

САМАРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени академика С.П. КОРОЛЕВА

*В.В. Котляр*

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ  
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ОПТИКЕ**

САМАРА  
1995

Государственный комитет Российской  
Федерации по высшему образованию

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С. П. Королева

В. В. Котляр

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОПТИКЕ

Учебное пособие

Самара 1995

УДК 535.8 + 523.8

Специальные интегральные преобразования в оптике: Учеб. пособие  
/ В.В.Котляров, Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Самара, 1995. 78с.  
ISBN 5-230-16979-6

Рассмотрены интегральные преобразования, которые активно стали использоваться в последнее время для обработки изображений и для синтеза световых полей. К ним относятся преобразования Габора, Зака, преобразование волнового пакета и частичное Фурье-преобразование, а также преобразования Вигнера, Абея, Неймана-Ханкеля и линзовое преобразование. Рассмотрены также разложения комплексной функции, описывающей световое поле, в ряды по ортогональным функциям, описывающим модовые состояния светового поля. К ним относятся разложения по функциям Бесселя, полиномам Эрмита и Лагерра и по вытянутым сфероидальным функциям.

Предназначено для студентов специальности 01.02, специализирующихся по "Компьютерной оптике" и "Обработке изображений". Подготовлено на кафедре "Техническая кибернетика".  
Ил. 18. Библиогр. 38 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева

Рецензент доц. А.Г.Храмов

ISBN 5-230-16979-6

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 1995

## ВВЕДЕНИЕ

Интегральные преобразования в оптике стали использоваться с тех пор, когда было понято, что простая сферическая линза, собирая световые лучи в фокус, выполняет интегральное преобразование Фурье. После этого появился раздел оптики под названием "Фурье-оптика".

Далее было выяснено, что с помощью определенных оптических элементов, типа пространственных фильтров, можно оптически реализовать ряд других интегральных преобразований. Так появились разделы современной оптики - "Гильберт-оптика" и "Бессель-оптика".

Можно упомянуть и о других распространенных интегральных преобразованиях, которые активно используются. Косинусное преобразование используется для сжатия изображений; преобразование Меллина используется при инвариантном распознавании образов; преобразования Радона и Абеля применяются в томографии и т.д.

В последнее время активно стали использоваться в приложениях интегральные преобразования Габора и волнового пакета. Это преобразования типа свертки, и поэтому для произвольной функции ядра существует обратное преобразование. В качестве ядра часто используется гауссовая функция.

С новой точки зрения рассмотрен вопрос о разложении функции амплитуды светового поля в ряд по ортогональным модовым функциям. Итеративными методами решается задача аппроксимации произвольного волнового поля или изображения конечной суммой бесселевых и гауссовых модовых функций.

Формирование изображений описано с помощью собственных функций оптической системы. Для линзы с конечной апертурой такими функциями являются вытянутые сфероидальные функции. Их эффективное число равно числу степеней свободы изображения.

Рассмотрены также интегральные преобразования, связанные с решением задачи восстановления относительной концентрации частиц разных радиусов в смеси. Эта задача решается с помощью преобразований Абеля и Неймана-Ханкеля.

## 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАБОРА

### 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАБОРА

В 1946 году Д. Габор (изобретатель голографии) предложил рассматривать оптические сигналы как суперпозицию смещенных элементарных гауссовых сигналов, промодулированных с различной пространственной несущей частотой. Под оптическим сигналом понимается комплексная функция одной или двух пространственных переменных, описывающая комплексную амплитуду света в некоторой точке пространства. Свет предполагается когерентным и монохроматическим с длиной волны  $\lambda$  и волновым числом  $k=2\pi/\lambda$ .

Габоровское разложение одномерного сигнала имеет вид:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{mn} g(x-n\Delta x) \exp\left[2\pi i m \Delta \xi (x-n\Delta x)\right], \quad (1)$$

где  $G_{mn}$  — коэффициенты разложения,  $g(x)$  — габоровская функция окна,  $\Delta x$  и  $\Delta \xi$  — элементы разрешения в пространственной и частотной областях пространства, удовлетворяющие условию:

$$\Delta x \Delta \xi \leq 1. \quad (2)$$

Комплексные амплитуды света в пространственной  $f(x)$  и частотной  $F(\xi)$  плоскостях связаны преобразованием Фурье:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[-2\pi i x \xi\right] dx, \quad (3)$$

которое в дискретном варианте имеет вид

$$F_m = \sum_{n=-N}^N f_n \exp\left[-2\pi i mn/(2N+1)\right], \quad (4)$$

Где  $F_m = F(\xi_m)$ ,  $\xi_m = m \Delta \xi$ ,  $f_n = f(x_n)$ ,  $x_n = n \Delta x$ .

Сравнивая показатели степени экспонент в уравнениях (3) и (4), получим условие, которому должны удовлетворять элементы дискретизации  $\Delta x$  и  $\Delta \xi$ :

$$\Delta x \Delta \xi = \frac{1}{2N+1} \quad (5)$$

Из сравнения неравенств (2) и (5) следует, что для выполнения преобразования Фурье (3) требуется более частая сетка отсчетов, следующие с частотой Найквиста, чем для преобразования Габора (ПГ). Для упрощения последующих выкладок в дальнейшем предполагается выполнение условия:

$$\Delta x \Delta \xi = 1. \quad (6)$$

## 1.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКА

Так как в общем случае набор смещенных функций окна  $g_n = g(x-n\Delta x)$  не образует совокупности взаимно ортогональных функций, то для расчета коэффициентов разложения  $G_{mn}$  нельзя использовать известные формулы обращения.

Чтобы найти коэффициенты уравнения (I), используем преобразование Зака (ПЗ) [1]:

$$F(x, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\Delta x) \exp[-2\pi i n \Delta x w] \quad (7)$$

Из уравнения (7) с учетом условия (6) можно получить свойство периодичности ПЗ по переменной  $w$ :

$$F(x, w+\Delta \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\Delta x) \exp[-2\pi i n \Delta x (w+\Delta \xi)] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\Delta x) \exp[-2\pi i n \Delta x w] \exp(-2\pi i n) = F(x, w) \quad (8)$$

И СВОЙСТВО квазипериодичности по переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x, w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-(n-1)\Delta x) \exp[-2\pi i n \Delta x w] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-(n-1)\Delta x) \exp[-2\pi i (n-1)\Delta x w] \exp[-2\pi i \Delta x w] = \\ &= \exp[-2\pi i \Delta x w] \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-m\Delta x) \exp[-2\pi i m \Delta x w] = F(x, w) \exp[-2\pi i \Delta x w]. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (7) позволяет получить формулу обращения для преобразования Зака. Действительно, применяя к обеим частям равенства (7) преобразование Фурье (3) по переменной  $w$  на отрезке периодичности  $\Delta x$  и учитывая условие (6), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x} F(x, w) \exp[2\pi i m \Delta x w] dw &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\Delta x) \int_0^{\Delta x} \exp[-2\pi i (n-m)\Delta x w] dw = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\Delta x) \left[ \frac{\exp[-2\pi i (n-m)\Delta x \Delta x] - 1}{-2\pi i (n-m)\Delta x} \right] = \\ &= \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\Delta x) \delta_{mn} = \Delta x f(x-m\Delta x), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\delta_{mn}$  - символ Кронекера.

Из соотношений (10) окончательно получается формула обращения для ПЗ:

$$f(x-m\Delta x) = \Delta x^{-1} \int_0^{\Delta x} F(x, w) \exp[2\pi i m \Delta x w] dw . \quad (11)$$

### 1.3. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАБОРА

Используем теперь свойства преобразования Зака для получения формулы обращения ПГ. Для этого подставим в уравнение (I) функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , выраженные через их Зак-образы

$$f(x) = \Delta x^{-1} \int_0^{\Delta x} F(x, w) dw , \quad (12)$$

$$g(x-n\Delta x) = \Delta x^{-1} \int_0^{\Delta x} G(x, w) \exp[2\pi i n \Delta x w] dw , \quad (13)$$

где функции  $F(x, w)$  и  $G(x, w)$  - Зак-образы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  соответственно и учтем условие (6), тогда получим равенство:

$$\Delta x^{-1} \int_0^{\Delta x} F(x, w) dw = \Delta x^{-1} \int_0^{\Delta x} G(x, w) \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} G_{mn} \exp[2\pi i (n \Delta x w + m \Delta x x)] dw . \quad (14)$$

Из равенства интегралов (I4) при произвольных функциях  $F(x, w)$  и  $G(x, w)$  следует равенство их подынтегральных выражений:

$$F(x, w) = G(x, w) \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} G_{mn} \exp[2\pi i (n \Delta x w + m \Delta x x)] . \quad (15)$$

Из уравнения (I5) видно, что коэффициенты Габора  $G_{mn}$  являются коэффициентами разложения в двумерный ряд Фурье функции  $F(x, w)G^{-1}(x, w)$

и находятся по следующей формуле:

$$G_{mn} = \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta \xi} \frac{F(x, w)}{G(x, w)} \exp[-2\pi i(n\Delta x w + m\Delta \xi x)] dx dw \quad (16)$$

#### 1.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ГАБОРА И БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Вместо формулы (16), которая служит для расчета коэффициентов разложения (I), можно использовать другую формулу, полученную на альтернативной основе.

Если определить некоторую функцию  $\bar{g}(x)$  как биортогональную к функции окна  $g(x)$  по следующему правилу

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-n\Delta x) \bar{g}^*(x-p\Delta x) \exp[2\pi i(m-q)\Delta \xi x] dx = \delta_{np} \delta_{mq} \quad (17)$$

то нетрудно получить следующую формулу обращения III:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}^*(x-p\Delta x) \exp[-2\pi i q \Delta \xi x] dx = \\ & = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} G_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-n\Delta x) \bar{g}^*(x-p\Delta x) \exp[2\pi i(m-q)\Delta \xi x] dx = \\ & = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} G_{mn} \delta_{np} \delta_{mq} = G_{pq} \quad (18) \end{aligned}$$

Из соотношений (18) следует окончательная формула для расчета коэффициентов Габора через биортогональную функцию

$$G_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}^*(x - n\Delta x) \exp[-2\pi i n \Delta x] dx \quad (19)$$

#### 1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАКА И БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Из сравнения уравнений (16) и (19) нетрудно получить уравнение связи между функциями  $\bar{g}^*(x)$  и  $G(x, w)$ . Такое уравнение позволит по произвольно выбранной функции окна  $g(x)$  построить биортогональную к ней функцию  $\bar{g}^*(x)$  и далее воспользоваться уравнением (19) для расчета коэффициентов Габора. Заметим, что вычисления по формуле (19) основаны на применении алгоритма одномерного БПФ (быстрого преобразования Фурье), а по формуле (16) - двумерного БПФ.

Подставим в уравнение (17) при  $m=p$  функции  $g(x)$  и  $\bar{g}^*(x)$ , выраженные через преобразования Зака:

$$g(x - n\Delta x) = \Delta x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, w) \exp[2\pi i w n \Delta x] dw, \quad (20)$$

$$\bar{g}^*(x - p\Delta x) = \Delta x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}^*(x, w') \exp[-2\pi i w' p \Delta x] dw'. \quad (21)$$

Тогда получим следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x - n\Delta x) \bar{g}^*(x - p\Delta x) dx = \Delta x^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, w) \bar{G}^*(x, w') * \exp[2\pi i \Delta x (w n - p w')] dx dw dw' = \delta_{np} \quad (22)$$

Уравнение (22) будет выполняться при условии, что верно равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, w) \bar{G}^*(x, w') dw = \Delta \xi \delta(w - w'), \quad (23)$$

где  $\delta(w - w')$  - функция Дирака.

Действительно, подставив уравнение (23) в (22), получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \Delta \xi^{-2} \int_0^{\Delta \xi} \int_0^{\Delta \xi} \Delta \xi \delta(w - w') \exp[2\pi i \Delta x (nw - pw')] dw dw' = \\ & = \Delta \xi^{-1} \int_0^{\Delta \xi} \exp[2\pi i \Delta x w (n-p)] dw = \frac{\exp[2\pi i (n-p) \Delta x \Delta \xi] - 1}{2\pi i (n-p) \Delta x \Delta \xi} = \delta_{np}. \quad (24) \end{aligned}$$

Из уравнения (23) следует, что имеет место равенство

$$G(x, w) \bar{G}^*(x, w') = \Delta \xi^{-1} \exp[-2\pi i (w - w') x], \quad (25)$$

из которого получается связь между Зак-образами функций  $g(x)$  и  $\bar{g}^*(x)$

$$\bar{g}^*(x) = \frac{1}{\Delta \xi} \frac{1}{G(x, w)}. \quad (26)$$

Окончательно из уравнения (26) следует, что биортогональная функция  $\bar{g}^*(x)$  связана с Зак-образом  $G(x, w)$  функции окна  $g(x)$  следующим соотношением:

$$\bar{g}^*(x) = \Delta \xi^{-1} \int_0^{\Delta \xi} \frac{dw}{G(x, w)}. \quad (27)$$

ПРИМЕР 1. Характерным для преобразования Габора является использование гауссовой функции окна

$$g_{mn}(x) = g(x-n\Delta x) \exp[2\pi i m \Delta x x], \quad (28)$$

$$g(x) = (2\pi\sigma)^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (29)$$

На рис.1 показана реальная часть функции (28) при различных значениях  $m$  и  $n$ :  $m=1, n=0$  (а);  $m=2, n=0$  (б);  $m=4, n=0$  (в).

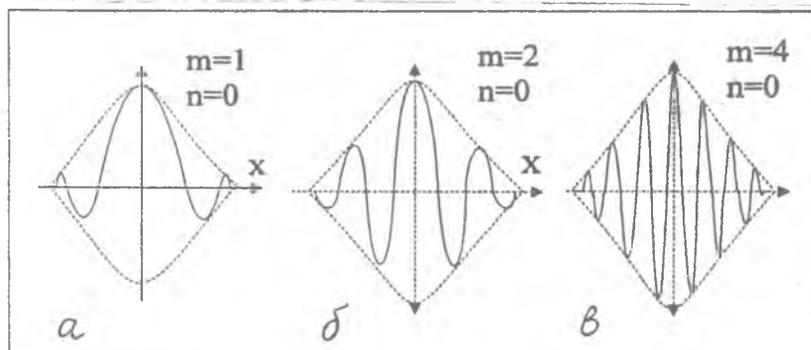


Рис.1. Функции, которые обычно используются при разложении Габора

ПРИМЕР 2. Пусть функция окна имеет вид

$$g(\xi) = \text{sinc}(\pi L \xi), \quad (30)$$

тогда разложение Габора функции  $F(\xi)$  в частотной плоскости  $\xi$  представимо в виде

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sinc} \left[ \pi L \left( \xi - \frac{n}{T} \right) \right] \exp \left[ 2\pi i m L \left( \xi - \frac{n}{T} \right) \right]. \quad (31)$$

Такой формулой описывается комплексная амплитуда спектра Фурье для оптического элемента с функцией пропускания:

$$f(x) = f_0 \left( \frac{x - \alpha_n}{T} \right) \operatorname{rect} \left( \frac{x - nL}{L} \right), \quad (32)$$

где  $f_0(x) = f_0(x+T)$  - периодическая функция с периодом  $T$ , имеющая некоторые сдвиги  $\alpha_n$  при  $x \in [L(n-1/2), L(n+1/2)]$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

На рис.2 показан примерный вид функции  $f(x)$  с бинарной функцией  $f_0(x)$ . Коэффициенты Габора  $G_{mn}$  в уравнении (31) можно рассчитать, используя уравнение (32), и они будут равны Фурье-образу от функции

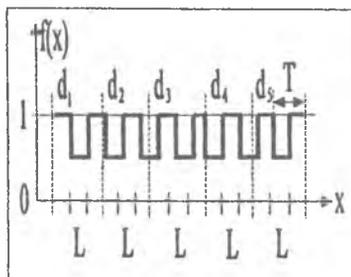


Рис. 2. Примерный вид функции  $f(x)$

$$f_0 \left( \frac{x - \alpha_n}{T} \right) \text{ в точке } \xi = \frac{n}{T} :$$

$$G_{mn} = \mathcal{F} \left\{ f_0 \left( \frac{x - \alpha_n}{T} \right) \right\} \Big|_{\xi = \frac{n}{T}}, \quad (33)$$

где  $\mathcal{F}$  - знак Фурье-преобразования.

