

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## *Часть 2*

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки: 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.01 Машиностроение, 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение, 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов, 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей и по специальностям: 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей, 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение

С А М А Р А  
Издательство Самарского университета  
2018

УДК 539.3/6(075)  
ББК 30.121я7  
С 646

Авторы: **С.И. Иванов**, **В.Ф. Павлов**, **В.А. Кирпичёв**, **В.К. Шадрин**,  
**В.П. Сазанов**, **В.С. Вакулюк**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. СГТУ В.П. Радченко;  
канд. техн. наук, доц. В.А. Мехеда

**С646** **Сопrotивление материалов:** учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 /  
**С.И. Иванов**, **В.Ф. Павлов**, **В.А. Кирпичёв** [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского  
университета, 2018. – 164 с.

**ISBN 978-5-7883-1332-0(Ч. 2)**  
**ISBN 978-5-7883-1333-7**

Изложено содержание тем курса «Сопrotивление материалов», относящихся к расчётам на прочность и жёсткость при сложных деформациях, неравномерном движении, ударном нагружении, переменных напряжениях и колебаниях упругих систем, а также энергетических методов определения перемещений и общих методов решения статически неопределимых систем.

Предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Сопrotивление материалов»:

*Институт ракетно-космической техники:*

– по направлениям подготовки: 15.03.01 Машиностроение, 15.03.03 Прикладная механика, 23.03.01 Технология транспортных процессов и по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

*Институт двигателей и энергетических установок:*

– по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств и по специальности 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей,

изучающих дисциплину «Механика материалов и конструкций» по направлению подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение.

*Институт авиационной техники:*

– по специальности 24.05.07 Самолёто- и вертолётостроение;  
– направлениям подготовки: 24.03.04, 24.04.04 Авиационное, 25.04.01 Техническая эксплуатация летательных и двигателей, 27.03.02 Управление качеством.

Подготовлено на кафедре сопротивления материалов Самарского университета.

УДК 539.3/6(075)  
ББК 30.121я7

ISBN 978-5-7883-1332-0 (Ч. 2)  
ISBN 978-5-7883-1333-7

© Самарский университет, 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1. Потенциальная энергия деформации и общий метод определения перемещений при изгибе.....</b>	<b>7</b>
1.1. Потенциальная энергия бруса при простых деформациях .....	7
1.1.1. Центральное растяжение и сжатие (ЦРС).....	7
1.1.2. Плоский изгиб .....	9
1.1.3. Кручение .....	10
1.2. Обобщённая сила и обобщённое перемещение.....	11
1.3. Взаимность работ и взаимность перемещений. Податливость .....	12
1.4. Интеграл Мора для определения перемещений при изгибе .....	15
1.5. Графоаналитический способ вычисления интеграла Мора. Способ Верещагина .....	18
1.6. Правила перемножения эпюр при использовании способа Верещагина.....	19
1.7. Формулы для площадей и положения центров тяжести криволинейных треугольников .....	21
1.8. Вопросы для самопроверки.....	23
<b>2. Наиболее общие методы раскрытия статической неопределённости .....</b>	<b>24</b>
2.1. Метод сил.....	24
2.2. Уравнение трёх моментов .....	29
2.3. Вопросы для самопроверки .....	34
<b>3 Сложное сопротивление бруса .....</b>	<b>35</b>
3.1. Общий случай сложного сопротивления бруса.....	35
3.1.1. Напряжения и расчёт на прочность в общем случае сложного сопротивления бруса .....	35
3.1.2. Перемещения бруса в общем случае сложного сопротивления .....	38
3.2. Расчёт плоских статически неопределимых рам (изгиб с растяжением или сжатием) .....	40
3.2.1. Пример расчёта плоской статически неопределимой рамы.....	42
3.3. Косой изгиб.....	48

3.3.1 Напряжения и расчёт на прочность при косом изгибе .....	48
3.3.2 Перемещения при косом изгибе .....	54
3.4 Внецентренное растяжение и сжатие коротких стержней .....	55
3.5 Кручение с изгибом .....	59
3.6 Вопросы для самопроверки .....	63
<b>4 Прочность при циклически изменяющихся напряжениях .....</b>	<b>64</b>
4.1 Основные понятия об усталостном разрушении .....	64
4.2 Предел выносливости материала при симметричном цикле .....	69
4.3 Предел выносливости материала при асимметричном цикле .....	72
4.4 Концентрация напряжений и её влияние на прочность .....	74
4.5 Предел выносливости детали при симметричном цикле .....	79
4.6 Предел выносливости детали при асимметричном цикле .....	80
4.7 Расчёт на прочность при переменных напряжениях в случае линейного напряжённого состояния и чистого сдвига .....	84
4.8 Расчёт на прочность при переменных напряжениях в случае сложного напряжённого состояния .....	88
4.9 Практические способы борьбы с усталостным разрушением .....	91
4.10 Вопросы для самопроверки .....	94
<b>5 Колебания упругих систем .....</b>	<b>96</b>
5.1 Основные понятия об упругих колебаниях .....	96
5.2 Собственные колебания системы с одной степенью свободы .....	97
5.3 Собственные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления .....	99
5.4 Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления .....	102
5.5 Расчёт системы с одной степенью свободы на прочность при колебаниях .....	105
5.6. Собственные колебания системы с несколькими степенями свободы .....	108
5.7. Вопросы для самопроверки .....	112

<b>6. Ударное нагружение .....</b>	<b>113</b>
6. 1. Перемещения, напряжения и расчёт на прочность при ударе .....	113
6. 2. Частные случаи и особенности сопротивления ударному нагружению .....	117
6.2.1. Мгновенное нагружение.....	117
6.2.2. Изгибающий удар.....	117
6.2.3. Особенности сопротивления удару балок равного сопротивления .....	119
6.2.4. Правило выравнивания поперечного сечения по наименьшему при ударном нагружении .....	120
6.3 Вопросы для самопроверки .....	121
<b>7 Расчёт на прочность неравномерно движущихся элементов конструкций .....</b>	<b>122</b>
7.1. Напряжения и расчёт на прочность неравномерно движущихся элементов конструкций.....	125
7.2. Вопросы для самопроверки .....	125
<b>8. Расчёт толстостенных цилиндров .....</b>	<b>126</b>
8.1. Напряжения в толстостенном цилиндре, нагруженном наружным и внутренним давлением .....	126
8.2. Расчёт толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением .....	130
8.2.1. Расчёт по допускаемым напряжениям .....	131
8.2.2. Расчёт по предельным нагрузкам .....	132
8.3 Применение составных цилиндров для увеличения упругой грузоподъёмности .....	134
8.4 Вопросы для самопроверки.....	138
<b>9. Тонкостенные оболочки.....</b>	<b>139</b>
9.1. Напряжения в осесимметричной оболочке при безмоментном сопротивлении .....	139
9.2. Расчёт на прочность сферической оболочки .....	141
9.3. Расчёт на прочность цилиндрической оболочки.....	142
9.4. Расчёт на прочность конической оболочки, наполненной жидкостью .....	143
9.5 Вопросы для самопроверки.....	145

<b>10. Продольно-поперечный изгиб.....</b>	<b>146</b>
10.1 Точное решение уравнения продольно-поперечного изгиба.....	146
10.2 Приближённое решение уравнения продольно-поперечного изгиба.....	150
10.3 Расчёт на прочность при продольно-поперечном изгибе .....	153
10.4 Вопросы для самопроверки.....	154
<b>11. Сопротивление материалов и другие науки о прочности ...</b>	<b>155</b>
11.1 Сопротивление материалов .....	155
11.2 Теория упругости .....	155
11.3 Теории пластичности и ползучести .....	159
11.4 Строительная механика .....	160
11.5 Материаловедение.....	160
11.6 Вопросы для самопроверки .....	160
<b>Список литературы .....</b>	<b>161</b>

# 1. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ И ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

## 1.1. Потенциальная энергия бруса при простых деформациях

При нагружении в деталях накапливается потенциальная энергия деформации. Если пренебречь потерями на тепловыделение и кинетической энергией движения при статическом («медленном») нагружении, то потенциальная энергия деформации, исходя из закона сохранения энергии, равна работе внешних сил, то есть  $U = A_F$ .

Есть два способа вычисления потенциальной энергии:

- через удельную энергию,
- через работу внешних сил.

Воспользуемся вторым способом. Предстоит рассмотреть три простых деформации: центральное растяжение и сжатие, изгиб и кручение.

### 1.1.1. Центральное растяжение и сжатие (ЦРС)

Рассмотрим брус, закреплённый одним концом (рис. 1.1, а). Далее покажем промежуточное положение, когда сила достигла значения  $F$  (рис. 1.1, б). Затем бесконечно близкое состояние, когда сила равна  $F + dF$  (рис. 1.1, в). И, наконец, конечное состояние ( $F_k$ ) (рис. 1.1, з).

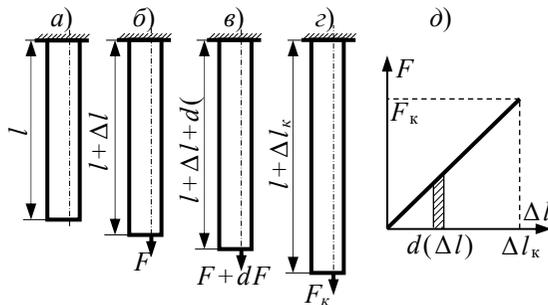


Рис. 1.1. Определение работы внешних сил при ЦРС

То есть, мы вводим этап бесконечно малого нагружения (рис. 1.1, д). Вычислим работу силы  $F$  на бесконечно малом этапе нагружения

$$d A_F = F \cdot d(\Delta l); \quad \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad \text{где} \quad \frac{l}{E \cdot A} = \text{const.} \quad \text{Тогда}$$

$d(\Delta l) = \frac{l}{E \cdot A} dF$ ;  $dA_F = \frac{l}{E \cdot A} F \cdot dF$  – работа силы  $F$  на бесконечно малом этапе нагружения.

Просуммируем работу сил по всему нагружению

$$A_F = \frac{l}{E \cdot A} \int_0^{F_k} F \cdot dF = \frac{F_k^2 \cdot l}{2E \cdot A}.$$

Теперь индекс «к» можно опустить, так как он был нужен только при выводе формулы.

$$A_F = \frac{F^2 \cdot l}{2E \cdot A} = \frac{1}{2} F \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A}; \Rightarrow A_F = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l.$$

Следовательно, работа силы  $F$  при статическом нагружении равна половине произведения силы на перемещение, так как сила изменяется от нуля до значения  $F$ .

Запомним, что при статическом нагружении, работа силы всегда меньше произведения силы на перемещение. При линейной зависимости между  $F$  и  $\Delta l$  – коэффициент равен  $1/2$ , а при нелинейной зависимости, например, за пределом текучести, коэффициент будет другим.

Запишем уравнение для энергии деформации

$$U = \frac{F^2 \cdot l}{2E \cdot A}.$$

Энергия деформации бруса является квадратичной функцией от  $F$ .

Эта функция справедлива для случая, когда брус нагружен по торцам, то есть когда нормальная сила по всей длине бруса постоянна.

Получим формулу для общего случая, когда нормальная сила по длине бруса меняется (рис. 1.2, а). Чтобы применить полученную

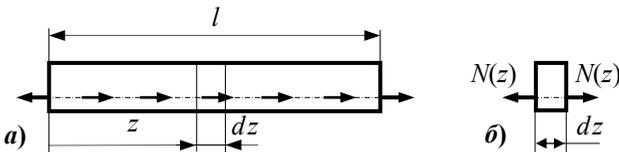


Рис. 1.2. Работа при ЦРС в случае переменной нормальной силы

ранее формулу, рассмотрим бесконечно малый элемент бруса (рис. 1.2, б). Покажем его отдельно.  $N(z)$  – нормальная сила, которая вычисляется методом сечений. Видно, что элемент длиной  $dz$  находится в таких же условиях, что и брус, нагруженный по торцам, поэтому можно применять формулу  $dU = \frac{N^2(z)dz}{2E \cdot A}$  и проинтегрировать по длине бруса

$$U = \int_0^l \frac{N^2(z)dz}{2E \cdot A}$$

– это общая формула для энергии деформации бруса при центральном растяжении и сжатии.

### 1.1.2. Плоский изгиб

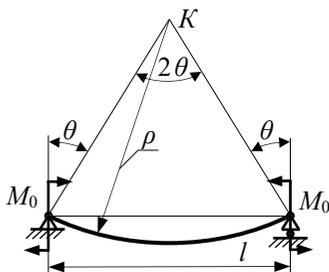


Рис. 1.3. Определение работы внешних сил при чистом изгибе

Рассмотрим чистый изгиб (рис. 1.3). Балка длиной  $l$ , на шарнирных опорах нагружена парами сил  $M_0$ , реакции опор равны нулю,  $M = M_0 = const$ .

После нагружения балка искривляется по дуге окружности, а опорные сечения поворачиваются на угол  $\theta$ . Продолжим направления опорных сечений до пересечения в центре окружности  $K$ .

Выразим  $\theta$  через  $M$

$$\rho \cdot 2\theta = l, \Rightarrow \theta = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\rho}, \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J}, \Rightarrow \theta = \frac{M \cdot l}{2E \cdot J},$$

где  $M$  – изгибающий момент,  $E \cdot J$  – жёсткость балки при изгибе.

Этот результат также можно было получить и интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси балки.

Запишем формулу для работы пар сил при статическом (медленном) нагружении.

$$A_F = 2 \cdot \frac{1}{2} M_0 \cdot \theta = M_0 \cdot \theta, \text{ но } M = M_0. \text{ Поэтому } A_F = \frac{M^2 \cdot l}{2E \cdot J}.$$

Теперь запишем формулу для энергии  $U = \frac{M^2 \cdot l}{2E \cdot J}$  – формула для

энергии деформации балки при чистом изгибе.

Рассмотрим поперечный изгиб. Это, более сложный случай. Изобразим балку, испытывающую поперечный изгиб (рис. 1.4, а). Выделим бесконечно малый элемент длиной  $d z$ . Покажем его отдельно (рис. 1.4, б). Пусть  $Q > 0$  и  $M > 0$ .

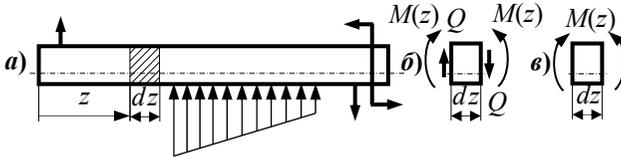


Рис. 1.4. Определение работы внешних сил при поперечном изгибе

Чтобы вычислить энергию, накопленную элементом, нужно вычислить работу внешних сил (для элемента – это  $Q$  и  $M$ ). Оказывается, что  $A_Q \ll A_M$ , поэтому силами  $Q$  можно пренебречь и мы получим для элемента, случай чистого изгиба (рис. 1.4, в), тогда

$$U = \frac{M^2 \cdot l}{2 E \cdot J}$$

Интегрируя по длине всей балки, получим общую формулу для энергии деформации балки при поперечном изгибе

$$U = \int_0^l \frac{M^2(z) dz}{2 E \cdot J}$$

### 1.1.3. Кручение

Рассмотрим брус круглого поперечного сечения, подверженный кручению. Пусть брус одним концом закреплён (рис. 1.5) (но это не обязательно).

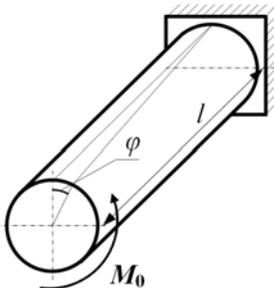


Рис. 1.5. Определение работы внешних сил при кручении

На свободном конце брус нагружен парой сил  $M_0$ . Свободный конец бруса поворачивается на угол  $\varphi$ . Очевидно, что  $M_k = M_0 = const$ .

Аналогично предыдущим простым деформациям запишем

$$U = A_F = \frac{1}{2} M_0 \cdot \varphi = \frac{1}{2} M_k \cdot \varphi, \text{ но } \varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p}$$

Тогда  $U = \frac{M_k^2 \cdot l}{2 G \cdot J_p}$  – формула для энергии

деформации при кручении в случае  $M_k = const$ .

Далее рассмотрим общий случай ( $M_k \neq const$ ) и по аналогии с предыдущими случаями получим общую формулу для энергии деформации бруса при кручении

$$U = \int_0^l \frac{M_k^2(z) dz}{2G \cdot J_p}.$$

Полученные формулы чрезвычайно важны. Они используются при выводе универсального уравнения для определения перемещений.

## 1.2. Обобщённая сила и обобщённое перемещение

В предыдущем параграфе мы определили работу внешних сил при простых деформациях и получили (рис. 1.6).

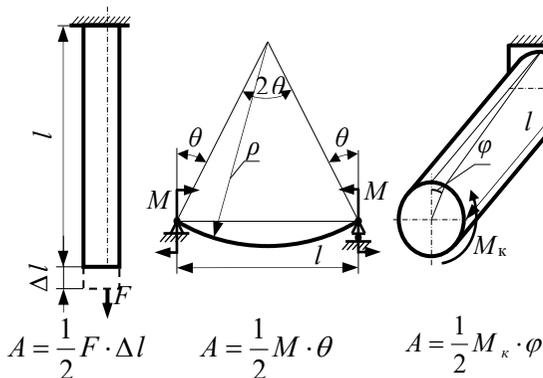


Рис. 1.6. Работа внешних сил при простых деформациях

Обобщая все три случая, можно записать

$$A_F = \frac{1}{2} F \cdot \Delta,$$

где  $F$  – обобщённая сила,  $\Delta$  – обобщённое перемещение.

Обобщённая сила может быть либо силой, либо парой сил, либо какой-нибудь более сложной величиной.

Обобщённое перемещение может быть либо линейным, либо угловым перемещением, либо более сложной величиной.

Рассмотрим примеры:

1) Система балок нагружена группой сил  $F_1$ ,  $F_2$  и реакциями в заделках (рис. 1.7, а). Длины балок неодинаковы. Работу создают только силы, так как у реакций нет перемещений, поэтому

$$A_F = \frac{1}{2} F_1 \cdot f_1 + \frac{1}{2} F_2 \cdot f_2.$$

В этом случае обобщённой силой является группа сил  $F_1$  и  $F_2$ , а обобщённым перемещением – линейное перемещение, равное сумме прогибов балок, то есть взаимное вертикальное перемещение свободных концов балок.

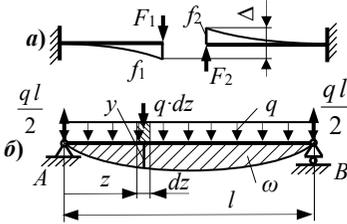


Рис. 1.7. Сложные случаи обобщённой силы и обобщённого перемещения

2) Более сложный пример. Балка на двух опорах, нагруженная распределённой нагрузкой интенсивностью (рис. 1.7, б). Имеем группу сил: реакции в опорах  $A$ ,  $B$ , и распределённую нагрузку. Вычислим работу этой группы сил при статическом нагружении. Реакции опор работу не создают (нет перемещений). Рассмотрим произвольное сечение  $z$

$$A_q = \int_0^l \frac{1}{2} q \, dz \cdot y = \frac{1}{2} q \cdot \int_0^l y \, dz = \frac{1}{2} q \cdot \omega.$$

Здесь  $\omega = \int_0^l y \, dz$  – площадь фигуры между первоначальной и изогнутой осями балки, в данном случае – обобщённое перемещение.

### 1.3. Взаимность работ и взаимность перемещений.

#### Податливость

В этом разделе речь пойдёт о фундаментальных положениях сопротивления материалов (теории упругости), об очень важных свойствах упругих тел.

Вначале о новых обозначениях перемещений –  $\Delta_{ik}$ .

Первый индекс  $i$  показывает место и направление перемещения, а второй  $k$  – силу (причину), вызвавшую это перемещение.

Например, рассмотрим консольную балку, нагруженную в сечениях 1 и 2 (рис. 1.8, а). Силы приложены к недеформированной балке.  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – полные перемещения точек при совместном действии обеих сил. Если приложить силы поочерёдно (рис. 1.8, в), то мы получаем ещё четыре перемещения. В частности,  $\Delta_{21}$  – перемещение

сечения 2 по направлению силы  $F_2$ , вызванное силой  $F_1$ . В нашем случае – это угол поворота сечения 2 от силы  $F_1$ .

Теперь вернёмся к изучению закономерностей, именуемых взаимностью работ и взаимностью перемещений. Для получения необходимых соотношений будем вычислять энергию деформации, рассматривая различные варианты статического нагружения.

В первом варианте (рис. 1.9, а) вначале приложим силу  $F_1$  (этап I), а затем, к уже деформированной балке, приложим силу  $F_2$  (этап II). Энергию деформации определим через работу внешних сил

$$U = A_F = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{11} + F_1 \cdot \Delta_{12} + \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_{22}.$$

На первом этапе сила  $F_1$  достигает своего конечного значения и на втором этапе уже не меняется, поэтому во втором слагаемом, коэффициент 1/2 отсутствует.

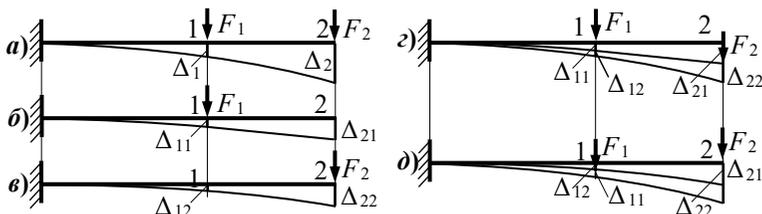


Рис. 1.9. Доказательство теоремы о взаимности работ

Во втором варианте (рис. 1.9, б) вначале приложим силу  $F_2$  а затем, к уже деформированной балке, приложим силу  $F_1$  и аналогично предыдущему вычислим энергию деформации

$$U = A_F = \frac{1}{2} F_2 \cdot \Delta_{22} + F_2 \cdot \Delta_{21} + \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{11}.$$

Приравняв правые части и суммируя подобные произведения, получим

$$F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21}.$$

Разберёмся в физическом смысле полученного выражения. Левая часть  $F_1 \cdot \Delta_{12}$  – работа силы  $F_1$  на перемещении, вызванной силой  $F_2$ ;

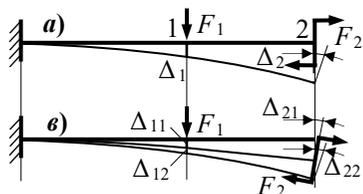


Рис. 1.8. Обозначения перемещений

Правая часть  $F_2 \cdot \Delta_{21}$  – работа силы  $F_2$  на перемещении, вызванной силой  $F_1$ .

Сформулируем **закономерность, именуемую взаимностью работ**.

*Работа одной группы сил на перемещениях, вызванных другой группой сил, равна работе второй группы сил на перемещениях, вызванных первой группой сил.*

Здесь мы обобщили для группы сил, а при выводе рассматривали, две сосредоточенные силы.

Значительно большее значение имеет следствие, а именно, взаимность перемещений.

Введём понятие о **единичном нагружении**. Рассмотрим однопролётную балку, нагруженную сосредоточенной силой  $F$  в сечении  $i$  (рис. 1.10, а). Реакции опор А, В.

Поделим нагружение на  $F$  (рис. 1.10, б)

$$\frac{F}{F} = 1; \quad \bar{A}_i = \frac{A}{F}; \quad \bar{B}_i = \frac{B}{F}.$$

Величины перемещений  $\Delta_{ik}$  зависят не только от жёсткости упругой системы, но и от величины сил  $F_k$ , поэтому не могут характеризовать эту систему.

Перейдём к относительной величине  $\frac{\Delta_{ik}}{F_k} = \delta_{ik}$ , которая называется податливостью упругой системы.

Таким образом, **податливость  $\delta_{ik}$**  –

*это перемещение в направлении силы  $F_i$  под действием единичной силы, заменяющей силу  $F_k$ .*

Нагрузим балку единичными силами последовательно в сечении  $i$  (рис. 1.10, б) и  $k$ : (рис. 1.10, в).

Итак, будем рассматривать две группы сил.

Первая группа:  $\bar{A}_i$ ; 1 (в сечении  $i$ );  $\bar{B}_i$ .

Вторая группа:  $\bar{A}_k$ ; 1 (в сечении  $k$ );  $\bar{B}_k$ .

Применим теорему взаимности работ к этим группам:  $1 \cdot \delta_{ik} = 1 \cdot \delta_{ki}$  (реакции опор работу не совершают, так как нет перемещений). Тогда имеем

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

*Перемещение в сечении  $i$  от единичной силы, приложенной в се-*

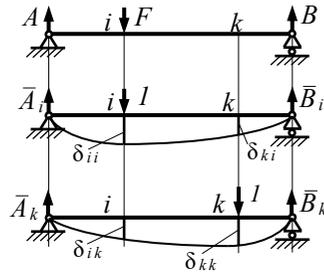


Рис. 1.10. Понятие о единичном нагружении

чении  $k$ , равно перемещению в сечении  $k$  от единичной силы, приложенной в сечении  $i$ .

Эта закономерность называется **теоремой о взаимности перемещений**. Она справедлива также и для углов поворота и всех других обобщённых перемещений.

#### 1.4. Интеграл Мора для определения перемещений при изгибе

При выводе формулы рассмотрим частный случай, но полученное соотношение справедливо в самом общем случае. В качестве примера возьмём балку на двух опорах, к которой приложены силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 1.11, а). Будем рассматривать прогиб в произвольном сечении  $k$ . Наша задача вывести формулу для определения прогибов сечения  $k$ , основываясь на энергетических соображениях.

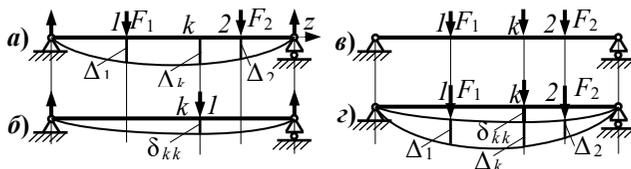


Рис. 1.11. Вывод интеграла Мора для определения перемещений

Можно определить изгибающий момент  $M_F$ , а затем потенциальную энергию деформации  $U_F = \int_0^l \frac{M_F^2}{2E \cdot J} dz$  и ту же энергию можно

выразить через работу внешних сил  $U_F = A_F = \frac{1}{2}(F_1 \cdot \Delta_1 + F_2 \cdot \Delta_2)$ , здесь множитель  $1/2$ , так как нагружение статическое.

Рассмотрим нагружение той же балки, единичной силой в сечении  $k$  (рис. 1.11, б) и определяем прогиб под единичной силой  $\delta_{kk}$ .

И в этом случае можем вычислить изгибающий момент  $\bar{M}_k$ , а затем потенциальную энергию  $\bar{U}_F = \int_0^l \frac{\bar{M}_k^2}{2E \cdot J} dz$ .

Ту же энергию вычислим через работу:  $\bar{U}_k = \bar{A}_k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \delta_{kk}$ .

Далее рассмотрим суммарное нагружение от заданных сил и единичной силы (рис. 1.11, в). Для суммарного нагружения можно вычислить изгибающий момент, воспользовавшись принципом супер-

позиции,  $M_\Sigma = M_F + \bar{M}_k$  и энергию деформации

$$\begin{aligned} U_\Sigma &= \int_0^l \frac{M_\Sigma^2}{2E \cdot J} dz = \int_0^l \frac{(M_F + \bar{M}_k)^2}{2E \cdot J} dz = \\ &= \int_0^l \frac{M_F^2}{2E \cdot J} dz + \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_k}{E \cdot J} dz + \int_0^l \frac{\bar{M}_k^2}{2E \cdot J} dz. \end{aligned}$$

Первое слагаемое полученного выражения – это энергия, накопленная балкой при нагружении внешними силами. Последнее – энергия, накопленная балкой от нагружения единичной силой. Видно, что при определении энергии принцип суперпозиции применять нельзя, так как получили три слагаемых, а не два.

Итак, при суммарном нагружении:

$$U_\Sigma = U_F + \bar{U}_k + \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_k}{E \cdot J} dz.$$

Вычислим энергию деформации через работу действующих сил (рис. 1.11,  $\varepsilon$ ). Вначале прикладываем единичную силу, а затем силы  $F_1$  и  $F_2$ .

$$U_\Sigma = A_\Sigma = \frac{1}{2} 1 \cdot \delta_{kk} + \frac{1}{2} 1 \cdot \Delta_k + \frac{1}{2} (F_1 \cdot \Delta_1 + F_2 \cdot \Delta_2).$$

Здесь  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  такие же, как и при отсутствии единичной силы. На втором этапе нагружения работает также и единичная сила ( $1 \cdot \Delta_k$ , так как она не изменяется). Тогда

$$A_\Sigma = A_F + \bar{A}_k + 1 \cdot \Delta_k.$$

Приравниваем правые части выражений

$$A_F + \bar{A}_k + 1 \cdot \Delta_k = U_F + \bar{U}_k + \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_k}{E \cdot J} dz.$$

Отсюда

$$1 \cdot \Delta_k = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_k}{E \cdot J} dz \quad (1.1)$$

– интеграл Мора для определения перемещений,

где  $\Delta_k$  – искомое перемещение – это, либо прогиб, либо угол поворота, либо другое обобщённое перемещение;

$M_F$  – изгибающий момент от сил, для которых ищется перемещение;

$\bar{M}_k$  – изгибающий момент от единичного силового фактора, соот-

ветствующего искомому перемещению. Единичный силовой фактор должен работать па искомом перемещении в свою полную величину. При определении прогиба прикладываем единичную силу, при определении угла поворота – единичную пару сил, а при определении обобщённого перемещения – группу единичных сил, вызывающих это перемещение;

$E \cdot J$  – жёсткость балки при изгибе.

Интеграл нужно вычислять по всей длине балки.

Преимущества этого способа определения перемещения по сравнению с дифференциальным уравнением изогнутой оси балки: однократное интегрирование, не нужны граничные условия.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки применяется тогда, когда нужны закономерности изменения перемещений по всей длине балки (уравнения углов поворота и прогибов).

Из формулы (1.1) можно выявить **физический смысл интеграла Мора** – это работа единичной силы на искомом перемещении.

Отсюда вытекает правило знаков для перемещений: если  $\Delta_k > 0$ , то перемещение происходит по направлению единичного силового фактора, а если  $\Delta_k < 0$ , то перемещение противоположно направлению единичного силового фактора.

Аналогичные интегралы для определения перемещений можно получить и при центральном растяжении (сжатии), сдвиге и кручении.

$$\Delta_i = \int_0^l \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{E \cdot A} dz; \quad \Delta_i = \int_0^l \frac{Q_F \cdot \bar{Q}_i}{G \cdot A} dz; \quad \Delta_i = \int_0^l \frac{M_{кF} \cdot \bar{M}_{ки}}{E \cdot J_k} dz.$$

Рассмотрим **пример**: определить угол поворота свободного конца консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 1.12, а).

Нагрузим балку единичным моментом (рис. 1.12, б). Изгибающие моменты  $M_F = -F \cdot z$ ;  $\bar{M}_1 = -1$ . Далее подставим полученные значения моментов в интеграл Мора и вычислим перемещение

$$\Delta_1 = \int_0^l \frac{F \cdot z \cdot (-1)}{E \cdot J} dz = -\frac{F l^2}{2 E \cdot J} \text{ – окончательный результат.}$$

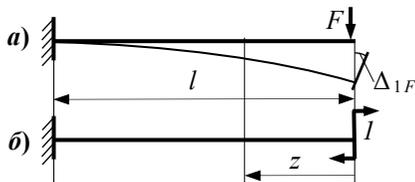


Рис. 1.12. Определение перемещений с помощью интеграла Мора

Знак (+) означает, что сечение поворачивается по направлению единичной пары сил, то есть по ходу часовой стрелки.

Интегрирование несколько затрудняет вычисление перемещений (особенно, когда много сил и участков), поэтому применяется графоаналитический способ вычисления интеграла Мора.

### 1.5. Графоаналитический способ вычисления интеграла Мора. Способ Верещагина

Запишем интеграл Мора

$$\Delta_1 = \int_0^l \frac{M_F \cdot \overline{M}_1}{E \cdot J} dz.$$

В 20-х годах XX века русский механик А.Н. Верещагин предложил графоаналитический метод вычисления интеграла Мора. Способ Верещагина значительно повысил эффективность интеграла Мора при вычислении перемещений.

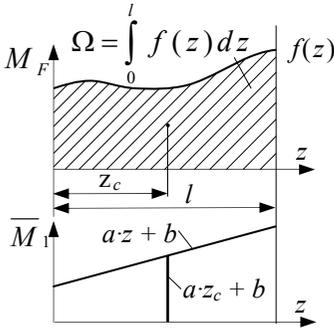


Рис. 1.13. Вывод формулы Верещагина

Рассмотрим способ Верещагина (рис. 1.13). Обычно балки бывают постоянной жёсткости, то есть  $E \cdot J = const$ , тогда

$$\Delta_1 = \frac{1}{E \cdot J} \int_0^l M_F \cdot \overline{M}_1 dz.$$

Обозначим  $M_F = M(z)$ . Изгибающий момент от единичного нагружения (единичная эпюра) для балок всегда линейная функция –  $\overline{M}_1 = a \cdot z + b$ .

Построим эпюры изгибающих моментов от заданных сил и единичного нагружения, тогда

$$\int_0^l M_F \cdot \overline{M}_1 dz = \int_0^l f(z) \cdot (a \cdot z + b) dz = a \cdot \int_0^l f(z) \cdot z dz + b \cdot \int_0^l f(z) dz.$$

Интеграл во втором слагаемом полученного выражения представляет собой площадь эпюры  $M_F - \Omega$ , в первом – статический момент этой площади относительно оси ординат:  $S_y = \Omega \cdot z_c$ , следовательно

$$\int_0^l M_F \cdot \overline{M}_1 dz = a \cdot \int_0^l f(z) \cdot z dz + b \cdot \int_0^l f(z) dz = \Omega \cdot (a \cdot z_c + b).$$

Обозначим  $\overline{M}_{1c} = a \cdot z_c + b$ , что представляет собой ординату единичной эпюры под центром тяжести эпюры  $M_F$ . Таким образом, формула Верещагина имеет вид

$$\Delta_1 = \frac{\Omega \cdot \overline{M}_{1c}}{E \cdot J}.$$

Здесь:  $\Omega$  – площадь эпюры моментов от заданных сил, для которых ищется перемещение, или площадь грузовой эпюры;

$\overline{M}_{1c}$  – ордината на эпюре единичных моментов под центром тяжести грузовой эпюры.

При использовании способа Верещагина, эпюры не заштриховываются, чтобы не загромождать рисунок.

**Пример:** определить прогиб свободного конца консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 1.14).

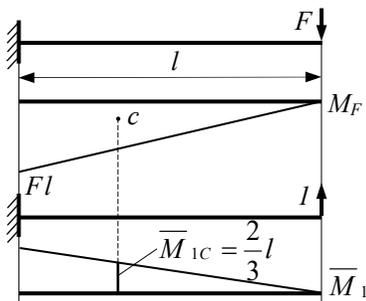


Рис. 1.14. Определение перемещений способом Верещагина

$$\Omega = -Fl \cdot l, \quad \overline{M}_{1c} = \frac{2}{3}l, \quad \Delta_1 = \frac{Fl^3}{3E \cdot J}.$$

## 1.6. Правила перемножения эпюр при использовании способа Верещагина

**Правило 1.** Если эпюра  $\overline{M}_1$  – ломаная прямая (рис. 1.15, а) (чаще всего так и бывает), то эпюры  $M_F$  и  $\overline{M}_1$  следует разбить на несколько участков, перемножение вести по каждому участку в отдельности, а результаты сложить

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \cdot \overline{M}_{1c}^{(i)}}{E \cdot J},$$

где  $i$  – номер каждого участка.

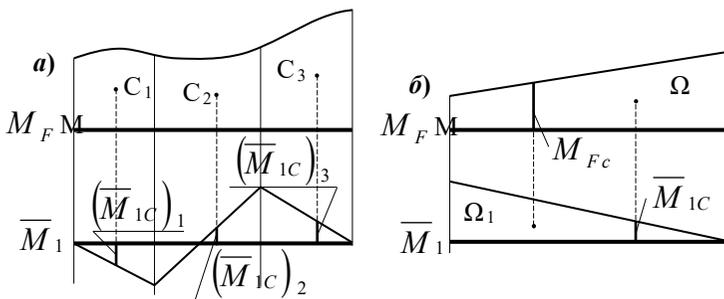


Рис. 1.15. Правила перемножения эпюр

**Правило 2.** Если эпюра  $M_F$  также линейна (рис. 1.15, б), то операция перемножения обладает свойством коммутативности, то есть  $\Omega \cdot \bar{M}_{1C} = \Omega_1 \cdot M_{Fc}$ , где  $\Omega_1$  – площадь единичной эпюры;  $M_{Fc}$  – значение момента на грузовой эпюре, над центром тяжести единичной эпюры.

**Правило 3.** Если эпюра  $M_F$  сложная фигура (рис. 1.16, а), то её следует расслоить. Расслоить эпюру – это значит построить эпюру от каждой силы в отдельности.

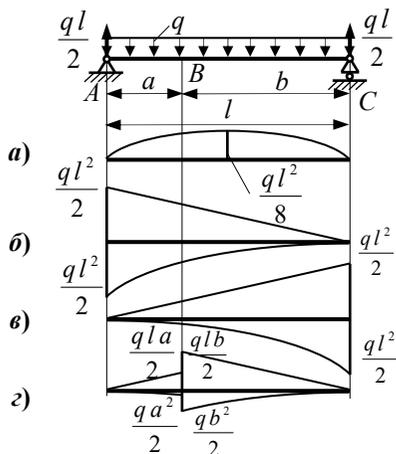


Рис. 1.16. Расслоение эпюр

Цель расслоения – построить эпюру  $M_F$  как сумму простых фигур, для которых можно легко определить площади и положение центров тяжести. Расслоение эпюр можно вести как по правым (рис. 1.16, б), так и по левым (рис. 1.16, в) силам; можно также вести смешанное расслоение (рис. 1.16, г) к одному из промежуточных сечений.

Вид расслоения должен быть выбран таким, чтобы операция перемножения эпюр была как можно проще. Как правило, расслоение следует проводить к тому сечению, в котором определяется перемещение.

## 1.7. Формулы для площадей и положения центров тяжести криволинейных треугольников

Для того, чтобы воспользоваться формулой Верещагина нужно определить площадь  $\Omega$  и положение центра тяжести криволинейного треугольника с основанием  $l$  и высотой  $h$ .

Рассмотрим криволинейный треугольник, ограниченный осью абсцисс и одночленной параболой  $n$ -й степени  $y = a \cdot z^n$  (рис. 1.17).

Начнём с площади:

$$\Omega = a \cdot \int_0^l y \, dz = a \cdot \int_0^l z^n \, dz = \frac{a l^{n+1}}{n+1} = \frac{a l^n \cdot l}{n+1}.$$

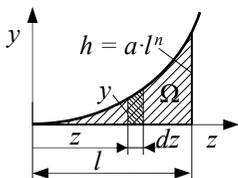


Рис. 1.17. Криволинейный треугольник

Окончательная формула

$$\Omega = \frac{h \cdot l}{n+1}.$$

Вычислим статический момент площади криволинейного треугольника относительно оси ординат

$$\begin{aligned} \Omega \cdot (l - \xi_c) &= \int_0^l z \cdot y \, dz = a \cdot \int_0^l z^{n+1} \, dz = \\ &= \frac{a l^{n+2}}{n+2} = \frac{a l^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{(n+1) \cdot l}{n+2}. \end{aligned}$$

преобразуя, получим  $l - \xi_c = \frac{(n+1) \cdot l}{n+2}$ . Тогда

$$\xi_c = \frac{1}{n+2} \cdot l.$$

– формула для положения центра тяжести криволинейного треугольника.

Полученные формулы можно применять только для треугольников, ограниченных одночленной параболой при начале координат, в вершине треугольников. Для лучшего запоминания представим их в виде

	$\frac{1}{1} h \cdot l$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{1}{2} h \cdot l$	$\frac{1}{3} l$
	$\frac{1}{3} h \cdot l$	$\frac{1}{4} l$
	$\frac{x}{H} = \frac{k \cdot l}{l}$	
<b><math>x = k \cdot H</math></b>		

Рис. 1.18. Площади и центры тяжести простых фигур

таблицы (рис. 1.18).

