Министерство высшего и среднего
специального образования РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С.П. КОРОЛЕВА

В.В. Андреева

С Т А Т И С Т И Ч Е С К И Й   А Н А Л И З Т Е Х Н О Л О Г И Ч Е С К И Х   П Р О Ц Е С С О В И   К О Н С Т Р У К Ц И Й   РЭА

Учебное пособие

Куйбышев 1979

УДК 621.396.6

В пособии изложены краткие теоретические сведения по следующим статистическим методам анализа: исключение грубых ошибок в выборке, определение точечных и интервальных оценок параметров распределения, статистическая проверка параметрических гипотез. Пособие предназначено для развития практических навыков в решении и постановке задач статистического анализа конструкций и технологических процессов производства радиоэлектронной аппаратуры. Все разделы пособия снабжены типовыми задачами с решениями. Постановки задач характерны для практической исследовательской работы конструкторов и технологов по анализу качества радиоэлектронной аппаратуры. Для удобства пользования пособием в нем приведены все необходимые для решения рассматриваемых задач статистические таблицы. Пособие рассчитано на студентов специальности 0705.

Автор выражает благодарность И.А.Уховой за помощь в подготовке расчетных материалов.
Темплан 1979 г., поз. 357.

Утверждено на редакционно-издательском совете института 16.12.77 г.

Рецензенты: В.Б.Н е с т р я к о в, В.И.С у х а н о в

В В Е Д Е Н И Е

Необходимым условием успешного решения задачи повышения качества и эффективности производства радиоэлектронной аппаратуры, поставленной в решениях XXУ съезда КПСС, является применение статистических методов при анализе стабильности и точности технологических процессов производства, в исследовании отклонений параметров конструкций РЭА. Поэтому современный инженер-конструктор-технолог РЭА должен владеть статистическими методами в такой мере, чтобы уметь поставить задачу статистического анализа в условиях конкретного производства и решить ее.

Первым этапом в исследовании отклонений параметров конструкций или технологических процессов статистическими методами является проверка статистических данных на наличие в них резко отклоняющихся значений, так называемых грубых ошибок или промахов. Исключение таких значений призвано способствовать повышению достоверности выводов по результатам статистического анализа. Дальнейшее исследование состоит в оценке таких характеристик случайной величины, как математическое ожидание и дисперсия, в определении для них доверительных интервалов. Суждения о точности и стабильности параметров могут быть сделаны по результатам применения статистических методов проверки гипотез. Такие задачи имеют наибольшее практическое применение в практике исследования отклонений параметров в производстве. Их использование не связано с нарушением ритма производственного процесса и в то же время позволяет по результатам исследования небольшой совокупности изделий делать научно-обоснованные выводы о параметрах всей изготавливаемой партии изделий, о качестве технологического процесса.

В основу рассматриваемого в пособии теоретического материала положена книга Н.В. Смирнова и И.В. Дунина-Барковского [I], в которой изложены более подробные сведения по названным вопросам.

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

I.I. Основные определения

Как известно, значения параметров технологического процесса отклоняются от нормы со временем в связи с действием различного рода случайных факторов. Поэтому значения параметров выпускаемых изделий являются случайными величинами. При изучении степени отклонения значений какого-либо параметра статистически однородных изделий практически невозможно и экономически нецелесообразно обследовать каждый объект изучаемой совокупности.

Вся подлежащая изучению совокупность однородных объектов называется генеральной совокупностью.

Часть случайно отобранных объектов называется выборочной совокупностью или просто выборкой.

Число объектов в генеральной совокупности или выборке называют их объемами.

Пусть для изучения некоторого количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Значения x_i / $i = 1, 2, \ldots, n$) признака X в выборке называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, - вариационным рядом.

Независимо от того, какие задачи поставлены перед экспериментаторами при обработке статистических данных, для ускорения дальнейших расчетов и предупреждения ошибки необходима определенная предварительная их обработка.

Если варианты выборки представлены дробными числами, то целесообразно умножить их на какую-то постоянную величину, чтобы оперировать далее только с целыми числами.

Если варианты являются многозначными числами и различаются лишь в одном или нескольких последних знаках, то для упрощения расчетов следует отбросить постоянную часть вариант.

После завершения расчетов необходимо произвести с результатом обратные операции.

Если объем выборки невелик, следует расположить варианты в виде вариационного ряда и пронумеровать их. При большом объеме выборки необходимо указать значения и порядковые номера наибольшей и наименьшей вариант, а также двух ближайших к ним вариант.

I.2. Критерий исключения резко отклоняющихся вариант

Выборочные данные иногда могут содержать резко отклоняющиеся результаты, так называемые выскакивающие варианты. Они являются, как правило, следствием какой-либо грубой ошибки в проведении эксперимента или измерения, оставшейся незамеченной. Методы, обычно применяемые для выявления выскакивающих вариант, довольно громоздкие, так как требуют предварительного определения оценок математического ожидания и дисперсии [I], [3]. Здесь рассматривается очень быстрый способ, позволяющий решать эту задачу с достаточной строгостью. Он основан на оценке различий крайних вариант данной совокупности [2].

Пусть имеем выборку объема n, данные которой представлены в виде вариационного ряда

$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Для проверки вариант, относительно которых можно предположить, что они являются выскакивающими, следует вычислить отношения, представленные в табл. П1.

Отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ вычисляется, когда резко отклоняющейся является наибольшая варианта.

Отношение $\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$ вычисляется, когда "подозреваемой" является наименьшая варианта.

Отношения, представленные во втором и третьем столбцах табл. П1, могут использоваться в некоторых случаях для повышения эффективности проверки выскакивающих вариант.

Так, отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$ позволяет эффективнее выявлять выскакивающую наибольшую варианту, когда предполагаются выскакивающими сразу две варианты - наибольшая и наименьшая.

Отношение $\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$ используется для проверки наименьшей варианты, когда "подозреваемыми" являются наибольшая и наименьшая варианты.

2-1611

Отношение $\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$ служит для проверки наибольшей варианты, когда предполагаются выскакивающими сразу две наибольшие варианты.
Отношение $\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$ вычисляется для проверки наименьшей варианты, когда " подозреваемыми " являются две наименьших варианты.
Затем сравнить вычисленные значения отношений с соответствующими табличными для данного объема выборки n и уровней значимости α = 0,05 ; 0,01. В общем случае под уровнем значимости в математической статистике понимают вероятность принятия ошибочного решения. Здесь – это вероятность того, что мы ошибочно исключим проверяемую варианту, хотя в действительности она не является грубой ошибкой эксперимента, т.е. фактически эта варианта характерна для изучаемой генеральной совокупности.
Если хотя бы одно из трех вычисленных отношений превышает соответствующее табличное значение, это уже дает право на безоговорочное исключение крайней варианты.
Если каждое из трех вычисленных значений меньше соответствующего табличного, то проверяемая крайняя варианта не может быть исключена.
Возможно, что вычисленное значение окажется между табличными для уровней значимости 0,05 и 0,01. В таком случае нет оснований для безоговорочного вывода об исключении крайней варианты. Можно лишь отметить, что велика вероятность грубой ошибки при получении этой варианты.
Выскакивающую варианту необходимо исключить из всех последующих операций по статистической обработке.

З а д а ч а 1

1. Текущий контроль импульсных трансформаторов осуществляется по признаку " индуктивность первичной обмотки". В выборке объемом n = 10 получены следующие значения контролируемого признака: 357, 361, 370, 382, 391, 403, 406, 414, 427, 506 мкГн. В этой выборке может быть подвергнута сомнению наибольшая варианта (506). Проверить, можно ли считать, что эта варианта выскакивающая, и такой результат является следствием грубого нарушения технологического процесса либо ошибкой измерения и, следовательно, не характерен для всей партии.

Р е ш е н и е

I. Вычислим значение отношения $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ по данным выборки:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{506-427}{506-357} = \frac{79}{149} = 0{,}53.$$

Сравним это значение с табличным (объем выборки n = 10). По табл. П I находим, что оно равно 0,412 при уровне значимости α = 0,05 и 0,527 при α = 0,01. Вычисленное значение отношения оказалось больше табличного даже при уровне значимости α = 0,01. Это означает, что наибольшая варианта (506) является выскакивающей, т.е. данный импульсный трансформатор следует исключить из рассмотрения и считать его нехарактерным для всей партии. Нет необходимости проверять наибольшую варианту по отношениям вида $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$ и $\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$, так как она уже исключена из выборки при проверке по отношению $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$.

О т в е т: наибольшая варианта 506 - выскакивающая, т.е. значение индуктивности первичной обмотки 506 мкГн является грубой ошибкой, например, из-за нарушения технологического процесса производства импульсных трансформаторов.

З а д а ч а 2. По данным эксплуатации партии блоков питания предприятие-изготовитель получило сведения о времени работы 15 блоков до первого отказа: 225, 363, 398, 407, 430, 463, 480, 493, 506, 546, 590, 602, 618, 639, 648 часов. В этой выборке вызывает подозрение наименьшая варианта. Проверить, можно ли считать такое время работы блока питания до первого отказа (225 ч) нехарактерным для всей партии.

Р е ш е н и е

1. Вычислим значение первого отношения:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} = \frac{363-225}{648-225} = \frac{138}{423} = 0{,}326.$$

2. По табл. П I находим табличное значение для объема выборки n = 15. Оно равно 0,338 при уровне значимости α =0,05 и 0,438 при α = 0,01. Так как вычисленное значение отношения меньше табличного, нет оснований считать наименьшую варианту выскакивающей.

3. Вычислим значение второго отношения:

$$\frac{x_2-x_1}{x_n-x_2}=\frac{363-225}{648-363}=\frac{138}{285}=0,484.$$

4. Табличные значения в этом случае равны 0,381 при α = 0,05 и 0,486 при α =0,01. Сравнивая их с вычисленным, видим, что оно оказалось между табличными значениями. Это означает, что проверяемая варианта является сомнительной, но нет оснований для исключения ее из выборки по этому критерию.

5. Вычислим значение третьего отношения:

$$\frac{x_3-x_1}{x_n-x_1}=\frac{398-225}{648-225}=\frac{173}{423}=0,409.$$

6. Находим табличные значения: 0,430 при α =0,05 и 0,522 при α = 0,01. Вычисленное значение отношения оказалось меньше табличного и, значит, нет оснований для исключения проверяемой наименьшей варианты по этому критерию.

О т в е т : проверка по трем отношениям не дает оснований для безоговорочного исключения наименьшей варианты - 225. Однако проверка по второму отношению показала, что эта варианта сомнительная. Поэтому вполне возможно, что такое малое время работы до отказа является следствием, например, нарушения предусмотренных ТУ условий эксплуатации и не характерно для всей партии блоков питания.

2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория статистической оценки параметров распределения является одним из разделов математической статистики, в котором рассматривается совокупность методов, позволяющих делать научно обоснованные выводы о числовых параметрах распределения генеральной совокупности по случайной выборке из нее. Так как состав выборки случаен, то выводы о параметрах генеральной совокупности, сделанные по выборочным данным, даются с определенной вероятностью, характеризующей степень достоверности выводов.