При условии, что на участках  $[L(n-1/2), L(n+1/2)]$  укладывается целое число периодов функции  $f_0(x)$ , то есть выполняется условие

$$L = mT, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

можно показать, что для функции окна  $g(x)$  из уравнения (30) будет выполняться условие биортогональности

$$L \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left[ \pi L \left( \xi - \frac{m}{T} \right) \right] \text{sinc} \left[ \pi L \left( \xi - \frac{p}{T} \right) \right] \exp \left[ 2\pi i L \xi (q-n) \right] d\xi = \delta_{mp} \delta_{nq}. \quad (35)$$

Поэтому коэффициенты Габора для разложения вида (31) можно найти из следующего соотношения

$$G_{mn} = L \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \text{sinc} \left[ \pi L \left( \xi - \frac{m}{T} \right) \right] \exp \left[ -2\pi i L n \xi \right] d\xi. \quad (36)$$

### 1.6. ОПТИЧЕСКОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАБОРА

Одномерное ПГ может быть реализовано с помощью оптического когерентного процессора, схема которого приведена на рис.3. Сферическая волна от точечного источника когерентного света I преобразуется с помощью комбинации сферической S и цилиндрической C линз в световой пучок, коллимированный по оси  $x$  и сходящийся по оси  $y$ . Сходящийся пучок формирует узкую полоску света вдоль оси  $x$  в плоскости, в которой расположен носитель сигнала, например, транспарант или акустооптическая ячейка, функция пропускания которой пропорциональна функции одномерного сигнала  $f(x)$  и промодулирована гармонически с пространственной частотой  $\xi_0$ :

$$p(x) = f(x) \cos(2\pi \xi_0 x) + C, \quad (37)$$

постоянная  $C$  обеспечивает положительность функции пропускания транспаранта:  $p(x) \geq 0$ . Далее с помощью цилиндрической линзы  $C1$  одномерное световое поле преобразуется в двумерное поле:

$$p(x, y) = p(x) \quad (38)$$

в плоскости фильтрации. В этой плоскости располагается маска Габора,

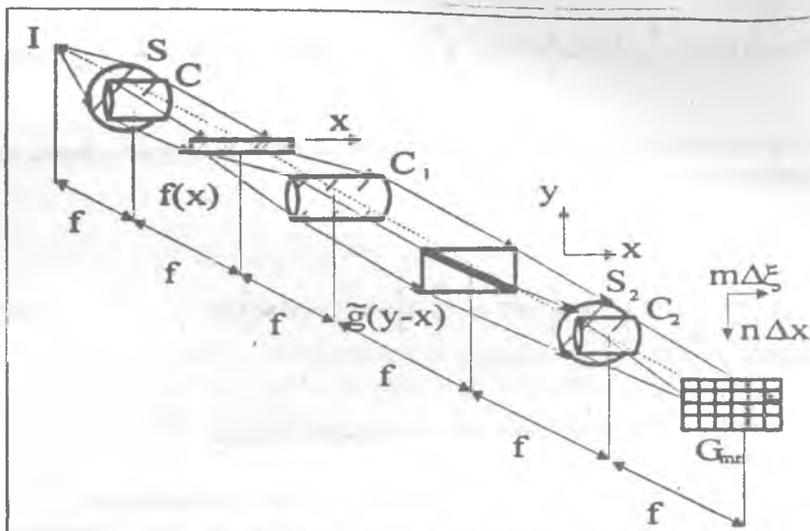


Рис. 3. Когерентный оптический процессор Габора

пропускание которой пропорционально биортогональной функции  $\bar{g}^*(x)$ , предварительно рассчитанной по формуле (27) для выбранной функции окна  $g(x)$ . Пропускание маски Габора равно:

$$q(x, y) = \bar{g}(x-y) \cos(2\pi \zeta_0 x) + D, \quad (39)$$

где  $D$  - постоянная,  $q \geq 0$ , функция  $\bar{g}(x)$  должна быть реальной. Заметим, что разность аргументов  $x-y$  у функции  $\bar{g}(x)$  означает, что центральные точки этой функции расположены вдоль диагонали маски Габора (рис.3).

Комплексная амплитуда света сразу за маской равна произведению функций (38) и (39):

$$r(x, y) = 0.5 \bar{g}(x-y) f(x) \left[ 1 + \cos(4\pi \zeta_0 x) \right] + \left[ C \bar{g}(x-y) + D f(x) \right] \cos(2\pi \zeta_0 x) + CD. \quad (40)$$

Последняя комбинация сферической S2 и цилиндрической C2 линз выполняет преобразование Фурье по оси  $x$  и строит изображение по оси  $y$ . Фокусные расстояния всех линз на рис.3 равны  $f$ . Итак, на выходе процессора получится световое поле, пространственно разделенное на пять локальных зон в соответствии с числом слагаемых в уравнении (40). Искомый сигнал располагается в точке выходной плоскости с пространственной частотой  $Z'_0$  и описывается следующей функцией

$$G(\xi, y) = 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x-y) f(x) \exp[-2\pi i x \xi] dx \quad (41)$$

Функция  $G(\xi, y)$  будет пространственно разделена от других слагаемых, входящих в уравнение (40), если несущая пространственная частота выбрана достаточно большой:

$$Z'_0 > \left[ \mathcal{F}_f, \mathcal{F}_g^- \right]_{\max} + \mathcal{F}_{fg}^- \quad (42)$$

где  $\mathcal{F}_f$ ,  $\mathcal{F}_g^-$  и  $\mathcal{F}_{fg}^-$  - ширины Фурье-образов функций  $f$ ,  $\bar{g}$  и  $\bar{fg}$  соответственно,  $[..]_{\max}$  - большее из двух чисел.

### 1.7. РАЗЛОЖЕНИЕ ГАБОРА ДВУМЕРНОГО СИГНАЛА

Можно показать, что для двумерных сигналов  $f(x, y)$  имеют место уравнения, аналогичные уравнениям (I) и (I9), и представляющие собой преобразование Габора 2-D сигнала:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{mnpq} g(x-m\Delta x, y-n\Delta y) * \exp\left\{2\pi i \left[ p\Delta x (x-m\Delta x) + q\Delta y (y-n\Delta y) \right]\right\} \quad (43)$$

$$G_{mnpq} = \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{g}^*(x-m\Delta x, y-n\Delta y) f(x,y) \exp[-2\pi i(p\Delta x + q\Delta y)] dx dy. \quad (44)$$

### 1.8. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАБОРА

Вместо уравнения (I) представим ПГ в другом виде, также часто используемом [4]:

$$f(x) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} G_{mn} g(x-nT) \exp[2\pi imx/T]. \quad (45)$$

Пусть далее функция  $f(x)$  представлена своими отсчетами в эквидистантных точках  $x_k = kT/M$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, MN-1$ , а бесконечная сумма (45) заменена на конечные с числом слагаемых  $M$  и  $N$ , тогда вместо уравнения (45) получим дискретный вариант разложения Габора, предназначенный для численного программирования:

$$f_k = \sum_{m, n=0}^{M, N} G_{mn} g(kT/M - nT) \exp(2\pi imk/M), \quad (46)$$

где  $f_k = f(x_k)$ .

### 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Недостатком преобразования Габора (I) является то, что функция окна при разложении имеет фиксированную ширину и только смещается по координате. Это ограничение не позволяет при анализе сигналов или изображений варьировать величину разрешения.

Ниже рассматривается более универсальное преобразование, названное волновым (wavelet transform)[4] или преобразованием волнового пакета (ПВП), в котором изменяется ширина функции ядра преобразования, что позволяет регулировать степень разрешения при анализе сигналов.

## 2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для одномерной функции  $f(x)$  ПВП имеет по определению следующий вид:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h_{ab}(x) dx, \quad (47)$$

где  $h_{ab}(x)$  - функции ядра преобразования, которые являются дочерними функциями некоторой действительной материнской функции окна  $h(x)$ :

$$h_{ab}(x) = a^{-1/2} h\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (48)$$

Вместо уравнения (48) для дочерних функций используются часто следующие функции:

$$\bar{h}_{ab}(x) = a^{1/2} h[a(x-b)]. \quad (49)$$

Из уравнения (48) следует условие сохранения "площади" дочерних функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_{ab}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| h\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|^2 \frac{dx}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi)|^2 d\xi = \text{const}. \quad (50)$$

В уравнении (48) параметр  $b \in [-\infty, \infty]$  задает величину смещения функции окна, а параметр  $a > 0$  задает степень дилатации функции окна: при  $a > 1$  - растяжение, а при  $a < 1$  - сжатие.

Из уравнений (47) и (48) следует, что волновое преобразование имеет вид интеграла свертки двух функций и поэтому нетрудно выразить ПВП через Фурье-образы исходных функций.

## 2.2. ВОЛНОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ЧАСТОТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Для получения ПВИ в частотной плоскости перепишем уравнение (47) в виде свертки явным образом

$$W(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h\left[\frac{x-b}{a}\right] dx \quad (51)$$

и подставим вместо подынтегральных функций их Фурье-образы:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp[2\pi i x \xi] d\xi, \quad (52)$$

$$a^{-1/2} h\left[\frac{x-b}{a}\right] = a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(a\xi) \exp[2\pi i \xi (b-x)] d\xi, \quad (53)$$

где

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi) \exp(2\pi i x \xi) d\xi. \quad (54)$$

Заметим, что так как материнская функция  $h(x)$  выбирается действительной, то для ее Фурье-образа выполняется равенство:  $H^*(\xi) = H(-\xi)$ . Тогда вместо уравнения (51) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} W(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(a\xi) F(\xi') \exp[2\pi i \xi (b-x)] \exp(2\pi i x \xi') dx d\xi' d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(a\xi) F(\xi') \exp(2\pi i b \xi) \delta(\xi - \xi') d\xi d\xi' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) H^*(a\xi) \exp(2\pi i b \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (55)$$

При выводе формулы (55) было использовано определение  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pm 2\pi i x \zeta] dx = \delta(\zeta) . \quad (56)$$

Заметим, что если дочерние функции выбрать в виде (49), то вместо уравнения (53) получим следующее выражение

$$a^{1/2} \bar{h}[a(x-b)] = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}^* \left[ \frac{\zeta}{a} \right] \exp[2\pi i \zeta (b-x)] d\zeta , \quad (57)$$

а вместо уравнения (55) - следующее:

$$W(a,b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \bar{H}^* \left[ \frac{\zeta}{a} \right] \exp(2\pi i b \zeta) d\zeta . \quad (58)$$

На уравнении (58) основана возможность построения оптического процессора для вычисления ПВП.

### 2.3. ОПТИЧЕСКОЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

На рис.4 показана оптическая схема для выполнения волнового преобразования одномерного сигнала [5]. Точечный источник  $I$  когерентного света формирует расходящуюся сферическую волну, которая преобразуется комбинацией сферической  $S$  и цилиндрической  $S$  линз так, что по оси  $x$  образуется коллимированный пучок, а по оси  $y$  сходящийся в тонкую линию в плоскости  $\Sigma$ , где расположен носитель сигнала. То есть устройство ( транспарант или акустооптическая ячейка), функция пропускания которого пропорциональна сигналу  $f(x)$ . Далее сферическая линза  $S1$  выполняет двумерное преобразование Фурье, так что в плоскости фильтра получим амплитуду света, равную выражению

$$F(y, \xi) = F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)] \quad , \quad (59)$$

а пропускание фильтра имеет вид:

$$\bar{H}_a(\xi) = a^{-1/2} \bar{H}\left(\frac{\xi}{a}\right) \quad . \quad (60)$$

При разных значениях координаты  $x$  записываются фильтры с разным масштабным коэффициентом  $a$ .

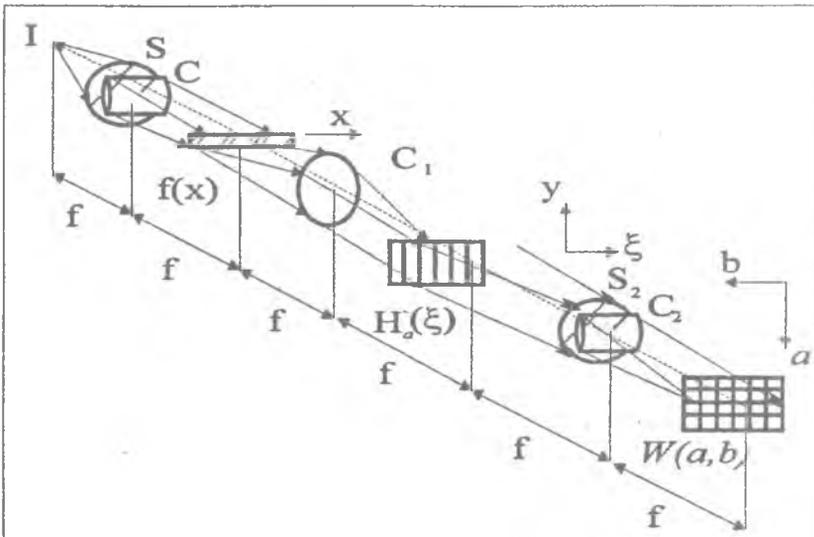


Рис. 4. Когерентный оптический процессор для выполнения прямого волнового преобразования

Далее комбинацией линз  $S_2+C_2$  (рис.4) выполняется по оси  $\xi$  одномерное преобразование Фурье, а по оси  $y$  строится изображение. Поэтому в выходной плоскости формируется световое поле, имеющее комплексную амплитуду, удовлетворяющую уравнению

$$W(a,b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \bar{H}\left(\frac{\xi}{a}\right) \exp\left[2\pi i b \xi\right] d\xi, \quad (61)$$

где ось  $a$  направлена вдоль оси  $y$ , но в противоположную сторону, а ось  $b$  направлена вдоль оси  $\xi$ , но также в противоположную сторону. Видно, что уравнение (61) совпадает с уравнением (58).