**Пример 1.**

Рассмотрим консольную балку, нагруженную равномерно распределённой нагрузкой (рис. 1.19, а). Выясним степень кривизны. Для этого помещаем начало координат в крайнее правое сечение и составляем уравнение для изгибающих моментов  $M(z) = -\frac{qz^2}{2}$ , следовательно,  $n = 2$ .

**Пример 2.**

Рассмотрим консольную балку, нагруженную распределённой нагрузкой  $q(z) = -\frac{q}{l}z$  (рис. 1.19, б). Построим эпюру изгибающих моментов.

Можно ли к этому треугольнику применить наши формулы и чему равен  $n$ ? Составляем уравнение для изгибающих моментов.

$$M(z) = -\frac{1}{2}q(z) \cdot z \cdot \frac{1}{3}z = -\frac{qz^3}{6l}, \text{ видно, что это одночленная степенная}$$

функция. Следовательно, наши формулы применять можно, причём  $n = 3$ .

В реальных конструкциях интенсивность может быть распределена по более сложному закону, но её можно привести к простым.

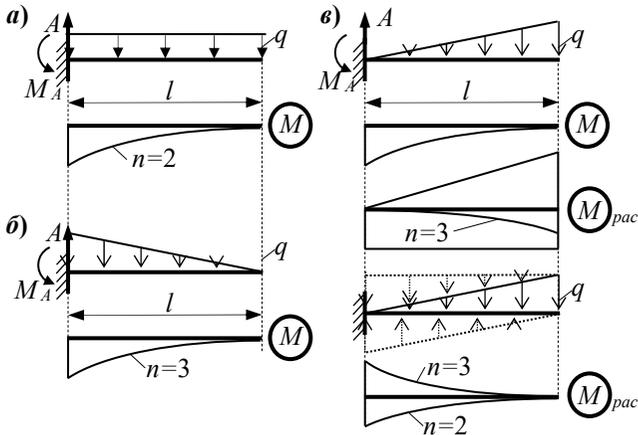


Рис. 1.19. Примеры вычисления перемещений способом Верещагина

### Пример 3.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную распределённой нагрузкой  $q(z) = -\frac{q}{l}(l-z)$  (рис. 1.19, в). Без промежуточных вычислений

запишем уравнение для изгибающих моментов.

$$q(z) = -\frac{qz^2}{2} + \frac{qz^3}{6l}, \text{ можно видеть, что к этому треугольнику фор-}$$

мулы не применимы.

Чтобы применить формулу Верещагина, необходимо поступить следующим образом:

1 способ – определить реакции в опоре  $A$  и расчлнить эпюры по левым силам;

2 способ – дополнить распределённую нагрузку до полной и вычесть дополненную. Расслаивать эпюры, по правым силам.

### 1.8. Вопросы для самопроверки

1. Как записывается потенциальная энергия деформации бруса при центральном растяжении или сжатии? 2. Как записывается потенциальная энергия бруса при изгибе? 3. Как записывается потенциальная энергия бруса при кручении? 4. Что понимается под обобщённой силой? 5. Что представляет собой обобщённое перемещение? 6. Что называется податливостью? Как она определяется? 7. Как записывается интеграл Мора для определения перемещений при изгибе? 8. Каков порядок определения прогибов с помощью интеграла Мора? 9. Каков порядок определения углов поворота с помощью интеграла Мора? 10. Как записывается формула Верещагина для определения перемещений при изгибе? 11. Какие ограничения накладываются при применении способа Верещагина? 12. Каков порядок определения прогибов с помощью способа Верещагина? 12. Каков порядок определения углов поворота с помощью способа Верещагина? 13. Как производится перемножение эпюр при использовании способа Верещагина, если единичная эпюра – ломаная прямая? 13. Каким свойством можно воспользоваться при определении перемещений способом Верещагина, если и единичная и грузовая эпюра – линейные функции. 14. Как производится перемножение эпюр при использовании способа Верещагина, если грузовая эпюра – сложная фигура? 15. В чём заключается расслоение грузовых эпюр при использовании способа Верещагина? 16. Как можно проводить расслоение грузовых эпюр при использовании способа Верещагина?

## 2. НАИБОЛЕЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РАСКРЫТИЯ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

### 2.1. Метод сил

Метод сил – один из общих универсальных методов раскрытия статической неопределённости. Есть ещё метод деформаций, но он применяется при расчёте сооружений.

В машиностроении при расчёте машин чаще всего применяется метод сил. Метод сил позволяет составить уравнения совместности деформаций или уравнения перемещений. Он даёт стандартный подход вне зависимости от вида конструкции.

Приступим к выводу уравнений метода сил. Рассмотрим частный случай, но уравнения получим общие. Будем рассматривать неразрезную балку (рис. 2.1, а).

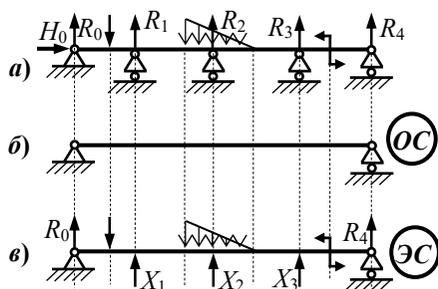


Рис. 2.1. Неразрезная балка

**Неразрезной** называют такую балку, которая, не прерываясь, перекрывает несколько пролётов. Эти несколько пролётов можно перекрыть и разрезными балками.

Неразрезная балка имеет преимущества: у неё больше жёсткость, то есть меньше перемещения и, в большинстве случаев, больше грузоподъёмность.

**Недостаток** – неразрезная балка – статически неопределимая балка и в ней могут быть монтажные напряжения, связанные с неточной установкой опор. Несмотря на этот недостаток, неразрезные балки широко применяются в конструкциях летательных аппаратов.

В сооружениях применяются разрезные балки.

Опоры нумеруются 0, 1, 2, 3, 4 (слева направо). На балку действуют активные силы и реакции опор. Незвестных реакций шесть, а статика даёт три уравнения. Таким образом имеем три лишних неизвестных (лишних – с точки зрения статики), то есть балка три раза статически неопределима. У балки три промежуточных опоры и всегда, стéпень статической неопределимости равна числу промежуточных опор.

Для решения задачи необходимо назначить лишние неизвестные. За лишние можно принять любые неизвестные, но после отбрасывания лишних неизвестных, система должна быть геометрически неизменяемой даже в малом. Примем за лишние неизвестные реакции промежуточных опор  $X_1 = R_1$ ,  $X_2 = R_2$ ,  $X_3 = R_3$ .

После назначения лишних неизвестных, изображаем основную систему (рис. 2.1, б).

**Основной системой** (ОС) называют статически определимую и геометрически неизменяемую систему, которая получается из исходной статически неопределимой, после отбрасывания лишних связей и внешних сил. Лишние связи – связи, в которых возникают лишние неизвестные, то есть в нашем случае, лишними связями будут промежуточные опоры. Видно, что основная система – геометрически неизменяемая и статически определимая.

Далее изображаем эквивалентную систему (рис. 2.1, в).

**Эквивалентная система** (ЭС) – это основная система, нагруженная активными силами и лишними неизвестными. Реакцию  $R_0$  не показываем, так как из уравнений статики,  $R_0 = 0$ .

Почему эта система называется эквивалентной? Эквивалентная система в точности воспроизводит исходную статически неопределимую систему с точки зрения сил, перемещений, деформаций и напряжений. Далее, все вопросы, будем решать с эквивалентной системой.

Метод сил позволяет составить уравнение совместности деформаций. В чём заключаются закономерности деформаций изучаемой системы?

Она заключается в том, что в эквивалентной системе, перемещения в направлении "лишних" связей, должны быть равны нулю. Или иначе:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  должны быть такими, чтобы в сечениях 1, 2, 3 эквивалентной системы прогибы обращались в ноль, то есть

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Распишем первое соотношение. Для этого рассмотрим ряд нагружений основной системы и перемещения от этих нагружений.

Первое нагружение. Приложим к основной системе единичную силу (рис. 2.2, а), соответствующую первой неизвестной силе  $X_1$ . Прогиб равен  $\delta_{11}$ .

Следующее нагружение основной системы силой  $X_1$  (рис. 2.2, б). Тогда  $\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1$ .

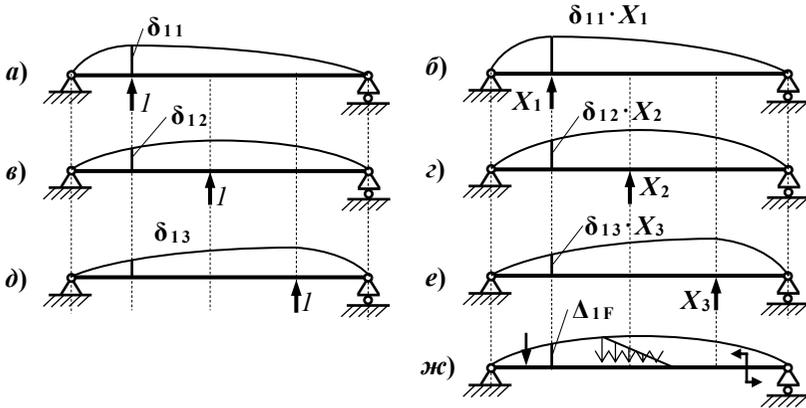


Рис. 2.2. Нагружения основной системы

Далее изобразим основную систему и нагрузим единичной силой, соответствующей второй неизвестной силе  $X_2$  (рис. 2.2, в). Затем нагрузим основную систему силой  $X_2$  (рис. 2.2, з) и получим перемещение  $\Delta_{12} = \delta_{12} \cdot X_2$ .

Теперь нагрузим основную систему в сечении 3 вначале единичной силой (рис. 2.2, д), а затем силой  $X_3$  (рис. 2.2, е) и получим перемещение  $\Delta_{13} = \delta_{13} \cdot X_3$ .

Мы рассмотрели нагружения неизвестными силами. Остаётся рассмотреть нагружение активными силами (рис. 2.2, жс) и получить перемещение  $\Delta_{1F}$ .

Используя принцип суперпозиции, мы получаем первое из уравнений совместности деформаций. Аналогично получаем ещё два уравнения. Первый индекс у  $\Delta$  ( $\delta$ ) будет совпадать с номером уравнения

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2F} &= 0, \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned}$$

Мы получили основные уравнения метода сил или канонические уравнения метода сил, для три раза статически неопределимой системы. Это, по существу, уравнения совместности деформаций.

Физический смысл канонических уравнений – перемещения в эквивалентной системе, по направлению лишних неизвестных равны нулю.

Запишем эти уравнения в общем виде для  $n$ -раз статически неопределимой системы.

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2F} &= 0, \\ \dots & \\ \dots & \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{ik}$  – коэффициенты канонических уравнений – это перемещения в основной системе по направлению  $i$ -й лишней связи от единичного силового фактора, соответствующего лишнему неизвестному  $X_k$ . При  $i = k$  получаем главные коэффициенты или главные податливости основной системы (податливость – перемещение от единичной силы). Если  $i \neq k$ , то это побочные коэффициенты канонических уравнений (побочные податливости). Вспомним о взаимности перемещений ( $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ ). Иначе говоря, матрица коэффициентов канонических уравнений симметрична относительно главной диагонали. Таким образом, нужно определять не все коэффициенты канонических уравнений, а только главные коэффициенты и коэффициенты, расположенные по одну стороны от главной диагонали. Поэтому вычисление коэффициентов канонических уравнений несколько упрощается.

$\Delta_{iF}$  – свободные члены канонических уравнений – перемещения в основной системе по направлению  $i$ -й лишней связи от всех внешних сил.

Канонические уравнения метода сил применимы к любому твёрдому телу, конструкции, которую можно считать линейной, то есть подчиняющейся закону Гука.

Лишними неизвестными могут быть силы, пары сил и обобщённые силы. Мы будем применять их главным образом к стержневым системам, испытывающим изгиб. В этом случае можно получить не сложные уравнения для подсчёта коэффициентов (рис. 2.3, а-б).



Рис. 2.3. Определение коэффициентов канонических уравнений

Вспомним интеграл Мора:  $\Delta = \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot J} dz$ .

Получим формулу для  $\delta_{ik}$ . Здесь  $\bar{M} = \bar{M}_k$  – изгибающий момент от единичного силового фактора, соответствующего лишней неизвестной  $X_k$ ,  $M = \bar{M}_i$  – изгибающий момент от единичного силового фактора, соответствующего лишней неизвестной  $X_i$ , тогда

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{E \cdot J} dz.$$

– общая формула для определения коэффициентов канонических уравнений.

Аналогично получим формулу для  $\Delta_{iF}$ . Здесь  $M = M_F$  – изгибающий момент от всех внешних сил,  $\bar{M} = \bar{M}_i$ . Подставив в интеграл Мора. получим.

$$\Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{E \cdot J} dz$$

– формула для определения свободных членов канонических уравнений. Все моменты, в полученных формулах, вычисляются при соответствующем нагружении в основной системе.

Для прямолинейных стержней коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, можно вычислять способом Верещагина.

**Пример.** Построить эпюры внутренних сил для заданной балки (рис. 2.4).

1) Определяем степень статической неопределимости системы: неизвестных реакций – 4, уравнений статики – 3. Система один раз статически неопределима.

2) Выбираем основную систему – за лишнюю связь принимаем реакцию шарнирной опоры.

3) Строим эквивалентную систему

4) Записываем каноническое уравнение метода сил для эквивалентной системы

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

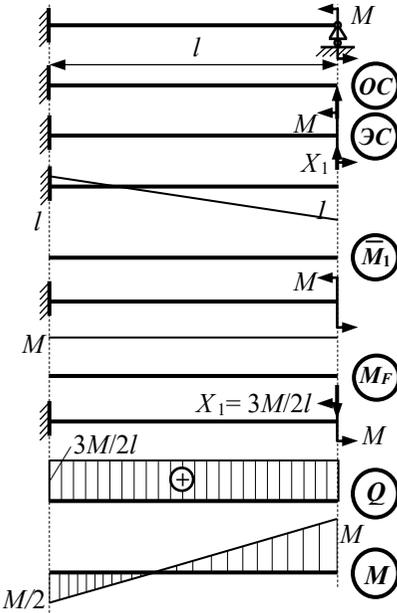


Рис. 2.4. Определение коэффициентов канонических уравнений

эквивалентной системы.

5) Определяем коэффициент и свободный член канонического уравнения. Для этого последовательно нагружаем основную систему единичной силой, соответствующей  $X_1$ , и активной силой  $M$ , строим эпюры  $\overline{M}_1$  и  $M_F$ . Используем способ Верещагина

$$EJ \delta_{11} = \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3}.$$

$$EJ \Delta_{1F} = M \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = \frac{M l^2}{2}.$$

6) Подставляем полученные значения в каноническое уравнение и раскрываем статическую неопределимость.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{M l^2 \cdot 3}{2 \cdot l^3} = -\frac{3M}{2l}.$$

7) Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в эквивалентной системе.

## 2.2 Уравнение трёх моментов

Рассмотрим неразрезную многопролётную балку (рис. 2.5, а). За лишние неизвестных при выборе основной системы удобнее принять

изгибающие моменты в опорных сечениях. В этом случае основная система будет системой однопролётных балок, соединённых на опорах шарнирами.

Изобразим основную систему (рис. 2.5, б), а затем эквивалентную систему (рис. 2.5, в) – она будет представлять ряд простых шарнирно-опёртых балок, нагруженных активными силами и неизвестными изгибающими моментами по концам.

Рассмотрим  $m$ -ое уравнение системы канонических уравнений метода сил:

$$\delta_{m1} \cdot X_1 + \delta_{m2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{mm-1} \cdot X_{m-1} + \delta_{mm} \cdot X_m + \Delta_{mF} = 0.$$

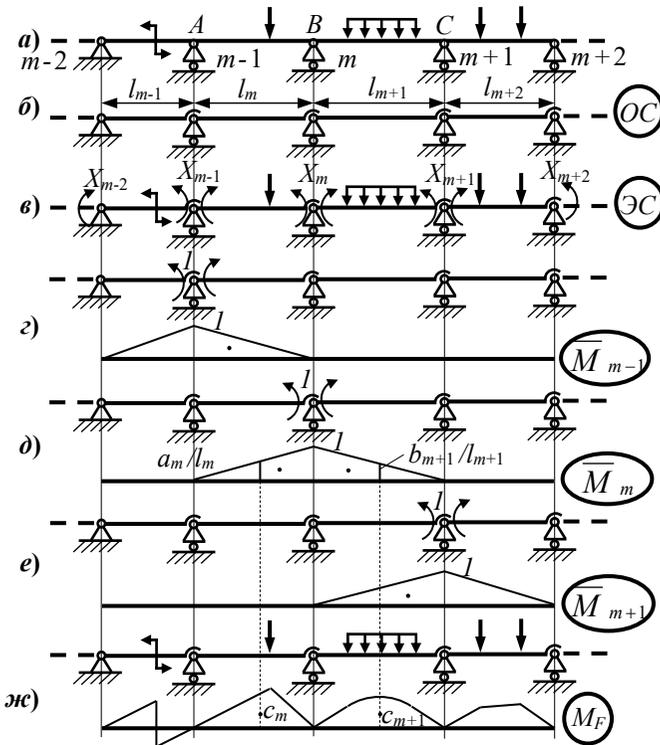


Рис. 2.5. Вывод уравнений трёх моментов

Определим коэффициенты этого уравнения по формуле

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{E \cdot J} dz, \quad E \cdot J = const, \quad \text{тогда} \quad \delta_{ik} = \frac{\omega_i \cdot (\overline{M}_{1c})_k}{E \cdot J}.$$

В связи с тем, что основная система представляет собой систему однопролётных балок, то в  $m$ -ом уравнении отличны от нуля будут только коэффициенты  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_{m m}$ ,  $\delta_{m m+1}$ . Все остальные коэффициенты обратятся в ноль, так как единичный опорный момент создаёт изгибающие моменты только в соседних пролётах  $AB$  и  $BC$ .

Нагружаем основную систему единичными парами сил поочередно в сечениях  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$  (рис. 2.5,  $z-e$ ) и вычисляем коэффициенты

$$E J \delta_{m-1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_m \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_m}{6},$$

$$E J \delta_{m m} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_m \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{m+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_m + l_{m+1}}{3},$$

$$E J \delta_{m m+1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{m+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{m+1}}{6}.$$

Далее нагружаем основную систему активными силами (рис. 2.5,  $ж$ ) и определяем  $\Delta_{mF}$  по формуле

$$\Delta_{mF} = \int_0^l \frac{M_F \overline{M}_m}{E \cdot J} dz = \frac{\Omega_i \cdot (\overline{M}_{1c})_m}{E \cdot J}.$$

$$E J \Delta_{mF} = \Omega_m \cdot \frac{a_m}{l_m} + \Omega_{m+1} \cdot \frac{a_{m+1}}{l_{m+1}} = \frac{S_m}{l_m} + \frac{S_{m+1}}{l_{m+1}},$$

где  $\Omega_m$ ,  $\Omega_{m+1}$  – площади эпюр изгибающих моментов от активных сил, приложенных к основной системе на  $m$ -ом и  $(m+1)$ -ом пролётах,  $S_m$ ,  $S_{m+1}$  – статические моменты площадей эпюр изгибающих моментов от активных сил, приложенных к основной системе на  $m$ -ом и  $(m+1)$ -ом пролётах.

Подставим полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение метода сил

$$l_m \cdot X_{m-1} + 2 \cdot (l_m + l_{m+1}) \cdot X_m + l_{m+1} \cdot X_{m+1} + 6 \cdot \left( \frac{S_m}{l_m} + \frac{S_{m+1}}{l_{m+1}} \right) = 0.$$

Видно, что в полученное уравнение входят размеры и силовые факторы, относящиеся только к двум соседним пролётам  $AB$  и  $BC$ .

Это уравнение, выражающее тот факт, что взаимный угол поворота смежных сечений пролётов  $AB$  и  $BC$  на  $m$ -ой опоре должен быть равен нулю.

По отношению к опоре (которую будем называть средней) опора  $m - 1$  будет левой, а опора  $m + 1$  будет правой, соответственно и пролёты – левый и правый.

Поэтому введём новые обозначения

$M_{m-1} = M_{л}$ ,  $M_m = M_{ср}$ ,  $M_{m+1} = M_{п}$ , тогда

$$l_{л} \cdot M_{л} + 2(l_{л} + l_{п}) \cdot M_{ср} + l_{п} \cdot M_{п} + 6 \cdot \left( \frac{S_{л}}{l_{л}} + \frac{S_{п}}{l_{п}} \right) = 0$$

– уравнение трёх моментов.

При использовании уравнения трёх моментов последовательно рассматриваются все пары соседних пролётов, причём число пар пролётов, следовательно, и уравнений, равно числу промежуточных опор, то есть степени статической неопределимости неразрезной балки.

Если неразрезная балка имеет защемление или консоль (рис. 2.6, а), то в этих случаях поступают следующим образом:

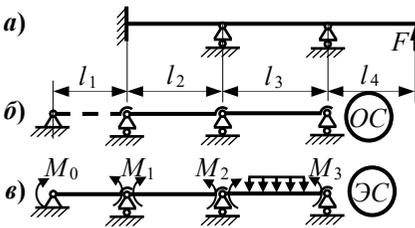


Рис. 2.6. Расчётные схемы для защемления и консоли

Вместо заделки вводят две бесконечно близкие шарнирные опоры (рис. 2.6, б) (0 и 1), далее составляют уравнение трёх моментов, принимая  $M_0 = 0$  и  $l_0 = 0$ . Теперь, о консоли. При раскрытии статической неопределимости силу  $F$  переносят на опору 3 (рис. 2.6, в), в результате получается на опоре действует пара сил  $M_0 = F \cdot l_4$ .

Сила, приложенная к опоре, имеет значение только при определении реакций опор, изгибающих моментов она не создаёт. Затем, при составлении уравнений трёх моментов для опоры 2, пару сил считают опорным моментом и тогда  $M_{п} = F \cdot l_4$ .

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов силу  $F$  снова устанавливают в конце консоли. Теперь, о консоли. При раскрытии статической неопределимости силу  $F$  переносят на опору 3 (рис. 2.6, в), в результате получается на опоре действует пара сил  $M_0 = F \cdot l_4$ . Сила, приложенная к опоре, имеет значение только при определении реакций опор, изгибающих моментов она не созда-

ёт. Затем, при составлении уравнений трёх моментов для опоры 2, пару сил считают опорным моментом и тогда  $M_{II} = F \cdot l_4$ .

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов силу  $F$  снова устанавливают в конце консоли.

**Пример.** Построить эпюры внутренних сил для заданной балки (рис. 2.7, а).

1) Определяем степень статической неопределимости системы: неизвестных – 4, уравнений статики – 3. Система один раз статически неопределима.

2) Выбираем основную систему – заменяем заделку фиктивным пролётом  $l_1 = 0$  (рис. 2.7, б).

3) Строим эквивалентную систему (рис. 2.7, в).

4) Записываем уравнение трёх моментов для эквивалентной системы

$$l_1 \cdot M_1 + 2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot M_2 + l_2 \cdot M_3 + 6 \cdot \left( \frac{S_{II}}{l_{II}} + \frac{S_{III}}{l_{III}} \right) = 0.$$

5) Нагружаем основную систему активной силой, строим расчленённую эпюру  $M_F$  вычисляем известные величины уравнения трёх моментов (рис. 2.7, г, д).

6) В нашем случае  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = l$ ,  $M_0 = 0$ ,  $S_{II} = 0$ ,

$$S_{III} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l - \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot l = \frac{ql^4}{24}.$$

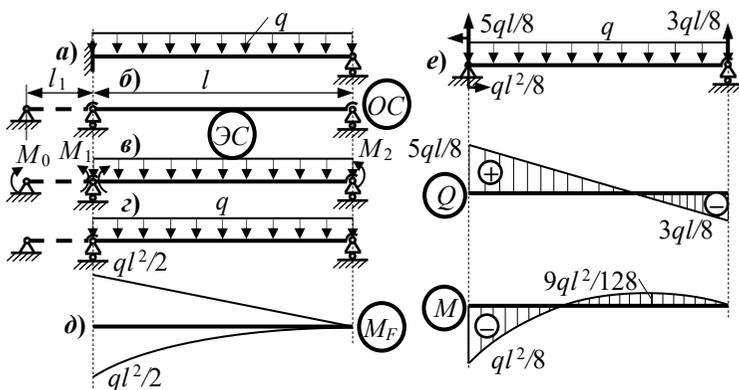


Рис. 2.7. Решение балки с помощью уравнений трёх моментов

7) Подставляем полученные величины в уравнение трёх моментов и раскрываем статическую неопределимость

$$2 \cdot (0 + l) \cdot M_1 + 6 \cdot \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot l} = 0, \quad \Rightarrow \quad M_1 = -\frac{q \cdot l^2}{8}.$$

8) Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 2.7, e).

### 2.3. Вопросы для самопроверки

1. Как производится расчёт статически неопределяемых конструкций с помощью метода сил (последовательность расчёта)?
2. Что называется основной системой? Какие требования к ней предъявляются?
3. Что называется эквивалентной системой и почему?
4. Как записываются канонические уравнения метода сил для два раза статически неопределимых систем?
12. В чём заключается физический смысл канонических уравнений метода сил?
13. Что представляют собой коэффициенты канонических уравнений метода сил?
14. Какие составляющие канонических уравнений называют главными и как их определяют?
15. Какие коэффициенты канонических уравнений называют побочными и как их определяют?
16. Какие коэффициенты канонических уравнений называют свободными членами и как их определяют?
17. Как получают основную систему при использовании уравнений трёх моментов?
18. Как записывается уравнение трёх моментов?
17. Какой физический смысл имеют величины, входящие в уравнение трёх моментов и как их определяют?
18. Как используется уравнение трёх моментов при наличии защемления?
19. Как используется уравнение трёх моментов при наличии консоли?
20. В чём заключается генеральная проверка при расчёте статически неопределимых конструкций?

### 3. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БРУСА

#### 3.1. Общий случай сложного сопротивления бруса

##### 3.1.1. Напряжения и расчёт на прочность в общем случае сложного сопротивления бруса

Будем рассматривать брусья постоянного сечения, причём будем рассматривать, не только прямые, но и брусья малой кривизны. К кривым брусьям малой кривизны относятся такие брусья, у которых  $R/h \geq 5$ , где  $R$  – радиус оси бруса,  $h$  – высота поперечного сечения бруса.

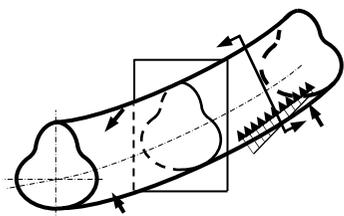


Рис. 3.1. Брус, испытывающий сложное сопротивление

Покажем кривой брус произвольного поперечного сечения, нагруженный произвольными самоуравновешенными силами. На рис. 3.1 показаны и активные силы, и реакции связей. Рассмотрим внутренние силы в поперечном сечении бруса. Применим метод сечения, секущая плоскость перпендикулярна оси бруса.

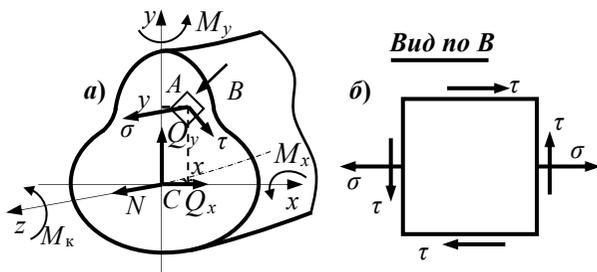


Рис. 3.2. Внутренние силы и напряжения при сложном сопротивлении

Левую часть бруса отбрасываем и изображаем правую (рис. 3.2, а).  $C$  – центр тяжести сечения. Покажем главные центральные оси сечения. Ось  $z$  – касательная к оси бруса, оси  $x, y$  – главные центральные оси поперечного сечения.

Как отброшенная часть действует на оставшуюся?

Распределённые касательные и нормальные силы приводим к центру тяжести сечения  $C$ . В результате получим главный вектор и главный момент. Покажем компоненты главного вектора:  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  и компоненты главного момента:  $-M_k$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ .

Рассмотрим составляющие:

1)  $N$  – нормальная сила, вызывает центральное растяжение или сжатие;

2)  $M_k$  – крутящий момент, вызывает кручение;

3)  $Q_y$ ,  $M_x$  – поперечная сила и изгибающий момент, вызывают поперечный изгиб в плоскости наибольшей жёсткости;

4)  $Q_x$ ,  $M_y$  – поперечная сила и изгибающий момент, вызывают поперечный изгиб в плоскости наименьшей жёсткости.

Подводим итог: деформацию в общем случае сложного сопротивления можно представить в виде суммы четырёх простых деформаций: центрального растяжения или сжатия, кручения, изгиба в плоскости наибольшей жёсткости и изгиба в плоскости наименьшей жёсткости. Простые деформации мы изучали, поэтому, будем применять принцип суперпозиции.

Правила знаков для внутренних сил те же, что и при простых деформациях. Силы считаются положительными, если они совпадают с положительными направлениями осей, а пары сил положительны, если они направлены против часовой стрелки при взгляде со стороны положительного направления оси. На рис. 3.2,  $a$  показаны положительные направления внутренних сил.

Как вычислить силы и пары сил? Нужно все силы привести к центру тяжести сечения и использовать уравнения равновесия рассматриваемой части бруса.

Перейдём к напряжениям. Рассмотрим любую точку  $A$  (при выводе – в первой четверти),  $x$ ,  $y$  – координаты точки  $A$ , в которой определяем  $\sigma$  и  $\tau$ .

Приступим к выводу формулы. Применяем принцип суперпозиции:  $\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}$  – сумма алгебраическая, так как слагаемые направлены по одной прямой ( $\sigma$  от кручения и сдвига нет),

где  $\sigma_N = \frac{N}{A}$ ;  $\sigma_{M_x} = \frac{M_x}{J_x} y$ ; (здесь знак «+» при положительном  $M_x$ );

$\sigma_{M_y} = -\frac{M_y}{J_y} x$  – (здесь знак «-» при положительном  $M_y$ ).

Подставляя общую формулу, получим

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

– формула для нормальных напряжений в поперечном сечении бруса в общем случае сложного сопротивления.

Далее, касательные напряжения. Здесь, дело обстоит сложнее. Хотя слагаемые и лежат в одной плоскости, но по направлению, они не совпадают, поэтому необходимо рассмотреть векторную величину:  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_N + \bar{\tau}_{M_x} + \bar{\tau}_{M_y}$ . Значения  $\tau_{M_x}$  и  $\tau_{M_y}$  – определяются по формуле Журавского  $\tau = \frac{Q \cdot S^{омс}}{J \cdot b}$  – эти касательные напряжения (от  $Q_x$  и  $Q_y$ ) взаимно перпендикулярны;  $(\tau_{M_k})_{наиб} = \frac{M_k}{W_k}$  – эта формула, только

для наибольших напряжений при кручении, а для любой точки – можно определить на компьютере.

Эти напряжения нужно суммировать геометрически. В общем случае, довести до модуля невозможно. Будем это делать, в частных случаях.

Перейдём к оценке прочности. Вырежем элемент, одна пара граней которого, перпендикулярна  $\tau$ , а вторая – перпендикулярна оси бруса. Изобразим элемент, если смотреть на него по направлению  $V$  (см. рис. 3.2, б).

На горизонтальной грани нормальных напряжений нет, так как при любой простой деформации, волокна не надавливают друг на друга. На передней грани напряжений нет.

Отсюда, в общем случае нагружения, в любой точке бруса имеет место плоское напряжённое состояние.

Далее, условие прочности:  $\sigma_{экр} \leq [\sigma]$ .

Чаще всего, мы имеем дело со стальными, алюминиевыми, бронзовыми брусками (то есть, пластичными материалами), поэтому применяем IV теорию предельных напряжённых состояний.

$\sigma_{экр IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ , тогда  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$ . Так можно оценить прочность в любой точке бруса. Для всего бруса:

$$\sigma_{экр IV}^{наиб} \leq [\sigma].$$

– условие прочности всего бруса.

Как найти самую опасную точку бруса? В общем случае сложного сопротивления, это достаточно сложно. В некоторых частных случаях сложного сопротивления (изгиб с растяжением или сжатием, косой изгиб, внецентренное растяжение или сжатие, изгиб с кручением) это представляется возможным.

### 3.1.2. Перемещения бруса в общем случае сложного сопротивления

Изобразим кривой брус (показана только ось) (рис. 3.3, а).

Под действием нагрузок брус перемещается – пунктиром показано положение бруса после нагружения (конечно в конструкциях, таких больших перемещений не бывает).  $\Delta_k$  – полное перемещение точки  $k$ , в данном случае – линейное.

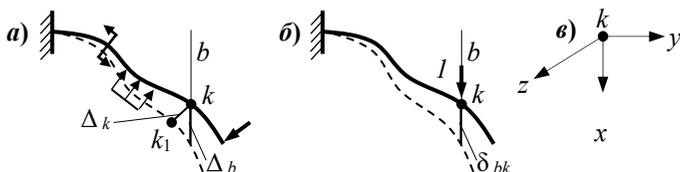


Рис. 3.3. Определение перемещений при сложном сопротивлении

Для изображённого нагружения можно вычислить  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_k$  (перемещения от поперечных сил пренебрежимо малы), предварительно выбрав направление осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 3.3, в). Затем рассмотрим единичное нагружение этого бруса (рис. 3.3, б), причём мы не знаем направления полного перемещения, поэтому определим перемещение в направлении  $b - \Delta_b$ .

Без вывода, запишем интеграл Мора в общем случае нагружения бруса. Эта формула получается по аналогии формулы для изгиба. Формула Мора применима и к брусам большой кривизны.

$$\Delta_b = \int_0^l \left( \frac{N \cdot \bar{N}_b}{E \cdot A} + \frac{M_{xF} \cdot \bar{M}_{xb}}{E \cdot J_x} + \frac{M_{yF} \cdot \bar{M}_{yb}}{E \cdot J_y} + \frac{M_{kF} \cdot \bar{M}_{kb}}{G \cdot J_k} \right) dS.$$

– это обобщенный интеграл Мора.

Здесь  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_k$  – внутренние усилия, от которых нужно найти перемещение;

$\bar{N}_b$ ,  $\bar{M}_{xb}$ ,  $\bar{M}_{yb}$ ,  $\bar{M}_{kb}$  – внутренние усилия при единичном нагружении.

$E \cdot A$ ,  $E \cdot J_x$ ,  $E \cdot J_y$ ,  $G \cdot J_k$  – жёсткости бруса при соответствующих простых деформациях.

Как же найти полное перемещение? Для этого определяем перемещение в трёх взаимно перпендикулярных направлениях:  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$ , а полное перемещение определяем как геометрическую сумму

$$\Delta_k = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}.$$

Рассмотрим, как упрощается формула Мора в частных случаях.

1 частный случай. Балки или плоские рамы – плоские неизменяемые системы стержней, связанных между собой и нагруженных в своей плоскости. В этом случае  $M_k = M_y = 0$ ,  $\frac{N \cdot \bar{N}_b}{E \cdot A} \ll \frac{M_{xF} \cdot \bar{M}_{xb}}{E \cdot J_x}$ , тогда

формула Мора примет вид

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{E \cdot J_x} dS.$$

2 частный случай. Пространственный брус или плоско-пространственная рама или пространственная рама – неизменяемые система плоских стержней, связанных между собой и нагруженных не только в своей плоскости, но и в плоскости, перпендикулярной плоскости рамы. В этом случае  $M_x \neq 0$ ,  $M_y \neq 0$ ,  $M_k \neq 0$

$$\Delta = \int_0^l \left( \frac{M_{xF} \cdot \bar{M}_x}{E \cdot J_x} + \frac{M_{yF} \cdot \bar{M}_y}{E \cdot J_y} + \frac{M_{kF} \cdot \bar{M}_k}{G \cdot J_k} \right) dS.$$

3 частный случай. Шарнирно-стержневая ферма. В реальных случаях стержни склёпаны, но расчёт производится с достаточной точностью по шарнирной схеме.

В этом случае  $M_x = M_y = M_k = 0$ ,  $N \neq 0$  и

$$\Delta = \int_L \frac{N_{iF} \cdot \bar{N}_{i1}}{E_i \cdot A_i} \cdot dS.$$

Обычно  $N$  в пределах каждого стержня не меняется, поэтому формулу можно упростить.

$$\Delta = \sum \frac{N_{iF} \cdot \bar{N}_{i1}}{E_i \cdot A_i} \cdot l_i.$$

### 3.2. Расчёт плоских статически неопределимых рам (изгиб с растяжением или сжатием)

Рамой называется геометрически неизменяемая система связанных между собой стержней, которая сопротивляется внешним силам главным образом посредством изгиба и кручения.

Бывают ещё системы стержней, которые сопротивляются внешним силам главным образом посредством растяжения-сжатия – это фермы – они не входят в рассматриваемый вопрос.

Если оси стержней и внешние силы лежат в одной плоскости, то такую раму называют плоской. Если оси стержней лежат в одной плоскости, а внешние силы – в другой, то такую раму называют плоско-пространственной.

Если оси стержней и внешние силы не лежат в одной плоскости, то такую раму называют пространственной.

Мы остановимся, на рассмотрении плоских рам.

Рамы бывают статически определимыми и статически неопределимыми.

Рассмотрим статически определимые рамы. В раме (рис. 3.4, а) неизвестных три и уравнений статики тоже три.

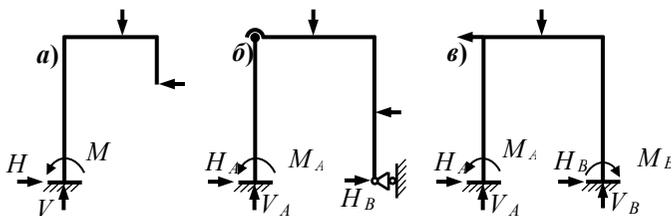


Рис. 3.4. Плоские рамы

В следующей раме (рис. 3.4, б) неизвестных четыре и уравнений статики тоже четыре (ещё одно уравнение, даёт шарнир).

Существуют два вида статической неопределимости: внешняя статическая неопределимость и внутренняя статическая неопределимость.

Рама с внешней статической неопределимостью, если в качестве лишних неизвестных можно подобрать внешние, для рамы, силы, например, реакции опор. В раме, показанной на рисунке 3.4, в, в шесть неизвестных и три уравнения статики, то есть рама три раза статически неопределимая.

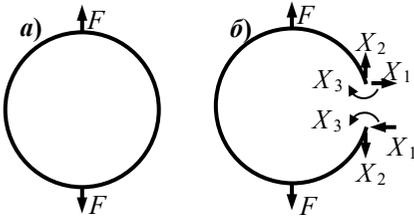


Рис. 3.5. Рама с внутренней статической неопределенностью

нужно приложить силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  (которые переходят в разряд внешних), то есть рама с внутренней статической неопределенностью.

Теперь в любом сечении рамы можно вычислить внутренние силы через  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Для определения неизвестных сил  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  используется метод сил.

Далее рассмотрим вопрос об определении внутренних сил в рамах.

В раме, представленной на рис. 3.6, проведём произвольное сечение  $a - a$ , отбросим нижнюю часть и изобразим то, что осталось. Приведём внутренние силы к центру тяжести сечения. Они приводятся к главному вектору с составляющими  $Q$  – в плоскости сечения,  $N$  – по нормали к сечению, и к главному моменту  $M$ .

$N$  – нормальная сила,  $N > 0$  – при растяжении,  $N < 0$  – при сжатии.

$Q$  – поперечная сила,  $Q > 0$ , если внешняя сила вращает рассматриваемую часть рамы по часовой стрелке (как и для балок),  $Q < 0$ , если внешняя сила вращает рассматриваемую часть рамы против часовой стрелке.

$M$  – изгибающий момент. При расчёте рам,  $M$  рассматривается как арифметическая величина, а эпюру изгибающих моментов, строят на сжатых волокнах.

Величину внутренних сил определяют, как и раньше, из уравнений равновесия рассматриваемой части рамы.

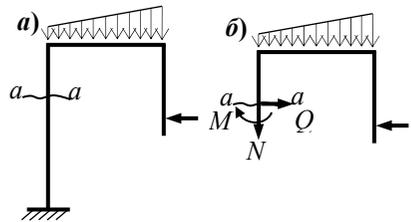


Рис. 3.6. Определение внутренних сил статической определимой рамы

Следовательно, рама испытывает сложное сопротивление, состоящее из плоского поперечного изгиба в плоскости рамы и центрального растяжения или сжатия.

Большая группа элементов летательных аппаратов и их двигателей являются рамами. Например, шпангоут является рамой с внутренней статической неопределенностью.

