняя сила направлена вниз, то монтажные напряжения вредны. Если бы стержень 2 был изготовлен длиннее, то тогда монтажные напряжения были бы полезны, так как суммарные напряжения в наиболее нагруженном втором стержне будут меньше.

На практике разрабатываются специальные приёмы наведения полезных монтажных напряжений, например, предварительно напряжённый бетон.

### 2.6.3. Температурные напряжения в статически неопределимых системах

Это второй пример, когда в статически неопределимых системах возникают напряжения и при отсутствии внешних сил.

Напомним, что при температуре  $t_1$  длина стержня  $l$ , а при температуре  $t_2$  —  $l + \Delta l_t$ , где  $\Delta l_t = \alpha l (t_2 - t_1)$ . (рис. 2.14, а, б);  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения материала стержня. Для стали  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$  м/(м·К), для медных сплавов —  $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-5}$  м/(м·К).

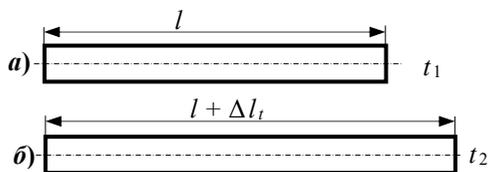


Рис. 2.14. Температурное расширение материала

Рассмотрим статически неопределимую конструкцию, в которой возникают температурные напряжения. При температуре  $t_1$  стержень длиной  $l$  вставлен без зазора и без натяга в массивное основание и жёстко соединён с ним (рис. 2.15, а). Затем температура стержня изменилась и стала  $t_2$  (рис. 2.15, б). Но связи не дают стержню удлиняться и в нём возникнут температурные напряжения.

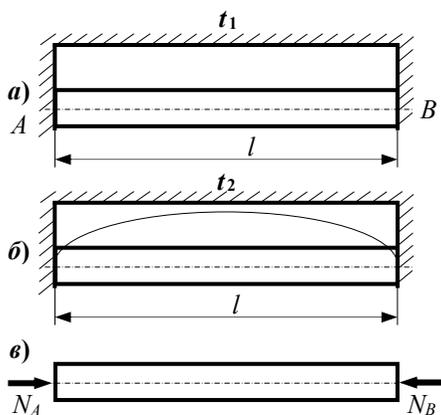


Рис. 2.15. Определение температурных напряжений

Для определения нормальных сил применим метод сечений цилиндрической поверхностью (рис. 2.15, б). Изобразим вырезанную часть отдельно (рис. 2.15, в).

Если стержень свободен и нагрет, он удлиняется, но для того, чтобы  $\Delta l = 0$ , нужно приложить сжимающую силу  $N$ .

Уравнение статики:

$$N_A - N_B = 0; \Rightarrow N_A = N_B = N.$$

Имеем одно уравнение статики и два неизвестных, то есть конструкция один раз статически неопределима.

Установим закономерность деформации: при изменении температуры длина стержня не изменяется, то есть  $\Delta l = 0$ , но  $\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_N = 0$  – уравнение деформаций.

Распишем слагаемые удлинения

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1), \quad \Delta l_N = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Подставляя значения удлинений в уравнение деформаций, получаем

$$\alpha \cdot l \cdot (t_2 - t_1) + \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = 0,$$

Откуда  $N = -E \cdot A \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)$ . Теперь определяем температурные напряжения  $\sigma_t = \frac{N}{A}$ .

$$\sigma_t = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_t = -E \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

– это формула для температурных напряжений.

Из формулы видно, что температурные напряжения не зависят от длины стержня. При нагреве, в стержне возникают сжимающие, а при охлаждении – растягивающие напряжения.

Какой может быть величина температурных напряжений? Например, рассмотрим трамвайный рельс, который монтировали летом, в  $30^\circ$  жару. Какие же напряжения будут в нём зимой, в  $30^\circ$  мороза?  $t_1 = 30^\circ$ ;  $t_2 = -30^\circ$ .

$$\sigma_t = -2 \cdot 10^5 \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot (-30^\circ - 30^\circ) = 150 \text{ МПа.}$$

Фактически, соединение рельсов, нельзя считать абсолютно жёстким, поэтому напряжения будут несколько меньше.

Температурные напряжения могут быть, только в статически неопределимых системах. В статически определимых системах они не возникают.

#### 2.6.4. Расчёт статически неопределимых систем по предельным нагрузкам

Для статически неопределимых систем применяются два метода расчёта на прочность:

- 1) расчёт по допускаемым напряжениям;
- 2) расчёт по предельным нагрузкам.

Рассмотрим расчёт двумя методами на примере (рис. 2.16).

Пусть  $c = 2 \cdot b$  для того, чтобы можно было сопоставить два метода. Будем считать, что  $A_1 = A_2 = A$ , а материал стержней одинаковый, то есть  $E_1 = E_2 = E$ ,  $[\sigma]_1 = [\sigma]_2 = [\sigma]$ .

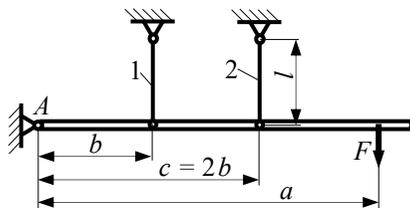


Рис. 2.16. Расчёт на прочность статически неопределимых систем

**1) Расчёт по допускаемым напряжениям.** Мы уже его рассматривали во втором разделе данного параграфа, но здесь будет, другой подход.

Расчёт по допускаемым напряжениям применяется для конструкций, в которых остаточные деформации недопустимы, например, лопатки газовых турбин.

Формулировка метода: *при расчёте по допускаемым напряжениям за опасные принимаются такие внешние силы, при которых хотя бы в одном, элементе появляются пластические деформации, то есть наибольшие напряжения в системе достигают предела текучести.*

В соответствии с этой формулировкой опасную силу обозначаем через  $F_L$ . Самое большое напряжение возникает в стержне 2. При  $F_2 = F_L$  напряжение  $\sigma_2 = \sigma_T$ . Далее нужно выразить  $\sigma_2$  через  $F$ . Ранее было получено

$$N_2 = \frac{a}{c + \frac{b^2}{c} \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}} F,$$

тогда

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{a}{A \cdot \left( 2b + \frac{b^2}{2b} \cdot \frac{E \cdot A}{E \cdot A} \right)} F = 0,4 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{F}{A}, \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_\tau = 0,4 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{F_L}{A}, \quad \Rightarrow \quad F_L = 2,5 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sigma_\tau \cdot A.$$

Но  $F \leq \frac{F_L}{n_\tau}$  и  $[\sigma] = \frac{\sigma_\tau}{n_\tau}$ , тогда

$$F \leq 2,5 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sigma_\tau \cdot A$$

и переходя к предельному состоянию, получим

$$[F] = 2,5 \cdot \frac{b}{a} \cdot [\sigma] \cdot A.$$

**2) Расчёт по предельным нагрузкам.** Его применяют для конструкций, в которых некоторые остаточные деформации не нарушают нормальные условия работы конструкции (рис. 2.17), например, настенный кронштейн в цехе, который служит силовой конструкцией.

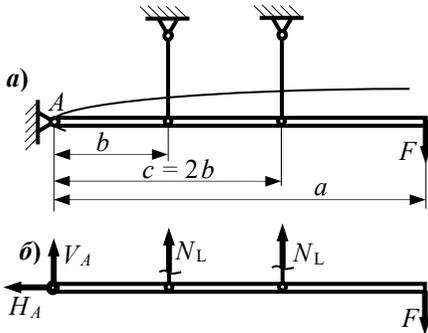


Рис. 2.17. Расчёты на прочность по предельным нагрузкам

В расчётах по предельным нагрузкам материал считается идеально пластичным. Идеально пластичным называется материал с такой диаграммой напряжений (рис. 2.18) (сплошная линия). Фактическая диаграмма проходит по пунктирной линии. Этот метод применяется для пластичных материалов.

Формулировка метода: *При расчёте по предельным нагрузкам за опасные (предельные) принимаются такие внешние силы, при которых конструкция в целом начинает течь, то есть становится изменяемой:*

Исходя из этого, найдём  $F_L$ . Проследим за работой конструкции (см. рис. 2.17) с ростом  $F$ . Напряжения достигнут предела текучести, в первую очередь, в стержне 2. После того, как  $\sigma_2 = \sigma_T$ , дальнейший рост силы будет воспринимать только стержень 1. Но, так будет до тех пор, пока напряжения в стержне 1 не достигнут предела текучести. Дальнейший рост силы, конструкция не будет воспринимать, т. к. она стала механизмом. Это и будет предельное состояние при расчёте по предельным нагрузкам, то есть  $F = F_L$  тогда, когда  $\sigma_2 = \sigma_1 = \sigma_T$  (см. рис. 2.17).

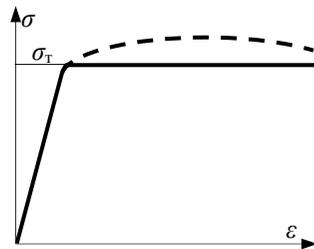


Рис. 2.18. Диаграмма напряжений идеально пластичного материала

Составим уравнение статики в момент достижения предельного состояния:

$$\sigma_T \cdot A \cdot b + \sigma_T \cdot A \cdot 2b - F_L \cdot a = 0.$$

Эта система статически определима. Найдём  $F_L$ .

$$F_L = 3 \frac{b}{a} \cdot \sigma_T \cdot A.$$

– опасная сила при расчёте по предельным нагрузкам.

Но  $F \leq \frac{F_L}{n_T}$  и  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ . После подстановки и

преобразований получим:

$$[F] = 3 \frac{b}{a} \cdot [\sigma] \cdot A$$

– допускаемая сила при расчёте по предельным нагрузкам. Эта сила больше, чем при расчёте по допускаемым напряжениям в  $3/2,5 = 1,20$  раза.

Различные значения допускаемых сил получаются только для статически неопределимых систем. Для статически определимых систем (рис. 2.19), результаты будут одинаковыми. Покажем это:

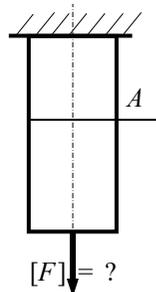


Рис. 2.19. Сравнение предельных нагрузок

по допускаемым напряжениям

$$[F] = [\sigma] \cdot A.$$

по предельным нагрузкам

$$F \leq [F] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}};$$

$$F_{\tau} = \sigma_{\tau} \cdot A; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}};$$

$$[F] = [\sigma] \cdot A.$$

При расчёте по предельным нагрузкам не обязательно иметь упругое решение с тем, чтобы рассмотреть ход роста деформаций. Иногда более удобным является рассмотрение всех возможных вариантов предельных состояний. Расчётом каждой схемы (статически определимой) можно установить порядок выхода стержней за предел текучести.

Пример (рис. 2.20, а). Дано  $A_1 \neq A_2 \neq A_3$ ,  $\sigma_{\tau_1} \neq \sigma_{\tau_2} \neq \sigma_{\tau_3}$ . Необходимо определить  $[F]$ .

Изображаем возможные варианты схем предельных состояний (рис. 2.20, б-г).

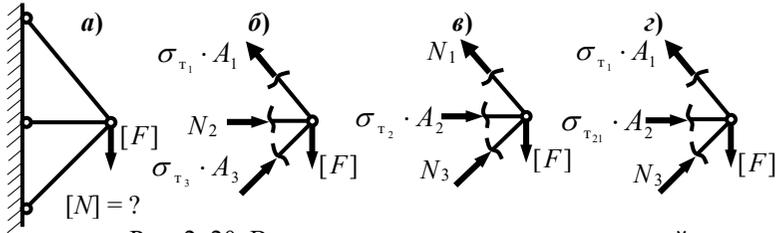


Рис. 2. 20. Варианты схем предельных состояний

Из уравнений статики для каждой схемы определяем  $[F]_1$ ,  $[F]_2$ ,  $[F]_3$ . . Из всех схем вероятной будет та, в которой  $[F]$  будет наименьшей. Полученное значение и является искомой грузоподъёмностью.

Таким образом, расчёт по предельным нагрузкам позволяет спроектировать более экономичную статически неопределимую систему.

## 2.7. Учёт собственного веса в расчётах на прочность

Нужно ли учитывать собственный вес при расчёте детали (стержня), испытывающей центральное растяжение (сжатие)? Рассмотрим наиболее тяжёлый случай, когда растягивающие силы и сила веса создают напряжения одного знака (рис. 2.21, а). Начало координат поместим в точке приложения силы  $F$ . Найдём нормальную силу в сечении  $z$  методом сечений. Покажем силы, действующие на

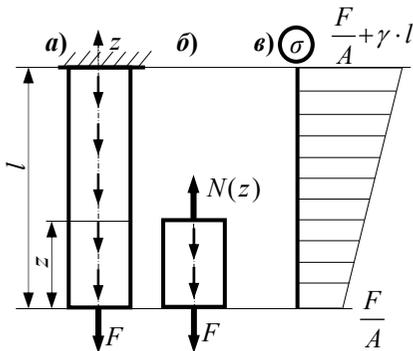


Рис. 2.21. Расчёты на прочность с учётом собственного веса

нижнюю часть (рис. 2.21, б):  $w(z)$  – сила веса;  $N(z)$  – нормальная сила в данном сечении  $z$ ;  $w(z) = \gamma \cdot A \cdot z$ , где  $\gamma$  – сила веса единицы объёма. Нижняя часть под действием всех сил находится в равновесии.

Уравнение статики:

$N(z) - \gamma \cdot A \cdot z - F = 0$ , отсюда

$$N(z) = \gamma \cdot A \cdot z + F.$$

Определяем напряжения

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot z.$$

Видно, что напряжения от сечения к сечению изменяются по линейному закону.

Изобразим эпюру напряжений (рис. 2.21, в), чтобы определить, в каком сечении действуют наибольшие напряжения. После построения эпюры  $\sigma$  можно ответить на вопрос – чему равно наибольшее напряжение

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l.$$

Запишем условие прочности:

$$\sigma_{\text{наиб}} \leq [\sigma], \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \leq [\sigma].$$

Перепишем его в виде

$$\frac{F}{A} \leq [\sigma] - \gamma \cdot l.$$

Это окончательное условие прочности с учётом собственного веса, когда знак внешних сил совпадает со знаком силы веса.

Когда нужно учитывать собственный вес? Его нужно учитывать тогда, когда наибольшее напряжение от веса сравнимо с допусаемым напряжением, то есть если  $\frac{\gamma \cdot l}{[\sigma]} > 5\%$ . Это может быть в двух случаях.

1) При большой длине детали (бруса).

Пример: стержень выполнен из стали длиной  $l = 10$  м,  $\gamma = 78,5$  кН/м<sup>3</sup>,  $[\sigma] = 160$  МПа.

$$\frac{\gamma \cdot l}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{78,5 \cdot 10^3 \cdot 10}{160 \cdot 10^6} \cdot 100\% = 0,491\%.$$

Несмотря на большую длину, собственный вес приводит к изменению правой части менее чем на 0,5%. В этом случае собственный вес в расчётах не учитывается.

2) Для материалов, у которых допусаемое напряжение мало.

Пример: кирпичная кладка (рис. 2.22). Будем рассматривать кирпичный столб высотой  $l = 60$  м,  $\gamma = 18,0$  кН/м<sup>3</sup>,  $[\sigma] = 12$  МПа (кирпичная кладка может работать только на сжатие).

$$\frac{\gamma \cdot l}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{18,0 \cdot 10^3 \cdot 60}{12 \cdot 10^6} \cdot 100\% = 9,00\%.$$

Это уже существенная величина и расчёт необходимо вести, с учётом веса. Поэтому при расчёте на прочность кирпичной кладки собственный вес, обязательно учитывается.

При расчётах на прочность в машиностроении сила веса, как правило, не учитывается.

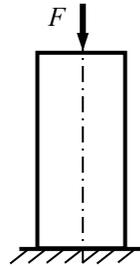


Рис. 2.22. Кирпичная кладка

## 2.8. Вопросы для самопроверки

Что такое расчётная схема? Дайте определение гипотезы плоских сечений. Что такое абсолютное и относительное удлинение (укорочение)? Назовите основные характеристики пластичных и хрупких материалов. Объясните физический и геометрический смысл модуля продольной упругости. Что такое коэффициент Пуассона, зоны упругости, общей текучести, упрочнения? Что такое площадка текучести? Какое явление называется наклёпом? Какие задачи решаются при расчётах на прочность? Какие системы называются статически определимыми и какие – статически неопределимыми? Что такое степень статической неопределимости системы? Каким образом раскрывается статическая неопределимость? В каких случаях проводится расчёт по допускаемым напряжениям и в каких – по предельным нагрузкам? Когда нужно учитывать собственный вес?

## 3. СДВИГ

### 3.1. Основные понятия о сдвиге

Будем рассматривать кручение тонкостенной трубки (рис. 3.1). Трубка закручивается парой сил.

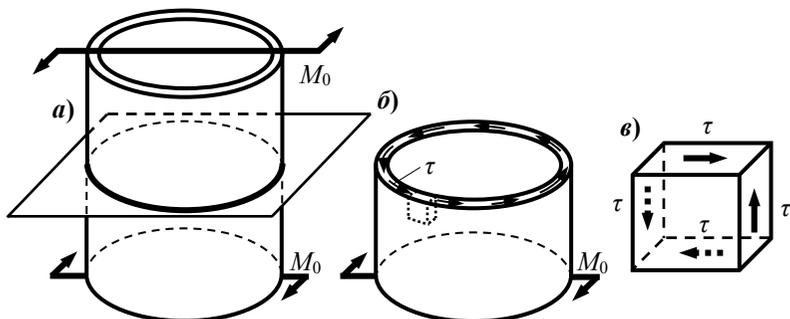


Рис. 3.1. Кручение тонкостенной трубки

Рассекаем трубку плоскостью, перпендикулярной её оси. Верхнюю часть отбрасываем и рассматриваем нижнюю часть.

В сечении действуют только касательные напряжения  $\tau$ , нормальных напряжений в сечении не будет. Вырежем элемент из стенки трубки. Пусть это будет элементарный кубик (элемент рассматривается в пределе, когда длина рёбер стремится к нулю).

Покажем кубик и напряжения, действующие на него. На нижней грани касательное напряжение будет таким же, как и на верхней грани, но противоположного направления. На передней и задней гранях напряжений нет. Если предположить, что на боковых гранях тоже нет напряжений, то элемент не будет находиться в равновесии. Поэтому на боковых гранях должны быть касательные напряжения, создающие момент противоположного направления.

Таким образом, мы пришли к закону парности касательных напряжений. Из рисунка видно: *касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены, либо оба к ребру, либо оба от ребра.*

По существу – это закономерность статики.

*Напряжённое состояние, при котором по четырём граням элемента действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.*

Бывает сдвиг, когда наравне с касательными напряжениями есть небольшие нормальные напряжения. Например, заклёпка, где наравне с касательными напряжениями есть небольшие нормальные напряжения.

Пример (рис. 3. 2): если условие  $\Delta \ll h$  выполняется, то будет сдвиг, а если это условие не выполняется – кроме сдвига, будет ещё изгиб.

Рассмотрим деформации при сдвиге (рис. 3.3).

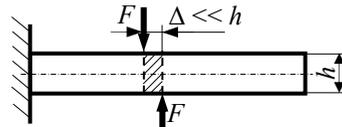


Рис. 3.2. Нагружение, вызывающее сдвиг

При сдвиге высота элемента не меняется, так как нет нормальных напряжений. Здесь  $\delta$  – абсолютный сдвиг, но он не может служить мерой интенсивности сдвига (зависит от размеров элемента), поэтому введём относительный сдвиг.

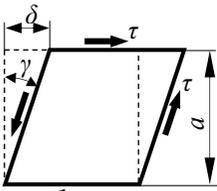


Рис. 3.3. Деформации при сдвиге

$\frac{\delta}{a}$  – относительный сдвиг, является мерой интенсивности сдвига,  $\gamma$  – угол сдвига,  $\frac{\delta}{a} = \text{tg } \gamma \approx \gamma$  (в рад) – так как перемещения  $\delta$  очень малы по сравнению с  $a$ .

Следовательно, относительный сдвиг равен углу сдвига, поэтому в дальнейшем будем говорить – угол сдвига или угловая деформация.

Как связаны между собой  $\tau$  и  $\gamma$ ? Этот вопрос изучался опытным путём, но его можно решить и теоретически, исходя из закона Гука.

Было установлено

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

где  $G$  – модуль сдвига или модуль упругости при сдвиге (модуль поперечной упругости, модуль упругости второго рода).

Это третья упругая постоянная материала ( $E$ ,  $\mu$ ,  $G$ ). Каковы значения  $G$ ? Для стали –  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа (в среднем).

**Закон Гука при сдвиге:** угол сдвига пропорционален касательным напряжениям.

Далее запишем условие прочности при сдвиге

$$\tau_{\text{наиб}} \leq [\tau],$$

где  $[\tau] = (0,5 \dots 0,6) \cdot [\sigma]$ .

### **3.2. Вопросы для самопроверки**

Что такое чистый сдвиг? Как формулируется закон парности касательных напряжений? В каких деталях чаще всего реализуется сдвиг? Как определяются напряжения при сдвиге? Что такое модуль упругости при сдвиге и как его определяют? Как формулируется закон Гука при сдвиге? Как решаются задачи расчёта на прочность при сдвиге?

## 4. ТЕОРИИ НАПРЯЖЁННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

### 4.1. Основные сведения о напряжённом состоянии детали в точке

Рассмотрим деталь произвольной формы, нагруженную произвольной самоуравновешенной системой сил, и точку  $A$  детали, напряжения в которой, нас интересуют (рис. 4. 1,  $a$ ). Через точку  $A$

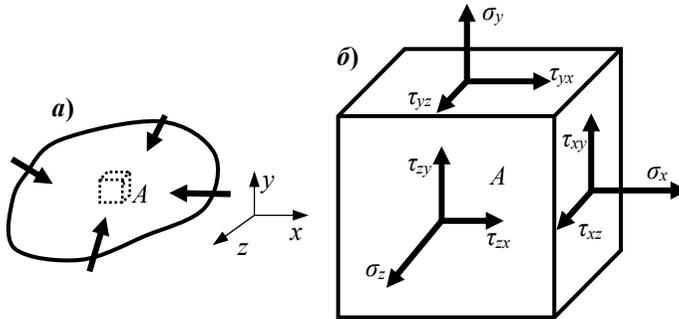


Рис. 4.1. Напряжённое состояние детали в точке

можно провести бесконечное множество сечений, напряжения на которых, в общем случае, различны. С поворотом секущей плоскости, напряжения меняются определённым образом.

*Совокупность напряжений, действующих на бесконечном множестве площадок, проходящих через данную точку нагруженной детали, называют **напряжённым состоянием детали в точке**.*

Исследовать напряжённое состояние – значит получить зависимости, позволяющие определить напряжения на любой площадке по минимальным исходным данным. В теории упругости доказывается, что это можно сделать, если известны напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках. Следовательно, напряжённое состояние детали в точке, задаётся напряжениями на трёх взаимно перпендикулярных площадках.

Выберем правую винтовую систему координат и в окрестности точки  $A$  вырежем бесконечно малый элемент, грани которого перпендикулярны координатным осям и покажем его отдельно (рис. 4. 1,  $б$ ).

Покажем напряжения на гранях элемента:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  – нормаль-

ные напряжения ( $\sigma_x \perp yz, \parallel x$ );  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ , – касательные напряжения ( $\tau_{xy}$  – касательное напряжение на площадке, перпендикулярной оси  $x$  и направленное параллельно оси  $y$ ).

Элемент должен находиться в равновесии, поэтому напряжения на противоположных гранях должны быть такими же по величине и противоположными по направлению. Таким образом, на трёх взаимно перпендикулярных площадках действуют 9 напряжений или 9 компонентов напряжённого состояния детали в точке. Выпишем их в виде тензора напряжений

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

По закону парности касательных напряжений:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  – то есть из 9 компонентов останется только 6:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Зная эти 6 напряжений, можно определить напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку.

Если площадку поворачивать, то напряжения на ней меняются, и всегда можно найти такое положение площадки, когда касательные напряжения на ней равны нулю.

**Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными, а напряжения, действующие на этих площадках, называются главными напряжениями.**

В теории упругости доказывается, что при любом напряжённом состоянии, имеется как минимум три главных взаимно перпендикулярных площадки.

Покажем бесконечно малый элемент, грани которого параллельны главным площадкам (рис. 4. 2). В этом случае (если известны главные напряжения и положение главных площадок), напряжения на любой площадке можно определить, имея три главных напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причём  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то есть  $\sigma_1$  – алгебраически наибольшее напряжение ( $\sigma_1 = \sigma_{\text{наиб}}$ ),  $\sigma_3$  – алгебраически наименьшее напряжение ( $\sigma_3 = \sigma_{\text{наим}}$ ).

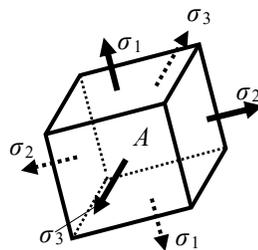


Рис. 4.2. Главные напряжения

Какие бы площадки, проходящие через данную точку  $A$  мы не

рассматривали, напряжения на них, не могут быть больше  $\sigma_1$  и меньше  $\sigma_3$ .

В частных случаях, некоторые из главных напряжений, могут быть равными нулю. В связи с этим различают 3 вида напряжённых состояний (рис. 4.3).

I Линейное напряжённое состояние (ЛНС) (рис. 4.3, а):

- 1)  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  – центральное растяжение;
- 2)  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$  – центральное сжатие.

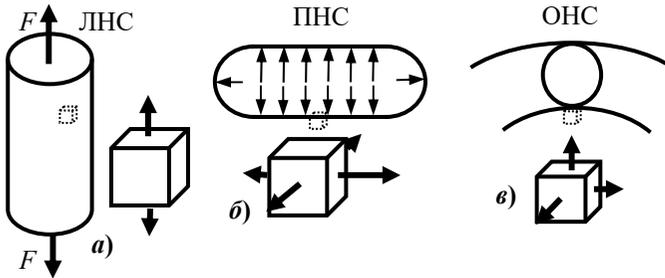


Рис. 4.3. Виды напряжённых состояний

II Плоское напряжённое состояние (ПНС) (рис. 4.3, б):

- 1)  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ ;
- 2)  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ ;
- 3)  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ .

III. Объёмное напряжённое состояние (ОНС) (рис. 4.3, в):

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0.$$

#### 4.2. Напряжения на произвольной площадке при линейном напряжённом состоянии

Рассмотрим деталь произвольной формы, нагруженную уравновешенной системой сил (рис. 4.4). Пусть, хотя бы в одной точке  $A$  этой детали, реализуется линейное напряжённое состояние.

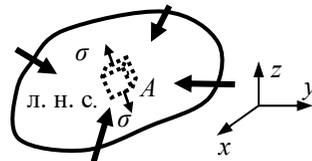


Рис. 4.4. Линейное напряжённое состояние

Рассмотрим брус при центральном растяжении или сжатии (рис. 4.5, а). Покажем, что при центральном растяжении действует лишь одно из главных напряжений. Вырежем в окрестности произвольной точки  $B$  элемент, верхняя и нижняя грани которого перпендикулярны оси бруса. На этих гранях действуют только нормальное напряжение, касательных напряжений нет. На

боковых гранях, нет ни нормальных, ни касательных напряжений (слои друг на друга не давят), то есть, имеет место линейное напряжённое состояние (рис. 4.5, б).

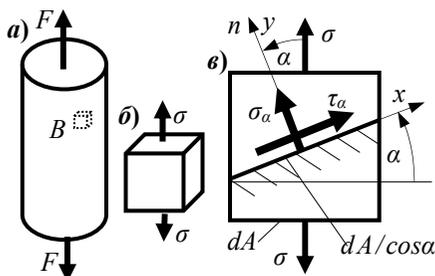


Рис. 4.5. Напряжения на произвольной площадке при ЛНС

по ходу часовой стрелки – отрицательный. Если обозначить через  $dA$  площадь нижней грани элемента, то площадь наклонной площадки будет равна  $dA/\cos\alpha$ .

Покажем нормальное  $\sigma_\alpha$  и касательное  $\tau_\alpha$  напряжения, действующие на площадке  $\alpha$ , и выразим их через  $\sigma$ . Направим ось  $y$  по направлению  $\sigma_\alpha$ , а ось  $x$  – по направлению  $\tau_\alpha$  и составим уравнения равновесия для нижней части элемента

$$\sum y = \sigma_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} - \sigma \cdot dA \cdot \cos\alpha = 0, \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha.$$

$$\sum x = \tau_\alpha \cdot \frac{dA}{\cos\alpha} - \sigma \cdot dA \cdot \sin\alpha = 0, \quad \Rightarrow \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Таким образом, мы получили формулы для определения напряжений на произвольной площадке при линейном напряжённом состоянии.

Проанализируем полученные формулы.

Формула для нормальных напряжений:  $\sigma_\alpha = |\sigma|_{\text{наиб}} = \sigma$  при  $\cos^2\alpha = 1$  или при  $\cos\alpha = \pm 1$ ;  $\alpha = \pm n\pi$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то есть при любых  $n$  попадаем на те же главные площадки. Следовательно, наибольшие нормальные напряжения действуют на главных площадках.