Для выполнения обратного преобразования волнового пакета следует модернизировать оптическую схему (рис.4), добавив полупрозрачное зеркало  $m$  и расщепитель пучка  $BS$  (рис.5). Тогда зеркало  $m$  обращает часть светового излучения, и на обратном проходе над функцией  $W(a,b)$  выполняется с помощью комбинации линз  $S_2+C_2$  обратное преобразование Фурье по координате  $b$ . Поэтому перед фильтром в плоскости  $(\xi, y)$  сфокусируется световое поле с комплексной амплитудой, описываемой выражением

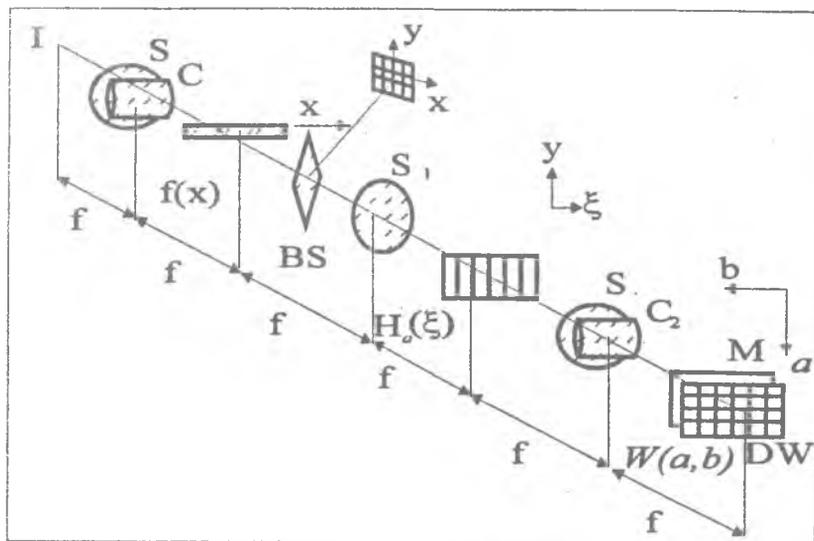


Рис. 5. Когерентный процессор  
для прямого обратного ПВП

$$F(\xi) a^{-1/2} H\left(\frac{\xi}{a}\right) . \quad (62)$$

После прохождения фильтра в обратном направлении амплитуда (62) домножается на функцию пропускания фильтра

$$a^{-1/2} H\left(\frac{-\xi}{a}\right) . \quad (63)$$

Далее с помощью сферической линзы S1 и расщепителя пучка BS (рис.5) в выходной плоскости обратного волнового преобразования сформируется световое поле с амплитудой

$$\bar{f}(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi) a^{-1} \left| H\left(\frac{\xi}{a}\right) \right|^2 \exp\left[-2\pi i(x\xi + ay)\right] d\xi da = \quad (64)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left\{ \int_0^{\infty} a^{-1} \left| H\left(\frac{\xi}{a}\right) \right|^2 \exp(-2\pi i ay) da \right\} \exp(-2\pi i x \xi) d\xi .$$

Из уравнения (64) следует, что при  $y=0$  в выходной плоскости процессора (рис.5) на обратном проходе сформируется поле с амплитудой, пропорциональной входному сигналу  $f(x)$  :

$$\bar{f}(x, 0) = C f(x) , \quad (65)$$

где постоянная  $C$  равна выражению

$$C = \int_0^{\infty} \eta \left| H\left(\frac{1}{\eta}\right) \right|^2 d\eta , \quad \eta = \frac{a}{\xi} . \quad (66)$$

#### 2.4. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ВОЛНОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для получения уравнения обращения ПВП будем использовать уравнение (58) для волнового преобразования в частотной плоскости, которое перепишем, опуская черту над функцией  $h(\xi)$ ,

$$W(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) h^* \left( \frac{\xi}{a} \right) \exp(2\pi i b \xi) d\xi . \quad (67)$$

Из уравнения (67) следует, что

$$F(\xi) a^{-1/2} h^* \left( \frac{\xi}{a} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} W(a, b) \exp(-2\pi i b \xi) db . \quad (68)$$

Далее, умножив обе части уравнения (68) на функцию

$$a^{-1/2} h \left( \frac{\xi}{a} \right) ,$$

получим следующее выражение:

$$F(\xi) a^{-1} \left| h \left( \frac{\xi}{a} \right) \right|^2 = a^{-1} h \left( \frac{\xi}{a} \right) \mathcal{F}_b \{ W(a, b) \} . \quad (69)$$

где  $\mathcal{F}_b$  - знак Фурье-преобразования по переменной  $b$ . Обе части уравнения (69) теперь проинтегрируем по переменной  $a$ :

$$F(\xi) \int_0^{\infty} a^{-1} \left| h \left( \frac{\xi}{a} \right) \right|^2 da = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^{-1/2} h \left( \frac{\xi}{a} \right) W(a, b) \exp(-2\pi i b \xi) db da . \quad (70)$$

Интеграл, стоящий слева в уравнении (70), равен постоянному значению, так как после замены  $\eta = \xi/a$  принимает вид постоянной  $C$ , определенной уравнением (66). С учетом этого вычислим от обеих частей уравнения (70) обратное преобразование Фурье по переменной  $\xi$ :

$$\begin{aligned}
 C \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp(2\pi i x \xi) d\xi &= C f(x) = \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} a^{-1/2} H\left[\frac{\xi}{a}\right] W(a, b) \exp[2\pi i \xi (x-b)] da db d\xi = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} a^{1/2} h[a(x-b)] W(a, b) da db . \tag{71}
 \end{aligned}$$

Из уравнения (71) окончательно получим формулу обращения для волнового преобразования

$$f(x) = C^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} W(a, b) a^{1/2} h[a(x-b)] da db . \tag{72}$$

Если дочерние функции выбраны в виде, определенном уравнением (48)

$$a^{-1/2} h\left[\frac{x-b}{a}\right] ,$$

то формула обращения получается отличной от формулы (72) и следует из уравнения (55):

$$f(x) = \bar{C}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} W(a, b) a^{-5/2} h\left[\frac{x-b}{a}\right] da db , \tag{73}$$

$$\bar{C} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\eta)|^2}{|\eta|} d\eta . \tag{74}$$

## 2.5. УСЛОВИЕ НУЛЯ ДЛЯ ДОЧЕРНИХ ФУНКЦИЙ

Из уравнения (67) можно получить условие "нуля", которому должна удовлетворять материнская и дочерние функции волнового преобразования. Это условие вытекает из требования существования постоянной  $c$  или  $\bar{c}$ . Постоянная  $\bar{c}$  должна быть конечной :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\eta)|^2}{|\eta|} d\eta < \infty \quad (75)$$

Из уравнения (75) видно, что источником расходимости интеграла является обращение в нуль знаменателя подынтегрального выражения при  $\eta=0$ . Чтобы устранить эту расходимость, потребуем равенства нулю числителя подынтегрального выражения в уравнении (75):  $|H(0)|^2=0$ . Последнее условие с учетом уравнения (54) можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 0 \quad (76)$$

Уравнение (76) называется условием "нуля" для материнской функции волнового преобразования.

ПРИМЕР 3. Приведем примеры используемых часто материнских функций ПВП.

1. функция ХАРА [7]. Функция Хара имеет вид

$$h(x) = \text{rect}\left[2(x-1/2)\right] - \text{rect}\left[2(x-3/4)\right] \quad (77)$$

Фурье-образ этой функции описывается выражением

$$H(\zeta) = 2ie^{-i\pi\zeta} \left[ \frac{1 - \cos(\pi\zeta)}{\pi\zeta} \right] \quad (78)$$

Из уравнения (78) видно, что условие нуля для функции Хара выполняется:  $h(0)=0$ . Вид функций (77) и (78) показан на рис.6, а, б соответственно.

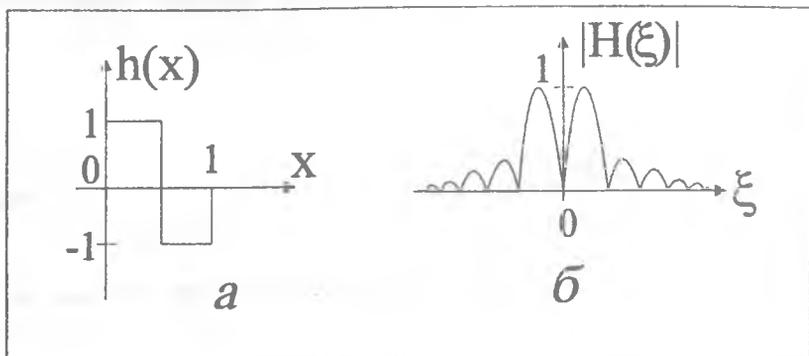


Рис. 6. Функция Хара (а) и ее Фурье-образ (б)

2. функция морлета [8]. Эта функция является гауссовой функцией, промодулированной гармонической функцией:

$$h(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \cos(2\pi\xi_0 x). \quad (79)$$

А ее Фурье-образ представляет собой две гауссовых функции, смещенных симметрично относительно начала координат:

$$H(\xi) = 2\sqrt{\pi} \left\{ \exp\left[-2\pi^2(\xi - \xi_0)^2\right] + \exp\left[-2\pi^2(\xi + \xi_0)^2\right] \right\}. \quad (80)$$

Заметим, что  $h(0) > 0$ , и условие нуля (78) не выполняется. Однако при численной реализации волнового преобразования выбором достаточно большого значения несущей частоты  $\xi_0$  можно с любой заданной точностью

удовлетворить условию нуля. Вид функции (79) и (80) показан на рис.7,а,б соответственно.

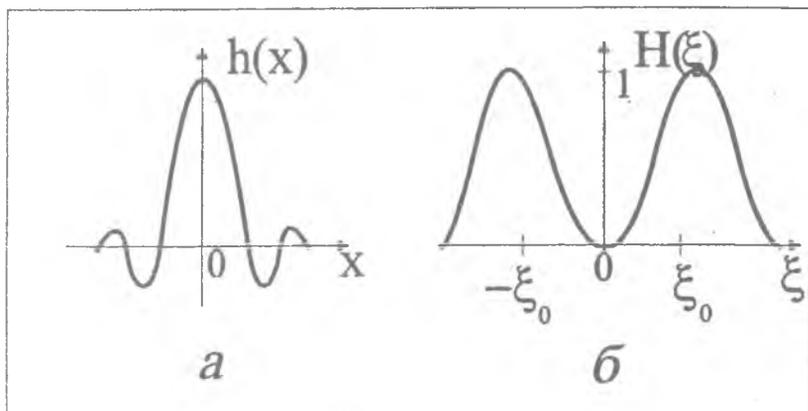


Рис. 7. Вид функции Морлета (а)  
и ее Фурье-образ (б)

з. функция "мексиканской шляпы". Эта функция является второй производной от функции Гаусса и имеет вид

$$h(x) = (1 - x^2) \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right]. \quad (81)$$

Условие нуля (76) выполняется строго. Фурье-образ функции (81) имеет вид

$$H(\xi) = 4\pi^2 \xi^2 \exp \left[ -2\pi^2 \xi^2 \right]. \quad (82)$$

Вид функций (81) и (82) показан соответственно на рис.8,а,б.

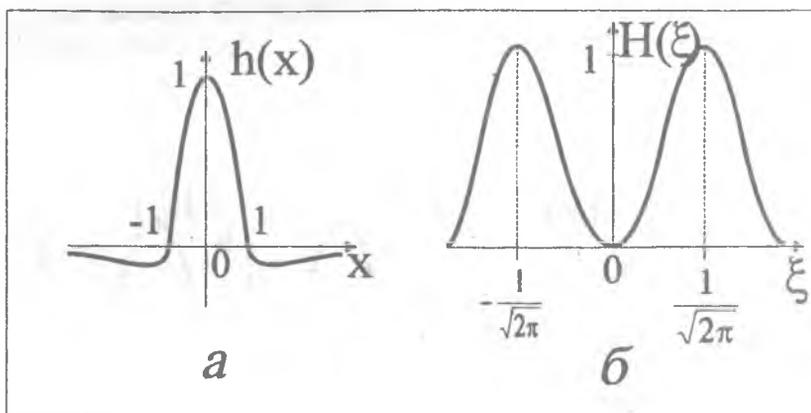


Рис. 8. Вид функции "мексиканской шляпы" (а) и ее Фурье-образ (б)

## 2.6. ДВУМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Для двумерного ПВП имеют место соотношения, аналогичные уравнениям для одномерного ПВП: вместо уравнения (47) с учетом (49) будет следующее уравнение:

$$W(a,b;c,d) = \sqrt{ac} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) h[a(x-b), c(y-d)] dx dy, \quad (83)$$

а вместо уравнения обращения (72) - следующее:

$$f(x,y) = C^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b;c,d) h[a(x-b), c(x-d)] \sqrt{ac} da dc \} db dd. \quad (84)$$

## 2.6. ДИСКРЕТНОЕ ВОЛНОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Вместо уравнения (47) для ПВП с дочерней функцией (48) можно записать следующие выражения : для прямого

$$W(a,b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} h^* \left( \frac{x-b}{a} \right) f(x) dx \quad (85)$$

и обратного преобразований

$$f(x) = \pi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} W(a,b) h \left( \frac{x-b}{a} \right) a^{-2} da db . \quad (86)$$

Выберем дискретные шаги изменения параметров  $a$  и  $b$  в виде :

$$a \rightarrow a_p = m^{-p/2} , \quad p = 1, 2, 3, \dots , \quad m > 1 . \quad (87)$$

$$b \rightarrow b_q = qa_p , \quad q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (88)$$

С учетом обозначений (87) и (88) конечномерное ПВП можно определить в виде [9]:

$$W_{pq} = m^{p/2} \int_{-\infty}^{\infty} h^* (m^p x - q) f(x) dx \quad - \quad (89)$$

- прямое и

$$f(x) = \sum_p \sum_q W_{pq} m^{p/2} h [m^p x - q] \quad - \quad (90)$$

- обратное.

Можно показать, что при  $m = 2$  базис дочерних функций будет полный и ортогональный [10], а сами функции будут иметь вид:

$$h_{1j}(x) = 2^{-1/2} h_n[2^{-1}x - j] \quad (91)$$

Ортогональность функций (91) выражается соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{1j}(x) h_{pq}^*(x) dx = \delta_{1p} \delta_{jq} \quad (92)$$

Итак, дискретное волновое преобразование, в форме, которая часто встречается в литературе, имеет вид:

$$f_n = \sum_p \sum_q w_{pq} 2^{1/2} h_n[2^1 n - j] \quad , n=1,2,3,\dots \quad (93)$$

### 3. ЧАСТИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

#### 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧПФ

Частичное (fractional) преобразование Фурье (ЧПФ) порядка  $p=1/N$  определяется так, чтобы, применяя его последовательно  $N$  раз, получилось обычное преобразование Фурье [11]. Формально сказанное выше можно записать в виде соотношений

$$\mathcal{F}^p[u(x)] = U_p(\zeta) \quad (94)$$

$$\mathcal{F}^p[\mathcal{F}^q[u(x)]] = \mathcal{F}^{p+q}[u(x)] \quad (95)$$

$$\mathcal{F}^1[u(x)] = F(\xi), \quad (96)$$

где  $u(x)$  - сигнальная или объектная функция,  $U_p(\xi)$  - частичный Фурье-образ,  $F(\xi)$  - обычное Фурье-преобразование и  $\mathcal{F}^p$  - обозначение частичного преобразования Фурье порядка  $p$ .