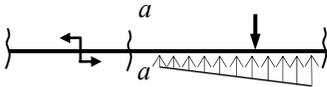


Рис. 3.7. Прямолинейный участок рамы

Рассмотрим участок рамы (рис. 3.7) и любое сечение  $a - a$ . В этом сечении имеются три связи:

- 1) связь, передающая нормальную силу  $N$ ;
- 2) связь, передающая поперечную

силу  $Q$ ;

3) связь, передающая изгибающий момент  $M$ .

Как устранить эти связи при расчёте рам методом сил? Примеры устранения различных связей приведены на рисунке 3.8.



Рис. 3.8. Устранение связей на участке рамы

### 3.2.1 Пример расчёта плоской статически неопределимой рамы

Будем рассматривать П-образную раму с защемлёнными концами (рис. 3.9). Она составлена из стержней одинаковой длины и нагружена горизонтальной силой  $F$ . Кроме силы, на раму действуют реакции в защемлениях. Неизвестные реакции можно направить как угодно – правильное направление укажет затем, знак.

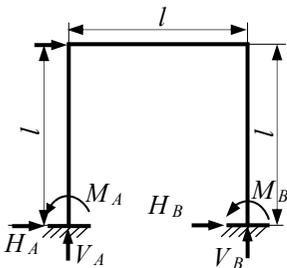


Рис. 3.9 Статически неопределимая рама

Имеем шесть неизвестных ( $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$ ,  $H_B$ ,  $V_B$ ,  $M_B$ ). Статика даёт три уравнения. Таким образом, в данном случае три лишних неизвестных, то есть, рама три раза статически неопре-

делима.

Для раскрытия статической неопределенности воспользуемся ме-

тодом сил. Вначале назначим три лишних неизвестных, но при этом основная система должна быть геометрически неизменяемой. При анализе, сама система, считается абсолютно жёсткой.

Сделаем первую попытку. Примем за лишние неизвестные ( $H_A, H_B, M_B$ ). Изобразим систему с отброшенными лишними связями (рис. 3.10, а). Такое закрепление препятствует только вертикальному перемещению и повороту. Теперь смотрим – является ли система неизменяемой? Нет, так как она может перемещаться в горизонтальном направлении. Поэтому, назначать таким образом, лишние неизвестные нельзя, так как такую систему, нагрузить невозможно.

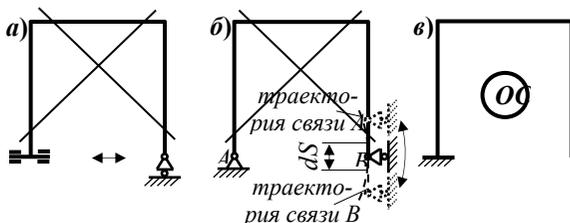


Рис. 3.10. Выбор основной системы

Сделаем вторую попытку. За лишние неизвестные примем ( $M_A, V_B, M_B$ ). Изобразим систему с оставшимися связями (рис. 3.10, б). Основная система должна быть неизменяемой, не только в конечной, но и в бесконечно малой форме. Выбранная система является мгновенно изменяемой, так как может быть поворот опоры  $B$  на бесконечно малый угол вокруг опоры  $A$ . Для метода сил, мгновенно изменяемая система не годится, так как мгновенно изменяемые системы нелинейные, то есть перемещения в них, зависят от действующих сил нелинейно, а при выводе канонических уравнений метода сил, предполагалась линейная зависимость.

Если одна из стоек выше или ниже другой, то мгновенной изменяемости системы не будет.

Сделаем третью попытку. За лишние неизвестные примем ( $H_B, V_B, M_B$ ). Покажем основную систему (рис. 3.10, в). Можно видеть, что она геометрически неизменяема и статически определима, поэтому пригодна для применения метода сил.

Далее изображаем эквивалентную систему (рис. 3.11), для чего выбранную основную систему нагружаем активной силой и неизвестными силами ( $X_1 = H_B, X_2 = V_B, X_3 = M_B$ ). Она в точности воспроизводит исходную систему.

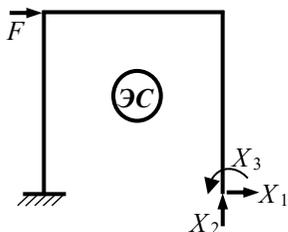


Рис. 3.11. Эквивалентная система

Запишем канонические уравнения метода сил, для три раза статически неопределимой системы

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2F} = 0,$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3F} = 0.$$

Определяем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Воспользуемся общими формулами для

интегралов Мора.

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{E \cdot J} dz, \quad \Delta_{iF} = \int_0^l \frac{M_F \overline{M}_i}{E \cdot J} dz.$$

На прямолинейных участках, интегралы Мора вычислим способом Верещагина. Для этого, выбранную основную систему последовательно нагружаем необходимыми единичными и внешними силами и строим эпюры изгибающих моментов  $\overline{M}_1$ ,  $\overline{M}_2$ ,  $\overline{M}_3$ , и  $M_F$  (рис. 3.12, а-г). Единичные силы и пара сил направлены так же, как и неизвестные силы  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ .

Теперь есть все необходимые эпюры и можно вычислить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Вычислим их значения способом Верещагина

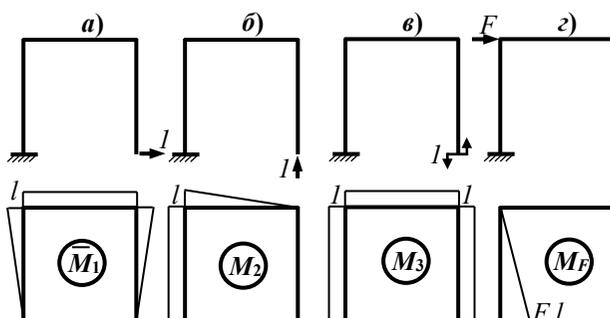


Рис. 3.12. Нагружения и эпюры для определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений для рамы

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l + l \cdot l \cdot l + \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{5l^3}{3},$$

$$EJ\delta_{12} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot l + l \cdot l \cdot \frac{1}{2}l = l^3,$$

$$EJ\delta_{13} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot 1 + l \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{2}l \cdot l \cdot 1 = 2l^2,$$

$$EJ\Delta_{1F} = -\frac{1}{2}Fl \cdot l \cdot \frac{1}{3}l = -\frac{l^3}{6}.$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты и свободные члены.

$$EJ\delta_{22} = \frac{4l^3}{3}, \quad EJ\delta_{23} = \frac{3l^2}{2}, \quad EJ\Delta_{2F} = -\frac{Fl^3}{2},$$

$$EJ\delta_{33} = 3l, \quad EJ\Delta_{3F} = -\frac{Fl^2}{2}.$$

Умножив канонические уравнения на  $EJ$ , подставим в них значения коэффициентов и свободных членов и раскроем статическую неопределимость

$$X_1 = -\frac{F}{2}, \quad X_2 = \frac{3F}{7}, \quad X_3 = \frac{2Fl}{7}.$$

Обращаем внимание на знак неизвестных:  $X_2$  и  $X_3$  – направление правильное,  $X_1$  – направлено в противоположную сторону.

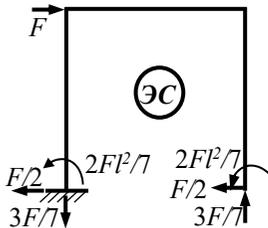


Рис. 3.13. Определение реакций опор в эквивалентной системе

Далее нужно найти реакции опор в эквивалентной системе (рис. 3.13).

Таким образом, найдены все силы, действующие на раму.

Прежде чем строить эпюры внутренних силовых факторов ( $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ), необходимо сделать проверку. Обычно, вначале делается частная проверка – вычисленные значения  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  подставляются во все канонические уравнения и убеждаются, что уравнения обращаются

в тождество.

Затем делается генеральная (общая) проверка. В расчётах на прочность всегда делаются несколько проверок, так как расчёты менее трудоёмкие и менее затратные, по сравнению с изготовлением конструкций.

### Генеральная проверка.

Для генеральной проверки выбирается новая основная система (НОС) (рис. 3.14, а). Для этого необходимо взять все новые лишние связи. В нашем случае, за новые лишние связи примем связи на левой опоре.

Показываем новую эквивалентную систему (НЭС) и перемещения в направлении новых неизвестных (рис. 3.14, б). Эти перемещения в эквивалентной системе должны быть равны нулю.

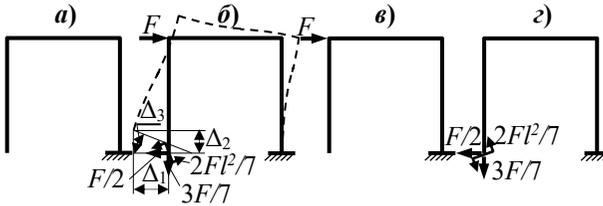


Рис. 3.14. Генеральная проверка раскрытия статической неопределённости

ния в эквивалентной системе должны быть равны нулю.

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

Однако из-за погрешностей вычислений в большинстве случаев добиться нулевого результата не удаётся. Поэтому более удобно разделить силы на активные и реактивные (реакции отброшенных связей), определить перемещения в основной системе отдельно от активных сил  $\Delta_{iA}$  (рис. 3.14, б) и отдельно от реактивных сил  $\Delta_{iR}$  (рис. 3.14, в), а затем вычислить расхождение

$$\Psi = \frac{|\Delta_{iF}| - |\Delta_{iR}|}{|\Delta_{iF}|} \cdot 100\%.$$

Если такие соотношения выполняются по всем новым перемещениям, то статическая неопределимость раскрыта верно.

Теперь строим в эквивалентной системе (рис. 3.15, а) эпюры внутренних силовых факторов ( $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ) (рис. 3.15, б-в) и проводим расчёт на прочность.

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|}{W_x} + \frac{|N|}{A} \leq [\sigma]$$

– условие прочности для любого сечения.

Поскольку  $\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \gg \frac{|N|}{A}$  (рис. 3.16), то наиболее опасным будет сечение, где действует  $|M|_{\text{наиб}}$ .

$$|\sigma|_{\text{наиб}} = \frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} + \frac{|N|}{A} \leq [\sigma]$$

– условие прочности для всей рамы.

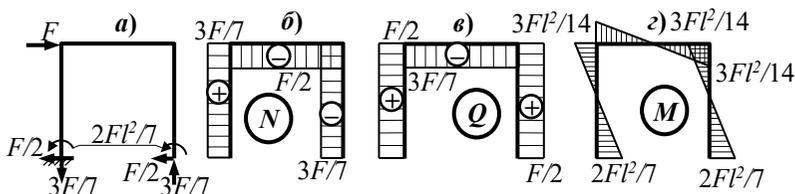


Рис. 3.15 Эпюры внутренних сил в эквивалентной системе

### Расчёт на прочность

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} + \frac{|N|}{A} \leq [\sigma].$$

Это условие прочности для всей рамы и так решается первая задача сопротивления материалов. Здесь  $N$  – нормальная сила в сечении, где действует  $|M|_{\text{наиб}}$ .

Вторая задача – подбор размеров поперечного сечения – приводится из условия прочности при изгибе

$$W_x \geq \frac{|M|_{\text{наиб}}}{[\sigma]}.$$

Затем подобранное сечение проверяется по полному условию прочности.

Третья задача – определение грузоподъёмности – эта задача решается только в каждом конкретном случае.

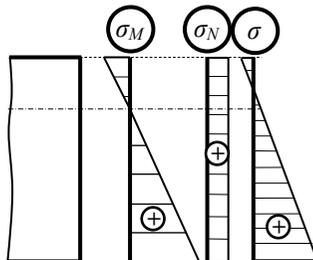


Рис. 3.16 Эпюры нормальных напряжений в опасном сечении рамы

### 3.3. Косой изгиб

#### 3.3.1. Напряжения и расчёт на прочность при косом изгибе

Вспомним плоский изгиб. Брус (рис. 3.17, а) испытывает плоский изгиб, так как прогибы лежат в плоскости изгибающих сил (в плоскости полного изгибающего момента).

Теперь, о косом изгибе (рис. 3.17, б).

Брус испытывает **косой изгиб**, если он нагружен силами, перпендикулярными его оси и парами сил, плоскость действия которых не совпадает ни с одной из главных плоскостей жёсткости бруса.

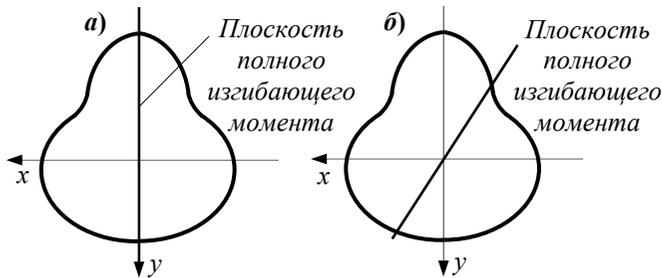


Рис. 3.17. Сечения брусьев, испытывающих плоский и косой изгибы

Изобразим поперечное сечение бруса, покажем его главные центральные оси и плоскость полного изгибающего момента. При таком изгибе, плоскость перемещений не совпадает с плоскостью полного изгибающего момента.

Приступим к выводу формулы для напряжений. Будем рассматривать частный случай, но формулу получим для общего случая.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой и произвольное сечение этой балки.  $C$  – центр тяжести поперечного сечения (рис. 3.18). Сила не лежит ни в одной из главных плоскостей жёсткости бруса,  $\varphi$  – угол между плоскостью действия силы и плоскостью наибольшей жёсткости бруса. В произвольном сечении выберем любую точку с координатами  $x$  и  $y$  (в первом квадранте). В этой точке действуют нормальные напряжения  $\sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ , касательные напряжения не рассматриваем, так как их роль невелика. Нормальные напряжения нам и предстоит определить.

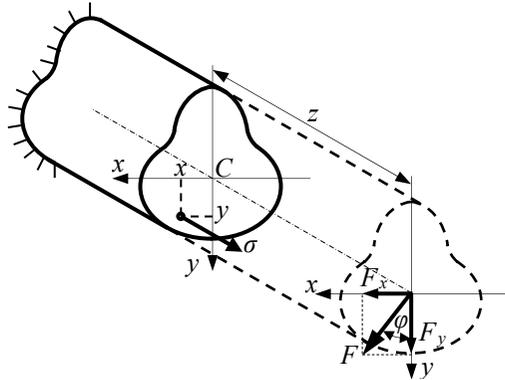


Рис. 3.18. Определение напряжений при косом изгибе

Представим косой изгиб как сумму простых деформаций. Для этого разложим силу на составляющие  $F_x$  и  $F_y$ :  $F_x = F \cdot \sin \varphi$ ,  $F_y = F \cdot \cos \varphi$ . Каждая составляющая вызывает плоский поперечный изгиб:  $F_x$  – в плоскости наименьшей жёсткости, а  $F_y$  – в плоскости наибольшей жёсткости бруса.

Применим принцип суперпозиции

$$\sigma = \sigma_{F_x} + \sigma_{F_y}; \quad \sigma_{F_x} = -\frac{F_x \cdot z}{J_y} \cdot x; \quad \sigma_{F_y} = -\frac{F_y \cdot z}{J_x} \cdot y.$$

Далее подставляем в исходную формулу значения компонент и получаем

$$\sigma = -\frac{F_x \cdot z}{J_y} \cdot x - \frac{F_y \cdot z}{J_x} \cdot y = -\left( \frac{F \cdot z \cdot \sin \varphi}{J_y} \cdot x - \frac{F \cdot z \cdot \cos \varphi}{J_x} \cdot y \right).$$

Здесь  $F \cdot z = M$  – полный изгибающий момент, тогда

$$\sigma = -M \cdot \left( \frac{x \cdot \sin \varphi}{J_y} + \frac{y \cdot \cos \varphi}{J_x} \right).$$

Это почти окончательная формула. Почему? Знак изгибающего момента может быть и положительным, поэтому в формуле нужно поставить два знака

$$\sigma = \pm M \cdot \left( \frac{x \cdot \sin \varphi}{J_y} + \frac{y \cdot \cos \varphi}{J_x} \right).$$

Здесь  $M$  – полный изгибающий момент в рассматриваемом сечении, берётся по абсолютной величине, а знак перед  $M$  должен совпа-

дать со знаком напряжений в первой четверти;

$x, y$  – координаты точки, в которой определятся напряжение (в главных центральных осях);

$\varphi$  – угол между плоскостью полного изгибающего момента и плоскостью наибольшей жёсткости бруса;

$J_x, J_y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения бруса.

Таким образом, мы получили общую формулу для нормальных напряжений при косом изгибе для любых сил.

Теперь переходим к расчёту на прочность при косом изгибе. Рассмотрим некоторые предварительные соображения.

При плоском изгибе соседние сечения поворачиваются относительно главной оси. При косом изгибе соседние сечения взаимно поворачиваются относительно двух осей, из теоретической механики известно, что они поворачиваются относительно некоторой одной (нейтральной) оси.

Найдём нейтральную ось при косом изгибе. На ней  $\sigma = 0$ , так как волокна не изменяют своей длины,  $x_0, y_0$  – координаты нейтральной оси. Представим их в формулу, тогда  $\sigma$  должно быть равно нулю.

$$\pm M \cdot \left( \frac{x \cdot \sin \varphi}{J_y} + \frac{y \cdot \cos \varphi}{J_x} \right) = 0, \text{ но } M \neq 0, \text{ поэтому}$$

$$\frac{x \cdot \sin \varphi}{J_y} + \frac{y \cdot \cos \varphi}{J_x} = 0 - \text{уравнение нейтральной оси при косом изгибе.}$$

Видно, что это уравнение прямой, свободных членов нет, поэтому это прямая, проходящая через начало координат.

Запишем уравнение нейтральной оси в изменённом виде

$$\frac{x_0}{y_0} = - \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Теперь изобразим поперечное сечение с плоскостью полного изгибающего момента и разберёмся, как на сечении расположена нейтральная ось (рис. 3.19).

Для прямой, проходящей через начало координат  $\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} \beta < 0$ ,

следовательно, угол  $\beta$  тупой.

Для определения положения нейтральной оси удобнее пользоваться смежным углом  $\alpha$ , но  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$ , тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi$$

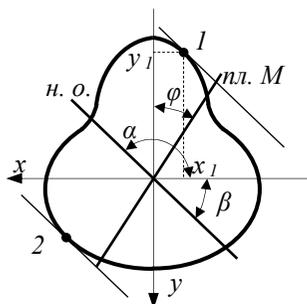


Рис. 3.19. Нейтральная ось и наиболее опасная точка 1 поперечного сечения при косом изгибе

– формула для определения положения нейтральной оси.

Из этой формулы видно, что  $\alpha > \varphi$ , так как  $J_x > J_y$  (об этом мы договорились, при изучении геометрических характеристик плоских сечений). Следовательно, если плоскость действия изгибающего момента поворачивается от плоскости наибольшей жёсткости на угол  $\varphi$ , то нейтральная ось поворачивается от плоскости наименьшей жёсткости в том же

направлении на угол  $\alpha > \varphi$  (см. рис. 3.19).

Если  $J_x = J_y$ , то  $\alpha = \varphi$ , но в этом случае, при любом  $\varphi$  будет плоский изгиб, так как все центральные оси сечения, будут главными.

Для чего мы искали положение нейтральной оси? Зная положение нейтральной оси, можно найти наиболее напряжённую точку сечения – это будет наиболее удалённая, от нейтральной оси, точка. Её можно найти, проведя касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной оси. Пусть это будет точка 1 (см. рис. 3.19), тогда

$$|\sigma| = |M| \cdot \left| \frac{x_1 \cdot \sin \varphi}{J_y} + \frac{y_1 \cdot \cos \varphi}{J_x} \right| \leq [\sigma]$$

– условие прочности для произвольного сечения балки при косом изгибе.

Как им пользоваться? Во первых, нужно определить угол  $\alpha$ , построить нейтральную ось, затем, проведя касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной оси, определить координаты точки 1 (см. рис. 3.19). Только после этого, подставив эти координаты в условие прочности, можно оценить прочность.

Рассмотрим частный случай, когда  $\varphi = \text{const}$  по длине бруса (балки) и тогда координаты наиболее удалённой от нейтральной оси точ-

ки по длине бруса не меняются. Тогда, второй множитель не меняется и наиболее опасным будет сечение, где действует  $M_{\text{наиб}}$ , поэтому условие прочности для всей балки запишется следующим образом

$$|M|_{\text{наиб}} \cdot \left| \frac{x_1 \cdot \sin \varphi}{J_y} + \frac{y_1 \cdot \cos \varphi}{J_x} \right| \leq [\sigma].$$

Напомним, что эта формула справедлива только при  $\alpha = \text{const}$ .

Теперь в рамках этого частного случая ( $\varphi = \text{const}$ ), рассмотрим сечения, которые имеют две оси симметрии и выступающие острые углы (рис. 3.20). Вне зависимости от положения нейтральной оси, касательные к ней, будут проходить через диагональные угловые точки и

$$|x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = |x|_{\text{наиб}};$$

$$|y_1| = |y_2| = |y_3| = |y_4| = |y|_{\text{наиб}}.$$

Если ещё учесть, что  $\frac{J_x}{|y|_{\text{наиб}}} = W_x$ ,  $\frac{J_y}{|x|_{\text{наиб}}} = W_y$ , и вынести за скоб-

ку  $W_x$ , то получим

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \cdot \left( \cos \varphi + \frac{W_x}{W_y} \cdot \sin \varphi \right) \leq [\sigma].$$

– это условие прочности при косом изгибе для балок, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии и выступающие острые углы и, конечно, для частного случая, когда  $\varphi = \text{const}$ . Здесь круглые скобки, так как все величины в скобках, положительные,

Далее рассмотрим, как решаются три задачи сопротивления материалов при косом изгибе?

1 задача – проверка прочности.

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x} \cdot \left( \cos \varphi + \frac{W_x}{W_y} \cdot \sin \varphi \right) \leq [\sigma].$$

Здесь всё выражено в явном виде.

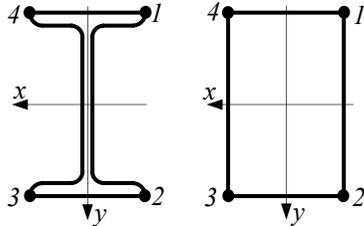


Рис. 3.20. Сечения, имеющие две оси симметрии и выступающие острые углы

2 задача – назначение размеров поперечного сечения.

Разрешим условие прочности относительно  $W_x$

$$W_x \geq \frac{|M|_{\text{наиб}}}{[\sigma]} \cdot \left( \cos \varphi + \frac{W_x}{W_y} \cdot \sin \varphi \right).$$

В явном виде формула неразрешима, так как  $W_x$  есть и в правой части, но и это не главное. В правой части есть ещё  $W_y$ , который зависит от  $W_x$  через форму и размеры сечения. Поэтому размеры поперечного сечения назначаются методом попыток.

Для первой попытки принимают среднее значение  $(W_x/W_y)_{\text{ср}}$  для балок рассматриваемого профиля. Для двутавровых балок, например,  $(W_x/W_y)_{\text{ср}} \approx 10$ , а для прямоугольных сечений –  $(W_x/W_y)_{\text{ср}} = (h/b)^2$

$$W_x^{(1)} \geq \frac{|M|_{\text{наиб}}}{[\sigma]} \cdot \left[ \cos \varphi + \left( \frac{W_x}{W_y} \right)_{\text{ср}} \cdot \sin \varphi \right].$$

Теперь, зная  $W_x^{(1)}$  находим  $W_y^{(1)}$  и проверяем прочность по формуле

$$\frac{|M|_{\text{наиб}}}{W_x^{(1)}} \cdot \left( \cos \varphi + \frac{W_x^{(1)}}{W_y^{(1)}} \cdot \sin \varphi \right) \leq [\sigma].$$

Как правило, первая попытка не бывает удачной. Условие прочности не выполняется, в ту или другую сторону: либо левая часть больше правой, либо левая часть заметно меньше правой. Поэтому, делается вторая попытка.

Попытки продолжаются до тех пор, пока перегрузка станет менее 3 %, а недогрузка может быть и больше, это зависит от соседних стандартных размеров профиля (например, предыдущий двутавр даёт недопустимую перегрузку, а следующий – недогрузку более 5 %).

3 задача – определение грузоподъёмности.

$$|M|_{\text{наиб}} \leq \frac{[\sigma] \cdot W_x}{\cos \varphi + \frac{W_x}{W_y} \cdot \sin \varphi}.$$

Здесь всё выражено, в явном виде.

### 3.3.2. Перемещения при косом изгибе

Как найти перемещения в общем случае, когда угол  $\varphi$  меняется по длине бруса (балки). В общем случае нагрузки, действующие на балку, раскладываются на составляющие в главных плоскостях жёсткости. Затем находится перемещение от каждой группы составляющих – каждая группа вызывает плоский изгиб. Потом эти перемещения складываются – это будет геометрическая сумма. Дело упрощается тем, что речь идёт о взаимно перпендикулярных перемещениях.

Далее рассмотрим частный случай, когда положение плоскости полного изгибающего момента по длине балки не изменяется. Рассмотрим консольную балку (рис. 3.21):

Покажем составляющие силы  $F$  и перемещения  $f$  в главных плоскостях жёсткости. Для вычисления  $f_x$  и  $f_y$  воспользуемся готовым решением задачи при плоском изгибе –  $f = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J}$ . Здесь  $J$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

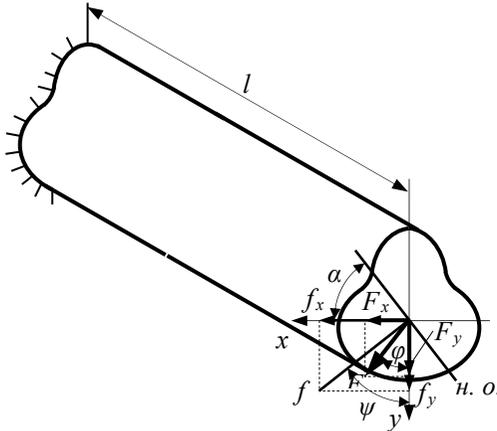


Рис. 3.21. Определение перемещений при косом изгибе

Применим эту формулу для составляющих

$$f_x = \frac{F_x \cdot l^3}{3E \cdot J_y}, \quad f_y = \frac{F_y \cdot l^3}{3E \cdot J_x}, \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Найдем положение плоскости, в которой происходит полное перемещение.

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{F_x}{F_y} \cdot \frac{J_x}{F_y}, \text{ но } \frac{F_x}{F_y} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ следовательно } \operatorname{tg} \psi = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ то-}$$

гда,  $\psi = \alpha$ .

Таким образом, при повороте плоскости полного изгибающего момента от плоскости наибольшей жёсткости нейтральная ось и плоскости полного прогиба поворачиваются на одинаковый угол  $\alpha$ , иначе говоря, плоскость полного прогиба перпендикулярна нейтральной оси. Покажем на рис. 3.21, нейтральную ось.

### 3.4 Внецентренное растяжение и сжатие коротких стержней

Короткие стержни – это стержни малой гибкости. Теория, которая будет изложена ниже, применима к коротким стержням. *Брус испытывает внецентренное растяжение или сжатие, если он нагружен силами, линия действия которых параллельна оси стержня, но не совпадает с ней.*

Изобразим брус, испытывающий внецентренное растяжение (рис. 3.22, а).

$b_F(x_F, y_F)$  – точка приложения силы,  $e$  – эксцентриситет (расстояние от точки  $b_F$  приложения силы до центра тяжести сечения  $C$ ).

Изобразим расчётную схему бруса (рис. 3.22, б). Переносим силы  $F$  на ось бруса, но при этом, мы должны добавить пары сил.

Силы  $F$  вызывают центральное растяжение (или сжатие), а пары сил  $M = F \cdot l$  – чистый косой изгиб.

Таким образом, внецентренное растяжение или сжатие есть сумма центрального растяжения или сжатия и чистого косоуго изгиба, иначе: внецентренное растяжение или сжатие есть сумма центрального растяжения или сжатия и двух плоских чистых изгибов в главных плоскостях жёсткости.

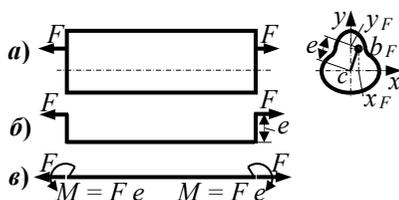


Рис. 3.22. Расчётная схема бруса при внецентренном растяжении

Выведем формулы для напряжений в поперечном сечении бруса. Применим метод сечений, отброшенная часть показана штриховыми линиями (рис. 3.23). Покажем главные центральные оси  $x, y$  поперечного сечения.

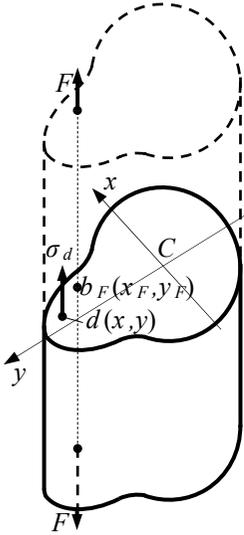


Рис. 3.23. Определение напряжений при внецентренном растяжении

Подставим значения слагаемых в исходную формулу

$$\sigma = \pm F \cdot \left( \frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y}{J_x} + \frac{x_F \cdot x}{J_y} \right).$$

Здесь знаки « $\pm$ », чтобы охватить, и растяжение, и сжатие. Знак «+» берём при растяжении, а знак «-» – при сжатии.

$x_F, y_F$  – координаты (в главных) точки

$x, y$  – координаты точки, в которой вычисляют напряжение.

$A$  – площадь поперечного сечения бруса.

$J_x, J_y$  – главные центральные моменты инерции сечения бруса.

Запишем формулу в другом виде: так как  $J_x = i_x^2 \cdot A$ ,  $J_y = i_y^2 \cdot A$ , то

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} \right).$$

Пусть точка приложения сил  $b_F(x_F, y_F)$  находится в первой четверти. Рассмотрим любую точку (тоже в первой четверти)  $d(x, y)$  и определим напряжение в этой точке. Касательных напряжений нет. Нормальные напряжения  $\sigma = f(x, y)$  не зависят от  $z$ , так как все сечения находятся в одинаковых условиях (равнопрочны).

Воспользуемся принципом суперпозиции

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}; \quad \sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{F}{A};$$

$$\sigma_{M_x} = \frac{M_x \cdot y}{J_x} = \frac{F \cdot y_F \cdot y}{J_x};$$

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y \cdot x}{J_y} = \frac{F \cdot x_F \cdot x}{J_y}.$$

Если сила приложена центрально, то  $x_F = y_F = 0$  и  $\sigma = \pm \frac{F}{A}$ .

Далее необходимо составить условие прочности. Для этого нужно найти точку с самым большим напряжением. При каждой простой деформации поперечное сечение остается плоским и поворачивается относительно нейтральной оси.

Пусть  $x_0, y_0$  – координаты точек нейтральной оси, тогда  $\sigma(x_0, y_0) = 0$ . Подставим в последнее соотношение и получим (так как  $F/A \neq 0$ )

$$1 + \frac{y_F \cdot y_0}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_0}{i_y^2} = 0.$$

Это уравнение нейтральной оси. Координаты  $x_0, y_0$  входят в числитель в первой степени, следовательно, это уравнение прямой. Нейтральная ось не проходит через начало координат, поэтому удобно найти отрезки, которые она отсекает от осей. Запишем уравнение нейтральной оси в отрезках

$$\frac{x_0}{\frac{i_y^2}{x_F}} + \frac{y_0}{\frac{i_x^2}{y_F}} = \frac{x_0}{a_x} + \frac{y_0}{a_y} = 1.$$

где  $a_x = -(i_y^2 / x_F)$ ;  $a_y = -(i_x^2 / y_F)$  – отрезки, отсекаемые нейтральной осью от координатных осей.

Изобразим поперечное сечение бруса и построим нейтральную ось (рис. 3.24).

Так как в правой части  $x$  и  $y$  со знаком «-», то точка приложения силы и нейтральная ось всегда расположены по разные стороны от начала координат.

Зная положение нейтральной оси, можно найти точку с наибольшим напряжением. Самой напряжённой будет точка, наиболее удалённая от нейтральной оси. Необходимо провести касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной оси и

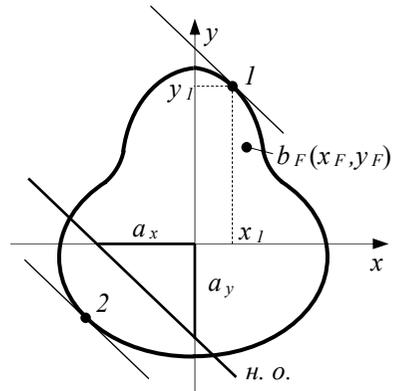


Рис. 3.24. Нейтральная ось и наиболее опасная точка I сечения при внецентренном растяжении или сжатии

найти координаты наиболее удалённой точки – это точка 1 ( $x_1, y_1$ ).

Подставим в общее уравнение

$$|F| \cdot \left( \frac{1}{A} + \frac{y_F \cdot y_1}{J_x} + \frac{x_F \cdot x_1}{J_y} \right) \leq [\sigma].$$

– условие прочности при внецентренном растяжении или сжатии.

Как пользоваться условием прочности? Вначале нужно найти положение нейтральной оси, нанести её, провести касательные, найти наиболее удалённую точку и посмотреть, выполняется ли условие прочности.

Рассмотрим частный случай, когда поперечное сечение имеет две оси симметрии и выступающие острые углы, например, прямоугольник или двутавр (см. рис. 3.20).

Самый удаленный всегда будет одна из угловых точек:

$$|x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = |x|_{\text{наиб}};$$

$$|y_1| = |y_2| = |y_3| = |y_4| = |y|_{\text{наиб}}.$$

Если ещё учесть, что  $\frac{J_x}{|y|_{\text{наиб}}} = W_x$ ,  $\frac{J_y}{|x|_{\text{наиб}}} = W_y$ , то получим

$$|F| \cdot \left( \frac{1}{A} + \frac{y_F}{W_x} + \frac{x_F}{W_y} \right) \leq [\sigma].$$

это частная формула.

Возвращаемся к формулам для  $a_x$  и  $a_y$ . Если  $x_F, y_F$  возрастают, то, в соответствии с формулами, модули  $|a_x|$  и  $|a_y|$  убывают. Иначе: если точка приложения силы удаляется от начала координат, то нейтральная ось приближается к началу координат, и наоборот, если сила приближается к началу координат, то нейтральная ось удаляется от центра тяжести сечения. Если силу  $F$  удалять от начала координат, то нейтральная ось будет пересекать сечение и в пределах сечения в одной его части будет растяжение, в другой – сжатие.

В строительном деле, в строительных концепциях очень важно, чтобы всё сечение испытывало только сжатие, то есть сила должна очень близко располагаться к началу координат. В связи с этим возникает понятие ядра сечения.

**Ядром сечения** называется область сечения, включающая центр тяжести, приложение силы внутри которой вызывает во всем сечении напряжения одного знака.

Таким образом, если сила приложена внутри ядра сечения, то

нейтральная ось не пересекает сечение. Если сила приложена на границе ядра сечения, то нейтральная ось касается сечения – это обстоятельство используется при отыскании координат ядра сечения.

Примеры (рис. 3.25):

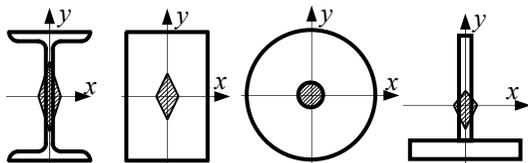


Рис. 3.25. Ядро сечения

### 3.5. Кручение с изгибом

В чистом виде кручение встречается редко. Обычно кручение осложнено изгибом, причём изгиб возникает при передаче крутящего момента на вал. Будем изучать кручение с изгибом брусьев круглого сечения, так как подавляющее большинство деталей машин, испытывающих эту деформацию, являются брусьями круглого поперечного сечения.

Теорию изложим на частном примере (рис. 3.26, а). На вал, закреплённый одним концом, передаётся пара сил через рычаг длиной  $a$ .

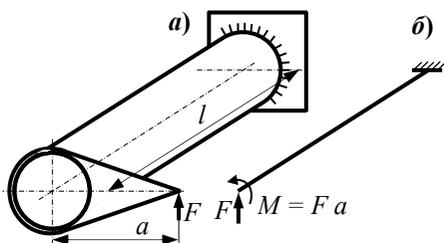


Рис. 3.26. Вал, испытывающий кручение с изгибом

Изобразим расчётную схему вала (рис. 3.26, б). Вместо вала рассмотрим его ось, перенесём силу  $F$  к центру тяжести сечения вала – в результате получим силу  $F$  и пару сил  $M = F \cdot a$ . Сила  $F$  вызывает изгиб, а пара сил  $M$  – кручение. Следовательно, вал испытывает кручение с изгибом.

Расчётная схема бруса есть, сила  $F$  и пара сил  $M = F \cdot a$  известны. Далее переходим к внутренним силам (рис. 3.27). Вначале анализи-

руем изгиб – касательные напряжения от поперечной силы рассматривать не будем, так как их роль невелика. Будем рассматривать

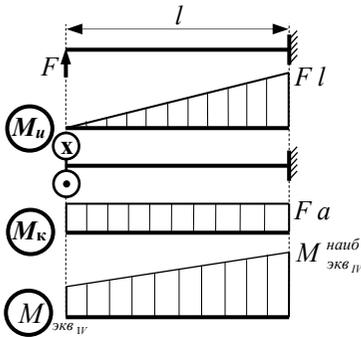


Рис. 3.27. Эпюры внутренних сил при кручении с изгибом

только нормальные напряжения и, следовательно, изгибающий момент  $M_u$ . Строим эпюру  $M_u = F \cdot z$  – при этом момент берётся по абсолютной величине, а ординаты откладываются на сжатых волокнах.

Далее рассмотрим кручение. Строим эпюру крутящих моментов  $M_k = F \cdot a = const$ .

Как использовать полученные эпюры для оценки прочности и назначения поперечного сечения? Для этого изобразим любое сече-

ние вала, в которой действуют  $M_u$  и  $M_k$ . Покажем плоскость  $M_u$  и эпюру нормальных напряжений (рис. 3.28). Для этих же точек покажем эпюру касательных напряжений. Видно, что самая опасная точка находится на поверхности вала и в ней действуют  $\sigma_{наиб}$  и  $\tau_{наиб}$ .

Теперь обратимся к теории предельных напряжений состояний. Валы, как правило, стальные. Сталь – пластичный металл и поэтому применяем четвёртую теорию – теорию октаэдрических касательных напряжений

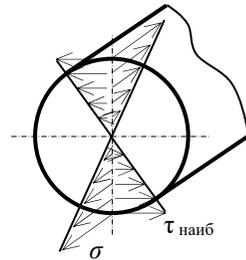


Рис. 3.28. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении вала

$$\sigma_{экв.лв.наиб} \sqrt{\sigma_{наиб}^2 + 3 \cdot \tau_{наиб}^2} \leq [\sigma]$$

– условие прочности по четвёртой теории в самой опасной точке сечения.

Эту формулу мы выводили при изучении темы "Изгиб".

Выразим  $\sigma_{наиб}$  и  $\tau_{наиб}$  через  $M_u$  и  $M_k$ :

$$\sigma_{наиб} = \frac{M_u}{W_u}; \quad \tau_{наиб} = \frac{M_k}{W_k},$$

где  $W_u$  – момент сопротивления сечения при изгибе; Для круглого

сечения  $W_u = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ .

$W_k$  – момент сопротивления сечения при кручении. Для круглого сечения  $W_k = W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ .

Подставляем в формулу для эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{\text{экв.л.}} = \sqrt{\frac{M_u^2}{W_u^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{M_k^2}{W_k^2}} = \frac{M_{\text{экв.л.}}}{W_u}, \quad \text{где } M_{\text{экв.л.}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75 \cdot M_k^2}.$$

Теперь можем записать условие прочности через  $M_{\text{экв.л.}}$

$$M_{\text{экв.л.}} \leq [\sigma]$$

– условие прочности в любом поперечном сечении вала.

Записано оно в форме условия прочности при изгибе, но в качестве изгибающего момента записан эквивалентный момент, который учитывает и изгиб, и кручение.

А нам нужно записать условие прочности для всего вала. Для этого нужно найти опасное сечение – сечение, где действует  $M_{\text{экв.л.}}^{\text{наиб}}$ .

$$\frac{M_{\text{экв.л.}}^{\text{наиб}}}{W_u} \leq [\sigma]$$

– условие прочности всего вала круглого поперечного сечения при кручении с изгибом.

