Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

Б. А. Горлач

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Самара 1998

УДК 512.64

Тензорная алгебра: Учеб. пособие/*Б.А.Горлач*; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1998. 76 с.
ISBN 5-7883-0041-X

Содержатся основные сведения из тензорной алгебры. Изложение ведется от частного к общему. Тензоры представляются в операторной, матричной и компонентно-индексной формах в ортонормированном и произвольном базисах. Приведены необходимые для усвоения материала упражнения и расчетные работы.

Пособие рассчитано на студентов, специализирующихся в области механики и физики. Оно будет полезно также специалистам указанных областей знаний. Выполнено на кафедре высшей математики.

Ил. 6. Библиогр.:5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П.Королева

ISBN 5-7883-0041-X

Содержание

Предисловие

Пособие подготовлено по материалу лекций, читаемых для студентов специальности “Механика” СГАУ. Курс рассчитан на 36 часов аудиторных занятий. Из них 20 часов отводится на изучение теоретического материала, изложенного в данном пособии, и 16 часов – на практические занятия, направленные на развитие у студентов навыков решения задач с применением аппарата тензорной алгебры.

На практических занятиях прорабатываются перечисленные ниже темы.

1. Операторная, матричная и компонентно-индексная записи тензорных соотношений. Преобразование компонентов тензора при преобразовании базиса.

2. Линейные операции над тензорами. Произведения тензоров. Свертывание индексов. Обратный тензор.

3. Симметрирование и альтернирование тензоров. Изотропные тензоры. Тензоры поворота.

4. Главные значения и направления тензоров второго ранга. Шаровой тензор и девиатор.

5. Полярное разложение тензора. Вектор тензора. Тензорные поверхности.

6. Представление тензоров в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Переход от одного представления к другому. Якобиан преобразования.

7. Ко- и контравариантные компоненты тензоров. Физические компоненты. Метрический тензор.

8. Площади и объемы, порождаемые базисными векторами. Главные значения и направления тензора, представленного в смешанном базисе.

По курсу предусмотрено выполнение двух расчетных работ.

Тензорная алгебра является базовым фундаментальным курсом. Материал этого курса вместе с его продолжением – курсами тензорного анализа и дифференциальной геометрии — является основой для изучения теоретической механики; механики сплошной среды, включающей в себя механику деформируемого твердого тела (теория упругости, пластичности, ползучести) и аэрогидромеханику; механику плазмы, науки о прочности, обработку материалов путем их формообразования, электромагнетизм и т.д.

Введение

Тензорное исчисление – раздел математики, изучающий свойства тензоров и действия над ними.

Слово *тензор* произошло от латинского *tensio* – напряжение. Родилось это понятие в теории упругости и позволило взглянуть на явления, происходящие в деформируемых средах, с точки зрения их инвариантности (независимости от систем отсчета, в частности, от выбора систем координат).

Развитие тензорного исчисления показало, что свойства тензоров распространяются на любые непрерывные функции, называемые *полевыми* величинами. Отсюда произошло понятие *теория поля*, которое первоначально касалось только векторных величин, а затем было распространено и на более сложные объекты – тензоры.

В настоящее время тензорное исчисление широко используется во многих областях науки там, где исследователь имеет дело с полевыми величинами: сплошная среда (твердое деформируемое и недеформируемое тела, жидкость, газ, плазма), электрическое, магнитное, гравитационное поля и т.д.

Методы тензорной алгебры настолько эффективны, что их стали (и не безуспешно) применять к анализу закономерностей, описываемых дискретными величинами, предварительно накладывая на эти величины некоторые условия.

Следует отметить, что сплошная среда также, как правило, идеализированная, нереальная среда. Реальные тела состоят из атомов, молекул, кристаллов и т.д., которые в совокупности образуют условно сплошную среду. В этой среде лишь с некоторым приближением можно считать непрерывно изменяющимися ее характеристики: массу, плотность, электро- и теплопроводность, пластичность, вязкость и т.д.

Не вдаваясь в подробности описания тензоров, назовем как пример тензора второго ранга оператор, отображающий один вектор в другой.

Цель настоящего пособия – дать читателю представление о тензорах и их свойствах, привить ему навыки оперирования с тензорами, показать на примерах возможные области применения, подготовить базу для изучения механики сплошных сред и других инженерных дисциплин.

Одним из достоинств тензорного исчисления является возможность "конструирования" математических моделей в операторной форме, то есть, без искусственного введения базисов и осей координат. Такая форма позволяет записать обозримые математические модели, в которых четко просматриваются закономерности описываемых ими процессов и явлений.

Наряду с операторной в литературе широко используется координатная форма записи тензорных соотношений. Между этими двумя формами записи существует связь, знание которой дает возможность формализовать переход от одной записи к другой.

Изложение материала пособия соответствует обозначениям и стилю "Приложения" монографии А.И.Лурье [1]. Для понимания материала пособия достаточно знаний, полученных студентами при изучении курсов линейной алгебры и математического анализа в объеме первого семестра.

Последовательность изложения ведется от частного к общему. То есть, сначала рассматриваются тензорные соотношения, опирающиеся на декартовы ортогональные системы координат, а затем делается обобщение и развитие этих соотношений на произвольные координаты. Вопросы тензорного анализа в пособии не рассматриваются.

Глава 1

Тензорная алгебра в декартовых координатах

1.1 Свойства инвариантности скаляра и вектора

Отметим, что вынесенными в заголовок и названными для краткости декартовыми будем называть ортогональные прямолинейные координаты.

Простейшим с точки зрения тензорной алгебры объектом является *скаляр*. Это характеристика среды, которая определяется только *одним числом* – величиной функции в рассматриваемой точке пространства. К скалярным величинам относятся: давление, масса, плотность, температура, напряженности магнитного и электрического полей, работа и т.д. Как бы не изменялись оси координат, перечисленные и другие скалярные величины не изменяются в рассматриваемой фиксированной точке среды.

Вторым по сложности (с точки зрения тензорной алгебры) объектом является *вектор*. Вектор характеризуется *числом* (величиной вектора) и *направлением* в пространстве. Величина и направление вектора фиксированы в рассматриваемой точке пространства и не изменяются при преобразовании координат. Как известно, вектор может быть разложен по направлениям некоторых базисных векторов. В этом случае составляющие вектора и его координаты в общем случае будут изменяться при переходе к другим базисам, но таким образом, что сумма составляющих вектора (сумма произведений его координат на соответствующие базисные векторы) равна рассматриваемому вектору – объекту, инвариантному по отношению к преобразованию координат.

В курсе линейной алгебры установлено, что между базисными векторами различных базисов одного пространства существует взаимно однозначное соответствие. Так, для пространства $\Re_3$ с ортонормированными старым $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}=(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ и новым $\bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}}=(\bar{\mathbf{i}}_1\bar{\mathbf{i}}_2\bar{\mathbf{i}}_3)$ базисами это соответствие определяется правилом преобразования, осуществляемого с помощью матрицы преобразования S согласно соотношениям

$$\bar{\mathbf{i}}=S\mathbf{i} \quad \text{или} \quad \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}}=\mathbf{i}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}. \tag{1.1}$$

Для трехмерного пространства S представляет собой квадратную, размера (3×3) матрицу, ортогональную в случае преобразования ортонормированных базисов $\mathbf{i}$ в $\bar{\mathbf{i}}$. Распишем матричные соотношения (1.1):

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{i}}_1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 \\ \bar{\mathbf{i}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1\cdot}^{\cdot 1} & s_{1\cdot}^{\cdot 2} & s_{1\cdot}^{\cdot 3} \\ s_{2\cdot}^{\cdot 1} & s_{2\cdot}^{\cdot 2} & s_{2\cdot}^{\cdot 3} \\ s_{3\cdot}^{\cdot 1} & s_{3\cdot}^{\cdot 2} & s_{3\cdot}^{\cdot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

или

$$(\bar{\mathbf{i}}_1 \ \bar{\mathbf{i}}_2 \ \bar{\mathbf{i}}_3) = (\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3) \begin{pmatrix} s_{1\cdot}^{\cdot 1} & s_{2\cdot}^{\cdot 1} & s_{3\cdot}^{\cdot 1} \\ s_{1\cdot}^{\cdot 2} & s_{2\cdot}^{\cdot 2} & s_{3\cdot}^{\cdot 2} \\ s_{1\cdot}^{\cdot 3} & s_{2\cdot}^{\cdot 3} & s_{3\cdot}^{\cdot 3} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Преобразования (1.2) и (1.3) можно записать, используя соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, в виде одного выражения:

$$\bar{\mathbf{i}}_r = s_{r\cdot}^{\cdot k}\mathbf{i}_k \qquad (k, r = \overline{1,3}). \tag{1.4}$$

Для ортонормированного базиса расположение индексов (верхнего или нижнего, как в последних трех соотношениях) не имеет принципиального значения. Оно приобретает смысл при введении неортогональных базисных векторов, о чем будет говориться в следующей главе. Тем не менее, уже сейчас условимся производить суммирование по повторяющимся индексам в случае их разного расположения (так называемые *немые* индексы), например, индекс “k” в выражении (1.4). Что касается одинаковых индексов, находящихся на совпадающих позициях у различных слагаемых одного соотношения, например, “r” в (1.4), то эти, называемые *свободными*, индексы пробегают значения от 1 до 3 (до n в пространстве $\Re_n$).