Заметим, что аналогичным образом может быть определена частичная свертка двух функций:

$$(f * g)_p = \mathcal{F}^{-p} \left[ \mathcal{F}^p[f] \mathcal{F}^p[g] \right], \quad (97)$$

где  $\mathcal{F}^{-p}$  - обозначение обратного ЧФ.

### 3.2. СВЯЗЬ ЧФ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФРЕНЕЛЯ

В работе [12] приведен конкретный интегральный вид ЧФ

$$U_p(\xi) = \mathcal{F}^p[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp \left[ \frac{i\pi(x^2 + \xi^2)}{\lambda f \operatorname{tg} \varphi} \right] * \\ * \exp \left[ \frac{-2i\pi x \xi}{\lambda f \sin \varphi} \right] dx, \quad \varphi = p \frac{\pi}{2}. \quad (98)$$

Из уравнения (98) следует свойство инвариантности модуля ЧФ относительно поперечных сдвигов объектной функции. Если

$$\mathcal{F}^p[u(x)] = U_p(\xi), \quad (99)$$

то 
$$|\mathcal{F}^p[u(x-b)]| = |U_p(\xi - b \operatorname{cosec} \varphi)|, \quad \varphi = p\pi/2. \quad (100)$$

Из уравнения (100) видно, что при  $p=1$  восстанавливается свойство инвариантности модуля обычного ФП.

С помощью уравнения (98) нетрудно получить физическую интерпретацию ЧПФ. Для этого сведем уравнение (98) к преобразованию Френеля, тогда получим:

$$U_p(\xi) = g_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} u(x) g_2(x) \exp\left[-\frac{ik}{z}(x-\xi)^2\right] dx . \quad (101)$$

Здесь

$$g_1(\xi) = \exp\left[-\frac{ik}{f_0} \xi^2\right] , \quad (102)$$

$$g_2(x) = \exp\left[-\frac{ik}{f_0} x^2\right] . \quad (103)$$

$$f_0 = f \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = f \operatorname{ctg}(\varphi/2) , \quad z = f \sin\varphi . \quad (104)$$

где  $f$  - произвольная постоянная.

Из уравнений (101)-(104) видно, что частичное преобразование Фурье от функции  $u(x)$  эквивалентно, с точностью до константы  $(\lambda z)^{-1/2}$ , преобразованию Френеля от функции  $u(x)g_2(x)$ , вычисленному на расстоянии  $z=f \sin\varphi$  и домноженному после вычисления на функцию  $g_1(\xi)$ .

### 3.3. ОПТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧПФ

Так как функции  $g_1(\xi)$  и  $g_2(x)$ , определенные уравнениями (102) и (103), описывают пропускание тонкой собирающей сферической линзы с фокусным расстоянием  $f_0$  (см. уравнение (104)), то ЧПФ можно оптически реализовать с помощью следующей схемы.

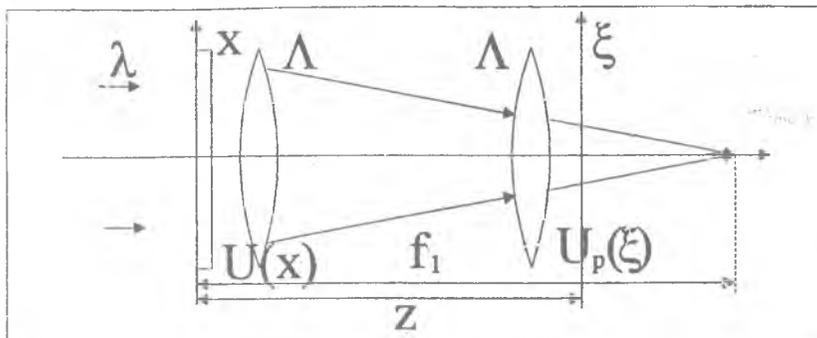


Рис. 9. Оптическая схема для выполнения ЧПФ

На рис.9 транспарант, пропускание которого пропорционально функции  $u(x)$ , освещается плоской волной монохроматического света с длиной волны  $\lambda = k/(2\pi)$ . Сразу за транспарантом расположена собирающая линза с фокусным расстоянием  $f_0$ , а на расстоянии  $z$  от него расположена такая же линза, за которой следует плоскость наблюдения или регистрации. Комплексная амплитуда света в этой плоскости и будет пропорциональна ЧПФ.

Взаимное расположение на оптической оси точки фокуса первой линзы и плоскости наблюдения зависит от соотношения между расстояниями  $z$  и  $f_0$ . Из уравнения (104) следует, что при

$0 \leq p \leq 1$  длина фокуса  $f_0$  будет больше расстояния  $z$  (см. рис.10), а при  $1 \leq p \leq 2$ , наоборот, длина фокуса  $f_0$  будет меньше расстояния  $z$ . При  $p=1$  получим, что  $z=f=f_0$ .

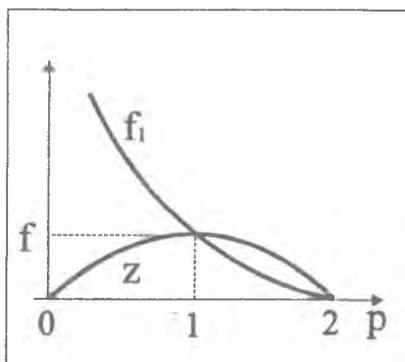


Рис.10. Зависимости расстояния  $z$  и  $f_0$  от параметра  $p$

### 3.4. ЧПФ И ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА

В работе [12] установлена связь частичного преобразования Фурье с функцией (или преобразованием) Вигнера, имеющей следующий вид [13]:

$$W(\bar{x}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+\xi/2) u^*(x-\xi/2) \exp[-2\pi i \xi \nu] d\xi \quad (105)$$

ЧПФ с функцией Вигнера (105) связано следующей цепочкой преобразований:

$$u(x) \rightarrow W(\bar{x}) \rightarrow W(R_{\varphi} \bar{x}) \rightarrow \bar{u}(x) = \mathcal{F}^P[u(x)] \quad (106)$$

где  $\bar{x} = (x, \nu)$ ,  $R_{\varphi} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$  - матрица поворота координат

на угол  $\varphi = \pi p/2$ . Цепочка преобразований (90) включает следующие шаги:

- вычисление функции Вигнера от функции объекта  $u(x)$ ;
- поворот координат-аргументов функции Вигнера на угол  $\varphi$ ;
- восстановление объектной функции по повернутой функции Вигнера.

Восстановленная объектная функция и будет пропорциональна частичному преобразованию Фурье степени  $p$ , связанному с углом поворота равенством  $\varphi = \pi p/2$ .

Интерпретация ЧПФ через функцию Вигнера связана с известным свойством ее: функции Вигнера от объектной функции  $f(x)$  и ее Фурье-преобразования  $F(\xi)$  связаны оператором поворота на угол 90 градусов

$$W[f](x, \nu) = W[F](-\nu, x) \quad (107)$$

Здесь

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-2\pi i x \xi] dx \quad (108)$$

Свойство (107) нетрудно проверить. Действительно:

$$\begin{aligned}
 W[F](x, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x+\xi/2) F^*(x-\xi/2) \exp[-2\pi i \xi \nu] d\xi = \\
 &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \exp[-2\pi i \alpha (x+\xi/2)] f^*(\beta) \exp[2\pi i \beta (x-\xi/2)] \exp[-2\pi i \xi \nu] d\alpha d\beta d\xi = \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) f^*(\beta) \exp[-2\pi i x(\alpha-\beta)] d\alpha d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2\pi i \xi (\alpha/2 + \beta/2 + \nu)] d\xi = \\
 &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) f^*(\beta) \exp[-2\pi i x(\alpha-\beta)] \delta(\alpha + \beta + 2\nu) d\alpha d\beta = \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) f^*(-\alpha - 2\nu) \exp[-4\pi i x(\alpha + \nu)] d\alpha = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta/2 - \nu) f^*(\beta/2 + \nu) \exp[-2\pi i x \beta] d\beta = W[f](-\nu, x). \quad (109)
 \end{aligned}$$

При переходе от предпоследнего интеграла к последнему в уравнении (109) использована замена переменных  $\alpha = \beta/2 - \nu$ .

Восстановление сигнала по его функции Вигнера наиболее просто осуществляется для действительных и неотрицательных функций:  $u(x) \geq 0$ ,  $\text{Im } u(x) = 0$ . В этом случае из уравнения (105) нетрудно получить формулу обращения преобразования Вигнера:

$$f(x) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} W(x, \nu) d\nu \right]^{1/2}. \quad (110)$$

#### 4. МОДОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Когерентные световые поля можно для удобства анализа представлять приближенно как линейную суперпозицию ортогональных функций или, другими словами, раскладывать в ряд по ортогональному базису. Среди многих ортонормированных базисов здесь рассматриваются только те, которые имеют оптическое приложение и могут быть интерпретированы как световые моды. Известны в оптике моды Бесселя, моды Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра.

##### 4.1. БЕССЕЛЕВЫЕ МОДЫ ИЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

Известно [14], что частное решение уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)F(x, y, z) = 0, \quad (111)$$

где  $\nabla^2$  - оператор Лапласа,  $k=2\pi/\lambda$  - волновое число света с длиной волны  $\lambda$ , которое представимо в цилиндрических координатах в виде

$$\left[ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} + k^2 \right] F(r, \varphi, z) = 0 \quad (112)$$

где  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z$  - ось вдоль направления распространения пучка, имеет вид

$$U_n(r, \varphi, z) = \exp[iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}] J_n(\alpha r) e^{-in\varphi}, \quad (113)$$

где  $J_n(x)$  - функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка,  $\alpha = k \sin \theta$ ,  $\theta$  - угол наклона к оси  $z$  плоских волн, образующих пространственный

спектр Бесселевой моды (II3).

Рассмотрим совокупность функции (II3) при  $z=0$  как полную систему нормированных биортогональных функций и введем обозначение

$$\Psi_{mn}(r, \varphi) = A_{mn} J_n(\gamma_m r/R) e^{-in\varphi}, \quad (114)$$

где  $J_n(\gamma_m) = 0$ ,  $\gamma_m$  - корень функции Бесселя,  $A_{mn}$  - нормировочная постоянная.

Нетрудно проверить, что для функции (II4) выполняется уравнение ортогональности

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \Psi_{mn}(r, \varphi) \Psi_{pq}^*(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{mp} \delta_{nq}, \quad (115)$$

где  $\delta_{mn}$  - символ Кронекера, если нормировочная постоянная равна выражению:

$$A_{mn} = \left[ 2\pi \int_0^R J_n^2(\gamma_m r/R) r dr \right]^{-1/2} = \left[ \sqrt{\pi R^2} J_n'(\gamma_m) \right]^{-1}, \quad (116)$$

где  $R$  - радиус круга,  $J_n'(\gamma_m)$  - производная функции Бесселя в точке  $\gamma_m$ .

В дальнейшем ортогональность функций (II4) по индексам  $n$  и  $m$  используется отдельно.

#### 4.1.1. ФОКУСИРОВКА В НАБОР КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

В [15] предложен алгоритм расчета фазовых оптических элементов, которые совместно со сферической линзой фокусируют в набор концентрических колец. Алгоритм основан на разложении периодической ради-

альной функции фазы  $T(r)$  в ряд Фурье

$$\exp[iT(r)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-inr} . \quad (117)$$

При этом каждое световое кольцо формируется двумя аксиконами с пропусканиями  $\exp[\pm inr]$ . В [16] показано, что фокусировка в кольцо с помощью аксикона не является оптимальной в смысле достижения максимальной плотности световой энергии вблизи каждого кольца.

Наибольшая концентрация энергии в кольце достигается при использовании мод Бесселя, так как при этом кольцо будет иметь наименьшую толщину, равную дифракционному пределу.

Далее предлагается фазу оптического элемента  $T(r, \varphi)$  искать с помощью следующего разложения в ряд по ортогональным функциям

$$\exp[iT_n(r, \varphi)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{C}_m \Psi_{mn}(r, \varphi) . \quad (118)$$

Подставив в (118) функцию из уравнения (114) и введя обозначение

$$S_n(r) = T_n(r, \varphi) + n\varphi , \quad (119)$$

получим уравнение для радиальной составляющей фазы  $S_n(r)$  оптического элемента:

$$\exp[iS_n(r)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_n(\gamma_m r/R) , \quad (120)$$

где  $C_m = \bar{C}_m A_{mn}$ .

Сформулируем задачу. Требуется найти функцию  $S_n(r)$ , удовлетворяющую уравнению (120) при заданных модулях конечного числа коэффициентов  $C_m$ :

$$|C_m| = \begin{cases} B_m, & m \in [-N, N] \\ 0, & m \notin [-N, N] \end{cases}, \quad (121)$$

где  $B_m \geq 0$  - заданные числа,  $R$  - радиус оптического элемента.

Эта задача может быть решена методом последовательных приближений. После получения на  $k$ -ом шаге итераций оценки фазы  $S_n^{(k)}(r)$  находятся коэффициенты суммы (120) с помощью уравнения

$$C_m^{(k)} = 2\pi A_{mn}^2 \int_0^R \exp[iS_n^{(k)}] J_n(\gamma_m r/R) r dr, \quad (122)$$

постоянная  $A_{mn}$  определена уравнением (116).

Далее комплексные коэффициенты  $C_m^{(k)}$  заменяются на коэффициенты

$$\hat{C}_m^{(k)} = B_m C_m^{(k)} |C_m^{(k)}|^{-1}, \quad (123)$$

которые имеют заданные модули. После этого вычисляется сумма (120), аргумент которой является новой оценкой искомой функции

$$S_n^{(k+1)}(r) = \arg \left\{ \sum_{m=-N}^N \hat{C}_m^{(k)} J_n(\gamma_m r/R) \right\}, \quad (124)$$

где  $r \in [0, R]$ ,  $\arg\{a+ib\} = \tan^{-1}(b/a)$ .

Можно показать, что данный итеративный процесс будет сходиться в среднем. То есть для любого номера  $k$  имеет место неравенство

$$\delta_{k+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ |C_m^{(k+1)}| - B_m \right]^2 \leq \delta_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ |C_m^{(k)}| - B_m \right]^2. \quad (125)$$

Алгоритм (I20)-(I24) аналогичен алгоритму Герчберга-Секстона [17], но вместо базиса плоских волн используется базис функций Бесселя одного порядка с разными аргументами. Итеративные алгоритмы синтеза оптических элементов, использующие разложение искомой функции в ряды по ортогональным функциям, можно найти в работах [18,19].

Если изготовить оптический элемент с фазой  $S_n^{(k)}(r)$  и имеющий функцию пропускания вида

$$F(r, \varphi) = \text{circl}(r/R) \exp[iS_n^{(k)}(r) - i n \varphi] , \quad (126)$$

где

$$\text{circl}(r/R) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq r \leq R , \\ 0 , & r > R , \end{cases}$$

и осветить его плоской волной света, то в фокальной плоскости сферической линзы сформируются световые кольца, радиусы которых равны

$$\rho_m = r_m \frac{f}{kR} , \quad (127)$$

а интенсивность света в кольцах равна выражению

$$I_m(\rho_m) = \left[ n B_m \left\{ R J_n'(r_m) \right\}^2 \right]^2 . \quad (128)$$

На рис. I1 показана оптическая схема для формирования концентрических колец . Сферическая линза SL с фокусным расстоянием  $f$  расположена вплотную к оптическому элементу с пропусканием  $F(r, \varphi)$  из уравнения (126).