Чтобы воспользоваться этим условием необходимо знать  $M_{\text{экв.л.}}^{\text{наиб}}$ .

Для этого строим эпюру эквивалентных моментов (см. рис. 3.29), вычисленных по формуле  $M_{\text{экв.л.}} = \sqrt{M_u^2 + 0,75 \cdot M_k^2}$ , и находим наибольшее значение.

Далее рассмотрим, как решаются три задачи сопротивления материалов при кручении с изгибом? В этом случае все задачи решаются просто, как при плоском изгибе

1 задача – проверка прочности

$$\frac{M_{\text{экв.л.}}^{\text{наиб}}}{W_u} \leq [\sigma].$$

2 задача – назначение размеров поперечного сечения.

Определяем диаметр вала:  $W_u = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ , отсюда,

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}}{\pi}}$$

3 задача – определение грузоподъёмности.

$$M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}} \leq [\sigma] \cdot W_u$$

Приведем формулы для  $M_{\text{экв}}$  по другим теориям прочности:

$$M_{\text{экв I}} = 0,5 \cdot M_u^2 + 0,5 \cdot \sqrt{M_u^2 + M_k^2} \dots$$

$$M_{\text{экв II}} = 0,35 \cdot M_u^2 + 0,65 \cdot \sqrt{M_u^2 + M_k^2}$$

$$M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_u^2 + M_k^2}$$

В целом ряде случаев кроме кручения и изгиба, есть ещё растяжение или сжатие. Возникает вопрос: как при такой сложной деформации оценить прочность вала? В этом случае используется начальная формула

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{наиб}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{наиб}}^2} \quad (3.4)$$

Тогда при вычислении  $\sigma_{\text{наиб}}$  необходимо учесть растяжение-сжатие следующим образом:

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{W_u} \quad (3.5)$$

Это в любом сечении. А как поступить, для всего вала? Нужно найти сечение где действует  $M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}$ . Так как  $N/A \ll M_u/W_u$ , то проверка на прочность всего вала производится в сечении с  $M_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}$ , вычисляется  $\sigma_{\text{наиб}}$  по формуле (3.5) и подставляется в (3.4) и выясняется, выполняется ли условие прочности.

### 3.6 Вопросы для самопроверки

1. Какие внутренние усилия возникают в брус в общем случае сложного сопротивления?
2. Какие напряжения возникают в брус в общем случае сложного сопротивления?
3. Как определяются нормальные напряжения в брус в общем случае сложного сопротивления?
4. Как определяются касательные напряжения в брус в общем случае сложного сопротивления?
5. Какое напряжённое состояние имеет место в точках бруса, в общем случае сложного сопротивления?
6. Как записывается условие прочности бруса в общем случае сложного сопротивления?
7. Как определяют перемещения бруса в

общем случае сложного сопротивления? 8. Какие рамы называют плоскими, плоско-пространственными, пространственными? Какие внутренние усилия возникают в плоских рамах? 9. Чему численно равна нормальная сила в поперечном сечении плоской рамы? Правило знаков для нормальной силы. 10. Чему численно равна поперечная сила в сечении плоской рамы? Правило знаков для поперечной силы. 11. Чему численно равен изгибающий момент в поперечном сечении плоской рамы? Правило знаков для изгибающего момента. 12. Какие напряжения возникают в поперечном сечении плоской рамы? Как они вычисляются? 13. Как записывается условие прочности для плоской рамы? 14. Каков порядок подбор размера поперечного сечения для плоской рамы? 15. В каком случае брус испытывает косою изгиб? 16. Какие внутренние усилия возникают в брус, испытывающем косою изгиб? 17. Какие напряжения возникают в брус при косом изгибе и как их определяют? 18. В каком месте поперечного сечения бруса находится опасная точка при косом изгибе и как она находится? 19. Как определяется положение нейтральной оси бруса при косом изгибе? 20. Как записывается условие прочности бруса при косом изгибе? 21. Каков порядок расчёта на прочность бруса при косом изгибе; 22. Как определяются перемещения бруса при косом изгибе? 23. В каком случае брус испытывает внецентренное растяжение или сжатие (ВЦРС)? 24. Какие внутренние усилия возникают в брус, испытывающем ВЦРС? 25. На какие простые деформации можно разложить ВЦРС? 26. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса, испытывающего ВЦРС, и как их определяют? 27. В каком месте поперечного сечения бруса, испытывающего ВЦРС, располагаются опасная точка, и как она находится? 28. Как определяется положение нейтральной оси поперечного сечения бруса, испытывающего ВЦРС? 29. Как записывается условие прочности бруса, испытывающего ВЦРС? 30. Каков порядок расчёта на прочность бруса, испытывающего ВЦРС? 31. Каков порядок расчёта на прочность бруса, испытывающего ВЦРС, и имеющего две оси симметрии и прямые выступающие острые углы? 32. Каков порядок расчёта круглых валов, испытывающих кручение с изгибом? 33. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого вала, испытывающего кручение с изгибом? 34. Как записывается условие прочности круглого вала, испытывающего кручение с изгибом?

## 4. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

### 4.1. Основные понятия об усталостном разрушении

Достаточно большая группа деталей работает при постоянных напряжениях, особенно, в сооружениях.

Детали машин испытывают, как правило, переменные напряжения. Например, шатун испытывает переменные напряжения растяжения (сжатия), лопатки турбины совершают вынужденные колебания и в них действуют переменные напряжения.

Переменным напряжениям детали сопротивляются иначе, нежели постоянным. Отметим три особенности сопротивления переменным напряжениям:

1 Переменным напряжениям детали сопротивляются хуже, чем постоянным. Под действием переменных напряжений разрушение происходит при меньших напряжениях, чем при постоянных. Прочность снижается в несколько раз, в зависимости от формы и состояния поверхности деталей.

2 Разрушение наступает не сразу, а после наработки определённого числа циклов. При больших напряжениях разрушение наступает быстро, при меньших – через некоторый промежуток времени: через год, два и так далее.

3 Разрушение от переменных напряжений, даже деталей из пластичных материалов, происходит хрупко, без остаточных деформаций (нет никаких шеек).

Это всё, главные особенности. Их нужно объяснить. Как объясняли их, в XIX веке? Считали, что при действии переменных напряжений, материал устаёт, снижается предел прочности  $\sigma_v$  и снижается пластичность. Снижаясь,  $\sigma_v$  достигает фактических значений напряжений в детали и в этот момент, происходит разрушение.

Однако, в начале XX века, были поставлены опыты, которые показали, что материал, вовсе не устаёт. Вырезали из деталей образцы и оказалось, что  $\sigma_v$  не изменяется. Никакой усталости в первоначальном понимании нет, однако термин «усталость», остался.

Далее приведём современное объяснение, которое подтверждено многочисленными исследованиями.

В детали, всегда есть микродефекты (микротрещины). По границам микротрещин, наблюдается концентрация напряжений и, в ре-

зультате, возникают напряжения, превышающие предел текучести  $\sigma_T$ . Общее напряжение по сечению меньше  $\sigma_T$ , а местные напряжения, на границах микротрещин – больше  $\sigma_T$ . Покажем это, на диаграмме напряжений (рис. 4.1).

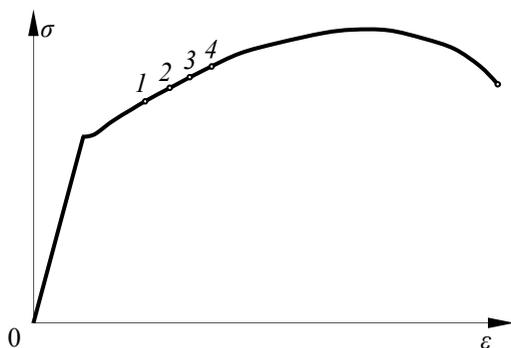


Рис. 4.1. Накопление повреждений при циклических нагрузках

Точка 1, соответствует деформации на границе микротрещины в момент достижения напряжениями наибольшего значения при первом полупериоде нагружения. Точка 2, соответствует окончанию третьего полупериода и так далее. Таким образом, на границе микротрещины происходит накопление пластических деформаций. Бесконечно, это накопление продолжаться не может – через определённое число циклов достигается конец диаграммы и происходит местное разрушение. В результате, размеры микротрещины несколько увеличиваются. Если напряжения небольшие, то этого, может и не произойти.

Далее, всё начинается сначала. Микротрещины растут, объединяются и после большого числа циклов, появляются макротрещины, размеры которых сопоставимы с размерами поперечного сечения детали. Макротрещина растёт, ослабляет поперечное сечение детали. В конце концов, оно будет ослаблено настолько, что фактические напряжения, достигнут предела прочности материала  $\sigma_B$  и произойдёт разрушение.

Почему разрушение носит хрупкий характер? Так как на границе трещин возникает объёмное напряжённое состояние – всестороннее растяжение – касательные напряжения малы, поэтому остаточные (пластические) деформации малы и разрушение будет хрупким.

Микротрещины образуются, и в бездефектном состоянии материала. Некоторые зёрна материала, оказываются перегруженными (как в статически неопределимой системе) и при действии напряжений, возникают микротрещины.

Это, современное представление. Никакой усталости, в первоначальном понимании, нет, но термин «усталость», сохранился.

*Усталость* – процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к образованию трещин, их развитию и разрушению.

*Сопротивление усталости* – свойство материала противостоять усталости (сопротивление переменному напряжению, развитию трещин).

Механизм разрушения хорошо подтверждается, если рассмотреть усталостный излом – поверхность раздела, возникающую при усталостном разрушении объекта (рис. 4.2). В сечении можно видеть две зоны: зону 1 и 2.

Поверхность первой зоны мелкозернистая, гладкая, видны следы фронта трещины – это зона развития макротрещины. Она гладкая, блестящая, так как поверхности прижимаются друг к другу и притираются. Там наблюдаются ступеньки и всегда видно, где зарождается трещина.

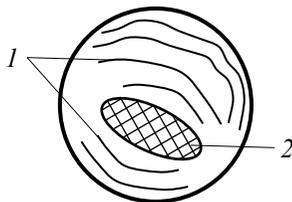


Рис. 4.2. Усталостный излом детали

Поверхность второй зоны, крупнозернистая, характерная для хрупкого разрушения. Это, та часть сечения, по которой произошло мгновенное и окончательное разрушение.

Таким образом, вид разрушения, подтверждает современное объяснение особенностей сопротивления детали переменным напряжениям.

Чтобы произошло усталостное разрушение, одной перемены напряжений недостаточно. Напряжения должны быть достаточно большими. Мы пришли к новому понятию – предел выносливости.

*Пределом выносливости* называется наибольшее по абсолютному значению напряжение цикла, при котором ещё не происходит усталостное разрушение до базы испытаний.

Предел выносливости обозначается через  $p_R$ , при изгибе –  $\sigma_R$ , при кручении –  $\tau_R$ , при растяжении-сжатии –  $\sigma_{RP}$ .

**База испытаний**  $N_b$  – предварительно задаваемая наибольшая продолжительность испытаний на усталость.

Предел ограниченной выносливости – наибольшее по абсолютному значению напряжение цикла, соответствующее задаваемой циклической долговечности. Обозначается  $p_{R_N}$ , при изгибе –  $\sigma_{R_N}$ , при кручении –  $\tau_{R_N}$ , при растяжении-сжатии –  $\sigma_{R_N}$ .

Предел выносливости детали зависит от большого числа факторов (до 10), однако, на предел выносливости самого материала в основном оказывают влияние три фактора:

- сам материал;
- тип деформации (могут быть: растяжение (сжатие), кручение, изгиб);
- соотношение, крайних за цикл, значений напряжений.

В заключении запишем условие прочности для материала при действии переменных напряжений:

$$\left| p \right|_{\text{наиб}} \leq \frac{P_R}{n_R},$$

здесь условие прочности записано в общем виде,  $n_R$  – коэффициент запаса по усталости.

### Параметры цикла напряжений

*Цикл напряжений* – совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения от одного крайнего значения до другого и обратно.

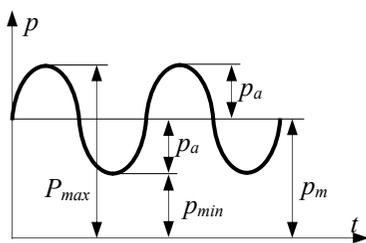


Рис. 4.3. Параметры цикла напряжений

Изобразим график изменения напряжений с течением времени (рис. 4.3).

Чаще всего детали испытывают напряжения, изменяющиеся по закону простой гармоники, но это не всегда. Закон изменения может быть и более сложным.

Оказывается, что на предел выносливости, форма кривой влияния, не оказывает. На долговечность – оказывает некоторое влияние.

Рассмотрим основные параметры цикла напряжений:

$p_{max}$  – максимальное напряжение цикла – алгебраически наибольшее напряжение цикла;

$p_{min}$  – минимальное напряжение цикла – алгебраически наименьшее напряжение цикла;

$p_m = \frac{p_{max} + p_{min}}{2}$  – среднее напряжение цикла или постоянная составляющая цикла напряжении;

$p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2}$  – амплитуда напряжении цикла или переменная составляющая цикла напряжений;

$R_p = \frac{p_{min}}{p_{max}}$  – коэффициент асимметрии цикла напряжении (характеристика цикла)

Рассмотрим примеры:

1 Постоянные во времени напряжения (рис. 4.4, а). Это статическое нагружение.

Здесь:  $p_{max} = p_{min} = p_m = p$ ,  $p_a = 0$ ,  $R_p = +1$ .

2 Отнулевой цикл (положительный) цикл (рис. 4.4, б). Такой цикл испытывает например, шатун двигателя.

Здесь:  $p_{max} = p$ ,  $p_{min} = 0$ ,  $p_m = p_a = p/2$ ,  $R_p = 0$ .

У отнулевого отрицательного цикла  $p_{max} = 0$ ,  $p_{min} = p$ ,  $p_a = p/2$ ,  $p_m = -p/2$ ,  $R_p = -\infty$ .

3. Симметричный цикл (рис. 4.4, в). Такой цикл испытывают многие детали машин.

Здесь:  $p_{max} = -p_{min} = p_a = p$ ,  $p_m = 0$ ,  $R_p = -1$ .

При одинаковом наибольшем по абсолютной величине напряжении за цикл – симметричный цикл самый тяжёлый. Предел выносливости при симметричном цикле всегда наименьший.

Как обозначаются пределы выносливости? Они встречаются в справочниках:

$\sigma_{-1}$  – предел выносливости при изгибе в случае симметричного цикла;

$\sigma_{-1p}$  – предел выносливости при растяжении/сжатии в случае симметричного цикла;

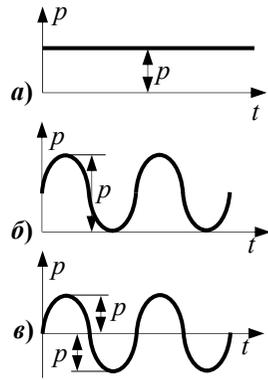


Рис. 4.4. Виды циклов напряжений

$\sigma_0$  – предел выносливости при изгибе в случае положительного отнулевого цикла;

$\sigma_{0p}$  – предел выносливости при растяжении-сжатии в случае положительного отнулевого цикла;

$\tau_{-1}$  – предел выносливости при кручении в случае симметричного цикла;

$\sigma_{-0,3}$  – предел выносливости при изгибе в случае асимметричного цикла с коэффициентом асимметрии  $R = -0,3$  и так далее.

#### 4.2. Предел выносливости материала при симметричном цикле.

Различают предел выносливости материала и предел выносливости детали. Они, разные. Рассмотрим предел выносливости материала.

За предел выносливости материала условно принимается предел выносливости стандартных лабораторных образцов. Размеры этих образцов и качество изготовления оговорено в ГОСТе на усталостные испытания. Образцы имеют следующие формы: цилиндрические образцы, корсетные образцы, плоские образцы и так далее. У лабораторных образцов поверхность рабочей части тщательно полирована.

Предел выносливости материала определяется только экспериментальным путём. Для испытания цилиндрических образцов имеются специальные машины: МУИ-6000, МВП-10000 – это основные машины. Цифра в марках машин – число циклов нагружения в минуту. Познакомимся с определением предела выносливости материала при изгибе, в случае симметричного цикла, на примере цилиндрических образцов (рис. 4.5).

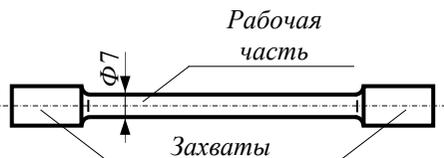


Рис. 4.5. Образец для испытаний на усталость

Рассмотрим конструкцию машины (рис. 4.6, а).

В бабках – цанговые зажимы в подшипниках. В зажимах закрепляется образец. Вращение образца осуществляется от электродвигателя через гибкую передачу. На электродвигателе имеется счётчик числа циклов нагружения.

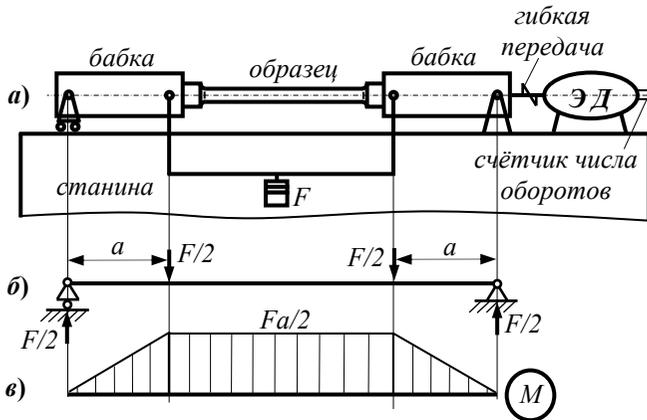


Рис. 4.6. Испытание цилиндрического образца при изгибе в случае симметричного цикла

$F$  – сила веса сменных грузов. Нагрузка неподвижна, а образец вращается. После разрушения образца, электродвигатель автоматически останавливается.

Изобразим расчётную схему образца (рис. 4.6, б) и построим эпюру изгибающих моментов (рис. 4.6, в).

В пределах образца, изгибающий момент не изменяется. Он изменяется, только в пределах бабок – следовательно, образец испытывает чистый изгиб.

Наибольший изгибающий момент равен  $M_{\text{наиб}} = \frac{F \cdot a}{2}$ , а

наибольшее напряжение –  $\sigma_{\text{наиб}} = \frac{M_{\text{наиб}}}{W_x} = \frac{F \cdot a \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot d^3} = \frac{16 F \cdot a}{\pi \cdot d^3}$ .

Так можно вычислить наибольшее напряжение, которое испытывает образец. Его можно изменять, меняя вес груза. Как изменяется напряжение в одной из точек на поверхности? Полный цикл изменения напряжений происходит за один оборот образца (рис. 4.7). В опасной точке напряжение изменяется по симметричному циклу.

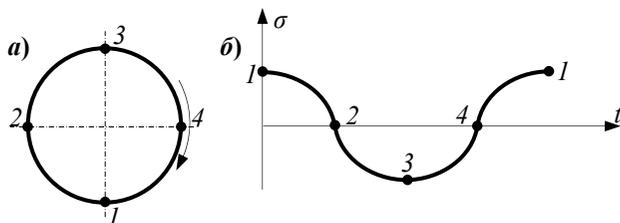


Рис. 4.7. Цикл напряжений при изгибе с вращением

### Испытания.

Испытывают партию из 15 образцов. Нагрузку для испытаний первого образца берут такую, чтобы:

- 1)  $\sigma_1 = 0,6 \sigma_{\text{в}}$  – при таком напряжении, он обязательно разрушится через  $N_1$  циклов нагружения, после этого, ставят второй образец;
- 2)  $\sigma_2 < \sigma_1$  - разрушение произойдет при большем числе циклов  $N_2 > N_1$ .
- 3)  $\sigma_3 < \sigma_2$  – разрушение произойдет через  $N_3 > N_2$ .

Наконец, на каком-то образце, достигнем уровня напряжения, при котором разрушение не наблюдается до базы испытаний  $N_6$ . При этом напряжении, которое принимается за предел выносливости, испытывают ещё 1-2 образца. Полученные результаты представляют графически (рис. 4.8, а):

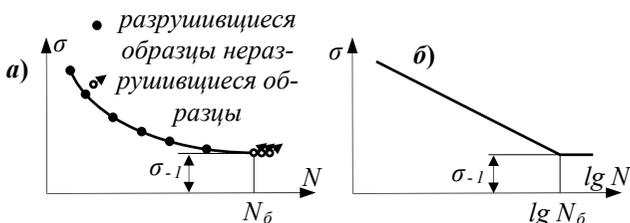


Рис. 4.8. Кривые усталости

На графике нужно бы указать  $\sigma_{\text{наиб}}$ , но при испытаниях рассматривается только это напряжение, поэтому оно обозначается просто  $\sigma$ .

Для чёрных металлов  $N_6 = 10^7$  циклов, а для лёгких сплавов и других металлов  $N_6 = 10^8$  циклов нагружения.

По ГОСТу кривые усталости строят в полулогарифмических (рис. 4.8, б) или двойных логарифмических координатах.

В связи с большим рассеянием долговечности, проводятся массовые испытания. На каждом из 4-6 уровней напряжений, испытыва-

ются не менее 10 образцов, а результаты испытаний, обрабатываются методами математической статистики.

В настоящее время, накоплен большой экспериментальный материал, который приводится в справочниках. Обобщение этого материала, привело к следующим эмпирическим формулам:

$$\sigma_{-1} \approx 0,46 \cdot \sigma_B - \text{среднее значение (по И.В. Кудрявцеву);}$$

$\sigma_{-1p} \approx 0,28 \cdot \sigma_B$  – так как при растяжении-сжатии наибольшее напряжение действует по всему сечению образца;

$$\tau_{-1} \approx 0,27 \cdot \sigma_B.$$

Все эти соотношения, справедливы только для сталей.

Для цветных металлов нет надёжных, твёрдых соотношений, так как их пределы выносливости, изменяются в более широких пределах.

### 4.3. Предел выносливости материала при асимметричном цикле

Известно, что за предел выносливости материала условно принимают предел выносливости стандартных лабораторных образцов с тщательно полированной поверхностью рабочей части.

И в рассматриваемом случае, предел выносливости определяется опытным путём, на специальных машинах, в конструкции которых предусмотрена возможность создания в образце средних напряжений цикла.

Напишем параметры цикла напряжений:

$$p_{max}, \quad p_{min}, \quad p_m, \quad p_a, \quad R.$$

Теперь рассмотрим так называемый предельный цикл. **Предельным циклом напряжений** называется цикл, наибольшее по абсолютной величине напряжение которого, равно пределу выносливости.

Обозначение параметров предельного цикла:

$$p_{Rmax}, \quad p_{Rmin}, \quad p_{Rm}, \quad p_{Ra}, \quad R.$$

А чему равен предел выносливости?

$p_R = p_{Rm} + p_{Ra}$  – это наибольшее по абсолютной величине напряжение цикла.

Для расчёта на прочность при переменных напряжениях нужно знать, как зависит предел выносливости от асимметрии цикла?

Эту зависимость снимают опытным путём и представляют в неявном виде с помощью одной или двух диаграмм:

1.  $p_{Rmax}, p_{Rmin} = f(p_{Rm})$  – здесь, две кривые,

2.  $p_{Ra} = f(p_{Rm})$  – здесь одна кривая.

Для вывода расчётных формул, удобна вторая диаграмма, поэтому её и будем рассматривать. Две точки, через которые проходит кривая, нам известны заранее (рис. 4.9):

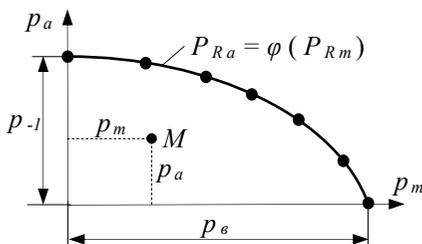


Рис. 4.9. Диаграмма предельных амплитуд цикла

1) при  $p_{Rm} = 0$  – симметричный цикл, следовательно  $p_{Ra} = p_{-1}$ ;

2) при  $p_{Rm} = p_b$ ,  $p_{Ra} = 0$ , то есть разрушение происходит без переменной составляющей (статическое нагружение).

Далее – промежуточные точки. Для получения каждой промежуточной точки нужно испытывать партию стандартных лабораторных образцов. В пределах партии, среднее напряжение постоянно, а изменяется, только переменная составляющая (амплитуда). Методика испытаний такая же, как и при симметричном цикле. Такие испытания проводились и опытные точки ложатся следующим образом (см. график на рис. 4.9).

Полученную кривую называют **диаграммой предельных амплитуд цикла**.

Обращаем внимание: чем больше среднее напряжение, тем меньше предельная амплитуда. Для пластичных, низкопрочных материалов диаграмма предельных амплитуд цикла – выпуклая вверх кривая. Для высокопрочных – почти прямая.

Обратим внимание: диаграмма построена только в области положительных средних напряжений. А как ведёт себя зависимость при отрицательных средних напряжениях? Эта область изучена ещё недостаточно, экспериментальных данных мало и они, порой, противоречивы. Академик С. В. Серенсен предлагал, чтобы слева, на небольшом участке, рассматривать диаграмму в виде прямой, параллельной оси  $p_m$ .

Возникает вопрос, как с помощью этой диаграммы, зная коэффициент асимметрии цикла ( $R$ ), найти предел выносливости  $p_R$ ?

Любому циклу на диаграмме соответствует точка, например, циклу с параметрами  $p_m$ ,  $p_a$ , соответствует точка  $M$ . Если точка ле-

жит ниже предельной кривой, то она соответствует неразрушающему циклу, но не безопасному, так как неизвестен коэффициент запаса. Если точка – выше предельной кривой, то разрушающему циклу. Если точка на предельной кривой – предельному циклу.

Изобразим ещё раз, диаграмму предельных амплитуд цикла (рис. 4.10).

Из начала координат  $o$ , через точку  $M$ , проведём прямую и отметим точку пересечения с предельной кривой  $M_R$ . Определим параметры предельного цикла напряжений  $p_{Rm}$ ,  $p_{Ra}$  и выразим через них

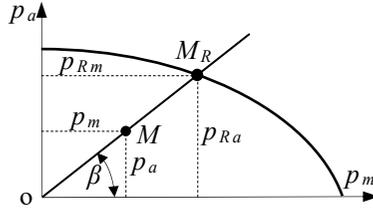


Рис. 4.10. Определение параметров предельного цикла

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p_{Ra}}{p_{Rm}} = \frac{\frac{p_{Rmax} - p_{Rmin}}{2}}{\frac{p_{Rmax} + p_{Rmin}}{2}} = \frac{1 - R}{1 + R}.$$

Теперь ясно, как найти предел выносливости, зная  $R$ . Находим  $\operatorname{tg} \beta$ , затем  $\beta$ . Из начала координат под углом  $\beta$  проводим прямую и получаем точку  $M_R$ , а точка  $M$  даёт значения  $p_{Rm}$ ,  $p_{Ra}$  и, далее, определяем предел выносливости

$$p_R = p_{Rm} + p_{Ra}.$$

Обращаем внимание на то, что точки, соответствующие циклу с одинаковым коэффициентом  $R$ , лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Почему? Так как  $\operatorname{tg} \beta$  будет одинаковым.

*Циклы напряжений с одинаковыми коэффициентами асимметрии  $R$  называются подобными.*

#### 4.4. Концентрация напряжений и её влияние на прочность

Что такое, концентрация напряжений?

Рассмотрим пример. При растяжении призматического бруса, напряжения по его сечению распределяются равномерно (рис. 4.11, а). А далее рассмотрим брус с выточкой. В этом случае эпюра напряжений в наименьшем сечении бруса имеет вид (рис. 4.11, б) Покажем  $\sigma_{ном}$  – номинальные напряжения – это напряжения, вычис-

ляемые в предположении отсутствия концентрации напряжений по обычным формулам сопротивления материалов  $\sigma_{\text{ном}} = \frac{F}{A_{\text{нетто}}}$ .

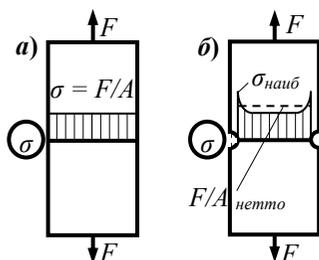


Рис. 4.11. Понятие о концентрации напряжений

Таким образом, если деталь имеет нарушения призматической формы, то около этих нарушений имеется концентрация напряжений.

*Превышение местными напряжениями номинальных напряжений называется **концентрацией напряжений**, а места нарушения призматической формы называются **концентраторами напряжений**.*

**напряжений.**

Здесь концентратор напряжения – выточка, в других случаях – резьба, галтель, отверстия и так далее.

Концентрация напряжений оценивается **теоретическим коэффициентом концентрации напряжений** –  $\alpha_p$  ( $\alpha_\sigma$ ,  $\alpha_\tau$ ) – этот коэффициент называется ещё упругим коэффициентом концентрации напряжений.

$\alpha_p = \frac{P_{\text{наиб}}}{P_{\text{ном}}}$  показывает, во сколько раз,

местные напряжения больше номинальных, тогда  $P_{\text{наиб}} = \alpha_p \cdot P_{\text{ном}}$ :  $\alpha_p > 1$ .

Коэффициент  $\alpha_p$  зависит от резкости концентратора напряжений, от размеров концентратора напряжений и детали, от типа деформации и от вида концентратора напряжений. Если речь идёт о мелкой выточке, то его (концентрация) резкость определяется двумя параметрами (рис. 4.12): глубиной выточки  $t$  и радиусом кривизны  $\rho$  у дна выточки (от вида концентратора, тоже), точнее, от отношения  $t/\rho$ . При увеличении этого отношения  $\alpha_p$  возрастает.

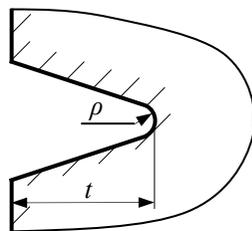


Рис. 4.12. Параметры концентратора

Как определить  $\alpha_p$ . Можно теоретическим путём, решая соответствующую задачу математической теории упругости. Определяют и экспериментальным путём, например, методом просвечивания оптически активных материалов, методом лакокрасочных покрытий, ме-

тодом тензометрирования.

В настоящее время изучены многие концентраторы напряжений и для них, в справочной литературе, приведены значения теоретических коэффициентов концентрации напряжений  $\alpha_p$ .

Если  $p_{max} > p_t$ , то коэффициент концентрации будет меньше  $\alpha_p$ . В этом случае вводится понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений, который обозначается через  $(\kappa_\sigma, \kappa_\tau)$ . Что такое  $\kappa_p$ ?

$$\kappa_p = \frac{p_b}{p_{вк}},$$

где  $p_b$  – разрушающее напряжение для детали без концентратора напряжений;  $p_{вк}$  – разрушающее напряжение для детали с концентратором напряжений, но вычисляемое, по номинальным напряжениям.

Иначе говоря,  $\kappa_p$  – это отношение разрушающих нагрузок для образцов без концентраторов напряжений и с концентраторами напряжений. Иногда  $\kappa_p$  называют действительным коэффициентом концентрации напряжений.

Как влияет концентратор напряжения на прочность?

1 случай: напряжения постоянны, деталь из пластичного материала (рис. 4.13, а).

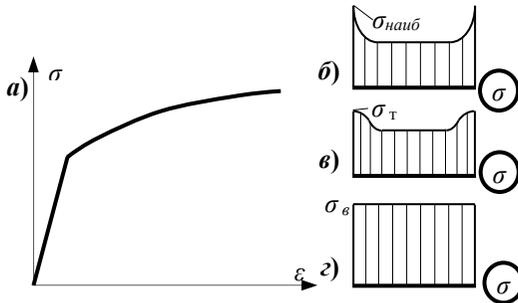


Рис. 4.13. Изменение распределения напряжений в пластичном материале

Главное здесь – разрушение наступает после больших пластических деформаций и поэтому, распределение напряжений с увеличением нагрузки ведёт себя следующим образом:

если  $\sigma_{наиб} < \sigma_t$ , то эпюра напряжений имеет вид (рис. 4.13, б); если  $\sigma_{наиб} > \sigma_t$ , то эпюра будет иметь вид (рис. 4.13, в) и наконец, перед

разрушением, когда  $\sigma_{\text{наиб}} = \sigma_v$ , разницы между местными и наибольшими напряжениями не будет (рис. 4.13,  $\varepsilon$ ), тогда  $\kappa_\sigma = 1$ , а расчёт на прочность следует вести, по  $\sigma_{\text{ном}}$ .

2 случай: напряжения постоянны, а деталь из хрупкого материала. Диаграмма напряжений для хрупкого материала, имеет вид (рис. 4.14):

В этом случае выравнивания напряжений не происходит и как только местные напряжения достигнут  $p_v$ , то есть  $p_{\text{наиб}} = \alpha_p \cdot p_{\text{ном}} = p_v$  – произойдёт разрушение.

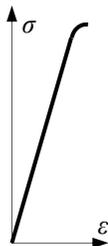


Рис. 4.14. Диаграмма напряжений хрупкого материала

Разрушение происходит и при  $p_{\text{ном}} = p_v / \alpha_p$ , или  $\alpha_p = p_v / p_{\text{ном}}$ , но отношение  $p_v / p_{\text{ном}} = \kappa_p$  – эффективный коэффициент концентрации напряжений, следовательно, для деталей из хрупких материалов –  $\kappa_p = \alpha_p$ , поэтому, расчёт на прочность следует вести, по  $p_{\text{наиб}} = \alpha_p \cdot p_{\text{ном}}$ .

Но здесь, есть исключение: серый чугун, хотя этот материал и является хрупким. Для серого чугуна, который содержит графитовые включения,  $\kappa_p = 1$ , то есть, в деталях с концентраторами напряжений, будут такие же разрушающие нагрузки, как и без концентраторов напряжений. Это происходит потому, что графитовые включения являются более резкими концентраторами напряжений, чем конструктивные концентраторы и они, всё определяют.

3 случай: напряжения переменны, деталь из пластичного материала. Будем пока говорить о напряжениях, изменяющихся по симметричному циклу. Начнём с  $\kappa_p$

$$\kappa_p = \frac{p_{-1}}{p_{-1\kappa}}$$

где  $p_{-1}$  – предел выносливости образца без концентратора напряжений,  $p_{-1\kappa}$  – предел выносливости образца с концентратором напряжений.

Деталь из пластичного материала, поэтому, казалось бы, должен быть эффект выравнивания напряжений по сечению детали. Он есть, но проявляется частично, поэтому  $1 < \kappa_p < \alpha_p$ . Для низкопрочных и высокопластичных материалов  $\kappa_p$  приближается к 1, а для высокопрочных и малопластичных,  $\kappa_p$  ближе к  $\alpha_p$ .

Таким образом, у каждого материала, своя чувствительность к

концентраторам напряжений. В связи, с этим вводится, так называемый коэффициент чувствительности к концентраторам напряжений, который обозначается, через  $q_p$ :

$$q_p = \frac{\kappa_p - 1}{\alpha_p - 1},$$

От чего зависит  $q_p$ ?

Главным образом, от материала. С ростом  $\sigma_b$ , увеличивается и  $q_p$ ;  $q_p$  зависит, от размеров детали: с ростом диаметра, увеличивается, и  $q_p$ ;

$q_p$  зависит от резкости концентратора напряжений: с увеличением  $\alpha_p$  также растёт  $q_p$ , так как возрастает быстрее, чем  $\alpha_p$ .

В каких пределах изменяется  $q_p$ ?  $0 < q_p < 1$ . Для низкопрочных и пластичных материалов,  $q_p$  приближается к нулю, а для высокопрочных – к единице. Для  $q_p$  имеются данные в справочниках и по нему находится:

$$\kappa_p = 1 + q_p \cdot (\alpha_p - 1).$$

Однако, по этой формуле получаются не очень точные значения  $\kappa_p$ , поэтому для наиболее распространённых концентраторов напряжений, лучше брать  $\kappa_p$ , из справочников. Если же концентратор новый, и для него известно только  $\alpha_p$ , то приходится пользоваться, этой формулой.

Таким образом, расчёт на прочность деталей из пластичных материалов при переменных напряжениях нужно вести, по номинальным напряжениям, увеличенным в  $\kappa_p$  раз, что следует из формулы  $\kappa_p = \frac{P_{-1}}{P_{-1\kappa}}$ .

4 случай: напряжения переменны, деталь из хрупкого материала. Так как деталь из хрупкого материала, то пластических деформаций нет, выравнивания напряжений по сечению нет, и быть не может, поэтому  $\kappa_p = \alpha_p$ , тогда  $q_p = 1$ . Это предельный случай. Здесь тоже исключение для серого чугуна –  $q_p = 0$ ,  $\kappa_p = 1$ .

Таким образом, при переменных напряжениях, для деталей из хрупкого материала, расчёт на прочность нужно вести по местным напряжениям, то есть с допускаемыми напряжениями нужно сравнивать  $p_{\text{наиб}} = \alpha_p \cdot p_{\text{ном}}$ .

#### 4.5. Предел выносливости детали при симметричном цикле

Предел выносливости детали также определяется экспериментальным путём. Оборудование применяется, несомненно, более сложное. Чаще, испытания ведут на вибростендах.

Предел выносливости деталей отличается от предела выносливости материала, так как детали имеют концентраторы напряжений, большие размеры, обработку, отличную от полирования, подвергаются упрочнению и другие факторы (работа в коррозионной среде, в вакууме и так далее).

Чаще всего, приходится учитывать четыре фактора:

- 1) концентраторы напряжений;
- 2) размеры поперечного сечения;
- 3) шероховатость поверхности;
- 4) поверхностное упрочнение.

С учётом этих четырёх факторов, предел выносливости детали при симметричном цикле, вычисляется по следующей формуле:

$$p_{-1}^{dem} = \frac{k_d \cdot k_F \cdot k_v}{k_p} \cdot p_{-1}$$

Здесь  $p_{-1}$  – предел выносливости материала;

$k_p$  – эффективный коэффициент концентрации напряжений;

$k_d$  – коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения – это отношение предела выносливости гладких образцов диаметром  $d$  к пределу выносливости гладких стандартных образцов. Этот коэффициент зависит:

1) от поперечных размеров детали – при увеличении поперечного размера коэффициент  $k_d$  возрастает,

2) от предела прочности материала – при увеличении  $\sigma_b$  коэффициент  $k_d$  уменьшается,

3) от коэффициента концентрации напряжений – при увеличении  $k_p$  коэффициент  $k_d$  уменьшается.  $0,5 \leq k_d \leq 1$ ;

$k_F$  – коэффициент влияния шероховатости поверхности – это отношение предела выносливости образцов с данной шероховатостью поверхности к пределу выносливости стандартных (полированных) образцов. Этот коэффициент зависит:

1) от вида обработки поверхности: чем тщательнее обработана поверхность, тем он выше;

2) коэффициент  $k_F$  зависит от материала: при увеличении предела

прочности материала,  $k_F$  уменьшается, так как с увеличением  $\sigma_B$  шероховатость, как концентратор напряжения, сказывается, в большей степени; величина коэффициента  $k_F < 1$ .

$k_v$  – коэффициент влияния поверхностного упрочнения – отношение предела выносливости упрочнённых образцов к пределу выносливости неупрочнённых образцов. Этот коэффициент зависит:

- 1) от вида упрочняющей обработки,
- 2) от материала - при увеличении предела прочности материала  $k_v$  возрастает,
- 3) от коэффициента концентрации напряжений - при увеличении  $k_p$  возрастает и  $k_v$ . величина коэффициента  $k_v > 1$ .

#### 4.6. Предел выносливости детали при асимметричном цикле

И в этом случае, предел выносливости детали определяется экспериментальным путём. Провести эти эксперименты, естественно, сложнее, чем при симметричном цикле. Таких проведённых опытов, сравнительно мало. Те же опыты, которые проведены, показали, что концентрация напряжений, размеры детали, шероховатость поверхности и упрочнение поверхности оказывают влияние только на переменную составляющую цикла напряжений и влияют эти факторы на переменную составляющую так же, как и при симметричном цикле. Эти коэффициенты приведены в справочниках.

Всё вышесказанное, касается деталей из пластичных материалов. Детали из хрупких материалов мы не рассматриваем, так как их в авиации нет, но для деталей из хрупких материалов, указанные факторы оказывают влияние и на постоянную составляющую цикла напряжений.

Изобразим диаграмму предельных амплитуд цикла для материала (рис. 4.15, а). Обозначения – общие:

$M_R$  – точка, соответствующая одному из предельных циклов,  $P_{R_n}$ ,

$P_{R_n}$  – параметры предельного цикла.