2.1. Точечные оценки параметров распределения

Всякую однозначно определенную функцию результатов наблюдений над случайной величиной X , с помощью которой судят о неизвестном нам истинном значении параметра θ генеральной совокупности по данным выборки объема n, называют оценкой $\hat{\theta}_n$ параметра θ.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом.

Оценка $\hat{\theta}_n$ является случайной величиной. Выбор оценки, позволяющей получить хорошее приближение оценки $\hat{\theta}_n$ к истинному значению θ, является основной задачей статистической теории оценивания.

Оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θ называется состоятельной, если с увеличением объема выборки повышается вероятность того, что ошибка оценки не превысит сколь угодно малого положительного числа ε, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Следовательно, для состоятельной оценки с увеличением объема выборки все менее вероятной становится возможность значительной ошибки в оценке неизвестного параметра.

Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т.е. $M[\hat{\theta}_n]=\theta$. Требование несмещенности оценки особенно важно при малом объеме выборки, так как при этом важно быть уверенным в отсутствии систематического смещения оценки.

Эффективной оценкой называется такая несмещенная оценка, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра, вычисленных по выборкам одного и того же объема.

Наибольшее применение в практике обработки статистических данных находят оценки математического ожидания и дисперсии.

В общем случае математическое ожидание случайной величины X, называемое в математической статистике также генеральным средним, определяется выражением

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X.

Дисперсия (генеральная дисперсия) случайной величины X определяется выражением

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

Несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания μ случайной величины X является арифметическое среднее $\bar{X}$, вычисленное по n независимым наблюдениям над этой случайной величиной

3-1611

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (2.1)$$

где x_i – результат i -ого наблюдения.

Эффективность этой оценки зависит от вида закона распределения случайной величины X. Если случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами μ, σ^2 (плотность нормального закона распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$), то среднее арифметическое $\bar{X}$ имеет минимальную дисперсию, равную $\frac{\sigma^2}{n}$, и является эффективной оценкой математического ожидания μ.

<u>Состоятельная</u> оценка дисперсии σ^2 определяется выражением

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2, \qquad (2.2)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ – n независимых наблюдений над случайной величиной X,

$\bar{X}$ – оценка математического ожидания.

<u>Состоятельной и несмещенной</u> оценкой дисперсии σ^2 является оценка

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2. \qquad (2.3)$$

Сравнивая оценки S^2 и D, получаем:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D, \qquad (2.4)$$

величину $\frac{n}{n-1}$ называют поправкой Бесселя, а оценку S^2 – исправленной выборочной дисперсией. На практике часто вместо формулы (2.3) для определения S^2 применяют другую, равносильную ей;

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{X}^2 \right], \qquad (2.5)$$

но более удобную для вычислений. Введение поправки Бесселя существенно лишь для малого объема выборки, при большом n S^2 и D будут различаться очень мало.

Оценка S^2 не является эффективной. Однако при нормальном законе распределения случайной величины X оценка S^2 является " асимптотически эффективной", т.е. при увеличении n отношение ее дисперсии к минимально возможной неограниченно приближается к единице.

<u>Состоятельной</u>, <u>несмещенной</u> и <u>эффективной</u> оценкой σ^2 является

$$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2, \qquad (2.6)$$

где μ – математическое ожидание случайной величины X.
Среднее квадратическое отклонение σ как характеристика меры рассеяния случайной величины X относительно математического ожидания не менее часто используется на практике, чем дисперсия σ^2. Удобство этой характеристики состоит в том, что ее размерность равна размерности самой случайной величины X.
Несмещенная и состоятельная оценка среднего квадратического отклонения с учетом выражения (2.3) имеет вид

$$S = +\sqrt{S^2} = +\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}. \qquad (2.7)$$

Из трех рассмотренных здесь оценок дисперсии в практических расчетах наиболее употребительна несмещенная и состоятельная оценка S^2 (2.3), так как μ обычно неизвестно, и в этих условиях она предпочтительнее оценки D (2.2).

З а д а ч а 3. По условию задачи I определить среднее значение индуктивности первичной обмотки импульсного трансформатора.

Р е ш е н и е.

Среднее значение вычисляем по формуле (2.I) при объеме выборки n = 9, так как наибольшая варианта исключена из выборки как грубая ошибка:

$$\bar{X} = \frac{1}{9}(357+361+370+382+391+403+406+414+427) \text{ мкГн} = 390{,}1 \text{ мкГн}.$$

О т в е т : среднее значение в выборке $\bar{X}$ =390,I мкГн.

З а д а ч а 4. У четырех опытных образцов блоков измерено потребление тока. Получены следующие результаты: 0,38, 0,42, 0,39, 0,4I А. Оценить разброс потребления тока с помощью дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Р е ш е н и е

I. Оценим степень разброса потребления тока с помощью состоятельной оценки дисперсии D по формуле (2.2).
Объем выборки n =4. Определим среднее значение по формуле (2.I):

$$\bar{X} = \frac{1}{4}(0{,}38+0{,}42+0{,}39+0{,}41)\text{А} = 0{,}4 \text{ А}.$$

Тогда

$D = \frac{1}{4}$ (0,38-0,4)^2 + (0,42-0,4)^2 + (0,39-0,4)^2 + (0,4I - - 0,4^2) = 0,025 A^2.

2. Оценим степень разброса потребления тока с помощью состоятельной и несмещенной оценки дисперсии S^2 по формуле (2.4):

$$S^2 = \frac{4}{4-1}\ 0{,}025\ A^2 = 0{,}033\ A^2 .$$

3. Вычислим состоятельную и несмещенную оценку среднего квадратического отклонения по формуле (2.7):

$$S = \sqrt{0{,}033}\ A = 0{,}182\ A.$$

О т в е т : состоятельная оценка дисперсии потребления тока D = 0,025 A^2, состоятельная и несмещенная оценка дисперсии и среднего квадратического отклонения равны соответственно S^2 = = 0,033 A^2, S = 0,I82 A. Из двух оценок дисперсии потребления тока D и S^2 предпочтительнее S^2, так как она несмещенная и, значит, точнее оценивает генеральную дисперсию.

З а д а ч а 5. При серийном производстве осей на станках-автоматах одним из контролируемых размеров является их длина. Получены следующие результаты измерений длины оси для выборки n = = I0: II,09, I2,0I, I2, I2,0I, II,09, I2,0I, II,08, I2, II,09, II,08 мм. Оценить дисперсию этого размера, полагая, что математическое ожидание длины оси равно номинальному размеру I2 мм.

Р е ш е н и е

Найдем состоятельную несмещенную и эффективную оценку дисперсии по выражению (2.6): $S_x^{*} = \frac{1}{10}\Big[3\cdot(11{,}09-12)^2 + 2\cdot(12-12)^2 + 3\cdot(12{,}01-12)^2 + 2\cdot(11{,}08-12)^2\Big]$ мм^2 = 0,00014 мм^2.

О т в е т: степень разброса длин осей, изготавливаемых на станках - автоматах, оценена с помощью состоятельной несмещенной и эффективной оценки дисперсии S_x^2, S_x^{*} = 0,00014 мм^2.

2.2. Критерий Стьюдента для проверки резко отклоняющихся вариант

Этот метод является более строгим по сравнению с изложенным в § I.2, но и более громоздким, так как требует для каждой проверяемой варианты вычисления оценок математического ожидания и дисперсии, [3]. Для проверки наименьшей варианты необходимо вычислить отношение

$$t_{набл} = \frac{\bar{X} - x_1}{S}, \qquad (2.8)$$

здесь $\bar{X}$ – оценка математического ожидания;

S – оценка среднеквадратического отклонения.

При определении $\bar{X}$ и S "подозреваемая" наименьшая варианта исключена из расчета.

Затем сравнить вычисленное значение $t_{набл}$ с табличным $t_{табл}$, найденным по табл. П3 по заданному уровню значимости α (обычно берут $\alpha = 0{,}05$) и числу степеней свободы k. Здесь $k = n - 2$, n – общий объем выборки вместе с " подозреваемой " вариантой. В общем случае число степеней свободы равно числу независимых переменных (объем выборки) минус число связей, накладываемых на эти переменные. Здесь фактически объем выборки равен $n - 1$; число степеней свободы уменьшено на единицу, $k = (n - 1) - 1$, так как при определении S на $n - 1$ независимых наблюдений наложена одна " связь" – $\bar{X}$ вычислено по этим $n - 1$ наблюдениям.

Если $t_{набл} > t_{табл}$, то проверяемая варианта исключается из выборки и дальнейших расчетов как грубая ошибка. Вероятность того, что решение, принятое об исключении проверяемой варианты, правильно, равна $1 - \alpha$.

Проверка наибольшей варианты производится аналогичным образом, т.е. находится $t_{набл}$ и сравнивается с табличным $t_{табл}$.

З а д а ч а 6. По условию задачи 2, используя критерий Стьдента, проверить, можно ли считать, что время работы блока питания до первого отказа, равное 225 ч, не характерно для всей партии блоков питания.

Р е ш е н и е

I. Вычислим значение $t_{набл}$ по формуле (2.8), для чего определим оценки математического ожидания $\bar{X}$ и среднего квадратического отклонения S, исключая из выборки наименьшую варианту (225):

$$\bar{X} = \frac{1}{15-1} \sum_{i=2}^{15} x_i = 513; \quad S = \sqrt{\frac{1}{15-2} \sum_{i=2}^{15} (x_i - 513)^2} = 95{,}2,$$

тогда $t_{набл} = \dfrac{513-225}{95{,}2} = 3{,}02$.

2. Найдем табличное значение $t_{табл}$ по табл. П3 при числе степеней свободы k = 15–2 и уровне значимости $\frac{\alpha}{2}$, оно равно 2,16 при α =0,05 и 3,01 при α =0,01.

3. Сравнивая вычисленное и табличное значения критерия, заключаем, что проверяемая варианта является выскакивающей и должна быть исключена из всех дальнейших статистических расчетов. При этом вероятность того, что принятое решение ошибочно, равна 0,01.

О т в е т: время работы до первого отказа 225 ч не характерно для всей партии блоков питания.

Сравнивая два способа проверки резко отклоняющихся вариант, видим, что последний – критерий Стьдента – является более строгим, но требует большего объема вычислений для каждой проверяемой варианты.