На рис. I2 показаны результаты численного моделирования: рассчитанная за 30 итераций фаза (а) оптического элемента, формирующего четыре кольца (б) в фокальной плоскости линзы и с равными интенсивностями (в). Параметры расчета:  $k = 10^4 \text{ мм}^{-1}$ ,  $f=100 \text{ мм}$ ,  $R=10 \text{ мм}$ , число отсчетов по переменным  $r$  и  $\varphi$  равно 64. Порядок функций Бесселя выбирался равным  $n=1$ , а число слагаемых в сумме (I4) было равно  $N=30$ .

Рассчитанная интенсивность колец от постоянного значения отличается в среднем на 3% (рис.12,в).

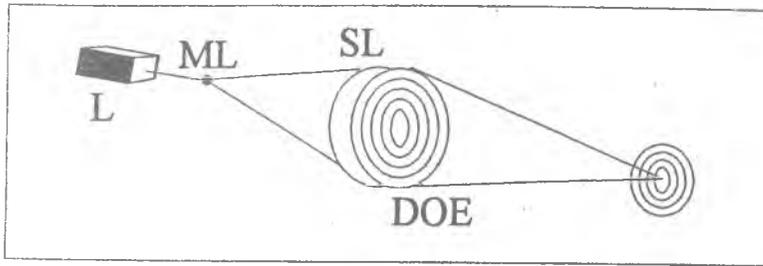


Рис.11. Оптическая схема для формирования колец

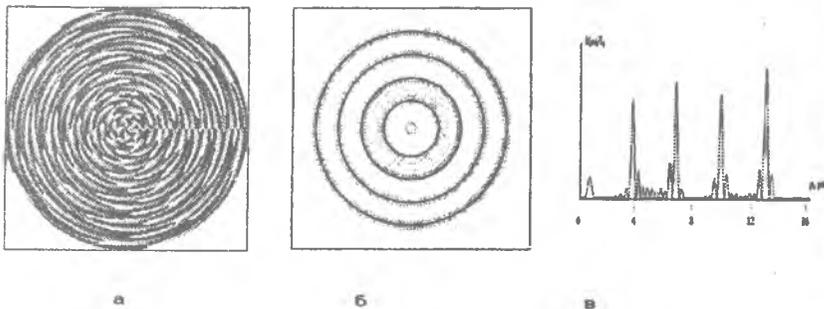


Рис.12. Фаза оптического элемента (а) и сформированные кольца (б,в)

#### 4.1.2. ФОРМИРОВАНИЕ БЕЗДИФРАКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В этом разделе рассмотрен алгоритм, решающий следующую задачу. Пусть имеется некоторая произвольная действительная неотрицательная функция двух переменных  $G(r, \varphi) \geq 0$ , которую можно назвать объектной

функцией. Требуется найти аппроксимацию этой функции с помощью конечной суммы вида

$$F_{\alpha}(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N C_n \Psi_{nm}(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N C_n J_n(\alpha r) e^{-in\varphi}, \quad (129)$$

где  $\alpha = \gamma_m/R$  - постоянный параметр, характеризующий эффективную ширину неоднородных функций разложения (129).

Функция  $F_{\alpha}(r, \varphi)$ , аппроксимирующая функцию  $G(r, \varphi)$ , оптимальным образом может быть найдена из условия минимизации квадратичного функционала

$$W = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ G(r, \varphi) - |F_{\alpha}(r, \varphi)| \right]^2 r dr d\varphi. \quad (130)$$

Аналогично тому, как показано в [20], минимизация функционала  $W$  достигается с помощью следующей итеративной процедуры. На  $k$ -ом шаге итераций оценка функции  $F_{\alpha}(r, \varphi)$  выбирается в виде

$$F_{\alpha}^{(k)}(r, \varphi) = G(r, \varphi) \exp[iT_k(r, \varphi)] \quad (131)$$

С помощью функции (131) находят коэффициенты суммы (129) по формулам

$$C_n^{(k)} = \bar{A}_n \int_0^R \int_0^{2\pi} F_{\alpha}^{(k)}(r, \varphi) J_n(\alpha r) e^{in\varphi} r dr d\varphi, \quad (132)$$

$$\bar{A}_n = \left[ 2\pi \int_0^R J_n^2(\alpha r) r dr \right]^{-1}. \quad (133)$$

Далее коэффициенты (I33) заменяются на новые с помощью уравнения (I23). Следующая оценка аппроксимирующей функции находится из уравнения

$$F_{\alpha}^{(k+1)}(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N B_n C_n^{(k)} |C_n^{(k)}|^{-1} J_n(\alpha r) e^{-in\varphi} \quad (134)$$

После этого осуществляется переход к уравнению (I31) и все повторяется. Можно доказать сходимость в среднем этой итеративной процедуры.

Итеративный алгоритм на основе уравнений (I29), (I30)–(I34) позволяет приближенно решить задачу оптимальной аппроксимации действительной функции с помощью комплексной функции, являющейся суперпозицией бesselевых мод. При этом функцию  $G(r, \varphi)$  можно назвать объектом, а функцию  $|F_{\alpha}(r, \varphi)|$  ее бездифракционным изображением.

Действительно, если транспарант с функцией пропускания  $F_{\alpha}(r, \varphi)$  осветить плоской волной монохроматического света, то после транспаранта функция  $F_{\alpha}(r, \varphi)$  будет регенерировать себя всюду при распространении вдоль оптической оси. Поэтому распределение интенсивности, пропорциональное функции  $|F_{\alpha}(r, \varphi)|^2$ , которое сохраняется при распространении, можно назвать бездифракционным изображением.

Далее рассмотрим задачу о кодировании амплитудно-фазовой функции  $F_{\alpha}(r, \varphi)$  только фазовой функцией вида  $\exp[iT(r, \varphi)]$ . Такое кодирование требуется для более простого изготовления дифракционного оптического элемента и для увеличения его эффективности.

Алгоритм кодирования основан на известном соотношении для конического аксикона [14]:

$$\exp[-i\alpha r] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha r) \quad (135)$$

Известны также экспериментальные результаты по дифракции света от  $CO_2$ - лазера на коническом аксиконе [21], которые показывают эффективность использования аксикона для формирования нулевой бesselевой моды.

В уравнении (I35) слагаемые с номером  $n$ , отличным от нуля, не явля-

ются модами и при распространении дифрагируют. Поэтому на некотором расстоянии от аксиона из всех слагаемых в сумме (135) останется только нулевое слагаемое, эффективно дающее вклад вблизи оптической оси. С учетом сказанного для формирования бездифракционного изображения предлагается вместо уравнения (129) использовать уравнение:

$$\exp[-i\alpha r + iT(\varphi)] = \exp[-i\alpha r] \sum_{n=-N}^N C_n e^{-in\varphi} . \quad (136)$$

Вычисление фазы  $T(\varphi)$  осуществляется с помощью алгоритма Герчберга-Секстона [17] с применением адаптивной коррекции для увеличения скорости сходимости [22,23]. При этом на  $k$ -ом шаге итераций выбирается оценка функции  $T_k(\varphi)$ . Далее находятся коэффициенты суммы (136):

$$C_n^{(k)} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp[iT_k(\varphi) + in\varphi] d\varphi . \quad (137)$$

Следующая оценка искомой функции  $T(\varphi)$  вычисляется по формуле

$$T_{k+1}(\varphi) = \arg \left\{ \sum_{n=-N}^N B_n C_n^{(k)} |C_n^{(k)}|^{-1} e^{-in\varphi} \right\} . \quad (138)$$

На рис.13 показан вид объектной функции  $S(r, \varphi)$ , описываемой уравнением

$$S(r, \varphi) = \text{rect} \left[ \frac{x - x_0}{L} \right] \text{rect} \left[ \frac{y - y_0}{L} \right] . \quad (139)$$

Общее число точек массива на рис.13 равно  $128 \times 128$ , а число точек, образующих квадрат, равно  $24 \times 24$ . Число отсчетов по переменным  $r$  и  $\varphi$  равно 64, радиус оптического элемента равен  $R = 1$  мм.



Рис. 13. Объектная функция

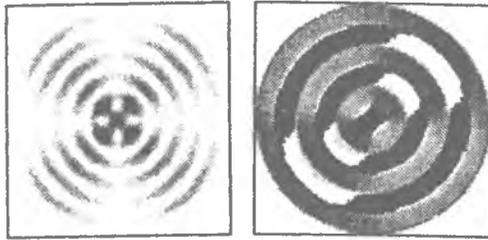


Рис. 14. Аппроксимация объектной функции бesselевыми модами

На рис. 14 показаны результаты аппроксимации объектной функции (I29) с помощью алгоритма, основанного на формулах (I29), (I30)-(I34): модуль (рис. 14, а) и аргумент (рис. 14, б) функции  $F_{\alpha}(r, \varphi)$ , рассчитанные за 30 итераций. При этом число слагаемых в сумме (I29) было равно  $2N+1 = 5$  и параметр  $\alpha$  был равен  $54 \text{ мм}^{-1}$ .

#### 4.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МОДАМ ГАУССА-ЛАГЕРРА

Известно [24], что в оптическом волокне с цилиндрической симметрией и параболической зависимостью показателя преломления от радиуса волокна распространяются без потерь моды Гаусса-Лагерра. Для того чтобы эффективно (а точнее говоря, оптимально по некоторому критерию) передать по световому волокну некоторое изображение, требуется представить это изображение как суперпозицию мод.

Задача формулируется так. Пусть имеется некоторая произвольная действительная неотрицательная функция двух переменных  $S(r, \varphi) \geq 0$ , которую будем называть объектной функцией. Требуется найти аппроксимацию этой функции с помощью конечной суммы вида

$$F_N^A(r, \varphi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n C_{mn} W_{mn}^A(r, \varphi) \quad (140)$$

$$W_{mn}^a(r, \varphi) = \left[ \frac{a^{2(n!)^3}}{4\pi(n-m)!} \right]^{-1/2} (r/a)^m \exp\left[-\frac{1}{2}(r/a)^2\right] L_n^m\left[\frac{r^2}{a^2}\right] e^{im\varphi}, \quad (141)$$

где  $W_{mn}^a(r, \varphi)$  - функции, описывающие моды Гаусса-Лагерра,  $L_n^m(x)$  - обобщенный многочлен Лагерра,  $(r, \varphi)$  - полярные координаты,  $a$  - параметр, характеризующий эффективную ширину модовой функции (141). Функции (141) ортогональны:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} W_{mn}^a(r, \varphi) W_{pq}^{a*}(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{mp} \delta_{nq}, \quad (142)$$

где  $\delta_{mn}$  - символ Кронекера, \* - знак комплексного сопряжения. Из условия (142) следует выражение для вычисления коэффициентов суммы (140)

$$C_{mn} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F_N^a(r, \varphi) W_{mn}^{a*}(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (143)$$

Кроме того, функции (141) являются собственными для преобразования Фурье. Действительно, на основе справочного интеграла вида [25]

$$\int_0^\infty x^{\lambda/2} e^{-px} L_n^\lambda(cx) J_\lambda(b\sqrt{x}) dx = (b/2)^\lambda \frac{(p-c)^n}{p^{\lambda+n+1}} \exp\left[-\frac{b^2}{4p}\right] I_n^\lambda\left[-\frac{b^2 c}{4pc-4p^2}\right], \quad (144)$$

где  $J_n(x)$  - функция Бесселя первого рода. Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} W_{mn}^a(r, \varphi) \exp[-ir\rho \cos(\varphi-\theta)] r dr d\varphi = (-i)^m (-1)^n W_{mn}^b(\rho, \theta), \quad (145)$$

где  $b=1/a$ .

В уравнении (I45) интеграл является двумерным преобразованием Фурье в полярных координатах.

Аппроксимировать объектную функцию  $S(r, \varphi)$  с помощью суперпозиции мод  $F_N^\alpha(r, \varphi)$ , определенной уравнением (I40), можно с помощью минимизации следующего критерия

$$M = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[ S(r, \varphi) - |F_N^\alpha(r, \varphi)| \right]^2 r dr d\varphi \quad (146)$$

Минимизировать критерий можно методом последовательных приближений аналогично итеративному алгоритму сокращения ошибки [20].

В данном случае итеративный алгоритм принимает следующий вид:

$$T_{k+1}(r, \varphi) = \arg \left\{ \sum_{n=1}^n \sum_{m=0} B_{mn} \exp[i\alpha_{mn}] W_{mn}^\alpha(r, \varphi) \right\}, \quad (147)$$

$$\alpha_{mn} = \arg \left\{ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(r, \varphi) \exp[iT_k(r, \varphi)] W_{mn}^{\alpha*}(r, \varphi) r dr d\varphi \right\}, \quad (148)$$

где  $k$  - номер итерации,  $T_k(r, \varphi) = \arg \{ F_N^\alpha(r, \varphi) \}$  - фаза комплексной аппроксимирующей модовой функции (I40),  $B_{mn} \geq 0$  - положительные произвольно заданные числа, характеризующие вес отдельной моды в смеси мод,  $\arg \{ \dots \}$  - аргумент комплексного числа.

На рис. I5 показана оптическая схема для оптимального ввода изображения в волокно. Коллимированный пучок лазерного излучения с длиной волны  $\lambda$  падает на амплитудный транспарант с функцией пропускания, пропорциональной  $S(r, \varphi)$ . Вплотную к транспаранту расположен фазовый дифракционный оптический элемент, функция пропускания которого равна

$$\exp[iT_k(r, \varphi)],$$

где функция  $T_k(r, \varphi)$  рассчитана за  $k$  итераций по формулам (I47), (I48).

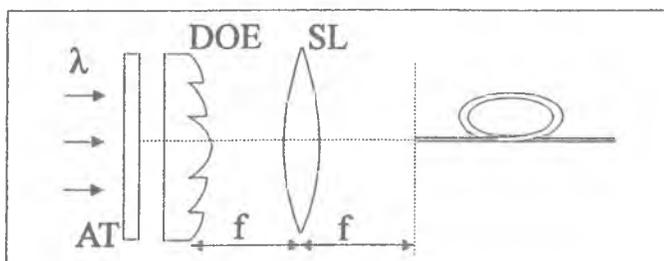


Рис. 15. Оптическая схема для ввода изображения в волокно

Транспарант и элемент расположены на фокусном расстоянии  $f$  от сферической линзы, в задней фокальной плоскости которой расположен торец цилиндрического волокна со слабой параболической радиальной зависимостью показателя преломления. Тогда с учетом уравнения (145) следует ожидать, что на торце волновода сформируется световое поле, являющееся суперпозицией мод Гаусса-Лагерра, поперечное распределение амплитуды которого приближенно совпадает с заданной объектной функцией.

## 5. ЛИНЗОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИИ

Известно [26], что распределения амплитуды в объектной плоскости  $f(x)$  и в плоскости изображения  $g(\xi)$  связаны линейным интегральным преобразованием (для простоты в этом разделе рассмотрен одномерный случай)

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x, \xi)dx, \quad (149)$$

где  $K(x, \xi)$  – ядро интегрального преобразования, которое зависит

от конкретной конфигурации оптической схемы и, как правило, предполагается известным. В дальнейшем нас будет интересовать преобразование (I49) как интегральное уравнение Фредгольма. Задача формулируется так. По известному изображению, искаженному шумом, и по известному точно ядру преобразования восстановить объект. Такая задача относится к классу некорректных обратных задач. Ниже рассмотрены решения двух конкретных задач этого класса.