Оговорим сразу, что в элементах матрицы S, расписанной в выражениях (1.2) и (1.3), как это принято в матричной алгебре, первый индекс указывает на номер строки, а второй – на номер столбца, на которых находится элемент. Точками в верхних и нижних индексных позициях отмечены незанятые индексами места. Для симметричных матриц ставить точки вместо отсутствующих индексов не обязательно, так как для таких матриц порядок следования индексов безразличен.

Как было показано в курсе линейной алгебры, для векторов ортонормированного базиса, где $\mathbf{i}^k = \mathbf{i}_k$, справедливо соотношение

$$s_{r\cdot}^{\cdot k} = \bar{\mathbf{i}}_r \cdot \mathbf{i}^k = \cos(\bar{\mathbf{i}}_r,\hat{}\,\mathbf{i}^k).$$

Если правило преобразования (1.1) базисных векторов задано, то из условия инвариантности произвольного вектора $\mathbf{x}$ по отношению к этому преобразованию устанавливается правило преобразования координат вектора.

Запишем вектор $\mathbf{x}$ в виде разложения по векторам старого базиса

$$\mathbf{x} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} X = (\mathbf{i}_1\ \mathbf{i}_2\ \mathbf{i}_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1\mathbf{i}_1 + x^2\mathbf{i}_2 + x^3\mathbf{i}_3 = x^k\mathbf{i}_k = X^{\mathrm{T}}\mathbf{i} \qquad (1.5)$$

и нового

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} \bar{X} = (\bar{\mathbf{i}}_1\bar{\mathbf{i}}_2\bar{\mathbf{i}}_3) \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \bar{x}^1\bar{\mathbf{i}}_1 + \bar{x}^2\bar{\mathbf{i}}_2 + x^3\bar{\mathbf{i}}_3 = \bar{x}^k\bar{\mathbf{i}}_k = \bar{X}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{i}}. \qquad (1.6)$$

Подставим (1.1) в (1.6) и приравняем полученное выражение (1.5)

$$\mathbf{i}^{\mathrm{T}} S \bar{X} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} X. \qquad (1.7)$$

Множители, стоящие при базисных матрицах $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}$ в (1.7), равны. Приравнивая их, получим правило преобразования матриц координат вектора

$$X = S^{\mathrm{T}} \bar{X}. \qquad (1.8)$$

Как известно из курса линейной алгебры, матрица, обратная ортогональной, равна транспонированной матрице. То есть

$$S^{\mathrm{T}} = S^{-1}. \qquad (1.9)$$

Компоненты обратной матрицы $S^{-1} = (\bar{s}_{r\cdot}^{\cdot k})$ могут быть найдены по формуле

$$\bar{s}_{r\cdot}^{\cdot k} = \frac{1}{detS} \frac{\partial(detS)}{\partial s_{k\cdot}^{\cdot r}}. \qquad (1.10)$$

Отметим, что у входящих в (1.10) элементов $\tilde{s}_{r\cdot}^{\cdot k}$ матрицы S^{-1} изменено положение индексов по сравнению с элементами $(s_{k\cdot}^{\cdot r})$ матрицы S. Это объясняется тем, что обратная матрица получается путем транспонирования матрицы алгебраических дополнений исходной матрицы.

Умножая (1.8) слева на матрицу $(S^{\mathsf{T}})^{-1} = S^{-\mathsf{T}}$, получим

$$\tilde{X} = S^{-\mathsf{T}} X \tag{1.11}$$

В компонентно-матричной форме это преобразование можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{1\cdot}^{\cdot 1} & \tilde{s}_{2\cdot}^{\cdot 1} & \tilde{s}_{3\cdot}^{\cdot 1} \\ \tilde{s}_{1\cdot}^{\cdot 2} & \tilde{s}_{2\cdot}^{\cdot 2} & \tilde{s}_{3\cdot}^{\cdot 2} \\ \tilde{s}_{1\cdot}^{\cdot 3} & \tilde{s}_{2\cdot}^{\cdot 3} & \tilde{s}_{3\cdot}^{\cdot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

или

$$\tilde{x}^r = \tilde{s}_{k\cdot}^{\cdot r} x^k. \tag{1.13}$$

Напомним, что для ортонормированных упорядоченных базисов в силу того, что $detS = 1$:

$$\tilde{s}_{k\cdot}^{\cdot r} = s_{r\cdot}^{\cdot k}$$

Из соотношения

$$SS^{-1} = I$$

следует

$$s_{r\cdot}^{\cdot p} \tilde{s}_{p\cdot}^{\cdot k} = \delta_r^k.$$

Важные выводы, которые можно сделать из изложенного, заключаются в следующем.

1. Вектор как инвариантная величина не изменяется при преобразовании координат.

2. При замене базиса координаты вектора изменяются по правилам, диктуемым правилом преобразования базиса и требованием инвариантности вектора.

3. Положение матрицы преобразования базисов S (справа или слева от преобразуемой величины) в различных произведениях зависит от формы представления координат векторов в этих выражениях (матрицами-строками или матрицами-столбцами).

4. Расположение индексов у компонентов матрицы S зависит от положения индексов матриц-строк (столбцов), входящих в соответствующие выражения.

1.2 Тензор второго ранга

Следующим по сложности объектом, изучаемым в тензорной алгебре, является тензор второго ранга. Существует несколько способов введения этого понятия. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть заданы два вектора

$$\mathbf{x} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} X \qquad \text{и} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} Y \tag{1.14}$$

их разложениями по ортонормированному базису $\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3)$, в котором $X = (x^1 x^2 x^3)^{\mathrm{T}}$, $Y = (y^1 y^2 y^3)^{\mathrm{T}}$. Пусть вектор $\mathbf{x}$ является прообразом вектора $\mathbf{y}$, получаемым с помощью оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}.$$

Определение 1. *Оператор, с помощью которого осуществляется отображение одного вектора (как инвариантной величины!) в другой вектор того же пространства, называется тензором второго ранга.*

Для тензора $\hat{\mathbf{A}}$ и векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ такое отображение (1.14) записывается в виде

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}. \tag{1.15}$$

Между тензором $\hat{\mathbf{A}}$ и вектором $\mathbf{x}$ ставится знак скалярного произведения (!). Смысл постановки этого знака будет пояснен ниже.

Представим (1.15) в матричной форме в $\Re_3$

$$Y = A^{\mathrm{T}} X \tag{1.16}$$

или

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\cdot}^{\cdot 1} & a_{2\cdot}^{\cdot 1} & a_{3\cdot}^{\cdot 1} \\ a_{1\cdot}^{\cdot 2} & a_{2\cdot}^{\cdot 2} & a_{3\cdot}^{\cdot 2} \\ a_{1\cdot}^{\cdot 3} & a_{2\cdot}^{\cdot 3} & a_{3\cdot}^{\cdot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

или

$$y^k = a_{r\cdot}^{\cdot k} x^r \qquad (k, r = \overline{1,3}). \tag{1.18}$$

Напомним, что столбцами (!) матрицы A^{T} являются координаты вектора, получаемого в результате действия оператора $\mathbf{A}$ на базисные векторы старого базиса и разложенного по этому же базису. Этим объясняется постановка знака транспонирования у матрицы A в выражении (1.16). В рассматриваемом базисе $\Re_3$ тензор $\hat{\mathbf{A}}$ представляется матрицей размера (3×3), а в общем случае пространства $\Re_n$ – матрицей размера $(n \times n)$.

Отметим две особенности, характерные для тензора $\hat{\mathbf{A}}$. Во-первых, понятие тензор перекликается с понятием оператора. Во-вторых, тензор (как и оператор) в заданном базисе представляется некоторой матрицей, что дает возможность использовать при выполнении операций с тензорами хорошо разработанный аппарат матричного исчисления.

1.3 Преобразование компонентов тензора

Пусть наряду с представлением (1.14) векторов в старом базисе известно представление этих векторов в новом базисе $\bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} = (\bar{\mathbf{i}}_1 \bar{\mathbf{i}}_2 \bar{\mathbf{i}}_3)$:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} \bar{X}, \qquad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} \bar{Y}. \tag{1.19}$$

В этом базисе матричное соотношение (1.16) примет вид

$$\bar{Y} = \bar{A}^{\mathrm{T}} \bar{X}. \tag{1.20}$$

Используя матрицу S преобразования базисов, введенную в разделе 1.1, преобразуем последнее равенство. Умножим обе части этого равенства на матрицу $S^{-\mathrm{T}}$ слева. Воспользовавшись далее соотношением (1.11) для преобразования матрицы X и аналогичным соотношением для преобразования Y, получим

$$Y = S^{\mathrm{T}} \bar{A}^{\mathrm{T}} S^{-\mathrm{T}} X. \tag{1.21}$$

Сравнивая (1.16) и (1.21), запишем правило преобразования матрицы A компонентов тензора $\bar{\mathbf{A}}$ при переходе от нового базиса к старому:

$$A^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}} \bar{A}^{\mathrm{T}} S^{-\mathrm{T}}$$

или

$$A = S^{-1} \bar{A} S. \tag{1.22}$$

Как и следовало ожидать, это правило полностью повторяет правило преобразования матриц операторов. Обратное преобразование можно получить путем умножения (1.22) на матрицу S слева и на матрицу S^{-1} справа:

$$\bar{A} = S A S^{-1}. \tag{1.23}$$

Расписывая последнее равенство через компоненты матриц, получим правило преобразования компонентов тензора второго ранга при переходе от старого базиса к новому:

$$\bar{a}_{r\cdot}^{\cdot k} = s_{p\cdot}^{\cdot k} a_{q\cdot}^{\cdot p} \bar{s}_{r\cdot}^{\cdot q}. \tag{1.24}$$

Отметим, что в последнем выражении множители следуют в том же порядке (хотя это и не имеет значения), в каком следуют матрицы в выражении (1.23).