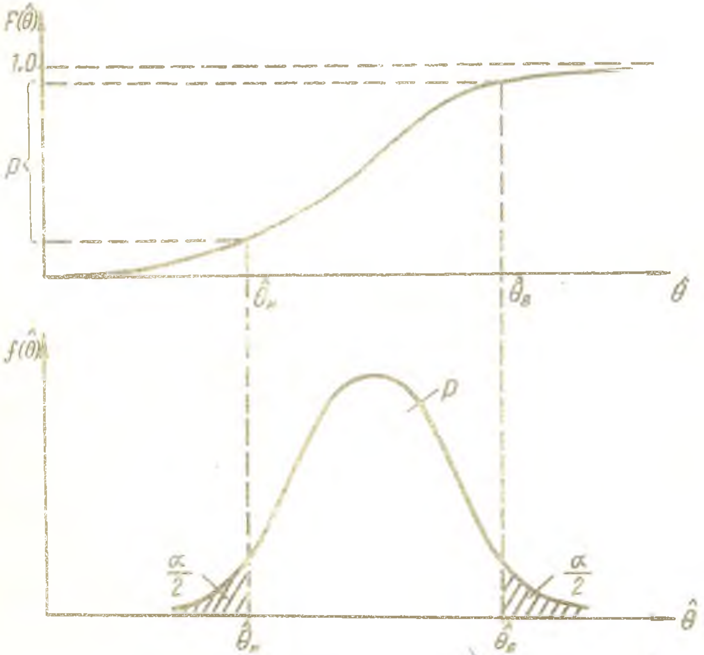
2.3. Интервальные оценки

Наряду с получением точечных оценок статистическая теория оценивания занимается вопросами интервального оценивания, которое особенно необходимо при малой выборке, когда точечная оценка в значительной мере случайна.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающими оцениваемый параметр. Общий метод нахождения интервальных оценок состоит в том, что точечная оценка $\hat{\theta}$ рассматривается как случайная величина, имеющая некоторое распределение $F(\hat{\theta})$. Вид функции $F(\hat{\theta})$ зависит от вида закона распределения случайной величины X и оцениваемого параметра θ, от объема выборки n. Если вид функции $F(\hat{\theta})$ известен, то в качестве границ доверительного интервала принимаются такие $\hat{\theta}_н$ и $\hat{\theta}_в$ случайной величины $\hat{\theta}$, при которых вероятность того, что истинное значение параметра θ окажется внутри этого интервала, близка к единице. Эту вероятность называют доверительной вероятностью P , ее обычно берут равной 0,9; 0,95; 0,99 и т.д. Величину $\alpha = 1 - P$ называют уровнем значимости. Определенный таким образом интервал называют доверительным интервалом.

Двусторонним доверительным интервалом $[\hat{\theta}_н, \hat{\theta}_в]$ для параметра θ называется такой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью P можно сказать, что внутри этого интервала находится истинное значение оцениваемого параметра θ , т.е. $P\{\hat{\theta}_н < \theta < \hat{\theta}_в\} = P = 1 - \alpha$.

Принцип интервальной оценки параметра θ поясняется на рис.I.



Р и с.I. Интервальная оценка параметра θ . $F(\hat{\theta})$ – интегральная функция распределения оценки параметра $\hat{\theta}$, $f(\hat{\theta})$ – плотность распределения оценки параметра θ

Здесь $F(\hat{\theta})$ и $f(\hat{\theta})$, соответственно, интегральная функция и плотность распределения оценки $\hat{\theta}$. Площадь под кривой плотности распределения $f(\hat{\theta})$, заключенная между нижней $\hat{\theta}_н$ и верхней $\hat{\theta}_в$ границами двустороннего доверительного интервала, равна выбранному значению доверительной вероятности P, а сумма заштрихованных площадок равна уровню значимости α, т.е. $\int_{\hat{\theta}_н}^{\hat{\theta}_в} f(\hat{\theta})d\hat{\theta} = P$.

Для интегральной функции распределения $F(\hat{\theta})$ при этом справедливо соотношение

$F(\hat{\theta}_в) - F(\hat{\theta}_н) = P$.

Доверительная вероятность P есть вероятность того, что найденный доверительный интервал покрывает неизвестное нам истинное значение параметра θ.

Границы доверительного интервала случайны, так как находятся по выборочным данным. Чем больше объем выборки, тем уже доверительный интервал для той же доверительной вероятности P. Чем больше выбрана доверительная вероятность P (т.е. чем ближе она к единице), тем шире для той же самой выборки доверительный интервал.

Таким образом, зная закон распределения выборочной оценки $\hat{\theta}$, так называемое <u>выборочное распределение оценки</u>, можно определить границы доверительного интервала $\hat{\theta}_н$ и $\hat{\theta}_в$ для выбранной доверительной вероятности P.

В некоторых случаях целесообразно использовать односторонний доверительный интервал, так как, исходя из природы исследуемой случайной величины, для нее имеет практический смысл лишь одна граница: верхняя $\hat{\theta}_в$ или нижняя $\hat{\theta}_н$. Например, для случайной величины - времени исправной работы до отказа - целесообразнее определять нижний односторонний доверительный интервал, тем самым гарантируя, что истинное среднее время исправной работы до отказа не меньше какого-то числа $\hat{\theta}_н$ с вероятностью $P = 1-\alpha$.

Нижний односторонний доверительный интервал задается в общем случае выражением

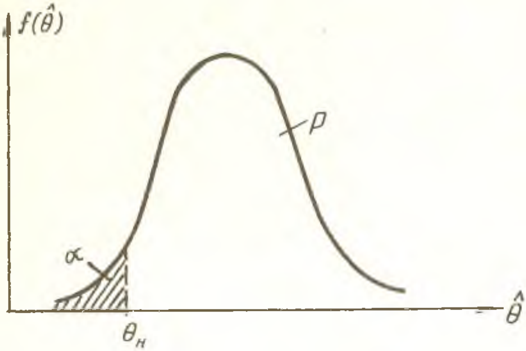
$P\{\hat{\theta}_н < \theta\} = P$,

а верхний односторонний доверительный интервал-выражением

$P\{\theta < \hat{\theta}_в\} = P$.

Принцип построения односторонних доверительных интервалов иллюстрируется на рис.2 и 3, соответственно, для нижнего и верхнего доверительных интервалов.

В математической статистике наиболее полно получены выборочные



Р и с.2. Нижний односторонний доверительный интервал для параметра θ, $f(\hat{\theta})$- плотность распределения оценки параметра $\hat{\theta}$

Р и с. 3. Верхний односторонний доверительный интервал для параметра θ, $f(\hat{\theta})$- плотность распределения оценки параметра $\hat{\theta}$

распределения оценок математического ожидания и дисперсии для нормально распределенной случайной величины X.
При этом выборочное распределение оценки $\bar{X}$ при известной генеральной дисперсии σ^2 является также нормальным, и поэтому доверительные интервалы здесь находятся с использованием нормального распределения. При неизвестной генеральной дисперсии σ^2 доверительные интервалы для математического ожидания находятся с использованием распределения Стьюдента (t - распределения).
Доверительные интервалы для дисперсии определяются с помощью распределения χ^2 Пирсона, как для случая известного, так и неизвестного значений математического ожидания μ случайной величины X, расчетные формулы различаются здесь лишь числом степеней свободы и видом оценки дисперсии σ^2.
В п.п. 2.3.1 и 2.3.2 приведены расчетные формулы по определению границ доверительных интервалов для математического ожидания μ и дисперсии σ^2, справедливые, строго говоря, для нормально распределенной случайной величины X.

2.3.1. Доверительный интервал для математического ожидания

При известной дисперсии σ^2 генеральной совокупности двусторонний доверительный интервал для математического ожидания μ равен

$$\left[\bar{X} - z_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \qquad (2.9)$$

где σ - среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности;
$\bar{X}$ - оценка математического ожидания (2.1);
n - объем выборки;
p - доверительная вероятность;
z_p - такое значение аргумента функции Лапласа (табл. П2), при котором $\Phi(z_p) = \frac{1}{2}p$.

Функция Лапласа определяет площадь под кривой нормального распределения случайной величины z с математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией, равной 1, в промежутке от 0 до z.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

В табл. П2 приведены значения $\Phi(z)$ для значений z от 0 до

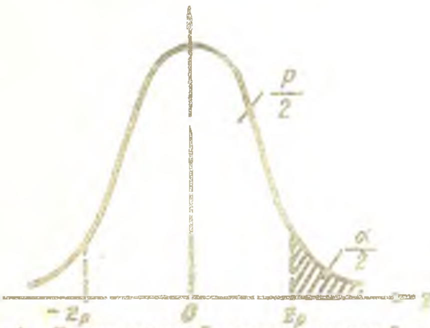
2.94. $\Phi(+\infty)=0,5$.

На рис.4 показан принцип построения двустороннего доверительного интервала. Как следует из рис.4, для уровня значимости $\alpha=1-p$ можно также записать, что

$$\Phi(z_p)=\frac{1-\alpha}{2}=0,5-\frac{\alpha}{2}.$$

Верхний и нижний односторонние доверительные интервалы определяются, соответственно, выражениями:

$$\left[-\infty, \bar{X}+z_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ и } \left[\bar{X}-z_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right]. \qquad (2.10)$$



Р и с.4. Двусторонний доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии, $\Phi(z)$ – функция Лапласа, $\Phi(z_p)=0,5-\frac{\alpha}{2}$, α – уровень значимости

При этом z_p – такое значение аргумента функции $\Phi(z)$ (табл. П 2), при котором $\Phi(z_p)=0,5-\alpha$ (рис. 5, 6).
Так как кривая нормального распределения симметрична, то при определении нижнего и двустороннего доверительного интервалов используют ту же таблицу, что и для определения верхнего интервала.

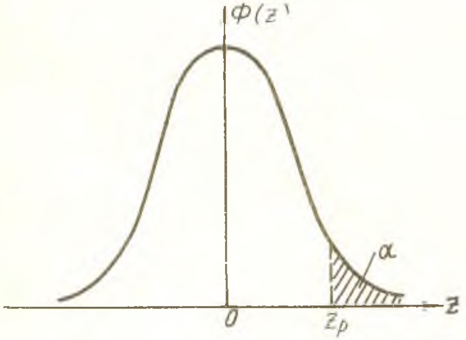
При неизвестной дисперсии σ^2 генеральной совокупности двусторонний доверительный интервал для математического ожидания равен:

$$\left[\bar{X}-t_{k,\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{k,\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]. \qquad (2.11)$$

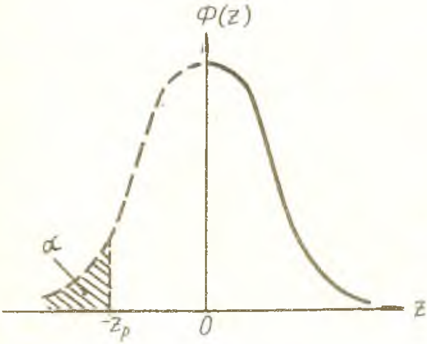
где S – несмещенная и состоятельная оценка среднеквадратического отклонения (2.7);

$t_{k,\frac{\alpha}{2}}$ – аргумент функции плотности распределения Стьюдента, находится по табл. П3 для заданного уровня значимости α и числа степеней свободы k, $k = n-1$.

Кривая плотности распределения Стьюдента симметрична, поэтому



Р и с. 5. Верхний односторонний доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии, $\Phi(z)$ – функция Лапласа, $\Phi(z_p) = 0{,}5 - \alpha$, α – уровень значимости



Р и с. 6. Нижний односторонний доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии, $\Phi(z)$ – функция Лапласа, $\Phi(z_p) = 0{,}5 - \alpha$, α – уровень значимости односторонние доверительные интервалы находятся аналогично предыдущему случаю. Для определения $t_{K,\alpha}$ используется та же табл. П3.

Принцип построения двустороннего и верхнего одностороннего доверительных интервалов поясняется на рис.7, где $t_{K,\frac{\alpha}{2}}$ – критическая точка распределения Стьюдента при двустороннем ограничении, $t_{K,\alpha}$ – при одностороннем.