Покажем произвольную площадку, проходящую через данную точку. Положение этой площадки (рис. 4.5, в) определяется нормалью  $n$ , то есть углом  $\alpha$  ( $\sigma \wedge \sigma_\alpha$ ). Рассмотрим действие верхней части элемента на нижнюю. Введем следующее правило знаков для угла  $\alpha$ : при повороте нормали против хода часовой стрелки угол положительный, а при повороте

при повороте нормали против хода часовой стрелки угол положительный, а при повороте

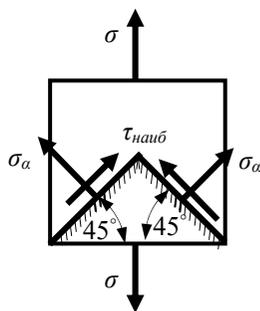


Рис. 4.6. Наибольшие касательные напряжения при ЛНС

Формула для касательных напряжений даёт:

$$\tau_{\alpha} = |\tau|_{\text{наиб}} = \sigma/2, \text{ при } \sin 2\alpha = \pm 1; 2\alpha = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} \cdot n,$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Следовательно, какое бы  $n$  не брали, всегда будем попадать на одну из площадок, наклонённых к главным площадкам под углом  $45^\circ$  (рис. 4.6). Строго говоря,  $|\tau|_{\text{наиб}}$  действуют по конической поверхности.

### 4.3. Напряжения на произвольной площадке при плоском напряжённом состоянии

Рассмотрим произвольно нагруженное тело. Выберем точку  $A$  в которой имеет место плоское напряжённое состояние (рис. 4.7, а). Вырежем в окрестности точки элемент, грани которого параллельны главным площадкам, и покажем его отдельно (рис. 4.7, б).

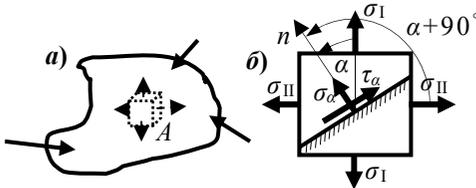


Рис. 4.7. Напряжения на произвольных площадках при ПНС

Изобразим произвольную площадку и напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$  на ней, которые нам необходимо определить. Элемент в этой точке, нагружен лишь по четырём граням.

Обозначим через  $\alpha$  угол между наибольшим из главных напряжений  $\sigma_I$  и нормалью  $n$  к площадке, тогда угол между напряжением  $\sigma_{II}$  и нормалью  $n$  будет равен  $\alpha + 90^\circ$ .

В сопротивлении материалов рассматриваются линейные системы, поэтому напряжения (деформации, перемещения) от группы сил можно найти как сумму напряжений (деформаций, перемещений) от каждой силы в отдельности (рис. 4.8). Этот принцип называется

В сопротивлении материалов рассматриваются линейные системы, поэтому напряжения (деформации, перемещения) от группы сил можно найти как сумму напряжений (деформаций, перемещений) от каждой силы в отдельности (рис. 4.8). Этот принцип называется

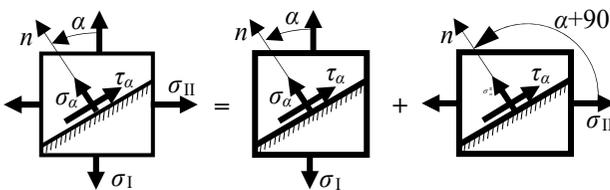


Рис. 4.8. Суммирование напряжений

принципом независимости действия сил или принципом суперпозиции.

Следовательно,  $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^I + \sigma_\alpha^{II}$ ,

где  $\sigma_\alpha^I = \sigma_I \cdot \cos^2 \alpha$ ,  $\sigma_\alpha^{II} = \sigma_{II} \cdot \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma_{II} \cdot \sin^2 \alpha$ , тогда

$$\sigma_\alpha = \sigma_I \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{II} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Аналогично

$$\tau_\alpha = \tau_\alpha^I + \tau_\alpha^{II},$$

где  $\tau_\alpha^I = \frac{\sigma_I}{2} \cdot \sin 2\alpha$ ,  $\tau_\alpha^{II} = \frac{\sigma_{II}}{2} \cdot \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma_{II}}{2} \cdot \sin 2\alpha$ ,

тогда

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Таким образом, мы получили формулы преобразования напряжений при повороте от главных площадок при плоском напряжённом состоянии.

Проанализируем полученные формулы

$$\tau_\alpha = |\tau|_{\text{наиб}} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}, \text{ при } \sin 2\alpha = \pm 1;$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} \cdot n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Следовательно, наибольшие касательные напряжения равны полуразности главных и действуют на площадках, равно наклонённых к главным (рис. 4.9).

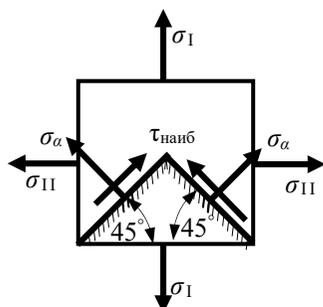


Рис. 4.9. Наибольшие касательные напряжения при ПНС

#### 4.4. Графический способ определения напряжений при плоском напряжённом состоянии. Круги Мора

В предыдущем параграфе были получены формулы для определения напряжений на произвольной площадке при плоском напряжённом состоянии

$$\sigma_\alpha = \sigma_I \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{II} \cdot \sin^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Если в этих формулах исключить  $\alpha$ , то получим зависимость  $\tau_\alpha = f(\sigma_\alpha)$ , которая в осях  $\sigma$ ,  $\tau$  отображает окружность с центром на оси  $\sigma$ . О.Х. Мор использовал это обстоятельство для определения напряжений графическим способом. При этом можно решить два

вида задач.

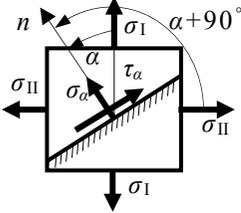


Рис. 4.10. Напряжения на произвольной площадке при ПНС

**I задача (прямая).**

Дано:  $\sigma_I, \sigma_{II}, \alpha$  (рис. 4.10).

Требуется определить:  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ .

Изложим последовательность операций, а затем докажем, что они правомерны.

Проведём оси  $\sigma, \tau$  (рис. 4.11) и отложим отрезки, равные главным напряжениям  $OA = \sigma_I, OB = \sigma_{II}$ . На отрезке  $BA$ , как на диаметре, построим окружность с центром в точке  $C$ . Полученная окружность, называется кругом Мора или кругом напряжений. Проведём из центра окружности  $C$  радиус под углом  $2\alpha$  от оси  $\sigma$  против хода часовой стрелки (так как считаем, что угол  $\alpha$  положительный) и докажем, что координаты полученной точки  $D_\alpha$  соответствуют напряжениям на площадке  $\alpha$ , то есть  $OK_\alpha = \sigma_\alpha$ .

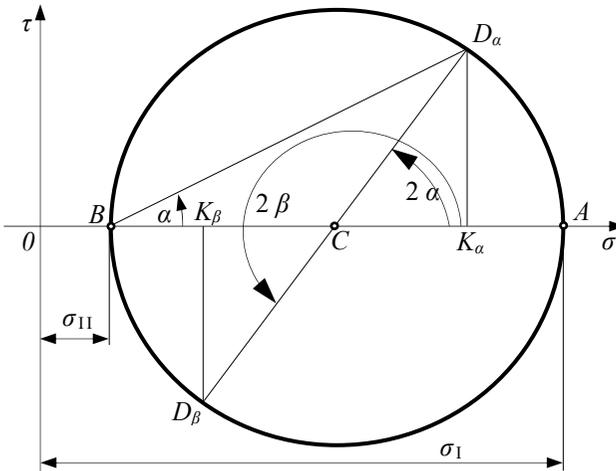


Рис. 4.11. Графическое определение напряжений на произвольной площадке

$$\begin{aligned}
 OK_\alpha &= OC + CK_\alpha = \frac{OA + OB}{2} + \frac{OA - OB}{2} \cdot \cos 2\alpha = \\
 &= OA \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + OB \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma_I \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{II} \cdot \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

$$K_{\alpha} D_{\alpha} = CD_{\alpha} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}}}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad \text{то есть } K_{\alpha} D_{\alpha} = \tau_{\alpha}.$$

Итак, мы доказали, что с помощью круга Мора, можно определить напряжения на произвольной площадке  $\alpha$ . Следовательно, задача решена.

Точку  $D_{\alpha}$  можно было найти также с помощью хорды, проведённой из точки  $B$  под углом  $\alpha$  к оси  $\sigma$ .

Графический способ Мора менее точный, чем аналитический. Однако, графическая интерпретация плоского напряжённого состояния детали в точке является весьма удобной для анализа. Из круга Мора видно, что:  $\sigma_{\text{I}} = \sigma_{\text{наиб}}$ ,  $\sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{наим}}$ ,  $|\tau_{\alpha}|_{\text{наиб}} = \frac{\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}}}{2}$ , причём, наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, равно наклонённых к главным площадкам.

Теперь найдём на круге Мора точку, соответствующую площадке  $\beta$ , перпендикулярной площадке  $\alpha$ , т.е.  $\beta = \alpha + 90^{\circ}$ . Проведём радиус, под углом  $2\beta = 2\alpha + 180^{\circ}$  и получим точку  $D_{\beta}(\sigma_{\beta}, \tau_{\beta} = -\tau_{\alpha})$ .

Важный вывод: точки, соответствующие двум взаимно перпендикулярным площадкам, лежат на концах одного диаметра круга Мора.

### II задача (обратная).

Дано:  $\sigma_{\alpha}$ ,  $\tau_{\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta}$ ,  $\tau_{\beta}$  (рис. 4.12). Требуется определить:  $\sigma_{\text{I}}$ ,  $\sigma_{\text{II}}$ ,  $\alpha_0$ .

Эта задача имеет для практики более важное значение, чем прямая задача.

Проводим координатные оси (рис. 4.13)  $\sigma$ ,  $\tau$  и строим в этих осях точки  $D_{\alpha}(\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ ,  $D_{\beta}(\sigma_{\beta}, \tau_{\beta})$ . Так как эти точки соответствуют взаимно перпендикулярным площадкам, то они лежат на концах одного диаметра круга Мора. Соединяем эти точки и определяем положение центра круга  $C$ . Имея центр и диаметр, можно провести единственную окружность. Задача решена.

$$OA = \sigma_{\text{I}}, \quad OB = \sigma_{\text{II}}.$$

Проведём хорду  $BD_{\alpha}$  и получим угол  $\alpha$  от  $\sigma_{\text{I}}$  до  $\sigma_{\alpha}$ , а нам нужен угол  $\alpha_0$  от  $\sigma_0$  до  $\sigma_{\text{I}}$ . Следовательно,  $\alpha_0 = -\alpha$ .

Проводим хорду  $BD'_{\alpha}$ , где  $D'_{\alpha}$  зеркальное отображение точки  $D_{\alpha}$  относительно горизонтальной оси. Угол  $ABD'_{\alpha}$  и есть искомый угол  $\alpha_0$ .

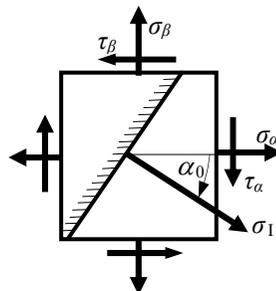


Рис. 4.12. Главные площадки и главные напряжения



#### 4.5. Напряжения на произвольной площадке при объёмном напряжённом состоянии

Рассмотрим деталь произвольной формы, нагруженную уравновешенной системой сил, и точку  $A$  детали, в которой имеет место объёмное напряжённое состояние (рис. 4.14), то есть  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ ,  $\sigma_3 \neq 0$ .

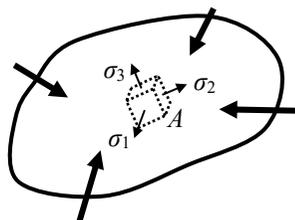


Рис. 4.14. Объёмное напряжённое состояние

Изобразим элемент отдельно (рис. 4.15, а). Покажем произвольную площадку, проходящую через точку  $A$ . Нормаль  $n$  к площадке образует с главными напряжениями углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  (рис. 4.15, б). Покажем напряжения на этой площадке  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$  (рис. 4.15, в).

Задача сводится к следующей: известны  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Требуется определить:  $p_\alpha$ ,  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ .

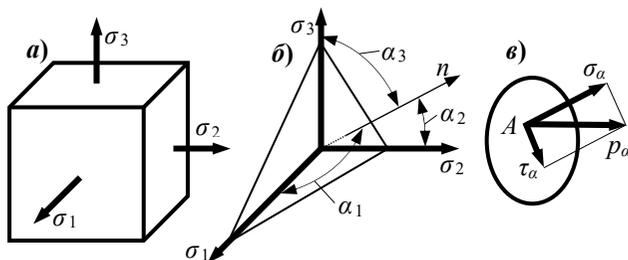


Рис. 4.15. Определение напряжений на произвольных площадках объёмном напряжённом состоянии

Вспользуемся принципом суперпозиции, то есть представим напряжения на произвольной площадке, как сумму напряжений от каждого главного напряжения в отдельности

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{(1)} + \sigma_\alpha^{(2)} + \sigma_\alpha^{(3)}, \quad \text{где } \sigma_\alpha^{(i)} = \sigma_i \cdot \cos^2 \alpha_i,$$

тогда  $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3$ .

Касательные напряжения, вызванные каждым главным напряжением, по направлению не совпадают, поэтому необходимо рассматривать векторную сумму

$$\bar{\tau}_\alpha = \bar{\tau}_\alpha^{(1)} + \bar{\tau}_\alpha^{(2)} + \bar{\tau}_\alpha^{(3)}.$$

Модуль  $\tau_\alpha$  можно определить как

$$\tau_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2}, \quad \text{где} \quad p_\alpha^2 = \sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3.$$

тогда

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cdot \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}.$$

Для определения направления  $\tau_\alpha$  в каждом случае необходимо рассматривать конкретную задачу.

Пример: определим напряжения на октаэдрической площадке, то есть на площадке, равно наклонённой к главным —  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{\text{окт}}$ .

Из линейной алгебры известно, что  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ , откуда  $\cos^2 \alpha_{\text{окт}} = 1/3$ .

После подстановки и вычислений получаем

$$\sigma_{\alpha_{\text{окт}}} = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\tau_{\alpha_{\text{окт}}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}.$$

## 4.6. Круги Мора при объёмном напряжённом состоянии

Для объёмного напряжённого состояния можно также изобразить круг Мора.

Изобразим элемент, испытывающий объёмное напряжённое состояние, грани которого являются главными площадками. Вначале рассмотрим наклонные площадки, параллельные  $\sigma_1$  то есть  $\cos \alpha_1 = 0$  (рис. 4.16, а). Для таких площадок  $\sigma_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \cos^2 \alpha_3$ . Учтём, что  $\alpha_2 + \alpha_3 = 90^\circ$ , тогда  $\cos \alpha_3 = \sin \alpha_2$  и

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cdot \sin^2 \alpha_2$$

— это известная формула для плоского напряжённого состояния, геометрической интерпретацией которого будет круг Мора между  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Аналогично рассматривая площадки, параллельные  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  получим ещё два круга Мора (рис. 4.15, б).

Итак, наклонным площадкам, параллельным одному из главных напряжений, соответствуют точки на одной из окружностей. Но есть площадки, непараллельные ни одному из главных напряжений. Этим площадкам соответствуют точки в заштрихованной области. Будем рассматривать только верхнюю часть, т.к. не оговорено направление касательных напряжений.

Проанализируем пределы изменения напряжений:

$$\sigma_{\text{наиб}} = \sigma_1, \quad \sigma_{\text{наим}} = \sigma_3, \quad \tau_{\text{наиб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Следовательно, в случае объёмного напряжённого состояния нормальные напряжения на произвольных площадках не могут быть больше  $\sigma_1$  и меньше  $\sigma_3$ .

Наибольшие касательные напряжения равны полуразности крайних главных напряжений. Установим площадку, на которой действуют  $\tau_{\text{наиб}}$  – это площадка, параллельная  $\sigma_2$  и наклонённая под углом  $45^\circ$  к главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

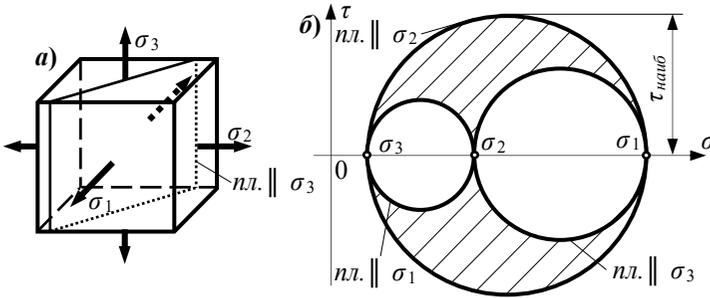


Рис. 4.16. Графическое определение напряжений при объёмном напряжённом состоянии

Таким образом, мы научились определять напряжения на любых площадках при линейном, плоском и объёмном напряжённом состояниях. Однако, для расчётов на прочность и жёсткость, этого ещё не достаточно. Необходимо установить связь между напряжениями и деформациями, а также записать условия прочности для объёмного напряжённого состояния.

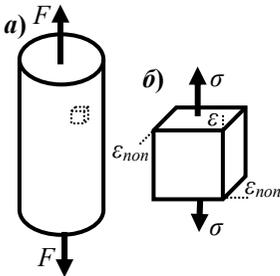


Рис. 4.17. Деформации при линейном напряжённом состоянии

#### 4.7. Закон Гука при объёмном напряжённом состоянии

Закон Гука устанавливает зависимость между напряжениями и деформациями.

При линейном напряжённом состоянии эта зависимость была установлена при изучении центрального растяжения и сжатия (рис. 4.17):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ — закон Гука,}$$

$$\varepsilon_{\text{поп}} = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E} \text{ — закон Пуассона.}$$

Рассмотрим произвольно нагруженное тело и точку  $A$ , в которой имеет место объёмное напряжённое состояние (рис. 4.18). Вырежем в окрестности точки элемент, грани которого являются главными площадками (рис. 4.19,  $a$ ) и определим деформации в направлениях 1, 2, 3.

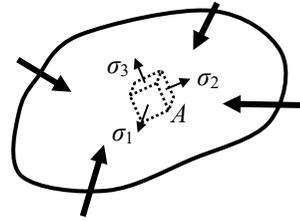


Рис. 4.18. Напряжения при объёмном напряжённом состоянии

Принцип суперпозиции позволяет представить объёмное напряжённое состояние как сумму трёх линейных и записать (рис. 4.9,  $b$ - $z$ )

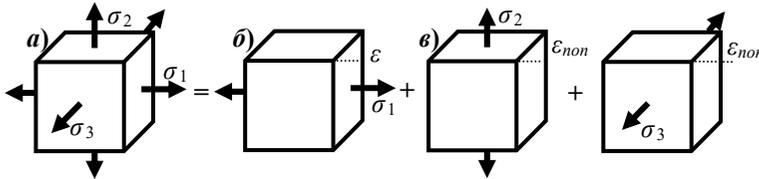


Рис. 4.19. Принцип суперпозиции для вычисления деформаций

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_1^{(3)} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}.$$

Аналогично определяются  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Эти три уравнения представляют собой обобщённый закон Гука, записанный в главных осях.

Относительные продольные деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  по направлению главных напряжений называют главными деформациями.

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ , так как  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Кроме того  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{наиб}}$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_{\text{наим}}$  в алгебраическом смысле.

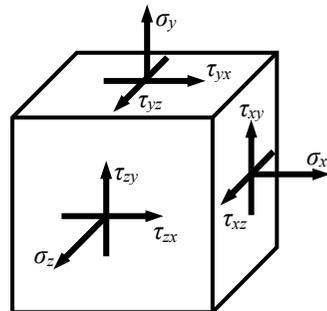


Рис. 4.20. Напряжения на произвольной площадке

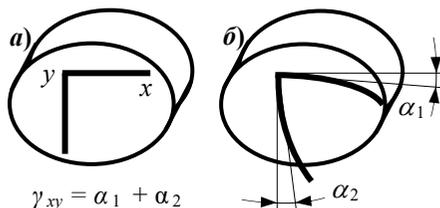
Теперь запишем закон Гука в произвольных осях, для чего вырежем в окрестности точки элемент, грани которого не являются главными площадками (рис. 4.20).

На площадках действуют 9 компонент напряжённого состояния. Нормальные напряжения вызывают только линейные деформации и не влияют на угловые. Касательные напряжения вызывают только угловые (сдвиговые) деформации и не влияют на линейные. Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$



$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$$

Рис. 4.21. Графическая интерпретация угла сдвига

где  $\gamma_{xy}$  – изменение первоначально прямого угла между прямыми, параллельными осям  $x$  и  $y$ .

Покажем  $\gamma_{xy}$ , для чего рассечём тело плоскостью, параллельной плоскости  $xoy$ , до и после нагружения (рис.4.21, а, б).

#### 4.8. Потенциальная энергия упругой деформации при объёмном напряжённом состоянии

Потенциальная энергия упругой деформации при центральном растяжении или сжатии, то есть в случае линейного напряжённого состояния, учитывая, что

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \text{ определяется по формуле}$$

$$U = \frac{F^2 \cdot l}{2E \cdot A} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l.$$

Удельная потенциальная энергия упругой деформации, то есть энергия, накопленная в единице объёма, при линейном напряжённом состоянии

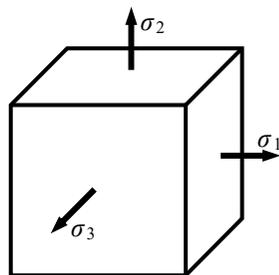


Рис. 4.22. Объёмное напряжённое состояние

$$u_0 = \frac{U}{V} = \frac{F^2 \cdot l}{2E \cdot A \cdot A \cdot l} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \cdot E \cdot \varepsilon}{2E} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}.$$

Согласно принципа суперпозиции, удельная потенциальная энергия при объёмном напряжённом состоянии (рис. 4.22) определяется как сумма энергий, накапливаемых в единице объёма под действием каждого из главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ :

$$u_0 = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sigma_1 \cdot \left( \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E} \right) + \sigma_2 \cdot \left( \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E} \right) + \right.$$

$$\left. + \sigma_3 \cdot \left( \frac{\sigma_3}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} \right) \right].$$

После алгебраических преобразований получим

$$u_0 = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right].$$

Полная удельная энергия деформации может быть разделена на две части:

$u_v$  – энергию изменения объёма, то есть энергию, накапливаемую за счёт изменения объёма элементарного кубика при сохранении его формы;

$u_\phi$  – энергию изменения формы, то есть энергию, накапливаемую за счёт изменения формы элементарного кубика и превращения его, в элементарный параллелепипед.

Определим величину обеих составляющих удельной потенциальной энергии. Как известно, при одинаковой деформации рёбер элементарного кубика, то есть при изменении только объёма, относительное удлинение каждого ребра равно:  $\varepsilon_m = \frac{\theta}{3} = \frac{\sigma_m}{3K}$ . Здесь  $\sigma_m$  –

гидростатическое давление, равное  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ . Это давление

действует на каждую грань элементарного кубика.  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  –

модуль объёмной деформации.

Следовательно, энергия изменения объёма равна

$$u_v = 3 \frac{\sigma_m \cdot \varepsilon_m}{2} = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K} = \frac{1-2\cdot\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Тогда энергия изменения формы можно определить как разность

$$u_\phi = u_0 - u_v = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_2) \right] - \frac{1-2\cdot\mu}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Произведя алгебраические преобразования, получим

$$u_\phi = \frac{1-\mu}{3E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_2 \right].$$

#### 4.9. Относительное изменение объёма тела

Вычислим изменение объёма прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  при объёмном напряжённом состоянии. Грани параллелепипеда являются главными площадками (рис. 4.23). До деформации, его объём равен  $V = a \cdot b \cdot c$ .

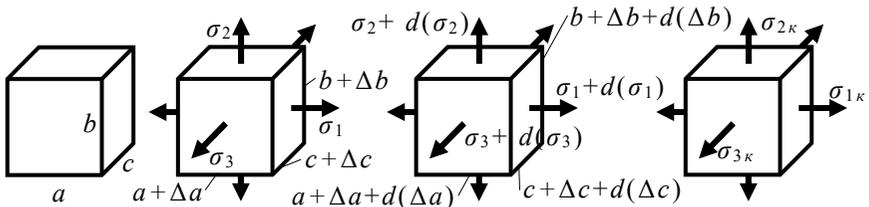


Рис. 4.23. Определение объёма тела

После деформации, вследствие изменения длины рёбер, его объём станет:

$$\begin{aligned} V_1 &= (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c) = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \Delta c + b \cdot c \cdot \Delta a + \\ &\quad + c \cdot a \cdot \Delta b + a \cdot \Delta b \cdot \Delta c + b \cdot \Delta c \cdot \Delta a + c \cdot \Delta a \cdot \Delta b + \Delta a \cdot \Delta b \cdot \Delta c = \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot \left( 1 + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) = V \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{aligned}$$

При вычислении  $V$  бесконечно малыми слагаемыми второго и третьего порядка малости пренебрегаем. Относительное изменение объёма:

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Подставив вместо  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  их значения из обобщённого закона Гука, получим

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Из полученных формул видно, что относительное изменение объёма зависит лишь от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Поэтому элементарный кубик (или параллелепипед) получит одно и то же изменение объёма независимо от того, будут ли по его граням действовать различные по величине главные напряжения или одинаковые напряжения, равные их среднеарифметическому значению  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  – гидростатическому давлению.

Следовательно,

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot 3 \cdot \sigma_m.$$

Обозначая  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  – модуль объёмной деформации, полу-

чим  $\theta = \frac{\sigma_m}{K}$  или  $\sigma_m = \theta \cdot K$  – закон Гука при объёмном напряжённом состоянии.

В случае, если элементарный кубик находится под действием гидростатического давления, все рёбра кубика получают одинаковую деформацию  $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$  – средняя линейная деформация

$$\varepsilon_m = \frac{\theta}{3} = \frac{\sigma_m}{3 \cdot K}.$$

Средняя линейная деформация прямо пропорциональна гидростатическому давлению.

#### 4.10. Теории предельных напряжённых состояний (теории прочности)

Так; называют теории, которые позволяют составить условие прочности при любом напряжённом состоянии.

Условие прочности – это зависимость между компонентами напряжённого состояния и характеристиками материала, позволяющая дать заключение о прочности детали (тела).

При линейном напряжённом состоянии (рис. 4.24) условие прочности записывается в виде

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|N|_{\text{наиб}}}{A} \leq [\sigma],$$

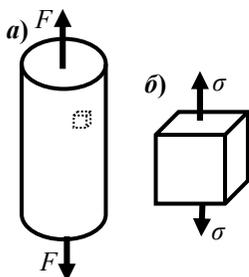


Рис. 4.24. Напряжения при линейном напряжённом состоянии

где  $[\sigma] = \frac{\sigma_L}{n_L}$ ,  $\sigma_L$  – опасное или предельное напряжение, вызывающее в детали опасное состояние;  $n_L$  – коэффициент запаса прочности. Для пластичных материалов  $\sigma_L = \sigma_t$ , а для хрупких –  $\sigma_L = \sigma_v$ .

При линейном напряжённом состоянии опасное напряжение может быть найдено опытным путём, при испытании образцов

на растяжение.

Далее рассмотрим вопрос о том, как производить проверку прочности в случае объёмного напряженного состояния, то есть, когда все три главных напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , отличны от нуля (рис. 4.25). В этом случае опасное состояние может наступить при различных величинах главных напряжений в зависимости от их соотношения, то есть каждому соотношению  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$  будут соответствовать свои опасные величины главных напряжений  $\sigma_{1L}, \sigma_{2L}, \sigma_{3L}$ .

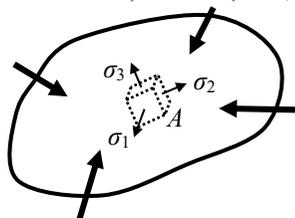


Рис. 4.25. Объёмное напряжённое состояние

Чтобы найти опытным путём опасные величины главных напряжений, пришлось бы осуществить бесчисленное множество чрезвычайно сложных лабораторных испытаний при различных соотношениях  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3$  причём, некоторые из этих соотношений, вообще невозможно получить, на существующих испытательных машинах. По этим причинам, опасное состояние материала при объёмном напряжённом состоянии, устанавливают теоретическим путём при помощи так называемых теорий прочности.

Теорией прочности называют предположение (гипотезу) о преимущественном влиянии того или иного фактора (критерия) напряжённого состояния на прочность материала. Цель теорий прочности заключается в том, чтобы, исходя из результатов простого опыта на растяжение и сжатие, получить возможность судить о прочности ма-

териала при объёмном напряжённом состоянии.

К настоящему времени выдвинуты десятки, даже сотни различных теорий прочности, но в расчётной практике, в основном, используются только четыре.

#### **4.10.1. I теория предельных напряжённых состояний**

– теория наибольших нормальных напряжений (Г. Галилей, 1638 г.)

*Напряжённое состояние детали в точке считается безопасным, если наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение не превышает допустимого для данного материала значения, которое не зависит от типа напряжённого состояния и может быть найдено из любого опыта.*

Следовательно, в этом случае расчёт необходимо вести по наибольшему главному напряжению, т. е.  $|\sigma|_{\text{наиб}} \leq [\sigma]$ .