Далее изобразим диаграмму предельных амплитуд цикла для деталей из пластичного материала (рис. 4.15, б). Две точки нам известны:

первая точка – при  $P_{R_n} = 0$ , имеем симметричный цикл, тогда

$P_{R_n} = p_{-1} / K$ , где  $K$  – коэффициент снижения предела выносливости –

это отношение предела выносливости стандартных лабораторных образцов (материала) к пределу выносливости детали, при одинаковой асимметрии цикла.

$$K = \frac{k_p}{k_d \cdot k_F \cdot k_v}$$

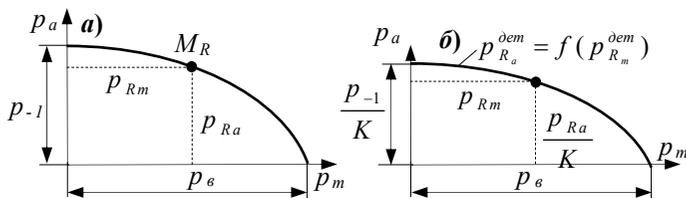


Рис. 4.15. Диаграммы предельных амплитуд цикла напряжений для материала и детали

Вторая точка — при  $p_{Ra} = 0$ ,  $p_{Rm} = p_B$  — статическое нагружение.

Эта запись справедлива только для деталей из пластичного материала. Для деталей из хрупкого материала второй точкой будет не  $p_{Rm} = p_B$ , а  $p_{Rm} = p_B/\alpha_p$ .

Промежуточные точки получим, используя диаграмму предельных амплитуд цикла для материала. Откладываем значение  $p_{Rm}$ , а ордината,  $p_{Ra}/K$ , так можно получить точки для любого  $p_{Rm}$ . Для деталей из хрупкого материала второй точкой будет не  $p_{Rm} = p_B$ , а  $p_{Rm} = p_B/\alpha_p$ . Так мы построим диаграмму предельных амплитуд цикла для детали из пластичного материала.

Для вывода расчётных зависимостей необходимо представить диаграмму предельных амплитуд, теоретически. При этом, кривую, заменим прямой. На практике применяются две схематизации:

Схематизация 1 (рис. 4.16, а) (на рисунке – штриховая линия) – применяется для расчета стационарных машин. По этой схематизации возможности материала занижены.

При расчёте деталей летательных аппаратов и их двигателей, применяется более точная схематизация 2 (рис. 4.16, а – сплошная прямая), предложенная советскими учёными С.В. Серенсенем и Р.С. Кинасошвили (ЦИАМ). В первой части диаграммы, возможности детали занижены незначительно, во второй – завышены, но они не

используются, так как там, опасными являются, напряжения по текучести.

Рассмотрим подробно схематизацию 2.

Вначале для материала. За предельный цикл, через который производится схематизация, принимается положительный отнулевой цикл (рис. 4.16, б).

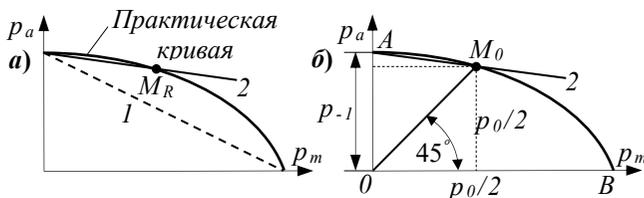


Рис. 4.16. Схематизация диаграммы предельных амплитуд цикла напряжений для материала

Точка  $M_0$  (рис. 4.16, б) соответствует от нулевому циклу, при этом цикле предел выносливости –  $p_0$ , тогда  $p_{R_m} = p_{R_a} = p_0/2$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1-R}{1+R} = 1$ , следовательно,  $\beta = 45^\circ$ .

Под углом  $45^\circ$  из начала координат проводим прямую до пересечения с предельной кривой, а также прямую 2 из точки  $A$  через полученную точку  $M_0$ . Почему, через эту точку? Потому что, во-первых, она проходит возле границы, до которой используется диаграмма и, во-вторых, предел выносливости при отнулевом цикле является основной механической характеристикой, которая так же, как и  $p_{-1}$ , определяется сравнительно просто при испытаниях на усталость (но первая причина, является наиболее важной).

Таким образом, по результатам испытаний при симметричном и от нулевом циклах мы получили схематизированную диаграмму предельных амплитуд цикла напряжений для материала.

Теперь перейдём, к диаграмме предельных амплитуд цикла напряжений для детали из пластичного материала (рис. 4.17).

Следует обратить внимание на то, что для детали точка, через которую проходит схематизированная прямая, – это уже не соответствует положительному отнулевому циклу.

Для дальнейших выводов удобнее пользоваться отрезком  $OE$ . Выведем формулу для этого отрезка:

$$\frac{OE}{\frac{p_{-1}}{K}} = \frac{OE - \frac{p_0}{2}}{\frac{p_0}{2K}} \Rightarrow OE = \frac{p_{-1}}{\frac{2p_{-1} - p_0}{p_0}}$$

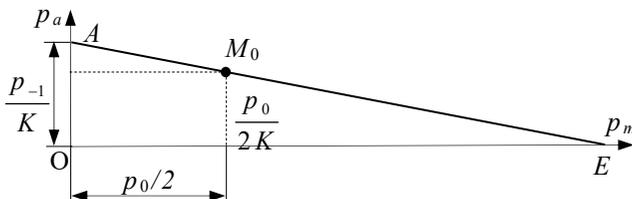


Рис. 4.17. Схематизированная диаграмма предельных амплитуд цикла для детали

Обозначим:  $\psi_p = \frac{2p_{-1} - p_0}{p_0}$  — коэффициент чувствительности

**материала к асимметрии цикла напряжений.**

Чем больше  $\psi_p$ , тем меньше  $OE$ , тем в большей степени предельная амплитуда убывает в зависимости от асимметрии цикла. Окончательно:

$$OE = \frac{p_{-1}}{\psi_p},$$

где  $\psi_p$  — новая механическая характеристика материала  $f(p_{-1}, p_0, \psi_p)$ .

$\psi_p$  зависит: 1) прежде всего, от материала — чем выше предел прочности  $p_b$  тем больше, то есть чем выше прочность материала, тем более он чувствителен, к асимметрии цикла;

2) от типа деформации (для одного и того же материала  $\psi_\sigma \approx 2 \cdot \psi_\tau$ ).

Значения этого коэффициента приводятся в справочниках.

Заключение: мы получили схематизированную диаграмму предельных амплитуд цикла в виде прямой, которая отсекает на оси ординат

$$p_{R_a} = p_{-1}/K, \text{ а на оси абсцисс — } OE = p_{-1}/\psi_p.$$



Теперь приступим к выводу формулы для коэффициента запаса. Пусть в точке детали, для которой вычисляется коэффициент запаса, действуют напряжения, параметры которых  $p_m, p_a$ . Изобразим точку  $M(p_m, p_a)$ .

Спрашивается, с каким предельным циклом сравнивать данный цикл? Существует правило: заданный цикл сравнивается с подобным предельным циклом, так как во многих случаях, переход к предельному циклу при возрастании внешних сил происходит, как правило, при пропорциональном изменении параметров цикла. Правда, так бывает, не всегда. Изобразим точку  $M_R$ , соответствующую предельному циклу, подобному заданному, с которой мы будем сравнивать заданный цикл  $OK = p_{R_m}, KM_R = p_{R_a}$ .

Далее найдём коэффициент запаса,  $n_R$  – коэффициент запаса по усталостному разрушению (есть ещё, по текучести).

$$n_R = \frac{p_R}{p_{\max}} = \frac{p_{R_a} + p_{R_m}}{p_a + p_m} = \frac{p_{R_a} \cdot \left(1 + \frac{p_{R_m}}{p_{R_a}}\right)}{p_a \cdot \left(1 + \frac{p_m}{p_a}\right)} = \frac{KM_R}{DM}.$$

Мы рассматриваем случай, когда среднее напряжение положительное, поэтому  $p_{R_m}$  без знака абсолютной величины.

Из условия подобия треугольников  $OM_RK$  и  $OMD$  –  $\frac{KM_R}{DM} = \frac{OM_R}{OM}$ ,

тогда

$$n_R = \frac{KM_R}{DM}$$

– эта формула используется для графического определения коэффициента запаса по усталостному разрушению (по усталости).

Выведем аналитическую зависимость. Через точку  $M$  проведём прямую  $PQ$ , параллельную прямой  $AE$ :  $PQ$  – линия равноопасных циклов. Точки на этой прямой соответствуют циклам с одинаковым коэффициентом запаса. Из подобия треугольников  $OM_RE$  и  $OMQ$

$$\frac{KM_R}{DM} = \frac{OE}{OQ} = \frac{OE}{OD + DQ},$$

отрезок  $DQ$  найдём из подобия треугольников  $OAE$  и  $DMQ$

$$\frac{OE}{OA} = \frac{DQ}{DM}, \Rightarrow DQ = DM \cdot \frac{OE}{OA}, \text{ тогда}$$

$$\frac{KM_R}{DM} = \frac{OE}{OD + DM \cdot \frac{OE}{OA}} = \frac{1}{\frac{OD}{OE} + \frac{DM}{OA}} = \frac{1}{\frac{p_m}{p_{-1}} + \frac{p_a}{K}}, \text{ отсюда}$$

$$n_R = \frac{p_{-1}}{K \cdot p_a + \psi_p \cdot p_m}.$$

– формула для коэффициента запаса по усталостному разрушению.

Эта формула справедлива для положительного среднего напряжения цикла, то есть при  $p_m > 0$ .

Здесь

$$K = \frac{k_p}{k_d \cdot k_F \cdot k_v}.$$

Возникает вопрос: как быть, если средние напряжения сжимающие ( $p_m < 0$ )? Экспериментальных данных мало, они противоречивы. С.В. Серенсен предложил: при  $p_m > 0$ ,  $\psi_p$  нужно брать из таблиц, а при  $p_m < 0$  –  $\psi_p = 0$ . Если считать, что  $\psi_p = 0$ , отрезок  $OE$  влево, будет бесконечно большим, то есть диаграмма предельных амплитуд цикла – прямая, параллельная оси  $p_m$ .

По Иванову С.И.  $\psi_p = 0$  при небольших сжимающих средних напряжениях. Если напряжения большие, то предлагается поступить следующим образом:

$$n_R = \frac{p_{-1}}{K \cdot p_a + \psi_p \cdot |p_m|},$$

то есть диаграмма симметрична относительно начала координат. А как, фактически? Очевидно, по штриховой линии (рис. 4.19).

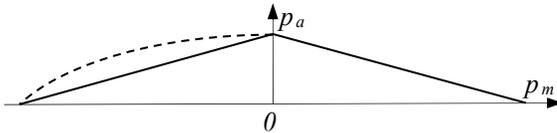


Рис. 4.19. Определение коэффициента запаса при сжимающих средних напряжениях

Возвращаемся к рисунку 4.18. Мы рассмотрели точку  $M_R$ , когда она лежит выше точки  $C$ . Если прямая пересекает диаграмму ниже точки  $C$ , тогда нужно вычислять коэффициент запаса по текучести

$$n_{\tau} = \frac{P_{\tau}}{P_a + |P_m|}.$$

Таким образом, если точка, соответствующая предельному циклу находится выше точки  $C$ , то коэффициент запаса вычисляется по усталостному разрушению, если ниже – по текучести. Но заранее неизвестно, где лежит точка  $C$ , поэтому вычисляются оба коэффициента запаса.

А в каких точках и сечениях детали, вычисляется  $n$ ? Коэффициент запаса вычисляется для самой опасной точки детали. Во-первых, там, где действуют наибольшие номинальные напряжения. Во-вторых, есть ещё, коэффициент  $K$ , поэтому, самой опасной, может оказаться точка, где есть концентрация напряжений.

Поэтому, при расчёте деталей на прочность, коэффициенты запаса вычисляют:

- 1) в точках с наибольшими номинальными напряжениями;
- 2) в точках с концентрацией напряжений.

Затем принимается наименьший из коэффициентов запаса – это и будет, коэффициент запаса детали. Точка с наименьшим коэффициентом запаса – самая опасная точка детали. Именно в ней произойдёт разрушение детали, при увеличении переменных напряжений.

Для коэффициентов запаса есть нормы, которые для деталей авиационных двигателей выпускает ЦИАМ, а для деталей планера – ЦАГИ. В справочниках содержатся необходимые данные по коэффициентам запаса для различных видов деталей:  $n = 1,2 \dots 3,0$ .

Коэффициенты запаса  $n$  установлены на основании горького опыта. Сломается деталь — коэффициент запаса повышается, не сломается – понижается. Например, для авиа трубопроводов, коэффициент запаса  $n = 3,0$ .

#### 4.8. Расчёт на прочность при переменных напряжениях в случае сложного напряжённого состояния

Как и при простом напряжённом состоянии, предстоит вывести формулы, для определения коэффициентов запаса по усталостному разрушению  $n_R$  и по текучести  $n_t$ . Экспериментальных данных при сложном напряжённом состоянии мало – это весьма сложные и дорогостоящие опыты, поэтому их проводилось мало. Обычно, для оценки прочности, используют статические теории прочности. Будем обобщать статические теории прочности, для переменных напряжений.

Об опытах, которые проведены при сложном напряжённом состоянии.

1) Довольно подробные опыты проведены при кручении с изгибом. Напомним тип напряжённого состояния при кручении с изгибом (рис. 4.20, а).

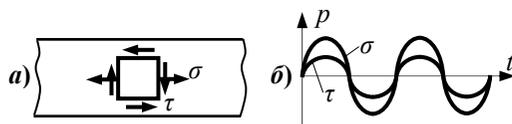


Рис. 4.20. Изменение напряжений при изгибе с кручением

2) Эти опыты проводились на лабораторных образцах, то есть изучалась усталость материала.

3) Испытания на усталость проводились при симметричном цикле изменения компонент и синфазном изменении нормальных и касательных напряжений. Покажем график изменения напряжений (рис. 4.20, б).

Покажем результаты испытаний на усталость, в виде диаграммы  $\sigma - \tau$ . Нам предстоит показать полученную, в результате испытаний на усталость, зависимость  $\tau_{R_a} = f(\sigma_{R_a})$ , то есть, как влияют напряжения изгиба, на предельные напряжения при кручении. Две точки диаграммы известны до проведения испытаний на усталость при сложном напряжённом состоянии (рис. 4.21):

- 1) при  $\sigma_{R_a} = 0$ ,  $\tau_{R_a} = \tau_{-1}$ , то есть имеет место, только кручение,
- 2) при  $\tau_{R_a} = 0$ ,  $\sigma_{R_a} = \sigma_{-1}$ , то есть имеет место, только изгиб.

Для получения каждой промежуточной точки испытывается партия стандартных лабораторных образцов. Напряжения изгиба в каждой партии одинаковы, а напряжения кручения изменяются. Определяется  $\tau_{R_a}$  для заданного

напряжения изгиба и строится диаграмма предельных амплитуд циклов. Кривая оказывается близкой к эллипсу, поэтому её можно представить аналитически:

$$\frac{\sigma_{R_a}^2}{\sigma_{-1}^2} = \frac{\sigma_{R_a}^2}{\sigma_{-1}^2} = 1 - \text{уравнение предельной кривой } \tau_{R_a} = f(\sigma_{R_a}). \text{ Установ-$$

лено, что эта зависимость достаточно хорошо подтверждается для многих материалов.

Используя уравнение предельной кривой, получим формулу для коэффициента запаса. Здесь логично сравнивать эквивалентные напряжения, взятые, по той или иной теории прочности, например, по IV теории, так как материалы, используемые в авиа- и двигателестроении, как правило, пластичные

$$n_R = \frac{(\sigma_{\text{экв IV}})_R}{\sigma_{\text{экв IV}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{R_a}^2 + 3 \cdot \tau_{R_a}^2}}{\sqrt{\sigma_a^2 + 3 \cdot \tau_a^2}}.$$

Возникает вопрос, с каким предельным циклом следует сравнивать заданный цикл? Возвращаемся к диаграмме предельных амплитуд циклов (см. рис. 4.21). Как и при простых деформациях, здесь принято считать, что движение к предельному циклу, происходит при пропорциональном изменении компонент напряжённого состояния. Если основываться на этом предположении (допущении), то нужно провести прямую из начала координат через точку  $M(\sigma_a, \tau_a)$ , найти предельную точку  $M_R$  и подсчитать

$$\sqrt{\sigma_{R_a}^2 + 3 \cdot \tau_{R_a}^2} = \sigma_{R_a} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{\tau_{R_a}^2}{\sigma_{R_a}^2}} = \tau_{R_a} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{R_a}^2}{\tau_{R_a}^2} + 3}.$$

Такую же операцию можно проделать и со знаменателем, тогда

$$n_R = \frac{\sigma_{R_a}}{\sigma_a} = \frac{\tau_{R_a}}{\tau_a}, \text{ так как } \frac{\sigma_{R_a}}{\tau_{R_a}} = \frac{\sigma_a}{\tau_a}.$$

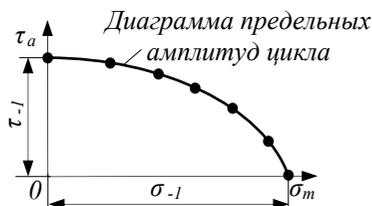


Рис. 4.21. Диаграмма предельных амплитуд цикла при сложном сопротивлении

Далее необходимо выразить  $\sigma_{R_a}$  и  $\tau_{R_a}$  с помощью уравнения предельной кривой: для этого первое слагаемое делим на  $\sigma_a$ , а второе – на  $\tau_a$

$$\frac{\left(\frac{\sigma_{R_a}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{R_a}}{\tau_a}\right)^2}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_a}\right)^2} = 1,$$

но  $\frac{\sigma_{R_a}}{\sigma_a} = n_R$ ,  $\frac{\tau_{R_a}}{\tau_a} = n_R$ ,  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} = n_\sigma$  – парциальный коэффициент запаса

по нормальным напряжениям,  $\frac{\tau_{-1}}{\tau_a} = n_\tau$  – парциальный коэффициент

запаса по касательным напряжениям, тогда  $\frac{n_R^2}{n_\sigma^2} = \frac{n_R^2}{n_\tau^2} = 1$  или

$\frac{1}{n_\sigma^2} = \frac{1}{n_\tau^2} = \frac{1}{n_R^2}$ , далее, разрешив зависимость относительно  $n_R$ , получим

$$n_R = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}$$

– окончательная формула для коэффициента запаса по усталостному разрушению при кручении с изгибом.

Эта формула получена по результатам обработки экспериментальных данных с лабораторными образцами при симметричном цикле и синфазном изменении нормальных и касательных напряжений.

Были проведены опыты (С.В. Серенсен) на деталях, чтобы выяснить, можно ли использовать полученную формулу в более сложных случаях. Оказалось, что можно, так как заметных ошибок не возникает.

Поэтому, полученную формулу будем применять, и для деталей при несимметричных циклах и несинфазном изменении нормальных и касательных напряжений – опыты, это подтверждают.

Парциальные коэффициенты запаса определяются по формулам

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_a + \psi_p \cdot |\sigma_m|}, \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K \cdot \tau_a + \psi_p \cdot |\tau_m|}.$$

Далее нужно вычислить коэффициент запаса по текуčnosti

$$n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}}.$$

А как получить  $\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}}$ , когда силы изменяются не синфазно? Для этого нужно определить  $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$  и построить график изменения  $\sigma_{\text{экв IV}}$  (рис. 4.22) по времени. Так поступают в общем случае.

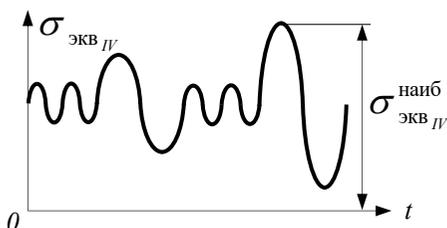


Рис. 4.22. Эквивалентные напряжения при несинфазном нагружении

При синфазном изменении нормальных и касательных напряжений график строить не нужно. В этом случае

$$\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{наиб}} = \sqrt{|\sigma|_{\text{наиб}}^2 + 3 \cdot |\tau|_{\text{наиб}}^2}.$$

Напряжения взяты по абсолютной величине, так как может быть изменение напряжений в противофазе.

Меньшее из двух коэффициентов запаса  $n_R$  и  $n_{\tau}$  будет коэффициентом запаса в исследуемой точке. В деталях приходится искать коэффициенты запаса в нескольких опасных точках – самой опасной будет та точка, где коэффициент запаса, наименьший.

#### 4.9. Практические способы борьбы с усталостным разрушением

Существуют конструктивные, технологические, эксплуатационные, металлургические и профилактические мероприятия по повышению несущей способности и долговечности деталей, работающих при переменных напряжениях. Остановимся на некоторых мероприятиях, наиболее часто используемых, на практике.

**Конструктивные мероприятия** сводятся, в основном, к уменьшению концентрации напряжений в местах нарушения призматической формы деталей (галтели, выточки, шпоночные пазы, шлицы, напрессованные на валы и оси втулки, отверстия и так далее). В галтельных переходах уменьшение концентрации напряжений достигается увеличением радиуса галтели. Если увеличение радиуса невоз-

можно, то галтель выполняют с поднутрением (рис. 4.23) или рядом с галтельным переходом изготавливают разгружающую канавку (рис. 4.24).

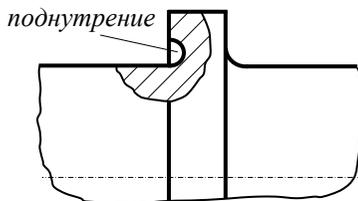


Рис. 4.23. Поднутрение

Уменьшение местных напряжений в шпоночных пазах достигается применением, при изготовлении паза, продольного фрезерования (рис. 4.25, а) в отличие, от торцевого (рис. 4.25, б). Использование эвольвентных шлицев по сравнению с прямоугольными приводит к существенному увеличению предела выносливости и долговечности вала.

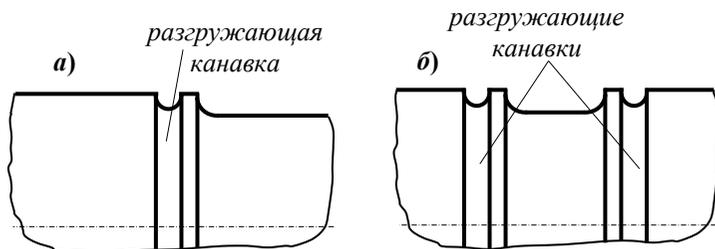


Рис. 4.24. Разгружающие канавки

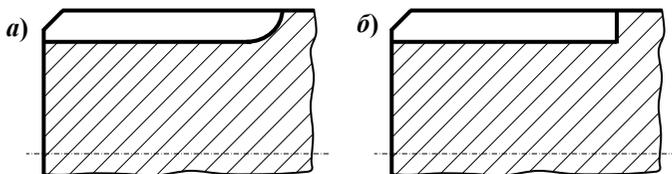


Рис. 4.25. Шпоночные пазы

Прочность вала с напрессованной втулкой можно повысить увеличением диаметра в месте запрессовки (рис. 4.26, а). Для вала с отверстием – применением разгружающих пазов (рис. 4.26, б) или разгружающих буртов, то есть увеличением диаметра вала в месте расположения отверстия (рис. 4.26, в).

**Технологические мероприятия** направлены на повышение качества поверхностного слоя деталей, особенно зон концентрации напряжений: тщательная обработка поверхности, защита поверхности различными покрытиями, создание благоприятного распределения остаточных напряжений. Наиболее простыми, дешёвыми и

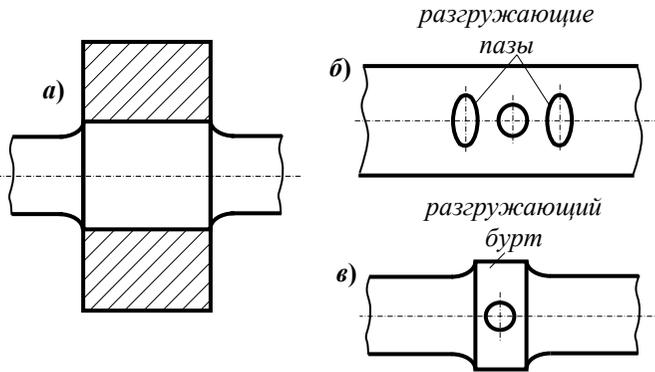


Рис. 4.26. Приёмы понижения концентрации напряжений

доступными методами повышения сопротивления усталости деталей являются методы поверхностного пластического деформирования (ППД). Чаще всего, при производстве деталей летательных аппаратов и двигателей применяются такие методы ППД, как гидро- и пневмо-дробеструйная обработка, обработка микрошариками, алмазное выглаживание, раскатка.

Поверхностным пластическим деформированием упрочнялось 21% всех деталей планера самолёта ТУ-154, в том числе: 38% – деталей шасси, 25% – крыла и оперения, 15% – мотогондолы, 11% – фюзеляжа, 5% – гондолы шасси.

При изготовлении деталей авиационных двигателей упрочнение ППД использовалось более широко. Так на двигателе "Е" конструкции Н.Д. Кузнецова упрочнялось до 70% всех деталей, в том числе: 94% – компрессора, 90% – деталей трубопроводов, 46% – турбины.

Для примера рассмотрим обработку деталей дробью, как наиболее часто применяемую в авиастроении, так как она позволяет упрочнять детали различной формы и размеров. На рисунке 4.27 показана схема упрочнения дробью.

Обрабатываемая деталь совершает вращательное и возвратно-поступательное движения. В среде воздуха или жидкости (масло, керосин, вода) на деталь направляется поток дроби (шариков). Дробь, ударяет о поверхность и вызывает пластические деформации, в результате которых, в поверхностном слое детали, возникают сжимающие остаточные напряжения. Остаточные напряжения, складываясь с растягивающими рабочими, уменьшают последние, что

приводит к повышению сопротивления усталости, так как цикл напряжений, смещается в область сжимающих средних напряжений, при которых увеличивается предельная амплитуда цикла. В результате суммирования, увеличиваются и сжимающие напряжения, однако, усталостная трещина распространяется, только под действием растягивающих напряжений, поэтому, увеличение сжимающих напряжений, не приводит к снижению сопротивления усталости.

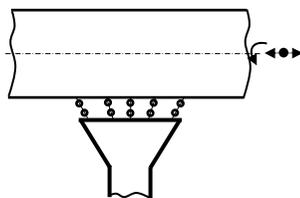


Рис. 4.27. Пластическое деформирование поверхности детали дробью

При использовании других методов ППД механизм упрочнения поверхностного слоя деталей, аналогичен рассмотренному.

**Металлургические мероприятия** сводятся к наиболее оптимальному выбору материала и термообработки, устранению закалочных трещин, усадочных раковин, газовых пузырей и включений. Сюда же может быть отнесена химико-термическая обработка, повышающая сопротивление усталости, за счёт создания в поверхностном слое деталей, сжимающих остаточных напряжений.

**Эксплуатационные мероприятия** включают в себя защиту поверхности от коррозии (окраска, смазка), предохранение наиболее напряжённых и ответственных деталей от повреждений (царапины, забои при сборке и разборке, истирание), предотвращение сверхнормативных перегрузок машин, обеспечение плавного пуска и остановок, предупреждение загрязнения рабочих поверхностей и связанных с этим, явлений износа, задирав.

**Профилактические мероприятия** предусматривают периодическое освидетельствование деталей с помощью современной дефектоскопической техники, смазку трущихся и замену износившихся деталей.

Использование всех рассмотренных мероприятий позволяет существенно повысить сопротивление усталости деталей, что влечёт за собой, увеличение ресурса и надёжности авиационной и космической техники.

#### 4.10 Вопросы для самопроверки

1. По каким причинам могут циклически изменяться напряжения в деталях? 2. В чём заключаются особенности сопротивления мате-

риалов действию циклически изменяющихся напряжений? 3. Как происходит разрушение деталей под действием циклически изменяющихся напряжений? 4. В чём заключается явление усталости? 5. Перечислите характеристики цикла переменных напряжений. 6. Как рассчитываются амплитуда и среднее напряжение цикла переменных напряжений? 7. Перечислите и нарисуйте разновидности циклов переменных напряжений. 8. Что называют пределом выносливости материала? Как его обозначают? 9. В чём заключается опытное определение предела выносливости материала при симметричном цикле изгиба? 10. Какой график, называют кривой усталости? Как его строят? 11. Какие циклы называют предельными? Как обозначаются параметры предельного цикла? 12. Как оценивают сопротивление усталости материала по диаграмме предельных амплитуд? 13. С какой целью и как проводят схематизацию диаграмм предельных амплитуд цикла напряжений для материала? 14. Каков порядок построения схематизированной диаграммы предельных амплитуд цикла для материала? 15. Какие отличия детали от стандартного образца учитывают при определении предела выносливости детали? 16. Как определяют коэффициент снижения предела выносливости детали? 17. Что такое концентрация напряжений? 18. Что показывает теоретический коэффициент концентрации напряжений? Как его определяют? 19. Что показывает эффективный коэффициент концентрации напряжений и как он влияет на предел выносливости детали? 20. Как влияют абсолютные размеры детали на её предел выносливости? 21. Как влияет состояние поверхности на предел выносливости детали? Как учитывают это влияние в расчётах на прочность? 22. Какие виды обработок называют упрочняющими и как учитывают их влияние на предел выносливости детали? 23. Как записывается условие прочности (в общем виде) при действии циклически изменяющихся напряжений? 24. Что представляют собой коэффициенты запаса по усталости и по текучести? Как определяют их графическим путём? 25. Как подсчитывают коэффициенты запаса по усталости и по текучести при линейном напряжённом состоянии и чистом сдвиге? 26. Как подсчитывают коэффициенты запаса по усталости и по текучести в случае сложного напряжённого состояния? 27. Какие мероприятия используют для повышения сопротивления усталости деталей?

## 5. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

### 5.1. Основные понятия об упругих колебаниях

Если упругую конструкцию или деталь, соединённую с конструкцией, вывести из положения равновесия и освободить, то она будет совершать собственные колебания. В детали будут действовать переменные напряжения. В этом случае усталостное разрушение не произойдёт, так как колебания, быстро затухают. Другое дело, когда на деталь действуют, периодически изменяющиеся силы. При этом, переменные напряжения, не затухают, и может произойти усталостное разрушение.

Особенно велика опасность, при резонансном режиме, когда частота изменения силы совпадает с собственной частотой колебаний детали. При резонансе, даже небольшие переменные силы, вызывают в детали, большие переменные напряжения. Поэтому нужно проектировать деталь таким образом, чтобы её собственная частота колебаний, значительно отличалась, от частоты изменения силы. В двигателях летательных аппаратов, например, периодически изменяющихся сил чрезвычайно много, имеется широкий спектр возмущающих частот, поэтому, уйти от резонанса не удаётся.

Нам предстоит решить две задачи:

- 1) определить частоту собственных колебаний, чтобы выяснить, будет ли резонанс, в конструкции;
- 2) определить переменные напряжения при колебаниях, чтобы вычислить коэффициент запаса детали по усталостному разрушению.

*Число степеней свободы упругого тела – определяется наименьшим числом независимых координат, которые вполне определяют, положение тела при колебаниях (движении). Это, фундаментальное понятие.*

В принципе, любая деформируемая конструкция, (тело) – система с бесконечным числом степеней свободы, так как, строго говоря, расстояние между точками тела, может изменяться. А практически, проще – конструкция состоит из нескольких частей с большой массой и жёсткостью, соединённых, между собой, деталями с небольшой массой и жёсткостью. Поэтому, достаточно знать ограниченное число степеней свободы. Приведём примеры:

**Пример 1** (рис. 5.1, а). Масса пружины мала по сравнению с массой  $m$  груза, поэтому, эту систему можно считать системой с одной степенью свободы.

**Пример 2** (рис. 5.1, б). Масса каждого груза  $m_1$  и  $m_2$  значительно больше массы балки, а для составления уравнений движения при колебаниях, достаточно знать прогибы  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Это, система с двумя степенями свободы.

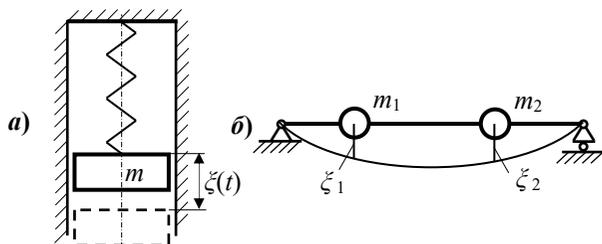


Рис. 5.1. Определение степеней свободы колебательной системы

## 5.2. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

Изобразим систему с одной степенью свободы (рис. 5.2, а). Предстоит установить закон движения и формулу для частоты собственных колебаний. Вспомним принцип Даламбера, из теоретической механики. Как он выглядит, применительно к упругим системам? Отрежем груз и покажем его, отдельно (рис. 5.2, б).

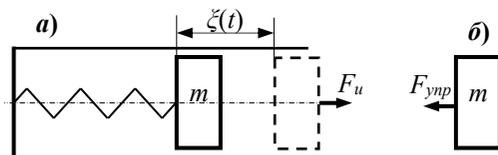


Рис. 5.2. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

$F_{\text{уп}} = C \cdot \xi(t)$  – сила упругости пропорциональна отклонению от положения равновесия,  $C = \frac{F_{\text{уп}}}{\xi(t)}$  – жёсткость связи (в данном случае, пружины) – это сила, вызывающая единичное перемещение. До сих

пор мы были знакомы с податливостью  $\delta = \frac{\xi(t)}{F_{\text{упр}}}$ . Сравнивая, видим, что  $C = \frac{1}{\delta}$ .

Запишем уравнение движения груза  $-m \cdot \xi''(t) + C \cdot \xi(t) = 0$ , тогда  $\xi(t) = -\frac{m \cdot \xi''(t)}{C}$ , но  $-m \cdot \xi''(t) = F_u$  и уравнение движения груза примет вид  $\xi(t) = \frac{F_u}{C}$ .

Правило применения принципа Даламбера применительно к упругим системам:

*Если упругую систему остановить и к действующим силам (в нашем случае, их нет) добавить силы инерции, то наблюдаемое перемещение можно рассматривать, как результат статического действия суммы этих сил.*

Теперь составим уравнение движения груза, используя принцип Даламбера (покажем на рисунке 5.2, а силу инерции  $F_u$ ).

$$F_u = -m \cdot \xi''(t), \quad \xi(t) = \frac{F_u}{C}, \quad F_u = \frac{m \cdot g}{\xi_{\text{ст}}} - \text{здесь жёсткость пред-}$$

ставлена через эффект действия груза,  $\xi_{\text{ст}}$  – перемещение, вызванное силой, равной силе веса груза, приложенной по направлению колебаний,

$$\text{тогда } \xi(t) = \frac{F_{\text{ст}}}{m \cdot g} \cdot \xi_{\text{ст}} = -\frac{\xi_{\text{ст}}}{g} \cdot \xi''(t). \text{ Отсюда}$$

$$\xi''(t) + \frac{g}{\xi_{\text{ст}}} \xi(t) = 0.$$

– дифференциальное уравнение колебания системы с одной степенью свободы.

Как решить это дифференциальное уравнение? Составляем характеристическое уравнение и находим его корни. Если проделать

всё это,  $\xi(t) = A \cdot \sin \sqrt{\frac{g}{\xi_{\text{ст}}}} t + B \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{\xi_{\text{ст}}}} t$ , свернув это уравнение по-

лучим

$$\xi(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда свободных колебаний;  $\varphi$  – начальная фаза колебаний;  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\xi_{ст}}}$  – круговая частота собственных колебаний с одной степенью свободы.  $A$  и  $\varphi$  находятся из начальных условий: при  $t = 0$   $\xi = \xi_0$ ,  $\xi' = \xi'_0$ .

Для расчёта на прочность  $A$  и  $\varphi$  интереса не представляют, поэтому остановимся на  $\omega$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\xi_{ст}}}$$

– универсальная формула для определения частоты собственных колебаний системы с одной степенью свободы – это круговая скорость вращения вектора, изображающего колебание.

Здесь:  $g$  – ускорение свободного падения (силы тяжести);  $\xi_{ст}$  – перемещение системы, вызванное статическим действием силы, равной силе веса груза, приложенной по направлению колебаний.

Частота собственных колебаний системы (в герцах) определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\xi_{ст}}}$$

### 5.3. Собственные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления

Это реальная задача, так как в реальных конструкциях. есть силы сопротивления, которые бывают либо внешними, либо внутренними.

**Внешние силы сопротивления** – сопротивление воздуха, например, сопротивление, которую оказывает воздух лопатке компрессора, при её колебаниях – пропорционально квадрату скорости. Сопротивление масляного слоя (например, в подшипниках скольжения) – пропорционально скорости в первой степени – это, так называемое, вязкое сопротивление. Сила сопротивления при сухом трении, от скорости не зависит, а зависит, от давления.

**Внутренние силы сопротивления** – они всегда есть и связаны с рассеянием энергии в материале, поэтому называются силами внутреннего трения. Они обусловлены силами, необходимыми для перемещения дислокаций. Силы внутреннего сопротивления, от скорости не зависят, а зависят, только от напряжений.

Наиболее подробно разработана математическая теория колеба-

ний при вязком сопротивлении. Все другие случаи сил сопротивления, обычно приводятся к вязкому сопротивлению, то есть математическая теория колебаний, разработанная для вязкого сопротивления, применяется, и для других видов сопротивления.

Изобразим систему с одной степенью свободы (рис. 5.3). Груз массой  $m$ , может перемещаться в направляющих. Нужно найти  $\zeta(t)$ , то есть закон, по которому изменяется перемещение, с течением времени. Воспользуемся принципом Даламбера. Для этого к действующим силам добавляем силу инерции и останавливаем систему.

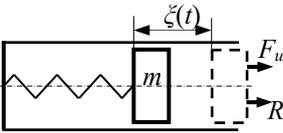


Рис. 5.3. Учёт сил сопротивления

Действующая сила – сила сопротивления (сила вязкого сопротивления) –

$$R = -\alpha \zeta(t), \text{ где } \alpha - \text{коэффициент пропорциональности. Добавляем силу инерции } F_u = -\alpha \zeta''(t).$$

После этого, останавливаем систему, и определяем перемещение в наблюдаемый момент времени, как результат статического действия всех сил. Следовательно, перемещение  $\zeta(t)$  вызвано этими двумя силами, поэтому  $\zeta = \delta \cdot (R + F_u)$ , здесь  $\delta$  – податливость системы – перемещение от силы, равной единице. Далее подставим значения сил и проведём преобразования

$$\frac{\zeta}{\delta} = -\alpha \cdot \zeta' - m \cdot \zeta'', \quad \Rightarrow \quad \zeta'' + \frac{\alpha}{m} \zeta' + \frac{1}{m \cdot \delta} \zeta = 0.$$

Обозначим  $\alpha/m = 2 \cdot n$ , где  $n$  – параметр затухания колебаний – он характеризует влияние сил сопротивления на собственные колебания;  $\frac{1}{m \cdot \delta} = \frac{g}{m \cdot g \cdot \delta} = \frac{g}{\xi_{ст}} = \omega^2$  – круговая частота собственных колебаний системы, при отсутствии сил сопротивления. Окончательно получим

$$\zeta'' + 2n \zeta' + \omega^2 \zeta = 0.$$

– дифференциальное уравнение затухающих колебаний (собственные колебания с затуханием).

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2nr + \omega^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -n \pm \sqrt{\omega^2 - n^2}.$$

Будем рассматривать случай сравнительно небольших сил сопротивления, когда  $n^2 < \omega^2$  тогда  $r_{1,2} = -n \pm i \cdot \omega_i$ , где  $\omega_i = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ .

Имея корни, можно записать решение уравнения

$$\xi = C_1 \cdot e^{(-n-i\omega_1)t} + C_2 \cdot e^{(-n+i\omega_1)t},$$

$e^{-n \cdot t}$  вынесем за скобку и выразив через тригонометрические функции, получим

$$\xi = C \cdot e^{-n \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (5.1)$$

Проанализируем полученное выражение. По аналогии с собственными колебаниями без затухания, величину, стоящую перед синусом, называют амплитудой затухающих колебаний  $C \cdot e^{-n \cdot t} = A_t$ .

$\omega_1$  – частота собственных колебаний при наличии сил сопротивления  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ , то есть  $\omega_1 < \omega$  и, чем больше силы сопротивления, тем больше, эта разница,  $\varphi$  – начальная фаза колебаний.