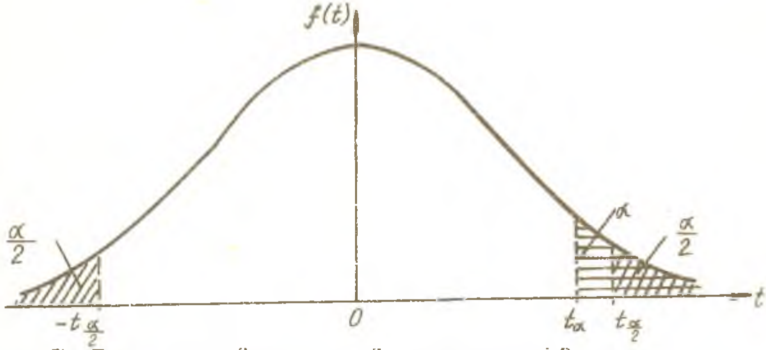


Рис.7. Двусторонний и верхний односторонний доверительный интервалы для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии, $f(t)$ –плотность распределения Стьюдента, α – уровень значимости, K – число степеней свободы, $t_{K,\frac{\alpha}{2}}$ – критическая точка распределения Стьюдента при двустороннем ограничении, $t_{K,\alpha}$ –при одностороннем

Задача 7. При контрольных испытаниях автогенераторов, выполненных в модульном варианте, была взята выборка объемом $n = 10$ и измерена частота выходного сигнала. Результаты измерений: 2046, 2006, 2148, 1952, 2102, 2139, 1931, 2096, 2117, 1850 Гц. Известна дисперсия этого параметра $\sigma^2 = 10000$ Гц^2 (при отсутствии каких-либо нарушений технологического процесса в условиях данного производства). Определить, в каком интервале находится математическое ожидание частоты автогенераторов выпускаемой партии с доверительной вероятностью P =0,95.

Р е ш е н и е

1. Вычислим среднее значение частоты по формуле (2.1)

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 2038 \text{ Гц}.$$

2. Найдем значение функции Лапласа. При P = 0,95 имеем для двустороннего доверительного интервала (рис.4) : $\Phi(z_p) = \frac{1}{2} 0{,}95 = 0{,}475$.

3. По табл. П2 найдем табличное значение аргумента функции Лапласа $z_p = 1{,}96$.

4. Вычислим ширину доверительного интервала по формуле (2.9)

$$z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \frac{\sqrt{10000}}{\sqrt{10}} = 62,$$

т.е. искомый доверительный интервал для математического ожидания равен [2038-62; 2038 +62] Гц.

О т в е т: Генеральное среднее частоты автогенераторов выпускаемой партии с вероятностью 0,95 находится в интервале [1976; 2100] Гц.

З а д а ч а 8. По условию предыдущей задачи определить, сколько нужно отобрать модулей, чтобы с вероятностью Р = 0,99 можно было считать, что выборочное среднее частоты автогенераторов оценивает значение генерального среднего частоты с точностью ± 50 Гц.

Р е ш е н и е

1. По значению функции Лапласа $\Phi(z_p) = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495$ найдем ее аргумент z_p по табл.П2, $z_p = 2{,}58$.

2. Зная ширину доверительного интервала $z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50$, найдем требуемый объем выборки:

$$n = \left(\frac{z_p \sigma}{50}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58\sqrt{10000}}{50}\right)^2 = 26{,}6.$$

Ответ: для того, чтобы с вероятностью Р = 0,99 считать, что математическое ожидание находится в интервале $\bar{X} \pm 50$ Гц, необходимо исследовать не менее 27 модулей.

З а д а ч а 9. С какой вероятностью можно утверждать, что математическое ожидание частоты выходного сигнала модулей находится в интервале $\bar{X} \pm 70$ Гц, располагая данными выборки задачи 7 и известным значением дисперсии $\sigma^2 = 10000$ Гц^2?

Р е ш е н и е

1. Зная ширину доверительного интервала, найдем значение аргумента функции Лапласа

$$z_p = \frac{70\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{70\sqrt{10}}{\sqrt{10000}} = 2,21 .$$

2. По табл. П2 находим значение функции Лапласа для $z_p = 2,21$, $\Phi(z_p) = 0,4864$. Тогда доверительная вероятность $P = 2 \cdot 0,4864 = 0,973$.

О т в е т : с вероятностью 0,973 можно считать, что математическое ожидание частоты выходного сигнала в данной партии модулей находится в пределах ± 70 Гц от среднего значения частоты 2038 Гц в исследуемой выборке.

З а д а ч а 10. По результатам испытаний 25 образцов пресс-материала АГ-4 на электрическую прочность вычислено среднее значение электрической прочности $\bar{X} = 12,31$ кВ/мм. Определить с доверительной вероятностью $P = 0,99$ нижнюю границу одностороннего доверительного интервала для математического ожидания электрической прочности при известном среднем квадратическом отклонении электрической прочности пресс-материала $\sigma = 1,5$ кВ/мм.

Р е ш е н и е

1. Найдем значение функции Лапласа. Для нижнего одностороннего доверительного интервала (см. рис.5) при $P = 0,99$ имеем $\alpha = 0,01$ и $\Phi(z_p) = 0,5 - 0,01 = 0,49$.

2. По табл. П2 найдем значение аргумента функции Лапласа

$$z_p = 2,31.$$

3. Вычислим нижнюю границу одностороннего доверительного интервала по формуле (2.10)

$$\bar{X} - z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12,31 - 2,31 \frac{1,5}{\sqrt{25}} = 12,31 - 0,69 = 11,62 \text{ кВ/мм} .$$

О т в е т : с вероятностью 0,99 можно считать, что математическое ожидание электрической прочности пресс-материала АГ-4 больше, чем 11,62 кВ/мм.

З а д а ч а 11. Одной из операций текущего контроля при изготовлении блока является измерение переходного сопротивления между корпусом блока и клеммой заземления. Имеются данные измерений переходного сопротивления для 10 блоков: 910, 1010, 1050, 1070, 1050, 1000, 1100, 1120, 1140, 1180 мкОм. Построить верхний односторонний доверительный интервал для математического ожидания переходного сопротивления при P = 0,95.

Р е ш е н и е

Доверительный интервал вычисляем по формуле
$\bar{X} + t_{k,\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$,
так как генеральная дисперсия σ^2 неизвестна (см. рис.7 и (2.11)).
2. Определим среднее выборочное значение по (2.1)
$\bar{X} = 1063$ мкОм.
3. Найдем состоятельную и несмещенную оценку среднего квадратического отклонения по формуле (2.7)
$S = 78$ мкОм.
4. По табл. П3 найдем табличное значение $t_{k,\alpha}$ при K = 10-1=9 и α = 0,05, $t_{k,\alpha}$ = 1,83.
5. Определим верхнюю границу доверительного интервала

$$\bar{X} + t_{k,\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} = 1063 + 1{,}83\frac{78}{\sqrt{10}} = 1063 + 45 = 1108 \text{ мкОм}.$$

О т в е т : с вероятностью 0,95 можно утверждать, что математическое ожидание переходного сопротивления не больше, чем 1108 мкОм.

З а д а ч а 12. По условию задачи 1 определить, с какой вероятностью можно утверждать, что доверительный интервал для математического ожидания индуктивности первичной обмотки импульсного трансформатора находится в интервале не более чем $\bar{X} \pm 20$ мкГн.

Р е ш е н и е

I. Вычислим среднее квадратическое отклонение индуктивности S по формуле (2.7), используя при этом $\bar{X}$, вычисленное в задаче 3, $\bar{X}$ =390 мкГн,

$S=\sqrt{\frac{1}{8}\sum x_i}=24,4$ мкГн.

2. Определим табличное t из выражения (2.II)

$20=t\frac{24.4}{\sqrt{9}}$; t = 2,45.

3. По табл. П3 с учетом рис.7 для двустороннего доверительного интервала подбираем такое значение $\frac{\alpha}{2}$, при котором ширина доверительного интервала будет не более ± 20 мкГн. Это значение $\frac{\alpha}{2}$ равно 0,025 (при К = 9 - I = 8, t = 2,3I). Тогда искомая доверительная вероятность равна Р = I - α = 0,95.

О т в е т: доверительная вероятность, с которой интервал 390 ± 20 мкГн содержит математическое ожидание индуктивности, равна 0,95.

2.3.2. Д о в е р и т е л ь н ы й и н т е р в а л д л я д и с п е р с и и

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 при известном математическом ожидании μ случайной величины X определится выражением

$$\left[\frac{nS_*^2}{\chi_2^2}, \frac{nS_*^2}{\chi_1^2}\right], \tag{2.12}$$

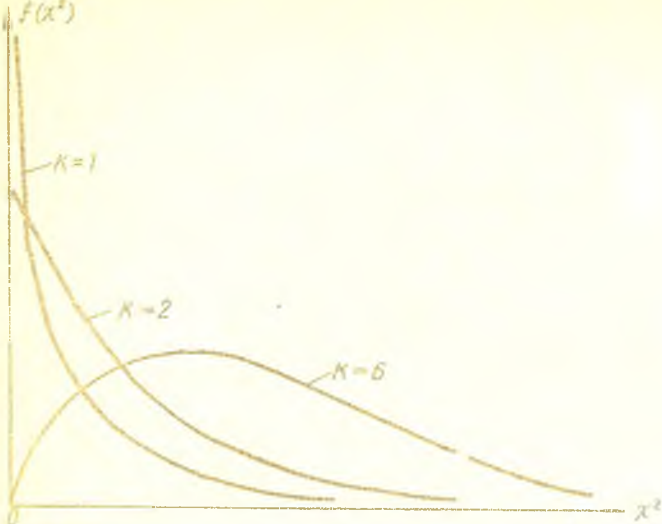
где n - объем выборки;

S_*^2 - состоятельная, несмещенная и эффективная оценка дисперсии σ^2 (2.6);

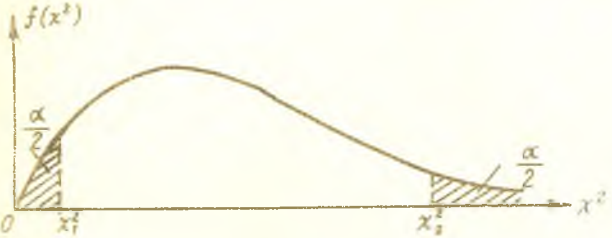
χ_1^2, χ_2^2 - аргументы функции плотности распределения Пирсона (табл. П4); площадь под кривой плотности, заключенная между точками χ_1^2, и χ_2^2, равна выбранному значению доверительной вероятности Р.

Кривая плотности распределения Пирсона несимметрична, на рис.8 показан вид этой кривой для числа степеней свободы К =I,2 и 6. При построении двустороннего доверительного интервала точки χ_1^2 и χ_2^2 выбираются так, чтобы $P\{\chi^2<\chi_1^2\}= P\{\chi^2>\chi_2^2\}=\frac{\alpha}{2}$,

7-1611



Р и с.8. Кривая плотности распределения χ^2 Пирсона, k – число степеней свободы



Р и с.9. Двусторонний доверительный интервал для дисперсии, α – уровень значимости

т.е. так, чтобы заштрихованные площадки на рис.9 были одинаковы и равны $\frac{\alpha}{2}$.
Значения χ_1^2 и χ_2^2 находятся по таблицам для выбранной доверительной вероятности P и числа степеней свободы $K=n$.
Односторонний доверительный интервал определяется выражениями:

$$\frac{nS_*^2}{\chi_2^2} \quad \text{(нижний) и} \quad \frac{nS_*^2}{\chi_1^2} \quad \text{(верхний)}, \qquad (2.13)$$

где $P\{\chi^2 > \chi_2^2\} = \alpha$ и $P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = 1-\alpha$.