Подобным переходом от матричной записи (1.23) к координатной (1.24) можно всегда воспользоваться в любых других случаях.

Обратное к (1.24) преобразование можно получить умножением обеих частей этого равенства на $\bar{s}_{k\cdot}^{\cdot m}$ и $s_{l\cdot}^{\cdot r}$ с предполагаемым суммированием по повторяющимся индексам "k" и "r":

$$\bar{s}_{k\cdot}^{\cdot m}\bar{a}_{r\cdot}^{\cdot k}s_{l\cdot}^{\cdot r} = \bar{s}_{k\cdot}^{\cdot m}s_{p\cdot}^{\cdot k}a_{q\cdot}^{\cdot p}\bar{s}_{r\cdot}^{\cdot q}s_{l\cdot}^{\cdot r} = \delta_p^m a_{q\cdot}^{\cdot p}\delta_l^q = a_{l\cdot}^{\cdot m}. \tag{1.25}$$

Такую же зависимость (с точностью до немых индексов) можно получить путем формального перехода от матричной записи в выражении (1.22) к компонентной:

$$a_{l\cdot}^{\cdot m} = \bar{s}_{k\cdot}^{\cdot m}\bar{a}_{r\cdot}^{\cdot k}s_{l\cdot}^{\cdot r}. \tag{1.26}$$

Таким образом, условие инвар нтности операторной записи (1.15) требует, чтобы при заданном преобразовании базисов матрицы тензоров и их компоненты преобразовывались вполне определенным образом.

Определение 2. *Тензором второго ранга называется математический объект, представимый в ортонормированном базисе $\Re_n$ квадратной матрицей размера $n \times n$, которая при переходе к новому базису преобразовывается по закону, определяемому зависимостью* (1.23).

1.4 Диада векторов

Для того, чтобы углубить понятие тензора второго ранга и осуществить в дальнейшем его обобщение на новые объекты, введем понятие диады векторов.

Пусть некоторой заданной паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \in \Re_\mathbf{n}$ ставится в соответствие некоторый объект, который обозначим $\mathbf{xy}$ (или $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$).

Определение. *Диадой векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *называется математический объект* $\mathbf{xy}$, *для которого выполняются следующие аксиомы:*

1) некоммутативность

$$\mathbf{xy} \neq \mathbf{yx};$$

2) дистрибутивность

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{xy} + \mathbf{xz};$$

3) ассоциативность относительно произведения диады на числовой множитель

$$\lambda(\mathbf{xy}) = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\lambda\mathbf{y});$$

4) существование нулевой диады $\boldsymbol{\theta\theta}$, образованной совокупностью двух нулевых векторов $\boldsymbol{\theta}$, такой, что

$$\mathbf{xy} + \boldsymbol{\theta\theta} = \mathbf{xy};$$

5) существование обратной диады $(-\mathbf{xy})$ такой, что

$$\mathbf{xy} + (-\mathbf{xy}) = \boldsymbol{\theta\theta}.$$

Рассмотрим некоторые математические операции над диадами.

Прежде всего, из сформулированных пяти свойств диад вытекает очевидность и справедливость линейных операций над ними. В частности, *сумма двух диад коммутативна*

$$\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1;$$

ассоциативна

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + (\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 + \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2) = (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2) + \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2$$

и дистрибутивна по отношению к произведению на число

$$\lambda(\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2) = \lambda\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2.$$

Введем еще некоторые понятия и операции над диадами.

Диада $\mathbf{yx}$ называется *транспонированной* по отношению к диаде $\mathbf{xy}$.

Каждой диаде можно поставить в соответствие скаляр, равный скалярному произведению входящих в диаду векторов

$$d = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y},$$

и вектор

$$\mathbf{d} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Введем понятие скалярного произведения диады на вектор. *Скалярным произведением диады* $\mathbf{xy}$ *на вектор* $\mathbf{u}$ *справа* называется вектор, сонаправленный $\mathbf{x}$ и равный произведению $\mathbf{x}$ на скалярное произведение $\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}$. То есть

$$(\mathbf{xy})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}).$$

Аналогично

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{xy}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{y} \neq (\mathbf{xy})\cdot\mathbf{u}.$$

Векторным произведением диады $\mathbf{xy}$ *на вектор* $\mathbf{u}$ *справа* называется диада, составленная из векторов $\mathbf{x}$ и $(\mathbf{y} \times \mathbf{u})$. То есть

$$(\mathbf{xy}) \times \mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{y} \times \mathbf{u}).$$

Аналогично

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{xy}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{x})\mathbf{y}.$$

Скалярным произведением диад называется диада, определяемая соотношением

$$(\mathbf{xy})\cdot(\mathbf{uv}) = \mathbf{x}(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u})\mathbf{xv}.$$

Ясно, что новая диада отличается от диады $\mathbf{xv}$ скалярным множителем $\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}$.

Диады могут быть образованы базисными векторами. Так, для ортонормированного базиса $\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ можно образовать девять диад:

$$\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2,\ \ldots \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \ \text{ или } \ \mathbf{i}_k\mathbf{i}_r \qquad (k, r = \overline{1,3}).$$

Разложим векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ по базису $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}}X = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^1x^2x^3)\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix} = X^{\mathrm{T}}\mathbf{i},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}}Y = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (y^1y^2y^3)\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix} = Y^{\mathrm{T}}\mathbf{i}.$$

Используя эти соотношения, запишем выражение для диады векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{xy} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}}XY^{\mathrm{T}}\mathbf{i} == (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}(y^1y^2y^3)\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)\begin{pmatrix} x^1y^1 & x^1y^2 & x^1y^3 \\ x^2y^1 & x^2y^2 & x^2y^3 \\ x^3y^1 & x^3y^2 & x^3y^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}_k x^k y^r \mathbf{i}_r = x^k y^r \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r.$$

Таким образом, диада векторов $\mathbf{xy}$ представляется в базисе $\mathbf{i}$ пространства $\Re_3$ суммой девяти слагаемых.

1.5 Диада как тензор второго ранга.

Пусть заданы два вектора **a** и **b** $\in L_n$, образующие диаду **ab**. Умножим эту диаду справа (можно слева) на некоторый вектор x $\in L_n$. В результате получим новый вектор **y**:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{ab})\cdot\mathbf{x}.$$

Произведение диады **ab** скалярно справа на вектор **x** преобразует этот вектор в его образ **y**. То есть, в описанном действии диада выполняет роль оператора. Поэтому на основании определения, вытекающего из (1.15), диада **ab** представляет собой тензор второго ранга. Обозначим этот тензор $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{ab} = a^k b^r \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r = A^{kr} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r. \tag{1.27}$$

Для ортонормированного базиса положение индексов (верхнее или нижнее) у векторных и тензорных величин не имеет принципиального значения. В этом случае выражение (1.27) можно представлять в виде

$$\hat{\mathbf{A}} = a_k b_r \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r = A_{kr} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r. \tag{1.28}$$

Преобразование компонентов тензора, порожденного диадой, вытекает из правила преобразования векторов при переходе от старого базиса к новому. Действительно, пусть в старом базисе $\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3)$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} A, \qquad \mathbf{b} = B^{\mathrm{T}} \mathbf{i} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{ab} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} A B^{\mathrm{T}} \mathbf{i}. \tag{1.29}$$

Аналогичные соотношения для нового базиса $\bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} = (\bar{\mathbf{i}}_1 \bar{\mathbf{i}}_2 \bar{\mathbf{i}}_3)$ запишем в виде

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} \bar{A}, \qquad \mathbf{b} = \bar{B}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{i}} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{ab} = \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} \bar{A} \bar{B}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{i}}. \tag{1.30}$$

Пусть далее матрица S преобразует старый базис **i** в новый $\bar{\mathbf{i}}$:

$$\bar{\mathbf{i}} = S\mathbf{i} \qquad \text{и} \qquad \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} S^{-1}. \tag{1.31}$$

Подставим (1.31) в (1.30):

$$\mathbf{ab} = \mathbf{i}^{\mathrm{T}} S^{-1} (\bar{A} \bar{B}^{\mathrm{T}}) S \mathbf{i}. \tag{1.32}$$

Приравнивая выражения, стоящие между $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}$ и **i** в формулах (1.29) и (1.32), получим правило преобразования матрицы AB^{T} диады

$$AB^{\mathrm{T}} = S^{-1} (\bar{A} \bar{B}^{\mathrm{T}}) S \qquad \text{или} \qquad \bar{A} \bar{B}^{\mathrm{T}} = S (AB^{\mathrm{T}}) S^{-1},$$

что соответствует правилу преобразования матрицы тензора второго ранга (1.22) и (1.23).