В нашем случае, две неизвестные величины  $C$  и  $\varphi$ . Они определяются из начальных условий: при  $t = 0$   $\xi = \xi_0$ ,  $\xi' = \xi'_0$ , например, отводим груз и отпускаем, тогда  $\xi_0 = \xi'_0 = 0$ . Для расчётов на прочность, эти величины не нужны.

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{C \cdot e^{-n \cdot t}}{C \cdot e^{-n \cdot (t+T)}} = e^{-n \cdot T} = const, \text{ то есть отношение любых двух}$$

амплитуд, следующих, одна за другой, через период, есть величина постоянная. Эти амплитуды составляют геометрическую прогрессию.

Отношение амплитуд может служить характеристикой влияния сил сопротивления, на затухающие колебания. Этой характеристикой ( $e^{-nT}$ ) пользоваться неудобно, поэтому рассматривается, не отношение амплитуд, а логарифм этого отношения, и обозначается  $\lambda$  – логарифмический декремент колебаний.

Как вычислить период колебаний?

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Теперь изобразим график изменения перемещений (рис. 5.4), то есть график функции (5.1). Величину  $\lambda$  довольно часто определяют по таким графикам, построенным по результатам опытов.

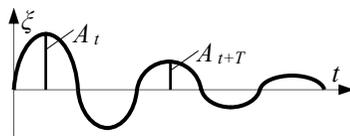


Рис. 5.4. Затухающие колебания

Далее, вернёмся к частоте собственных колебаний при наличии сил сопротивления  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ , – намного ли  $\omega_1 < \omega$ ?

Проведём оценку на примере: пусть  $A/A_{t+T} = 2$ , то есть

$\lambda = \ln 2$ , с другой стороны,  $\lambda = n \cdot T$ , или учитывая, что  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$  полу-

чим:  $n = \frac{\ln 2}{2\pi} \cdot \omega_1$ , тогда  $n^2 = 0,01217 \cdot \omega_1^2$ , или  $\omega_1^2 = \omega^2 - 0,01217 \cdot \omega_1^2$ ,

следовательно,  $\omega_1 = 0.9940 \omega$ .

Таким образом, несмотря на то, что силы сопротивления большие, разница между частотами, практически нет и, влиянием сил сопротивления, на частоту собственных колебаний системы можно пренебречь. Тогда

$$\omega_1 = \omega = \sqrt{\frac{g}{\xi_{ст}}}$$

#### 5.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления

Это основной, наиболее интересный случай.

Изобразим систему (рис. 5.5). На тело действует возмущающая периодическая сила  $F(t) = F_0 \cdot \cos \Omega t$ , где  $F_0$  – амплитуда возмущающей силы,  $\Omega$  – круговая частота изменения возмущающей силы. Пример возмущающей силы – несбалансированная масса ротора турбомашины.

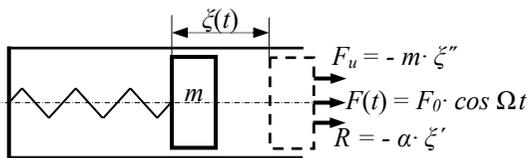


Рис. 5.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления

Мы ограничимся случаем простой гармонике, а если случай сложный, то нужно разложить в ряд Фурье.

Необходимо составить уравнение движения груза. Для этого снова воспользуемся принципом Даламбера. К действующим силам добавим силу инерции ( $F_u$ ), остановим систему (подчеркнём, что сила

сопротивления. приложена непосредственно к грузу, а не к связи) и считаем  $\xi(t)$  как результат статического действия суммы всех этих сил.

$\xi(t) = \delta \cdot [R + F_u + F(t)]$ , разделим на податливость  $\delta$ , подставим значения сил и произведём преобразования

$$\frac{\xi}{\delta} = -\alpha \cdot \xi' - m \cdot \xi'' + F_0 \cdot \cos \Omega t, \quad \Rightarrow \quad \xi'' + \frac{\alpha}{m} \xi' + \frac{1}{m \cdot \delta} \xi = F_0 \cdot \cos \Omega t.$$

Обозначим  $\alpha/m = 2 \cdot n$ ,  $\frac{1}{m \cdot \delta} = \omega^2$  и окончательно получим

$$\xi'' + 2n \xi' + \omega^2 \xi = F_0 \cdot \cos \Omega t$$

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

Сравниваем его с уравнением предыдущего раздела – они отличаются только правой частью, то есть это неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение ищется в виде  $\xi = \xi_{\text{одн}} + \xi_{\text{частн}}$ , где  $\xi_{\text{одн}} = C \cdot e^{-n \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$ . С течением времени  $\xi_{\text{одн}}$  уменьшается и поэтому этим слагаемым пренебрегают, тогда  $\xi = \xi_{\text{частн}}$ .

$\xi_{\text{частн}}$  ищем в виде  $\xi_{\text{частн}} = M \cdot \sin \Omega \cdot t + N \cdot \cos \Omega \cdot t$ .

Для определения  $M$  и  $N$  подставляем  $\xi_{\text{частн}}$  в исходное дифференциальное уравнение.

Запишем окончательное решение, объединив его в одной гармонике

$$\xi = A \cdot e^{-n \cdot t} \cdot \sin(\Omega t + \psi),$$

где  $A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2}}$  – амплитуда вынужденных колебаний;

$\Omega$  –

круговая частота вынужденных колебаний, то есть частота вынужденных колебаний совпадает с частотой возмущающей силы;

$\psi$  – начальная фаза колебаний – разность фаз перемещений и возмущающей силы, следовательно, перемещение отстаёт от возмущающей силы, на угол  $\psi$ . В расчётах на прочность, она не нужна.

Преобразуем формулу для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m \omega^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}$$

Обозначим  $\frac{2n}{\omega} = \gamma$  – коэффициент демпфирования. Этот коэффициент, так же, как и  $\lambda$  характеризует влияние сил сопротивления на колебания. Установим связь между  $\gamma$  и  $\lambda$

$$\gamma = \frac{2n}{\omega} = \frac{2 \cdot n \cdot T}{\omega \cdot T} = \frac{\lambda}{\pi}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\pi}.$$

Выясним физический смысл отношения  $\frac{F_0}{m \cdot \omega^2}$

$$\frac{F_0}{m \cdot \omega^2} = \frac{F_0}{m \cdot \frac{g}{\xi_{ст}}} = F_0 \cdot \frac{\xi_{ст}}{m \cdot g} = F_0 \cdot \delta = A_0.$$

$\xi_{ст}$  – перемещение от статической силы, равной силе веса груза, приложенной по направлению колебаний;

$A_0$  – равновесная амплитуда. Физический смысл – перемещение, которое вызывается статическим действием силы, равной амплитуде возмущающей силы. Обозначим

$$\frac{F_0}{m \omega^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} = \beta$$

– коэффициент усиления колебаний или динамический коэффициент, тогда

$$A = \beta \cdot A_0.$$

Физический смысл  $\beta$  – во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше равновесной амплитуды или:  $\beta$  показывает, во сколько раз изменяется, эффект действия постоянной силы, если её сделать, знакопеременной.

Подробнее рассмотрим: от чего зависит и как изменяется коэффициент усиления колебаний  $\beta$ :–  $\beta = \beta(\Omega/\omega, \gamma)$  Представим эту зависимость графически (рис. 5.6).

Рассмотрим пример:  $A_t/A_{t+T} = 2, \gamma = (\ln 2)/\pi = 0,221$ .

А какие значения принимает  $\gamma$  в реальных конструкциях? Для лопаток газовых турбин  $\gamma = 0,01$ ; для строительных конструкций –  $\gamma = 0,02 \dots 0,04$ .

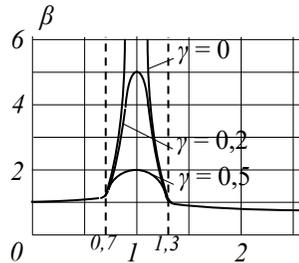


Рис. 5.6. Явление резонанса при колебаниях

Теперь вернёмся к коэффициенту  $\beta$ .

При  $\Omega \ll \beta \approx 1$ , в этом случае  $A \approx A_0$ .

При  $\Omega = \beta = \beta_{max} = 1/\gamma$  случай резонанса.

При  $\Omega \gg \omega$   $\beta \approx 0$  и, следовательно,  $A \approx 0$ . Эта особенность широко используется в технике. Например, упругое закрепление машин, установка их, на пружины, амортизаторы. Так, например, в холодильниках компрессор подвешивается на пружинах.

Тем самым:

$$\uparrow \xi_{ст} \Rightarrow \downarrow \omega \Rightarrow \uparrow \frac{\Omega}{\omega} \Rightarrow \beta \rightarrow 0.$$

В этом случае, при пуске и остановке машин (когда  $\Omega \gg \omega$ ) приходится проходить через резонанс, поэтому нужно это делать, очень быстро. Необходимо обратить внимание на то, что в резонансной зоне  $0,7 \leq \frac{\Omega}{\omega} \leq 1,3$  коэффициент усиления колебаний  $\beta$  увеличивается при уменьшении коэффициента демпфирования  $\gamma$ .

Вне резонансной зоны  $\frac{\Omega}{\omega} < 0,7$  или  $\frac{\Omega}{\omega} > 1,3$  все кривые сливаются. В этих областях силы сопротивления не оказывают влияния на  $\beta$ , поэтому  $\gamma = 0$  и тогда

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}.$$

### 5.5. Расчёт системы с одной степенью свободы на прочность при колебаниях

Это, по сути, итоговый вопрос. Изобразим систему с одной степенью свободы (рис. 5.7). На систему действуют сила сопротивления  $R$  и возмущающая сила  $F(t)$ . На прочность предстоит рассчитать

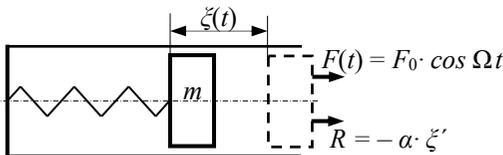


Рис. 5.7. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

упругую связь, так как прочность самого груза обеспечена в силу небольшой деформации груза. В нашем случае необходимо рассчитать пружину.

Вынужденные колебания происходят по закону  $\zeta(t) = A \cdot \cos(\Omega t - \psi)$  – перемещение отстаёт от силы. на угол  $\psi$ . Но  $A = \beta \cdot \delta \cdot F_0$ . Тогда  $\zeta(t) = \beta \cdot \delta \cdot F_0 \cdot \cos(\Omega t - \psi)$  – перемещение груза при вынужденных колебаниях.

Введём в рассмотрение ещё раз  $\zeta_{ст} = \delta \cdot m \cdot g$  – перемещение от силы, равной силе веса груза (рис. 5.8), при статическом его действии в направлении колебаний. В нашем случае, сила веса груза направлена вертикально, но для получения  $\zeta_{ст}$ , его нужно направить горизонтально.

Через  $p$  обозначим напряжение в упругой связи в любой точке на любой площадке. В нашем случае для пружины  $p = \tau$ .

Введём  $p_{ст}$  – напряжение в той же точке на той же площадке, но вызванное силой веса груза, направленной по линии колебаний.

Воспользуемся тем обстоятельством, что в упругих линейных системах напряжения пропорциональны перемещениям, так как и перемещения, как и напряжения, пропорциональны силам,

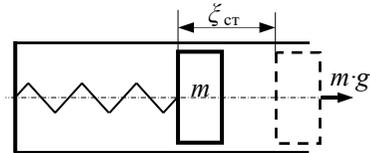


Рис. 5.8. Геометрический смысл  $\zeta_{ст}$

$$\frac{p}{p_{ст}} = \frac{\zeta}{\zeta_{ст}} \text{ а отношение } \frac{\zeta}{\zeta_{ст}} = \beta \cdot \frac{F_0}{m \cdot g} \cdot \cos(\Omega t - \psi), \text{ тогда}$$

$$p = \beta \cdot \frac{F_0}{m \cdot g} \cdot p_{ст} \cdot \cos(\Omega t - \psi)$$

– формула для напряжений в любой точке и на любой площадке при вынужденных колебаниях.

Видно, что с течением времени напряжения изменяются, поэтому расчёты на прочность нужно вести с использованием усталостных формул:

$$n_R = \frac{P_{-1}}{K \cdot p_a + \psi_p \cdot |p_m|}, \quad n_r = \frac{P_r}{p_a + |p_m|}.$$

Получим формулы для амплитуд и средних напряжений цикла. Из формулы для напряжений при вынужденных колебаниях видно, что множитель, стоящий перед косинусом, и будет амплитудой.

$$p_a = \beta \cdot \frac{P_0}{m \cdot g} \cdot p_{ст}$$

В нашем случае (при горизонтальных колебаниях,  $\alpha = 0$ )  $p_m = 0$ , при вертикальных колебаниях ( $\alpha = 90^\circ$ ) –  $p_m = p_{ст}$  (рис. 5.9), а если система будет наклонной, то  $p_m$  будет определяться через функцию угла наклона  $p_m = p_{ст} \cdot \sin \alpha$ .

С помощью этих формул можно вычислить коэффициенты запаса в любой точке, а в конечном счёте, вычислить коэффициенты запаса, для всей детали. Для этого нужно знать наиболее опасную точку – она будет там, где коэффициент запаса, наименьший.

Там, где знаменатели формул для коэффициентов запаса наибольшие, там и будет  $n_{наим}$ . Опасной может оказаться точка с максимальными  $p_m$  и  $p_a$ , но они пропорциональны  $p_{ст}$ . В знаменателе формулы для коэффициента запаса по усталостному разрушению, есть ещё коэффициент снижения предела выносливости

$K = \frac{K_p}{K_d \cdot K_F \cdot K_v}$  – знаменатель этого отношения  $K_d \cdot K_F \cdot K_v$  от

точки к точке не меняется, следовательно, здесь меняется только  $K_p$  в местах концентрации напряжений.

Поэтому коэффициенты запаса системы по усталостному разрушению и текучести вычисляются во всех точках с наибольшими статическими напряжениями и в местах концентрации напряжений. Коэффициентом запаса детали будет наименьший из этих коэффициентов.

Чтобы воспользоваться формулой для амплитуды напряжений цикла  $p_a$ , нужно определить коэффициент усиления колебаний

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}$$

Для этого необходимо найти значение коэффициента демпфирования  $\gamma$ . Для лопаток газовых турбин –  $\gamma = 0,01$ ; для строительных конструкций –  $\gamma = 0,02 - 0,04$ . Однако  $\gamma$  нужно знать не всегда.

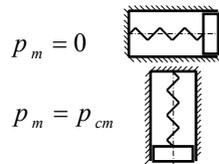


Рис. 5.9. Определение среднего напряжения

$\frac{\Omega}{\omega} < 0,7$  или  $\frac{\Omega}{\omega} > 1,3$ , то есть, если система работает вне резонансной зоны, то  $\gamma$ , не оказывает влияния на  $\beta$  и тогда

$$\beta = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|}.$$

Довольно часто эту формулу применяют и для околорезонансных режимов, если нет данных, для  $\gamma$ . В этом случае, погрешность расчёта идёт в запас прочности, так как мы пренебрегаем силами сопротивления, и полученные напряжения, несколько завышены. В авиации, так делать нежелательно и поэтому, стараются находить значения  $\gamma$ .

В расчётах на прочность при колебаниях, следует помнить два момента: 1) груз находится на конце связи; 2) сила сопротивления приложена к грузу. Эти допущения, общие.

### 5.6. Собственные колебания системы с несколькими степенями свободы

Рассмотрим случай, когда силы сопротивления отсутствуют. Так не бывает, но силы сопротивления, изменяют частоту собственных колебаний системы, незначительно.

Теорию изучим на примере системы с двумя степенями свободы (рис. 5.10). Пусть это будет, балка на двух опорах. Она расположена вертикально, чтобы отсутствовали средние напряжения.

Пусть  $(m \cdot g)_1, (m \cdot g)_2 \gg (m \cdot g)_0$  (значительно, по крайней мере, на порядок).

Покажем систему, в какой-то момент времени. Отметим перемещения при колебаниях  $\xi_1(t), \xi_2(t)$ . Их и нужно определить.

Воспользуемся принципом Даламбера. К действующим силам (а их, здесь нет) добавим силы инерции  $F_{ин_1} = -m \cdot \xi_1''$ ,  $F_{ин_2} = -m \cdot \xi_2''$ .

Далее систему останавливаем и считаем, что  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  вызваны силами инерции

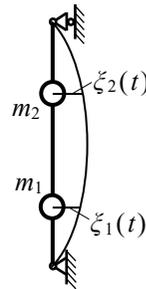


Рис. 5.10. Система с двумя степенями свободы

$$\xi_1 = \delta_{11} \cdot F_{\text{ин}_1} + \delta_{12} \cdot F_{\text{ин}_2},$$

$$\xi_2 = \delta_{21} \cdot F_{\text{ин}_1} + \delta_{22} \cdot F_{\text{ин}_2}.$$

Подставим значения сил инерции и приведём эти выражения к виду, в котором обычно записывают дифференциальные уравнения

$$\xi_1 = m_1 \cdot \delta_{11} \cdot F_{\text{ин}_1} + m_2 \cdot \delta_{12} \cdot F_{\text{ин}_2},$$

$$\xi_2 = m_1 \cdot \delta_{21} \cdot F_{\text{ин}_1} + m_2 \cdot \delta_{22} \cdot F_{\text{ин}_2}.$$

Перепишем эти выражения в виде, как принято записывать дифференциальные уравнения

$$m_1 \cdot \delta_{11} \cdot F_{\text{ин}_1} + m_2 \cdot \delta_{12} \cdot F_{\text{ин}_2} = 0,$$

$$m_1 \cdot \delta_{21} \cdot F_{\text{ин}_1} + m_2 \cdot \delta_{22} \cdot F_{\text{ин}_2} = 0.$$

– дифференциальные уравнения собственных колебаний системы с двумя степенями свободы. Они легко обобщаются для систем с  $n$  степенями свободы.

Это система однородных линейных дифференциальных уравнений. Будем искать решение в виде

$$\xi_1 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

$$\xi_2 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

Подставим эти предполагаемые решения в дифференциальные уравнения, поделив на  $\sin(\omega \cdot t + \varphi)$  и произведя преобразования, получим

$$(1 - m_1 \cdot \delta_{11} \cdot \omega^2) \cdot A_1 - m_2 \cdot \delta_{12} \cdot \omega^2 \cdot A_2 = 0,$$

$$-m_1 \cdot \delta_{21} \cdot \omega^2 \cdot A_1 + (1 - m_2 \cdot \delta_{22} \cdot \omega^2) \cdot A_2 = 0.$$

Это система алгебраических уравнений для определения  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\omega$ . Начальная фаза выпала. Мы получили однородные уравнения, поэтому есть нулевое решение, то есть  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ . Но нас интересует случай, когда  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2 \neq 0$ , а это будет тогда, когда определитель системы равен нулю, следовательно

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \cdot \delta_{11} \cdot \omega^2 & -m_2 \cdot \delta_{12} \cdot \omega^2 \\ -m_1 \cdot \delta_{21} \cdot \omega^2 & 1 - m_2 \cdot \delta_{22} \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

В это соотношение входит только  $\omega$ , поэтому это уравнение называется частотным или вековым, и записывается в форме определителя. Это уравнение, также легко обобщается, для систем с  $n$  степенями свободы. Раскроем определитель и найдём  $\omega$

$(1 - m_1 \cdot \delta_{11} \cdot \omega^2) \cdot (1 - m_2 \cdot \delta_{22} \cdot \omega^2) - m_1 \cdot m_2 \cdot \delta_{12}^2 \cdot \omega^4 = 0$ , сделаем преобразования

$(m_1 \cdot m_2 \cdot \delta_{11} \cdot \delta_{22} \cdot \omega^2 - m_1 \cdot m_2 \cdot \delta_{12}^2) \cdot \omega^4 - (m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22}) \cdot \omega^2 + 1 = 0$ . С ледовательно, уравнение приведено к стандартной форме. Решим это биквадратное уравнение:

$$\omega^2 = \frac{m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22} \pm \sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22})^2 - 4 m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2 m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}.$$

Это корни уравнения (вообще говоря, их четыре). Значение имеют два корня

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22} - \sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22})^2 + 4 m_1 \cdot m_2 \cdot \delta_{12}^2}}{2 m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}},$$

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22} + \sqrt{(m_1 \cdot \delta_{11} + m_2 \cdot \delta_{22})^2 + 4 m_1 \cdot m_2 \cdot \delta_{12}^2}}{2 m_1 \cdot m_2 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}.$$

то есть, система с двумя степенями свободы, имеет две частоты собственных колебаний:  $\omega_1$  – низшая частота колебаний – основной тон и  $\omega_{II}$  – высшая частота колебаний или обертон.

Система с  $n$  степенями свобод, имеет  $n$  частот собственных колебаний.

**Формой колебаний** называется совокупность перемещений при колебаниях или вид системы в момент наибольших перемещений при колебаниях.

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{m_2 \cdot \delta_{12} \cdot \omega^2}{1 - m_1 \cdot \delta_{11} \cdot \omega^2} = \frac{1 - m_2 \cdot \delta_{22} \cdot \omega^2}{m_1 \cdot \delta_{12} \cdot \omega^2}.$$

$$\frac{A_{1,I}}{A_{2,I}} = \frac{m_2 \cdot \delta_{12} \cdot \omega_1^2}{1 - m_1 \cdot \delta_{11} \cdot \omega_1^2} > 0 - \text{форма основного тона}$$

$$\frac{A_{1,II}}{A_{2,II}} = \frac{m_2 \cdot \delta_{12} \cdot \omega_{II}^2}{1 - m_1 \cdot \delta_{11} \cdot \omega_{II}^2} < 0 - \text{форма обертона.}$$

Покажем форму колебаний нашей системы (рис. 5.11) Составим решение уравнений

$$\xi_{1,II} = A_{1,II} \cdot \sin(\omega_{II} \cdot t + \varphi_{II}), \quad \xi_{1,I} = A_{1,I} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1),$$

$$\xi_{2,I} = A_{2,I} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1), \quad \xi_{2,II} = A_{2,II} \cdot \sin(\omega_{II} \cdot t + \varphi_{II}).$$

Это, главные колебания. Первый столбец, соответствует колебаниям с низшей частотой, а второй – с высшей частотой.



Рис. 5.11. Формы колебаний

Составим общее решение. Дифференциальным уравнениям будут удовлетворять  $\xi_{1,1}$ ,  $\xi_{1,II}$ ,  $\xi_{2,1}$ ,  $\xi_{2,II}$ , тогда

$$\xi_1 = A_{1,1} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A_{1,II} \cdot \sin(\omega_{II} \cdot t + \varphi_{II}),$$

$$\xi_2 = A_{2,1} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A_{2,II} \cdot \sin(\omega_{II} \cdot t + \varphi_{II}).$$

Это общее решение.

Проанализируем решение – это сумма гармонических уравнений: одно, с частотой  $\omega_1$  и другое – с частотой  $\omega_{II}$ . Собственные колебания будут неперiodическим движением, составленным из суммы двух гармонических уравнений.

Неизвестные величины  $A_{1,1}$ ,  $A_{1,II}$ ,  $A_{2,1}$ ,  $A_{2,II}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_{II}$  определяются из начальных условий: при  $t = 0$   $\xi_1 = \xi_{1,0}$ ,  $\xi_2 = \xi_{2,0}$ ,

$\xi'_1 = \xi'_{1,0}$ ,  $\xi'_2 = \xi'_{2,0}$  – четыре условия и есть ещё два соотношения,

которые мы знаем  $\frac{A_{1,1}}{A_{2,1}}$  и  $\frac{A_{1,II}}{A_{2,II}}$ . Таким образом мы имеем шесть

уравнении с шестью неизвестными из которых можно определить все неизвестные.

Спрашивается, с какой частотой будет колебаться система, если её вывести из положения равновесия? Если вывести систему из положения равновесия по форме, соответствующей  $\omega_1$ , то она будет колебаться по основному тону ( $\omega_1$ ), если по форме, соответствующей  $\omega_{II}$ , то – по обертону ( $\omega_{II}$ ),

Если же систему вывести из положения равновесия произвольным образом, то система будет совершать неперiodическое движение, которое можно рассматривать, как сумму двух перiodических движений.

Обобщение: Система с  $n$  степенями свободы имеет  $n$  частот собственных колебаний и может быть  $n$  резонансов для различных частот. Опасными являются колебания на основном тоне.

## 5.7 Вопросы для самопроверки

1. Как определяется степень свободы упругого тела? 2. Как формулируется принцип Даламбера применительно к упругим системам? 3. Как определяется частота собственных колебаний системы с одной степенью свободы? 4. Какой геометрический смысл имеет  $\zeta_{ст}$  при определении частоты собственных колебаний системы с одной степенью свободы? 5. Какие силы сопротивления могут возникать при колебаниях упругих систем и как они определяются? 6. Как определяется коэффициент усиления колебаний  $\beta$  при вынужденных колебаниях? 7. Как оценивается прочность систем с одной степенью свободы при вынужденных колебаниях?

## 6. УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

### 6.1. Перемещения, напряжения и расчёт на прочность при ударе

Ударное нагружение происходит тогда, когда скорость конструкции или соприкасающихся тел, изменяется на значительную величину, за небольшой промежуток времени.

Примеры: забивка свай в грунт. Свая испытывает ударное нагружение, так как скорость бабы изменяется, за короткий промежуток времени, до нуля. При ковке, штамповке, детали испытывают ударное нагружение. Самолёт при посадке, испытывает ударное нагружение.

При ударном нагружении наблюдаются большие ускорения, а там, где большие ускорения, там возникают большие силы инерции, которые приводят к большим напряжениям. Как определить силы и напряжения, при ударе? В принципе, можно воспользоваться принципом Даламбера, но для этого, нужно знать ускорение всех точек соударяющихся деталей. Задача определения ускорения чрезвычайно сложна, во многих случаях, она не решается, поэтому, использовать принцип Даламбера невозможно и поставленная задача решается приближённым методом баланса энергий.

Теперь перейдем непосредственно к ударному нагружению. Представим систему в виде шайбы и пружины – конструкцию, испытывающую удар от падающего груза.

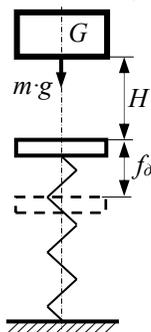


Рис. 6.1 Расчётная схема ударного нагружения

Пружина с шайбой – ударяемое тело, а груз – ударяющее (рис. 6.1).

Воспользуемся допущениями:

1) Будем рассматривать случай, когда  $m \gg m_{\text{пр}}$ , благодаря чему, задача упрощается. Учёт веса пружины приведёт к уменьшению расчётных напряжений или, иначе говоря, если не учитывать вес ударяемого тела, то получим несколько завышенное напряжение и, следовательно, принятое допущение, идёт в запас прочности (при учёте веса

пружины:  $\Pi_1 = \frac{\Pi}{1 + \alpha \cdot \frac{m_{\text{уп}}}{m}}$ , где  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий неоднородность скоростей соударяющихся тел).

наковость скоростей соударяющихся тел).

2) Удар происходит, с прилипанием груза. Это так называемый неупругий удар, то есть, пренебрегаем рассеянием энергии, за счёт колебаний. Это, не совсем точно, но результаты получаются удовлетворительные. (Кроме того, не учитывается тепловая энергия, выделяемая в момент удара, энергия от деформации основания и ударяющего груза).

Покажем положение ударяемой системы в момент наибольшего отклонения  $f_d$  (рис. 6.1) – это наиболее интересный момент, так как в этом положении ударяемой системы, будут самые большие напряжения. После удара, система будет испытывать затухающие колебания.

Получим формулу для  $f_d$ , используя соображения баланса энергий. Запишем выражение для энергии, которую потерял груз к моменту наибольшего отклонения.  $\Pi = m \cdot g \cdot (H + f_d)$  – эта потенциальная энергия перешла в энергию деформации пружины.

Нам предстоит энергию деформации выразить через  $f_d$ . Напомним задачу о статическом нагружении пружины (рис. 6.2). Формула для энергии деформации:

$$U = A_F = \frac{1}{2} F \cdot f_d, \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\delta},$$

где  $\lambda$  – осадка пружины,  $\delta$  – податливость пружины.

Применим последнюю формулу для определения энергии деформации пружины при ударе.  $U_d = f_d^2 / 2\delta$  – это возможно, так как мы пренебрегли инерцией ударяемой системы.

Уравнение баланса энергий:

$$\Pi = U_d, \quad \Rightarrow \quad m \cdot g \cdot (H + f_d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_d^2}{\delta}, \quad \Rightarrow \quad f_d^2 - 2m \cdot g \cdot f_d - 2\delta \cdot m \cdot g \cdot H = 0,$$

но  $\delta \cdot m \cdot g = f_{\text{ст}}$  – перемещение от силы, равной весу груза, приложенной статически, по направлению удара. С  $f_{\text{ст}}$  мы сталкивались при рассмотрении колебаний. Тогда уравнение удара запишется в виде:

$$f_d^2 - 2f_{\text{ст}} \cdot f_d - 2f_{\text{ст}} \cdot H = 0.$$

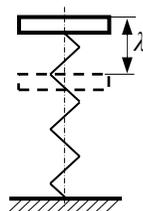


Рис. 6.2. Наибольшее отклонение при ударе

Решение этого уравнения имеет вид.

$$f_{\text{д}} = f_{\text{ст}} \pm \sqrt{f_{\text{ст}}^2 + 2f_{\text{ст}} \cdot H}.$$

Имеем два корня – совершенно очевидно, что первый корень положительный, а второй – отрицательный. Физический смысл отрицательного корня – перемещение вверх – это отклонение меньше, чем вниз. Следовательно, и напряжение меньше, поэтому второй корень не рассматриваем, так как наибольшее отклонение будет при первом корне

$$f_{\text{д}} = f_{\text{ст}} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}} \right).$$

Видно, что  $f_{\text{д}} > f_{\text{ст}}$ . Этот результат можно записать следующим образом:  $f_{\text{д}} = \aleph \cdot f_{\text{ст}}$ , где

$$\aleph = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}}.$$

– динамический коэффициент при ударе.

Здесь уместно вспомнить коэффициент усиления колебаний  $\beta$ : коэффициент  $\aleph$  показывает, во сколько раз перемещение при ударном нагружении больше перемещения при статическом нагружении. Не нужно забывать, что вышесказанное справедливо для рассматриваемой схемы, когда груз падает без начальной скорости вертикально. При другой схеме удара выражение для  $\aleph$  будет другим, например при ударе в горизонтальном направлении и так далее.

Выразим  $\aleph$  через скорость груза  $v$  в момент касания пружины начале удара): При свободном падении груза  $v^2 = 2gH$ ,  $2H = \frac{v^2}{g}$  то-

гда

$$\aleph = \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{\text{ст}}}}$$

Выразим  $\aleph$  через кинетическую энергию груза  $K_0$  в момент начала удара.  $K_0 = Hmg$  – потенциальная энергия, которую истратил груз непосредственно к моменту начала удара – она перешла в кинетическую энергию деформации пружины.  $-mgf_{\text{ст}}/2$  – работа силы  $G = mg$  при статическом нагружении ( $A_G$ ) – это мера энергии деформации. Числитель и знаменатель второго слагаемого подкоренного выражения умножаем на силу веса груза  $G$ , а множитель 2 переносим

в знаменатель.  $\frac{2H}{f_{ст}} = \frac{H \cdot m \cdot g}{\frac{1}{2} m \cdot g \cdot f_{ст}} = \frac{K_0}{U_{ст}}$ .

$A_G = U_{ст}$  – энергия, накопленная ударяемой системой при статическом действии ударяющего груза. Тогда

$$\aleph = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{ст}}}$$

Теперь об упрощениях этих формул при большой энергии удара. Если  $2 \cdot H/f_{ст} \geq 10$ , то единицей под корнем можно пренебречь, тогда

$$\aleph = 1 + \sqrt{\frac{2H}{f_{ст}}}. \text{ Если } 2 \cdot H/f_{ст} \geq 100, \text{ то } \aleph = \sqrt{\frac{2H}{f_{ст}}}.$$

Теперь о напряжениях. Обозначим через

$p_\delta$  – напряжение в любой точке ударяемой системы на любой площадке,

$p_{ст}$  – напряжение в той же точке, на той же площадке при статическом действии силы веса ударяющего груза – силу веса нужно направить так же, как и скорость. При расчёте пружины вместо  $p$  нужно поставить  $\tau$ .

Напряжения пропорциональны перемещениям, так как, и те и другие, пропорциональны силам.  $p_d / p_{ст} = f_d / f_{ст} = \aleph \cdot f_{ст} / f_{ст}$ .

$p_d = \aleph \cdot p_{ст}$  – формула для напряжений в момент наибольшего отклонения за время удара. Условие прочности при ударе:

$$p_d^{наиб} = \aleph \cdot p_{ст}^{наиб} \leq [p]_a,$$

Для пластичных материалов,  $n_d = 2$  – среднее значение динамического коэффициента запаса;  $n_d > n_{ст}$  (обычно,  $n_{ст} = 1,5$ ), так как расчёт приближённый, не учтено рассеяние части энергии при соударении.

Теперь, условие прочности при ударном нагружении, можно записать следующим образом.

$$p_{ст}^{наиб} \leq \frac{[p]_a}{\aleph}.$$

Динамическое нагружение учитывается тем, что допускаемое напряжение делится на динамический коэффициент  $\aleph$ .

Аналитическую зависимость можно получить лишь в ряде простых случаев, в сложных случаях, нет зависимости для  $\aleph$ , поэтому он находится экспериментально и значения коэффициента, приводятся в различных справочниках.

## 6.2. Частные случаи и особенности сопротивления ударному нагружению

### 6.2.1. Мгновенное нагружение

Мгновенное нагружение (приложили – отпустили) – является частным случаем удара, когда груз падает с высоты, равной нулю (или соударение со скоростью, равной нулю) (рис. 6.3, а).

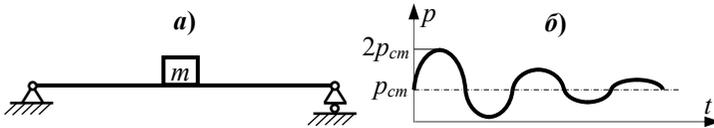


Рис. 6.3. Мгновенное нагружение

В этом случае  $H = 0$ ,  $\aleph = 1 + \sqrt{1+0} = 2$ , – следовательно,  $p_d = 2 \cdot p_{ст}$ , но это, в момент наибольшего отклонения, а далее происходят затухающие колебания и в результате напряжения и перемещения, будут равны статическим (рис. 6.3. б).

### 6.2.2. Изгибающий удар

На балку длиной  $l$  посередине пролёта. падает груз весом  $G$  с высоты (рис. 6.4, а), тогда наибольшие напряжения  $\sigma_d^{наиб}$  в балке при ударе определяются  $\sigma_d^{наиб} = \aleph \cdot \sigma_{ст}^{наиб}$  – здесь частный случай, поэтому записаны нормальные напряжения  $\sigma$ .

$$\aleph = 1 + \sqrt{1 + \frac{K_0}{U_{cm}}}$$

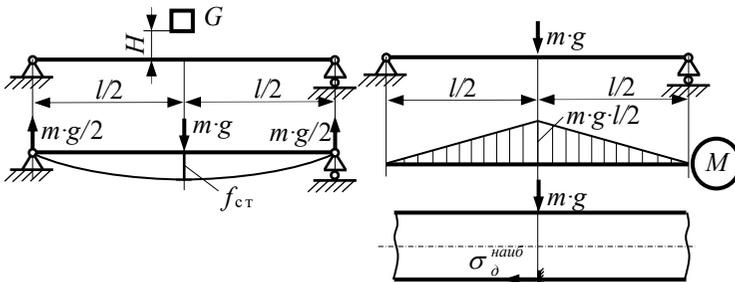


Рис. 6.4. Изгибающий удар

Пусть  $K_0$  задано,  $U_{ст} = A_G = G \cdot f_{ст} / 2$ . ( $G = m \cdot g$ ). В нашем случае  $f_{ст} = \frac{G \cdot l^3}{48 E \cdot J}$  (вспомним балки). Тогда  $U_{ст} = \frac{G^2 \cdot l^3}{96 E \cdot J}$ . Подставим в формулу для динамического коэффициента:

$$\aleph = 1 + \sqrt{1 + \frac{96 E \cdot J \cdot K_0}{G^2 \cdot l^3}}; \quad \sigma_{ст}^{наиб} = \frac{M_{наиб}}{W_{и}}$$

Построим эпюру изгибающего момента в балке от статически приложения силы веса (рис. 6.4, б). В нижней точке опасного сечения действуют наибольшие растягивающие напряжения  $\sigma_{ст}^{наиб} = \frac{G \cdot l}{4 \cdot W_{и}}$ .

Подставим это значение в формулу для  $\sigma_{д}^{наиб}$

$$\sigma_{д}^{наиб} = \frac{G \cdot l}{4 \cdot W_{и}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96 E \cdot J \cdot K_0}{G^2 \cdot l^3}} \right) - \text{окончательная формула}$$

для  $\sigma_{д}^{наиб}$ .

При большой энергии удара ( $2 \cdot H / f_{ст} \geq 100$ ):

$$\sigma_{д}^{наиб} = \frac{G \cdot l}{4 \cdot W_{и}} \sqrt{\frac{96 E \cdot J \cdot K_0}{G^2 \cdot l^3}}.$$

Преобразуем формулу, учитывая, что  $J = i^2 \cdot A$  и  $W = \frac{J}{|y|_{наиб}} = \frac{i^2 \cdot A}{|y|_{наиб}}$ , тогда  $\sigma_{д}^{наиб} = \frac{|y|_{наиб}}{i} \sqrt{\frac{6 E \cdot K_0}{A \cdot l}}$ .

Это формула для  $\sigma_{д}^{наиб}$  при изгибающем ударе в случае большой энергии удара. Проанализируем её.

Чем больше  $E$ , тем больше  $\sigma_{д}^{наиб}$ , следовательно в стальных балках напряжения при ударе больше, чем в дюралевых (в  $\sqrt{3}$  раз).

1) Чем больше объём балки, тем меньше напряжения при ударе (так как объём находится в знаменателе).

2) Чем больше объём, тем меньше энергия удара, приходящаяся на единицу объёма.

Последняя зависимость позволяет установить весьма интересную особенность при ударе в двух главных плоскостях жёсткостей балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.5). Какой из этих двух ударов, опаснее? Из формулы для  $\sigma_{д}^{наиб}$  видно, что корень одинаковый, но нужно проанализировать ещё, множитель перед корнем.

$$\left( \frac{|y|_{\text{наиб}}}{i} \right)_1 = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12b \cdot h}}} = \sqrt{3}, \quad \left( \frac{|y|_{\text{наиб}}}{i} \right)_2 = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12b \cdot h}}} = \sqrt{3}.$$

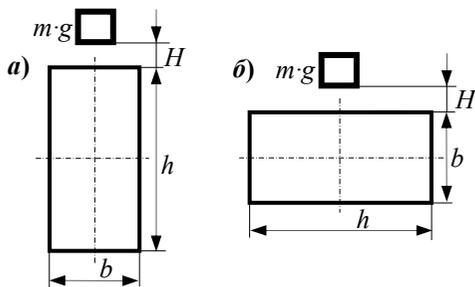


Рис. 6.5. Удар в двух главных плоскостях жёсткости балки

то есть коэффициенты одинаковые, следовательно  $(\sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}})_1 = (\sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}})_2$  — очень важная особенность сопротивления ударному нагружению.

При статическом нагружении напряжения в первом случае будут меньше. А почему же напряжения одинаковы при ударе? Так как динамические коэффициенты, разные.

Точное равенство наблюдается, при большой энергии удара. В других случаях, точного равенства нет, но напряжения оказываются близкими.

Таким образом, при ударном нагружении, сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения, в двух главных плоскостях жёсткости, оказывается примерно одинаковым.

### 6.2.3. Особенности сопротивления удару балок равного сопротивления

Рассмотрим ударное нагружение балки постоянного сечения (б.п.с.) и балки равного сопротивления (б.р.с.) (рис. 6.6).

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}} = \aleph \cdot \sigma_{\text{ст}}^{\text{наиб}}, \quad f_{\text{д}} = f_{\text{ст}} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}} \right).$$

$$\left( f_{\text{ст}} \right)_{\text{б.р.с.}} > \left( f_{\text{ст}} \right)_{\text{б.п.с.}}, \quad \text{следовательно,} \quad \left( \aleph \right)_{\text{б.р.с.}} < \left( \aleph \right)_{\text{б.п.с.}}, \quad \text{и}$$

$$\left( \sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}} \right)_{\text{б.р.с.}} < \left( \sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}} \right)_{\text{б.п.с.}}.$$

Таким образом, балки равного сопротивления, динамическим нагрузкам сопротивляются лучше, чем балки постоянного сечения.