Принцип построения односторонних доверительных интервалов показан на рис.10 и 11.

Р и с. 10. Нижний односторонний доверительный интервал для дисперсии, α – уровень значимости

Р и с. 11. Верхний односторонний доверительный интервал для дисперсии, α – уровень значимости

Доверительный интервал для дисперсии σ^2 при неизвестном математическом ожидании μ случайной величины X определяется выражением

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}\right], \tag{2.14}$$

где n -объем выборки;

s^2 - состоятельная и несмещенная оценка дисперсии (2.3),

χ_1^2, χ_2^2 - критические точки распределения Пирсона, находятся по табл. П4 для числа степеней свободы $k = n-1$.

Принцип построения двусторонних и односторонних доверительных интервалов аналогичен предыдущему случаю.

В большинстве практических случаях определяют верхний односторонний доверительный интервал для дисперсии, тем самым фиксируя верхнюю границу степени разброса исследуемого параметра с уровнем значимости α.

З а д а ч а 13. Отдел контроля выбрал 8 втулок из партии, изготовленной на токарном автомате. Получены следующие результаты измерения внутреннего диаметра втулок: 20,02, 20,04, 20,02, 20,03, 20,04, 20,04, 20,02, 20,01 мм. Определить верхний односторонний доверительный интервал для дисперсии этого размера с уровнем значимости α = 0,05, полагая, что математическое ожидание величины внутреннего диаметра втулки известно, μ =20,03мм.

Р е ш е н и е

1. Для определения доверительного интервала для дисперсии в случае известного математического ожидания (2.13) вычислим $n s_*^2$ по формуле (2.6)

$$n s_*^2 = 8 \sum (x_i - 20{,}03)^2 = 9 \cdot 10^{-4}\ мм^2.$$

2. По табл. П4 найдем значение χ_1^2 при числе степеней свободы К = 8 из условия $P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = 1-\alpha = 0{,}95$ (рис.11) для верхнего одностороннего доверительного интервала. χ_1^2 =2,73.

3. Определим верхнюю границу доверительного интервала по (2.13)

$$\frac{9 \cdot 10^{-4}}{2{,}73} = 0{,}00032\ мм^2.$$

О т в е т : доверительный интервал для дисперсии внутреннего диаметра втулки равен [0, 0,00032] мм^2.

З а д а ч а 14. Имеются результаты измерения сопротивления квадрата пленки сплава МЛТ для 6 образцов: 437, 387, 371, 422, 351, 434 Ом. Найти верхний односторонний доверительный интервал для дисперсии сопротивления квадрата пленки с доверительной вероятностью 0,99.

Р е ш е н и е

1. Вычислим выборочное среднее сопротивление квадрата пленки по формуле (2.1):

$$\bar{X} = \frac{1}{6}(437 + 387 + 371 + 422 + 351 + 434) = 400{,}3 \text{ Ом}.$$

2. Вычислим исправленную выборочную дисперсию по формуле (2.3):

$$S^2 = \frac{1}{6-1}\sum(x_i - 400{,}3)^2 = 1283{,}8 \text{ Ом}^2, \quad S = 35{,}8 \text{ Ом}.$$

3. По табл. П4 найдем значение χ_1^2 при числе степеней свободы $K = 6 - 1 = 5$, $P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = 0{,}99$ для верхнего одностороннего доверительного интервала. $\chi_1^2 = 0{,}554$.

4. Определим верхнюю границу доверительного интервала по формуле (2.14):

$$\frac{5 \cdot 1283{,}8}{0{,}554} = 11586 \text{ Ом}^2.$$

Верхняя граница одностороннего доверительного интервала для среднего квадратического отклонения равна $\sqrt{11586} = 107$ Ом.

О т в е т : доверительный интервал для среднего квадратического отклонения сопротивления квадрата пленки равен $[0;\ 107]$ Ом.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

3.1. Постановка задачи проверки статистических гипотез

При сравнительном анализе конструкций или технологических процессов производства РЭА по точности, стабильности, экономичности на основе выборочных данных возникает задача проверки статистических гипотез. Под статистическими понимаются такие гипотезы, в которых проверяются предположения, выдвинутые относительно каких-либо параметров закона распределения случайной величины, или относительно вида закона распределения исследуемой случайной величины. Наибольшее применение в решении технических задач находят методы проверки статистических гипотез первого вида. При этом предполагается, что вид закона распределения сравниваемых величин, одинаков, и особенности закона распределения каждой из них заключаются в различиях значений параметров (например, математического ожидания, дисперсия). Эти различия отражают изменения в показателях качества конструкций и технологических процессов. Методами статистической проверки гипотез можно проверить предположения о существенности или несущественности изменений в показателях качества конструкций или технологических процессов. Эти методы являются основой выборочного текущего и приемочного контроля качества продукции.

Рассмотрим, например, применение этих методов в текущем контроле стабильности технологического процесса производства резисторов. Пусть случайная величина X - значение сопротивления конкретного резистора, $\bar{X}$ - выборочное среднее, определенное по результатам выборки объема n, μ_0 - требуемое номинальное значение сопротивления резистора, μ -неизвестное нам генеральное среднее в данной контролируемой партии резисторов.

Задача заключается в том, чтобы установить, соответствуют ли изготавливаемые резисторы требуемому номинальному значению сопротивления, т.е. необходимо определить, можно ли считать, что $\mu=\mu_0$ проверяя при этом не всю партию (генеральную совокупность), а выборку объема n. Вследствие разных причин, например, нарушений технологического процесса, низкого качества сырья генеральное среднее μ контролируемой партии может быть и не равно μ_0. Если вычисленное по выборке $\bar{X}$ незначительно отличается от μ_0, то, очевидно, предположение о совпадении μ и μ_0 можно считать оправданным. Необходимо установить, насколько велика может быть разность $(\bar{X}-\mu_0)$, чтобы гипотеза о совпадении μ и μ_0 была отвергнута как ложная. Предположим, что $M[\bar{X}]=\mu=\mu_0$, назовем эту гипотезу нулевой и обозначим ее H_0, тогда наше предположение можно записать так: $H_0 : \mu=\mu_0$. Если гипотеза H_0 верна, то $M[\bar{X}]=\mu_0$, и плотность распределения выборочного среднего $f(\bar{X})$

имеет вид, показанный на рис.12. Если гипотеза H_0 не верна, и в действительности $\mu > \mu_0$, т.е. верна так называемая конкурирующая гипотеза H_1 : $\mu > \mu_0$, то плотность распределения выборочного среднего $\bar{X}$ будет расположена правее $f(\bar{X})$, представленной на рис.12.

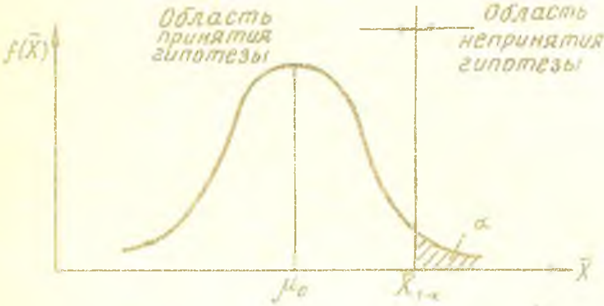


Рис.12. Области принятия и непринятия нулевой гипотезы, $f(\bar{X})$ – плотность распределения выборочного среднего $\bar{X}$, когда нулевая гипотеза верна, α – вероятность ошибки первого рода

Рассуждая далее в предположении, что гипотеза H_0 верна, мы можем найти вероятность того, что вычисленное по выборке $\bar{X}$ окажется больше, чем некоторое значение $\bar{X}_{1-\alpha}$. Эта вероятность равна

$$P\{\bar{X} > \bar{X}_{1-\alpha}\} = \int_{\bar{X}_{1-\alpha}}^{\infty} f(\bar{X})d\bar{X} = \alpha,$$

и геометрически она определяется площадью, ограниченной кривой плотности распределения от $\bar{X}_{1-\alpha}$ до $+\infty$. Здесь α – уровень значимости. Его выбирают малым числом (обычно 0,05; 0,01) с тем, чтобы можно было считать практически невозможным, что вычисленное по выборке $\bar{X}$ окажется больше $\bar{X}_{1-\alpha}$, когда верна гипотеза H_0. Таким образом, точка $\bar{X}_{1-\alpha}$ определяет область принятия и область непринятия гипотезы H_0 (рис.12). Если $\bar{X}$ окажется меньше $\bar{X}_{1-\alpha}$, то можно считать, что гипотеза H_0 : $\mu = \mu_0$ не противоречит выборочным данным. В противном случае гипотеза H_0 отвергается, т.е. значение сопротивления резисторов контролируемой партии не соответствует требуемому номинальному значению. Вероятность принять ошибочное решение, т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна, равна α. Эту ошибку называют ошибкой первого рода. Возможно ошибочное решение и другого вида- принятие гипотезы H_0 , когда она не верна. Вероятность этой ошибки, называемой ошибкой второго рода, увеличивается с уменьшением α . Для оценки вероятности этой ошибки необходимо выдвинуть конкурирующую гипотезу H_I : $\mu = \mu_1 > \mu_0$. Это возможно, когда по условиям опыта есть основания предложить альтернативное решение такого вида. На рис.13 показаны кривые плотности распределения выборочного среднего $\bar{X}$ для случаев, когда верна гипотеза H_0 (сплошная линия) и гипотеза H_I (пунктирная линия). Для выбранного уровня значимости α области принятия и непринятия гипотезы H_0 определены, как это показано на рис.13. Вероятность ошибки второго рода β , как следует из рис.13, равна площади

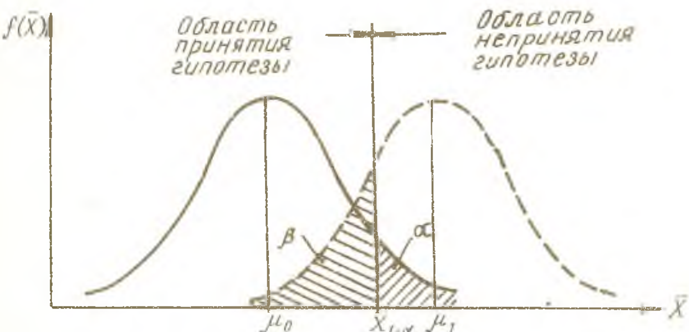


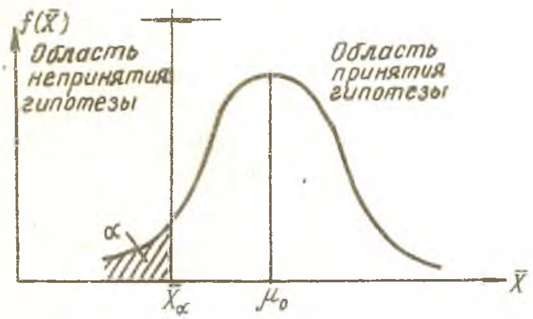
Рис.13. Вероятности ошибки первого α и второго β рода, ——— - плотность распределения выборочного среднего $f(\bar{X})$, когда верна нулевая гипотеза, - - - - плотность распределения $f(\bar{X})$, когда верна конкурирующая гипотеза

под кривой $f(\bar{X})$, когда верна H_I, от $-\infty$ до $\bar{X}_{1-\alpha}$. Рассмотренные случаи можно свести в таблицу следующего вида:

Гипотеза H_0	Верна	Неверна
Отвергается	Ошибка первого рода с вероятностью α	Правильное решение с вероятностью $1-\beta$
Не отвергается	Правильное решение с вероятностью $1-\alpha$	Ошибка второго рода с вероятностью β

С увеличением разности $\mu_1 - \mu_0$ вероятность ошибки второго рода β уменьшается. Как следует из рис.13, при фиксированных значениях μ_0 и μ_1 стремление уменьшить вероятность ошибки одного вида приводит к увеличению вероятности ошибки другого вида. Для одновременного уменьшения α и β необходимо увеличивать объем выборки, что может оказаться либо невозможным, либо экономически нецелесообразным на практике.