Дадим геометрическую интерпретацию тензора второго ранга в $\Re_3$. Введем в этом пространстве ортонормированный базис $\mathbf{i}^\mathsf{T} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ и изобразим на этом базисе куб, образованный плоскостями, перпендикулярными базисным векторам (рис. 1.1).

На рисунке показаны 9 векторов, каждый из которых обозначен соответствующей ему диадой. Принято считать (например, в теории упругости), что первый базисный вектор диады обозначает направление нормали к площадке, на которую воздействует векторная величина, направление которой определено вторым вектором диады.

Модуль со знаками "+" или "–" действующей на рассматриваемой площадке векторной величины определяется компонентом A^{kr} тензора, индексы которого совпадают с соответствующими индексами векторов диады.

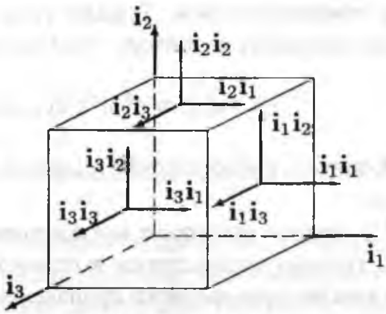

Рис. 1.1: Диады тензора

Свойствами тензора второго ранга обладают, в частности, напряжения, которые на каждой площадке деформируемого тела представляются совокупностью их нормальной составляющей (компоненты тензора с одинаковыми индексами) и касательных составляющих (с разными индексами).

1.6 Тензоры n-ного ранга

В разделе (1.4) упоминалось о скалярном и векторном произведениях векторов и введено понятие о произведениях вектора на диаду. В частности, для векторов ортонормированного базиса упомянутые произведения могут быть представлены в виде

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_r = \delta_{kr} \text{ – скаляр; } \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_r = e_{krm}\mathbf{i}_m \text{ – вектор; } \mathbf{i}_k\mathbf{i}_r \text{ – диада.} \qquad (1.33)$$

В отличие от скалярного и векторного произведений отсутствие знака между двумя векторами (или наличие знака $\otimes$), как в последней формуле, приводит к диаде векторов или тензору второго ранга. Такое действие называют *неопределенным, диадным* или *тензорным* произведением векторов.

Рассмотрим теперь различные виды произведений диады на вектор:

$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_k\delta_{mr}$ – вектор,

$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m \times \mathbf{i}_r = e_{mrp}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_p$ – диада,

$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_r\mathbf{i}_m$ – триада или тензор третьего ранга.

Тензорное произведение вектора на диаду приводит к *триаде* или *тензору третьего ранга*. Триада трех произвольных (не базисных) векторов также приводит к тензору третьего ранга

$$\mathbf{abc} = a^k b^m c^r \mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_r = A^{kmr}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_r = {}^{(3)}\hat{\mathbf{A}}.$$

Конечно, расположение индексов в приведенном выражении может быть иным.

Сравнивая последнее выражение с (1.27), приходим к заключению, что ранг тензора определяется количеством базисных векторов, объединенных знаками неопределенного произведения или, что то же, количеством свободных индексов у компонентов тензора (компоненты тензора третьего ранга A^{kmr} имеют три таких индекса).

Обобщая сказанное на n базисных векторов, образующих *полиаду n-ного порядка*, запишем выражение для *тензора n-ного ранга*:

$${}^{(n)}\hat{\mathbf{A}} = A^{k_1\cdot\ \ \cdots k_{n-1}\cdot}_{\cdot\ k_2\cdots\ \ \ \ \ \ \ \ k_n}\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}^{k_2}\ldots\mathbf{i}_{k_{n-1}}\mathbf{i}^{k_n}.$$

После сделанного обобщения становится ясным, что вектор, характеризуемый только одним базисным вектором, является тензором первого ранга, а скаляр, не имеющий базисных векторов, является тензором нулевого ранга.

По отношению к тензорам справедливы все действия, применимые к линейным операторам и, в том числе, к матрицам. В частности, операция сложения может иметь место только по отношению к тензорам одинакового ранга.

Не представляет труда убедиться в том, что тензоры одинакового ранга образуют линейное пространство.

Для *транспонирования* тензора второго ранга (для тензора второго ранга не принято указывать его ранг) $\hat{\mathbf{A}} = a^{kr}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_r$ достаточно поменять местами индексы только у его компонентов или только у базисных векторов:

$$\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = a^{rk}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_r.$$

Теперь естественным образом может быть введено понятие скалярного, векторного и неопределенного произведений тензоров. Оговорим лишь условие: в произведениях тензоров (скалярном, векторном или неопределенном) знак соответствующего произведения относится к "соприкасающимся" с этим знаком базисным векторам.

Рассмотрим пример скалярного произведения двух тензоров:

$$
{}^{(n)}\hat{\mathbf{A}}\cdot{}^{(m)}\hat{\mathbf{B}}=A^{k_1\cdot\;\cdots\;\cdot\;k_n}_{\cdot\;k_2\cdots k_{n-1}\cdot}\underbrace{\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}^{k_2}\dots\mathbf{i}^{k_{n-1}}\mathbf{i}_{k_n}}_{n}\cdot B_{r_1\cdot\;\cdots\;\cdot}^{\cdot\;r_2\cdots r_{m-1}\cdot\;r_m}\underbrace{\mathbf{i}^{r_1}\mathbf{i}_{r_2}\dots\mathbf{i}^{r_{m-1}}\mathbf{i}_{r_m}}_{m}=
$$

$$
=A^{k_1\cdot\;\cdots\;\cdot\;k_n}_{\cdot\;k_2\cdots k_{n-1}\cdot}B_{r_1\cdot\;\cdots\;\cdot}^{\cdot\;r_2\cdots r_{m-1}\cdot\;r_m}\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}^{k_2}\dots\mathbf{i}^{k_{n-1}}\delta^{r_1}_{k_n}\mathbf{i}_{r_2}\dots\mathbf{i}^{r_{m-1}}\mathbf{i}_{r_m}=
$$

$$
=A^{k_1\cdot\;\cdots\;\cdot\;r_1}_{\cdot\;k_2\cdots k_{n-1}\cdot}B_{r_1\cdot\;\cdots\;\cdot}^{\cdot\;r_2\cdots r_{m-1}\cdot\;r_m}\underbrace{\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}^{k_2}\dots\mathbf{i}^{k_{n-1}}\mathbf{i}_{r_2}\dots\mathbf{i}^{r_{m-1}}\mathbf{i}_{r_m}}_{n+m-2}.
$$

Скалярное произведение уменьшило суммарное количество базисных векторов $(n+m)$ перемножаемых тензоров на два. Количество "свободных" индексов в произведении компонентов тензоров также равно $(n+m-2)$, так как два индекса, а именно k_n и r_1, стали равными и по ним ведется суммирование. Количество слагаемых в упомянутой сумме равно размерности пространства.

Аналогично можно показать, что векторное произведение двух тензоров равно новому тензору, ранг которого на единицу меньше суммарного ранга перемножаемых тензоров:

$$
{}^{(n+m-1)}\hat{\mathbf{C}}={}^{(n)}\hat{\mathbf{A}}\times{}^{(m)}\hat{\mathbf{B}}.
$$

Неопределенное произведение двух тензоров приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов перемножаемых тензоров:

$$
{}^{n+m)}\hat{\mathbf{C}}={}^{(n)}\hat{\mathbf{A}}{}^{(m)}\hat{\mathbf{B}}.
$$

1.7 Матричное представление тензорных соотношений

Рассмотрим соотношение между двумя скалярными величинами X и Y, отличающимися друг от друга на некоторый числовой множитель A :

$$
Y=AX.
$$

С точки зрения рангов входящих в это соотношение величин (скаляр – это тензор нулевого ранга) попробуем воспринять представленную зависимость как зависимость между двумя точками некоторого фиктивного "нульмерного пространства рангов тензора".

Усложним зависимость, заменив скаляры на векторы:

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X}.$$

Разложим введенные векторы по базису, считая для простоты изложения линейное пространство, в котором заданы векторы (и далее тензоры), двумерным. Тогда последнее векторное соотношение можно переписать в виде зависимости между матрицами-столбцами (можно и между матрицами-строками) векторов:

$$(y^1 y^2)^{\mathrm{т}} = A(x^1 x^2)^{\mathrm{т}}.$$

С точки зрения рангов тензора пространство, в котором записано это соотношение, является одномерным.

Подчеркнем, что пространство векторов, а далее тензоров, не надо отождествлять по его содержанию с введенным фиктивным "пространством рангов тензора".

Следующий шаг усложнения зависимостей между тензорными величинами приводит к соотношению

$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{X},$$

которое можно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1\cdot}_{\cdot 1} & a^{1\cdot}_{\cdot 2} \\ a^{2\cdot}_{\cdot 1} & a^{2\cdot}_{\cdot 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Это соотношение "выводит" задачу в двумерное ранговое пространство – содержит квадратную матрицу.