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p \text{ или } |\sigma_3| \leq [\sigma]_c. \quad (4.1)$$

I теория неплохо согласуется с опытными данными, лишь в случае всестороннего растяжения хрупких материалов. Во всех остальных случаях, её выводы не согласуются с результатами экспериментального исследования. Поэтому эта теория, в настоящее время, практически не применяется.

#### **4.10.2. II теория предельных напряжённых состояний**

– теория наибольших относительных деформаций (Мариотт, 1686 г.)

*Напряжённое состояние детали в точке считается безопасным, если наибольшая по абсолютной величине относительная линейная деформация не превышает допустимого для данного материала значения, которое не зависит от типа напряжённого состояния и может быть найдено из любого опыта.*

Следовательно, в этом случае расчёт необходимо вести по наибольшей относительной деформации, т. е.  $|\varepsilon|_{\text{наиб}} \leq [\varepsilon]$ .

Выражение в левой части получаем из обобщённого закона Гука

$$|\varepsilon|_{\text{наиб}} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (4.2)$$

Для получения  $[\varepsilon]$  рассматриваем испытание образца при центральном растяжении (см. рис. 4.22). Тогда  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Подставив значения главных напряжений в уравнение (4.2), получим

$$|\varepsilon|_{\text{наиб}} = \frac{\sigma}{E}, \text{ а переходя к предельному состоянию } - [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Тогда условие прочности по II теории предельных напряжённых состояний запишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \end{array} \right\}_{\text{наиб}} \leq [\sigma].$$

При расчёте на прочность деталей из хрупких материалов II-я теория даёт результаты, удовлетворительно согласующиеся с опытными данными. Для пластичных материалов эта теория не применима. Не подтверждается эта теория и при всестороннем сжатии.

#### 4.10.3. III теория предельных напряжённых состояний

– теория наибольших касательных напряжений (Кулон, 1773 г).

*Напряжённое состояние детали в точке считается безопасным, если наибольшее касательное напряжение не превышает допустимого для данного материала значения, которое не зависит, от типа напряжённого состояния и может быть найдено из любого опыта.*

Следовательно, в этом случае расчёт необходимо вести по наибольшим касательным напряжениям, то есть  $\tau_{\text{наиб}} < [\tau]$ .

Рассмотрим выражения в левой и правой части этого неравенства. Левая часть (из круга Мора при объёмном напряжённом состоянии, (см. рис. 4.16)

$$\tau_{\text{наиб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.3)$$

Для получения  $[\tau]$  рассматриваем испытание образца при центральном растяжении (см. рис. 4.24). Тогда  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Подставив значения главных напряжений в уравнение (4.3), получим

$$\tau_{\text{наиб}} = \frac{\sigma}{2}, \text{ а переходя к предельному состоянию } [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Тогда условие прочности по III теории предельных напряжённых состояний запишется в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

III теория хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, Мор (1882 г.) предложил обобщённую теорию

$$\sigma_1 - K \cdot \sigma_3 \leq [\sigma],$$

где  $K = \frac{\sigma_m^p}{\sigma_m^c}$  – для пластичных материалов,  $K = \frac{\sigma_g^p}{\sigma_g^c}$  – для хрупких материалов.

#### 4.10.4. IV теория предельных напряжённых состояний

– теория октаэдрических касательных напряжений (энергетическая теория) (Губерт, 1904 г.).

*Напряжённое состояние детали в точке считается безопасным, если октаэдрическое касательное напряжение не превышает допускаемого для данного материала значения, которое не зависит от опыта.*

Следовательно, в этом случае, расчёт необходимо вести по октаэдрическим касательным напряжениям, то есть  $\tau_{\text{окт}} \leq [\tau]$ .

Рассмотрим выражения в левой и правой частях этого неравенства. Левая часть

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}. \quad (4.4)$$

Для получения  $[\tau]$  рассматриваем испытание образца при центральном растяжении (см. рис. 4.16). Тогда  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Подставив значения главных напряжений в уравнение, получим

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma, \text{ а переходя к предельному состоянию } - [\tau] = \frac{\sqrt{2}}{3} [\sigma].$$

Тогда условие прочности по IV теории предельных напряжённых состояний запишется в виде

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} \leq [\sigma].$$

IV теория хорошо согласуется с опытными данными для пластичных материалов.

Сравнивая формулы, устанавливающие условия прочности при различных теориях предельных напряжённых состояний, можно заметить, что в левых частях неравенств находятся алгебраические выражения из главных напряжений. Следовательно, можно обобщить все теории и записать

$$\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma],$$

$$\text{где } \sigma_{\text{экр}_1} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\}_{\text{наиб}} ;$$

$$\sigma_{\text{экв II}} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \left| \sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \right|_{\text{наиб}} \end{array} \right\};$$

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3;$$

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}.$$

$\sigma_{\text{экв}}$  имеет и физический смысл – это напряжение в растягиваемом образце, напряжённое состояние которого равноопасно заданному (рис. 4.26).

Напряжённые состояния называют равноопасными, если они имеют одинаковые коэффициенты запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности – это число, показывающее во сколько раз нужно увеличить компоненты напряжённого состояния ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), чтобы оно стало предельным.

Пример: рассмотрим расчёты на прочность при чистом сдвиге (рис. 4.27). Определим главные напряжения графическим способом  $\sigma_1 = OA = \tau$ ;  $\sigma_{11} = OB = -\tau$ .

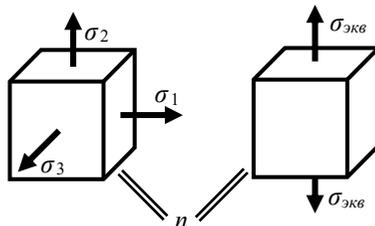


Рис. 4.26. Физический смысл эквивалентного напряжения

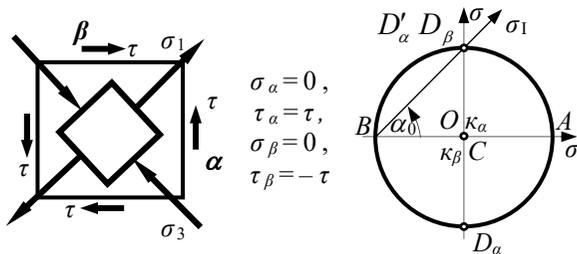


Рис. 4.27. Определение главных напряжений при чистом сдвиге

Переходя к общей записи напряжений  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , получим  $\sigma_1 = \tau$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$ .

Тогда  $\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \leq [\sigma]$ , переходя к предельным величинам, получим  $[\tau]_{\text{III}} = \frac{[\sigma]}{2}$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв IV}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} = \\ &= \sqrt{\tau^2 + (-\tau)^2 - \tau \cdot (-\tau)} = \tau \cdot \sqrt{3},\end{aligned}$$

и переходя к предельным величинам, получим  $[\tau]_{\text{IV}} = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ .

При изучении темы «чистый сдвиг», мы использовали значения  $[\tau] \approx (0,5 \dots 0,6) \cdot [\sigma]$ . Теперь понятно, как получены эти значения.

Заключение:

- 1) III и IV теории используются для расчёта деталей из пластичных материалов, а результаты они дают, разные;
- 2) III теория менее точна, так как не учитывает среднее главное напряжение, но она имеет простой вид и поэтому, часто используется для проектировочных (прикидочных) расчётов;
- 3) IV теория более точная, более жёсткая, так как размеры детали, определённые по этой теории, будут наименьшими. В авиастроении, в основном, используется IV теория.

#### 4.11. Вопросы для самопроверки

Что называется напряжённым состоянием детали в точке? Какие виды напряжённого состояния в точке Вы знаете? Назовите компоненты напряжённого состояния в точке и сколько из них, независимых? Что называется главными площадками, главными напряжениями? Напишите выражения для максимальных значений касательных напряжений и укажите площадки их действия. Как определяется значение главных напряжений и положение главных площадок? Какие вы знаете теории предельных напряжённых состояний (теории прочности)? Дайте критический обзор теорий прочности. Как решаются задачи расчёта на прочность по теории наибольших касательных напряжений, энергетической теории?

## 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БРУСА

Этот раздел геометрии изучается в курсе сопротивления материалов, так как геометрические характеристики участвуют в формулах при определении напряжений, перемещений, деформаций.

### 5.1. Основные понятия о геометрических характеристиках

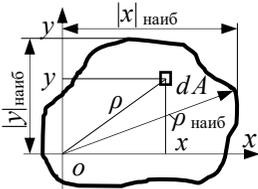


Рис. 5.1. Поперечное сечение бруса

Рассмотрим произвольное поперечное сечение бруса, проведём оси  $x$ ,  $y$  с произвольным началом координат  $o$ . Выделим элементарную часть сечения  $dA$  (рис. 5.1). Рассмотрим геометрические характеристики поперечного сечения бруса, необходимые при изучении сопротивления материалов.

1. Геометрическая характеристика – площадь  $A$ , уже встречалась:

$A = \int_A dA$  – площадь сечения, она используется при растяжении и сжатии в таких формулах, как:  $\sigma = \frac{N}{A}$ ,  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$ .

2.  $S_x = \int_A y \cdot dA$  – статический момент сечения относительно оси  $x$ ,

$S_y = \int_A x \cdot dA$  – статический момент сечения относительно оси  $y$ .

Статические моменты сечения могут быть, как положительными, так и отрицательными. Единица измерения –  $\text{м}^3$  ( $\text{см}^3$ ,  $\text{мм}^3$ ).

Характеристики  $S_x$ ,  $S_y$  используются в формулах для определения напряжений при изгибе и при нахождении положения центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

3.  $J_x = \int_A y^2 \cdot dA$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $x$ ;

$J_y = \int_A x^2 \cdot dA$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $y$ .

$J_x, J_y > 0$ , так как координаты в квадрате. Эти характеристики используются в формулах при изгибе.

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA - \text{центробежный момент инерции сечения относительно осей } x, y.$$

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции сечения может быть как положительным, так и отрицательным, он может быть также равен нулю. Это вспомогательная характеристика, она в формулах сопротивления материалов непосредственно не участвует, но с её помощью определяются главные моменты инерции сечения и положение главных осей инерции сечения.

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA - \text{полярный момент инерции сечения относительно}$$

начала координат. Очевидно, что  $J_p > 0$ . Используется в формулах при кручении.

Установим связь между полярным и осевыми моментами инерции: из рис. 5.2 –  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , тогда

$$\begin{aligned} J_p &= \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \\ &= \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = J_x + J_y. \end{aligned}$$

следовательно,

$$J_p = J_x + J_y = J_{x_1} + J_{y_1}.$$

Следствие из этого равенства:

$$J_x + J_y = \text{const.}$$

Таким образом, при повороте осей (см. рис. 5. 2) сумма осевых моментов инерции не изменяется. Иначе: сумма осевых моментов инерции является инвариантом.

Единица измерения моментов инерции  $\text{м}^4$  ( $\text{см}^4$ ,  $\text{мм}^4$ ).

#### 4 Моменты сопротивления сечения

$$W_x = \frac{J_x}{|y|_{\text{наиб}}}; \quad W_y = \frac{J_y}{|x|_{\text{наиб}}} - \text{моменты сопротивления сечения}$$

гибу относительно осей  $x$  и  $y$ ,

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\text{наиб}}} - \text{момент сопротивления сечения кручению,}$$

где  $|x|_{\text{наиб}}$ ,  $|y|_{\text{наиб}}$ ,  $\rho_{\text{наиб}}$  – координаты наиболее удалённых точек контура сечения от осей  $x$ ,  $y$  и начала координат (см. рис. 5. 1).

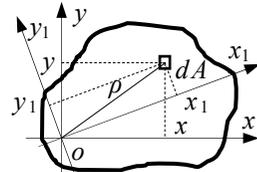


Рис. 5.2. Поворот осей для сечения

Единица измерения моментов сопротивления – м<sup>3</sup> (см<sup>3</sup>, мм<sup>3</sup>).

Эти характеристики используются при расчёте на прочность балок и валов.

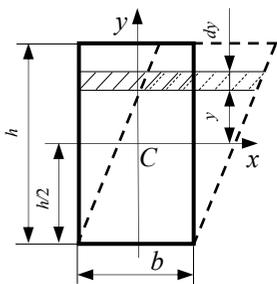
$$5 \ i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \text{ – радиусы инерции сечения относительно осей } x \text{ и } y.$$

Эти характеристики используются при внецентренном растяжении-сжатии и расчётах на устойчивость.

## 5.2. Моменты инерции элементарных сечений

### 5.2.1. Прямоугольник

Проведём центральные оси  $x, y$ .  $C$  – центр тяжести сечения (рис. 5.3).  $dA = b \cdot dy$ . Тогда



$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3} \cdot \left[ \frac{h^3}{8} - \left( -\frac{h}{8} \right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Аналогично находим  $J_y$ :  $J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ .

Рис. 5.3. Прямоугольник. Заметим, что  $J_x$  не изменится, если переместить все полоски  $dA = b \cdot dy$  параллельно оси  $x$ . Таким образом момент инерции параллелограмма относительно центральной оси, параллельной основанию, равен:  $J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ .

### 5.2.2. Круг

Проведём центральные оси  $x, y$ ,  $C$  – центр тяжести круга (рис. 5.4).

Вычислим  $J_p$  относительно центра круга. Выделим элементарную полоску в виде кольца толщиной  $d\rho$ .  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ .

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho^3 \cdot d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{D}{2}} = \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{D^4}{16} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

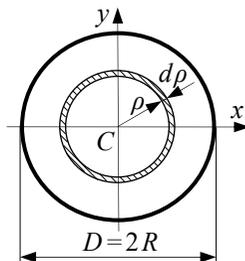


Рис. 5.4. Круг

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Но  $J_p = J_x + J_y$ . В силу симметрии  $J_x = J_y$ , следовательно

$$J_p = J_p = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

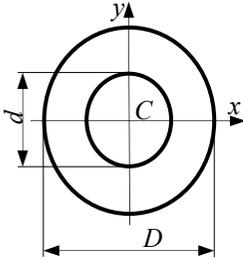


Рис. 5.5. Кольцо

### 5.2.3. Кольцо

Проведём центральные оси  $x$ ,  $y$ .  $C$  – центр тяжести кольца (рис. 5.5)

В этом случае момент инерции кольца равен разности моментов инерции большого круга с диаметром  $D$  и малого – с диаметром  $d$ . Обозначим  $\alpha = d/D$ , тогда

$$J_p = J_p^D - J_p^d = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4).$$

$$\text{Аналогично } J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4).$$

### 5.2.4. Треугольник

Проведём ось  $x$ , проходящую через основание треугольника (рис. 5.6).

Определим момент инерции относительно оси  $x$ , проходящий по основанию.

Из подобия треугольников

$$\frac{b}{h} = \frac{b(y)}{h-y} \Rightarrow b(y) = \frac{b}{h} \cdot (h-y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^h y^2 dA = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^2 \cdot (h-y) dy = \\ &= \frac{b}{h} \cdot \left( h \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)_0^h = \frac{b \cdot h^3}{12}. \end{aligned}$$

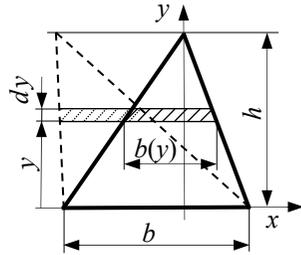


Рис. 5.6. Треугольник

Заметим, что моменты инерции треугольников с одинаковыми основаниями и высотами относительно оси  $x$ , проведённый через его основание, равны между собой.

### 5.2.5. Прокатные профили

Для прокатных профилей (двутавр, тавр, швеллер, уголок) значения площадей и моментов инерции приведены в таблицах ГОСТов.

### 5.3. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральные

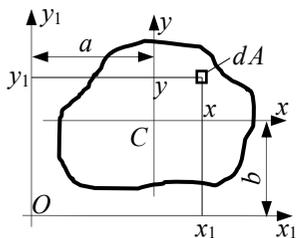


Рис. 5.7. Центральные и параллельные им произвольные оси сечения

Центральные оси – это оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения:  $x, y$  – центральные оси;  $x_1, y_1$  – произвольные оси, параллельные центральным осям  $x, y$  (рис. 5.7). Выделим элементарную площадку  $dA$ . Покажем её координаты в двух системах осей:  $x, y$  и  $x_1, y_1 = x + a, y + b$ , где  $a, b$  – координаты центра тяжести сечения в осях  $x_1, y_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = J_x + b^2 \cdot A, \end{aligned}$$

где  $\int_A y dA = S_x = 0$  – статический момент сечения относительно центральной оси.

Аналогично находится  $J_{y_1}$ , следовательно

$$J_{x_1} = J_x + b^2 \cdot A, \quad J_{y_1} = J_y + a^2 \cdot A.$$

Таким образом, **осевой момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно параллельной ей центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между этими осями.**

Следствие: если рассматривать множество параллельных осей, то наименьшим будет момент инерции относительно центральной оси.

Центробежный момент инерции сечения

$$\begin{aligned}
 J_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 \cdot y_1 dA = \int_A (x+a) \cdot (y+b) dA = \\
 &= \int_A x \cdot y dA + b \int_A x dA + a \int_A y dA + a \cdot b \int_A dA = J_{xy} + a \cdot b \cdot A.
 \end{aligned}$$

Следовательно, **центробежный момент инерции относительно произвольных осей** равен **центробежному моменту инерции относительно параллельных им, и также направленных центральных осей** плюс **произведение площади сечения на координаты центра тяжести в той системе осей, к которой осуществлён переход.**

#### 5.4. Главные оси инерции и главные моменты инерции сечения

Изобразим поперечное сечение бруса и произвольные оси  $x$ ,  $y$ . Выделим элементарную площадку  $dA$  (рис. 5.8, а) с координатами  $x$ ,  $y$ .

Повернём оси на  $90^\circ$ , например, против часовой стрелки (рис. 5.8, б). Запишем зависимость между координатами  $x_1 = y$ ,  $y_1 = -x$ . Вычислим центробежные моменты инерции сечения в осях  $x$ ,  $y$  и  $x_1$ ,  $y_1$ :

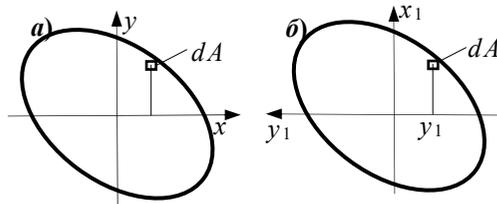


Рис. 5.8. Схема поворота координатных осей

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y dA;$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_A x_1 \cdot y_1 dA = \int_A y \cdot (-x) dA = -J_{xy}.$$

Следовательно, при повороте осей на  $90^\circ$  центробежный момент инерции сечения меняет знак на обратный.

Представим графически изменение центробежного момента инерции в зависимости от угла поворота осей  $\alpha$  (рис. 5.9). Эта функция непрерыв-

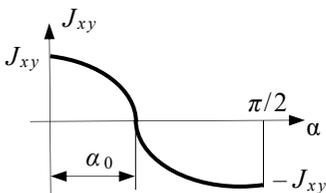


Рис. 5.9. График изменения  $J_{xy}$  при повороте осей

ная (разрывов нет), поэтому в промежутке  $0^\circ - 90^\circ$  имеется угол  $\alpha_0$ , при котором  $J_{xy} = 0$ .

Итак, для любого начала координат имеется хотя бы одна пара осей, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю.

*Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции сечения, а моменты инерции относительно этих осей – главными моментами инерции сечения.*

Обозначим через  $x_0, y_0$  – главные оси (рис. 5.10);  $J_{x_0}, J_{y_0}$  – главные моменты инерции сечения, причём принимается

$J_{x_0} > J_{y_0}$ . Для каждого начала координат – свои главные оси.

Какое значение имеют главные оси? Оказывается, что в главных осях формулы для изгиба являются наиболее простыми. Как отыскать положение главных осей?

Рассмотрим сечение, имеющее ось симметрии (рис. 5.11). Если сечение имеет ось симметрии  $y$ , то она является одной из главных осей. Другая главная ось перпендикулярна ей. Докажем это, для чего выделим элементарные площадки  $dA_1 = dA_2$ , симметричные относительно оси  $y$ , и вычислим

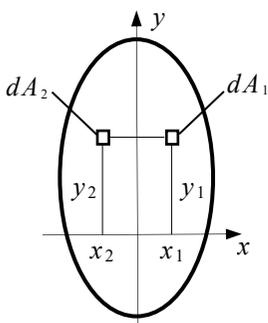


Рис. 5.11. Положение главных осей для симметричного сечения

центробежный момент инерции сечения:

$$x_1 = -x_2; y_1 = y_2; A_1 = A_2;$$

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \, dA = \int_{A_1} x \cdot y \, dA + \int_{A_2} (-x) \cdot y \, dA = 0,$$

что и требовалось доказать.

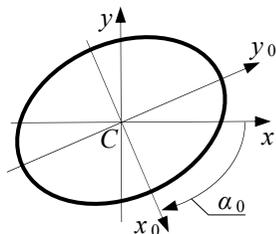


Рис. 5.10. Положение главных осей

## 5.5. Зависимость между моментами инерции сечения при повороте от главных осей

Изобразим произвольное сечение, любое начало координат и покажем главные оси (рис. 5.12).

Известны  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$ ,  $\alpha$ . Необходимо определить  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ . Положение осей  $x$ ,  $y$  определяет угол  $\alpha$  (на рисунке показан положительный угол). Выделим элемент сечения  $dA$ . Установим связь между координатами

$$x = x_0 \cdot \cos \alpha + y_0 \cdot \sin \alpha;$$

$$y = y_0 \cdot \cos \alpha - x_0 \cdot \sin \alpha.$$

Найдем моменты инерции относительно осей  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned} J_x &= \int_A y^2 dA = \int_A (y_0 \cdot \cos \alpha + x_0 \cdot \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \cdot \int_A y_0^2 dA + \\ &+ 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_A x_0 \cdot y_0 dA + \sin^2 \alpha \cdot \int_A x_0^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \cdot J_{y_0} + \sin^2 \alpha \cdot J_{x_0} + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_A x_0 \cdot y_0 dA \end{aligned}$$

так как  $\int_A x_0 \cdot y_0 dA = J_{x_0 y_0} = 0$ . Аналогично получаем  $J_y, J_{xy}$ .

$$J_x = \cos^2 \alpha \cdot J_{y_0} + \sin^2 \alpha \cdot J_{x_0},$$

$$J_y = \cos^2 \alpha \cdot J_{x_0} + \sin^2 \alpha \cdot J_{y_0},$$

$$J_{xy} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

– формулы поворота от главных осей; эти формулы аналогичны формулам поворота от главных площадок в теории напряжённого и деформированного состояния.

Последняя формула отвечает на вопрос: сколько же главных осей имеет сечение? Одни главные оси уже есть и они показаны на рис. 5.12. Если есть, и другие главные оси, то при повороте к ним,  $J_{xy}$  обратится в ноль.

Если  $J_{xy} = 0$ , то  $\frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha = 0$ . Здесь может быть два случая:

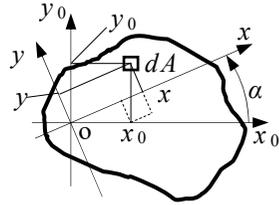


Рис. 5.12. Определение моментов инерции при повороте от главных осей

1)  $J_{x_0} \neq J_{y_0}$ , тогда  $\sin 2\alpha = 0$ , отсюда  $2\alpha = \pi \cdot n$ , где  $n$  – все положительные и отрицательные целые числа и ноль. Тогда  $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot n$ , т.е. бесконечное множество корней. Если оси будем поворачивать на угол, кратный  $\frac{\pi}{2}$ , то будем попадать на прежние оси, правда изменятся направления осей, что в данном случае значения не имеет. Таким образом, имеется одна пара главных осей.

2)  $J_{x_0} = J_{y_0}$ . В этом случае произведение обращается в ноль при любом  $\alpha$  и любые оси – главные, т.е. имеется бесконечное множество главных осей.

Из формул, приведённых выше, получим в этом случае:

$$J_x + J_y = J_{y_0} + J_{y_0}.$$

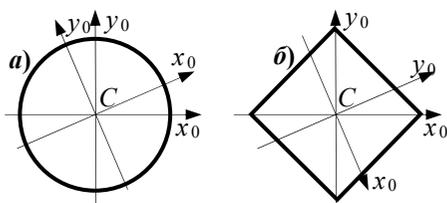


Рис. 5.13. Сечения, имеющие бесконечное множество главных центральных осей

Примеры таких сечений (рис. 5.13):

а) круглое, но только тогда, когда начало координат находится в центре тяжести сечения С;

б) квадратное сечение – начало координат находится в центре тяжести сечения С,  $J_{x_0} = J_{y_0}$ , следовательно любые оси – главные

## 5.6. Определение главных моментов инерции и положения главных осей инерции сечения

Такая задача решается при расчёте бруса на изгиб. Выше было рассмотрено решение применительно к симметричному сечению, а теперь приведём решение для произвольного сечения (рис. 5.14).

Известны  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ . Эти характеристики можно определить численным методом, разбив сечение на отдельные части, или разбив сложное сечение на простые составляющие. Требуется определить  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$ ,  $\alpha_0(x \wedge x_0)$ .

Рассмотрим произвольное сечение и произвольные оси  $x$ ,  $y$ . Главные оси, которые следует найти, покажем штриховой линией.

Для решения поставленной задачи воспользуемся аналогией с формулой для напряжений.

Запишем вначале формулы, чтобы показать, что аналогия существует.

| Напряжения  | Моменты инерции сечения  |
|---|--|
| $\sigma_\alpha = \cos^2 \alpha \cdot \sigma_I + \sin^2 \alpha \cdot \sigma_{II},$ | $J_x = \cos^2 \alpha \cdot J_{x_0} + \sin^2 \alpha \cdot J_{y_0},$ |
| $\sigma_\beta = \cos^2 \alpha \cdot \sigma_{II} + \sin^2 \alpha \cdot \sigma_I,$  | $J_y = \cos^2 \alpha \cdot J_{y_0} + \sin^2 \alpha \cdot J_{x_0},$ |
| $\tau_\alpha = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\alpha,$                    | $\tau_\alpha = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha.$          |

Сравниваем эти формулы – они аналогичны. Из формул для напряжений можно получить формулы для моментов инерции, если заменить:  $\sigma_\alpha$  на  $J_x$ ,  $\sigma_\beta$  на  $J_y$ ,  $\tau_\alpha$  на  $J_{xy}$ ,  $\sigma_I$  на  $J_{x_0}$ ,  $\sigma_{II}$  на  $J_{y_0}$ .

По аналогии получим следующие формулы:

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) + \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2} \right],$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) - \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2} \right],$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_{x_0} - J_{y_0}}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_{xy}}{J_x - J_{y_0}}.$$

Таким образом, поставленная задача решена. Из полученных формул следует замечательное свойство главных моментов инерции: один из них является наибольшим, а другой – наименьшим, если рассматривать множество осей, проходящих через заданное начало координат (в арифметическом смысле).

### 5.7. Исследование моментов инерции графическим способом

Так как между напряжениями и моментами инерции существует аналогия, то для определения моментов инерции можно использовать круги Мора.

Рассмотрим решение *обратной задачи*. Доказательство правомочности действий можно провести аналогично определению напряжений. Покажем произвольное сечение с осями  $x, y$  (рис. 5.15, а).

Известны  $J_x, J_y, J_{xy}$ .

Требуется определить  $J_{x_0}, J_{y_0}$ ,

$\alpha_0 (x \wedge x_0)$ .

Изобразим горизонтальную ( $J_x, J_y$ ) и вертикальную ( $J_{xy}$ ) оси координат. Необходимо обратить внимание на то, что ось  $J_x, J_y$  не имеет отрицательных значений (рис. 5.15, б).

Строим точки  $D_x(J_x, J_{xy})$  и  $D_y(J_y, -J_{xy})$ . Четвёртой величины в моментах инерции нет, но учтём, что  $J_{yx} = -J_{xy}$ . Пусть  $J_x > J_y$ ; это условие необязательно, но для выбранного сечения, это так. В рассматриваемом случае также  $J_{xy} > 0$ . Далее соединяем точки  $D_x, D_y$  и получаем центр окружности  $C$ . Зная центр и радиус  $CD_x = CD_y$  проводим круг Мора для моментов инерции и получаем точки  $A$  и  $B$ . Измеряя отрезки на рисунке 5.15, б определяем главные моменты инерции –  $J_{x_0}^{\text{граф}}$

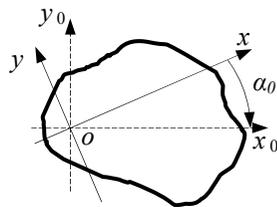


Рис. 5.14. Определение главных моментов инерции и положения главных осей

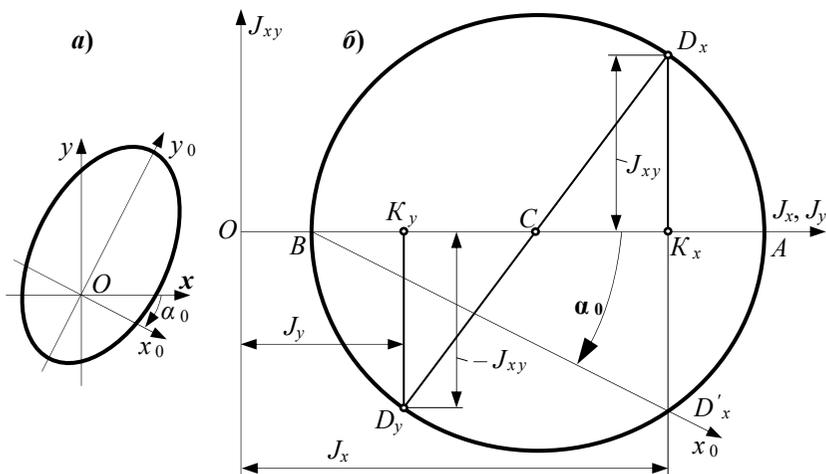


Рис. 5.15. Круг Мора для определения главных моментов инерции

$= OA, J_{x_0}^{\text{граф}} = OB$ .