Если конкурирующей гипотезой является гипотеза H_I: $\mu < \mu_0$, то области принятия и непринятия гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$ будут расположены так, как это показано на рис.14.

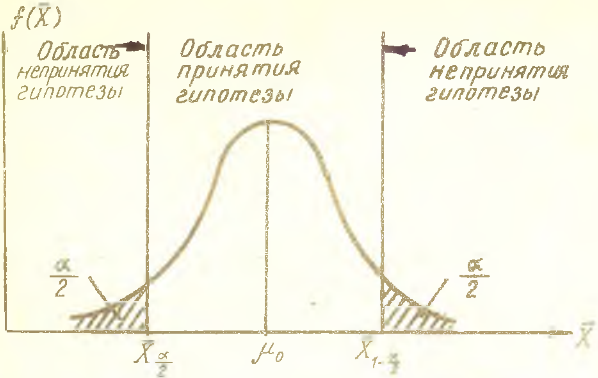


Р и с.14. Области принятия и непринятия нулевой гипотезы при конкурирующей гипотезе H_I: $\mu < \mu_0$

При конкурирующей гипотезе H_I : $\mu \neq \mu_0$ области принятия и непринятия гипотезы H_0 : $\mu = \mu_0$ представлены на рис.15.

Определение вида конкурирующей гипотезы зависит от конкретных условий решаемой задачи. Однако следует иметь в виду, что при прочих равных условиях односторонний критерий (рис.12, 14) предпочтительнее двустороннего (рис.15), так как обладает меньшей вероятностью ошибки второго рода.

Итак, для проверки статистической гипотезы относительно какого-либо параметра закона распределения необходимо знать закон распределения этого параметра. Так как наиболее полно изучены выборочные распределения для нормально распределенных случайных



Р и с.15. Области принятия и непринятия нулевой гипотезы при конкурирующей H_1 : $\mu \neq \mu_0$

величия, в последующих разделах рассмотрены методы проверки статистических гипотез для случайных величин с нормальным законом распределения.

3.2. Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий

Метод проверки гипотезы о равенстве дисперсий широко используется в практике при решении таких задач как сравнение точности или степени разброса какого-либо показателя технологических процессов и конструкций.

В общем случае задача формулируется следующим образом: имеем две случайных величины X_1 и X_2, каждая из которых подчиняется нормальному закону распределения, с неизвестными нам генеральными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. По независимым выборкам объема n_1 и n_2, извлеченным из генеральных совокупностей X_1 и X_2, вычислены исправленные выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2. Требуется проверить гипотезу H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, сравнивая оценки дисперсий S_1^2 и S_2^2. Задача решается с использованием F - распределения (распределения Фишера). Ход решения определяется видом конкурирующей гипотезы.

К о н к у р и р у ю щ а я   г и п о т е з а $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.
Для проверки гипотезы $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ о равенстве генеральных дисперсий надо вычислить наблюдаемое значение F – критерия $F_{набл}$ как отношение большей исправленной выборочной дисперсии к меньшей,

$$F_{набл} = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad где \; S_1^2 > S_2^2. \tag{3.1}$$

По таблице F – распределения (табл.П5) найти $F_{табл}$ по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы $K_1 = n_1 - 1$, $K_2 = n_2 - 1$ (K_1 – число степеней свободы большей исправленной выборочной дисперсии).
Если $F_{набл} < F_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.
Если $F_{набл} > F_{табл}$, то нулевую гипотезу отвергают.
К о н к у р и р у ю щ а я   г и п о т е з а $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
В этом случае $F_{табл}$ находят по уровню значимости $\frac{\alpha}{2}$ (вдвое меньшему заданного) и числам степеней свободы K_1 и K_2.
Если $F_{набл} < F_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.
Если $F_{набл} > F_{табл}$, то нулевую гипотезу отвергают.

З а д а ч а 15. Для сравнения точности двух методов контроля были проведены контрольные замеры одной и той же величины. Объемы выборок: $n_1 = 10$, $n_2 = 12$. Вычислены исправленные выборочные дисперсии: $S_1^2 = 28$, $S_2^2 = 15$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, т.е. проверить, можно ли считать, что точности сравниваемых методов контроля одинаковы.

Р е ш е н и е

1. Сформулируем конкурирующую гипотезу. Так как выборочные дисперсии значительно отличаются друг от друга, в качестве конкурирующей гипотезы берем $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, нулевая гипотеза H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
2. Вычислим наблюдаемое значение F – критерия $F_{набл}$ по формуле (3.1)

$$F_{набл} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{28}{15} = 1{,}87.$$

3. Найдем табличное значение F - критерия по табл.П5 для уровня значимости α = 0,0I и числа степеней свободы большей дисперсии $k_1 = n_1 - I = 9$ и меньшей дисперсии $k_2 = n_2 - I = II$:
$F_{табл} = 4,63$.
4. Сравним вычисленное и табличное значения F - критерия.
$F_{набл} < F_{табл}$, следовательно, нет основания отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве дисперсий, т.е. отдать предпочтение какому-либо из двух методов контроля.

Ответ: дисперсии однородны; с уровнем значимости 0,0I можно считать, что сравниваемые методы контроля имеют одинаковую точность.

3.3. Проверка гипотезы о равенстве нескольких дисперсий по выборкам одинакового объема

Метод проверки гипотезы о равенстве нескольких дисперсий используется на практике при сравнении точности нескольких приборов, показателей конструкций или технологических процессов, в задачах планирования эксперимента.
Пусть из генеральных совокупностей $X_I, X_2, \ldots, X_n$ извлечены l независимых выборок одинакового объема n и по ним вычислены исправленные выборочные дисперсии $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_n^2$.
Требуется при уровне значимости α проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий, т.е. гипотезу о равенстве между собой генеральных дисперсий:
$H_0 : S_1^2 = S_2^2 = \cdots = S_n^2$.
Задача решается с использованием G - распределения (распределения Кохрена). Конкурирующая гипотеза заключается в том, что генеральные дисперсии не равны между собой.
Для проверки гипотезы H_0 необходимо вычислить наблюдаемое значение G - критерия:

$$G_{набл} = \frac{S_{max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2}, \qquad (3.2)$$

где S_{max}^2 - максимальная из всех выборочных дисперсий.
По таблице G - распределения (табл. П6) найти $G_{табл}$ по заданному уровню значимости α, числу степеней свободы

$k = n - 1$ и количеству выборок ℓ .
Если $G_{набл} < G_{табл}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.
Если $G_{набл} > G_{табл}$ - нулевую гипотезу отвергают.

З а д а ч а 16. Из продукции трех смен цеха по изготовлению постоянных проволочных резисторов взяты выборки объемом 37 резисторов. Вычисленные исправленные выборочные дисперсии сопротивления равны 0,032, 0,028, 0,048 $Ом^2$. Номинальное значение сопротивления изготавливаемых резисторов 51 Ом. Можно ли при уровне значимости α =0,05 утверждать, что дисперсии однородны, то есть точность изготовления резисторов в трех сравниваемых сменах одинакова?

Р е ш е н и е

1. Вычислим наблюдаемое значение G -критерия по формуле (3.2):

$$G_{набл} = \frac{0,048}{0,032 + 0,028 + 0,048} = \frac{0,048}{0,108} = 0,44 .$$

2. По табл. П6 найдем табличное значение для уровня значимости α = 0,05, числа степеней свободы k = 37 - 1 = 36 и количества выборок ℓ = 3, $G_{табл}$ = 0,4748. $G_{набл} < G_{табл}$, следовательно дисперсии однородны.

О т в е т: при уровне значимости 0,05 можно считать, что точность изготовления резисторов в сравниваемых сменах одинакова.

З а д а ч а 17. Проведен эксперимент по матрице планирования полного факторного эксперимента типа 2^3 с тремя параллельными опытами. По результатам эксперимента вычислены состоятельные и несмещенные оценки дисперсий для каждой строки матрицы планирования: 0,45, 0,62, 0,54, 1,2, 0,7, 1,2, 0,95, 0,65.
Можно ли с уровнем значимости α = 0,05 считать, что дисперсии в этих восьми точках факторного пространства однородны?

Р е ш е н и е

1. Вычислим наблюдаемое значение G - критерия по формуле (3.2):

$$G_{набл.} = \frac{1,2}{0,45 + 0,62 + 0,54 + 1,2 + 0,7 + 1,2 + 0,95 + 0,65} =$$

$$= \frac{1,2}{6,31} = 0,19.$$

2. По табл.П6 найдем табличное значение для $\alpha = 0,05$, числа степеней свободы $k = 3 - 1 = 2$ и количества выборок $\ell = 8$, $G_{табл} = 0,5157$. Так как $G_{набл} < G_{табл}$, можно считать, что дисперсии однородны.

Ответ: нет оснований отвергнуть гипотезу об однородности сравниваемых дисперсий.

3.4. Проверка гипотезы о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны

Проверка гипотезы о равенстве двух центров распределения имеет важное практическое значение. Этот метод используется при сравнении средних в выборочном контроле качества изделий, изготовленных на разных установках, из различных партий сырья или при разных технологических режимах, при контроле стабильности технологического процесса, при проверке наличия систематического сдвига между показаниями приборов.

Пусть из генеральных совокупностей X_1 и X_2 извлечены независимые выборки объемами n_1 и n_2, по которым вычислены соответствующие выборочные средние $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$. Генеральные дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0: M[X_1] = M[X_2]$ о равенстве математических ожиданий (генеральных средних) совокупностей X_1 и X_2. Ход решения задачи зависит от вида конкурирующей гипотезы H_1.

Конкурирующая гипотеза – $H_1: M[X_1] \neq M[X_2]$.
Для проверки нулевой гипотезы $H_0: M[X_1] = M[X_2]$ при заданном уровне значимости α необходимо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (3.3)$$

и сравнить с табличным значением $z_{табл}$, найденным по табл.П2 функции Лапласа из равенства

$$\Phi(z_{табл}) = \frac{1-\alpha}{2}. \qquad (3.4)$$

Если $|z_{набл}| < z_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.
Если $|z_{набл}| > z_{табл}$, нулевую гипотезу отвергают.