Рассмотрим теперь тензорное соотношение

$$\hat{\mathbf{Y}} = {}^{(3)}\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{X},$$

которое содержит тензор третьего ранга ${}^{(3)}\hat{\mathbf{A}}$. При определенных мысленных усилиях можно представить себе трехмерную матрицу в трехмерном ранговом пространстве и даже ухитриться изобразить некоторый прямоугольный параллелепипед, разбитый на ячейки-кубики, содержащие 2^3(n^3 в общем случае) элементов тензора третьего ранга.

Изобразить матричное соотношение, соответствующее тензорному равенству

$$\hat{\mathbf{Y}} = {}^{(4)}\hat{\mathbf{A}}{:}\hat{\mathbf{X}},$$

невозможно в силу ограниченности нашего мышления трехмерным миром, в котором нам довелось существовать.

Отметим, что современное программное обеспечение ЭВМ не рассчитано на представление трех и n-мерных матриц и на действия с ними. Тем не менее,решение тензорных уравнений – посильная задача для ЭВМ.

Чтобы составить алгоритм решения тензорных уравнений, тензоры любого ранга представляются в виде прямоугольных матриц, для которых имеется хорошо разработанный и эффективно используемый на ЭВМ аппарат матричного исчисления. Тензор второго ранга можно представить в заданном базисе или квадратной матрицей размера $n \times n$, или матрицей-столбцом (строкой) размера $n^2 \times 1$. Тензор третьего ранга представляется (в зависимости от постановки задачи и удобства ее решения) различными видами прямоугольных матриц, содержащих одинаковое количество элементов n^3. Это могут быть матрицы с размерами $n^2 \times n, n \times n^2, n^3 \times 1, 1 \times n^3$. Тензор четвертого ранга можно представить, например, матрицами размерности $n^2 \times n^2, n^4 \times 1$ и т.д.

В общем случае количество N компонентов тензора k-того ранга в пространстве $\Re_n$ определяется формулой

$$N = n^k.$$

1.8 Свертывание индексов

Вспомним, как находится модуль вектора **a** в пространстве $\Re_n$:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_k a^k}.$$

Квадрат модуля вектора **a** (скалярный квадрат) образуется путем постановки знака скалярного произведения между векторами диады **aa**. Результат этой операции называется *следом тензора* **aa** и обозначается “tr” – от первых букв английского слова *trace* – след:

$$tr(\mathbf{aa}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_k a^k \quad \text{и} \quad tr(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_k b^k.$$

Операция определения следа тензора второго ранга сводится к постановке знака скалярного произведения между базисными векторами. След тензора второго ранга $\hat{\mathbf{Q}}$ называется его *первым главным инвариантом*:

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}) = tr\hat{\mathbf{Q}} = q^{kr}\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_r = q^{kr}\delta_{kr} = q_{r}^{\cdot r}.$$

Постановка знака скалярного произведения между двумя соседствующими базисными векторами тензора произвольного ранга называется *сворачиванием тензора по паре индексов.* В результате такого сворачивания ранг исходного тензора снижается на две единицы. Например:

$$^{(n-2)}\hat{\mathbf{Q}} = q^{k_1 k_2 \dots k_{r-1} k_r \dots k_n} \mathbf{i}_{k_1} \mathbf{i}_{k_2} \dots \mathbf{i}_{k_{r-1}} \cdot \mathbf{i}_{k_r} \dots \mathbf{i}_{k_n} =$$

$$= q^{k_1 k_2 \dots \cdot}{}_{k_r \cdot}{}^{k_r \dots k_n} \mathbf{i}_{k_1} \mathbf{i}_{k_2} \dots \mathbf{i}_{k_{r-2}} \mathbf{i}_{k_{r+1}} \dots \mathbf{i}_{k_n}.$$

Рассмотрим скалярное произведение двух тензоров второго ранга $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{Q}}$

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{Q}} = p^{k}_{\cdot n} \mathbf{i}_k \mathbf{i}^n \cdot q^{r}_{\cdot m} \mathbf{i}_r \mathbf{i}^m = p^{k}_{\cdot n} q^{n}_{\cdot m} \mathbf{i}_k \mathbf{i}^m =$$

$$= p_{k \cdot}^{\cdot n} q_{n \cdot}^{\cdot m} \mathbf{i}^k \mathbf{i}_m = \hat{\mathbf{T}}.$$

Эта операция равносильна сворачиванию тензора четвертого ранга $\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{Q}}$ по паре индексов соприкасающихся базисных векторов.

След тензора $\hat{\mathbf{T}}$ – скаляр, образуемый сверткой тензора $\hat{\mathbf{T}}$ по двум оставшимся свободными индексам:

$$tr\hat{\mathbf{T}} = tr(\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}) = \hat{\mathbf{P}} \cdot\cdot \hat{\mathbf{Q}} \equiv \hat{\mathbf{P}} : \hat{\mathbf{Q}} = p_{k \cdot}^{\cdot n} q_{n \cdot}^{\cdot m} \mathbf{i}^k \cdot \mathbf{i}_m =$$

$$= p_{k \cdot}^{\cdot n} q_{n \cdot}^{\cdot m} \delta^k_m = p_{k \cdot}^{\cdot n} q_{n \cdot}^{\cdot k}.$$

Рассмотрим тензор, транспонированный по отношению к $\hat{\mathbf{T}}$:

$$\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}} = (\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{Q}})^{\mathrm{T}} = (p_{k \cdot}^{\cdot n} q_{nm} \mathbf{i}^k \mathbf{i}^m)^{\mathrm{T}} =$$

$$= p_{m \cdot}^{\cdot n} q_{nk} \mathbf{i}^k \mathbf{i}^m = q_{nk} \mathbf{i}^k \mathbf{i}^n \cdot p_{m \cdot}^{\cdot r} \mathbf{i}_r \mathbf{i}^m = \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{T}}.$$

То есть транспонирование скалярного произведения двух тензоров второго ранга равно скалярному произведению транспонированных тензоров, входящих в произведение и расположенных в обратном порядке. След тензора $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}}$, в чем нетрудно убедиться, совпадает со следом тензора $\hat{\mathbf{T}}$.

Тензором, симметричным относительно пары индексов, называется тензор, который не изменяется при перестановке индексов в этой паре или только у векторов диады, или только у компонентов тензора. Например, тензор третьего ранга, удовлетворяющий условию

$$^{(3)}\hat{\mathbf{Q}} = q_{kmr} \mathbf{i}^k \mathbf{i}^m \mathbf{i}^r = q_{rmk} \mathbf{i}^k \mathbf{i}^m \mathbf{i}^r,$$

симметричен относительно первого и третьего индексов.

Покажем, что тензор $\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}}$ симметричен. Действительно, с учетом установленного выше правила определения тензора, транспонированного по отношению к скалярному произведению тензоров второго ранга, получим

$$(\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}})^{\text{т}} = (\hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}})^{\text{т}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}} = \hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}}.$$

Конечно, это не означает, что $\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}} = \hat{\mathbf{Q}}^{\text{т}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}$.

Квадратом тензора второго ранга $\hat{\mathbf{Q}} = q^{km}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m = q_{rn}\mathbf{i}^r\mathbf{i}^n$ называется тензор

$$\hat{\mathbf{Q}}^2 = \hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}} = q^{km}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\cdot q_{rn}\mathbf{i}^r\mathbf{i}^n = q^{km}q_{mn}\mathbf{i}_k\mathbf{i}^n.$$

Для *куба тензора* получим выражение

$$\hat{\mathbf{Q}}^3 = \hat{\mathbf{Q}}^2\cdot\hat{\mathbf{Q}} = q^{km}q_{mn}\mathbf{i}_k\mathbf{i}^n\cdot q^{p\cdot}_{\cdot t}\mathbf{i}_p\mathbf{i}^t = q^{km}q_{mn}q^{n\cdot}_{\cdot t}\mathbf{i}_k\mathbf{i}^t.$$

Аналогично

$$\hat{\mathbf{Q}}^n = \hat{\mathbf{Q}}^{n-1}\cdot\hat{\mathbf{Q}} == q^{\cdot k_2}_{k_1\cdot}q^{\cdot k_3}_{k_2\cdot}\ldots q^{\cdot k_n}_{k_{n-1}\cdot}\mathbf{i}^{k_1}\mathbf{i}_{k_n}.$$

Следами степеней тензора второго ранга являются их первые главные инварианты:

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2) = tr\hat{\mathbf{Q}}^2 = \hat{\mathbf{Q}}:\hat{\mathbf{Q}} = q^{km}q_{mn}\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}^n = q^{km}q_{mn}\delta^n_k = q^{km}q_{mk} = q^{\cdot m}_{k\cdot}q^{\cdot k}_{m\cdot}, \quad \ldots$$

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^n) = tr\hat{\mathbf{Q}}^n = \hat{\mathbf{Q}}^{n-1}:\hat{\mathbf{Q}} = q^{\cdot k_2}_{k_1\cdot}q^{\cdot k_3}_{k_2\cdot}\ldots q^{\cdot k_{n-1}}_{k_{n-2}\cdot}q^{\cdot k_1}_{k_{n-1}\cdot}.$$

В разделе (1.13) будет показано, что степени выше второй тензора второго ранга могут быть выражены через $\hat{\mathbf{Q}}^2$, $\hat{\mathbf{Q}}$ и *единичный тензор:*

$$\hat{\mathbf{I}} = \delta_{kn}\mathbf{i}^k\mathbf{i}^n = \mathbf{i}^k\mathbf{i}_k.$$