Далее нужно определить угол  $\alpha_0$ . Строим точку  $D'_x$  симметричную точке  $D_x$  относительно оси абсцисс. Из точки  $B$  через точку  $D'_x$  проводим луч. Это и есть направление оси  $x_0$ , относительно которой момент инерции будет наибольшим (см. рис. 5.15, б).

**Прямая задача:** Дано  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$ ,  $\alpha(x_0 \wedge x)$ .

Требуется определить  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ .

Проработать самостоятельно, по аналогии с напряжениями.

### 5.8. Эллипс инерции

Изобразим произвольное сечение и любую ось  $v$  (рис. 5.16).

$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}}$  – радиус инерции сечения

относительно оси  $v$ .

Отсюда  $J_v = i_v^2 \cdot A$ . Эта формула для определения  $J_v$  не используется, но ряд формул сопротивления материалов, в которые одновременно входят момент инерции и площадь, можно записать проще.

Запишем

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}}, \quad i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}}.$$

– главные радиусы инерции сечения или радиусы инерции сечения относительно главных осей.

Эллипсом инерции называется эллипс, имеющий следующее уравнение в главных осях (рис. 5.17):

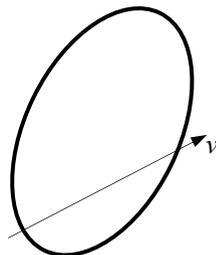


Рис. 5.16. Определение радиуса инерции сечения относительно произвольных осей

$$\frac{x_0^2}{i_{x_0}^2} + \frac{y_0^2}{i_{y_0}^2} = 1.$$

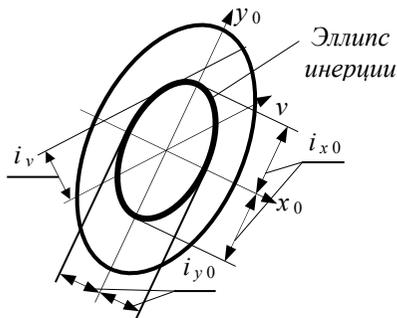


Рис. 5.17. Эллипс инерции

Полуосями эллипса инерции являются главные радиусы инерции сечения, но они поменялись местами. Изобразим эллипс инерции для заданного сечения (рис. 5.17).

Об одном свойстве эллипса инерции. Проведём произвольную ось  $u$  и касательную к эллипсу инерции, параллельную

оси  $v$ . Оказывается, что расстояние между касательной и осью  $v$  есть радиус инерции относительно оси  $v$ , тогда  $J_v = i_v^2 \cdot A$ .

При решении практических задач этим способом определения моментов инерции не пользуются, так как он приближённый. Однако эллипс инерции применяют для приближённого контроля результатов определения главных центральных моментов инерции сечения и положения главных центральных осей. Покажем это на примере поперечного сечения в виде z-образного профиля.

1) Эллипс должен быть вытянут вдоль сечения (рис. 5.18, б).

Почему это так?

Потому, что одна из главных осей должна быть расположена вдоль сечения, только в этом случае  $J_{xy} = 0$ .

2) Эллипс инерции не может быть больше сечения. В одну сторону он может выйти за контур сечения, а в другую – нет. Эллипс инерции также не может быть намного меньше сечения (рис. 5.19).

Почему это так? С одной стороны  $J_{x_0} = \int_A y_{x_0}^2 \cdot dA$ , а с другой –  $J_{x_0} = i_{x_0}^2 \cdot A$ .

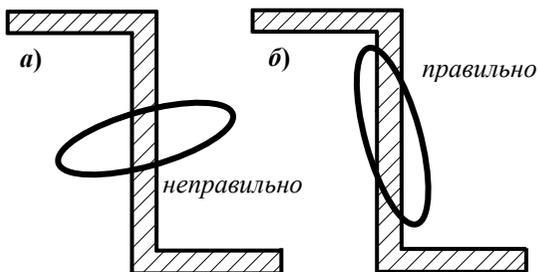


Рис. 5.18. Направление эллипса инерции сечения

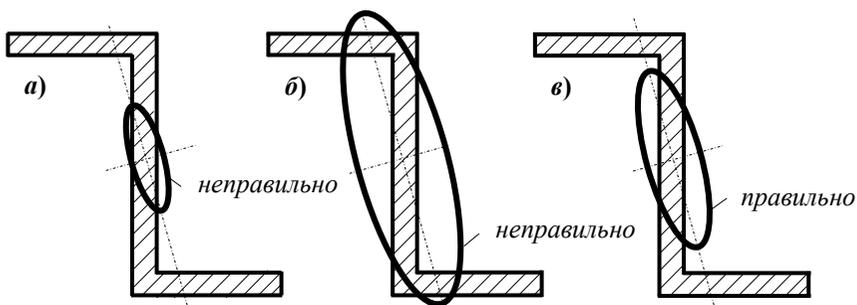


Рис. 5.19. Размеры эллипса инерции сечения

Следовательно,  $i_{x_0}$  – среднеквадратичная величина из ординат сечения, тогда  $|i_{x_0}| < |y_{0\text{наиб}}|$  поэтому в обе стороны эллипс инерции не может выходить за сечение. Радиус инерции  $i_{x_0}$  не может также быть значительно меньше среднеквадратичной величины  $y_0$ .

## 5.9. Определение моментов инерции сложных сечений

Довольно часто детали, испытывающие изгиб, имеют сложное поперечное сечение. Чтобы рассчитать брус на изгиб, нужно знать положение главных центральных осей и главные центральные моменты инерции сечения.

Рассмотрим произвольное сечение, которое разбиваем на простые, определяем площади и моменты инерции составных частей относительно собственных центральных осей ( $A^{(i)}, J_{x_i}^{(i)}, J_{y_i}^{(i)}, J_{x_i y_i}^{(i)}$ ) (рис. 5.20).

По формуле Вариньона определяем положение центра тяжести всего сечения относительно произвольных осей  $u, v$

$$u_c = \frac{\sum u_c^{(i)} \cdot A^{(i)}}{\sum A^{(i)}}, \quad v_c = \frac{\sum v_c^{(i)} \cdot A^{(i)}}{\sum A^{(i)}}.$$

где  $u_c^{(i)}, v_c^{(i)}$  – координаты центров тяжести составных частей.

Далее проводим центральные оси  $x, y$ , их нужно направить параллельно выбранным осям  $u, v$  для составных частей.

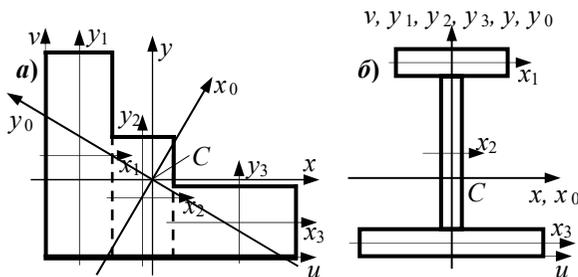


Рис. 5.20. Определение моментов инерции сложных сечений

Определяем моменты инерции всего сечения относительно центральных осей  $x, y$ .

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA = \sum \int_{A_i} y_i^2 \cdot dA = \sum J_{x_i}^{(i)},$$

но  $J_x^{(i)} = J_{x_i}^{(i)} + b_i^2 \cdot A^{(i)}$  – формула перехода от центральных осей.

Используя такие же формулы для других моментов инерции, получим

$$J_x = \sum J_{x_i}^{(i)} + b_i^2 \cdot A^i,$$

$$J_y = \sum J_{y_i}^{(i)} + a_i^2 \cdot A^i,$$

$$J_{xy} = \sum J_{x_i y_i}^{(i)} + a_i \cdot b_i \cdot A^i.$$

Здесь  $b_i$  – расстояния между осями  $x$  и  $x_i$ , а  $b_i$  – между осями  $y$  и  $y_i$ .

Далее, зная моменты инерции сечения относительно центральных осей  $x, y$ , определяем главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) + \sqrt{(J_x - J_y)^2 + J_{xy}^2} \right],$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) - \sqrt{(J_x - J_y)^2 + J_{xy}^2} \right],$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_{xy}}{J_x - J_{y_0}}.$$

Зная эти характеристики сечения, можно определить напряжения и перемещения балки при изгибе.

**Пример:** определить значение и знак угла поворота в зависимости от положения неравнополочного уголка (рис. 5. 21).

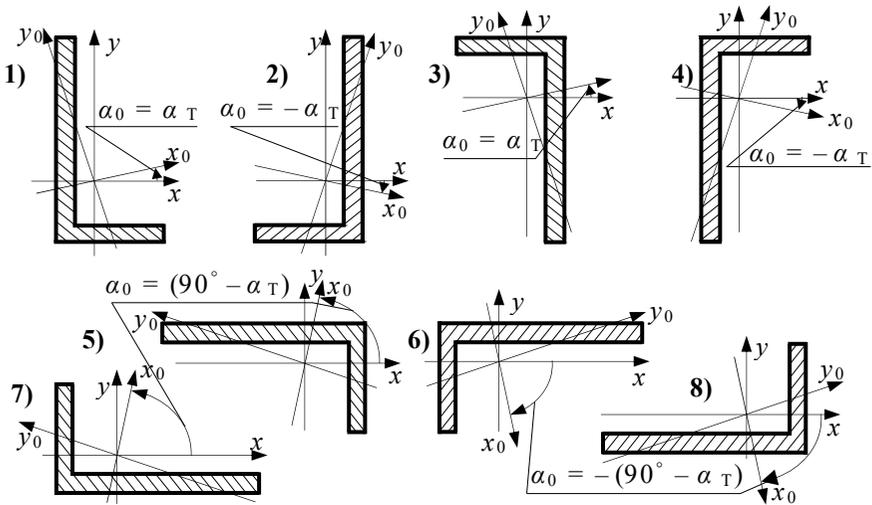


Рис. 5.21 Определение величины и знака угла поворота до главных осей

Задано:  $J_x, J_y, J_{y_0}$  (в таблицах ГОСТа  $J_{min}$ ),  $\alpha_T$   
 Необходимо определить знак  $J_{xy}, \alpha_0$  ( $x \wedge x_0$ ).

Используя формулы  $J_{x_0 y_0} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha$ ,  $J_{x_0} = J_x + J_y - J_{x_0 y_0}$

определяем значение и знак угла  $\alpha_0$  ( $x \wedge x_0$ ). Решения показаны на рис. 5.21.

### 5.10. Вопросы для самопроверки

Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции? Какая существует связь между осевыми и полярным моментами инерции? Основное свойство статического момента сечения. Формулы для определения координат центра тяжести сечения. Как определяются знаки статических моментов и центробежного момента инерции? Что такое моменты сопротивления сечения изгибу и кручению? Формула параллельного переноса осей. Укажите основное свойство всех моментов инерции сечения. Какие оси называются главными, а какие – центральными? Как определяются главные моменты инерции сечения (аналитически и графически)? Как изменяются значения моментов инерции правильных фигур (например, квадрат, круг и т.д.) относительно взаимно перпендикулярных центральных осей при повороте на произвольный угол? Относительно какой оси, осевой момент инерции сечения, достигает наименьшего значения?

## 6. ИЗГИБ

### 6.1. Основные понятия об изгибе. Расчётная схема балки

Начнём с изучения прямых брусьев постоянного поперечного сечения, но затем исследуем, и криволинейные брусья.

Рассмотрим прямолинейный брус, поперечное сечение которого имеет вертикальную ось симметрии, следовательно, оси  $x$ ,  $y$  являются главными центральными осями инерции его поперечного сечения (рис. 6.1).

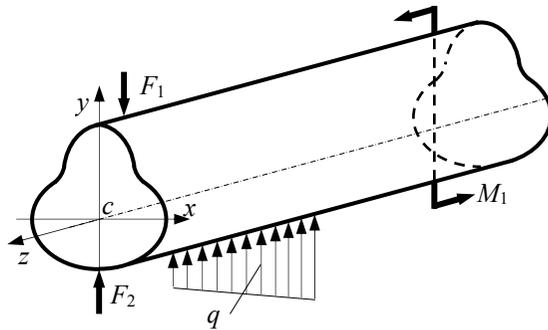


Рис. 6.1. Брус, испытывающий плоский изгиб

Введём новое понятие – понятие о главной плоскости жёсткости бруса. *Главной плоскостью жёсткости бруса называется плоскость, проходящая через ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения.*

Одна из главных плоскостей жёсткости – плоскость наибольшей жёсткости – это плоскость, перпендикулярная оси  $x$ . Другая главная плоскость – плоскость наименьшей жёсткости – это плоскость, перпендикулярная оси  $y$ . Все остальные осевые плоскости, по жёсткости, занимают промежуточное положение. Напомним, что чем меньше перемещения и деформации, тем больше жёсткость.

*Брус испытывает плоский (прямой) изгиб, если он нагружен силами, перпендикулярными его оси и парами сил, плоскость действия которых совпадает с одной из главных плоскостей жёсткости бруса.*

Все внешние силы лежат в одной плоскости  $zcy$  и перпендикулярны оси  $z$ . Если силы не перпендикулярны оси бруса, то будет изгиб с растяжением или сжатием, хотя силы и будут лежать в главной плоскости жёсткости бруса.

Брус, испытывающий изгиб, называется **балкой**.

При исследовании деталей в сопротивлении материалов вместо балки рассматривают расчётную схему, где показывается только ось балки и опоры. Фактические опоры заменяются расчётными связями (расчётными опорами).

Рассмотрим четыре типа схематизированных опор:

1) Шарнирно-подвижная опора (рис. 6. 2). Применяется в конструкции моста. Особенность этого устройства в том, что поперечное сечение под опорой может свободно поворачиваться и перемещаться горизонтально, а вертикально перемещаться не может. Таким образом, из трёх степеней свободы шарнирно-подвижная опора имеет только две степени свободы, а реакция – одна  $R$ .



Рис. 6.2. Шарнирно-подвижная опора

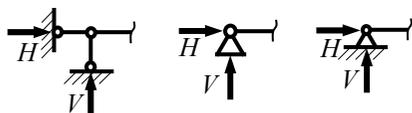


Рис. 6.3. Шарнирно-неподвижная опора

2) Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6. 3). У поперечного сечения под опорой отобраны две степени свободы. Эта опора даёт две реакции  $V$  и  $H$ .

3) Подвижно-зашемлённый конец (рис. 6. 4). Балка вставляется в отверстие без зазора и натяга и может перемещаться горизонтально. Это опорное устройство отбирает две степени свободы. В соответствии с этим, в опоре возникают вертикальная сила  $V$  и пара сил (момент)  $M$ .

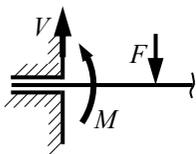


Рис. 6.4. Подвижно-зашемлённый конец

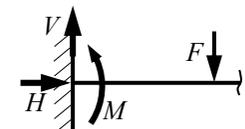


Рис. 6.5. Неподвижно-зашемлённый конец

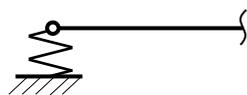


Рис. 6.6. Шарнирно-подвижная опора с податливостью

Есть и другие опоры, которые встречаются реже, например, шарнирно-подвижная опора с податливостью (рис. 6.6).

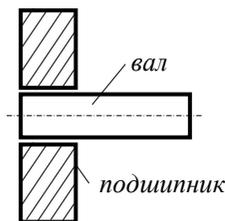


Рис. 6.7. Подшипник скольжения

Как от реальной детали перейти к расчётной схеме – это подробно рассматривается в курсе «Детали машин» и в других специальных дисциплинах. Приведём пример: вал вращения с подшипником скольжения (рис. 6.7). Оказывается, зазора в подшипниках достаточно, чтобы в расчётных схемах использовать шарнирно-подвижную опору.

Балки бывают либо статически определенными, либо статически неопределимыми. Балка на двух опорах (рис. 6.8): реакций опор – 3, статика даёт три уравнения равновесия и, следовательно, это статически определимая балка. Расстояние между опорами называется пролётом балки.

На рисунке 6.9 изображена балка с неподвижно-защемлённым концом. Это статически определимая балка. Такую расчётную схему называют консольной (например, крыло самолёта).

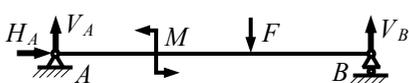


Рис. 6.8. Двухопорная балка



Рис. 6.9. Консольная балка

На рисунке 6.10 изображена неразрезная балка. Она перекрывает несколько пролётов не прерываясь. У этой балки пять неизвестных реакций, а статика даёт три уравнения – следовательно, эта балка два раза статически неопределима. В неразрезных балках степень статической неопределимости равна числу промежуточных опор. Получается так, что уравнений статики хватает только на две крайних

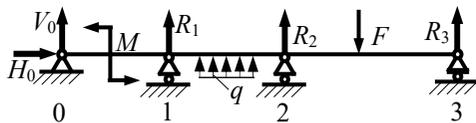


Рис. 6.10. Неразрезная балка

опоры.

## 6.2. Поперечная сила и изгибающий момент

Поперечная сила и изгибающий момент это совокупность внутренних усилий, в поперечном сечении балки, с которыми одна часть балки, действует на другую.

Изобразим балку (рис. 6.11, *a*), испытывающую плоский изгиб. На рисунке показаны, как активные силы, так и силы реакции. Здесь  $q$  – интенсивность распределённой нагрузки.

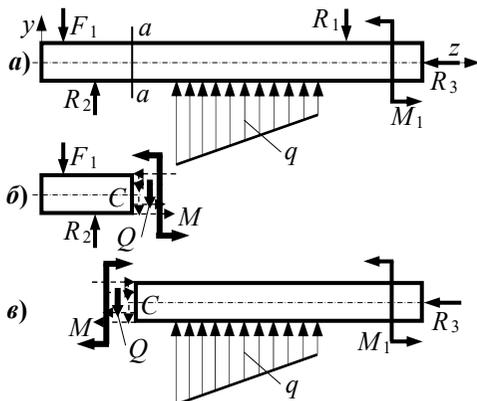


Рис. 6.11. Определение внутренних сил в балке

Будем рассматривать внутренние силы, действующие в поперечном сечении балки. Проводим сечение  $a - a$ , перпендикулярное оси балки.

Отбросим правую часть, изобразим левую (рис. 6.11, *б*) и покажем, как она нагружена. Затем изобразим нагружение правой части (рис. 6.11, *в*).

Приведём силы к центру тяжести сечения  $C$  – будут действовать, только поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . Будет ли нормальная сила  $N$ ? Нет, т. к. нет внешних сил, которые дают проекцию на ось бруса  $z$ .

На рисунке изображены положительные направления поперечной силы и изгибающего момента.

Как вычислить сумму внутренних сил в поперечном сечении балки? Воспользуемся уравнениями статики для рассматриваемой части балки:

$$\sum y = \sum F_y^{\text{лев.внешн.силам}} - Q = 0, \quad \Rightarrow Q = \sum F_y^{\text{лев.внешн.силам}},$$

$$\sum M_c = \sum M_c^{\text{лев.внешн.силам}} - M = 0, \quad \Rightarrow M = \sum M_c^{\text{лев.внешн.силам}}.$$

Здесь приведены уравнения для левой части балки, такие же результаты получаются при рассмотрении равновесия правой части.

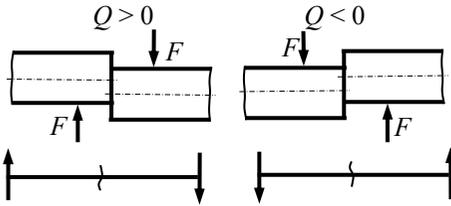


Рис. 6.12. Правило знаков для поперечной силы

**Поперечная сила** в каком-либо поперечном сечении численно равна сумме проекций на плоскость этого сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

Правило знаков (рис. 6.12): если внешняя сила стремится сдвинуть рассматриваемую часть балки по часовой стрелке, то поперечная сила положительна, и наоборот.

**Изгибающий момент** в каком-либо поперечном сечении численно равен сумме моментов относительно центра тяжести этого сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

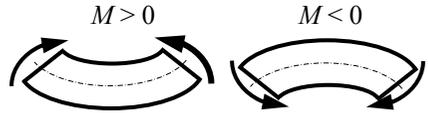


Рис. 6.13. Правило знаков для изгибающего момента

Правило знаков в машиностроении для  $M$  (рис. 6.13): если внешние силы стремятся изгибать, рассматриваемую часть балки, выпуклостью вниз, то изгибающий момент положителен, а если выпуклостью вверх – то отрицателен.

Рассмотрим примеры (рис. 6.14):

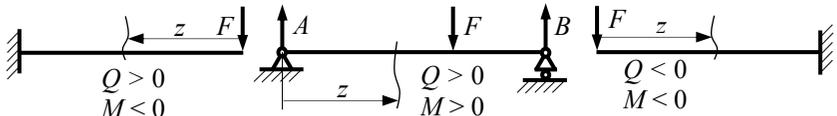


Рис. 6.14. Примеры определения знаков внутренних сил

### 6.3. Дифференциальные зависимости между $q$ , $Q$ и $M$

Изобразим балку (рис. 6.15, а). Вырежем элемент длиной  $dz$ , на котором считаем,  $q = const$  – средняя интенсивность распределённой нагрузки – сила, приходящаяся на единицу длины балки.

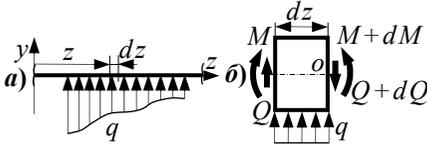


Рис. 6.15. Нагружение бесконечно малого элемента

Интенсивность распределённой нагрузки  $q$ , является алгебраической величиной: если сила направлена вверх, то  $q > 0$ , если вниз, то  $q < 0$ .

Изобразим элемент, отдельно и покажем силы, действующие на него. Слева действуют поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . В правом сечении они получают приращения  $dQ$ ,  $dM$  и равны  $Q + dQ$ ,  $M + dM$ . На рис. 6.15, б показаны положительные направления внутренних сил.

Составляем уравнения равновесия представленного элемента:

$$\sum y = Q + q \cdot dz - Q - dQ = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dz} = q$$

– производная от поперечной силы равна интенсивности распределённой нагрузки.

$$\sum M_o = -M + Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + M + dM = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dz} = Q.$$

– производная от изгибающего момента равна поперечной силе.

При получении последнего выражения, пренебрегли бесконечно малыми величинами второго порядка.

Продифференцировав это выражение и получим третье соотношение

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q.$$

В таком виде эти соотношения справедливы, лишь в случае, когда ось  $z$  направлена слева направо (это учтено, на рисунках – приращения, слева направо). Если ось  $z$  направить, справа налево, то можно повторить выводы, но можно, вместо  $z$ , в соотношениях подставить  $(-z)$  и получить:

$$\frac{dQ}{dz} = -q; \quad \frac{dM}{dz} = -Q; \quad \frac{d^2 M}{dz^2} = q.$$

Необходимо иметь в виду, что  $q$  – величина алгебраическая. Если ось  $y$  направлена вниз, то во всех соотношениях нужно изменить знак перед  $q$ , на обратный.

#### 6.4. Равнодействующая распределённой нагрузки и её положение

Изобразим участок балки, на котором действует распределённая нагрузка (рис. 6.16). Покажем равнодействующую распределённой нагрузки на участке от  $a$  до  $b$ . График изменения интенсивности  $q = q(z)$  называется грузовой линией (название пришло от строителей), площадь под грузовой линией – грузовой площадью.

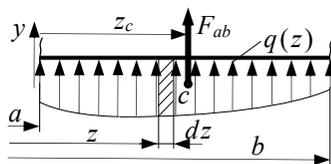


Рис. 6.16. Равнодействующая распределённой нагрузки

$F_{ab} = \int_a^b q(z) dz = \omega_{ab}$  – геометрический смысл равнодействующей – площадь под грузовой линией.

$$F_{ab} \cdot z_c = z_c \cdot \int_a^b q(z) dz = \int_a^b z \cdot q(z) dz.$$

Момент равнодействующей  $F_{ab} \cdot z_c$  равен сумме моментов элементарных сил, откуда

$$z_c = \frac{\int_a^b z \cdot q(z) dz}{\int_a^b q(z) dz}$$

– это формула Вариньона для определения положения центра тяжести грузовой площади, т. е.  $z_c = z_{цт.}$  (грузовой площади).

Таким образом, *равнодействующая распределённой нагрузки равна грузовой площади и проходит через её центр тяжести.*

#### 6.5. Построение эпюр поперечных сил $Q$ и изгибающих моментов $M$

Эпюра – это график изменения внутренних сил вдоль оси балки. Эпюры строятся для того, чтобы:

- 1) найти наиболее опасное сечение и произвести расчёт на прочность;
- 2) вычислить перемещения (графоаналитический метод).

Прежде всего, необходимо знать все силы, действующие на балку и размеры балки. В заданной балке (рис. 6.17) это:  $F$ ,  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $a$ ,  $b$ .

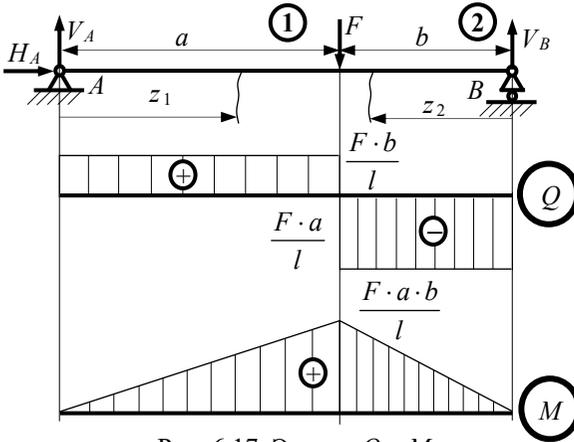


Рис. 6.17. Эпюры  $Q$  и  $M$  в двухопорной балке

1. *Вычисление реакций опор с помощью уравнений статики.* Уравнения составляются так, чтобы неизвестные разделились.

$$\sum M_B = -V_A \cdot l + F \cdot b = 0, \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{b}{l} F;$$

$$\sum M_A = V_B \cdot l - F \cdot a = 0, \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{a}{l} F;$$

$$\sum z = H_A = 0.$$

Необходимо обратить внимание, что для балок с прямой осью, всегда,  $H_A = 0$

Проверка:  $\sum y = V_A - F + V_B = 0$ . Это свидетельствует о том, что реакции опор найдены верно. Довольно часто вычисления ведутся приближённо. В этом случае, нужно сложить отдельно положительные и отрицательные слагаемые сил и разницу сравнить с одной из этих сумм (лучше, с минимальной, из них). Расхождение полученных сумм, должно быть в третьем (лучше, в четвёртом) значащем числе.

2. *Определение поперечных сил.* Для данной балки невозможно выразить поперечную силу с помощью одной функции, поэтому, балку разбиваем на участки 1 и 2.

$$Q_1 = V_A = \frac{b}{l} F = \text{const}, \text{ знак положительный, так как внешняя сила}$$

поворачивает рассматриваемую часть балки, по ходу часовой стрелки.

$$Q_2 = -V_A = -\frac{a}{l}F = const, \text{ знак отрицательный, так как внешняя сила}$$

поворачивает рассматриваемую часть балки, против хода часовой стрелки.

Обращаем внимание на одну особенность, которая возникает при построении эпюр от сосредоточенных сил (рис. 6.18). Нужно ответить на вопрос, чему равна поперечная сила в сечении под сосредоточенной силой:  $\frac{b}{l}F$  или  $-\frac{a}{l}F$  здесь противоречие, так как в одном

и том же сечении, действуют две различные поперечные силы. На самом деле, сила действует, не в точке, а на некоторой малой площадке (рис. 6.18). Тогда, в каждом сечении действует только одна поперечная сила, никакого противоречия, нет. Поскольку, длина этой площадки, несоизмеримо мала, по сравнению с длиной балки, в расчётных схемах, изображается скачок силы.