К о н к у р и р у ю щ а я г и п о т е з а $H_1: M[X_1] > M[X_2]$.

В этом случае табличное значение $z_{табл}$ находят по таблице функции Лапласа из равенства

$$\Phi(z_{табл}) = \frac{1-2\alpha}{2}. \qquad (3.5)$$

Если $|z_{набл}| < z_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0.
Если $|z_{набл}| > z_{табл}$, нулевую гипотезу отвергают.

К о н к у р и р у ю щ а я г и п о т е з а $H_1: M[X_1] < M[X_2]$.

Табличное значение $z_{табл}$ находят так же, как и в предыдущем случае при $H_1: M[X_1] > M[X_2]$.
Если $|z_{набл}| < z_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0
Если $|z_{набл}| > z_{табл}$, нулевую гипотезу отвергают.

З а д а ч а 18. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о том, что между показаниями двух приборов нет систематического сдвига. Выборочные средние, вычисленные по результатам 10 измерений одной и той же величины, равны $\bar{X}_1 = 20{,}04$ и $\bar{X}_2 = 19{,}95$. Дисперсию измерений для обоих приборов принять равной 0,005.

Р е ш е н и е:

Сформулируем конкурирующую гипотезу $H_1: M[X_1] \neq M[X_2]$.
Нулевая гипотеза $H_0: M[X_1] = M[X_2]$.
2. Вычислим наблюдаемое значение критерия $z_{набл}$ по формуле (3.3):

$$z_{набл} = \frac{20{,}04-19{,}95}{\sqrt{2\,\frac{0{,}005}{10}}} = \frac{0{,}09}{\sqrt{0{,}001}} = 2{,}8.$$

3. Найдем значение функции Лапласа для заданного уровня значимости α = 0,05 по формуле (3.4):
$\Phi(z) = \frac{1-0{,}01}{2} = 0{,}495$.

4. По табл. П2 найдем значение аргумента функции Лапласа, $z_{табл}$= = 2,58. Сравнивая $z_{набл}$ и $z_{табл}$, видим, что $z_{набл} > z_{табл}$, следовательно, нулевая гипотеза отвергается с уровнем значимости 0,0I (см. рис.I5).

О т в е т : с уровнем значимости 0,0I можно считать, что между показаниями приборов есть систематический сдвиг. α =0,0I - есть вероятность принятия неправильного решения (отвергнуть H_0, когда она верна), это ошибка первого рода.

З а д а ч а I9. С какой вероятностью можно отвергнуть гипотезу о равенстве математических ожиданий значений емкости конденсаторов двух партий, если известны средние значения емкости в выборках $\bar{X}_1$ = 332 пФ, $\bar{X}_2$ = 327 пФ. Среднее квадратическое отклонение емкости одинаково и равно 5,47 пФ, объемы выборок $n_1 = n_2$=I5.

Р е ш е н и е

I. Сформулируем конкурирующую гипотезу в виде H_1 : $M[X_1] > M[X_2]$. Нулевая гипотеза H_0: $M[X_1] = M[X_2]$.
2. Определим наблюдаемое значение критерия $z_{набл}$ по формуле (3.3):
$$z_{табл} = \frac{332-327}{\sqrt{2\,\frac{5{,}47}{15}}} = 2{,}5.$$
3. По табл. П2 найдем такое значение аргумента функции Лапласа $z_{табл}$, при котором $z_{набл} = z_{табл} = 2{,}5$. При этом $\Phi(z)$ = 0,4938. Любое $z_{табл}$>2,5 , а значит и $\Phi(z)$ > 0,4938 приведет к принятию гипотезы H_0 (см. рис.I2).
4. По формуле (3.5) определим граничное значение уровня значимости $\alpha_{гр}$
$$\alpha_{гр} = \frac{1-2\Phi(z)}{2} = 0{,}0124,$$
тогда для всех α > 0,0I24 мы примем решение отвергнуть гипотезу H_0. Если H_0: $M[X_1] = M[X_2]$ в действительности верна, то мы совершим ошибку первого рода, отвергая эту гипотезу.

Ответ: решение о непринятии гипотезы о равенстве математических ожиданий значений емкости конденсаторов двух партий принимается при уровне значимости большем, чем 0,0124.

3.5. Проверка гипотезы о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы

Пусть из генеральных совокупностей X_1 и X_2 извлечены независимые выборки, объемами n_1 и n_2, по которым вычислены соответствующие выборочные средние $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ и исправленные выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2. Генеральные дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но предполагаются одинаковыми. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0: M[X_1]=M[X_2]$ о равенстве математических ожиданий (генеральных средних) совокупностей X_1 и X_2. Ход решения задачи определяется видом конкурирующей гипотезы H_1.

Конкурирующая гипотеза $H_1: M[X_1]\neq M[X_2]$.
Для проверки нулевой гипотезы при заданном уровне значимости α надо вычислить наблюдаемое значение t - критерия $t_{набл}$ по формуле

$$t_{набл}=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \qquad (3.6)$$

и сравнить с табличным значением $t_{табл}$, найденным по таблице распределения Стьюдента (табл. П3) по уровню значимости $\frac{\alpha}{2}$ (вдвое меньшему заданного) и числу степеней свободы $k=n_1+n_2-2$.

Если $|t_{набл}|<t_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0. Если $|t_{набл}|>t_{табл}$, нулевую гипотезу отвергают.

Конкурирующая гипотеза $H_1: M[X_1]>M[X_2]$.
В этом случае табличное значение $t_{табл}$ находят по уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n_1+n_2-2$ (табл.П3). Если $|t_{набл}|<t_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0. Если $|t_{набл}|>t_{табл}$, нулевую гипотезу отвергают.

Конкурирующая гипотеза $H_1: M[X_1]<M[X_2]$.
Табличное значение находят так же, как и в предыдущем случае при $H_1: M[X_1]>M[X_2]$.

Если $|t_{набл}| < t_{табл}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0. Если $|t_{набл}| > t_{табл}$, нулевую гипотезу отвергают.

З а д а ч а 20. Проверить гипотезу о том, что после внесения конструктивных изменений в блок модуляторов СВЧ значимо изменился его коэффициент передачи. Известны средние выборочные значения коэффициента передачи до внесения изменений $- \bar{X}_1 = 2{,}65$ и после $- \bar{X}_2 = 2{,}1$, несмещенные и состоятельные оценки дисперсий $S_1^2 = 0{,}8$, $S_2^2 = 0{,}4$, объемы выборок $n_1 = 12$, $n_2 = 15$ соответственно. Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Р е ш е н и е

1. В качестве конкурирующей гипотезы примем $H_1: M[X_1] > M[X_2]$, поскольку выборочные средние различаются значительно. Нулевая гипотеза $H_0: M[X_1] = M[X_2]$.
2. Прежде чем проверять гипотезу $H_0: M[X_1] = M[X_2]$, необходимо убедиться в равенстве генеральных дисперсий по критерию Фишера (3.1). Здесь нулевая гипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, конкурирующая – $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Находим $F_{набл} = \frac{0{,}8}{0{,}4} = 2$.
Табличное значение $F_{табл}$ определяем по табл.П5 при $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = 12-1 = 11$, $k_2 = 15 - 1 = 14$, $F_{табл} = 2{,}56$.
Так как $F_{набл} < F_{табл}$, принимаем нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.
3. Проверим нулевую гипотезу $H_0: M[X_1] = M[X_2]$. Для этого вычислим наблюдаемое значение t – критерия по формуле (3.6):

$$t_{набл} = \frac{2{,}65-2{,}1}{\sqrt{(12-1)0{,}8+(15-1)0{,}4}} \sqrt{\frac{12\cdot 15(12+15-2)}{12+15}} = 1{,}87$$

4. Найдем табличное значение t – критерия по табл.П3 при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и $k = 12 + 15 - 2 = 25$ для одностороннего критерия (см. рис.12), $t_{табл} = 1{,}71$.
5. Сравним вычисленное и табличное значения: $t_{набл} > t_{табл}$, следовательно, нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий коэффициентов передачи отвергаем.

О т в е т : внесение конструктивных изменений значимо уменьшило коэффициент передачи модулятора.

З а д а ч а 21. По условию предыдущей задачи проверить нулевую гипотезу H_0 : $M[X_1]=M[X_2]$ при конкурирующей гипотезе H_1 : $M[X_1]\neq M[X_2]$.

Р е ш е н и е

1. По табл. П3 найдем $t_{табл}$ для двустороннего критерия (см.рис. 15), $t_{табл}=2,06$. Сравнивая его с вычисленным значением $t_{набл}$, видим, что $t_{набл}<t_{табл}$ т.е. нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий коэффициентов передачи модуляторов.

Различие в результатах решения задач 20 и 21 свидетельствует о том, что велика вероятность значимого влияния внесенных изменений на величину коэффициента передачи модулятора, а также о том, что односторонний критерий чувствительнее двустороннего. Эффективность проверки нулевой гипотезы H_0: $M[X_1]=M[X_2]$ можно повысить, увеличив объемы выборок n_1 и n_2.

О т в е т : гипотеза о равенстве математических ожиданий коэффициентов передачи при H_1 : $M[X_1]\neq M[X_2]$ отвергается, то есть внесение изменений значимо уменьшило коэффициент передачи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С м и р н о в Н.В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., " Наука", 1969.
2. А ш м а р и н И.П. Быстрые методы статистической обработки и планирование эксперимента. ЛГУ, 1975.
3. А д л е р Ю.П., М а р к о в а Е.В., Г р а н о в с к и и Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М., "Наука", 1976.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица III

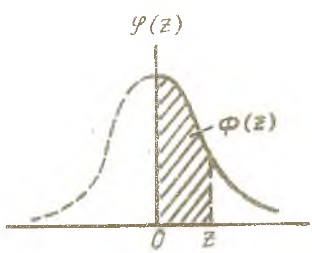
Критерий для исключения выскакивающих вариант

Объем выборки n	Уровень значимости					
	0,05			0,01		
	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$
	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$	$\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_2}$	$\frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$
3	0,941	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000
4	0,765	0,955	0,967	0,889	0,991	0,992
5	0,642	0,807	0,845	0,780	0,916	0,929
6	0,560	0,689	0,736	0,698	0,805	0,836
7	0,507	0,610	0,661	0,637	0,740	0,778
8	0,468	0,554	0,607	0,590	0,683	0,710
9	0,437	0,512	0,565	0,555	0,635	0,667
10	0,412	0,477	0,531	0,527	0,597	0,632
11	0,392	0,450	0,504	0,502	0,566	0,603
12	0,376	0,428	0,481	0,482	0,541	0,579
15	0,338	0,381	0,430	0,438	0,486	0,522
20	0,300	0,334	0,372	0,391	0,430	0,464
24	0,281	0,309	0,347	0,367	0,400	0,434
30	0,260	0,283	0,322	0,341	0,369	0,402