Единичный тензор $\hat{\mathbf{I}}$ получил свое название, в частности, потому, что его скалярное произведение справа или слева на тензор любого ранга не изменяет последнего. Например:

$$\hat{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{i}^k\mathbf{i}_k\cdot a_m\mathbf{i}^m = a_m\delta^m_k\mathbf{i}^k = a_m\mathbf{i}^m = \mathbf{a}.$$

1.9 Симметрирование и альтернирование тензоров

Определение 1. *Симметрированием называется операция выделения из тензора его симметричной части* $\hat{\mathbf{\Sigma}}$:

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\right). \tag{1.34}$$

Определение 2. *Альтернированием называется операция выделения из тензора его обратносимметричной части* $\hat{\mathbf{\Omega}}$, *то есть того слагаемого, которое при транспонировании меняет знак на противоположный:*

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\right). \tag{1.35}$$

Из (1.34) и (1.35) вытекают соотношения:

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{Q}}\right) = \hat{\mathbf{\Sigma}},$$

$$\hat{\mathbf{\Omega}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{Q}}\right) = -\hat{\mathbf{\Omega}}. \tag{1.36}$$

Поэтому

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{\Sigma}} + \hat{\mathbf{\Omega}}; \qquad \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{\Sigma}} - \hat{\mathbf{\Omega}}.$$

Теорема. *Обратносимметричный (или кососимметричный) тензор второго ранга имеет три независимых компонента, которые преобразуются при изменении базиса как координаты вектора.*

Покажем, что это так. Пусть

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \omega_{kn}\mathbf{i}^k\mathbf{i}^n.$$

Из (1.36) следует

$$\omega_{kn} = -\omega_{nk}.$$

Поэтому

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0; \quad \omega_{12} = -\omega_{21} = -\omega^3;$$

$$\omega_{23} = -\omega_{32} = -\omega^1; \quad \omega_{31} = -\omega_{13} = -\omega^2.$$

Три последние выражения можно объединить в одно, вводя символы Леви-Чивита (α – число инверсий в индексах krn):

$$e_{krn} = \begin{cases} \;\;1, & \text{если } \alpha \text{ четное;} \\ -1, & \quad\;\; \text{– нечетное;} \\ \;\;0, & \quad\;\; \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\omega_{kn} = -e_{knr}\omega^r.$$

Отсюда следует легко проверяемая формула:

$$\omega^r = -\frac{1}{2}e^{rkn}\omega_{kn}.$$

Образуем из ненулевых компонентов тензора $\hat{\mathbf{\Omega}}$ вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^k \mathbf{i}_k,$$

где

$$\omega^1 = -\frac{1}{2}e^{1kn}\omega_{kn} = -\frac{1}{2}(\omega_{23} - \omega_{32}) =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(q_{23} - q_{32}) - \frac{1}{2}(q_{32} - q_{23})\right] = -\frac{1}{2}(q_{23} - q_{32});$$

$$\omega^2 = -\frac{1}{2}e^{2kn}\omega_{kn} = -\frac{1}{2}(\omega_{31} - \omega_{13}) = -\frac{1}{2}(q_{31} - q_{13});$$

$$\omega^3 = -\frac{1}{2}e^{3kn}\omega_{kn} = -\frac{1}{2}(\omega_{12} - \omega_{21}) = -\frac{1}{2}(q_{12} - q_{21}).$$

Таким образом, три координаты вектора $\boldsymbol{\omega}$, сопутствующего тензору $\hat{\mathbf{Q}}$ (ассоциированного с тензором $\hat{\mathrm{Q}}$), определяются через компоненты этого тензора:

$$\omega^r = -\frac{1}{2}e^{rkn}q_{kn}.$$

Легко убедиться в том, что эти три координаты преобразуются при преобразовании базиса как компоненты любого вектора.

Равенство нулю вектора $\boldsymbol{\omega}$ (тензора $\hat{\mathbf{\Omega}}$) говорит о том, что тензор $\hat{\mathbf{Q}}$ симметричен.

Рассмотрим тензорное равенство, образованное произвольными векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и тензором $\hat{\mathbf{\Omega}}$:

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{\Omega}}\cdot\mathbf{x}. \tag{1.37}$$

Представим $\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{\Omega}}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{i}$ и преобразуем (1.37):

$$\mathbf{y} = \omega_{kn}\mathbf{i}^k\mathbf{i}^n\cdot x^m\mathbf{i}_m = \omega_{kn}x^n\mathbf{i}^k. \tag{1.38}$$

Теперь рассмотрим векторное произведение векторов $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{x}$:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x} = \omega^p\mathbf{i}_p\times x^n\mathbf{i}_n = \omega^p x^n e_{pnk}\mathbf{i}^k = -e_{knp}\omega^p x^n\mathbf{i}^k = \omega_{kn}x^n\mathbf{i}^k. \tag{1.39}$$

Сравнение выражений (1.38) и (1.39) приводит к соотношению

$$\hat{\mathbf{\Omega}}\cdot\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}, \tag{1.40}$$

используя которое,найдем

$$\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\mathbf{\Omega}}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{x} = -\hat{\mathbf{\Omega}}\cdot\mathbf{x} = -\omega\times\mathbf{x} = \mathbf{x}\times\omega.$$

С помощью последних формул можно получить следующие полезные зависимости:

$$\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{\Sigma}} + \hat{\mathbf{\Omega}})\cdot\mathbf{x} = \hat{\mathbf{\Sigma}}\cdot\mathbf{x} + \omega\times\mathbf{x};$$
$$\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{\Sigma}} + \mathbf{x}\times\omega = \mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{\Sigma}} - \omega\times\mathbf{x}. \qquad (1.41)$$

Умножая первое из соотношений (1.41) скалярно на $\mathbf{x}$ слева или второе из них на $\mathbf{x}$ справа, придем к выражению

$$\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{\Sigma}}\cdot\mathbf{x},$$

которое говорит о том, что в подобных векторных операциях кососимметричная часть тензоров не участвует.

1.10 Изотропные тензоры

Рассмотрим двойное векторное произведение векторов ортонормированного базиса

$$(\mathbf{i}_k\times\mathbf{i}_n)\times\mathbf{i}^m = \mathbf{i}_n(\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}^m) - \mathbf{i}_k(\mathbf{i}_n\cdot\mathbf{i}^m) = \mathbf{i}_n\delta_k^m - \mathbf{i}_k\delta_n^m. \qquad (1.42)$$

С другой стороны, представляя векторное произведение ортонормированных векторов через символы Леви-Чивита, получим

$$(\mathbf{i}_k\times\mathbf{i}_n)\times\mathbf{i}^m = e_{knp}\mathbf{i}^p\times\mathbf{i}^m = e_{knp}e^{pmt}\mathbf{i}_t. \qquad (1.43)$$

Умножим оба равенства (1.42) и (1.43) скалярно на $\mathbf{i}^r$ и приравняем полученные выражения. После смены индекса t у второго символа Леви-Чивита на индекс r (после умножения на δ_t^r) придем к зависимости, связывающей между собой символы Кронекера и Леви-Чивита:

$$\delta_n^r\delta_k^m - \delta_k^r\delta_n^m = e_{knp}e^{pmr} = -e_{pnk}e^{pmr}. \qquad (1.44)$$

Из этого выражения при $n = m$, то есть при суммировании по двум парам индексов в правой его части, получим

$$e_{knp}e^{pnr} = \delta_n^n\delta_k^r - \delta_k^n\delta_n^r = 3\delta_k^r - \delta_k^r = 2\delta_k^r.$$

Наконец, при суммировании по трем индексам найдем

$$e_{knp}e^{pnk} = 2\delta_k^k = 6.$$

Дадим теперь

Определение. *Изотропным тензором называется тензор, компоненты которого сохраняют свои значения при преобразовании поворота базисных векторов.*

Покажем, что единичный тензор

$$\hat{\mathbf{I}} = \delta_{k\cdot}^{n\cdot}\mathbf{i}^k\mathbf{i}_n = (\tilde{\mathbf{i}}_k\cdot\tilde{\mathbf{i}}^n)\mathbf{i}^k\mathbf{i}_n$$

является изотропным тензором. Действительно, используя правило (1.1) преобразования базисных векторов при переходе к новому базису, получим

$$\hat{\mathbf{I}} = (s_{k\cdot}^{\cdot p}\mathbf{i}_p\cdot s_{\cdot r}^{n\cdot}\mathbf{i}^r)\mathbf{i}^k\mathbf{i}_n = (\mathbf{i}_p\cdot\mathbf{i}^r)\mathbf{i}^k s_{k\cdot}^{\cdot p}\mathbf{i}_n s_{\cdot r}^{n\cdot} = (\mathbf{i}_p\cdot\mathbf{i}^r)\tilde{\mathbf{i}}^p\tilde{\mathbf{i}}_r = \delta_{p\cdot}^{\cdot r}\tilde{\mathbf{i}}^p\tilde{\mathbf{i}}_r.$$

Таким образом, в новом базисе компоненты единичного тензора не изменились и остались равными символам Кронекера.