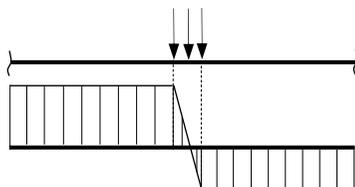


Рис. 6.18. Характер действия сосредоточенной силы

### 3. Определение изгибающих моментов.

$$M_1 = V_A \cdot z_1 = \frac{b}{l}F \cdot z_1, \text{ знак положительный, так как внешняя сила}$$

изгибает балку выпуклостью вниз.  $M_1$  – изгибающий момент в любом сечении первого участка. Выражение для  $M_1$  – линейная функция. Для построения эпюры  $M$  достаточно определить две точки (на границах участка).

$$\text{При } z_1 = 0, \quad M_1 = 0; \text{ при } z_1 = a, \quad M_1 = \frac{a \cdot b}{l}F.$$

Аналогично, по правым силам, вычисляем  $M_2$

$$M_2 = V_B \cdot z_2 = \frac{a}{l}F \cdot z_2 - \text{тоже линейная функция.}$$

$$\text{При } z_2 = 0, \quad M_2 = 0; \text{ при } z_2 = a, \quad M_2 = \frac{a \cdot b}{l}F.$$

Обращаем внимание, что в сечении на границе участков значения изгибающих моментов равны. Строим эпюру  $M$ . Из эпюр  $Q$  и  $M$  видно, что наиболее опасным является сечение под силой  $F$ , так как

здесь, и наибольшая (по абсолютной величине) поперечная сила и, наибольший изгибающий момент.

### 6.6. Контроль правильности построения эпюр $Q$ и $M$

1. Если по длине участка:

а)  $q = 0$ , то есть  $\frac{dQ}{dz} = 0$ , эпюра  $Q = const$ , а эпюра  $M$ , имеет ли-

нейный характер (наклонная прямая);

б)  $q = const$  то есть,  $\frac{dQ}{dz} = const$ , то эпюра  $Q$ , наклонная прямая, а

эпюра  $M$ , кривая второго порядка;

в)  $q \neq const$ , то есть,  $\frac{dQ}{dz} \neq const$ , то эпюра  $Q$ , кривая  $n$ -го порядка,

а эпюра  $M$  – кривая  $(n + 1)$ -го порядка.

2. Выпуклость эпюры  $M$  направлена в сторону, противоположную направлению распределённой нагрузки, так как  $q = \frac{d^2 M}{dz^2}$ .

а)  $q < 0$  – выпуклость эпюры  $M$  вверх (кривая выпуклая);

б)  $q > 0$  – выпуклость эпюры  $M$  вниз (кривая вогнутая).

3. Каждая ордината эпюры поперечных сил  $\left( Q = \frac{dM}{dz} \right)$  – тангенс,

образуемого с осью  $z$ , угла наклона касательной, к эпюре  $M$  в соответствующей точке. Если, идя по левым силам, на некотором участке балки:

а)  $Q > 0$ , то есть,  $\text{tg } \alpha > 0$ , то  $M$  возрастает;

б)  $Q < 0$ , то есть,  $\text{tg } \alpha < 0$ , то  $M$  убывает;

в)  $Q$  проходит через ноль, меняя знак, с плюса на минус, то  $M = M_{max}$ ;

$Q$  проходит через ноль, меняя знак, с минуса на плюс, то  $M = M_{min}$ ;

г)  $Q = 0$ , то есть,  $\text{tg } \alpha = 0$ , то  $M = const$ .

4. В сечении под сосредоточенной силой, на эпюре  $Q$  – скачок на величину силы, а на эпюре  $M$  – излом.

5. На концевой шарнирной опоре,  $Q$  равна реакции этой опоры с соответствующим знаком, а  $M = 0$ , если в опорном сечении, не приложена сосредоточенная пара сил.

6. На свободном конце балки (консоли),  $M = 0$ , если нет сосредо-

точной пары сил, и  $Q = 0$ , если нет сосредоточенной силы.

7. В защемлении,  $Q$  и  $M$ , соответственно равны, опорной реакции и опорному моменту.

8. В сечении, где приложена сосредоточенная пара сил, на эпюре  $M$  – скачок на величину момента этой пары, а на эпюре  $Q$ , это не отражается.

## 6.7. Напряжения в балке при изгибе

Изобразим балку (рис. 6.19, а). На рисунке показаны активные и реактивные силы. После того, как реакции найдены, опоры можно не изображать. Рассмотрим любое сечение  $a - a$ . Выделим площадку  $dA$ . На ней действуют и нормальные, и касательные напряжения (рис. 6.19, б). В элементарной теории изгиба касательные напряжения считаются параллельными плоскости изгиба – это не совсем точно, это допущение.

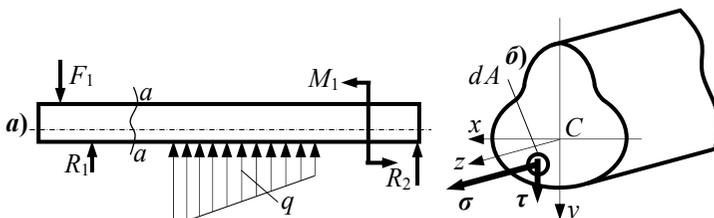


Рис. 6.19. Определение напряжений в балке

Если просуммировать касательные напряжения по всей площади поперечного сечения, мы получаем поперечную силу в данном сечении. Аналогично, сумма нормальных напряжений по всей площади сечения даёт изгибающий момент. Следовательно, касательные напряжения зависят только от поперечной силы  $\tau = \tau(Q)$ , а нормальные напряжения – только от изгибающего момента  $\sigma = \sigma(M)$ .

### 6.7.1. Нормальные напряжения в балке при изгибе

Различают два вида изгиба: чистый и поперечный. Если на некотором участке балки поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент постоянен, то на этом участке балка испытывает *чистый изгиб* (чистый, т. к. изгиб не осложнён сдвигом).

Если поперечная сила не равна нулю, то это *случай поперечного изгиба*.

Пример: рассмотрим балку (рис. 6.20), очевидно, что для неё  $V_A = V_B = F$ . На среднем участке поперечная сила равна нулю, следовательно, балка испытывает чистый изгиб. Почему? Так как

$$\frac{dM}{dz} = Q = 0, \text{ то } M = \text{const.}$$

Будем определять нормальные напряжения при чистом изгибе. Двумя поперечными сечениями  $a$ ,  $-a$  и  $\bar{b} - \bar{b}$  вырежем конечный участок балки и изобразим его отдельно (рис. 6.21). Обозначим через  $x$ ,  $y$  главные центральные оси инерции в правом сечении. Индексы 0 при обозначении осей опущены, так как,

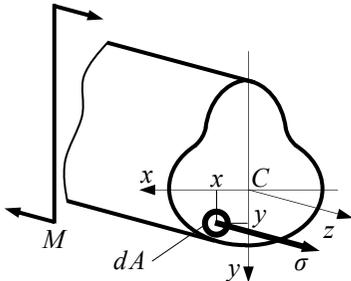


Рис. 6.21. Часть балки при чистом изгибе

предстоит определить. В левом сечении сумма внутренних сил, сведется только к изгибающему моменту  $M$ .

Составим уравнения равновесия участка балки:

$$\sum x = 0 \equiv 0 \text{ – тождество;}$$

$$\sum y = 0 \equiv 0 \text{ – тождество;}$$

$$\sum z = \int_A \sigma dA = 0 \text{ – это, уже не тождество, а необходимая формула;}$$

$$\sum M_x = \int_A y \cdot \sigma dA - M = 0;$$

$$\sum M_y = - \int_A x \cdot \sigma dA = 0 \text{ – знак минус, т. к. } \sigma \text{ вращает рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси } y;$$

$$\sum M_z = 0 \equiv 0 \text{ – тождество.}$$

Из этих шести уравнений, три обратились в тождество. Запишем лишь те уравнения, которые могут быть использованы для вывода формулы:

Из этих шести уравнений, три обратились в тождество. Запишем лишь те уравнения, которые могут быть использованы для вывода формулы:

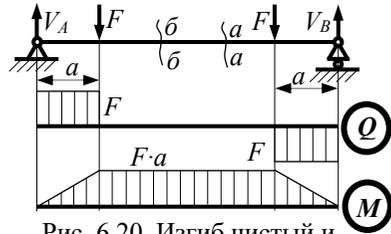


Рис. 6.20. Изгиб чистый и поперечный

в дальнейшем, всегда будем рассматривать, только главные центральные оси. Ось  $y$  направлена вниз, чтобы согласовать знаки изгибающих моментов, координат рассматриваемой точки и напряжений.

Выделим в правом сечении элементарную площадку  $dA$  (выбрана, в первом квадранте),  $x$ ,  $y$  – координаты этой площадки. Покажем напряжения на площадке:  $\tau = 0$ ,  $\sigma = \sigma(x, y)$  –

$$\int_A \sigma dA = 0, \quad (6.1)$$

$$\int_A y \cdot \sigma dA = M, \quad (6.2)$$

$$\int_A x \cdot \sigma dA = 0. \quad (6.3)$$

Имеем три уравнения статики, это, интегральные уравнения. Оказывается, что эти три уравнения, имеют бесконечное множество решений. Следовательно, только с помощью уравнений статики, нельзя определить нормальные напряжения при изгибе, то есть, определение напряжений – статически неопределимая задача. Необходимо получить дополнительные уравнения, выражающие закономерность деформации при изгибе.

Закономерности деформаций изучались экспериментально и теоретически. Рассмотрим балку прямоугольного сечения (конечно, при чистом изгибе) (рис. 6.22).

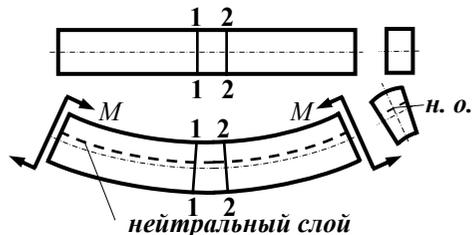


Рис. 6.22. Закономерности деформации балки

Закономерности деформаций:

1 Поперечные сечения, плоские до нагружения, остаются плоскими и после нагружения. Они остаются перпендикулярными к плоскости изгиба и изогнутой оси балки.

2 Верхние волокна будут сжаты, а нижние – растянуты. Естественно, где-то между ними, находится слой, не претерпевающий деформаций. Это, так называемый, нейтральный слой – цилиндрическая поверхность, перпендикулярная плоскости изгиба.

*Линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением, называется нейтральной осью или нейтральной линией поперечного сечения.*

3. В сжатой зоне, поперечное сечение увеличивает свои размеры, а в растянутой – уменьшает. Такое явление, мы наблюдали при центральном растяжении и сжатии (эффект Пуассона). Поэтому можно предположить, что при чистом изгибе, в волокнах балки, имеет место линейное напряжённое состояние – продольные волокна, друг на друга не надавливают.

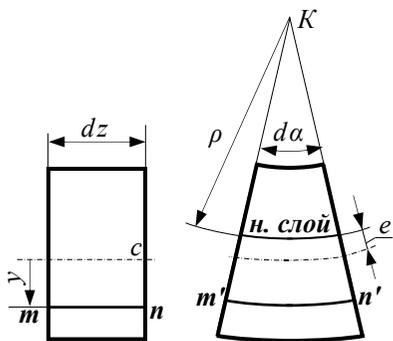


Рис. 6.23. Составление уравнения совместности деформаций

$$l_{mn} = dz = \rho \cdot d\alpha; \quad l_{m'n'} = (\rho + e + y) \cdot d\alpha;$$

$$\Delta l_{mn} = l_{m'n'} - l_{mn} = (\rho + e + y) \cdot d\alpha - \rho \cdot d\alpha = (e + y) \cdot d\alpha;$$

$$\varepsilon_{mn} = \frac{\Delta l_{mn}}{l_{mn}} = \frac{e + y}{\rho}.$$

Далее, по закону Гука определим напряжение  $\sigma = E \cdot \varepsilon_{mn}$

$$\sigma = \frac{E}{\rho} \cdot (e + y) \quad (6.4)$$

– это недостающее уравнение, оно выражает закономерность деформаций, то есть, что сечение остаётся плоским и волокна испытывают линейное напряжённое состояние.

Подставим (6.4) в уравнение (6.1)

$$\frac{E}{\rho} \int (e + y) dA = 0, \text{ но } \frac{E}{\rho} \neq 0, \text{ тогда } e \cdot \int dA + \int y dA = e \cdot A + S_x = 0.$$

Здесь:  $S_x = 0$  – статический момент сечения относительно центральной оси,  $A \neq 0$ , следовательно  $e = 0$  и нейтральный слой, проходит через ось балки.

Тогда, уравнение (6.4) примет вид

$$\sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y. \quad (6.4')$$

Подставим (6.4') в (6.3)

$$\frac{E}{\rho} \int x \cdot y dA = \frac{E}{\rho} J_{xy} = 0, \text{ так как оси } x, y \text{ – главные оси инерции поперечного сечения, то } J_{xy} = 0 \text{ и условие (6.3), выполняется. Теперь}$$

Приступим к составлению дополнительного уравнения (рис. 6.23). Изобразим элемент длиной  $dz$  до нагружения и после нагружения. Здесь  $mn$  – любое волокно;  $e$  – расстояние между нейтральным слоем и осью балки; точка  $K$  – центр кривизны изогнутой оси балки;  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя;  $d\alpha$  – угол между сечениями.

Вычислим относительное удлинение волокна

подставим (6.4') в (6.2):  $\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$ , но  $\int_A y^2 dA = J_x$ , тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x} \quad (6.5)$$

– это промежуточная, но очень важная формула, формула для кривизны изогнутой оси балки. Здесь  $E \cdot J_x$  – жёсткость балки при изгибе.

Подставим выражение (6.5) в (6.4') и получим

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y \quad (6.6)$$

– формула для нормальных напряжений при чистом изгибе.

Эту формулу, можно применять и при поперечном изгибе. Для случая  $Q = const$ , формула для  $\sigma$  точна, а для  $Q \neq const$ , формула даёт погрешность порядка  $h/l$ , где  $h$  – высота сечения,  $l$  – длина балки, следовательно, для длинных балок, ошибка мала.

Из формулы (6.6) видно, что нормальные напряжения, по ширине сечения не меняются, они изменяются, только по высоте сечения по линейному закону. Изобразим эпюру нормальных напряжений, по высоте сечения (рис. 6.24).

Следует обратить внимание на то, что вид эпюры нормальных напряжений не зависит от формы поперечного сечения.

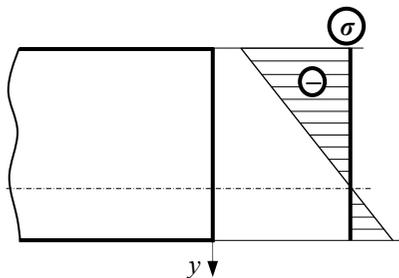


Рис. 6.24. Эпюра нормальных напряжений по высоте сечения

### 6.7.2. Касательные напряжения в балке при изгибе.

#### Формула Журавского

Изобразим балку, испытывающую поперечный изгиб (рис. 6.25, а). Тремя плоскостями, вырежем заштрихованный элемент и изобра-

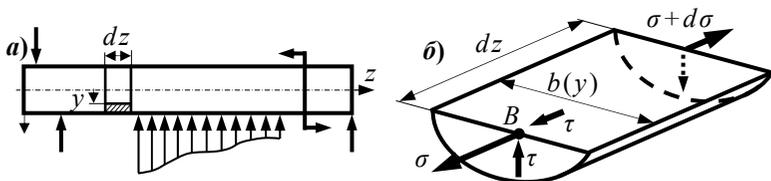


Рис. 6.25. Напряжения в балке при поперечном изгибе

зим его, отдельно (рис. 6.25, б). Покажем напряжения в точке, лежащей, на ребре. Здесь есть, и нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения. Направление касательных напряжений покажем в соответствии с положительной поперечной силой.

В элементарной теории изгиба считается, что, во-первых, касательные напряжения, по ширине сечения не изменяются и, во-вторых, что касательные напряжения в сечении, имеют только вертикальную составляющую, параллельную плоскости изгиба,  $\tau = \tau(y, z)$ . Эти допущения, не являются точными.

В точке  $B$ , но в продольном сечении, действуют такие же касательные напряжения в соответствии с законом парности касательных напряжений. Нормальных напряжений в продольном сечении нет, так как, давлением между слоями, можно пренебречь. Если рассматривать второй торец элемента, то там тоже будут, и нормальные и касательные напряжения.

Покажем элемент ещё раз, но по граням, покажем равнодействующие сил (рис. 6.28). Силы приводятся к равнодействующим так, чтобы главный момент, был равен нулю. Верхняя грань, бесконечно мала, поэтому равнодействующая, равна  $dT$ . Балка находится в равновесии, поэтому и элемент, должен находиться в равновесии, тогда  $\sum z = N - dT + N + dN = 0$ , отсюда  $dT = dN$ . Далее,  $dT$  и  $dN$ , нужно выразить через напряжения.

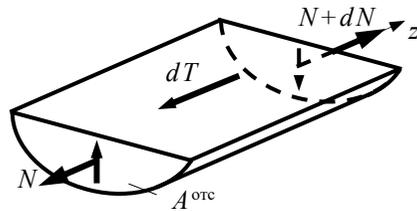


Рис. 6.26. Равнодействующие внутренних сил

$dT = \tau \cdot b(y) \cdot dz$  обращаем внимание, что касательные напряжения берутся с горизонтальной грани.

Найдём нормальную силу  $N$ , действующую на площади отсечённой части

$$N = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma \cdot dA, \text{ где } \sigma \cdot dA, \text{ – элементарная сила, } A^{\text{отс}} \text{ – площадь}$$

отсечённой части сечения. Но  $\sigma = \frac{M}{J_x} y$ , тогда

$$N = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma dA = \int_{A^{\text{отс}}} \frac{M}{J_x} y dA = \frac{M}{J_x} \cdot S_x^{\text{отс}}, \text{ где } S_x^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y dA.$$

Продифференцируем выражение для  $N$  и найдём  $dN$ :

$$dN = \frac{S_x^{\text{отс}}}{J_x} \cdot dM.$$

Теперь подставим значения  $dT$  и  $dN$  в уравнение равновесия

$$\tau \cdot b(y) \cdot dz = \frac{S_x^{\text{отс}}}{J_x} \cdot dM, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{dM \cdot S_x^{\text{отс}}}{dz \cdot J_x \cdot b(y)},$$

учтём, что  $\frac{dM}{dz} = Q$ , и получим

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)}.$$

– формула Журавского для касательных напряжений в поперечном сечении балки. Такие же напряжения, будут действовать и в продольном сечении.

В формуле Журавского:

$Q$  – поперечная сила в том сечении, в котором определяются касательные напряжения;

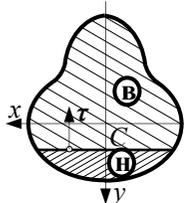


Рис. 6.27. Статические моменты верхней и нижней частей сечения

$S_x^{\text{отс}}$  – статический момент относительно нейтральной оси, части сечения, расположенного выше или ниже точки, в которой определяется  $\tau$ ;

$J_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси;

$b(y)$  – ширина сечения на уровне точки, в которой определяется  $\tau$ .

Принято вычислять касательные напряжения, по абсолютной величине, то есть, в формуле используется абсолютная величина  $Q$  и  $S_x^{\text{отс}}$ , а направление  $\tau$ , совпадает с направлением поперечной силы.

Докажем, что при вычислении  $S_x^{\text{отс}}$  можно брать, как верхнюю, так и нижнюю части сечения (рис. 6.27).

Докажем, что при вычислении  $S_x^{\text{отс}}$  можно брать, как верхнюю, так и нижнюю части сечения (рис. 6.27).

$$S_x^{\text{отс}} = S_{x_{\text{в}}}^{\text{отс}} + S_{x_{\text{н}}}^{\text{отс}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{x_{\text{в}}}^{\text{отс}} = -S_{x_{\text{н}}}^{\text{отс}} \quad \Rightarrow \quad |S_{x_{\text{в}}}^{\text{отс}}| = |S_{x_{\text{н}}}^{\text{отс}}|.$$

Примеры: 1. Касательные напряжения в балке прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.28).

Определим величины, входящие в формулу Журавского.  
 $b(y) = b$ ;

$$S_{x_n}^{\text{отс}} = b \cdot (h - y) \cdot \frac{1}{2} (h + y) = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right]; \quad J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Подставим эти значения в формулу Журавского, произведём сокращения и учитывая, что

$b \cdot h = A$ , получим

$$\tau = \frac{Q \cdot b \cdot h^2}{8 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right] = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right]$$

– формула для касательных напряжений при изгибе в балке прямоугольного поперечного сечения.

Изобразим эпюру касательных напряжений по высоте сечения (рис. 6.29). Из полученной формулы видно, что при  $y = \pm h/2$   $\tau = 0$ . Это можно установить и без формулы, по закону парности касательных напряжений, так как внешние поверхности не нагружены.

Необходимо обратить внимание на то, что касательные напряжения по высоте, распределены неравномерно. Наибольшие касательные напряжения действуют в точках на нейтральной оси и равны

$$\tau_{\text{наиб}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A}.$$

2. Касательные напряжения в балке круглого поперечного сечения (без вывода) (рис. 6.30).

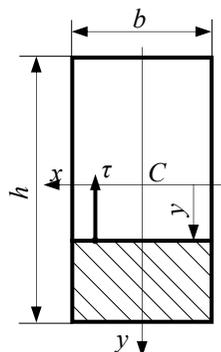


Рис. 6.28. Статический момент прямоугольного сечения

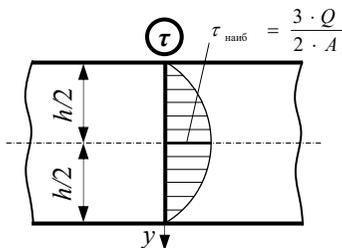


Рис. 6.29. Распределение касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения

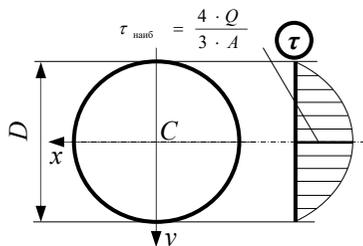


Рис. 6.30. Распределение касательных напряжений по высоте круглого сечения

В этом случае  $\tau_{\text{наиб}} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A}$ , это меньше чем в прямоугольном.

3. Касательные напряжения в балке двутаврового сечения (рис. 6.31).

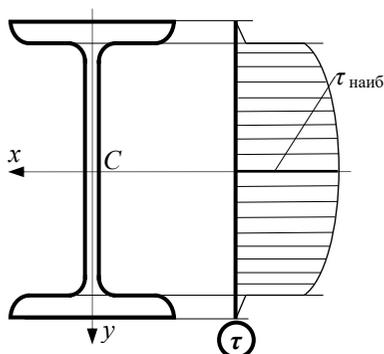


Рис. 6.31. Распределение касательных напряжений по высоте двутавра

Построим эпюру касательных напряжений по высоте сечения без чисел, рассуждая по формуле Журавского. Пусть точка, в которой определяется  $\tau$ , перемещается от верхних волокон к нижним. В пределах полки быстро возрастает статический момент  $S_x^{отс}$  и практически не меняется ширина сечения  $b(y)$ . По высоте стенки медленно возрастает (до нейтральной оси)  $S_x^{отс}$  и не меняется  $b(y)$ , а на

границе полки со стенкой резко уменьшается  $b(y)$  (на эпюре  $\tau$  – скачок). Ниже нейтральной оси – эпюра симметрична с верхней частью. Наибольшие касательные напряжения и в этом случае, действуют в точках на нейтральной оси.

**Выводы:** 1. Наибольшие касательные напряжения для симметричных сечений, действуют в точках на нейтральной оси.

2. Вид эпюры касательных напряжений, существенно зависит от формы поперечного сечения, в то время как, вид эпюры нормальных напряжений, не зависят от формы сечения.

### 6.8. Расчёт балок на прочность по допускаемым напряжениям

При расчёте балок по допускаемым напряжениям за опасное принимается такое состояние при котором эквивалентные напряжения достигают предела текучести  $\sigma_t$ . Этот способ расчёта применяется для балок, в которых остаточные деформации недопустимы. Выбираем в произвольном сечении балки (рис. 6.32) произвольную точку  $A$ , в которой будем оценивать прочность (в дальнейшем прочность будем оценивать в опасном сечении). В поперечном сечении действуют поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , пусть для определённости они будут положительными.

По формулам  $\sigma = \frac{M}{J_x} y$ ,  $\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)}$  определяем напряжения и строим их эпюры (см. рис. 6.32).

Теперь, в окрестности точки  $A$  вырежем элемент и покажем напряжения по граням (рис. 6.33). На верхней и нижней площадках,

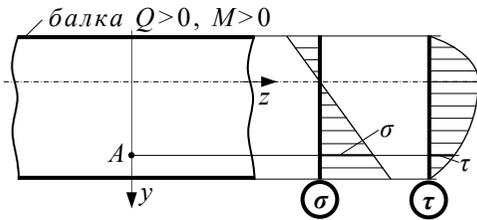


Рис. 6.32. Напряжения в поперечном сечении балки

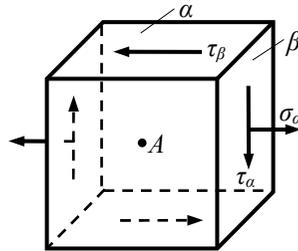


Рис. 6.33. Напряжённое состояние балки в точке

нормальных напряжений нет, действуют только касательные напряжения. На боковых гранях, действуют, и нормальные, и касательные напряжения. Элемент испытывает плоское напряжённое состояние:  $\sigma_\alpha = \sigma$ ,  $\tau_\alpha = \tau$ ,  $\sigma_\beta = 0$ ,  $\tau_\beta = -\tau$ .

Для составления условия прочности необходимо найти главные напряжения

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

$$\text{Тогда } \sigma_I = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right], \quad \sigma_{II} = \frac{1}{2} \left[ \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

$$\text{Так как } \sigma_I > 0 \text{ и } \sigma_{II} < 0, \text{ присвоим главным напряжениям арабские индексы } \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right], \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

Далее, следует воспользоваться подходящей теорией прочности. Балки, обычно изготавливаются из сталей, из алюминиевых или магниевых сплавов, то есть, из пластичных материалов, поэтому, воспользуемся IV-й теорией прочности.

$$\sigma_{\text{экв IV}} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}.$$

Подставив значения главных напряжений, получим  $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$ . Эта формула применима, не только для положительных  $Q$  и  $M$ , но и, для отрицательных. Тогда  $\sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma]$  –

условие прочности, для произвольной точки балки, по способу допускаемых напряжений.

Чтобы проверить прочность всей балки, нужно взять опасную точку наиболее опасного сечения, то есть, для всей балки  $\sigma_{\text{экв } II}^{\text{наиб}} \leq [\sigma]$ .

Как найти  $\sigma_{\text{экв } II}^{\text{наиб}}$ ? Нужно исследовать  $\sigma_{\text{экв } II} = f(y, z)$  на экстремум. Сначала исследовать, по контуру сечения, затем внутри, найти все экстремумы, а затем выбрать, наибольшее, по абсолютной величине, значение.

Опыт расчётов, накопленных к настоящему времени, показывает, что наибольшие эквивалентные напряжения, могут быть в одной из следующих точек:

**1 точка**, с наибольшим по абсолютной величине нормальным напряжением;

**2 точка**, с наибольшим касательным напряжением в поперечном сечении;

**3 точка**, в месте резкого изменения ширины поперечного сечения, в сечении с большими значениями поперечных сил и изгибающих моментов.

Рассмотрим подробнее расчёты для этих точек.

**Первая опасная точка** (почти всегда, она и бывает самой опасной) (рис. 6.34).

Наибольшие, по абсолютной величине, нормальные напряжения, возникают в наиболее удалённой, от нейтральной оси, точке сечения,

где действует  $|M|_{\text{наиб}}$ , и равны  $|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{J_x} |y|_{\text{наиб}}$ . В этой точке,

$\tau = 0$ , тогда  $\sigma_{\text{экв } II}^{\text{наиб}} \leq |\sigma|_{\text{наиб}} \leq [\sigma]$ . Но  $\frac{J_x}{|y|_{\text{наиб}}} = W_x$ , тогда условие проч-

ности в первой опасной точке запишется в виде

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Таким образом, первая опасная точка, находится в сечении с наибольшим, по абсолютной величине, изгибающим моментом в наиболее удалённой, от нейтральной оси, точке.

**Вторая опасная точка** (рис. 6.35).

Это точка с наибольшими касательными напряжениями. Выясним, где она находится. По формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)}, \text{ тогда } |\tau|_{\text{наиб}} = \frac{|Q|_{\text{наиб}}}{J_x} \cdot \left( \frac{S_x^{\text{отс}}}{b(y)} \right)_{\text{наиб}}$$

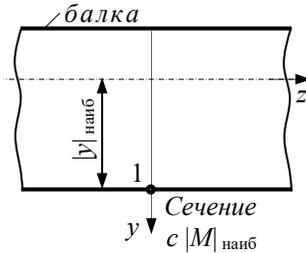


Рис. 6.34. Первая опасная точка

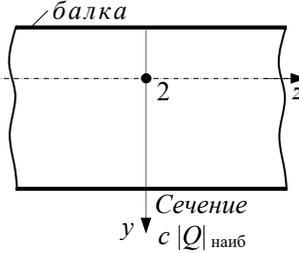


Рис. 6.35. Вторая опасная точка

Наибольшее значение касательных напряжений будет тогда, когда выражение в круглой скобке, будет наибольшим, то есть на нейтральной оси (н.о.).

$$|\tau|_{\text{наиб}} = \frac{|Q|_{\text{наиб}}}{J_x} \cdot \left( \frac{S_x^{\text{отс}}}{b(y)} \right)_{\text{н.о.}}$$

Таким образом, вторая опасная точка, находится на нейтральной оси, в сечении с наибольшей, по абсолютной величине, поперечной силой. Запишем условие прочности, для этой точки. Для неё:  $\sigma = 0$ ,

$\tau = \tau_{\text{наиб}}$ , тогда  $\sigma_{\text{экв.лр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{3} \tau_{\text{наиб}}$ . Но  $[\tau]_{\text{IV}} = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,

$$|\tau|_{\text{наиб}} = \frac{|Q|_{\text{наиб}}}{J_x} \cdot \left( \frac{S_x^{\text{отс}}}{b(y)} \right)_{\text{н.о.}} \leq [\tau]_{\text{IV}}$$

– условие прочности, во второй опасной точке.