Таблица П 2

Значения функции Лапласа $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,62	0,4956
1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,30	0,4893	2,64	0,4959
1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,32	0,4898	2,66	0,4961
1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,34	0,4904	2,68	0,4963
1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,36	0,4909	2,70	0,4965
1,70	0,4554	2,04	0,4793	2,38	0,4913	2,72	0,4967
1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,40	0,4918	2,74	0,4969
1,74	0,4591	2,08	0,4812	2,42	0,4922	2,76	0,4971
1,76	0,4608	2,10	0,4821	2,44	0,4927	2,78	0,4973
1,78	0,4625	2,12	0,4830	2,46	0,4931	2,80	0,4974
1,80	0,4641	2,14	0,4838	2,48	0,4934	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,50	0,4938	2,84	0,4977
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,52	0,4941	2,86	0,4979
1,86	0,4686	2,20	0,4861	2,54	0,4945	2,88	0,4980
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,56	0,4948	2,90	0,4981
1,90	0,4713	2,24	0,4875	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,92	0,4726	2,26	0,4881	2,60	0,4953	2,94	0,4984



Т а б л и ц а П 3

Значения t - критерия распределения Стьюдента

Число степеней свободы K	Уровень значимости α					
	0,05	0,025	0,0I	0,005	0,00I	0,0005
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	3I,6
3	2,35	3,I8	4,54	5,84	I0,22	I2,9
4	2,I3	2,78	3,75	4,60	7,I7	8,6I
5	2,0I	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	I,94	2,45	3,I4	3,7I	5,2I	5,96
7	I,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	I,86	2,3I	2,90	3,36	4,50	5,04
9	I,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
I0	I,8I	2,23	2,76	3,I7	4,I4	4,59
II	I,80	2,20	2,72	3,II	4,03	4,44
I2	I,78	2,I8	2,68	3,05	3,93	4,32
I3	I,77	2,I6	2,65	3,0I	3,85	4,22
I4	I,76	2,I4	2,62	2,98	3,79	4,I4
I5	I,75	2,I3	2,60	2,95	3,73	4,07
I6	I,75	2,I2	2,58	2,92	3,69	4,0I
I7	I,74	2,II	2,57	2,90	3,65	3,96
I8	I,73	2,I0	2,55	2,88	3,6I	3,92
I9	I,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	I,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
25	I,7I	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
30	I,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
	I,64	I,96	2,33	2,58	3,09	3,29

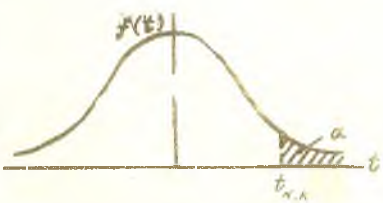


Таблица П4

Значения вероятности $P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha\}$ распределения χ^2

Число степеней свободы k	Вероятность $P\{\chi^2 > \chi^2_\varkappa\}$					
	0,OI	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
3	II,3	9,4	7,8	0,35	0,22	0,I6
4	I3,3	II,I	9,5	0,7I	0,48	0,30
5	I5,I	I2,8	II,I	I,I5	0,83	0,55
6	I6,8	I4,4	I2,6	I,64	I,24	0,87
7	I8,5	I6,0	I4,I	2,I7	I,69	I,24
8	20,I	I7,5	I5,5	2,73	2,I8	I,65
9	2I,7	I9,0	I6,9	3,33	2,70	2,09
I0	23,2	20,5	I8,3	3,94	3,25	2,56
II	24,7	2I,9	I9,7	4,57	3,82	3,05
I2	26,2	23,3	2I,0	5,23	4,40	3,57
I3	27,7	24,7	22,4	5,89	5,0I	4,II
I4	29,I	26,I	23,7	6,57	5,63	4,66
I5	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
I6	32,0	28,8	26,3	7,96	6,9I	5,8I
I7	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,4I
I8	34,8	3I,5	28,9	9,39	8,23	7,0I
I9	36,2	32,9	30,I	I0,I	8,9I	7,63
20	37,6	34,2	3I,4	I0,9	9,59	8,26
2I	38,9	35,5	32,7	II,6	I0,3	8,9
22	40,3	36,8	33,9	I2,3	II,0	9,54
23	4I,6	38,I	35,2	I3,I	II,7	I0,2
24	43,0	39,4	36,4	I3,8	I2,4	I0,9
25	44,3	40,6	37,7	I4,6	I3,I	II,5

Т а б л и ц а П 5

Значения F – критерия распределения Фишера (для каждого значения K_2 – числа степеней свободы меньшей дисперсии верхний ряд чисел соответствует α = 0,05, нижний – α = 0,0I)

K_2 \ K_1	I	2	3	4	5	6	7
I	I6I 4052	200 4999	2I6 5403	225 5625	230 5764	234 5889	237 5928
2	I8,5I 98,49	I9,00 99,0I	I9,I6 99,I7	I9,25 99,25	I9,30 99,30	I9,33 99.33	I9,36 99,34
3	I0,I3 34,I2	9,55 30,8I	9,28 29,46	9,I2 28,7I	9.0I 28,24	8,94 27,9I	8,88 27,67
4	7,7I 2I,20	6,94 I8,00	6,59 I6,69	6,39 I5,98	6,26 I5,52	6,I6 I5,2I	6,09 I4,98
5	6,6I I6,26	5,79 I3,27	5,4I I2,06	5,I9 II,39	5,05 I0,97	4,95 I0,67	4.88 I0,45
6	5,99 I3,74	5,I4 I0,92	4,76 9,78	4,53 9,I5	4,39 8,75	4,28 8,47	4,2I 8,26
7	5,59 I2,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,I2 7,85	3,97 7,46	3,87 7,I9	3,79 7,00
8	5,32 II,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,0I	3,69 6,63	3,58 6,37	3,50 6,I9
9	5,I2 I0,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62
I0	4,96 I0,04	4,I0 7,56	3,7I 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,I4 5,2I
II	4,84 9,85	3,98 7,20	3,59 6,22	3,36 5,67	3,20 5,32	3,09 5,07	3,0I 4,88
I2	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,4I	3,II 5,06	3,00 4,82	2,92 4,65
I6	4,49 8,53	3,63 6,23	3,24 5,29	3,0I 4,77	2,85 4,44	2,74 4,20	2,66 4,03
20	4,35 8.I0	3,49 5,85	3,I0 4,94	2,87 4,43	2,7I 4,I0	2,60 3,87	2,52 3,7I
∞	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,2I 3,02	2,09 2,80	2,0I 2,64

Продолжение табл. П 5

K_1 / K_2	8	9	I0	II	I6	20	∞
I	239 598I	24I 6022	242 6056	243 6082	246 6I69	248 6234	254 6366
2	I9,37 99,36	I9,38 99,38	I9,39 99,40	I9,40 99,4I	I9,43 99,44	I9,44 99,45	I9,50 99,50
3	8,84 I7,49	8,8I 27,34	8,78 27,23	8,76 27,I3	8,69 26,83	8,66 26,69	8,53 26,I2
4	6,04 I4,80	6,00 I4,66	5,96 I4,54	5,93 I4,45	5,84 I4,I5	5,80 I4,02	5,63 I3,46
5	4,82 I0,27	4,78 I0,I5	4,74 I0,05	4,70 9,96	4,60 9,68	4,56 9,55	4,36 9,02
6	4,I5 8,I0	4,I0 7,98	4,06 7,87	4,03 7,79	3,92 7,52	3,87 7,39	3,67 6,88
7	3,73 6,84	3,68 6,7I	3,63 6,62	3,60 6,54	3,49 6,27	3,44 6,I5	3,23 5,65
8	3,44 6,03	3,39 5,9I	3,34 5,82	3,3I 5,74	3,20 5,48	3,I5 5,36	2,93 4,86
9	3,23 5,47	3,I8 5,35	3,I3 5,26	3,I0 5,I8	2,98 4,92	2,93 4,80	2,7I 4,3I
I0	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2.94 4,78	2,82 4,52	3,77 4,4I	2,54 3,9I
II	2,95 4,74	2,90 4,63	2,86 4,54	2,82 4,46	2,70 4,2I	2,65 4,I0	2,40 3,60
I2	2,85 4,50	2,80 4,39	2,76 4,30	2,72 4,22	2,60 3,98	2,54 3,86	2,30 3,36
I6	2,59 3,89	2,54 3,78	2,49 3,69	2,45 3,6I	2,33 3,37	2,28 3,25	2,0I 2,75
20	2,45 3,56	2,40 3,45	2,35 3,37	2,3I 3,30	2.I8 3,05	2,I2 2,94	I,84 2,42
∞	I,94 2,5I	I,88 2,4I	I,83 2,32	I,79 2,24	I,64 I,99	I,57 I,87	I,00 I,09

Т а б л и ц а П 6

Значения G - критерия распределения Кохрена (для каждого значения ℓ верхний ряд чисел соответствует α = 0,05, нижний - α = 0,01)

ℓ \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	0,999 999	0,975 995	0,939 979	0,906 959	0,877 937	0,853 917	0,833 899
3	967 993	871 942	798 883	746 834	707 793	677 761	653 734
4	907 968	768 864	684 781	629 721	590 676	560 641	537 613
5	0,841 928	0,684 789	0,598 698	0,544 633	0,507 588	0,478 553	0,456 526
6	781 883	616 722	532 626	480 564	445 520	418 487	398 461
7	727 838	561 664	480 569	431 508	397 466	373 435	354 411
8	0,680 796	0,516 615	0,438 521	0,391 463	0,360 423	0,336 393	0,319 370
9	639 754	478 573	403 481	358 425	329 387	307 359	290 338
10	602 718	445 536	373 447	331 393	303 357	282 331	266 311
15	0,471 575	0,335 407	0,276 332	0,242 288	0,220 259	0,203 239	0,191 223
20	389 480	271 330	221 265	192 229	174 205	160 188	150 175
30	293 363	198 241	159 191	138 164	124 145	114 133	106 123
∞	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Продолжение табл. П 6

l \ k	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,816 882	0,801 867	0,788 854	0,734 795	0,660 707	0,581 606	0,500 500
3	633 711	617 691	603 674	547 606	475 515	403 423	333 333
4	516 590	502 570	488 554	437 488	372 406	309 325	250 250
5	0,439 504	0,424 485	0,412 470	0,365 409	0,307 335	0,251 264	0,200 200
6	382 440	368 423	357 408	314 353	261 286	212 223	167 167
7	338 391	326 375	315 362	276 311	228 249	183 193	143 143
8	0,304 352	0,293 337	0,283 325	0,246 278	0,202 221	0,162 170	0,125 125
9	277 321	266 307	257 295	223 251	182 199	145 152	111 111
10	254 295	244 281	235 270	203 230	166 181	131 138	100 100
15	0,182 210	0,174 200	0,167 192	0,143 161	0,114 125	0,089 093	0,067 067
20	142 165	136 157	130 150	111 125	088 096	066 071	050 060
30	100 116	096 110	092 105	077 087	060 066	046 048	033 033
	0	0	0	0	0	0	0
∞	0	0	0	0	0	0	0

О Г Л А В Л Е Н И Е

Валентина Владимировна Андреева

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
И КОНСТРУКЦИЙ РЭА

Учебное пособие

Редактор Н.В. К а с а т к и н а
Техн. редактор Н.М. К а л е н ю к
Корректор Т.В. П о л я к о в а