Другим изотропным тензором является тензор третьего ранга Леви-Чивита

$${}^{(3)}\hat{\mathbf{I}} = e_{krn}\mathbf{i}^k\mathbf{i}^r\mathbf{i}^n.$$

Доказать его изотропность можно по аналогии с $\hat{\mathbf{I}}$. В теории инвариантов доказано, что других изотропных тензоров второго и третьего рангов, кроме $\hat{\mathbf{I}}$ и ${}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}$, не существует.

Общий вид изотропного тензора четвертого ранга можно представить в виде (λ, μ и ν – скалярные множители)

$${}^{(4)}\hat{\mathbf{I}} = (\lambda\delta_{nk}\delta^{mp} + \mu\delta_{n\cdot}^{\cdot m}\delta_{k\cdot}^{\cdot p} + \nu\delta_{n\cdot}^{\cdot p}\delta_{k\cdot}^{\cdot m})\mathbf{i}^n\mathbf{i}^k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_p =$$

$$= \lambda\mathbf{i}^n\mathbf{i}^n\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k + \mu\mathbf{i}^n\mathbf{i}^k\mathbf{i}_n\mathbf{i}_k + \nu\mathbf{i}^n\mathbf{i}^k\mathbf{i}_k\mathbf{i}_n = \lambda{}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_1 + \mu{}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_2 + \nu{}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_3.$$

Этот тензор состоит из линейной комбинации трех (больше не существует) изотропных тензоров третьего ранга:

$${}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{i}_n\mathbf{i}^n\mathbf{i}_k\mathbf{i}^k;\quad {}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{i}_n\mathbf{i}_k\mathbf{i}^n\mathbf{i}^k;\quad {}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_3 = \mathbf{i}_n\mathbf{i}_k\mathbf{i}^k\mathbf{i}^n.$$

1.11 Обратный тензор

В заданном базисе тензор представляется в виде квадратной матрицы. Поэтому отыскание тензора, обратного заданному, сводится к отысканию матрицы, обратной по отношению к матрице исходного тензора. Конечно, требование невырожденности матрицы исходного тензора сохраняется.

Несмотря на очевидность процедуры отыскания обратной матрицы и обратного тензора, остановимся на некоторых особенностях, присущих тензорам второго ранга.

Пусть задан невырожденный (имеющий невырожденную матрицу) тензор $\hat{\mathbf{A}}$, который отображает вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}(\mathbf{x},\mathbf{y} \in L_n)$:

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x}. \tag{1.45}$$

Если существует тензор $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$, обратный тензору $\hat{\mathbf{A}}$, то справедливо соотношение

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\cdot\mathbf{y}. \tag{1.46}$$

Подставляя (1.46) в (1.45), придем к равенству

$$\mathbf{y} = (\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{A}}^{-1})\cdot\mathbf{y}.$$

Отсюда следует

$$\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \hat{\mathbf{I}}. \tag{1.47}$$

Зададим в L_n ортонормированный базис $\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\ldots\mathbf{i}_n)$. Напомним, что расположение индексов (верхнее или нижнее) для ортонормированного базиса не имеет принципиального значения. Обозначим компоненты векторов $\mathbf{x},\mathbf{y}$ и тензора $\hat{\mathbf{A}}$ в этом базисе соответственно $x^k, y^k, a^{k\cdot}_{\cdot r}$. Представим соотношение (1.45), раскладывая тензорные величины по введенному базису:

$$y^k\mathbf{i}_k = a^{k\cdot}_{\cdot r}\mathbf{i}_k\mathbf{i}^r\cdot x^n\mathbf{i}_n = a^{k\cdot}_{\cdot n}x^n\mathbf{i}_k.$$

Это векторное уравнение соответствует системе n алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов

$$A = (a^{k\cdot}_{\cdot n}).$$

Обозначим через $A^{n\cdot}_{\cdot k}$ компоненты союзной по отношению к A матрицы. Индексы n и k у алгебраических дополнений по сравнению с соответствующими индексами элементов $a^{k\cdot}_{\cdot n}$ самой матрицы A поменялись местами, так как союзная матрица является транспонированной матрицей алгебраических дополнений. Легко убедиться в справедливости соотношения ($a = \det A$)

$$A^{n\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial a}{\partial a^{k\cdot}_{\cdot n}}.$$

Если $a \neq 0$, то компоненты $\bar{a}^{n\cdot}_{\cdot k}$ обратной матрицы определятся из соотношения

$$\bar{a}^{n\cdot}_{\cdot k} = \frac{1}{a} A^{n\cdot}_{\cdot k} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial a^{k\cdot}_{\cdot n}} = \frac{\partial (\ln a)}{\partial a^{k\cdot}_{\cdot n}}. \tag{1.48}$$

Убедимся в том, что тензор $\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \bar{a}^{n\cdot}_{\cdot k} \mathbf{i}_n \mathbf{i}^k$ является обратным по отношению к тензору $\mathbf{A} = a^{m\cdot}_{\cdot r} \mathbf{i}_m \mathbf{i}^r$. Для этого достаточно проверить выполнение условия (1.47):

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}^{-1} = a^{m\cdot}_{\cdot r} \mathbf{i}_m \mathbf{i}^r \cdot \bar{a}^{n\cdot}_{\cdot k} \mathbf{i}_n \mathbf{i}^k = a^{m\cdot}_{\cdot r} \frac{A^{n\cdot}_{\cdot k}}{a} \delta^r_n \mathbf{i}_m \mathbf{i}^k =$$

$$= \frac{a^{m\cdot}_{\cdot r}}{a} A^{r\cdot}_{\cdot k} \mathbf{i}_m \mathbf{i}^k = \frac{a \delta^m_k}{a} \mathbf{i}_m \mathbf{i}^k = \delta^m_k \mathbf{i}_m \mathbf{i}^k = \hat{\mathbf{I}}.$$

При доказательстве последнего соотношения использованы правило разложения определителя по элементам его строк (столбцов) и формула (1.48).

Для операции определения обратного тензора, как и для соответствующих матриц, справедливы соотношения:

$$(\hat{\mathbf{A}}^{-1})^{-1} = \hat{\mathbf{A}}; \;\; (\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\hat{\mathbf{A}}^{-1})^{\mathrm{T}}; \;\; (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}})^{-1} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{A}}^{-1}.$$

1.12 Тензор поворота

Рассмотрим две системы базисных ортонормированных векторов в L_n: старую $\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \ldots \mathbf{i}_n)$ и новую $\bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} = (\bar{\mathbf{i}}_1 \bar{\mathbf{i}}_2 \ldots \bar{\mathbf{i}}_n)$. На рис.1.2 показаны такие системы координат в L_2.

Зададим тензор $\hat{\mathbf{S}}$ в виде диады

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{i}_k \bar{\mathbf{i}}^k = \mathbf{i}^k \bar{\mathbf{i}}_k. \tag{1.49}$$

Тогда

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \bar{\mathbf{i}}^k \mathbf{i}_k = \bar{\mathbf{i}}_k \mathbf{i}^k.$$

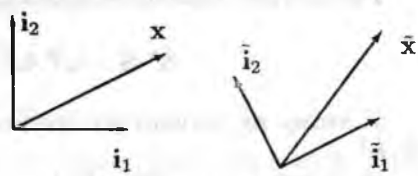

Рис. 1.2: Действие тензора поворота

Умножим произвольный вектор $\mathbf{x} = x^r \mathbf{i}_r = x_r \mathbf{i}^r$, представленный в старом базисе, справа скалярно на тензор $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{S}} = x_r \mathbf{i}^r \cdot \mathbf{i}_k \bar{\mathbf{i}}^k = x_r \bar{\mathbf{i}}^k \delta^r_k = x_r \bar{\mathbf{i}}^r = \bar{\mathbf{x}}. \tag{1.50}$$

Умножим теперь тот же вектор $\mathbf{x}$ слева скалярно на тензор $\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}$:

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x} = \bar{\mathbf{i}}^{k}\mathbf{i}_k\cdot x_r\mathbf{i}^r = x_r\bar{\mathbf{i}}^{k}\delta_k^r = x_r\bar{\mathbf{i}}^{r} = \bar{\mathbf{x}}. \tag{1.51}$$

Результаты двух рассмотренных операций оказались одинаковыми. Таким образом, в результате скалярного произведения вновь введенного тензора $\hat{\mathbf{S}}$ справа на произвольный вектор $\mathbf{x}$ и тензора $\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}$ слева на тот же вектор получается один и тот же вектор $\bar{\mathbf{x}}$. Координаты этого вектора в новом базисе x_k (проекции вектора на направления векторов ортонормированного базиса) совпадают с соответствующими координатами вектора $\mathbf{x}$ в старом базисе. То есть, тензор $\hat{\mathbf{S}}$ осуществил жесткий поворот вектора $\mathbf{x}$ в положение вектора $\bar{\mathbf{x}}$ вместе с базисными векторами. Вектор $\mathbf{x}$ как бы "вморожен" вместе с базисом в среду его "обитания" и поворачивается вместе с ней как "жесткое целое".

Тензор $\hat{\mathbf{S}}$, осуществляющий описанные преобразования, называется *тензором поворота*. Заметим, что этот тензор только поворачивает вектор $\mathbf{x}$ в рассматриваемом пространстве, не изменяя его модуля.