Эта точка, бывает наиболее опасной, только для коротких балок.

**Третья опасная точка** (рис. 6.36).

Эта точка, находится в месте резкого изменения ширины сечения. Такое наблюдается, например, у двутавровых балок

$$\sigma_{\text{экв.лр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = [\sigma]$$

– условие прочности в третьей опасной точке.

Эту точку нужно рассматривать в том сечении, где подкоренное выражение будет наибольшим. В ряде случаев это просто, когда  $|M|_{\text{наиб}}$  и  $|Q|_{\text{наиб}}$  находятся в одном сечении, тогда, именно в этом сечении, следует проверять третью опасную точку. Но, обычно  $|M|_{\text{наиб}}$  и  $|Q|_{\text{наиб}}$  находятся в разных сечениях, поэтому, учитывая, что в длинных балках, главную роль играют нормальные напряжения, эту проверку (то есть проверку третьей опасной точки) делают в сечении с большим изгибающим моментом и  $Q \neq 0$ .

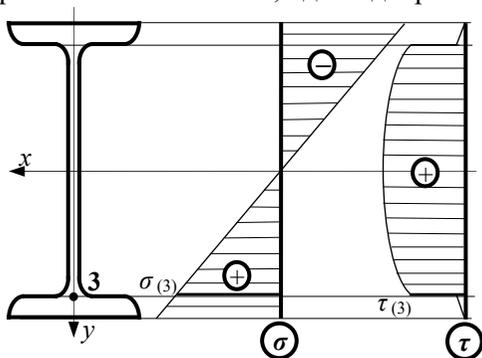


Рис. 6.36. Третья опасная точка

Эта точка оказывается наиболее опасной, весьма редко.

### 6.9. Рациональная форма поперечного сечения балки

Рассмотрим, два случая:

Первый случай, когда материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

В отыскании наиболее рациональной формы сечения будем отталкиваться, от прямоугольного сечения. Касательные напряжения, меньше влияет на прочность и здесь их учитывать не будем (рис. 6.37).

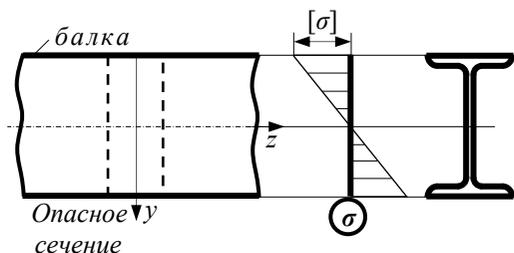


Рис. 6.37. Рациональная форма поперечного сечения балки из пластичных материалов

Из эпюры нормальных напряжений видно, что полностью возможности материала балки используются, только в наиболее удалён-

ных, от нейтральной оси, точках сечения, то есть, в верхней и нижней точках. В других точках сечения, возможности материала недоиспользуются, особенно, в области нейтральной оси. Необходимо перераспределить материал, в область наибольших напряжений, тогда, грузоподъёмность балки, увеличится (за счёт увеличения  $J_x$  и, соответственно,  $W_x$ ).

Итак, наиболее экономичной формой поперечного сечения для балок, изготовленных из материала, одинаково сопротивляющегося и растяжению, и сжатию, является двутавровое сечение. Изгибающий момент, большей частью воспринимается полками, так как значительные нормальные усилия, приходится на полки, а поперечная сила, воспринимается стенкой. Однако, очень высокие балки применять нельзя, так как может быть потеря устойчивости стенки двутавра.

Второй случай, когда материал балки, неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то есть  $[\sigma]_{сж} > [\sigma]_p$ .

Какая форма поперечного сечения наиболее экономична в этом случае? Очевидно, наиболее экономичная форма такая, при которой напряжения в крайних волокнах будут равны допускаемым напряжениям. Построим вначале эпюру нормальных напряжений (рис. 6.38).

Далее, по эпюре, построим сечение, для которого, эта эпюра будет справедлива. Сечение должно иметь такую форму, чтобы его центр тяжести, был смещён по оси  $y$ . Этого можно достичь, применяя тавровое сечение, но при этом необходимо, чтобы полка тавра, испытывала растяжение. Применимы, и двутавры, но разнополые, однако они сложнее в изготовлении.

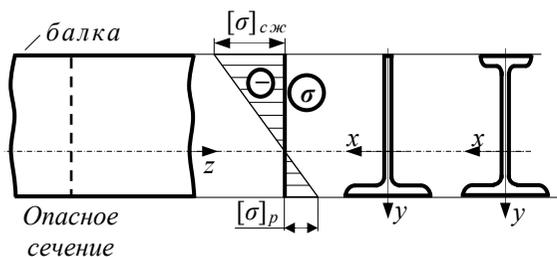


Рис. 6.38. Рациональная форма поперечного сечения балки из хрупких материалов

## 6.10. Перемещения балок при изгибе

### 6.10.1. Прогиб и поворот поперечного сечения балки

Рассмотрим консольную балку, нагруженную сосредоточенной силой. Ось  $y$  направим вверх, т. к. необходимо получить основные формулы со знаком «плюс» (рис. 6.39). Строго говоря, силу  $F$  нужно приложить к изогнутой балке. Горизонтальные перемещения на много меньше вертикальных, поэтому их не рассматриваем.

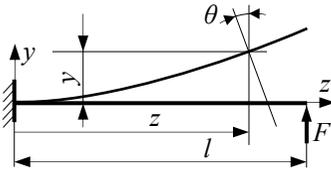


Рис. 6.39. Перемещения в балке

Перемещения балки:

$y$  – прогиб балки, в рассматриваемом сечении – это вертикальное перемещение центра тяжести поперечного сечения. После изгиба, поперечное сечение остаётся плоским и перпендикулярным оси балки;

$\theta$  – угол поворота поперечного сечения балки или поворот поперечного

сечения.

Зная  $y$  и  $\theta$ , можно определить положение любой точки балки. Пусть  $y(z)$  – уравнение изогнутой оси балки или уравнение упругой линии балки. Покажем угол  $\theta(z)$ , на который повернётся данное сечение балки. Далее угол, образованный касательной к изогнутой оси и горизонталью, тоже равен углу  $\theta(z)$  (рис. 6.40). Следовательно  $\frac{dy}{dz} = \operatorname{tg} \theta$ , но  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ , так как

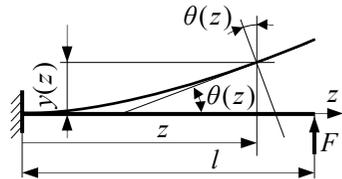


Рис. 6.40. Связь между углом поворота и производной

угол  $\theta$  весьма мал. Деформации балки весьма малы даже при напряжениях, равных допусаемым, поэтому

$$\theta = \frac{dy}{dz}.$$

Правило знаков для  $\theta$ : если  $\theta > 0$ , тогда  $\frac{dy}{dz} > 0$  (случай, показанный на рисунке 6.40), то сечение поворачивается против часовой стрелки, а если  $\theta < 0$ , то – по ходу часовой стрелки. Это правило справедливо для случая, когда ось  $z$  направлена слева направо. Если изменить направление оси  $z$ , то правило знаков изменится на проти-

воположное. Правило знаков для прогибов: если  $y > 0$ , то прогиб происходит вверх, а если  $y < 0$ , то прогиб происходит вниз. Знак прогиба, не зависит от направления оси  $z$ .

### 6.10.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Запишем формулу для кривизны балки, которая была получена при выводе формулы для нормальных напряжений

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x} \quad (6.7)$$

Эта формула получена для чистого изгиба, когда отсутствует поперечная сила. Что может изменить  $Q$ ? Она несколько изменяет прогибы и, следовательно, кривизну, но поправка, которую вносит поперечная сила невелика и ею пренебрегают. Поэтому формулу (6.5) можно применять и при поперечном изгибе. Она является практически точной (теоретически, нет).

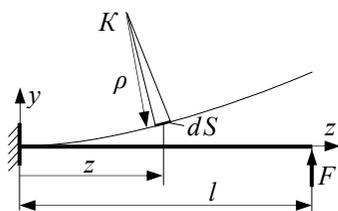


Рис. 6.41. Элемент изогнутой оси

Рассмотрим любое сечение балки  $z$  и элемент длиной  $dS$ . Из алгебры известно, что элемент  $dS$  можно считать элементом окружности.  $K$  – центр кривизны изогнутой оси балки в сечении  $z$ . С помощью формулы (1) кривизна выражается через внешние силы, упругие свойства материала, размеры и форму поперечного сечения балки (рис. 6.41).

Кривизну можно выразить, и через уравнение изогнутой оси балки. Из линейной алгебры известно

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.8)$$

Чтобы приравнять правые части формул (6.7) и (6.8), необходимо выяснить, будут ли они с одинаковым знаком.

Формула (6.7): балка изгибается выпуклостью вниз, поэтому  $\frac{1}{\rho} > 0$ , так как  $M > 0$ ; формула (6.8):  $\frac{1}{\rho} > 0$ , так как  $y'' > 0$ , то есть эти формулы, дают кривизну с одинаковым знаком. Теперь можно приравнять правые части формул

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{E \cdot J}$$

– полное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Здесь исключён индекс у  $J$ , так как в дальнейшем будем считать, что  $J$  – это момент инерции сечения относительно нейтральной оси, а индекс писать не будем.

Это нелинейное дифференциальное уравнение, которое можно решить на компьютере. Однако в этом нет необходимости, так как уравнение, можно упростить.

Поскольку  $y' = \theta \ll 1$ , а  $(y')^2 \ll \ll 1$ , то можно записать  $1 + (y')^2 \approx 1$ .

Умножим обе части равенства, на  $E \cdot J$  и получим

$$E \cdot J \cdot y'' = M(z) \quad (6.9)$$

– облеглощённое дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (не приближённое). Это, уже простое уравнение, которое легко решается.

Проинтегрируем это уравнение

$$E \cdot J \cdot y' = \int_l M(z) dz + C$$

– уравнение для углов поворота сечений.

Проинтегрируем уравнение, ещё раз

$$E \cdot J \cdot y = \int_l dz \int_l M(z) dz + C \cdot z + D$$

– уравнение для прогибов.

В этих уравнениях,  $C$  и  $D$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (условий закрепления на границах участков).

Размерности:  $C$  – произведение силы на длину в квадрате,  $D$  – произведение силы на длину в кубе.

Замечание: Полученные формулы для  $\theta$  и  $y$  справедливы при  $(y')^2 \ll \ll 1$ . По ним нельзя определять перемещения гибких балок, здесь нужно использовать, полное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

Пример (рис. 6.42). Для заданной балки определить прогиб и угол поворота сечения в концевом сечении консоли  $A$ .

$$M(z) = F \cdot (l - z), \text{ тогда}$$

$$E \cdot J \cdot y'' = F \cdot (l - z),$$

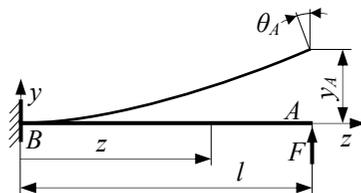


Рис. 6.42. Определение перемещений

$$E \cdot J \cdot y' = F \cdot \left( l \cdot z - \frac{z^2}{2} \right) + C,$$

$$E \cdot J \cdot y = F \cdot \left( \frac{l \cdot z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C \cdot z + D.$$

Из граничных условий определяем постоянные интегрирования:

$$1) \text{ при } z = 0 \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0;$$

$$2) \text{ при } z = 0 \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0.$$

Тогда

$$\theta = y' = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \left( l \cdot z - \frac{z^2}{2} \right), \quad \text{при } z = l \quad \theta_A = y'(l) = \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot J}.$$

Знак плюс – следовательно поворот сечения происходит против часовой стрелки.

$$y = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \left( \frac{l \cdot z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right), \quad \text{при } z = l \quad y_A = y(l) = \frac{F \cdot l^3}{3 E \cdot J}.$$

Знак плюс – следовательно, прогиб происходит вверх.

Конкретизируем этот пример: для заданной стальной балки (см. рис. 6.44) подобрать двутавровое сечение и определить прогиб и угол поворота сечения  $A$ , если  $F = 20$  кН,  $l = 2$  м,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Наиболее опасным является сечение  $B$  (заделка)  
 $|M|_{\text{наиб}} = F \cdot l = 20 \cdot 2 = 40$  кНм.

$$W_x \geq \frac{|M|_{\text{наиб}}}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3.$$

Выбираем – двутавр № 22  $a$ :  $W_x = 254 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 2790 \text{ см}^4$ . Теперь определяем перемещения

$$\theta_A = y'(2\text{м}) = \frac{F \cdot l^2}{2 E \cdot J} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 7,168 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,411^\circ,$$

$$y_A = y'(2\text{м}) = \frac{F \cdot l^3}{3 E \cdot J} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 4,779 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4,779 \text{ мм}.$$

Из данного примера видно, что

$$(y')^2 = (7,168 \cdot 10^{-3})^2 = 5,135 \cdot 10^{-5} \lll 1.$$

## 6.11. Балки переменного сечения

До сих пор мы рассматривали балки постоянного сечения, однако по конструктивным соображениям или с целью уменьшения веса детали машин часто, балки изготавливают переменного сечения.

Условно балки переменного сечения можно разделить на три группы.

**1. Балки, имеющие местные изменения формы и размеров, например, отверстия, галтели (рис. 6.43).**

Отверстия, галтели, выточки вызывают концентрацию напряжений, поэтому при расчёте на прочность балок с концентраторами формулы для балок постоянного сечения не применимы (нужно учитывать концентрацию напряжений). Концентрация напряжений имеет местный характер, поэтому при определении перемещений она не учитывается.

**2. Ступенчатые балки (рис. 6.44).**

В частях сопряжённых участков с различными размерами также возникает концентрация напряжений, которую нужно учитывать, при расчёте на прочность. При определении перемещений, расчёты ведутся по каждому участку, а результаты суммируются.

**3. Балки с плавно изменяющимися размерами (формой) (рис. 6.45).**

При расчёте на прочность балок с плавно изменяющимися размерами сечения можно пользоваться формулами для балок постоянного сечения, предварительно определив наиболее опасное сечение – сечение, в котором возникают  $|\sigma|_{\text{наиб}}$ . Для этого составляется функция  $|\sigma|_{\text{наиб}} = f(z)$  и ищется её экстремум.

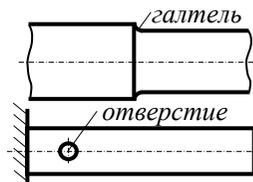


Рис. 6.43. Балки с местными изменениями формы и размеров

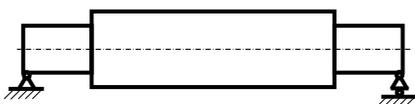


Рис. 4.44. Ступенчатая балка



Рис. 4.45. Балка с плавно изменяющимися размерами

При определении перемещений, для всех балок, можно пользоваться, формулами для балок постоянного сечения, только здесь будет  $J = J(z)$ .

$$E \cdot J(z) \cdot y''(z) = M(z)$$

$$\theta = y' = \frac{1}{E} \int \frac{M(z)}{J(z)} dz + C,$$

$$y = \frac{1}{E} \int_l dz \int_l \frac{M(z)}{J(z)} dz + C \cdot z + D.$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  находятся из граничных условий.

### 6.12. Балки равного сопротивления

Рассмотрим балку на двух опорах, нагруженную силой (рис. 6.46, а) и построим эпюру внутренних сил (рис. 6.46, б, в). Как назначается поперечное сечение, для балок постоянного сечения?

$$W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]}.$$

В такой балке, полностью нагружено только одно сечение  $B$ , в котором  $|\sigma|_{\max} = [\sigma]$ . Во всех других сечениях, балка недогружена. Напрашивается вывод: уменьшить размеры сечения так, чтобы во всех сечениях, было  $|\sigma|_{\max} = [\sigma]$ , тогда получим балку равного сопротивления.

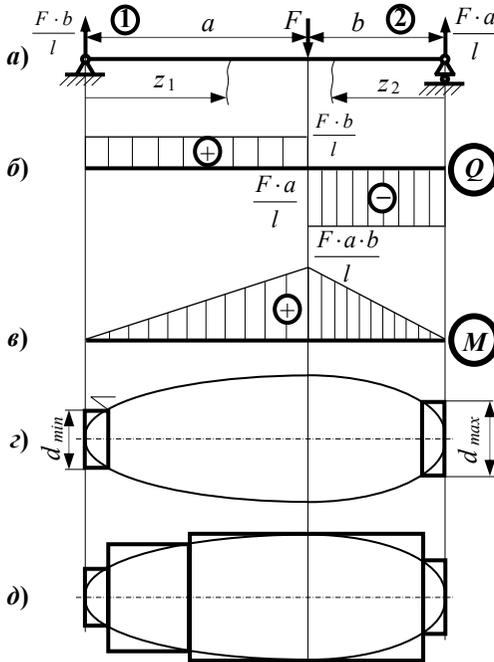


Рис. 6.46. Балка равного сопротивления

Балкой равного сопротивления называется такая балка, в каждом сечении которой наибольшее напряжение равно допускаемому.

Для балки, показанной на рис. 6.46, выясним, как будет изменяться её поперечное сечение, если она будет балкой равного сопротивления.

$$\text{В балке равного сопротивления } \frac{|M(z)|}{W(z)} \leq [\sigma] \text{ или } W(z) \geq \frac{|M(z)|}{[\sigma]}.$$

Для определённости будем рассматривать балку круглого поперечного сечения с диаметром  $d(z)$

$$W(z) = \frac{\pi \cdot d^3(z)}{32} \Rightarrow d(z) \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M(z)}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

$$\text{Конкретизируем для участков } M(z_1) = \frac{F \cdot b}{l} z_1; \quad M(z_2) = \frac{F \cdot a}{l} z_2,$$

тогда

$$d_1(z) \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot F \cdot b \cdot z_1}{\pi \cdot l \cdot [\sigma]}}; \quad d_2(z) \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot F \cdot a \cdot z_2}{\pi \cdot l \cdot [\sigma]}} \quad - \text{ так изменяются диа-}$$

метры сечений в балке, то есть изменяются по закону  $z^{\frac{1}{3}}$ . Изобразим балку (рис. 6.46, з).

С приближением к опорам ( $d \rightarrow 0$ ) нормальные резко уменьшаются, но возле опор имеются касательные напряжения от поперечной силы и они становятся опасными. Диаметр балки у опор, нужно подобрать из условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\text{наиб}} \leq [\tau], \quad \text{но} \quad \tau_{\text{наиб}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot d^2}. \quad \text{Откуда}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{16 \cdot Q}{3 \cdot \pi \cdot [\tau]}} \quad - \text{ это для участков балки, прилегающих, к опорам.}$$

На практике, балку изготавливают ступенчатой (рис. 6.46, д).

### 6.13. Вопросы для самопроверки

Какой изгиб называется прямым чистым, прямым поперечным? Что такое нейтральный слой, силовая плоскость, нейтральная линия (ось)? Как взаимно расположены силовая и нейтральная линии при прямом изгибе? Как изменяются нормальные и касательные напряжения по сечению в направлении силовой и нейтральной осей при прямом поперечном изгибе балки? В каких точках поперечного сечения балки возникают наибольшие нормальные напряжения? Какие приёмы используют при интегрировании? Как решаются основные задачи расчёта на прочность при плоском изгибе?

## 7. КРУЧЕНИЕ

Это четвёртая и последняя простая деформация, которая изучается в сопротивлении материалов.

### 7.1. Основные понятия о кручении. Крутящий момент

Будем рассматривать брусья постоянного круглого поперечного сечения с прямой осью.

**Брусья испытывают деформацию кручения, если они нагружены парами сил в плоскостях, перпендикулярных оси бруса.**

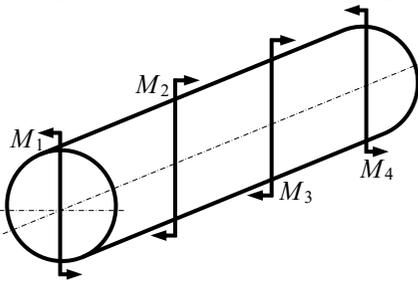


Рис. 7.1. Брус работающий на кручение  
есть валом.

Изобразим брус, испытывающий кручение (рис. 7.1). Если брус находится в покое или вращается с постоянной угловой скоростью, то сумма моментов пар сил относительно оси бруса равна нулю:  $\sum M_i = 0$ .

*Брус, испытывающий деформацию кручения, называется валом.*

Выясним, в первую очередь, сумму внутренних сил в поперечном сечении вала. Эти внутренние силы приводятся только к паре сил.

*Пара сил, с которой одна часть вала действует на другую, называется крутящим моментом и обозначается через  $M_k$ .*

Таким образом, крутящий момент есть внутренняя сила. Как определить крутящий момент в любом поперечном сечении вала?

На рис. 7.2 показано нагружение вала. Применим метод сечений плоскостью перпендикулярной оси вала, и покажем силы, действующие отдельно на левую часть и отдельно на правую часть.  $M_k$  – крутящий момент. На рисунке показаны положительные направления крутящего момента. Рассмотрим равновесие отдельных частей.

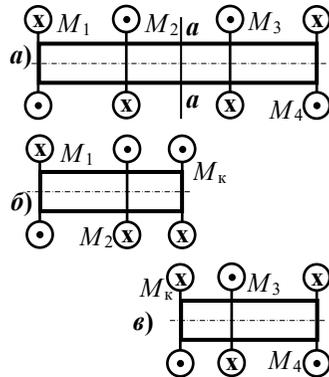


Рис. 7.2. Определение крутящих моментов

Равновесие левой части:

$$\sum M_{лев} - M_k = 0, \quad M_k = \sum M_{лев}; \quad (\text{в данном случае } \sum M_{лев} = M_1 - M_2).$$

Равновесие правой части:

$$\sum M_{лев} + M_k = 0, \quad M_k = -\sum M_{лев}; \quad (\text{в данном случае } \sum M_{лев} = -M_3 + M_4).$$

Следовательно, крутящий момент можно вычислять как по левым, так и по правым силам (см. рис. 7.2).

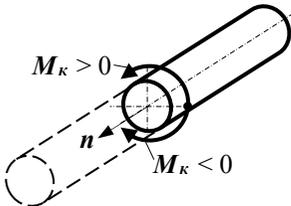


Рис. 7.3. Правило знаков для крутящего момента

**Крутящий момент** в каком-либо поперечном сечении вала численно равен сумме моментов относительно оси вала внешних пар сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

О знаке крутящего момента (рис. 7.3): смотрим на оставшуюся часть вала со стороны внешней нормали  $n$  к сечению. Если при этом внешняя пара

сил действует по ходу часовой стрелки, то крутящий момент считается положительным, а если против часовой стрелки – то отрицательным.

Построим эпюру крутящего момента это график изменения крутящего момента по длине вала (рис. 7.4).

Эпюра  $M_k$  строится для того, чтобы определить  $|M_k|_{наиб}$ , то есть наиболее опасное сечение вала.

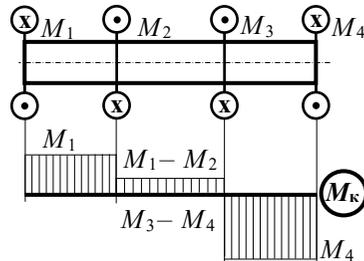


Рис. 7.4. Эпюра крутящих моментов

### 7.1.1. Вычисление моментов, передаваемых на вал, по мощности и числу оборотов

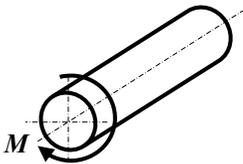


Рис. 7.5. Вал с приложенной внешней парой сил

Изобразим участок вала, к которому приложена внешняя пара сил  $M$ . Чтобы произвести расчёты на прочность, необходимо знать  $M$ , однако на практике чаще известны только мощность  $W$  и число оборотов ( $n$  об/сек) (рис. 7.5).

Можно записать  $W = M \cdot \omega$ , где  $\omega$  – угловая скорость,  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot m$ ,  $W = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot m$ . Разрешим зависимость относительно  $M$ .

$$M = \frac{W}{2 \pi \cdot m} - \text{формула для момента внешней пары сил.}$$

В инженерной практике эта формула конкретизируется.

1. Пусть мощность  $K$  задана в кВт. (вал приводится в движение электродвигателем), а скорость вращения вала  $n$  – в об/мин;  $M$  необходимо получить в Н·м.

$$M = \frac{K}{2 \pi \cdot \frac{n}{60}} = 9,55 \frac{K}{n}.$$

В данной формуле  $K$  в кВт,  $n$  – в об/мин,  $M$  – кН·м.

2. Пусть мощность  $N$  задана в л. с, а скорость вращения вала  $n$  в об/мин, момент нужно получить в Н·м. Вначале переведём заданные параметры в одну систему (1 л. с. = 73,55 Н·м).  $W = 73,55 \cdot N \cdot \text{м/сек}$ ,  $m$  – об/сек. Подставим эти значения в общую формулу:

$$M = \frac{73,55 \cdot N}{2 \pi \cdot \frac{n}{60}} = 702,4 \frac{N}{n}.$$

Это инженерная формула, в ней  $N$  – л. с,  $n$  – об/мин, а  $M$  – Н·м.

## 7.2. Напряжения круглого вала при кручении и расчёт на прочность

Изобразим вал до нагружения (рис. 7.6, а). Пусть нижним концом он закреплён. Выберем систему координат, ось  $z$  направим по оси вала. Вырежем элемент вала двумя поперечными сечениями, одно на расстоянии  $z$  от начала координат, второе – на  $dz$  от первого и двумя осевыми плоскостями, между которыми малый угол  $d\alpha$ .

Покажем вал и элемент после нагружения (рис. 7.6, б). В любом сечении вала крутящий момент  $M_k = M$  (рис. 7.6, б)

Задача определения напряжений статически неопределима. Нужно записать уравнения статики и дополнить их уравнениями совместности деформаций. Изменим порядок. Сначала составим уравнения совместности деформаций. Закономерности деформаций изучались сначала опытным путём, а затем и теоретическим.

Установлено:

1. Поперечные сечения и после нагружения остаются плоскими и перпендикулярными оси вала, то. есть. выполняется гипотеза плоских сечений.

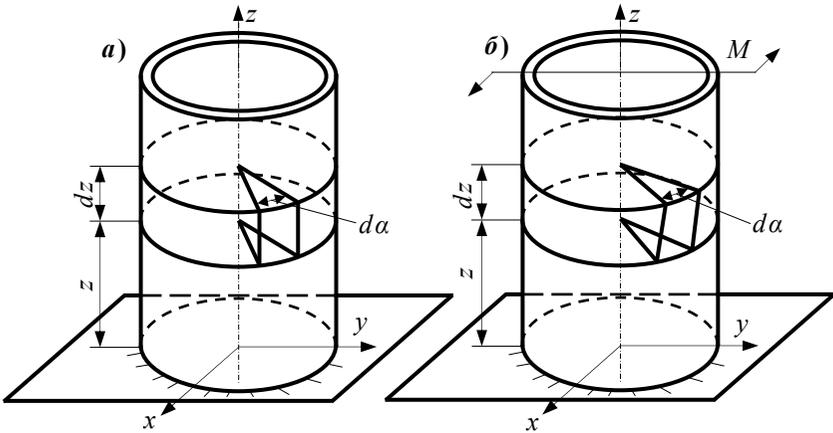


Рис. 7.6. Закономерность деформации вала

2. Расстояния между любыми поперечными сечениями не изменяются, то есть,  $\varepsilon_z = 0$ .

3. Диаметр вала и величина угла  $da$  не изменяются, радиусы не искривляются, т. е. поперечные сечения в своей плоскости не деформируются, они лишь поворачиваются как жёсткие диски, отсюда  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ .

Из равенства нулю вышеуказанных линейных и угловых деформаций, согласно закону Гука следует, что  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ . Эти зависимости выражают закономерности деформаций при кручении.

Изобразим элемент в состоянии до нагружения (пунктирные линии) и после нагружения (сплошные линии). На произвольном расстоянии  $\rho$  от оси  $z$  рассмотрим деформации элемента:  $\delta$  – абсолютный сдвиг;  $d\varphi$  – элементарный угол поворота сечения:  $d\varphi = \varphi(z+dz) - \varphi z$ ;  $\gamma$  – угол, на который повернётся прямая, параллельная оси, то есть это – угол сдвига (рис. 7.7).