### 5.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СФЕРОИДАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

На рис.16 показана анализируемая экспериментальная ситуация. Объект  $f(x)$  ограничен размером  $[-a, a]$  и в спектральной плоскости коррелятора имеется диафрагма размером  $[-q, q]$ . При этом, если линзы не имеют aberrаций, то вместо уравнения (I49) получим интегральное уравнение вида

$$g(\xi) = \int_{-a}^a \frac{\sin[\Omega(x-\xi)]}{\pi(x-\xi)} f(x) dx, \quad (150)$$

где  $\Omega = \lambda/(fQ)$  - ширина функции импульсного отклика оптической системы, показанной на рис.16.

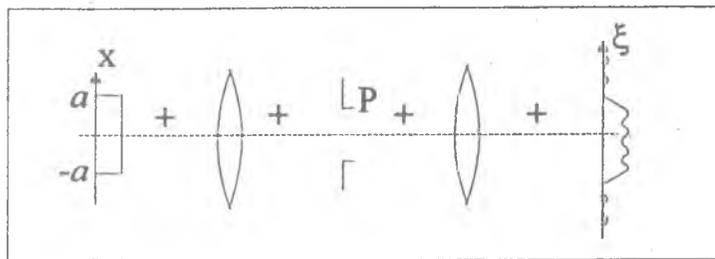


Рис.16. Фурье-коррелятор как изображающая система

Для дальнейшего рассмотрения введем базис вытянутых сфероидальных функций  $\psi_n(x)$ , которые являются собственными функциями для интегральной задачи (150) и удовлетворяют уравнению на собственные значения:

$$\int_{-a}^a \frac{\sin[\Omega(x-\xi)]}{\pi(x-\xi)} \psi_n(x) dx = \lambda_n \psi_n(\xi) \quad , \quad |\xi| \leq a \quad , \quad (151)$$

где  $0 < \lambda_n < 1$  - собственные значения .

Интересна зависимость собственных значений от номера: при

$n < (2/\pi)a\Omega$  они близки к единице, а при  $n > (2/\pi)a\Omega$  они быстро (экспоненциально) спадают до нуля. Собственные функции  $\psi_n(x)$  на всей действительной оси являются целыми аналитическими функциями и саморепродуцируются при интегральном преобразовании (151):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\Omega(x-\xi)]}{\pi(x-\xi)} \psi_n(x) dx = \psi_n(\xi) \quad . \quad (152)$$

Эти собственные функции называются вытянутыми сфероидальными функциями [27,28]. И так как ядро интегрального преобразования действительно, то функции тоже действительные, и так как ядро симметрично по переменным  $x$  и  $\xi$ , то собственные функции - ортогональны. Эти функции обладают свойством двойной ортогональности - на отрезке и на всей оси:

$$\int_{-a}^a \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \lambda_n \delta_{mn} \quad , \quad (153)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{mn} \quad . \quad (154)$$

Заметим, что сама sinc-функция удовлетворяет уравнению (152):

$$\pi^{-1} \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[\Omega(x-\xi)] \text{sinc}(Wx) dx = \text{sinc}(W\xi) \quad , \quad W \geq \Omega \quad , \quad (155)$$

Где  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

Отметим еще одно интересное свойство сфероидальных функций. Они обеспечивают максимальную концентрацию энергии сигнала в заданном конечном интервале по сравнению с любой другой функцией, имеющей ту же ширину пространственного спектра.

Обозначим сфероидальные функции на отрезке  $[-a, a]$ , удовлетворяющие уравнениям (151) и (153), как  $\psi_n^o(x)$ , а функции, удовлетворяющие уравнениям (152) и (154), как  $\psi_n^a(x)$ . Тогда функцию объекта  $f(x)$  на конечном отрезке  $[-a, a]$  можно разложить в ряд по полному набору ортогональных на отрезке сфероидальных функций:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\lambda_n)^{-1/2} \psi_n^a(x), \quad (156)$$

где

$$C_n = (\lambda_n)^{-1/2} \int_{-a}^a f(x) \psi_n^a(x) dx, \quad (157)$$

а функцию изображения  $g(\xi)$ , заданную на всей числовой оси, можно разложить в ряд по набору ортогональных на оси сфероидальных функций:

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \psi_n(\xi), \quad (158)$$

где

$$D_n = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \psi_n(\xi) d\xi. \quad (159)$$

Далее рассмотрим регулярный итеративный алгоритм решения уравнения (150), если изображение известно не точно, а является аддитивной смесью с шумом. Для этого в соответствии с теорией регуляризации Тихонова требуется минимизировать квадратичный функционал вида [29]:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} [g(\xi) - \hat{L}P f(x)]^2 dx + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{P} f(x)|^2 dx, \quad (160)$$

где  $\alpha \geq 0$  - параметр регуляризации (малое число). Операторы определяются следующими уравнениями:

$$\hat{P} f(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad (161)$$

$$\hat{L} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\Omega(x-\xi)]}{\pi(x-\xi)} f(\xi) d\xi. \quad (162)$$

Можно показать с помощью вариационного анализа, что минимум функции-ошибки достигается при выполнении следующего условия:

$$(\hat{P}\hat{L}P + \alpha\hat{P})f = \hat{P}\hat{L}g. \quad (163)$$

Алгоритм итеративного решения уравнения (163) принимает вид [30]

$$f_{k+1} = \hat{P}\hat{L}g + [(1-\alpha)\hat{P} - \hat{P}\hat{L}P]f_k, \quad (164)$$

где  $k$  - номер итерации. При  $\alpha=0$  уравнение (164) переходит в обычный (не регуляризационный) алгоритм экстраполяции (сверхраз-решения) Герцберга-Папулиса [31,32].

Доказать сходимость процедуры (164) можно с помощью разложения по вытянутым волновым сфероидальным функциям. Разложим в ряд первое слагаемое в (164):

$$\hat{L}g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \psi_n(x), \quad g_n = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi_n(x) dx. \quad (165)$$

Если в уравнении (164) выбрать начальную оценку объекта  $f_0=0$ , то первая оценка будет равна:

$$f_1 = \tilde{P}Lg = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \psi_n^{\alpha}(x), \quad (166)$$

а вторая оценка будет равна:

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n \psi_n^{\alpha}(x) + \left[ (1-\alpha)\tilde{P} - \tilde{P}L\tilde{P} \right] \sum_{n=0}^{\infty} g_n \psi_n^{\alpha}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + (1-\alpha-\lambda_n) \right] g_n \psi_n^{\alpha}(x). \end{aligned} \quad (167)$$

При получении уравнения (166) и (167) использовались соотношения:

$$\tilde{L}\psi_n = \psi_n, \quad \tilde{L}\psi_n^{\alpha} = \lambda_n \psi_n^{\alpha}, \quad \tilde{P}\psi_n = \psi_n^{\alpha}, \quad \tilde{P}\psi_n^{\alpha} = \psi_n^{\alpha}. \quad (168)$$

С помощью суммирования геометрической прогрессии нетрудно показать, что для  $k$ -ой оценки искомой функции объекта имеет место выражение:

$$f_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\alpha, k) \lambda_n^{-1} g_n \psi_n(x). \quad (169)$$

где

$$p_n(\alpha, k) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \alpha} [1 - (1 - \alpha - \lambda_n)^k]. \quad (170)$$

Так как для всех  $0 < \alpha, \lambda_n < 1$  выполняется  $|1 - \alpha - \lambda_n| < 1$ , то при  $n \rightarrow \infty$  функция (170) имеет предел

$$p_n(\alpha) = \lambda_n / (\lambda_n + \alpha). \quad (171)$$

С учетом (I71) окончательно получим точное решение уравнения (I63) в виде ряда по сфероидальным функциям

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_n + \alpha} \psi_n^\alpha \quad (172)$$

Вместо итеративного решения вида (I64) в работе [30] предложено также следующее итеративное решение уравнения (I63) или (I50):

$$f_n = \bar{P} \bar{L} g + (1-\alpha) [\bar{P} - \bar{P} \bar{L} \bar{P}] f_{n-1} \quad (172^*)$$

Используя разложение по сфероидальным функциям, можно показать, что аналогично уравнениям (I69) и (I70)  $k$ -ую оценку функции объекта можно представить в виде:

$$f_k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\alpha, k) g_n \psi_n^\alpha(x) \quad (173)$$

$$q_n(\alpha, k) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \alpha(1-\lambda_n)} [1 - (1-\alpha)^k (1-\lambda_n)^k] \quad (174)$$

## 5.2. ОПТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ

В работе [31] описан алгоритм экстраполяции Герчберга для функций с ограниченным спектром. В оптике этот алгоритм используют для увеличения разрешения объективов. Если изображение объекта известно точно (без шума), итеративный алгоритм Герчберга можно представить в виде

$$F_{n+1} = G + (1 - \hat{P}_\xi) \hat{F} \hat{P}_x \hat{F}^{-1} F_n, \quad (175)$$

где  $G = \hat{F}g$  - Фурье-образ изображения,  $F_n = \hat{F}f_n$  - Фурье-образ  $n$ -ой оценки объекта,  $\hat{F}$  и  $\hat{F}^{-1}$  - операторы прямого и обратного преобразований Фурье,  $\hat{P}_\xi$  и  $\hat{P}_x$  - операторы пространственных ограничений в плоскости пространственного спектра и плоскости объекта.

В работе [33] предложена оптическая схема для реализации регуляризованного варианта итеративного алгоритма (175) для случая, когда изображение регистрируется с шумом. Отличие обоих алгоритмов заключается в постоянной  $\alpha$ , которая появляется как множитель во втором слагаемом уравнения (175):

$$F_{n+1} = G + \alpha(1 - \hat{P}_\xi) \hat{F} \hat{P}_x \hat{F}^{-1} F_n. \quad (176)$$

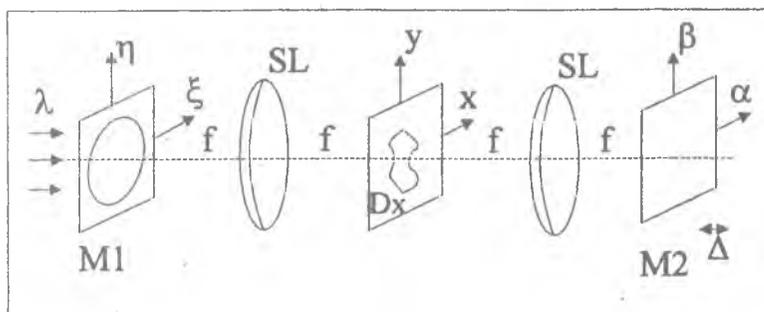


Рис. 17. Оптическая схема получения сверхразрешения

На рис. 17 показана схема типа коррелятора для реализации алгоритма (176). Во входной плоскости  $(\xi, \eta)$  расположено зеркало  $M1$  с отверстием, в которое подается зашумленный спектр изображения. Размер и форма отверстия в зеркале соответствуют функции зрачка линзы, с помощью которой было получено изображение. В объектной плоскости  $(x, y)$  расположена ограничивающая объект диафрагма  $D_x$ . В выходной плоскости  $(\alpha, \beta)$  расположено зеркало  $M2$  для поворота излучения назад. Это зеркало имеет возможность смещаться вдоль оси, меняя дефокусировку систе-

мы или параметр регуляризации. Схема на рис.17 работает следующим образом. Через отверстие в зеркале М1 слева направо проходит излучение, амплитуда которого пропорциональна данному зашумленному спектру изображения G. Оно и является начальным приближением итеративного процесса. Первое плечо коррелятора (рис.17) выполняет Фурье-преобразование и ограничение сформированного поля с помощью диафрагмы Дх. При этом выполняется следующая часть операций в уравнении (176):

$$\hat{P}_x \hat{F}^{-1} G . \quad (177)$$

Во втором плече коррелятора излучение разворачивается зеркалом М2 и опять (справа налево) проходит диафрагму Дх. Полученное при этом световое поле будет отличаться от выражения (177) только множителем  $\alpha$ , фаза которого зависит от дефокусировки зеркала М2, а амплитуда — от энергетических потерь при прохождении второго плеча коррелятора:

$$\alpha \hat{P}_x \hat{F}^{-1} G . \quad (178)$$

Далее излучение попадает справа налево в плоскость  $(\xi, \eta)$ . При этом часть его отражается от зеркала, формируя поле с амплитудой

$$\alpha (1 - \hat{P}_\xi) \hat{F} \hat{P}_x \hat{F}^{-1} G , \quad (179)$$

а другая часть уходит в отверстие зеркала. Поэтому после одного начального полного прохода системы (рис.17) на входе получим следующую (первую) оценку спектра объекта в виде:

$$F_1 = G + \alpha (1 - \hat{P}_\xi) \hat{F} \hat{P}_x \hat{F}^{-1} G . \quad (180)$$

Понятно, что на n-ом проходе коррелятора сформируется n-я оценка спектра объекта в соответствии с формулой (176).

### 5.3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОБЪЕКТА ПО ДИСКРЕТНОМУ ИЗБРАЖЕНИЮ

В данном разделе мы рассмотрим задачу решения интегрального

уравнения (149) в частном случае, когда функция изображения  $g(\xi)$  задана своими отсчетами  $g_n$ . Так получается при регистрации изображения матричным фотоприемником, например ПЗС-камерой. При этом вместо уравнения (149) можно записать следующее уравнение:

$$g_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_n(x) dx, \quad n=1, N, \quad (181)$$

где  $K_n(x) = K(x, \xi_n)$  - ядро преобразования.

Для дальнейшего достаточно потребовать только линейной независимости функций  $K_n(x)$  (пусть они также действительны). Тогда функцию объекта можно представить как линейную комбинацию из этих функций:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N f_n K_n(x). \quad (182)$$

Подставим (182) в (181) и получим:

$$g_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=1}^N f_m K_m(x) \right] K_n(x) dx = \sum_{m=1}^N f_m S_{mn}. \quad (183)$$

Здесь

$$S_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) K_m(x) dx \quad (184)$$

- матрица  $S_{mn}$ , составленная из линейно-независимых функций  $K_n(x)$ . Она имеет определитель, отличный от нуля:

$$\det S_{mn} \neq 0. \quad (185)$$

Этот определитель называется определителем Грамма.