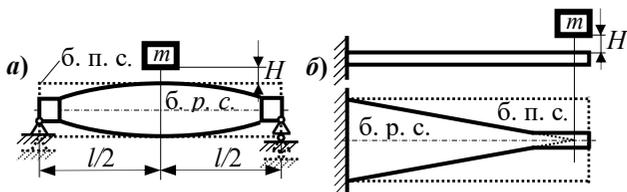


Рис. 6.6. Ударное нагружение балок равного сопротивления

### 6.2.4 Правило выравнивания поперечного сечения по наименьшему при ударном нагружении

Рассмотрим ударное нагружение двух стержней (рис. 6.7) (без учёта концентрации напряжений)

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}} = \sigma_{\text{ст}}^{\text{наиб}} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}} \right), \quad (\sigma_{\text{ст}}^{\text{наиб}})_1 = (\sigma_{\text{ст}}^{\text{наиб}})_2 = \frac{G}{A_0}, \quad \text{но}$$

$$f_{\text{ст}} = \int_0^l \frac{G dz}{E \cdot A(z)}, \quad \text{следовательно } (f_{\text{ст}})_1 < (f_{\text{ст}})_2, \quad \text{тогда } \aleph_1 > \aleph_2, \quad \text{и}$$

$$(\sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}})_1 > (\sigma_{\text{д}}^{\text{наиб}})_2.$$

Таким образом выравнивание поперечного сечения по наименьшему приводит к увеличению сопротивления ударным нагрузкам.

Рассмотрим пример: болт передаёт от одной части конструкции к другой растягивающий удар (рис. 6.8).

Чтобы уменьшить напряжения при ударе, нужно размеры поперечного сечения (площадь) болта уменьшить на максимально возможной длине до площади по минимальному размеру резьбы. Тем самым, увеличивается податливость болта и, как следствие, уменьшается динамический коэффициент при ударе  $\aleph$ .

Таким образом, для уменьшения напряжений при ударном нагружении необходимо увеличить податливость системы, что приводит к уменьшению динамического коэффициента при ударе  $\aleph$ .

Последнее замечание: возникает вопрос – почему, рассматривая част-

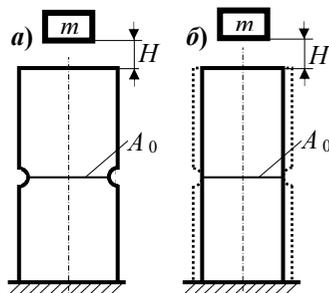


Рис. 6.7. Ударное нагружение стержней с местными ослаблениями

ные примеры, мы делали общие выводы? Это объясняется тем, что основные допущения и качественная картина, при этом сохраняются.

### **6.3. Вопросы для самопроверки**

1. Исходя из каких условий решается задача об ударном нагружении? 2. Как определяется коэффициент динамичности при ударе? 3. Как оценивается прочность детали при ударном нагружении? 4. Как оценивается прочность детали при мгновенном нагружении? 5. В чём заключаются особенности изгибающего удара? 6. В чём заключаются особенности ударного нагружения балок равного сопротивления? 7. В чём заключаются особенности ударного нагружения стержней с местным нарушением призматической формы? 8. В чём заключаются особенности растягивающего удара болтовых соединений? 9. Почему, рассматривая частные примеры ударного нагружения, можно делать общие выводы?

## 7. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ НЕРАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

### 7.1. Напряжения и расчёт на прочность неравномерно движущихся элементов конструкций

В конструкции летательных аппаратов таких элементов много. Например, лопасти винта вертолёта, в двигателях летательных аппаратов – диски, лопатки.

Рассмотрим равномерное движение на примере груза, поднимающегося с помощью троса. Силы, действующие на трос (он является слабым элементом), покажем на рисунке 7.1, а.

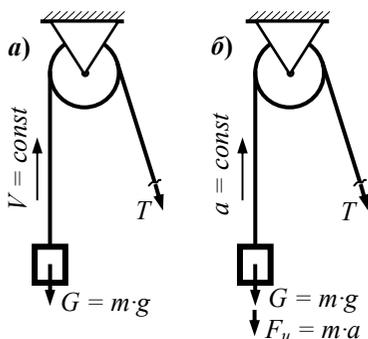


Рис. 7.1. Равномерное и равноускоренное движение груза

По принципу Даламбера к действующим силам нужно добавить силы инерции. Необходимо учитывать силу инерции груза, а её нет, так как нет ускорения, тогда  $\sigma = \sigma_{ст} = \frac{m \cdot g}{A}$ . Итак, в соответствии с принципом Даламбера о движении в этом примере можно забыть.

Теперь неравномерное движение – здесь действуют динамические напряжения  $\sigma_d = \sigma_{ст}$ , так как при неравномерном движении, силы инерции будут отличаться от нуля (рис. 7.1, б).

Будем рассматривать только частный случай неравномерного движения, когда ускорение любой точки детали постоянно и вектор этого ускорения, не меняет своего положения относительно детали. При таких ограничениях, задача значительно упрощается, так как в этом случае, напряжения не зависят от времени. К тому же, большая группа деталей (в частности, авиадетали) находятся в таких условиях. Например, лопасть винта вертолёта при стационарных условиях полёта, находится в таких условиях.

Задача решается с помощью принципа Даламбера. К действующим силам добавляются силы инерции, система останавливается в наиболее опасном положении и, для полученной системы сил, при-

меняются формулы статики.

**Пример 1. Равноускоренное движение** (см. рис. 7.1, б) (слабое звено – трос).

Применим общий подход, основанный на принципе Даламбера. Учитываем силу инерции только груза, так как сила инерции троса, мала

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{m \cdot g + F_{\text{и}}}{A} = \frac{m \cdot g + m \cdot a}{A} = \frac{m \cdot g}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

Здесь  $\frac{m \cdot g}{A} = \sigma_{\text{ст}}$  – напряжение, вызванное весом груза при отсутствии ускорения.

$1 + \frac{a}{g} = \kappa_{\text{д}}$  – динамический коэффициент – он показывает, во сколько раз фактическое напряжение при неравномерном движении, больше статического напряжения, тогда

$\sigma_{\text{д}} = \kappa_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} \leq [\sigma]$  или  $\sigma_{\text{ст}} \leq [\sigma] / \kappa_{\text{д}}$  – условие прочности при неравномерном движении.

Расчёт ведётся по статическим напряжениям, а неравномерное движение учитывается тем, что допускаемое напряжение делится на динамический коэффициент. Это формула, общая.

В простых случаях, для  $\kappa_{\text{д}}$  можно получить формулы, в сложных случаях, расчётным путём не удаётся найти  $\kappa_{\text{д}}$  и тогда нужно воспользоваться нормами прочности (двигатели – ЦИАМ, планер – ЦАГИ). Эти коэффициенты получают опытным путём, тензометрированием.

**Пример 2. Напряжения во вращающемся кольце** (рис. 7.2).

Кольцом называется диск, наибольший размер поперечного сечения которого заметно меньше диаметра.

$D$  – средний диаметр (диаметр оси кольца) – он мало отличается от двух других диаметров,  $h \ll D$ . Во сколько раз? Если точность расчётов до 5%, то, до пятикратной разницы. Одна из главных центральных осей поперечного сечения кольца перпендикулярна плоскости кольца – только при таком условии, не будет изгиба. Кольцо вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . К такой расчётной схеме приводится обод маховика (который применяют для сглаживания работы машин и накопления энергии), при отбрасывании спиц – это идёт в запас прочности.

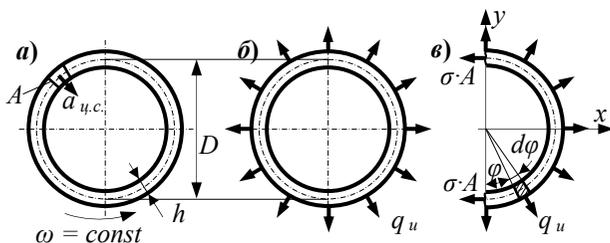


Рис. 7.2. Напряжения во вращающемся кольце

Покажем ускорение любого элемента кольца. И в этом случае, ускорение постоянно во времени и не меняет направления (рис. 7.2, а).

Применим принцип Даламбера – к действующим силам (а их, здесь нет) добавляются силы инерции (рис. 7.2, б).

$q_{и}$  – интенсивность распределённых сил инерции.

$$q_{и} = \rho \cdot A \cdot \omega \cdot D/2,$$

где  $\rho$  – плотность материала кольца – масса единицы объёма.

Знак « $\leftrightarrow$ » здесь не ставим, так как направление уже учтено в направлении  $q_{и}$ . Теперь кольцо мысленно останавливаем, и рассматриваем статическую задачу. Рассекаем кольцо диаметральной плоскостью (метод сечений). Левую часть отбрасываем и показываем правую. Будем считать, что напряжения по сечению распределены равномерно, то есть кольцо, только растягивается, а изгиба нет (рис. 7.2, в). Почему? В силу осевой симметрии нагрузок кольцо остаётся круглым и кривизна практически не изменяется (изменение будет, но очень небольшое).

Выделяем элемент кольца, его центральный угол  $d\varphi$ , а положение определяется углом  $\varphi$ . Рассмотрим равновесие полукольца

$$\sum x = -2\sigma_{\varphi} \cdot A + \int_0^{\pi} q_{и} \cdot D/2 d\varphi \cdot \sin \varphi = 0.$$

Учитывая, что  $\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 2$  (табличный интеграл), получим

$$\sigma_{\varphi} = \frac{q_{и} \cdot D}{2 \cdot A} = \frac{D}{2 \cdot A} \cdot \rho \cdot A \cdot 1 \cdot \omega^2 \cdot D/2 = \rho \cdot \left(\frac{D}{2} \cdot \omega\right)^2,$$

но  $\frac{D}{2} \cdot \omega = v$  — окружная скорость кольца. Тогда

$$\sigma_d = \rho \cdot v^2$$

– напряжения во вращающемся кольце. Эти напряжения не зависят от площади сечения кольца, а зависят, только от плотности материала  $\rho$  и окружной скорости кольца  $v$ .

Из этой формулы следует, что в стальных кольцах напряжение больше, чем в титановых и, тем более, в алюминиевых.

Получим формулу для окружной скорости, если  $n$  задано в оборотах в минуту

$$v = \frac{D}{2} \cdot \omega = \frac{D}{2} \cdot \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60}.$$

## 7.2. Вопросы для самопроверки

1. На каком принципе основан метод расчёта неравномерно движущихся деталей? 2. В чём заключается расчёт на прочность неравномерно движущихся деталей? 3. Как оценивается прочность вращающегося кольца?

## 8. РАСЧЁТ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

К толстостенным, относятся цилиндры, толщина стенок которых сравнима с диаметром  $d_{ср} < 20h$ .

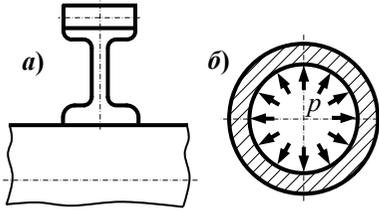


Рис. 8.1. Примеры толстостенных цилиндров

Многие детали машин, детали двигателей летательных аппаратов могут быть отнесены к толстостенным цилиндрам. Например, втулка зубчатого колеса (рис. 8.1, а). К такой же расчётной схеме приводится ствол артиллерийского орудия (рис. 8.1, б).

### 8.1. Напряжения в толстостенном цилиндре, нагруженном наружным и внутренним давлением.

Вначале обратим внимание на то, что все цилиндры, могут быть разделены на две группы

1) Цилиндры без нормальной силы (рис. 8.2). Легко убедиться, что в этом случае нормальная сила в любом сечении цилиндра равна нулю.

2) Цилиндры с нормальной силой (рис. 8.3, а). Пример – газовый баллон – цилиндр с днищами, нагруженный внутренним давлением газа. На цилиндр действуют наружное давление  $p_b$  и внутреннее давление  $p_a$ .

В этом случае разность сил, действующих на наружный и внутренний торцы даёт нормальную силу.

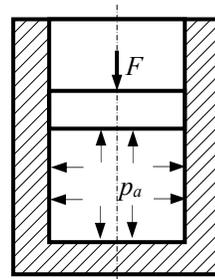


Рис. 8.2. Цилиндр без нормальной силы

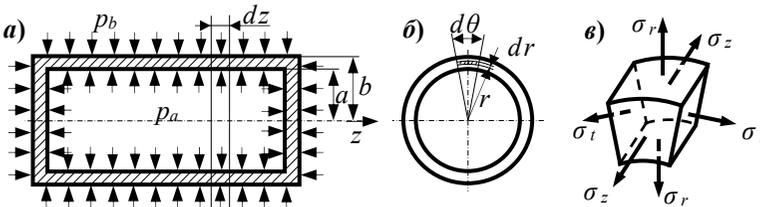


Рис. 8.3. Цилиндр с нормальной силой

Вырежем элемент радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  и размерами в плане  $d\theta$ ,  $dz$  (рис. 8.3, б). Покажем напряжения на гранях этого элемента (рис. 8.3, в). В силу осевой симметрии можно считать, что элемент после нагружения, угловых деформаций (сдвигов) не получает, то есть касательные напряжения  $\tau$  по граням элемента равны нулю, то есть, эти грани являются главными. По ним действуют только нормальные напряжения – главные напряжения (приращения не показаны).

$\sigma_r$  – радиальное напряжение,

$\sigma_t$  – кольцевое (окружное) напряжение,

$\sigma_z$  – осевое напряжение.

Таким образом, в любой точке цилиндра, имеет место объёмное напряжённое состояние. Совершенно очевидно, что в каждой точке цилиндра, свои напряжения. Осевое напряжение не меняется, за исключением торцов, но там, есть стеснение и напряжения там, сжимающие, то есть наибольшее осевое напряжение действует в цилиндре, а не в крышке.

Определим осевое напряжение. 1) Для цилиндра без нормальной силы:  $N = 0$ ,  $\sigma_z = N/A = 0$ .

2) Для цилиндра с нормальной силой (рис. 8.4, а) Составим уравнение статики

$$\sum z = p_b \cdot \pi \cdot b^2 - p_a \cdot \pi \cdot a^2 + \sigma_{z_2} \cdot \pi \cdot (b^2 - a^2) = 0.$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{p_b \cdot b^2 - p_a \cdot a^2}{b^2 - a^2}$$

– осевое напряжение для цилиндра с нормальной силой.

Получим два других компонента напряжений – здесь задача сложнее. Изобразим элемент в плоскости сечения и покажем напряжения (рис. 8.4, б).

Окружное напряжение  $\sigma_t$  от  $\theta$  не зависит, так как задача осесимметричная. Изменением  $\sigma_t$  по радиусу пренебрегаем, так как в уравнениях статики получают величины второго порядка малости.

Под действием сил, элемент находится в равновесии, поэтому

$$\begin{aligned} \sum y = & \sigma_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz - (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\theta \cdot dz - \\ & - 2\sigma_t \cdot dr \cdot dz \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0. \end{aligned}$$

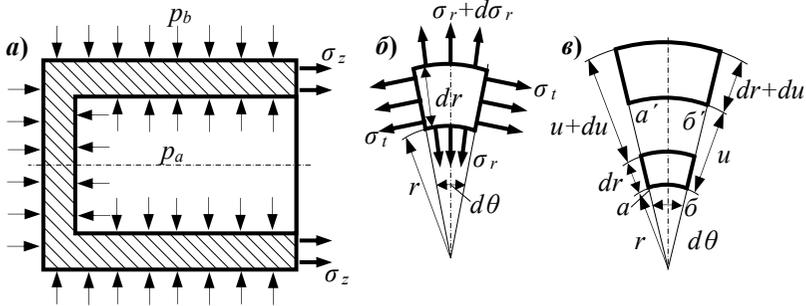


Рис. 8.4. Определение напряжений и перемещений в цилиндре с нормальной силой

Здесь учтено, что для малого угла  $d\theta$ :  $\cos \theta = 1$ . Далее учитываем, что  $\sin \theta/2 = \theta/2$ , пренебрегая величинами второго порядка малости, сделаем преобразования и получим

$$r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (8.1)$$

– это одно из уравнений статики. Остальные пять удовлетворяются тождественно.

Таким образом, статика даёт только одно уравнение, а неизвестных два, следовательно, одного уравнения не хватает (как всегда, задача о распределении напряжений по поперечному сечению, оказалась статически неопределимой). Поэтому необходимо установить закономерности деформации цилиндра.

Для этого рассмотрим элемент до нагружения и после нагружения (рис. 8.4, в). После нагружения элемент не искривился, так как на его гранях нет касательных напряжений и угол элемента, не изменяется – это не закономерность, а следствие осевой симметрии.

Покажем перемещения элемента  $u$  – радиальное перемещение на радиусе  $r$ ,  $u + du$  – радиальное перемещение на радиусе  $r + dr$ .

**Закономерность** – перемещения являются непрерывными функциями координат точек цилиндра (так как в цилиндре, нет разрывов), поэтому будет  $u + du$  – мы учли неразрывность функций.

Теперь составим уравнение, выражающее закономерность деформации цилиндра – через  $u$  выразим радиальную и окружную деформации.

$$\varepsilon_r = \frac{dr + du + dr}{dr} = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}.$$

$$\varepsilon_t = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}.$$

Исключим параметр  $u$

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right).$$

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{1}{r} \cdot (\varepsilon_r - \varepsilon_t)$$

– это уравнение совместности (неразрывности) деформаций, но оно записано, в относительных удлинениях.

Запишем последнее уравнение, в напряжениях. По закону Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_t)],$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_t - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_r)].$$

Подставим в уравнение совместности деформаций и учтём, что  $d\sigma_z/dz = 0$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot \left[ \frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \right] = \frac{1}{E \cdot r} \cdot [\sigma_r - \sigma_t + \mu \cdot (\sigma_r - \sigma_t)], \text{ тогда}$$

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \mu \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1 + \mu}{r} \cdot (\sigma_r - \sigma_t). \quad (8.2)$$

– уравнение совместности деформаций в напряжениях.

Решая совместно уравнения (8.1) и (8.2), получим

$$\sigma_r = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_b - p_a) \cdot a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2},$$

$$\sigma_t = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_b - p_a) \cdot a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2}, \quad (8.3)$$

$$\sigma_{z_1} = 0, \quad \sigma_{z_2} = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2}.$$

– формулы для напряжений в толстостенном цилиндре.

Строго говоря, такие напряжения будут только в средней части цилиндра, а у торцов, напряжения меньше, так как торцы стесняют деформацию, поэтому там, и деформации, и напряжения меньше. Как правило, цилиндры разрушаются в средней части, что указывает на правильность этого вывода.

Проанализируем формулы. Напряжения, от  $z$  не зависят, от  $\theta$  тоже (это было оговорено, выше). Видно, что в зависимости от радиуса  $r$  напряжения изменяются по закону квадратичной параболы.

## 8.2. Расчёт толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением

Это случай, когда внешним давлением можно пренебречь. Такая расчётная схема встречается довольно часто. Например, втулка, напрессованная на вал (рис. (рис. 8.5, а-б)).

Если в уравнениях (8.3) принять  $p_b = 0$ , то получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_a \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_r &= \frac{p_a \cdot a^2}{b^2 - a^2} \cdot \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{z_1} &= 0, \quad \sigma_{z_2} = \frac{p_a \cdot a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Чтобы проследить за изменением напряжений по толщине стенки построим эпюры этих напряжений (рис. 8.5, в).

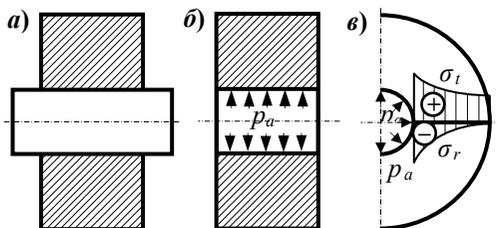


Рис. 8.5. Расчёт толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением

На внутренней стенке  $\sigma_r = p_a$ , на наружной стенке  $-\sigma_r = 0$ . Линия между этими точками – квадратичная парабола, выпуклостью к нулевой линии.

Кольцевые напряжения  $\sigma_t$ . На наружной стенке (при  $r = b$ ),  $\sigma_t$  вычислять не будем, так как оно намного меньше  $p_a$ .

На внутренней стенке (при  $r = a$ ),  $\sigma_t$  даже больше, чем  $p_a$ . Линия между этими точками – квадратичная парабола, тоже выпуклостью к нулевой линии.

Следует отметить, что наибольшие напряжения действуют на внутренней поверхности цилиндра, то есть самыми напряжёнными являются точки на внутренней поверхности толстостенного цилиндра.

Расчёты на прочность можно вести двумя методами.

### 8.2.1. Расчёт по допускаемым напряжениям

За опасное внутреннее давление в этом случае принимается такое, при котором в цилиндре появляются первые пластические деформации. Когда он применяется? Когда остаточные деформации нарушают нормальные условия работы цилиндра и поэтому недопустимы.

Пример: Если ствол артиллерийского орудия будет пластически деформироваться, то между снарядом и стволом появляется зазор и эффективность стрельбы снизится.

Поскольку опасная точка испытывает объёмное напряжённое состояние, обратимся к подходящей теории предельных напряжённых состояний (ПНС). Цилиндры выполнены, как правило, из пластичных материалов, поэтому воспользуемся теорией максимальных касательных напряжений (III теория ПНС).

$$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Запишем напряжения  $\sigma_t > 0$ ,  $\sigma_r < 0$ ,  $\sigma_z \geq 0$ . Из формул видно,

что  $\sigma_t > \sigma_z$ , поэтому  $\sigma_1 = \sigma_t$ ,  $\sigma_2 = \sigma_z$ ,  $\sigma_3 = \sigma_r$ , тогда

$$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2 p_a \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{b^2}{r^2}.$$

Опасная точка находится на внутренней поверхности цилиндра ( $r = a$ )

$$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} = \frac{2 p_a \cdot b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma].$$

– условие прочности по допускаемым напряжениям толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением. Разрешим условие прочности относительно  $p_a$ .

$$p_a \leq \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \frac{[\sigma]}{2} \text{ — формула для определения грузоподъёмности}$$

цилиндра.

$$\text{Но } \frac{b^2 - a^2}{b^2} < 1, \text{ следовательно, } p_a \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Таким образом, вне зависимости от толщины стенки цилиндра грузоподъёмность цилиндра, всегда меньше  $[\sigma]/2$ , то есть, как бы мы не увеличили толщину стенки цилиндра, предельное внутреннее давление, не увеличивается. Этот парадокс можно объяснить с помощью принципа Сен-Венана, так как здесь, самоуравновешенная система сил.

### 8.2.2 Расчёт по предельным нагрузкам

В этом случае, за опасное внутреннее давление принимается давление, при котором цилиндр начинает течь, то есть при котором цилиндр становится геометрически изменяемой, иначе говоря, происходит рост деформаций, при неизменном давлении (рис. 8.6).

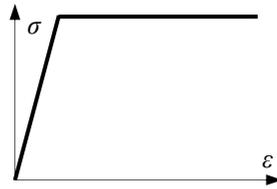


Рис. 8.6. Диаграмма напряжений для идеально-пластичного материала

Возможности материала в этом случае занижены, но опыт показывает, что занижение, незначительно. Этот расчёт применяется тогда, когда некоторые пластические деформации не нарушают нормальной работы цилиндров.

Пример. Цилиндр с жидкостью (или газом) (рис. 8.7) несколько увеличивает свои размеры, но его работоспособность не нарушается.

$p_a \leq p_{aT}$  (рис. 8.7, а), где  $p_{aT}$  — внутреннее давление, при котором появляются первые пластические деформации. Как его найти? Нужно эквивалентное напряжение приравнять пределу текучести  $\sigma_T$ . При  $p_a = p_{aT}$ ,  $\sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} = \sigma_T$ ;  $\frac{2p_{aT} \cdot b^2}{b^2 - a^2} = \sigma_T$ ;  $p_{aT} = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \frac{\sigma_T}{2}$ .

При  $p_a > p_{aT}$  (рис. 8.7, б) появляются первые пластические деформации в точках внутренней поверхности цилиндра. По мере роста  $p_a$  пластическая зона увеличивается, а зона упругих деформаций сокращается. В конце концов, при некотором давлении (рис. 8.7, в) по всему цилиндру будут пластические деформации. Цилиндр станет

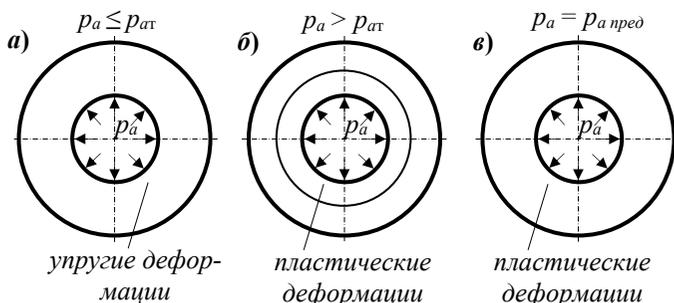


Рис. 8.7. Расчёт по предельным нагрузкам

изменяемой системой. Несущая способность цилиндра исчерпана. Это давление  $p_{a\_пред}$  и будет опасным давлением по способу предельных нагрузок.

Методами сопротивления материалов задача об определении  $p_{a\_пред}$  не решается. Она решается методами математической теории пластичности.

Приведём готовые результаты.

С ростом отношения  $b/a$ ,  $p_{a\_пред}$  возрастает (рис. 8.8). Этот график приводится в справочниках.

Порядок (алгоритм) расчёта.

Вначале находят  $p_a = p_{a\_ст}$ , затем, с помощью графика определяют  $p_{a\_пред}$  устанавливают грузоподъёмность по формуле

$$p_a = \frac{p_{a\_пред}}{n_T}.$$

– формула для определения грузоподъёмности по способу предельных нагрузок.

У каждого из этих двух методов расчёта имеется своя область применения.

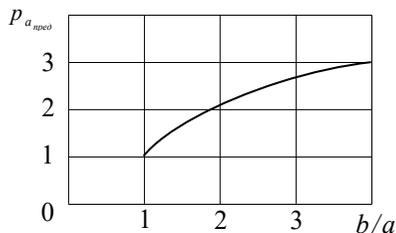


Рис. 8.8. График изменения предельного давления

### 8.3. Применение составных цилиндров для увеличения упругой грузоподъёмности

**Упругая грузоподъёмность** – это грузоподъёмность, вычисленная по способу допускаемых напряжений. Запишем выражение для упругой грузоподъёмности

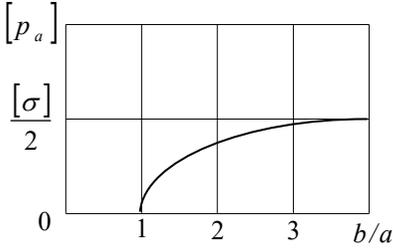


Рис. 8.9. График упругой грузоподъёмности

$$[p_a] = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \frac{[\sigma]}{2}$$

Изобразим график этой зависимости (рис. 8.9). При  $b/a = 1$  грузоподъёмность равна нулю. Из графика видно, что грузоподъёмность можно увеличить за счёт увеличения толщины стенки, только при небольших толщинах стенки (при небольших  $b/a$ ).

При больших толщинах увеличение толщины стенки не приводит к существенному изменению грузоподъёмности.

Но есть способ увеличения упругой грузоподъёмности выше  $[\sigma]/2$ . Он основан на применении составных цилиндров (рис. 8.10), причём наружный диаметр внутреннего цилиндра больше, чем внутренний диаметр наружного цилиндра на величину  $\Delta$ , где  $\Delta$  – радиальный натяг.

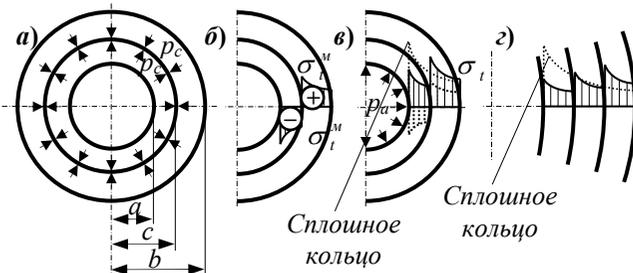


Рис. 8.10. Напряжения в составных цилиндрах

Из двух цилиндров можно получить исходный цилиндр (рис. 8.10, а). Вес составного цилиндра будет равен весу исходного. Наружный цилиндр нагревают и надевают на внутренний и, после остывания, между ними возникает контактное давление  $p_c$  (внутренний цилиндр сжимается, а наружный – растягивается), которое вы-

зывает монтажные (начальные) напряжения. Начальные размеры цилиндров изменяются незначительно, поэтому считаем, что размеры  $a$ ,  $b$ , и  $c$  неизменны.

Будем рассматривать только кольцевые напряжения  $p_i^m$  – напряжения на стыке цилиндров. Покажем эпюру монтажных напряжений (рис. 8.10, б) и суммарную эпюру (рис. 8.10, в) – рабочие напряжения складываются с монтажными.

Проследим, как складываются эти напряжения. На рисунке 8.10, в пунктирной линией показаны напряжения для сплошного цилиндра, а также монтажные напряжения, сплошными линиями – напряжения для составного цилиндра после сложения.

В точках на внутренней поверхности напряжения уменьшились существенно, следовательно,  $\sigma_{\text{экв.ш}}^{\text{наиб}}$  уменьшается, а грузоподъёмность  $[p_a]$  увеличивается и превысит  $[\sigma]/2$ , – в этом смысл применения составных цилиндров.

Упругая грузоподъёмность составных цилиндров увеличивается за счёт положительной роли монтажных напряжений, за счёт выравнивания напряжений по толщине стенки цилиндра и, как результат, наблюдается повышение грузоподъёмности. Можно использовать многослойные цилиндры рис. 8.10, з), тогда упругая грузоподъёмность увеличится ещё больше. Стволы артиллерийских орудий являются многослойными цилиндрами.

Для расчёта составных цилиндров необходимо знать зависимость  $p_c = p_c(\Delta)$ .

Получим формулу для радиального перемещения сплошного цилиндра  $u = u(r)$  (рис. 8.11, а):

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad u = r \cdot \varepsilon_t = \frac{r}{E} \cdot (\sigma_t - \mu \cdot \sigma_r).$$

Здесь  $\sigma_z = 0$ , так как составляются открытые цилиндры,

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \pm \frac{(p_b - p_a) \cdot a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2}, \quad \text{тогда}$$

$$u = \frac{r}{E} \cdot \left[ (1 - \mu) \cdot \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - (1 - \mu) \cdot \frac{(p_b - p_a) \cdot a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2} \right]$$

– общая формула для радиальных перемещений.

Рассмотрим картину деформаций при составлении цилиндров (рис. 8.11, б).

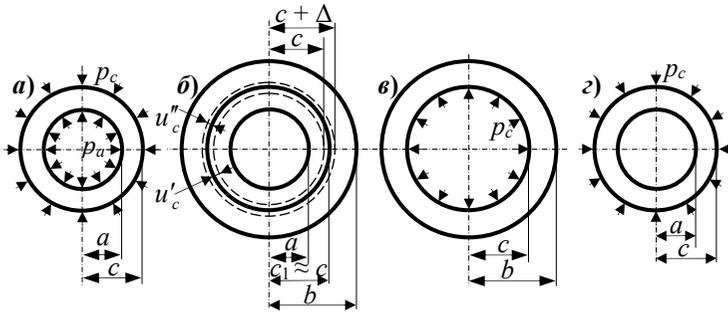


Рис. 8.11. Расчёт составных цилиндров

$u'_c$  – радиальное перемещение точек внутренней поверхности наружного цилиндра,

$u''_c$  – радиальное перемещение точек наружной поверхности внутреннего цилиндра.

Закономерность деформаций

$$\Delta = |u'_c| + |u''_c|, \text{ но } u'_c > 0; u''_c < 0. \text{ тогда}$$

$$\Delta = u'_c - u''_c - \text{уравнение совместности деформаций.}$$

Выразим перемещения, используя общую формулу.

1) Определим радиальное перемещение точек внутренней поверхности наружного цилиндра  $u'_c$ . В этом случае параметры равны  $r = c$ ,  $p_a = p_c$ ,  $p_b = 0$ ,  $a = c$ ,  $b = b$ .

$$u'_c = \frac{c}{E} \cdot \left[ (1 - \mu) \cdot \frac{p_c \cdot c^2}{b^2 - c^2} - (1 + \mu) \cdot \frac{p_c \cdot c^2 \cdot b^2}{(b^2 - c^2) \cdot c^2} \right] = \frac{p_c \cdot c}{E} \cdot \left( \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu \right).$$

2) Определим радиальное перемещение точек наружной поверхности внутреннего цилиндра. В этом случае параметры равны  $r = c$ ,  $p_a = 0$ ,  $p_b = p_c$ ,  $a = a$ ,  $b = c$ .

$$u''_c = \frac{c}{E} \cdot \left[ -(1 - \mu) \cdot \frac{p_c \cdot c^2}{c^2 - a^2} - (1 + \mu) \cdot \frac{p_c \cdot c^2 \cdot b^2}{(c^2 - a^2) \cdot c^2} \right] = -\frac{p_c \cdot c}{E} \cdot \left( \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu \right).$$

Подставим значения перемещений в уравнение совместности деформаций

$$u''_c = \frac{p_c \cdot c}{E} \cdot \left( \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu \right) + \frac{p_c \cdot c}{E} \cdot \left( \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu \right) = \frac{2 p_c \cdot c^2 \cdot (b^2 - a^2)}{E \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 - a^2)}.$$

Выразим давление на стыке цилиндров

$$p_c = \frac{(b^2 - c^2) \cdot (c^2 - a^2)}{2c^3 \cdot (b^2 - a^2)} \cdot E \cdot \Delta$$

– зависимость между натягом и давлением на стыке цилиндров.

Если натяг небольшой и цилиндры короткие, то их можно составить, запрессовкой. Если натяг большой и цилиндры длинные, то внешний цилиндр нагревают, и надевают, на внутренний.

Вычислим, насколько нужно нагревать внешний цилиндр

$$\Delta_c^T = \alpha \cdot c \cdot (T_1 - T_2) > \Delta, \text{ отсюда } (T_1 - T_2) > \frac{\Delta}{\alpha \cdot c}.$$

**Пример.** На вал запрессовано внутреннее кольцо подшипника (рис.8.12, а) с радиальным натягом  $\Delta = 16 \text{ мкм} = 0,016 \text{ мм}$ . Определить контактное давление между внутренним кольцом подшипника и валом редуктора. Построить эпюры радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_t$  напряжений для кольца и вала. Определить  $\sigma_{\text{эквIII}}$  в

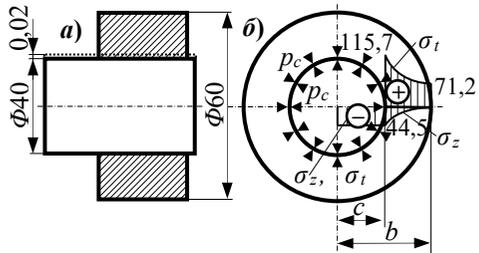


Рис. 8.12. Пример расчёта вала с напрессованным толстостенным цилиндром

опасной точке соединения.

В данном случае  $a = 0, c = 20 \text{ мм}, b = 30 \text{ мм}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

1) Определим контактное давление

$$p_c = \frac{(b^2 - c^2) \cdot (c^2 - a^2)}{2c^3 \cdot (b^2 - a^2)} \cdot E \cdot \Delta = \frac{[(30 \cdot 10^{-3})^2 - (20 \cdot 10^{-3})^2] \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (30 \cdot 10^{-3})^2} \times 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-6} = 44,45 \text{ МПа}.$$

2) Построим эпюры радиальных и окружных напряжений (рис. 8.12, б)

$$\sigma_{r,t} = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \pm \frac{(p_b - p_a) \cdot a^2 \cdot b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2}$$

Строим эпюры для кольца  $a = c = 20 \text{ мм}, b = 30 \text{ мм}, p_a = 44,45 \text{ МПа}, p_b = 0$ .

Внутренняя поверхность кольца  $r = c = 20 \text{ мм}$

$$\sigma_{r,t} = \frac{44,45 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{(30 \cdot 10^{-3})^2 - (20 \cdot 10^{-3})^2} \pm \frac{-44,45 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (30 \cdot 10^{-3})^2}{\left[ (30 \cdot 10^{-3})^2 - (20 \cdot 10^{-3})^2 \right] \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2} = 35,56 \mp 80,01.$$

$$\sigma_r = 35,56 - 80,01 = -44,45 \text{ МПа},$$

$$\sigma_t = 35,56 + 80,01 = 115,6 \text{ МПа}.$$

Наружняя поверхность кольца  $r = b = 30 \text{ мм}$

$$\sigma_{r,t} = \frac{44,45 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{(30 \cdot 10^{-3})^2 - (20 \cdot 10^{-3})^2} \pm \frac{-44,45 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (30 \cdot 10^{-3})^2}{\left[ (30 \cdot 10^{-3})^2 - (20 \cdot 10^{-3})^2 \right] \cdot (30 \cdot 10^{-3})^2} = 35,56 \mp 35,56.$$

$$\sigma_r = 35,56 - 35,56 = 0,$$

$$\sigma_t = 35,56 + 35,56 = 71,12 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры для вала  $a = 0, c = b = 20 \text{ мм}, p_a = 0,$

$$p_b = p_c = 44,45 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{r,t} = -\frac{44,45 \cdot 10^6 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{(20 \cdot 10^{-3})^2 - 0} \pm 0 = -44,45 \text{ МПа}, \text{ то есть в валу, и}$$

окружные и радиальные напряжения, по радиусу постоянны.

3) Определяем  $\sigma_{\text{экв III}}$  в опасной точке на внутренней поверхности кольца

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_r = 115,6 + 44,45 = 160,1 \text{ МПа}.$$

#### 8.4. Вопросы для самопроверки

1. Какие цилиндры называются толстостенными? 2. Какой вид напряжённого состояния испытывают точки толстостенного цилиндра? 3. Какие точки толстостенного цилиндра наиболее нагружены? 4. В чём разница расчёта на прочность толстостенного цилиндра по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам? 5. Каким образом можно увеличить упругую грузоподъёмность толстостенного цилиндра?

## 9. ТОНКОСТЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ

Тонкостенная оболочка – это тело (деталь), один из размеров которого, значительно меньше двух других размеров ( $d_{cp} > 20h$ ). Меньший размер, называется толщиной оболочки. Она измеряется перпендикулярно срединной поверхности.

Срединная поверхность – это поверхность, проходящая через середины толщин оболочки. Если срединная поверхность является плоскостью, то это пластина. Если срединная поверхность – поверхность вращения, то оболочка осесимметричная. Бывают сферические, цилиндрические, конические и другие осесимметричные оболочки.

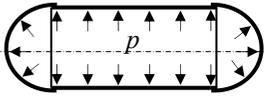


Рис. 9.1. Тонкостенный цилиндр

Примеры: паровой котёл (рис. 9.1), корпус летательного аппарата, корпус двигателя

летательного аппарата.

### 9.1 Напряжения в осесимметричной оболочке при безмоментном сопротивлении.

Рассмотрим осесимметричную оболочку постоянной толщины (рис. 9.2, а). На оболочку действует внутреннее давление  $p$ . Считаем, что напряжения по толщине оболочки постоянны (рис. 9.2, б), тогда изгибающий момент отсутствует и оболочка находится в безмоментном состоянии, то есть  $\sigma = const$  и стенка испытывает только растяжение.

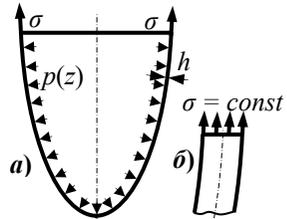


Рис. 9.2. Тонкостенная оболочка

Изгиб возникает лишь в местах резкого изменения формы и приложения силы (рис. 9.3).

Получим формулы для определения напряжений, действующих в оболочке (рис. 9.4). Выделим из оболочки элемент двумя парами меридиональных и перпендикулярных к меридиональным, поверхностями.