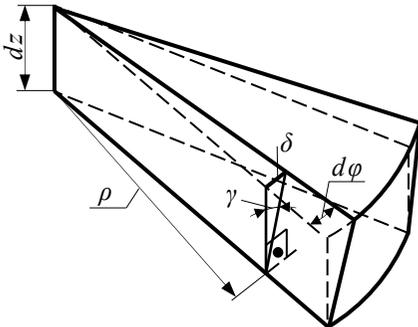


Рис. 7.7. Деформация элемента вала

Из верхнего треугольника:  $\delta = \rho \cdot d\varphi$ , из вертикального треугольника:  $\delta = \gamma \cdot dz$ , отсюда

$\gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi$ , тогда

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}.$$

Эта формула выражает закономерности деформации при кручении.

Теперь выразим эту закономерность в напряжениях, для этого, нужно знать напряжённое состояние элемента.

Покажем ещё раз элемент и напряжения, действующие по его граням, (они были рассмотрены, при изучении темы «Сдвиг»). По четырём граням элемента действуют только касательные напряжения – это чистый сдвиг (рис. 7.8). Следовательно, при кручении вала круглого поперечного сечения в любой его точке реализуется чистый сдвиг.

При чистом сдвиге  $\tau = G \cdot \gamma$ , поэтому

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \quad (7.1)$$

– это уравнение совместности деформаций в напряжениях.

Теперь составим уравнения равновесия (статики). Покажем поперечное сечение вала, крутящий момент  $M_k > 0$ . Покажем элементарную часть сечения  $dA$  и напряжение  $\tau$ , действующее в ней (рис. 7.9). Составим уравнение равновесия

$$\sum M_z = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA = M_k. \quad (7.2)$$

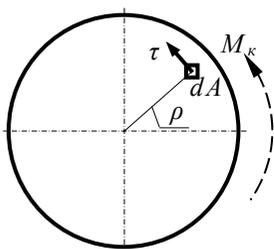


Рис. 7.9. Напряжения в поперечном сечении вала

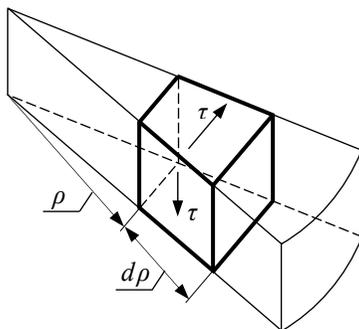


Рис. 7.8. Напряжённое состояние элемента вала

Решая совместно уравнение совместности деформаций (7.1) и уравнение равновесия (7.2), получим

$$G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA = M_k.$$

Величины  $G$  и  $\frac{d\varphi}{dz}$  выносим за знак

интеграла, так как они не зависят от радиуса. В этой формуле интеграл представляет собой полярный момент инерции попе-

речного сечения вала. Тогда

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{G \cdot J_p}, \quad (7.3)$$

где  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$  – относительный угол закручивания, то есть угол закручивания вала длиной, равной единице. Для круглого сечения  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$ .

Чем больше полярный момент инерции, то есть, тем жёстче вал, тем меньше относительный угол закручивания  $\theta$ , поэтому произведение  $G \cdot J_p$  называется жёсткостью вала при кручении.

Подставим (7.3) в формулу (7.1), тогда  $\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{M_k}{G \cdot J_p}$ . Сократив  $G$ , получим окончательную формулу для касательных напряжений при кручении

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \cdot \rho. \quad (7.4)$$

Изобразим эпюру касательных напряжений на любом радиусе (рис. 7.10).

Видно, что наибольшие касательные напряжения действуют на поверхности вала и равны  $\tau_{\text{наиб}} = \frac{M_k}{J_p} \cdot \rho_{\text{наиб}}$ , но  $\frac{J_p}{\rho_{\text{наиб}}} = W_p$  – момент сопротивления вала кручению, тогда

$$\tau_{\text{наиб}} = \frac{M_k}{W_p},$$

Где, для круглого сечения,  $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$ .

Переходим к расчёту на прочность. Условие прочности при кручении по любой теории  $\tau_{\text{наиб}} < [\tau]$ . По IV теории, которая наиболее точна для деталей из пластичных материалов, связь между допускаемыми напряжениями:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}.$$

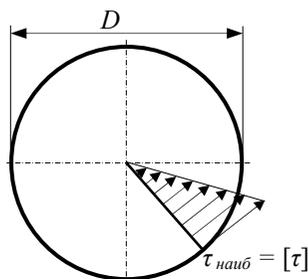


Рис. 7.10. Распределение касательных напряжений

Подставим в условие прочности значение  $\tau_{\text{наиб}}$  в наиболее опасном сечении

$$\frac{|M_k|_{\text{наиб}}}{W_p} \leq [\tau].$$

Это условие прочности при кручении для всего вала. Здесь  $|M_k|_{\text{наиб}}$  берётся с эпюры крутящих моментов. По этому условию проверяется прочность вала (первая задача).

Вторая задача – назначение размеров поперечного сечения – решается так

$$W_p \geq \frac{|M_k|_{\text{наиб}}}{[\tau]}, \quad \text{или} \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_k|_{\text{наиб}}}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

Третья задача – определение грузоподъёмности

$$|M_k|_{\text{наиб}} \leq [\tau] \cdot W_p.$$

По этой формуле определяется наибольший крутящий момент, а зная  $|M_k|_{\text{наиб}}$ , можно найти допускаемые внешние пары сил.

Несколько слов о наиболее экономичном сечении вала (рис. 7.11, а). Покажем эпюру напряжений в вале сплошного сечения (рис. 7.11, б). Здесь возможности материала полностью используется только на поверхности вала. Остальной материал недогружен, особенно, у оси. Поэтому необходимо убрать материал от оси. Получим пустотелый вал (рис. 7.11, в).

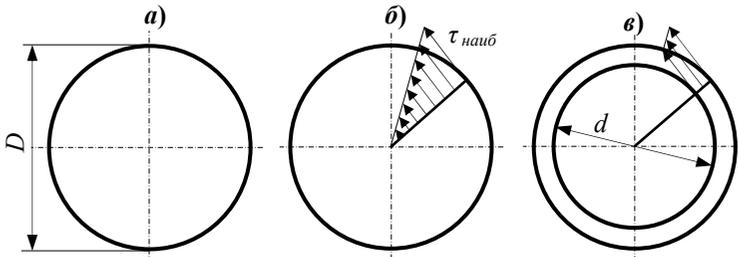


Рис. 7.11. Выбор наиболее экономичного сечения вала

У пустотелого вала весь материал работает при напряжениях, близких к допускаемому. Применение пустотелого вала приводит к увеличению его грузоподъёмности при той же площади поперечного сечения. Но, если стенка вала очень тонкая, то может быть местная потеря устойчивости оболочки.

Покажем, что при кручении имеются сжимающие напряжения, которые могут привести к потере устойчивости стенки тонкостенного вала. В любой точке вала (круглого) – чистый сдвиг. Главные напряжения действуют на площадках, повернутых на угол  $45^\circ$ , и сжимающее главное напряжение  $\sigma_3 = -\tau$  (рис. 7.12).

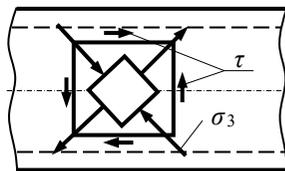


Рис. 7.12. Сжимающие напряжения

### 7.3. Перемещения при кручении круглого вала

Перемещения вала вполне определены, если известен угол поворота поперечного сечения вала, так как поперечные сечения вала поворачиваются как жёсткие диски.

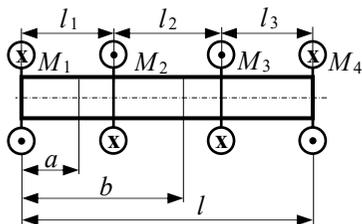


Рис. 7.13. Определение перемещений в вале

Изобразим вал, нагруженный внешними парами сил (рис. 7.13). Будем рассматривать угол  $\varphi_{ab}$  так обозначается угол закручивания вала на участке  $ab$ .  $\varphi_{ab}$  – это угол, на который сечение  $b$  повернётся относительно сечения  $a$ , где  $a$  и  $b$  произвольные сечения. Как определить  $\varphi_{ab}$ ?

В предыдущем параграфе было получено (см. формулу 7.3)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{G \cdot J_p}, \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot dz.$$

Здесь  $d\varphi$  – угол закручивания вала на элементарном участке  $dz$ .

Чтобы получить угол закручивания вала на участке  $ab$ , просуммируем углы закручивания элементарных участков

$$\varphi_{ab} = \int_a^b \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot dz.$$

Это общая формула для определения угла закручивания вала на участке  $ab$ .

Теперь определим угол закручивания всего вала

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot J_p} \cdot dz.$$

– угол, на который одно торцевое сечение повернётся относительно другого.

Если крутящий момент на каждом участке постоянен и вал постоянного поперечного сечения, то

$$\varphi = \sum \frac{M_k^i \cdot l_i}{G \cdot J_p}$$

Если, в частном случае, по всей длине вала  $M_k = const$ , то

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \quad (7.4)$$

– угол закручивания вала при постоянном крутящем моменте.

О знаке. Угол закручивания  $\varphi$  вала может быть как положительным, так и отрицательным. Из формулы видно, что знак  $\varphi$  совпадает со знаком крутящего момента.

1) Если при расчёте по формулам получилось  $\varphi > 0$ , то это означает, что одно сечение повернулось относительно второго сечения против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны первого сечения.

2) Если  $\varphi < 0$ , то поворот происходит по часовой стрелке.

#### 7.4. Расчёт винтовых цилиндрических пружин с небольшим углом подъёма витка

Точный расчёт на прочность винтовых пружин достаточно сложен, т.к. проволока винтовой пружины одновременно может испытывать растяжение (сжатие), кручение, сдвиг и изгиб.

Винтовая пружина может рассматриваться как пространственно изогнутый брус, ось которого представляет собой винтовую линию (рис. 7.14). Её форма определяется средним диаметром витка  $D$ , числом витков  $n$  и углом подъёма витка  $\alpha$ . Подъём витка можно характеризовать также шагом пружины  $S$ .  $S = \pi \cdot D \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Для всех встречающихся на практике пружин, шаг намного меньше длины окружности  $\pi \cdot D$ , следовательно, угол подъёма может рассматриваться как величина малая. Обычно  $\alpha < 5^\circ$ .

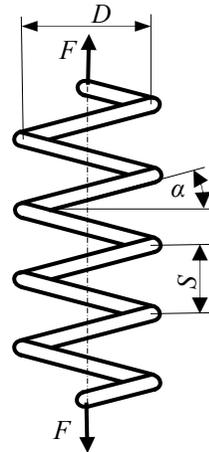


Рис. 7.14. Винтовая пружина

Пусть цилиндрическая винтовая пружина со средним диаметром витков  $D$ , имеющая  $n$  витков, угол подъема  $\alpha$  и диаметр  $d$  поперечного сечения проволоки, растягивается силами, приложенными вдоль оси пружины.

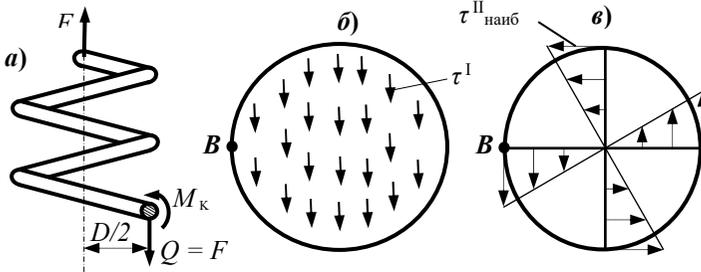


Рис. 7.15. Напряжения в поперечном сечении пружины

Используя метод сечений, рассмотрим равновесие верхней части пружины (рис. 7.15, а). Действие отброшенной части заменим поперечной силой  $Q = F$  и крутящим моментом  $M_k = F \cdot D/2$ . В силу малости угла наклона витков  $\alpha$ , нормальной силой (рис. 7.16) и изгибающим моментом можно пренебречь,

тогда в поперечном сечении витка будут действовать только две группы касательных напряжений:

от среза —  $\tau^I = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$  (см. рис.

7.15, б) и от кручения —  $\tau^{II} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}$

(см. рис. 7.15, в).

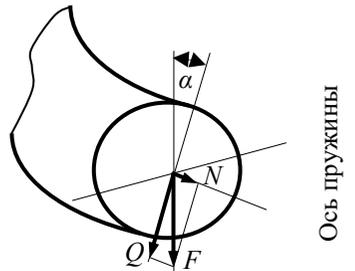


Рис. 7.16. Внутренние силы в сечении пружины

Как видно из распределения напряжений, в точке **B** поперечного сечения витка на внутренней стороне пружины касательные напряжения  $\tau^I$  и  $\tau^{II}$  совпадают по направлению, поэтому

$$\tau_{\max} = \tau^I + \tau^{II} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} + \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \left( 1 + \frac{2 \cdot D}{d} \right).$$

На внутренней и наружной поверхности витка радиусы кривизны различны, поэтому используют более точную формулу для наибольших касательных напряжений

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left( \frac{4 \cdot m - 1}{4 \cdot m - 4} + \frac{0,615}{m} \right), \text{ где } m = D/d.$$

Для пружин большого диаметра из тонкой проволоки  $D/d \gg 1$ , поэтому касательные напряжения от кручения  $\tau_{max}^I$  значительно больше напряжений от среза  $\tau_{max}^{II}$ , которые можно не учитывать, тогда

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot F \cdot D}{\pi \cdot d^3}.$$

При таком упрощении легко вычислить перемещение оси пружины (осадку), которая обозначается через  $\lambda$ . Вырежем из пружины элемент длиной  $dS$  (рис. 7.17). После нагружения, второе сечение поворачивается относительно первого на угол  $d\varphi$ , где  $d\varphi = \frac{M_k \cdot dS}{G \cdot J_p}$ ,

тогда  $d\lambda = R \cdot d\varphi = R \cdot \frac{M_k \cdot dS}{G \cdot J_p}$ .

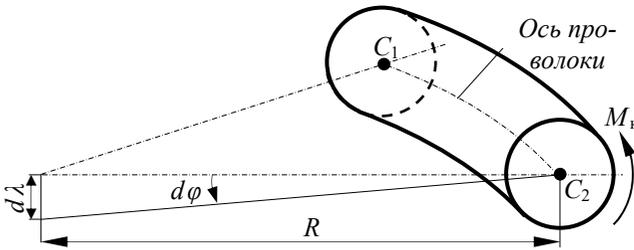


Рис. 7.17. Перемещения в цилиндрической пружине

Просуммируем осадку по всей длине стержня пружины

$$\lambda = \int_0^l d\lambda = R \cdot \frac{M_k}{G \cdot J_p} \int_0^l dS = R \cdot \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p},$$

где  $l = \int_0^l dS$  – полная длина стержня пружины. Пренебрегая наклоном витков к горизонтали получим  $l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot n$ , где  $n$  – количество витков.

Учтём, что  $M_k = F \cdot R$ ,  $J_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$ .

Подставив полученные соотношения в выражение для  $\lambda$ , получим

$$\lambda = R \cdot \frac{F \cdot R \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot n \cdot 2}{G \cdot \pi \cdot r^4} = \frac{4FR^3 n}{Gr^4} = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}.$$

Теперь об условии жёсткости пружины:  $\lambda < [\lambda]$ , где  $[\lambda]$  – допустимое значение осадки, следовательно

$$\frac{8FD^3 n}{Gd^4} \leq [\lambda].$$

– условию жёсткости пружины

### 7.5. Кручение брусков прямоугольного сечения

При кручении брусков некруглого поперечного сечения гипотеза плоских сечений не применима, так как при закручивании происходит деформация (искривление) сечения. В связи с этим методами сопротивления материалов напряжения определить невозможно. Методами теории упругости для брусков прямоугольного сечения получены следующие зависимости (рис. 7.18).

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}, \quad \varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot J_{\kappa}}, \quad \tau'_{\max} = \eta \cdot \tau_{\max}.$$

где  $\tau_{\max}$  – напряжение, действующее на поверхности бруса посередине большей стороны прямоугольника;

$\tau'_{\max}$  – напряжение, действующее на поверхности бруса посередине меньшей стороны прямоугольника;

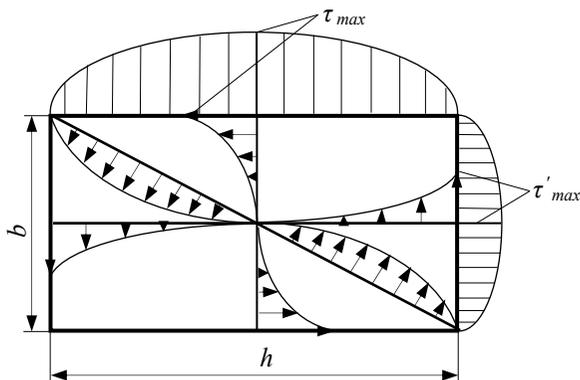


Рис. 7.18. Напряжения при кручении прямоугольного бруса

$W_k = \alpha \cdot a \cdot b^2$  – геометрический фактор прочности (условный момент сопротивления прямоугольного сечения кручению);

$J_k = \beta \cdot a \cdot b^3$  – геометрический фактор жёсткости (условный момент инерции прямоугольного сечения при кручении).

Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  в зависимости от соотношения размеров прямоугольника  $h/b$  приведены в таблице

| $h/b$    | 1     | 1,5   | 2     | 3     | 4     | 6     | 8     | 10    | $\infty$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha$ | 0,208 | 0,213 | 0,246 | 0,285 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\beta$  | 0,141 | 0,196 | 0,229 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\eta$   | 1,000 | 0,859 | 0,795 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,742    |

### 7.6. Кручение тонкостенных брусков (свободное кручение)

Кручение брусков некруглого сечения может быть свободным или стеснённым. При свободном кручении нет препятствий к искривлению поперечных сечений. Брус будет испытывать свободное кручение, если по его длине крутящий момент и размеры поперечного сечения не меняются, а также нет защемления.

Характерной особенностью тонкостенных брусков является то, что толщина ( $\delta$ ) значительно меньше длины ( $S$ ) контура сечения ( $S > 10 \cdot \delta$ ).

Тонкостенные бруски разделяются на бруски с замкнутым и открытым профилем. У брусков с открытым профилем средняя линия поперечного сечения является незамкнутой кривой (рис. 7.19).

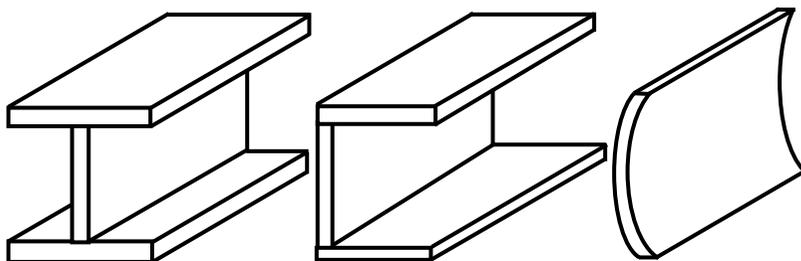


Рис. 7. 19 Тонкостенные профили открытого профиля

У брусков с замкнутым профилем средняя линия поперечного сечения – замкнутая кривая (рис. 7.20).

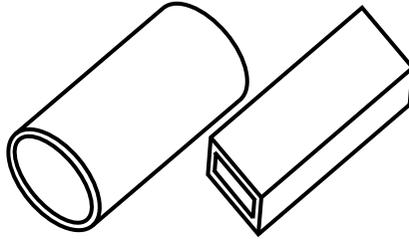


Рис. 7. 20. Тонкостенные брусья с замкнутым профилем

### 7.6.1. Свободное кручение тонкостенных брусьев с открытым профилем

Напряжения в брусьях с открытым профилем сильно не изменятся, если его распрямить. Тогда можно использовать расчётные формулы для прямоугольного сечения с большим соотношением сторон ( $S > 10 \cdot \delta$ ), для которых  $\alpha = \beta = 1/3$  (рис. 7.21)

$$W_k = \frac{1}{3} S \cdot \delta^2, \quad J_k = \frac{1}{3} S \cdot \delta^3, \quad \varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_k},$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{1}{3} S \cdot \delta^2} \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{M_k}{J_k} \cdot \delta.$$



Рис. 7.21. Кручение тонкостенного бруса

### 7.6.2. Общий случай свободного кручения тонкостенного бруса с открытым профилем

Если сечение бруса нельзя развернуть в прямоугольник (рис. 7.22), то момент  $M_k$  рассматривается как сумма моментов, действующих в отдельных элементах сечения постоянной

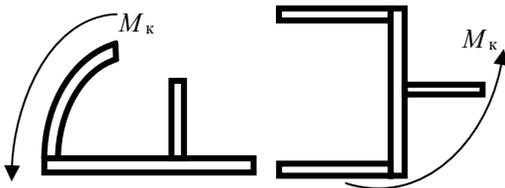


Рис. 7.22. Общие случаи тонкостенного бруса с открытым профилем

толщины:

$$M_k = \sum M_{k_i}.$$

Углы закручивания всех элементов одинаковы

$$\varphi_i = \varphi, \quad \text{но} \quad \varphi_i = \frac{M_{k_i} \cdot l}{G \cdot J_{k_i}},$$

откуда  $M_{\kappa_i} = \frac{G \cdot \varphi_i}{l} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_i \cdot \delta_i^3$  или  $M_{\kappa} = \sum M_{\kappa_i} = \frac{G \cdot \varphi}{l} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum S_i \cdot \delta_i^3$ .

Тогда

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum S_i \cdot \delta_i^3} = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot J_{\kappa}},$$

где  $J_{\kappa} = \frac{1}{3} \cdot \sum S_i \cdot \delta_i^3$ .

Так как  $\varphi_i = \varphi$ , то  $\frac{M_{\kappa_i}}{J_{\kappa_i}} = \frac{M_{\kappa}}{J_{\kappa}}$ .

Из предыдущего параграфа  $\tau_{max} = \frac{M_{\kappa_i}}{J_{\kappa_i}} \cdot \delta_i = \frac{M_{\kappa}}{J_{\kappa}} \cdot \delta_i$ .

Из полученной формулы видно, что наибольшие напряжения действуют в элементе с наибольшей толщиной  $\delta_{наиб}$ , тогда

$$\tau_{max} = \frac{M_{\kappa}}{J_{\kappa}} \cdot \delta_{наиб}.$$

### 7.6.3. Свободное кручение тонкостенных брусьев с замкнутым профилем

В связи с малой толщиной профиля можно сделать следующие допущения (рис. 7.23)

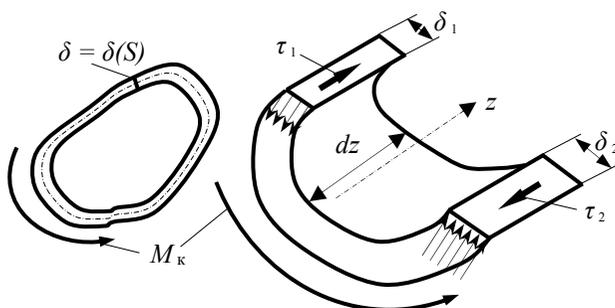


Рис. 7.23. Напряжения при кручении тонкостенного бруса с замкнутым профилем

1. Касательные напряжения по толщине сечения не изменяются;
2. Направление касательных напряжений параллельно касательной к срединной линии сечения.

$\tau \cdot \delta$  – поток касательных напряжений, тогда  $\sum z = \tau_1 \cdot \delta_1 \cdot dz - \tau_2 \cdot \delta_2 \cdot dz = 0$ , отсюда  $\tau_1 \cdot \delta_1 = \tau_2 \cdot \delta_2 = const.$

Следовательно, поток касательных напряжений по длине срединной линии не меняется.

Рассмотрим в поперечном сечении замкнутого контура элементарный участок длиной  $dS$  (рис. 7.24)

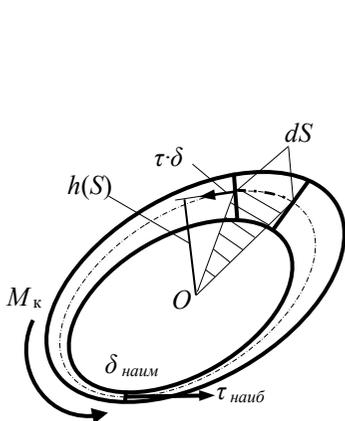


Рис. 7.24. Определение касательных напряжений

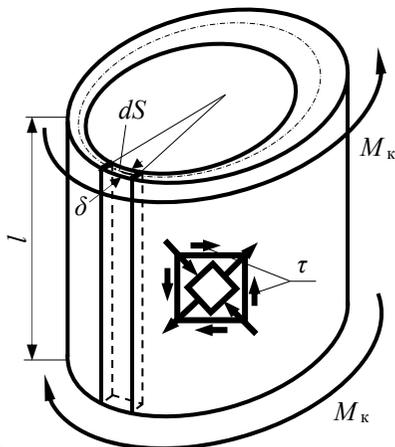


Рис. 7.25. Определение перемещений бруса

$$M_k = \oint_S \tau \cdot \delta \cdot dS \cdot h(S) = \tau \cdot \delta \cdot \oint_S h(S) \cdot dS,$$

но  $h(S) \cdot dS = 2 \cdot dA^*$ , где  $dA^*$  – площадь заштрихованного треугольника, основанием которого является дуга срединной линии  $dS$ . Следовательно,  $\oint_S h(S) \cdot dS = 2 \cdot A^*$ . Тогда  $M_k = \tau \cdot \delta \cdot 2 \cdot A^*$ , откуда

$$\tau = \frac{M_k}{2 \cdot A^* \cdot \delta}.$$

Наибольшие касательные напряжения действуют в точках сечения с наименьшей толщиной стенки

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{2 \cdot A^* \cdot \delta_{min}}.$$

где  $W_k = 2 \cdot A^* \cdot \delta_{min}$  – условный момент сопротивления сечения кручению.

Угловое перемещение определим из энергетических условий:  $U = A_F$  (рис. 7.25):

$A_F = \frac{1}{2} M_\kappa \cdot \varphi$  – работа внешних сил.

Энергия деформации  $U$  может быть определена через удельную энергию деформации  $u_0 = \frac{\tau^2}{2 \cdot G}$ .

Выделим в тонкостенном бруске элемент  $dV = \delta \cdot dS \cdot l$ , тогда

$$\begin{aligned} U &= \oint_S u_0 \cdot dV = \oint_S \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot \delta \cdot dS \cdot l \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{(\tau \cdot \delta)^2 \cdot l}{2 \cdot G} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta} = \\ &= \left( \frac{M_\kappa}{2 \cdot A^*} \right)^2 \cdot \frac{l}{2 \cdot G} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta} = \frac{M_\kappa^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot (2 \cdot A^*)^2} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot M_\kappa \cdot \varphi = \frac{M_\kappa^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot (2 \cdot A^*)^2} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta},$$

откуда

$$\varphi = \frac{M_\kappa \cdot l}{G \cdot (2 \cdot A^*)^2} = \frac{M_\kappa \cdot l}{G \cdot J_\kappa} \cdot \oint_S \frac{dS}{\delta}$$

где  $J_\kappa = \frac{(2 \cdot A^*)^2}{\oint_S \frac{dS}{\delta}}$  – условный момент инерции сечения при кручении

тонкостенного стержня с замкнутым профилем.

### 7.7. Вопросы для самопроверки

Что называется крутящим моментом? Как он определяется, его размерность? Что такое чистый сдвиг, как формулируется закон парности касательных напряжений? Напишите закон Гука при сдвиге. Как найти касательное напряжение в произвольной точке бруса круглого поперечного сечения? Покажите закономерность распределения касательного напряжения в бруске круглого поперечного сечения. Что такое полярный момент инерции сечения, момент сопротивления кручению? Чему они равны для круглого и кольцевого сечений и их размерность? Как определяется угол закручивания бруса? Как решаются основные задачи расчёта на прочность при кручении? По какой формуле можно определить максимальные касательные напряжения при кручении вала прямоугольного сечения и в какой точке сечения оно возникает? По какой формуле можно опре-

делить угол закручивания при кручении вала прямоугольного сечения? Как определить условный момент инерции и условный момент сопротивления при кручении вала, поперечное сечение которого состоит из тонких вытянутых прямоугольников? По какой формуле можно определить максимальные касательные напряжения и угол закручивания при кручении тонкостенных брусьев с замкнутым профилем? На какой вид деформации работает цилиндрическая винтовая пружина, нагруженная растягивающей (сжимающей) силой? По какой формуле можно определить максимальные касательные напряжения в цилиндрической винтовой пружине, нагруженной растягивающей (сжимающей) силой? Чему равна осадка цилиндрической винтовой пружины, нагруженной растягивающей (сжимающей) силой?

## 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 8.1. Потеря устойчивости сжатым стержнем.

#### Формула Эйлера для критической силы

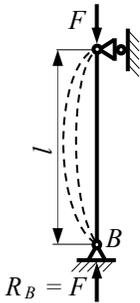


Рис. 8.1. Потеря устойчивости сжатым стержнем

Рассмотрим сжатый стержень с шарнирным закреплением. Будем считать, что шарниры шаровые, т. е. во всех плоскостях закрепление одинаково (рис. 8.1).

На стержень действует сжимающая сила  $F$ . В нижней опоре возникает сила реакции  $R_B = F$ .

Условие прочности для стержня должно быть  $\frac{F}{A} \leq [\sigma]$ , а между тем, при достаточно большой длине  $l$  разрушение стержня происходит и при  $\frac{F}{A} < [\sigma]$ .