Из условия (185) следует возможность решения линейной системы алгебраических уравнений (183) относительно  $f_n$ . При этом должна существовать обратная матрица  $S_{mn}^{-1}$ :

$$f_n = \sum_{m=1}^N g_m S_{mn}^{-1} . \quad (186)$$

Пусть известны собственные векторы  $\psi_n^{(k)}$  и собственные значения  $\lambda_k$  матрицы  $S_{mn}$  :

$$\sum_{n=1}^N S_{mn} \psi_n^{(k)} = \lambda_k \psi_m^{(k)} , \quad k=1, \overline{N} . \quad (187)$$

Пусть также эти собственные векторы ортогональны:

$$\sum_{n=1}^N \psi_n^{(k)} \psi_n^{(l)} = \delta_{kl} , \quad \sum_{k=1}^N \psi_n^{(k)} \psi_m^{(k)} = \delta_{mn} . \quad (188)$$

Тогда , если разложения

$$f_n = \sum_{k=1}^N a_k \psi_n^{(k)} , \quad g_n = \sum_{k=1}^N b_k \psi_n^{(k)} , \quad b_k = \sum_{n=1}^N g_n \psi_n^{(k)} \quad (189)$$

подставить в уравнение (183), то получим цепочку равенств

$$g_n = \sum_{k=1}^N b_k \psi_n^{(k)} = \sum_{m=1}^N f_m S_{mn} = \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N a_p \psi_m^{(p)} S_{mn} = \sum_{p=1}^N a_p \lambda_p \psi_n^{(p)} , \quad (190)$$

при сравнении первого и последнего из которых следует уравнение связи коэффициентов разложения:

$$b_k = \lambda_k a_k . \quad (191)$$

С учетом (191) получим решение системы уравнений (183) с помощью собственных векторов и собственных значений матрицы  $S_{mn}$  :

$$f_n = \sum_{k=1}^N a_k \psi_n^{(k)} = \sum_{k=1}^N b_k \lambda_k^{-1} \psi_n^{(k)} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N g_m \lambda_k^{-1} \psi_m^{(k)} \psi_n^{(k)}. \quad (192)$$

Сравнивая последнюю сумму в (192) с суммой (186), получим выражение для обратной матрицы через собственные векторы и собственные числа прямой матрицы:

$$S_{mn}^{-1} = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{-1} \psi_n^{(k)} \psi_m^{(k)}. \quad (193)$$

Из уравнения (187) нетрудно получить аналогичное (193) представление для прямой матрицы:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \psi_m^{(k)} \psi_n^{(k)}. \quad (194)$$

Окончательно на основании соотношений (182), (186) и (193) получим уравнение для восстановления непрерывного объекта по отсчетам изображения:

$$f(x) = \sum_{m=1}^N W_m(x) g_m. \quad (195)$$

Здесь

$$W_m(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_k \psi_m^{(k)} \psi_n^{(k)} K_n(x). \quad (196)$$

– восстанавливающий оператор.

Далее покажем, что решение (195) уравнения (181) регулярно, то есть все собственные числа  $\lambda_k$  отличны от нуля. Для этого рассмотрим квадратичную форму [34]:

$$\Omega = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N S_{mn} f_n f_m = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N f_m f_n \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) K_m(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^N f_n K_n(x) \right]^2 dx > 0. \quad (197)$$

Последнее неравенство в (197) основано на том, что для линейно-независимых функций  $K_n(x)$  сумма, стоящая под интегралом в (197), будет отлична от нуля при любых возможных значениях коэффициентов  $f_n$ . С другой стороны, выражая квадратичную форму через собственные векторы и собственные числа матрицы  $S_{mn}$ , получим вместо (197) следующие соотношения:

$$\Omega = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N S_{mn} f_m f_n = \sum_{n=1m=1k=1}^N \sum_{m=1k=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_k \psi_m^{(k)} \psi_n^{(k)} f_n f_m =$$

$$= \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{n=1}^N f_n \psi_n^{(k)} \sum_{m=1}^N f_m \psi_m^{(k)} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \left[ \sum_{n=1}^N f_n \psi_n^{(k)} \right]^2. \quad (198)$$

Подставим в последнюю сумму уравнений (198)  $f_n = \psi_n^{(p)}$ , тогда из-за ортогональности собственных векторов (188) вместо (198) будем иметь

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \lambda_k \left[ \sum_{n=1}^N \psi_n^{(p)} \psi_n^{(k)} \right]^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k \delta_{pk} = \lambda_p > 0. \quad (199)$$

Строгое неравенство в уравнении (199) следует из уравнения (197).

Итак, уравнение (199) показывает, что восстановление непрерывного объекта по дискретным отсчетам изображения с помощью формул (195), (196) оказывается регулярым.

6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

В [35] дан обзор по методам восстановления функции распределения частиц по размерам с использованием решения системы алгебраических уравнений. В перечисленных работах все методы основаны на решении уравнения, которое выводится ниже.

На рис.18 показана оптическая схема анализируемой экспериментальной ситуации. Тонкая плоскопараллельная кювета  $K$ , через которую прокачивается исследуемая среда (газ, жидкость) с диспергированными в ней частицами, освещается плоской волной когерентного монохроматического лазерного света после предварительного коллимирования с длиной волны  $\lambda$ , меньшей размеров микрочастиц. Объектив  $O$  формирует в задней фокальной плоскости пространственный спектр рассеянного частицами излучения. В плоскости спектра находится многоэлементный фотоприемник (линейка ПЗС или кольцевой фотоприемник), регистрирующий распределение средней интенсивности по радиусу.

Электрический сигнал с фотоприемника поступает в компьютер для последующей обработки.

Предположим, что частицы полностью поглощают свет, являются сферическими и имеют размеры больше длины волны. Кювета имеет толщину много меньшую, чем фокусное расстояние Фурье-объектива. Тогда комплексная амплитуда рассеянного светового поля (без учета центрального максимума значения интенсивности, которое формируется нерассеянной составляющей поля) в пространственном спектре в малоугловом приближении (обоснование применимости малоуглового приближения для исследования ансамбля микрочастиц можно найти в [126]) для сферических поглощающих частиц описывается выражением:

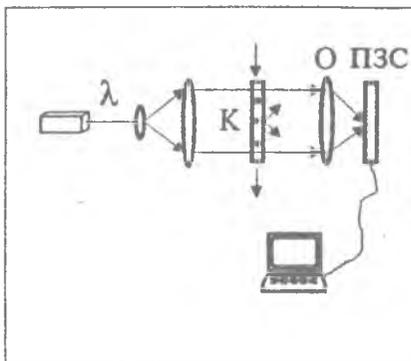


Рис. 18. Оптическая схема  
анализатора частиц

$$F(r, \varphi) = Ar^{-1} \sum_{n=1}^N a_n J_1(ka_n r/f) \exp \left[ ikrr_n f^{-1}(\varphi - \varphi_n) \right], \quad (200)$$

где  $a_n$  - радиус частицы,  $N$  - число частиц,  $k$  - волновое число,  $f$  - фокусное расстояние Фурье-объектива,  $A$  - постоянная,  $(r_n, \varphi_n)$  - полярные координаты центра частицы.

Средняя интенсивность спектра равна

$$I(r, \varphi) = \langle F(r, \varphi) F^*(r, \varphi) \rangle =$$

$$= A^2 r^{-2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m J_1(ka_n r/f) J_1(ka_m r/f) \langle \exp \left[ ikf^{-1} r \left[ r_n \cos(\varphi - \varphi_n) - r_m \cos(\varphi - \varphi_m) \right] \right] \rangle. \quad (201)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  - знак усреднения по ансамблю статистически подобных наборов микрочастиц.

Если частиц одинакового радиуса  $M$  достаточно много, то по центральной предельной теореме получим, что

$$I(r) = A^2 r^{-2} \sum_{n=1}^{N1} a_n^2 J_1^2(ka_n r/f) M(a_n), \quad (202)$$

где  $N1$  - число сортов частиц с одинаковыми радиусами,  $M(a_n)$  - число частиц радиуса  $a_n$ .

В непрерывном варианте, когда мала разница между радиусами соседних сортов частиц  $a_n - a_{n+1} \ll a_n$ , тогда вместо (202) можно записать:

$$I(r) = A^2 r^{-2} \int_0^{\infty} P(a) a^2 J_1^2(ka r/f) da, \quad (203)$$

где  $J_1(x)$  - функция Бесселя первого рода первого порядка,  $a$  - текущий радиус частицы,  $P(a)$  - искомая функция распределения частиц по размерам (ФРМР), которая соответствует относительной концентрации частиц данного радиуса в смеси частиц разного радиуса.

Итак, при указанных выше предположениях задача определения ФРМР сводится к решению интегрального уравнения (203) относительно функции  $P(a)$ , считая, что усредненное радиальное распределение интенсивности  $I(r)$  известно из эксперимента.

### 6.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АБЕЛЯ

В данном разделе интегральное уравнение (203) решается с помощью интегрального преобразования Абеля [35].

Применение к обеим частям равенства (203) преобразования Фурье-Бесселя приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
 G(\xi) &= \int_0^{\infty} I(r)r J_0(kr\xi/f)dr = & (204) \\
 &= A\pi^{-1} \int_{\xi/2}^{\infty} a^2 P(a) \left[ \arccos(\xi/2a) - \xi(4a^2 - \xi^2)^{1/2}(4a^2)^{-1} \right] da.
 \end{aligned}$$

Функция  $G(\xi)$  есть функция автокорреляции от функции, описывающей пропускание объема с рассеивающими частицами. Двукратное дифференцирование обеих частей равенства (204) приводит к выражению

$$\frac{2\pi}{A\xi} \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} = \int_{\xi/2}^{\infty} \frac{P(a) da}{(4a^2 - \xi^2)^{1/2}} \quad (205)$$

Из (205) видно, что вторая производная функции автокорреляции связана с искомой функцией преобразованием Абеля. Известны две формы для формулы обращения преобразования Абеля, на основе которых получаются две формы решения уравнения (205):

$$P(a) = -a/A \int_{2a}^{\infty} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^{-1} \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} \right] (\xi^2 - 4a^2)^{-1/2} d\xi \quad (206)$$

$$P(a) = -4/A \frac{d}{da} \left[ \int_{2a}^{\infty} \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} (\xi^2 - 4a^2)^{-1/2} d\xi \right] \quad (207)$$

## 6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕЙТМАНА И НЕЙМАНА-ХАНКЕЛЯ

В этом разделе рассмотрен метод определения ФРМР, основанный на решении интегрального уравнения (203) в явном виде и с помощью двух похожих интегральных преобразований, ядра которых зависят от билинейной комбинации функций Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков.

Сначала используем две обобщенные Фурье-трансформанты, найденные Бейтманом в 1907 году. Оказывается, что имеют место выражения

$$f(x) = \int_0^{\infty} K(xy)g(y)dy, \quad (208)$$

$$g(y) = \int_0^{\infty} H(xy)f(x)dx. \quad (209)$$

Здесь

$$K(x) = 0.5\pi^{1/2}x \frac{d}{dx} \left[ xJ_{\nu}^2(x/2) \right], \quad (210)$$

$$H(x) = -\pi^{1/2}J_{\nu}(x/2)Y_{\nu}(x/2), \quad (211)$$

$J_{\nu}(x)$  и  $Y_{\nu}(x)$  - функции Бесселя и Неймана  $\nu$ -го порядка и первого рода.

Функция Неймана есть, по определению, функция Бесселя второго рода, а функция Бесселя второго рода связана с функцией первого рода соотношением :

$$Y_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu} . \quad (212)$$

Здесь  $\nu$  - не целое число, а если  $\nu=m$  - целое число, то имеет место предельное соотношение

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} Y_{\nu}(x) . \quad (213)$$

Применив к уравнению (203) трансформанты (208)-(211), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} r \frac{d}{dr} \left[ I(r) r^3 \right] J_1(r_0 a') Y_1(r_0 a') dr = \\ & = A^2 \int_0^{\infty} r \frac{d}{dr} \left[ r J_1^2(r_0 a) \right] dr \int_0^{\infty} a^2 P(a) J_1(r_0 a') Y_1(r_0 a') da = \\ & = -A^2 \int_0^{\infty} a P(a) da \int_0^{\infty} a r \frac{d}{dx} \left[ J_1^2(r_0 a) r \right] J_1(r_0 a') Y_1(r_0 a') dr = \\ & = -A^2 \int_0^{\infty} a P(a) \delta(a-a') da = -A^2 P(a') a' , \quad r_0 = kr/f . \end{aligned} \quad (214)$$

Из (214) окончательно получим выражение для решения уравнения (203):

$$P(a) = -(aA^2)^{-1} \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} \left[ r^3 I(r) \right] J_1(kra/f) Y_1(kra/f) r dr . \quad (215)$$

Из (215) следует алгоритм обработки измеренной интенсивности  $I(r)$ : первая операция - взятие производной от функции  $r^3 I(r)$ , вторая операция - осуществление интегрального преобразования Бейтмана от функции  $d/dr(r^3 I(r))$ . В (215) осуществляется операция дифференцирования над измеренными данными, что может привести к дополнительным ошибкам при работе в присутствии шума. Ниже приводится другое решение уравнения

(203) с помощью преобразования Неймана-Ханкеля, в котором отсутствует операция дифференцирования экспериментальных данных. Воспользуемся для дальнейшего известным соотношением

$$\int_0^{\infty} x J_{\nu}^2(ax) J_{\nu}(bx) Y_{\nu}(bx) dx = \begin{cases} -(2\pi ab)^{-1}, & b < a, \\ 0, & b > a. \end{cases} \quad (216)$$

Применяя это соотношение к уравнению (203), получим далее

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} r^3 I(r) J_1(kra'/f) Y_1(kra'/f) dr = \\ & = A^2 \int_0^{\infty} a^2 P(a) da \int_0^{\infty} r J_1^2(kra/f) J_1(kra'/f) Y_1(kra'/f) dr = \\ & = -A^2 (2\pi a')^{-1} \int_{a'}^{\infty} a P(a) da. \end{aligned} \quad (217)$$

Дифференцируя первую и последнюю части равенства (217) по  $a'$ , окончательно получим

$$P(a) = 2\pi (aA^2)^{-1} \int_0^{\infty} r^3 I(r) \frac{d}{da} \left[ a J_1(r_0 a) Y_1(r_0 a) \right] dr, \quad (218)$$

где  $A^2 = A(f/k)^2$ ,  $r_0 = rk/f$ .

Ядро преобразования (218) можно получить без операции дифференцирования, если использовать рекуррентные соотношения для цилиндрических функций и их производных:

$$\begin{aligned} Q(r, a) &= J_1(r_0 a) Y_1(r_0 a) + a J_1(r_0 a) \frac{d}{da} Y_1(r_0 a) + \\ &+ a Y_1(r_0 a) \frac{d}{da} J_1(r_0 a) = J_1(r_0 a) Y_1(r_0 a) + a J_1(r_0 a) \left[ r_0 Y_0(r_0 a) - \right. \end{aligned}$$

$$- a^{-1}Y_1(r_0 a) \Big] + aY_1(r_0 a) \Big[ r_0 J_0(r_0 a) - a^{-1}J_1(r_0 a) \Big] = \quad (219)$$

$$= r_0 a \Big[ J_1(r_0 a)Y_0(r_0 a) + J_0(r_0 a)Y_1(r_0 a) \Big] - J_1(r_0 a)Y_1(r_0 a) .$$

Окончательное решение уравнения (203) с помощью преобразования Немана-Ханкеля может быть записано в виде:

$$P(a) = 2\pi (aA')^{-1} \int_0^{\infty} r^3 I(r) Q(r, a) dr . \quad (220)$$

Ядро преобразования (220) выражено в виде билинейной комбинации функций Бесселя и Неймана, поэтому оно и названо интегральным преобразованием Неймана-Ханкеля.