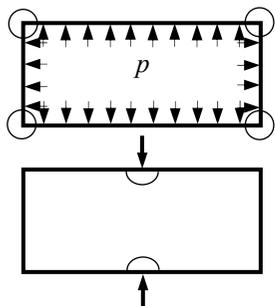


Рис. 9.3. Места возникновения моментов

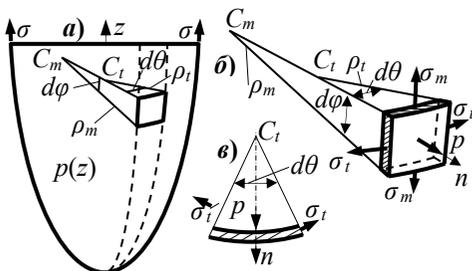


Рис. 9.4. Напряжения, действующие в оболочке

$C_m$  – центр кривизны дуги меридиана срединной поверхности,  
 $\rho_m$  – радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности,  
 $C_t$  – центр кривизны нормального сечения, перпендикулярного дуге меридиана,  
 $\rho_t$  – радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана.

Покажем элемент отдельно (рис. 9.4, б).

$\sigma_m$  – меридиональное напряжение,

$\sigma_t$  – окружное напряжение.

В силу осевой симметрии, касательные напряжения отсутствуют.

Используем уравнение статики – рассмотрим сумму проекций сил на внешнюю нормаль к элементу (рис. 9.5)

$$p \cdot \rho_t \cdot d\theta \cdot \rho_m \cdot d\varphi - 2 \cdot \sigma_t \cdot h \cdot \rho_m \cdot d\varphi \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - 2 \cdot \sigma_m \cdot h \cdot \rho_t \cdot d\theta \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

В силу малости углов  $d\theta$  и  $d\varphi$   $\sin d\theta/2 = d\theta/2$ ,  $\sin d\varphi/2 = d\varphi/2$ , и можно сократить на  $d\theta$  и  $d\varphi$ , тогда

$$p \cdot \rho_t \cdot \rho_m - \sigma_t \cdot h \cdot \rho_m - \sigma_m \cdot h \cdot \rho_t = 0.$$

Поделим полученное равенство на  $\rho_m \cdot h \cdot \rho_t$  и получим

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}. \quad (9.1)$$

– уравнение Лапласа.

Возникает вопрос? В каком соотношении находятся давление  $p$  и напряжения  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ ?

Проанализируем уравнение Лапласа. Пусть  $\rho_m = \rho_t = \rho$ , тогда  $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$  и, следовательно,  $\frac{2\sigma}{\rho} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma = \frac{\rho}{2h} \cdot p$ , но  $\frac{\rho}{2h} \gg 1$ , поэтому

$\sigma \gg p$ , или  $\sigma_m = \sigma_t \gg p$ .

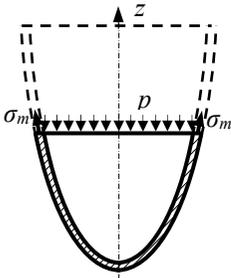


Рис. 9.5. Составление уравнения равновесия

Составим второе уравнение для определения  $\sigma_m$ ,  $\sigma_t$ , рассмотрев сумму проекций сил на ось  $z$  (рис. 9.5)

$$\sum z = 0. \tag{9.2}$$

Решая совместно (1) и (2) находим  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$ .

### 9.2. Расчёт на прочность сферической оболочки

Для сферической оболочки (рис. 9.6)  $\rho_m = \rho_t = D/2$ . В силу симметрии  $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$ .

Из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma}{\frac{D}{2}} = \frac{2\sigma}{D} = \frac{p}{h} \Rightarrow \frac{4\sigma}{D} = \frac{p}{h}, \Rightarrow \sigma = \frac{pD}{4h},$$

то есть  $\sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4h}$ .

На наружной поверхности  $\sigma_r = 0$ , а на внутренней поверхности  $\sigma_r^{наиб} = -p$ , но  $\sigma_t \gg p$ , поэтому радиальными напряжениями можно пренебречь, тогда

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pD}{4h}, \quad \sigma_3 = 0.$$

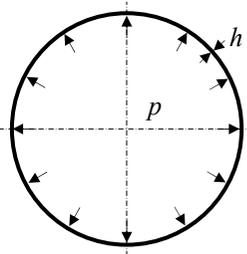


Рис. 9.6. Сферическая оболочка

Применяем третью теорию предельных напряжённых состояний

$$\sigma_{экв\ III}^{наиб} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma_{экв\ III}^{наиб} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2h}$$

– одинаково во всех точках сферической оболочки, следовательно,

$$\frac{pD}{2h} \leq [\sigma]$$

– условие прочности сферической оболочки, нагруженной внутренним давлением.

При расчёте по предельным нагрузкам получается тот же результат, так как предельные состояния по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам одинаковы (в силу малости толщины).

### 9.3. Расчёт на прочность цилиндрической оболочки

Рассмотрим для примера паровой котёл (рис. 9.7, а). Уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}.$$

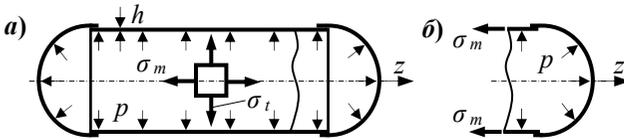


Рис. 9.7. Расчёт цилиндрической оболочки

Для цилиндрической оболочки  $p_m = \infty$ ,  $p_t = D/2$ , тогда

$$\frac{\sigma_t}{D/2} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h}, \text{ отсюда}$$

$$\sigma_t = \frac{pD}{2h}.$$

Для определения осевых напряжений проведём сечение  $a - a$  и рассмотрим равновесие правой части цилиндра (рис. 9.7, б)

$$\sum z = p \cdot \frac{\pi D^2}{4} - \sigma_m \cdot h \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2} = 0, \text{ отсюда } \sigma_m = \frac{pD}{4h}, \sigma_r \approx 0, \text{ следова-$$

тельно,  $\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2h}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_m = \frac{pD}{4h}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_r = 0$ ,

Применим третью теорию предельных напряжённых состояний

$$\sigma_{\text{эkv III}}^{\text{наиб}} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma_{\text{эkv III}}^{\text{наиб}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Условие прочности для цилиндрической части  $-\frac{pD}{2h} \leq [\sigma]$ .

Условие прочности для сферической части  $-\frac{pD}{4h} \leq [\sigma]$ , то есть

наиболее нагруженной является цилиндрическая часть и условие прочности для всего цилиндра, будет иметь вид

$$\frac{pD}{2h} \leq [\sigma].$$

## 9.4 Расчёт на прочность конической оболочки, наполненной жидкостью

Уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}$$

Для конической оболочки (рис. 9.8, а)  $\rho_m = \infty$ ,  $\rho_t = \frac{z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$ .

Рассмотрим заполненную часть оболочки

$$\frac{\sigma_t}{z \cdot \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h}, \quad p = \rho \cdot g \cdot (H - z), \quad \text{где } \rho - \text{плотность жидкости.}$$

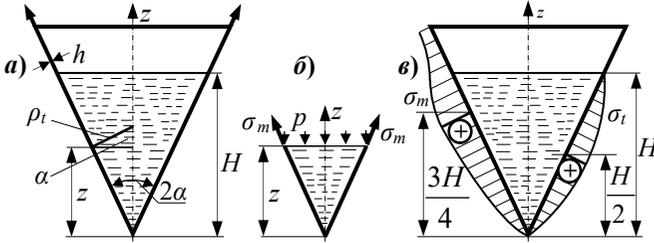


Рис. 9.8. Расчёт конической оболочки

Тогда

$$\sigma_t = \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot (H - z) \cdot z.$$

Далее определим меридиональные напряжения (рис. 9.8, б)

$$\sigma_m = \rho \cdot g \cdot \frac{1}{3} \cdot (z \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot z.$$

Составим уравнение равновесия отсечённой части

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2z \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot h \cdot \cos \alpha - \rho \cdot g \cdot (H - z) \cdot \pi \cdot (z \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 - \\ - \rho \cdot g \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (z \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot z = 0, \quad \text{отсюда}$$

$$\sigma_m = \frac{\rho \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (H - z - \frac{1}{3}z) \cdot z}{2h \cdot \cos \alpha}, \quad \text{окончательно}$$

$$\sigma_m = \frac{\rho \cdot g}{2h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \left(H - \frac{2}{3}z\right) \cdot z$$

– меридиональные напряжения заполненной части оболочки.

Теперь рассмотрим незаполненную часть оболочки (рис. 9.8 в)

при  $z \geq H$ . Здесь  $p = 0$ , тогда по уравнению Лапласа  $\frac{\sigma_t}{z \cdot \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h}$ ,  

$$\frac{\sigma_t}{\cos \alpha}$$

отсюда  $\sigma_t = 0$ .

Уравнение равновесия:

$$\sum z = \sigma_m \cdot 2z \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot h \cdot \cos \alpha - \rho \cdot g \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (H \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 \cdot H = 0,$$

и отсюда

$$\sigma_m = \frac{\rho \cdot g}{6 \cdot h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{H^3}{z}$$

Таким образом, в незаполненной части оболочки действуют только меридиональные напряжения.

Построим эпюры напряжений (рис. 9.8, в)

Окружные напряжения

При  $z = 0$   $\sigma_t = 0$ ; при  $z \geq H$   $\sigma_t = 0$ .

Определим экстремальное значение  $\sigma_t$ :

$$\frac{d\sigma_t}{dz} = \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot (H - 2z) = 0, \quad \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \neq 0, \quad H - 2z = 0, \quad \text{тогда}$$

наибольшие окружные напряжения возникают при  $z = H/2$ .

Меридиональные напряжения

При  $z = 0$   $\sigma_m = 0$ .

Определим экстремальное значение  $\sigma_m$ :

$$\frac{d\sigma_m}{dz} = \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \left(H - \frac{4}{3}z\right) = 0, \quad \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \neq 0, \quad H - \frac{4}{3}z = 0,$$

тогда наибольшие меридиональные напряжения возникают при  $z = 3H/4$ .

Далее составим условие прочности конической оболочки. Оболочки, как правило, изготавливаются из пластичных материалов, поэтому применяем третью теорию предельных напряжённых состояний

$$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} \leq [\sigma], \quad \text{где } \sigma_{\text{экв III}}^{\text{наиб}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

$\sigma_1$  равен либо  $\sigma_m$ , либо  $\sigma_t$ ,  $\sigma_3 = 0$ .

Наибольшие окружные и меридиональные напряжения опреде-

ляются по формулам

$$\sigma_t^{\text{наиб}} = \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{H^2}{4}, \quad \sigma_m^{\text{наиб}} = \frac{\rho \cdot g}{h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{3H^2}{16}, \quad \text{следовательно,}$$

$$\sigma_t^{\text{наиб}} = \frac{\rho \cdot g}{4h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot H^2, \quad \text{то есть самая опасная точка конической обо-}$$

лочки находится в середине заполненной части и это условие

$$\sigma_t^{\text{наиб}} = \frac{\rho \cdot g}{4h} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \cdot H^2,$$

– условие прочности конической оболочки, наполненной жидкостью.

### 9.5. Вопросы для самопроверки

1. Какие оболочки называются тонкостенными? 2. Какие допущения принимают в безмоментной теории оболочек? 3. Как записывается уравнение Лапласа для тонкостенных оболочек? 4. Каковы величины напряжений, возникающих в тонкостенных оболочках с внутренним давлением? 5. Как оценивается прочность сферических оболочек с внутренним давлением? 6. Как оценивается прочность цилиндрических оболочек с внутренним давлением? 7. Как оценивается прочность конических оболочек, наполненных жидкостью?

## 10. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Мы изучали поперечный изгиб, а также продольный изгиб (устойчивость).

Продольно-поперечный изгиб имеет место, если балка нагружена одновременно и продольными, и поперечными силами (вдоль и поперёк оси).

Будем рассматривать прямой (плоский) продольно-поперечный изгиб, когда силы лежат в одной из главных плоскостей жёсткости балки.

Пример – лонжерон летательного аппарата испытывает продольно-поперечный изгиб.

### 10.1. Точное решение уравнения продольно-поперечного изгиба

Рассмотрим расчётную схему продольно-поперечного изгиба – балка на двух опорах, нагружена поперечной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$  и продольными силами  $F$  (рис. 10.1). Продольные силы приложены центрально.

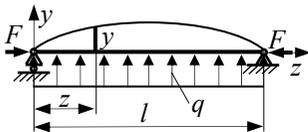


Рис. 10.1. Продольно-поперечный изгиб

Если силы приложены внецентренно, то их нужно переместить к центру и возникает дополнительная пара сил  $F \cdot e$ , где  $e$  – эксцентриситет силы.

Пусть поперечные внешние силы приложены в плоскости наибольшей жёсткости, тогда система осей  $x$ ,  $y$  и  $y = y(z)$  – прогиб в произвольном сечении.

Особенность продольно-поперечного изгиба заключается в том, что здесь необходимо учитывать изгибающий момент и от продольных сил.

Воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

$EJy'' = M$  – уравнение, полученное при поперечном изгибе, применяется и при продольном изгибе.

В любом сечении  $M = M_{\text{п}} - F \cdot y$ . Первое слагаемое этого уравнения – изгибающий момент при поперечном изгибе – как его вычислить, известно. Знак минус перед вторым слагаемым, так как балка

изгибается выпуклостью вверх.

Подставим и преобразуем

$$EJ y'' = M_n - F \cdot y, \quad y'' + \frac{F}{EJ} \cdot y = \frac{M_n}{EJ}, \quad \frac{F}{EJ} = k^2 \quad - \quad \text{положительная}$$

величина, тогда

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{M_n}{EJ}$$

– дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба в случае, когда продольные силы вызывают сжатие. Если они вызывают растяжение, то перед  $k^2$  нужно ставить минус.

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения ищем в виде  $y = y_0 + y^*$ , где  $y_0$  – общее решение однородного уравнения,  $y^*$  – частное решение неоднородного уравнения.

$$y_0'' + k^2 \cdot y_0 = 0 \quad - \quad \text{решение однородного уравнения.}$$

Общее решение однородного уравнения было найдено в теме «Устойчивость сжатых стержней». Оно имело вид

$y_0 = A \sin kz + B \cos kz$ ;  $A$  и  $B$  определялись из граничных условий.

$$(y^*)'' + k^2 \cdot y^* = 0 \quad - \quad \text{решение неоднородного уравнения.}$$

Теперь найдём частное решение неоднородного уравнения. Это решение зависит от функции изгибающего момента:  $M_n = M_n(z)$  – есть общее решение, но мы обращаемся к частным случаям.

Рассмотрим пример: балка на двух опорах, нагружена поперечной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$  и продольными силами  $F$  (см. рис. 10.1). Продольные силы  $F$  приложены центрально. Нам предстоит найти уравнение  $y^*$ .

Изгибающий момент в произвольном сечении  $z$ :

$$M_n = \frac{ql^2}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Перепишем еще раз дифференциальное уравнение

$$(y^*)'' + k^2 \cdot y^* = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^2}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right).$$

Если в правой части неоднородного дифференциального уравнения полином, то и частное решение нужно искать в виде полинома  $y^* = a + b \cdot z + c \cdot z^2$ .

Подставим это решение в дифференциальное уравнение

$$2 \cdot c + k^2 \cdot (a + b \cdot z + c \cdot z^2) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql^2}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right).$$

Все слагаемые перенесём в левую часть и сгруппируем по степеням

$$(2 \cdot c + k^2 \cdot a) + z \cdot \left( k^2 \cdot b - \frac{q \cdot l}{2E \cdot J} \right) + z^2 \left( k^2 \cdot c - \frac{q}{2E \cdot J} \right) = 0.$$

Как определить  $a, b, c$ ? Если уравнение  $y^* = a + b \cdot z + c \cdot z^2$  является решением неоднородного дифференциального уравнения, то равенство нулю должно быть выполнено при любом  $z$ , в том числе и при  $z = 0$ , тогда

$$2 \cdot c + k^2 \cdot a = 0, \quad k^2 \cdot b - \frac{q \cdot l}{2E \cdot J} = 0, \quad k^2 \cdot c - \frac{q}{2E \cdot J} = 0, \quad \text{поэтому}$$

$$a = \frac{q}{E \cdot J \cdot k^2}, \quad b = \frac{q \cdot l}{2E \cdot J \cdot k^2}, \quad c = -\frac{q}{2E \cdot J \cdot k^2}.$$

Теперь запишем решение:

$$y^* = \frac{q}{E \cdot J \cdot k^4} \cdot \left( 1 + \frac{k^2 \cdot l}{2} + \frac{k^2}{2} \cdot z^2 \right).$$

Таким образом мы нашли частное решение, теперь запишем общее решение.

$$y = A \cdot \sin k \cdot z + B \cdot \cos k \cdot z + \frac{q}{E \cdot J \cdot k^4} \cdot \left[ \frac{k^2}{2} \cdot (l \cdot z - z^2) + 1 \right]$$

– это общее решение для рассматриваемого нагружения.

Далее определим  $A$  и  $B$  из граничных условий:

$$1) \text{ при } z = 0 \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{q}{E \cdot J \cdot k^4},$$

$$2) \text{ при } z = l \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{q}{E \cdot J \cdot k^4} \cdot \frac{\cos k \cdot l - 1}{\sin k \cdot l}.$$

Отсюда

$$y = \frac{q}{E \cdot J \cdot k^4} \cdot \left[ \frac{\cos k \cdot l - 1}{\sin k \cdot l} \cdot \sin k \cdot z + \cos k \cdot z + \frac{k^2}{2} \cdot (l \cdot z - z^2) + 1 \right].$$

– это уравнение изогнутой оси балки, нагруженной поперечной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$  при продольно-поперечном изгибе.

Приступаем к определению изгибающего момента. Можно это

сделать по уравнению:  $M = M_{II} - F \cdot y$ , а можно, другим путём:  
 $E J y'' = M$ , отсюда

$$M = \frac{q}{k^2} \cdot \left[ \frac{\cos k \cdot l - 1}{\sin k \cdot l} \cdot \sin k \cdot z + \cos k \cdot z - 1 \right], \text{ так как}$$

$$(\sin k \cdot z)'' = -k^2 \cdot \sin k \cdot z, (\cos k \cdot z)'' = k^2 \cos k \cdot z, \left[ \frac{k^2}{2} \cdot (l \cdot z - z^2) \right]'' = -k^2$$

Можно видеть, что изгибающий момент изменяется по сложному закону. Для расчёта на прочность нужно знать наибольший момент. Как его найти? Необходимо исследовать функцию. Взять значение по границам, исследовать на экстремум – это общий подход.

В данном случае просто – наибольший момент действует в среднем сечении балки.

$$\text{При } z = l/2 \quad M = \frac{q}{k^2} \cdot \left[ \frac{\cos k \cdot l - 1}{\sin k \cdot l} \cdot \sin k \cdot l/2 + \cos k \cdot l/2 - 1 \right].$$

Далее преобразуем (проделать самостоятельно):

$$M_{\text{наиб}} = \frac{q}{k^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{k \cdot l}{2}}{\cos \frac{k \cdot l}{2}}. \quad (10.1)$$

Рассмотрим предельный случай, когда  $F$  стремится к нулю, тогда  $k = \sqrt{\frac{F}{E \cdot J}} \rightarrow 0$ .

Если подставить в выражение (10.1), то получим неопределённость типа 0/0. Нужно применить правило Лопиталья, но можно и по другому (разложение в ряд)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \text{ тогда}$$

$$\frac{1 - \cos \frac{k \cdot l}{2}}{\cos \frac{k \cdot l}{2}} = \frac{\left( \frac{k \cdot l}{2} \right)^2}{2!} - \frac{\left( \frac{k \cdot l}{2} \right)^4}{4!} + \dots}{1 - \frac{\left( \frac{k \cdot l}{2} \right)^2}{2!} + \frac{\left( \frac{k \cdot l}{2} \right)^4}{4!} - \dots} \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 \cdot l^2}{4}}{1} = \frac{k^2 \cdot l^2}{8}$$

и, следовательно,  $M_{\text{наиб}} = \frac{q l^2}{8}$ .

При  $k$  стремящемся к 0, все слагаемые, кроме первой величины – бесконечно малы. Пока  $k$  не достигнет значения 0, равенство будет

приблизительным, а в пределе – это точно.

$M_{\text{наиб}} = ql/8$  – это известная формула для поперечного изгиба.

Особенности продольно-поперечного изгиба:

1) Обращаемся к выражению (10.1).  $M_{\text{наиб}}$  зависит только от  $k^2 = \frac{F}{EJ}$  (в формуле  $\sin$  и  $\cos$ ), то есть, связь между внутренними и

внешними силами не линейная или иначе, между внешними силами и напряжениями – нелинейная, и, следовательно, связь между прогибами и внешними силами, тоже нелинейная. Это единственная нелинейная задача в сопротивлении материалов. Следовательно, принцип сложения внешних сил (принцип суперпозиции) неприменим.

2) Если (из выражения (10.1)), то  $M_{\text{наиб}} \rightarrow \infty$  – это при возрастании  $F$ .

Разберёмся в физическом смысле этого результата:

$$\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad kl = \pi; \quad k^2 l^2 = \pi^2; \quad k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}; \quad \frac{F}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2}, \text{ отсюда}$$

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = F_{\text{кр}} \text{ – при таком значении продольные силы, изгибаю-$$

щий момент обращаются в бесконечность, следовательно, наблюдается явление, происходящее тогда, когда  $F = F_{\text{кр}}$  – то есть происходит потеря устойчивости.

Следует обратить внимание на то, что задача получения точного решения является громоздкой, мы получили решение для частного случая. Если у балки будет несколько участков, то решение значительно усложнится. Задача громоздкая (но не сложная), поэтому применяется приближённый метод решения.

## 10.2. Приближённое решение уравнения продольно-поперечного изгиба

Будем рассматривать случай, когда поперечные нагрузки действуют в одном направлении (рис. 10.2). В этом случае уравнение изогнутой оси балки можно представить приближённо в виде  $y \approx f \cdot \sin(\pi \cdot z/l)$  (при  $F \neq 0$ ).

В действительности, это не совсем так, но при вычислении больших прогибов, это, почти правильно. При действии только поперечных сил:  $y_n \approx f_n \cdot \sin$

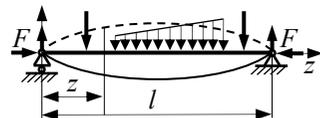


Рис. 10.2. Приближённое решение задачи продольно-поперечного изгиба

$(\pi \cdot z/l)$  (при  $F = 0$ )

Теперь обращаемся к дифференциальному уравнению продольно-поперечного изгиба  $M = M_n - F \cdot y$ . Вычислим каждое слагаемое

$$E \cdot J y'' = E \cdot J \left( -f \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot z \right),$$

$$M_n = E \cdot J y_n'' = E \cdot J \left( -f_n \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot z \right).$$

Подставим это, в уравнение продольно-поперечного изгиба

$$-E \cdot J \cdot f \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot z = -E \cdot J \cdot f_n \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot z - E \cdot J \cdot f \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \cdot z.$$

Разрешим выражение относительно  $f$  (самостоятельно)

$$f = \frac{f_n}{1 - \frac{F}{F_{кр}}}.$$

Если умножить обе части уравнения на  $\sin(\pi \cdot z/l)$ , то получим

$$y = \frac{y_n}{1 - \frac{F}{F_{кр}}} \quad (10.2)$$

– формула для прогиба в любом сечении балки.

Это приближённая формула для определения перемещения при продольно-поперечном изгибе. Она применима только в случае, когда поперечные нагрузки действуют в одном направлении. Она оказывается, как показывает опыт, достаточно точной, при  $F \leq 0,75F_{кр}$ . Она точнее для больших прогибов, среди всех прогибов балки (например, для середины балки). Чем ближе к опорам, тем точность меньше. Эту формулу можно применять и для консольной балки.

Получим формулу для момента  $y'' = \frac{M}{E \cdot J}$ ,  $y_n'' = \frac{M_n}{E \cdot J}$ .

Если дважды продифференцировать выражение (10.2) по  $z$  и преобразовать, то, используя последние две формулы, получим

$$M = \frac{M_n}{1 - \frac{F}{F_{кр}}} \quad (10.3)$$

– эта формула работает при тех же ограничениях, что и предыдущая формула (для  $y$ ). Она является достаточно точной при симметричном

нагрузении относительно середины пролёта. Это связано с общими свойствами приближённых функций, так как производная, увеличивает ошибки.

Если силы  $F$  вызывают растяжение, то в этом случае, в дифференциальном уравнении будет  $+F \cdot u$ , а общее решение однородного уравнения выразится через гиперболические функции, и в приближенных формулах, в знаменателе, второе слагаемое будет со знаком

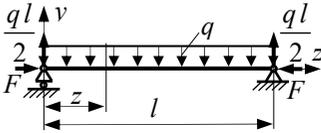


Рис. 10.3. Сравнение точного и приближённого решений

«+», то есть  $1 + \frac{F}{F_{кр}}$ .

Для практики, этот случай не представляет интереса, а расчёт ведут только по поперечным силам (растяжение может быть учтено через  $\sigma = F/A$ ).

Посмотрим, насколько точна приближённая формула для  $M$ . Вычислим изгибающий момент для балки (рис. 10.3), которую рассчитаем по точной и приближённой формулам.

Точное решение.

$$M_{\text{наиб}} = \frac{q}{k^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{k \cdot l}{2}}{\cos \frac{k \cdot l}{2}}.$$

Подставим условия:  $k^2 = \frac{F}{E \cdot J}$ ;  $F = 0,5 \cdot F_{кр} = \frac{0,5 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$ ;  $k^2 = \frac{0,5 \cdot \pi^2}{l^2} = \frac{\pi^2}{2l^2}$ ,

тогда

$$M_{\text{наиб}} = \frac{2q \cdot l^2}{\pi^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}{\cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = 0,254 q \cdot l^2.$$

Приближённое решение.

$$M_{\text{наиб}} = \frac{M_{\text{п}}^{\text{наиб}}}{1 - \frac{F}{F_{кр}}} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot (1 - 0,5)} = 0,250 q \cdot l^2.$$

Видно, что расхождение результатов составляет менее одного процента.

### 10.3. Расчёт на прочность при продольно-поперечном изгибе

Вспомним условие прочности при поперечном изгибе, когда нет продольных внешних сил

$$\frac{M_{\text{наиб}}}{W} \leq [\sigma].$$

Эта формула выведена в предположении, что при увеличении внешних сил в  $n$  раз, внутренние силы увеличатся тоже в  $n$  раз. При продольно-поперечном изгибе эту формулу применять нельзя в силу нелинейности задачи. Эта нелинейность приводит к тому, что увеличение внешних нагрузок в  $n$  раз вызывает увеличение напряжений в большее число раз. В справедливости этого вывода можно убедиться, рассматривая приближённую формулу (10.3) для изгибающего момента

$$M = \frac{M_n}{1 - \frac{F}{F_{\text{кр}}}}.$$

а знаменатель уменьшается.

Выведем новую формулу.

Будем считать, что при переходе к предельному состоянию внешние нагрузки возрастают пропорционально. В таком случае коэффициент запаса  $n_T$  можно представить:

$$n_T = \frac{F_T}{F} = \frac{(|M|_n^{\text{наиб}})_T}{|M|_n^{\text{наиб}}}$$

– здесь  $F_T$  и  $(|M|_n^{\text{наиб}})_T$  – это нагрузки, при которых наибольшее напряжение в балке достигает  $\sigma_T$ . По способу допускаемых напряжений – это опасные нагрузки.

$$F_T = n_T \cdot F, \quad (|M|_n^{\text{наиб}})_T = n_T \cdot |M|_n^{\text{наиб}} \text{ – это нам будет необходимо.}$$

Запишем формулу для напряжений при продольно-поперечном изгибе

$$|\sigma|^{\text{наиб}} = \frac{F}{A} + \frac{|M|_n^{\text{наиб}}}{W \left( 1 - \frac{F}{F_{\text{кр}}} \right)}.$$

Первое слагаемое ( $F/A$ ) приходится учитывать, так как порядок напряжений одинаков. Вместо  $\sigma_{\text{наиб}}$  подставим  $\sigma_{\tau}$ .

$$\sigma_{\tau} = \frac{F_{\tau}}{A} + \frac{|M|_{\tau}^{\text{наиб}}}{W \left( 1 - \frac{F}{F_{\text{кр}}} \right)} = \frac{F}{A} + \frac{n_{\tau} \cdot |M|_{\text{п}}^{\text{наиб}}}{W \left( 1 - \frac{n_{\tau} \cdot F}{F_{\text{кр}}} \right)}.$$

Разделим обе части на  $n_{\tau}$

$$\frac{F}{A} + \frac{|M|_{\text{п}}^{\text{наиб}}}{W \left( 1 - \frac{n_{\tau} \cdot F}{F_{\text{кр}}} \right)} \leq [\sigma]$$

– это равенство можно рассматривать как условие полного использования грузоподъемности балки, тогда

$$\frac{F}{A} + \frac{|M|_{\text{п}}^{\text{наиб}}}{W \left( 1 - \frac{n_{\tau} \cdot F}{F_{\text{кр}}} \right)} \leq [\sigma]$$

– условие прочности при продольно-поперечном изгибе (то есть для сжато-изогнутых балок).

Нелинейность этой формулы проявляется через коэффициент  $n_{\tau}$  в знаменателе. За счёт нелинейности увеличивается левая часть условия прочности, а это означает, что допустимые нагрузки будут несколько меньше. Может быть, случай растянуто-изогнутых балок, но с практической точки зрения, это менее интересная задача и продольная сила  $F$  не учитывается или учитывается через  $F/A$ .

#### 10.4. Вопросы для самопроверки

1. Когда брус испытывает продольно-поперечный изгиб? 2. Как записывается дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба? 3. Какой вид имеет точное решение дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба? 4. Как определяются перемещения при приближённом решении дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба? 5. Как оценивается прочность стержней при продольно-поперечном изгибе?

## **11. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ДРУГИЕ НАУКИ О ПРОЧНОСТИ**

К наукам, изучающим прочность элементов конструкций, кроме сопротивления материалов относятся теория упругости, теории пластичности и ползучести, строительная механика и материаловедение.

Содержание перечисленных дисциплин:

### **11.1. Сопротивление материалов**

В сопротивлении материалов изучается действие сил на тело, которое можно считать бруском (стержнем). Брус – это тело, один из размеров (длина) которого значительно больше двух других размеров (размеров поперечного сечения).

Задачи для толстостенных цилиндров, тонкостенных оболочек, которые мы изучали, не относятся к сопротивлению материалов – это задачи теории упругости.

Таким образом, в сопротивлении материалов изучаются все стороны и особенности сопротивления брусьев (простые сопротивления и сложные сопротивления). Ещё, что очень важно, задача сопротивления бруса внешним силам решается с использованием гипотезы плоских сечений. Гипотеза плоских сечений заменяет уравнения совместности деформаций и имеет приемлемую точность, только для брусьев. Для тел, которые нельзя считать брусьями, гипотеза плоских сечений, приводит к большим ошибкам.

Следовательно, в сопротивлении материалов изучается действие сил на брусья и при решении используется гипотеза плоских сечений.

### **11.2. Теория упругости**

В теории упругости изучается действие сил на тело произвольной формы. Задача решается на основании точных уравнений, выражающих закономерности деформации системы. В теории упругости рассматриваются также, и брусья (действие сил на брус), но вместо гипотезы плоских сечений, используются точные уравнения совместности деформаций.

Математический аппарат теории упругости сложнее, чем в со-

противлении материалов, так как постановка задачи, является более полной.

В сопротивлении материалов используются обыкновенные дифференциальные уравнения, причём сравнительно простые, а в теории упругости – системы дифференциальных уравнений в частных производных, к тому же, не во всех случаях, известно решение этой системы.

В теории упругости существуют два направления: математическое и прикладное. Поэтому существуют математическая теория упругости и прикладная теория упругости.

В математической теории упругости исходят из точных дифференциальных уравнений, выражающих закономерности деформации тела.

В прикладной теории упругости применяют деформационные гипотезы, то есть, вместо точных уравнений, отражающих закономерности деформации системы, для решения применяют, приближённые соотношения, что позволяет упростить задачу в математическом отношении.

Следует заметить, что речь идёт о разумных гипотезах, которые, затем проверяются экспериментально.

Далеко не для всех тел, можно применять эти гипотезы. Одной из задач прикладной теории упругости, является задача об изгибе пластинок. Для решения этой задачи, применяется гипотеза неизменности нормали к срединной поверхности пластины. Задача намного упрощается в математическом отношении, а решение, оказывается достаточно точным.

Таким образом, сопротивление материалов, можно считать одной из простейших задач прикладной теории упругости.

### **Основные уравнения теории упругости и пример их применения**

Рассмотрим произвольное тело, нагруженное самоуравновешенной системой внешних сил (рис. 11.1).

Напряжения в любой точке упругого тела:  $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$ ,  
 $\sigma_y = \sigma_y(x, y, z)$ ,  $\sigma_z = \sigma_z(x, y, z)$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z)$ , ...

Отыскание этих функций является задачей теории упругости. Без вывода, запишем уравнения, которым должны удовлетворять напряжения.

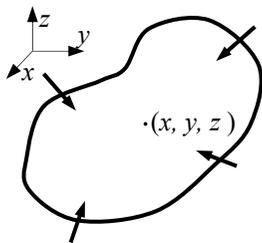


Рис. 11.1. Произвольно нагруженное тело, нагруженное самоуравновешенной системой сил

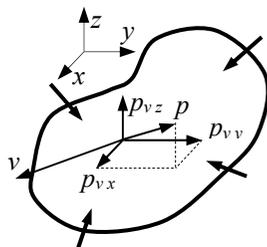


Рис. 11.2. Напряжения в произвольно нагруженном теле

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (11.1)$$

– уравнения статики в случае отсутствия объёмных сил (уравнения равновесия).

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0, & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0, & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0, & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (11.2)$$

– уравнения совместности деформаций.

Здесь  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа второго порядка,

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Должны быть также удовлетворены уравнения равновесия на контуре тела, так называемые контурные условия (рис. 11.2):

$$\begin{aligned} p_{x_v} &= \sigma_x \cdot \cos(vx) + \tau_{xy} \cdot \cos(vy) + \tau_{xz} \cdot \cos(vz) \\ p_{y_v} &= \tau_{yx} \cdot \cos(vx) + \sigma_y \cdot \cos(vy) + \tau_{yz} \cdot \cos(vz) \\ p_{z_v} &= \tau_{zx} \cdot \cos(vx) + \tau_{zy} \cdot \cos(vy) + \sigma_z \cdot \cos(vz) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Компоненты напряжённого состояния должны удовлетворять

уравнениям (10.1), (10.2), (10.3). Доказывается, что эти системы уравнений имеют единственное решение. Решаются эти уравнения, строго говоря, методом отгадывания.

**Пример.**

Для стержня, нагруженного по торцам равномерно распределённой нагрузкой, предлагается следующее решение (рис. 11.3)

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Проверим, удовлетворяет ли это решение, уравнениям теории упругости:

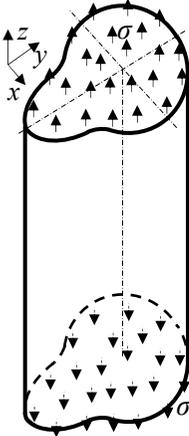


Рис. 11.3. Стержень, нагруженный по торцам равномерно распределённой нагрузкой

а) уравнения статики – удовлетворяются;

б) уравнения совместности деформаций  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma = const$  – удовлетворяются;

б) контурные условия нужно рассмотреть всю поверхность.

На боковой поверхности  $p_{x_v} = p_{y_v} = p_{z_v} = 0$  – удовлетворяются;

На верхнем и нижнем торцах  $p_{x_v} = p_{y_v} = 0$ .  $p_{z_v} = \pm \sigma$ , третье уравнение системы (10.3)  $\pm \sigma = \sigma(\pm)$ , то есть тоже удовлетворяется.

Следовательно, предложенное решение является точным.

Если на торцах. иное распределение  $\sigma_z$ , например, приложены сосредоточенные силы, то, строго говоря, предложенное решение неприменимо, так как не удовлетворяется. третье уравнение системы (10.3).

Однако предложенное решение, всё же можно применить, используя принцип Сен-Венана. Для этого, сосредоточенные силы заменяем равномерно распределёнными силами, статически им эквивалентными, то есть  $\sigma = F/A$ .

В результате такой замены. изменяется напряжённое состояние. только вблизи от торца (на глубину одного размера сечения). В остальных точках бруса. предложенное решение применимо.

Следовательно, оно применимо. и к нагружению сосредоточенными силами, но в области, исключаяющей торцы.

### 11.3. Теории пластичности и ползучести

Теория упругости рассматривает действие сил на тело в пределах закона Гука, то есть пока деформации пропорциональны напряжениям.

Сопротивление тела силам, при которых в отдельных частях или во всём теле возникают пластические деформации, рассматривается в теории пластичности (рис. 11.4).

В теории пластичности, в отличие от теории упругости, связь между напряжениями и деформациями нелинейная, что значительно усложняет задачу в математическом отношении. В связи с этим, в теории пластичности решено меньше задач, чем в теории упругости.

Здесь также имеется как математическая, так и прикладная теории пластичности.

В теории ползучести рассматриваются не только напряжения и деформации в теле, вызванные внешними силами, но и изменения напряжений и деформаций с течением времени, что является результатом ползучести, которая наблюдается, при повышенных температурах.

Уравнения теории пластичности и теории ползучести аналогичны.

Если в уравнениях теории пластичности, относительные деформации, заменить на скорости их изменения, то автоматически получаются, уравнения теории ползучести. Поэтому, если найдено решение какой-либо задачи теории пластичности, то одновременно, решена и соответствующая задача теории ползучести.

Именно поэтому, объединяют эти две дисциплины, хотя по физическому содержанию это разные задачи.

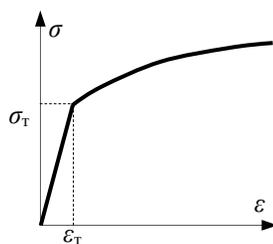


Рис. 11.4. Деформации за пределом текучести

## 11.4. Строительная механика

Сюда можно отнести строительную механику летательного аппарата, строительную механику корабля, строительную механику сооружений (теорию сооружений) и другие.

В строительной механике рассматривается действие сил на конкретные конструкции, которые являются системой объектов, изучаемых в сопротивлении материалов и теории упругости.

Например, в теории сооружений рассматривают различные стержневые конструкции (фермы, рамные конструкции, фундаменты и так далее), изучаются распределение внешних сил между элементами системы.

В строительной механике летательного аппарата изучается действие внешних сил на тонкостенные конструкции типа оболочек, действие внешних сил на оболочки, подкреплённые стержнями и так далее.

Строительная механика занимается не только анализом, но и синтезом, то есть строительная механика устанавливает не только способы расчёта конструкций, но и способы составления наиболее эффективных схем конструкций, получения оптимальных конструкций.

## 11.5. Материаловедение

В этом разделе о прочности изучаются механические свойства материалов в связи с влиянием различных эксплуатационных и технологических факторов. Результаты этих исследований – справочники.

## 11.6 Вопросы для самопроверки

1. Чем занимается сопротивление материалов? 2. Какие задачи решаются в теории упругости? 3. Какие задачи решаются в теориях пластичности и текучести? 4. Чем занимается строительная механика? 5. Чем занимается материаловедение?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Баумана, 2010. – 592 с.
2. Расчётно-проектировочные и курсовые работы по сопротивлению материалов: учеб. пособие / В.К. Шадрин, В.С. Вакулюк, О.В. Каранаева [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017. – 136 с.
3. Расчёты на прочность и устойчивость: учеб. пособие / Ю.Н. Сургутанова, В.К. Шадрин, В.С. Вакулюк, [и др.]. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017 – 112 с.
4. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчёты деталей машин на прочность / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1975. – 480 с.
5. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Изд-во Дельта, 2008. – 816 с.
6. Сопротивление материалов – механика материалов и конструкций: учебник / В.С. Жернаков. – Уфа: УГАТУ, 2012. – 495 с.
7. Сопротивление материалов. Ситуационные задачи. Дидактические материалы для разбора конкретных ситуаций: учебно-метод. пособие / Р.Ч. Гафаров. – Уфа: УГАТУ, 2015. – 99 с.

Учебное издание

**Иванов Станислав Иванович,  
Павлов Валентин Федорович,  
Кирничёв Виктор Алексеевич,  
Шадрин Валентин Карпович,  
Сазанов Вячеслав Петрович,  
Вакулюк Владимир Степанович**

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

*Часть 2*

*Учебное пособие*

Редактор Н.С. Купринова  
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 7.12.2018. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печ. л. 10,25.  
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 15(Р5У)/2018.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34