Происходит это следующим образом: с ростом силы  $F$  стержень начала остаётся прямолинейным, однако, при некотором значении силы  $F = F_{кр}$ , стержень вдруг выпучивается (пунктирные линии), т. е. возникают прогибы, соизмеримые с длиной стержня. При этом, к напряжениям от сжатия  $\frac{N}{A}$  добавляются напряжения от изгиба  $\frac{M}{W}$  и

вот, хотя  $\frac{F}{A} < [\sigma]$ , но суммарное напряжение достигает предела прочности материала и стержень разрушается. Стержень может и не разрушиться, но выпучится и останется в выпученном состоянии. Явление выпучивания в конструкциях не допустимо, так как нарушаются нормальные условия работы всей конструкции. Описанное явление выпучивания называется потерей устойчивости сжатым стержнем.

*Минимальная сила, при которой происходит потеря устойчивости, называется **критической силой** и обозначается через  $F_{кр}$ .*

Описанное явление с позиций теории устойчивости объясняется следующим образом: при  $F < F_{кр}$  устойчивой является прямолинейная форма стержня. Это означает, что если вывести стержень из положения равновесия, а затем освободить, он вернётся в устойчивую

(прямолинейную) форму. При  $F > F_{кр}$  прямолинейная форма становится неустойчивой, а устойчивой становится криволинейная форма. Но, на практике, толчка (возмущения) делать не нужно, т. к. стержень не идеально прямой и силы приложены, не точно по оси стержня, поэтому при  $F = F_{кр}$  он сам выпучивается.

При расчёте сжатых стержней, необходимо рассматривать два условия:

- 1)  $\frac{F}{A} \leq [\sigma]$  - условие прочности;
- 2)  $F \leq \frac{F_{кр}}{n_{кр}}$  - преобразуем  $\frac{F}{A} \leq \frac{F_{кр}}{A \cdot n_{кр}}$ , но  $\frac{F_{кр}}{A} = \sigma_{кр}$  - критическое

напряжение, при котором стержень теряет устойчивость,  $\frac{F_{кр}}{n_{кр}} = [\sigma]_{кр}$  - допускаемое напряжение на устойчивость или допускаемое напряжение на продольный изгиб. Тогда  $\frac{F}{A} \leq [\sigma]_{кр}$  - условие устойчивости.

Таким образом, чтобы работа сжатого стержня была безопасной, должны быть выполнены два условия.

Для коротких стержней, определяющим является первое условие, а для длинных – второе. Чтобы не рассматривать границу между ними, необходимо пользоваться обоими условиями.

Чтобы воспользоваться условием устойчивости, нужно знать критическую силу. Как её найти? Первые результаты в этой области были получены, в середине XVIII века Л. Эйлером, в период его работы в Петербургской академии наук.

Эйлер рассматривал стержень длиной  $l$  с шарнирно-закреплёнными концами (рис. 8.2). Сила  $F$  настолько большая, что она удерживает стержень в искривлённом состоянии, то есть, она достигла  $F_{кр}$ .

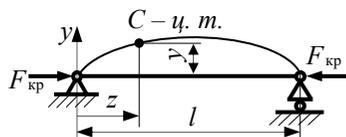


Рис. 8.2. Схема Эйлера

Отметим прогиб стержня  $y$  в произвольном сечении  $z$ . Стержень изогнут и находится в упругом состоянии, поэтому воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси балки. Обращаем внимание, что мы воспользуемся облегчённым дифференциальным уравнением, поэтому рассматриваем только начало потери устойчивости.

$E \cdot J \cdot y'' = M$ , где  $M = -F_{кр} \cdot y$ . Знак «минус» так как изгибающий момент отрицательный, тогда  $E \cdot J \cdot y'' = -F_{кр} \cdot y$ , преобразуем

$$y'' + k^2 \cdot y = 0,$$

где  $k^2 = \frac{F_{кр}}{E \cdot J}$ . Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для решения этого уравнения нужно написать характеристическое уравнение и найти его корни. Решение этого уравнения ищем в тригонометрических функциях:

$$y = A \cdot \sin kz + B \cdot \cos kz.$$

Определим постоянные интегрирования из граничных условий:

1) при  $z = 0$   $y = 0$ , отсюда  $B = 0$  и  $y = A \cdot \sin kz$ .

2) при  $z = l$   $y = 0$ , тогда  $A \cdot \sin kl = 0$ . Но  $A \neq 0$ . Если предположить, что  $A = 0$ , то все прогибы будут равны нулю, т. е. выпучивания не будет.

Таким образом,  $\sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi \cdot n$ , ( $n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$ );

$k^2 = n^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2}$ ; подставим вместо  $k^2 \Rightarrow \frac{F_{кр}}{E \cdot J} = n^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2}$ , тогда

$$F_{кр} = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2},$$

то есть имеет место целый ряд критических сил:

$n = 0$ ,  $F_{кр}^{(0)} = 0$  – нулевого порядка;

$n = 1$ ,  $F_{кр}^{(1)} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$  – первого порядка;

$n = 2$ ,  $F_{кр}^{(2)} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$  – второго порядка и т.д.

Здесь  $E$  – модуль продольной упругости материала стержня,  $J$  – момент инерции поперечного сечения стержня. Из формул видно, что выпучивание произойдёт прежде всего, в плоскости наименьшей жёсткости.

Из этого ряда критических сил, будет иметь значение только наименьшая критическая сила.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{l^2}$$

– формула Эйлера для критической силы.

А какие будут перемещения, после выпучивания?

$$y = A \cdot \sin \frac{\pi}{l} z$$

– уравнение изогнутой оси стержня – половина волны синусоиды. Чему равно наибольшее отклонение  $A$ ? На этот вопрос ответить не представляется возможным, так как использованы все граничные условия стержня. Это расплата за линеаризацию дифференциального уравнения изогнутой оси стержня. Чтобы найти прогибы, нужно использовать полное дифференциальное уравнение. Приведём график зависимости максимальных перемещений в зависимости от силы (рис. 8.3), полученный в точном решении (В.И. Феодосьев).

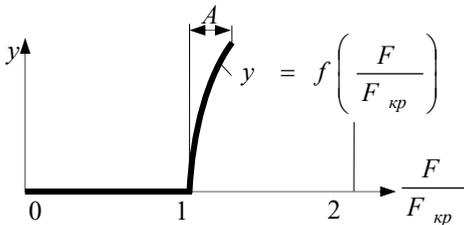


Рис. 8.3. Перемещения сжатого стержня

Критическое напряже-

ние  $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$  – напряже-

ние, при котором наблю-

дается выпучивание.

Подставим в эту формулу

значение критической си-

лы и учтём, что

$$\frac{J_{наим}}{A} = i_{наим}^2.$$

Обозначим  $\frac{l}{i_{наим}} = \lambda$  – гибкость стержня и получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{l^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}.$$

Чем больше гибкость, тем меньше критическое напряжение, тем меньшим усилием можно вывести стержень из положения равновесия.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

– формула Эйлера для критического напряжения.

## 8.2. Влияние способа закрепления стержня на критическую силу

Рассмотрим несколько случаев закрепления стержня.

1) *Шарнирный случай закрепления* называется основным или случаем Эйлера (см. рис. 8.1).

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{l^2}.$$

2) *Стержень жёстко закреплён одним концом* (рис. 8.4).

Какой будет, формула для критической силы, в этом случае? Нужно взять дифференциальное уравнение и удовлетворить новым граничным условиям.

Однако, есть другой путь: продолжив стержень вниз на  $l$ , видим, что формулу Эйлера можно применить для стержня длиной  $2l$ , тогда

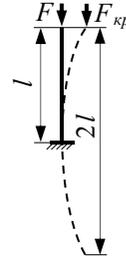


Рис. 8.4. Стержень с закреплённым концом

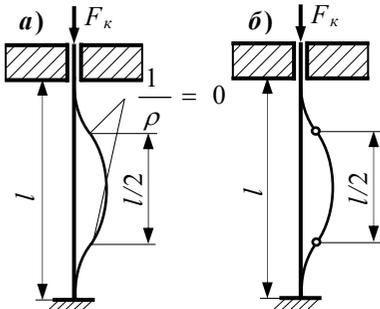


Рис. 8.5. Стержень с подвижно и неподвижно закреплёнными концами

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{(2 \cdot l)^2}.$$

Здесь,  $F_{кр}$  в четыре раза меньше, чем в основном случае, следовательно, и грузоподъёмность стержня, в четыре раза меньше, то есть это, очень невыгодный случай закрепления

3) *Стержень с подвижно и неподвижно закреплёнными концами* (рис. 8.5).

Как найти  $F_{кр}$  в этом случае?

Можно взять дифференциальное уравнение и удовлетворить новым граничным условиям. Но можно воспользоваться одним результатом, следующим из решения Эйлера.

Отметим на изогнутой оси стержня, две точки перегиба (рис. 8.5, а). В этих точках кривизна равна нулю, следовательно, и изгибающий момент равен нулю, так как  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J}$ .

В точках перегиба связь, с помощью которой передаётся изгибающий момент, не используется, следовательно, в этих точках можно

поставить идеальные шарниры (рис. 8.5, б) – ничего не изменится.

Видно, что часть рассматриваемого стержня длиной  $l/2$  находится в таких же условиях, как и в случае схемы Эйлера, тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{(0,5 \cdot l)^2}.$$

Здесь  $F_{кр}$  в четыре раза больше, чем в основном случае, то есть это, очень выгодное условие закрепления, существенно более экономичное, но формула будет справедлива, если по концам стержня, абсолютно жёсткое закрепление, а так бывает далеко не всегда. Как правило, закрепление бывает податливым, поэтому формулой Эйлера следует пользоваться осторожно.

4) *Стержень с защемлённым и шарнирным концами* (рис. 8.6).

Если решать эту задачу подробно, то окажется, что точка перегиба находится на расстоянии  $0,7 \cdot l$  от шарнирной опоры.

Рассматривая этот случай аналогично предыдущему, получим

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{(0,7 \cdot l)^2},$$

То есть  $F_{кр}$  в этом случае в два с лишним раза больше, чем при шарнирном закреплении.

Анализируя полученные зависимости, русский инженер Ф.С. Ясинский предложил общую формулу для любого случая закрепления

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{наим}}{(\mu \cdot l)^2}$$

– формула Ясинского. Здесь  $\mu$  – коэффициент приведения длины, указывающий, на какой длине данного стержня, реализуется схема Эйлера,  $\mu \cdot l$  – приведённая длина. Тогда:

- 1) два шарнирно закреплённых концов –  $\mu = 1$ ;
- 2) один защемлённый конец –  $\mu = 2$ ;
- 3) два защемлённых концов –  $\mu = 0,5$ ;
- 4) защемлённый и шарнирный концы –  $\mu = 0,7$ .

Формула Ясинского широко применяется для расчёта критических сил. В справочниках приводятся значения  $\mu$  для различных способов закрепления, промежуточных опор, стержней переменного сечения и так далее.

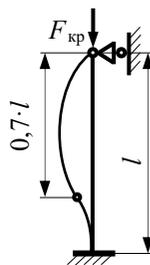


Рис. 8.6. Стержень с защемлённым и шарнирным концами

### 8.3. Пределы применимости формулы Эйлера. Полный график критических напряжений

Запишем формулу Эйлера для критических напряжений:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где  $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{наим}}}$ .

Эту формулу широко применяли мостостроители, но бывали случаи, когда всё-таки, стержни выходили из строя и мосты разрушались. Тогда формулу Эйлера отбросили, заменив массой эмпирических формул. Затем, формула Эйлера была реабилитирована. Оказалось, что у ней есть пределы применимости.

При выводе формулы Эйлера использовалось облегчённое дифференциальное уравнение изогнутой оси балки  $E \cdot J \cdot y'' = M(z)$ , которое справедливо только для линейно упругих систем, то есть когда справедлив закон Гука ( $\sigma < \sigma_{\text{тц}}$ ).

Следовательно, условие применимости формулы Эйлера:

$\sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{тц}}$  или  $\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{тц}}$ . Разрешим относительно  $\lambda$

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{тц}}}}.$$

Следовательно, формулу Эйлера можно применять только для достаточно длинных стержней, у которых  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ . Какие же, это стержни?

Рассмотрим пример – стержень из стали 20:  $\sigma_{\text{тц}} = 200$  МПа,

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{тц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100. \text{ И так для сжатого стержня из стали}$$

20 формулу Эйлера можно применять, если  $\lambda > 100$ .

Конкретизируем – пусть шарнирно опёртый стержень имеет круглое поперечное сечение. В этом случае

$$i_{\text{наим}} = \sqrt{\frac{J_{\text{наим}}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot d^2}} = \frac{d}{4}; \lambda = \frac{4 \cdot l}{d} \leq 100, \text{ отсюда } l > 25 \cdot d - \text{ только}$$

в этом случае для стержней из стали 20. можно применять формулу Эйлера (рис. 8.7). Для деталей машин, это условие выполняется ред-

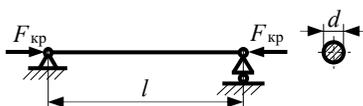


Рис. 8.7. Стержень круглого сечения с шарнирными опорами

ко, чаще оказывается  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , тогда  $\sigma_{\text{шт}} < \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ , поэтому, были случаи разрушения.

### Полный график критических напряжений

С точки зрения потери устойчивости все сжатые стержни делятся на три группы:

*1 группа. Стержни большой гибкости.*

К ним относятся стержни, для которых  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ . При сжатии они выпучиваются, теряют устойчивость и критическое напряжение вычисляется по формуле Эйлера:  $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ . Для стержней из стали 20 это стержни – у которых  $\lambda > 100$ .

*2 группа. Стержни средней гибкости.*

К ним относятся стержни, для которых  $\lambda_{\text{гр}} < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , где  $\lambda_{\text{гр}}$  – нижняя граница стержней средней гибкости, зависящая от материала стержня. Для стержней из стали 20 –  $\lambda_{\text{гр}} = 40$ .

Стержни средней гибкости выпучиваются достаточно большими силами, но  $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$  так как потеря устойчивости происходит при упругопластическом изгибе (в крайних волокнах происходят пластические деформации). Чаще всего  $\lambda_{\text{гр}}$  и  $\sigma_{\text{кр}}$  определяются опытным путем, но в последнее время появились и аналитические методы.

*3 группа. Стержни малой гибкости*

К ним относятся стержни, для которых  $\lambda < \lambda_{\text{гр}}$ . Для стержней из стали 20 это стержни, для которых  $\lambda < 40$ . При сжатии стержня выпучивания не наблюдается, но при напряжениях, равных пределу текучести (пластичные материалы) или пределу прочности (хрупкие материалы) наблюдаются явления, формально похожие, на потерю устойчивости – внезапное нарастание деформаций. В этом случае  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}$  или  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{в}}$ , хотя никакого выпучивания и не происходит.

Полный график критических напряжений рассмотрим на примере стержней из стали 20, у которой  $\sigma_{\text{шт}} = 200$  МПа,  $\sigma_{\text{т}} = 240$  МПа, граница стержней малой гибкости –  $\lambda = 40$ , граница стержней средней гибкости –  $\lambda = 100$  (рис. 8.8).

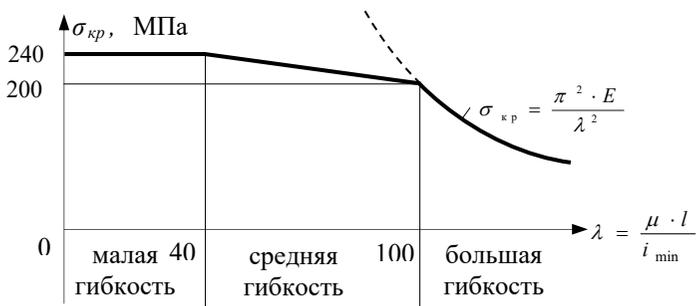


Рис. 8.8 Полный график критических напряжений для стержней из стали 20

Для стержней с гибкостью 100 –  $\sigma_{кр} = 200$  МПа. С ростом гибкости критическое напряжение уменьшается.

Для стержней малой гибкости  $\sigma_{кр} = \sigma_{т} = 240$  МПа.

Для стержней средней гибкости зависимость критического напряжения от гибкости определяются экспериментально или теоретически (В.И. Феодосьев). График зависимости – почти прямая.

Этот график для всего диапазона стержней называется полным графиком критических напряжений.

Полный график критических напряжений учитывает не только потерю устойчивости как таковую, но и опасные состояния для стержня любой длины. Поэтому, если при вычислении,  $[\sigma]_{кр} = \frac{F_{кр}}{n_{кр}}$

взято с полного графика, то расчёт нужно провести только по устойчивости:  $\frac{F}{A} \leq [\sigma]_{кр}$  а простое сжатие, уже учтено.

Необходимо сделать оговорку: сказанное справедливо для стержней без местных ослаблений.

#### 8.4. Расчёт сжатых стержней с помощью коэффициента снижения основного допускаемого напряжения

Это практический метод расчёта.

Вспомним. Допускаемое напряжение на сжатие (основное):

$[\sigma]_с = \frac{\sigma_L}{n_L}$ , где  $\sigma_L = \sigma_{т}$  – для пластичных материалов,  $\sigma_L = \sigma_{в}$  – для

хрупких материалов.

Допускаемое напряжение на устойчивость:  $[\sigma]_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{кр}}}$ .

Обращаем внимание, что  $n_{\text{кр}} > n_{\text{т}}$ , так как потеря устойчивости является более сложной деформацией, чем сжатие, и формулы сопротивления материалов здесь, менее точны. Для стержней из пластичных материалов  $n_{\text{кр}} = 2-3$  ( $n_{\text{т}} = 1,5$ ). Для стержней из хрупких материалов  $n_{\text{кр}} = 5$ , так как у хрупких материалов пластических деформаций, практически не бывает и, если достигнуто предельное состояние, то стержень, сразу разрушается, а у пластичных материалов, разрушение происходит при значительных пластических деформациях.

Рассмотрим отношение допускаемых напряжений

$$\frac{[\sigma]_{\text{кр}}}{[\sigma]_{\text{с}}} = \varphi; \quad [\sigma]_{\text{кр}} = \varphi \cdot [\sigma]_{\text{с}}.$$

В соответствии с этой формулой коэффициент  $\varphi$  называется коэффициентом снижения основного допускаемого напряжения. Он показывает, как нужно снизить основное допускаемое напряжение, чтобы получить допускаемое напряжение на устойчивость.  $0 < \varphi < 1$ . Для очень длинных стержней  $\varphi \rightarrow 0$ , а для весьма коротких –  $\varphi \rightarrow 1$ . Действительно, если стержень короткий, то за предельное напряжение принимается предел текучести и поэтому  $\varphi = 1$ .

От чего зависит  $\varphi$ . Подставим в формулу для  $\varphi$  значения допускаемых напряжений

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\text{кр}}}{[\sigma]_{\text{с}}} = \frac{\sigma_{\text{кр}} \cdot n_L}{n_{\text{кр}} \cdot \sigma_L}; \quad \varphi_{\text{кр}} = \varphi(\text{материал}, \lambda).$$

Напряжение  $\sigma_{\text{кр}}$  зависит от гибкости стержня  $\lambda$  (по графику, см. рис. 8.8) и материала, предельное напряжение  $\sigma_L$  и коэффициенты запаса  $n_{\text{кр}}$  и  $n_L$  – от материала, то есть  $\varphi$  зависит от гибкости и материала стержня. В справочниках приводятся таблицы и графики зависимости  $\varphi$  от гибкости и материала.

Как решаются задачи расчёта на прочность с учётом полученной формулы?

### 1) Проверка прочности.

Прежде чем решать задачу, покажем стержень с местным ослаблением (рис. 8.9).

Теперь будем решать задачу  $\frac{F}{A_{\text{сруто}}} \leq \varphi \cdot [\sigma]_{\text{с}}$  – если нет ослабления.

Если есть ослабление, то нужно проверить ещё на сжатие в ослаб-

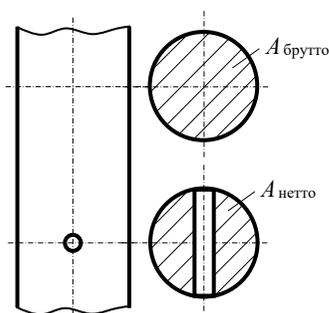


Рис. 8.9. Стержень с местным ослаблением

$$\text{ленном сечении } \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma]_c.$$

Необходимо подчеркнуть, что при проверке на устойчивость местное ослабление не учитывается, так как оно практически не влияет на устойчивость стержня. Это видно из дифференциального уравнения изогнутой оси балки:  $E \cdot J \cdot y'' = M$ , так как местное ослабление находится на небольшой

длине, поэтому при интегрировании, изменений практически не будет. Но ослабленное сечение нужно проверить на сжатие.

2) Назначение поперечного сечения сжатого стержня.

Разрешим условие устойчивости относительно  $A_{\text{брутто}}$ ,

$$A_{\text{брутто}} \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]_c}.$$

На первый взгляд, всё просто, однако, это не так. Коэффициент  $\varphi$  зависит от  $\lambda$ , а  $\lambda$  от  $i_{\text{наим}}$ , в свою очередь,  $i_{\text{наим}}$  зависит от площади сечения.

Так что, в явном виде, относительно площади, это неравенство не разрешимо, так как  $\varphi$  в зависимости от площади, в аналитическом виде не представляется (только в графическом или табличном виде), поэтому, при решении используют метод попыток.

Для первой попытки используем среднее значение  $\varphi = 0,5$  и из условия устойчивости определим площадь  $A_{\text{брутто}}^{(1)} = \frac{F}{0,5 \cdot [\sigma]_c}$ , затем

выясним, выполняется ли условие устойчивости при такой площади?

Находим  $A_{\text{брутто}}^{(1)} \Rightarrow i_{\text{наим}}^{(1)} \Rightarrow \lambda^{(1)} \Rightarrow \varphi^{(1)}$ . Здесь  $\varphi^{(1)}$  – действительное значение коэффициента  $\varphi$  в первой попытке.

Затем проверяем, выполняется ли условие устойчивости  $\frac{F}{A_{\text{брутто}}^{(1)}} \leq \varphi^{(1)} \cdot [\sigma]_c$ . Как правило оно не выполняется, поэтому делается

вторая попытка. (Нужно стремиться к тому, чтобы действительные напряжения сравнились с допускаемыми).

Находим  $A_{\text{брутто}}^{(2)} \Rightarrow i_{\text{наим}}^{(2)} \Rightarrow \lambda^{(2)} \Rightarrow \varphi^{(2)}$  и вновь обращаемся к условию  $p$  устойчивости:  $\frac{F}{A_{\text{брутто}}^{(2)}} \leq \varphi^{(2)} \cdot [\sigma]_c$  и так далее

до тех пор, пока условие устойчивости не выполнится, то есть, пока разница между правой и левой частями условия устойчивости не будет менее 1-3%. Допустим, что в последней попытке получено значение  $A_{\text{брутто}}^{(n)}$ , удовлетворяющее условию устойчивости. Обычно, попыток бывает не более трёх.

Если стержень имеет местное ослабление, то нужно проверить на ослабленном сечении:  $\frac{F}{A_{\text{нетто}}^{(n)}} \leq [\sigma]_c$  – если условие выполняется, то

расчёт окончен, а если – не выполняется, то нужно назначить площадь, из этого условия. Здесь площадь  $A_{\text{нетто}}$  представлена в явном виде.

3) Определение грузоподъёмности.

Разрешим условие устойчивости относительно  $F$

$$F \leq \varphi \cdot [\sigma]_c \cdot A_{\text{брутто}},$$

$$F \leq [\sigma]_c \cdot A_{\text{нетто}}.$$

Всё, что в правой части, известно, поэтому необходимо вычислить значения силы и взять меньшее значение, тогда будут выполнены условия устойчивости и прочности.

## 8.5. Выбор формы поперечного сечения и материала сжатого стержня на основании экономических соображений

### О выборе формы.

Задачу поставим таким образом: площадь поперечного сечения постоянна. Требуется выяснить, при какой форме поперечного сечения критическая сила будет наибольшей? Или иначе – при какой форме поперечного сечения грузоподъёмность будет наибольшей? Чтобы решить эту задачу, вспомним полный график критических напряжений (рис. 8.10). Видим, что критическое напряжение возрастает при уменьшении гибкости, то е. нужно придать поперечному сечению такую форму, чтобы гибкость была, как можно меньше, но

$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{наим}}}$ , отсюда видно, что нужно увеличивать минимальный ра-

диус инерции  $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ ,

откуда следует, что нужно увеличивать наименьший из моментов инерции сечения. Самый лучший случай тогда, когда  $J_{\text{наим}} = J_{\text{наиб}}$ , то есть главные центральные моменты инерции должны быть одинаковыми. Чтобы моменты инерции были больше, необходимо расположить площадь сечения, как можно дальше от начала координат, что видно из формулы для момента инерции  $J_{x_0} = \int_A y_0^2 dA$ .



Рис. 8.10. Полный график критических напряжений

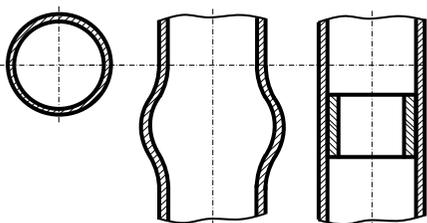


Рис. 8.11. Рациональная форма поперечного сечения

Этим условиям (первое условие – увеличение  $J_{\text{наим}}$ , второе –  $J_{\text{наим}} = J_{\text{наиб}}$ ) удовлетворяет кольцевое сечение – наиболее экономичное сечение. Однако увлекаться разнесом площади нельзя, так как у тонкостенной трубы может произойти местная потеря устойчивости задолго до

выпучивания всего стержня.

Чтобы избежать такой потери устойчивости, применяют кольцевые диафрагмы (рёбра жёсткости) (рис. 8.11).

### О выборе материала.

Здесь необходимо рассмотреть отдельно стержни большой гибкости, стержни средней и малой гибкости.

#### 1. Стержни большой гибкости.

Критическое напряжение определяется по формуле  $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ .

Будем рассматривать не все материалы, а только сплавы на одной основе, например, стали. В соответствии с формулой материал влияет на устойчивость только через модуль продольной упругости  $E$ , а в пределах одного сплава  $E$  практически не изменяется. Каким материалам, в этом случае, отдать предпочтение? Наиболее дешёвым, низкопрочным. Переход к высокопрочным материалам не обеспечивает

увеличение критического напряжения, так как модуль упругости не изменяется.

## 2. Стержни средней и малой гибкости

Здесь критическое напряжение зависит от предела текучести материала. Чем выше предел текучести, тем больше критическое напряжение, поэтому для стержней средней и малой гибкости оправдано применение высокопрочных материалов, так как они имеют более высокие значения предела текучести.

В заключении. Устойчивость теряют не только сжатые стержни, но и балки при изгибе.

В балках с узким поперечным сечением потеря устойчивости происходит в изгибно-крутильной форме (рис. 8.12).

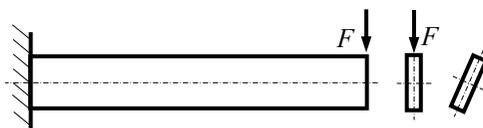


Рис. 8.12. Потеря устойчивости балки с узким поперечным сечением

Устойчивость теряют также сжатые тонкостенные оболочки. Например, обшивка крыла, фюзеляж самолёта потеряли бы устойчивость, если бы они не подкреплялись стрингерами, нервюрами, шпангоутами.

## 8.6. Вопросы для самопроверки

В чём суть явления потери устойчивости сжатого стержня? Что такое критическая сила и по какой формуле она определяется? Укажите пределы применимости формулы Эйлера. Что такое гибкость стержня? Как определяется критическое напряжение для стержней большой, средней и малой гибкости? Какой вид имеет полный график критических напряжений? Как влияют условия закрепления стержня на значение критической силы? Как производится проверка стержня на устойчивость с помощью коэффициента снижения основного допускаемого напряжения?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Баумана, 2010. – 592 с.
2. Расчётно-проектировочные и курсовые работы по сопротивлению материалов: учебное пособие / В.К. Шадрин, В.С. Вакулюк, О.В. Каранаева [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017. – 136 с.
3. Расчёты на прочность и устойчивость: учебное пособие / Ю.Н. Сургутанова, В.К. Шадрин, В.С. Вакулюк, [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017 – 112 с.
4. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчёты деталей машин на прочность / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1975. – 480 с.
5. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Изд-во Дельта, 2008. – 816 с.
6. Сопротивление материалов – механика материалов и конструкций: учебник / В.С. Жернаков. – Уфа: УГАТУ, 2012. – 495 с.
7. Сопротивление материалов. Ситуационные задачи. Дидактические материалы для разбора конкретных ситуаций: учебно-метод. пособие / Р.Ч. Гафаров. – Уфа: УГАТУ, 2015. – 99 с.

Учебное издание

**Иванов Станислав Иванович**,  
**Павлов Валентин Федорович**,  
**Киричѳв Виктор Алексеевич**,  
**Шадрин Валентин Карпович**,  
**Сазанов Вячеслав Петрович**,  
**Вакулюк Владимир Степанович**

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

*Часть 1*

*Учебное пособие*

Редактор Н.С. Куприянова  
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 7.12.2018. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печ. л. 9,0.  
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 14(Р5У)/2018.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34