Из предыдущего следует, что аналогично уравнениям (208)-(211) можно записать еще две обобщенные Фурье-трансформанты:

$$K(x) = xJ_1^2(x), \quad (221)$$

$$H(x) = 2\pi \frac{d}{dx} \left[ xJ_1(x)Y_1(x) \right] , \quad (222)$$

для которых имеют место интегральные соотношения

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y) K(xy) dy, \quad g(y) = \int_0^{\infty} f(x) H(xy) dx . \quad (223)$$

В нашем случае:  $f(x) = x^3 I(x)$  ,  $g(y) = yP(y)$ .

### 6.3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В этом параграфе рассмотрен метод восстановления функции распределения частиц по размерам, основанный на решении уравнения (203) с помощью преобразования Фурье.

С этой целью предлагается рассматривать интегральное уравнение (203) относительно искомой функции  $P(a)$  как уравнение типа свертки. Для этого вводятся переобозначения

$$i(r) = I(r)r^2, \quad S(a) = a^3P(a), \quad F(ra) = J_1^2(kra/f)$$

и логарифмическая замена переменных

$$r = r_0 \exp(x), \quad a = a_0 \exp(y).$$

В результате такой замены переменных неэквидистантные отсчеты распределения интенсивности по  $r$  в пределах от 0 до  $\infty$  переходят в эквидистантные отсчеты по  $x$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Аналогичное изменение пределов получается для переменной  $a$ . При этом вместо (203) получим уравнение типа свертки

$$i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(y)F(x+y)dy. \quad (224)$$

Решение уравнения (224) записывается в виде

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w)R(\alpha, w)\Phi^{-1}(w)\exp(-iwy)dw. \quad (225)$$

Здесь

$$U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} i(x)e^{ixw}dx, \quad \Phi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{iyw}dy, \quad (226)$$

$R(\alpha, w)$  - стабилизирующий множитель.

Он может быть выбран в виде стабилизирующего оператора Тихонова для свертки:

$$R(\alpha, w) = \frac{|\Phi(w)|^2}{|\Phi(w)|^2 + \alpha w^{2n}}, \quad (227)$$

где  $\alpha$  - параметр регуляризации,  $n=1,2,3,\dots$

Окончательное выражение для искомой функции распределения  $P(a)$  с учетом (225) и (227) имеет вид

$$P(a) = a^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(w)\Phi^*(w)}{|\Phi(w)|^2 + \alpha w^{2n}} \exp(-iw \ln a/a_0) dw, \quad (228)$$

где  $P(a) \geq 0$ .

Таким образом, методика восстановления ФРМР сводится к следующему: измеряется усредненная радиальная функция интенсивности пространственного спектра  $I(r)$  излучения, рассеянного микрочастицами; известная функция  $r^2 I(r)$  после замены переменных  $r=r_0 \exp(x)$  численно подвергается быстрому преобразованию Фурье; полученная в результате функция  $U(w)$  подставляется в (228) и окончательно вычисляется  $P(a)$ .

Предложенный метод включает в себя процедуру регуляризации и поэтому оказывается устойчивым к ошибкам в данных, полученных при измерениях.

#### 6.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕБЕРА

Интересно отметить, что из комбинации функций Бесселя и Неймана можно получить взаимную пару интегральных преобразований, отличных от приведенных выше (208)-(211), (221)-(223) и обладающих той особенностью, что прямое и обратное преобразования будут совпадать, как это имеет место для преобразований Фурье и Ханкеля. Так как функцию Неймана иногда называют функцией Вебера, то и следующее преобразование назовем преобразованием Вебера [36]:

$$g(y) = \int_a^{\infty} f(x) K(x, y^2) x dx, \quad a > 0, \quad (229)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y) K(x, y^2) y dy, \quad x > a, \quad (230)$$

Здесь

$$K(x, y^2) = \frac{J_\nu(yx)Y_\nu(ya) - J_\nu(ya)Y_\nu(yx)}{\sqrt{J_\nu^2(ya) + Y_\nu^2(ya)}} \quad (231)$$

Интегральное преобразование Вебера (229)–(231) применимо для квадратично-интегрируемых функций:

$$\int_a^\infty |f(x)|^2 x dx < \infty \quad (232)$$

## 7. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

О функции Вигнера (ФВ) уже упоминалось (уравнение (105)) в связи с частичным преобразованием Фурье. Ниже эта функция рассматривается подробнее, во-первых, потому что эта функция по сути является результатом интегрального преобразования от квадратичной формы комплексной амплитуды света, а, во-вторых, она тесно связана с другим распространенным преобразованием в оптике (особенно, в томографии) – преобразованием Радона. Кроме того, будет показано, как с помощью ФВ можно восстанавливать фазу световых полей.

### 7.1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Согласно определению ФВ можно записать:

$$W(x, p, z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U(x+\xi/2, z) U^*(x-\xi/2, z) e^{-ip\xi} d\xi \quad (233)$$

Пусть функция комплексной амплитуды света  $U(x, z)$  удовлетворяет параболическому уравнению распространения

$$\left[ 21k \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] U(x, z) = 0 \quad (234)$$

Тогда для функции взаимной интенсивности  $i(x_1, x_2, z) = U(x_1, z)U^*(x_2, z)$  имеет место следующее уравнение:

$$\left[ 21k \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] i(x_1, x_2, z) = 0 \quad (235)$$

Из уравнений (233) и (235) и с учетом замены переменных

$$\xi = x_1 - x_2, \quad 2x = x_1 + x_2$$

следует уравнение для ФВ:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{p}{k} \frac{\partial}{\partial x} \right] W(x, p, z) = 0, \quad z \geq 0 \quad (236)$$

решение которого имеет вид

$$W(x, p, z) = W(x - pz/k, p, 0) \quad (237)$$

В правильности решения (237) можно убедиться, используя определение ФВ (233)

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x+\xi/2, z) U^*(x-\xi/2, z) e^{-ip\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} U(x+\xi/2 - zp/k, 0) U^*(x-\xi/2 - zp/k, 0) e^{-ip\xi} d\xi \quad (238)$$

и связь между комплексными амплитудами через преобразование Френеля:

$$U(x, z) = \left(\frac{k}{z}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} U(t, 0) \exp\left[-ik(x-t)^2/2z\right] dt. \quad (239)$$

## 7.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

Заметим, что из уравнения (233) следует простая связь между ФВ и функцией интенсивности светового поля

$$I(x, z) = |U(x, z)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, p, z) dp. \quad (240)$$

С помощью уравнения (237) и фильтрующего свойства  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-y) dx = f(y)$$

вместо (240) получим уравнение

$$I(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x-zp/k, p, 0) dp = \iint_{-\infty}^{\infty} W(y, p, 0) \delta(y-x+zp/k) dp dy. \quad (241)$$

Последнее равенство в уравнении (241) записано в форме преобразования Радона, которое по определению имеет вид

$$R_W(q, \vec{n}) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x, p, 0) \delta(xn_1 + pn_2 - q) dx dp, \quad \vec{n} = (n_1, n_2). \quad (242)$$

Из уравнений (241) и (242) следует связь функции интенсивности света с преобразованием Радона от функции Вигнера

$$R_W(q, \vec{n}) = |\vec{n}|^{-1} I(q/n_1, kn_2/n_1) \theta(kn_2/n_1), \quad (243)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Используя формулу обратного преобразования Радона [37], получим уравнение, обратное к уравнению (240):

$$W(x, p) = -(2\pi^2 k)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dz \left[ x - x' - pz/k \right]^{-2} I(x', z). \quad (244)$$

### 7.3. СВЯЗЬ ФВ И ФАЗЫ СВЕТОВОГО ПОЛЯ

Выразив комплексную амплитуду поля через функции интенсивности и фазы

$$U(x, 0) = I^{1/2}(x) \exp[i\varphi(x)],$$

нетрудно убедиться, что верно следующее соотношение:

$$I(x, 0) \frac{d}{dx} \varphi(x) = \text{Im} \left\{ \frac{d}{dx} U(x+\xi/2, 0) U^*(x-\xi/2, 0) \right\} \Big|_{\xi=0}. \quad (245)$$

Используя уравнения (233) и (240), вместо (245) можно записать

уравнение для производной искомой фазовой функции

$$\frac{d\varphi(x,0)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} pW(x,p,0) dp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} W(x,p,0) dp \right]^{-1}, \quad (246)$$

решение которого имеет вид [38]

$$\varphi(x,0) = \varphi(0,0) + \int_0^x \frac{\int_{-\infty}^{\infty} pW(x',p,0) dp}{\int_{-\infty}^{\infty} W(x',p,0) dp} dx'. \quad (247)$$

В знаменателе формулы (247) находится функция интенсивности при  $z=0$ , что следует из уравнения (240), а первый момент функции Вигнера связан с функцией интенсивности следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} pW(x,p,0) dp = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(p-x') \frac{\partial}{\partial z} I(x',z) \Big|_{z=0} dx', \quad (248)$$

где

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Таким образом, уравнения (240), (247) и (248) показывают, как связана фаза светового поля с функцией интенсивности, которую можно измерить в ходе эксперимента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Gabor D. Theory of communication //J.I.E.E., 1946, V.93, P.429-457.
2. Janssen A.J. The Zak transform: a signal transform for sample time-continuous signals //Philips J.Res., 1988, V.43, N 1, P.23-69.
3. Li Y., Zhang Y. Coherent optical processing of Gabor and wavelet expansions of one- and two-dimensional signal //Optical Engineering, 1992, V.31, N 9, P.1865-1885.
4. Balart R. Matrix reformulation of the Gabor transform. //Optical Engineering, 1992, V.31, N 6, P.1235-1241.
5. Sheng Y., Roberge D., Szu H. Optical wavelet transform //Optical Engineering, 1992, V.31, N 9, P.1840-1845.
6. Zhang Y., Li Y., Kanterakis E.G., Katz A., et al. Optical realization of wavelet transform for a one-dimensional signal //Optics Letters, 1992, V.17, P.210-212
7. Burns T.J., Fielding K.H., Rogers S.K., et al. Optical Haar wavelet transform //Optical Engineering, 1992, V.31, N 9, P.1852-1858.
8. Martinet R.K., Morlet J., Grossmann A. Analysis of sound patterns through wavelet transforms //Int.J.Patt.Rec., Artificial Intell., 1987, V.1, N 2, P.273-302.
9. Resnikoff H.L. Wavelets and adaptive signal processing //Optical Engineering, 1992, V.31, N 6, P.1229-1234.
10. Chui C.K. An Introduction wavelets. Academic Press, San Diego, 1992.
11. Mendlovic D., Ozaktas H.M.. Fractional Fourier transforms and their optical implementation //J.Opt.Soc.Am. A, 1993, V.10, P.1875-1881.
12. Lohmann A.W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform //J.Opt.Soc.Am. A, 1993, V.10, P.2181-2186.
13. Bartelt H.O., Brenner K.H., Lohmann A.W. The Wigner distribution function and its optical implementation //Optics Communications, 1980, V.32, N 1, P.32-38.

14. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook*, McGraw-Hill Book, New York, 1961
15. Doskolovich L.L., Khonina S.N., Kotlyar V.V. et al. *Focusators into a ring // Opt. and Quant. Electr.*, 1993, V.25, P.801-814.
16. Fedotowsky A., Lehovec K. *Optimal filter design for annular imaging // Appl. Opt.*, 1974, V.13, N 12, P.2919-2923.
17. Gerchberg R.W., Saxton W.O. *A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures // Optik*, 1972, V.35, N 2, P. 237-246.
18. Kazanskiy N.L., Kotlyar V.V., Soifer V.A. *Computer-aided design of diffractive optical elements // Opt. Eng.*, 1994, V.33, N 10, P.3156-3166.
19. Kotlyar V.V., Nikol'sky I.V., Soifer V.A. *An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes // Optik*, 1994, V.98, N 1, P.26-30.
20. Fienup J.R. *Phase retrieval algorithm: a comparison // Appl. Opt.*, 1982, V.21, N 15, P.2758-2769.
21. Scott G., McArdle N. *Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon // Opt. Eng.*, 1992, V.31, N 12, P.2640-2643.
22. Kotlyar V.V., Nikol'sky I.V., Soifer V.A. *Adaptive iterative algorithm for focusator's synthesis // Optik*, 1991, V.88, N 1, P.17-19.
23. Kotlyar V.V., Nikol'sky I.V. *Iterative computing of transmittance of optical elements focusing at a predetermined area // Opt. Lasers in Eng.*, 1991, V.15, N 5, P.323-330.
24. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов*. М.: Мир, 1984.
25. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. М.:Наука, 1983.
26. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. М.:Наука, 1971.
27. *Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике*. Под. ред. К.Размахнина, М.:Сов. радио, 1971.
28. Frieden B.R. *Evaluation, design and extrapolation methods for optical signals, based on use of the prolate functions. //Progress in Optics*, by ed. K.Wolf, Amsterdam, 1971, V.9, P.313-411.

29. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington, D.C., 1977
30. Abbiss J.B., Defrise M., DeMol C., et al. Regularized iterative and noniterative procedures for object restoration in the presence of noise: an error analysis // *J.Opt.Soc.Am.*, 1983, V.73, N 11, P.1470-1475.
31. Gerchberg R.W. Super-resolution through error energy reduction // *Opt. Acta*, 1974, V.21, P.709-720.
32. Papoulis A. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation // *IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-22*, 1975, P.735-742.
33. Noel E., Khan R.R., Dhadwal H.S. Optical implementation of a regularized Gerchberg iterative algorithm for super-resolution // *Opt. Eng.*, 1993, V.32, N 11, P.2866-2871.
34. Минц М.Я., Прилепский Е.Д. Применение дискретизации изображения к решению задач восстановления объекта // *Оптика и спектроскопия*, 1993, Т.75, N 3, С.696-701.
35. Котляр В.В., Никольский И.В., Соколов В.А. Оптико-цифровые методы анализа ансамбля микрочастиц по его пространственному спектру // *Компьютерная оптика*, 1991, N 9, С.72-84.
36. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.. *Уравнения в частных производных математической физики*, М.: Высшая школа, 1970.
37. Гельфанд И.М., Шилов Г.И., Виленкин Н.Я.. *Интегральная геометрия и связанные проблемы теории представлений*. М.:Физматгиз, 1962.
38. Aksenov V.P. Solution of the phase problem based on the Radon transformation of distributions // *J.Mod.Opt.*, 1992, V.39, N 5, P.1017-1027.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Преобразование Габора .....	4
2. Преобразование волнового пакета .....	16
3. Частичное преобразование Фурье .....	30
4. Модовые разложения .....	36
5. Линзовое преобразование и формирование изображений .....	48
6. Интегральные преобразования в задачах анализа частиц по размерам .....	61
7. Функция Вигнера и преобразование Радона .....	70
Библиографический список .....	75

КОТЛЯР Виктор Викторович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОПТИКЕ

Редактор Т. И. Кузнецова  
Техн. редактор Г. А. Усачева  
Корректор Н. С. Купрянова

Лицензия ЛР № 020301 от 28.11.91.

Подписано в печать 20.06.95. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 4,65. Усл.кр.-отт. 4,77. Уч.-изд. л. 4,5.

Тираж 100 экз. Заказ 374. Арт. С-118/95

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П.Королева  
443086 Самара, Московское шоссе, 34

Издательство СГАУ

443001 Самара, ул.Ульяновская, 18