Покажем, что тензор второго ранга, компонентами которого являются компоненты матрицы преобразования базисов (1.1)

$$\hat{\mathbf{S}} = s_{k\cdot}^{\cdot r}\mathbf{i}^k\mathbf{i}_r = s_{\cdot r}^{k\cdot}\mathbf{i}_k\mathbf{i}^r \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = s_{k\cdot}^{\cdot r}\mathbf{i}_r\mathbf{i}^k = s_{\cdot k}^{r\cdot}\mathbf{i}^k\mathbf{i}_r, \tag{1.52}$$

выполняет роль тензора поворота. Проверим справедливость результатов (1.50) и (1.51) для представления (1.52):

$$\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{S}} = x_m\mathbf{i}^m\cdot s_{\cdot r}^{k\cdot}\mathbf{i}_k\mathbf{i}^r = x_m s_{\cdot r}^{k\cdot}\delta_k^m\mathbf{i}^r = x_m s_{\cdot r}^{m\cdot}\,\mathbf{i}^r = x_m\bar{\mathbf{i}}^m,$$

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x} = s_{\cdot k}^{r\cdot}\mathbf{i}^k\mathbf{i}_r\cdot x_m\mathbf{i}^m = x_m s_{\cdot k}^{r\cdot}\delta_r^m\mathbf{i}^k = x_m s_{\cdot k}^{m\cdot}\,\mathbf{i}^k = x_m\bar{\mathbf{i}}^m.$$

Рассмотрим скалярное произведение тензоров (1.52)

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{i}}_k\mathbf{i}^k\cdot\mathbf{i}_r\bar{\mathbf{i}}^r = \delta_r^k\bar{\mathbf{i}}_k\bar{\mathbf{i}}^r = \bar{\mathbf{i}}_k\bar{\mathbf{i}}^k = \hat{\mathbf{I}}. \tag{1.53}$$

К этому же результату приводит раскрытие скалярного произведения $\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}$.

Из (1.53) следует $\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{S}}^{-1}$.

Отметим, что представления (1.52) получаются из (1.49), если в последних векторы нового базиса выразить через векторы старого базиса (1.4).

Таким образом, введенный в этом разделе тензор $\hat{\mathbf{S}}$ осуществляет с векторами те же операции, что и рассмотренная в разделе (1.1) матрица S. Для того, чтобы представить вектор $\mathbf{x}$ в новом базисе, достаточно умножить его скалярно справа и слева на тензоры $\hat{\mathbf{S}}$ и $\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{S}}^{-1}$ в любом порядке. Действительно:

$$\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{-1} = s^{k}_{\cdot r}\mathbf{i}_k \mathbf{i}^r \cdot x^p \mathbf{i}_p \cdot \bar{s}^{n}_{\cdot m}\mathbf{i}^m \mathbf{i}_n = s^{k}_{\cdot r}\mathbf{i}_k \mathbf{i}^r \cdot x^p \bar{s}^{n}_{\cdot m}\delta^m_p \mathbf{i}_n =$$

$$= s^{k}_{\cdot r}\mathbf{i}_k \delta^r_n \bar{s}^{n}_{\cdot m} x^m = (\mathbf{i}_k s^{k}_{\cdot r})(\bar{s}^{r}_{\cdot m} x^m) = \bar{\mathbf{i}}_r \bar{x}^r = \bar{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}} \bar{X} = \mathbf{x}.$$

Найдем определитель тензора $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}$, используя равенство (1.53) и свойства определителей:

$$\det(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}) = \det\hat{\mathbf{S}} \det\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \det{}^2\hat{\mathbf{S}} = \det\hat{\mathbf{I}} = 1.$$

Отсюда следует

$$\det\hat{\mathbf{S}} = \pm 1.$$

Если $\det\hat{\mathbf{S}} = +1$, то $\hat{\mathbf{S}}$ называется собственно ортогональным тензором. С его помощью осуществляется преобразование вращения. Тензор $\hat{\mathbf{S}}$, для которого $\det\hat{\mathbf{S}} = -1$, используется для преобразования вращения с зеркальным отражением.

Поворот тензора второго ранга $\hat{\mathbf{Q}}$ можно осуществить следующей операцией:

$$\hat{\mathbf{Q}}^* = \hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{S}}.$$

Действительно:

$$\hat{\mathbf{Q}}^* = \bar{\mathbf{i}}^k \mathbf{i}_k \cdot q_{n\cdot}^{\cdot m} \mathbf{i}^n \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}^r \bar{\mathbf{i}}_r = q_{n\cdot}^{\cdot m} \delta^n_k \delta^r_m \bar{\mathbf{i}}^k \bar{\mathbf{i}}_r = q_{k\cdot}^{\cdot r} \bar{\mathbf{i}}^k \bar{\mathbf{i}}_r.$$

Компоненты тензоров $\hat{\mathbf{Q}}$ и $\hat{\mathbf{Q}}^*$ совпадают, хотя базисы, в которых они представлены, различны.

Отметим, что равенство (1.53) делает часть компонентов тензора $\hat{\mathbf{S}}$ линейно зависимыми. Так, для пространства $\Re_3$ из девяти компонентов тензора $\hat{\mathbf{S}}$ независимыми остаются только три. То есть, тензор поворота представляет собой кососимметричный тензор.

В работе [1] введен вектор

$$\boldsymbol{\vartheta} = 2\mathbf{e}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2},$$

определяющий поворот базиса вокруг некоторого орта $\mathbf{e}$ на угол θ. Там же получена формула

$$\hat{\mathbf{S}} = (\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{ee})\cos\theta + \mathbf{ee} + \mathbf{e} \times \hat{\mathbf{I}}\sin\theta,$$

из которой видно, что тензор $\hat{\mathbf{S}}$ зависит только от вектора $\mathbf{e}$ (единичный вектор имеет в пространстве $\Re_3$ два независимых компонента) и скалярной величины – угла поворота θ.

1.13 Главные направления и главные значения симметричного тензора

Скалярное произведение тензора второго ранга на вектор дает новый вектор (см. раздел 1.2). Поставим задачу: для произвольного симметричного тензора **Q** найти такой вектор **e**, который соосен (параллелен) вектору $\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e}$ и отличается от последнего некоторым скалярным множителем q. То есть

$$\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e} = q\mathbf{e}. \tag{1.54}$$

Вектор **e**, который не нарушая общности подхода будем считать единичным, называется *собственным вектором тензора* $\hat{\mathbf{Q}}$, а q – его *собственным значением*. Обе эти величины будем для краткости называть собственными характеристиками тензора.

Последовательность нахождения собственных характеристик тензора второго ранга полностью повторяет последовательность нахождения собственных характеристик симметричной матрицы самосопряженного оператора. Тем не менее приведем схематично необходимые преобразования.

Из (1.54) следует

$$(\hat{\mathbf{Q}} - q\hat{\mathbf{I}})\cdot\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Представим последнее равенство в ортонормированном базисе

$$(q_{k\cdot}^{\cdot n} - q\delta_{k\cdot}^{\cdot n})\mathbf{i}^k\mathbf{i}_n\cdot e_r\mathbf{i}^r = (q_{k\cdot}^{\cdot r} - q\delta_{k\cdot}^{\cdot r})e_r\mathbf{i}^k = 0_k\mathbf{i}^k.$$

Полученное векторное равенство соответствует системе алгебраических уравнений

$$(q_{k\cdot}^{\cdot r} - q\delta_{k\cdot}^{\cdot r})e_r = 0.$$

В частности, в $\Re_3$ эта система может быть записана в виде

$$\begin{cases} (q_{1\cdot}^{\cdot 1} - q)e_1 + q_{1\cdot}^{\cdot 2}e_2 + q_{1\cdot}^{\cdot 3}e_3 = 0 \\ q_{2\cdot}^{\cdot 1}e_1 + (q_{2\cdot}^{\cdot 2} - q)e_2 + q_{2\cdot}^{\cdot 3}e_3 = 0 \\ q_{3\cdot}^{\cdot 1}e_1 + q_{3\cdot}^{\cdot 2}e_2 + (q_{3\cdot}^{\cdot 3} - q)e_3 = 0 \end{cases}. \tag{1.55}$$

Для определенности к эти трем уравнениям с четырьмя неизвестными q, e_1, e_2, e_3 необходимо добавить условие нормирования вектора **e** :

$$|\,\mathbf{e}\,| = 1 \quad \text{или} \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1.$$

Для того, чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений (1.55) имела отличные от нуля решения, ее определитель должен равняться нулю:

$$|\, q_{k\cdot}^{\cdot r} - q\delta_{k\cdot}^{\cdot r} \,| = \begin{vmatrix} q_{1\cdot}^{\cdot 1} - q & q_{1\cdot}^{\cdot 2} & q_{1\cdot}^{\cdot 3} \\ q_{2\cdot}^{\cdot 1} & q_{2\cdot}^{\cdot 2} - q & q_{2\cdot}^{\cdot 3} \\ q_{3\cdot}^{\cdot 1} & q_{3\cdot}^{\cdot 2} & q_{3\cdot}^{\cdot 3} - q \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрытие определителя приводит к кубическому (для $\Re_3$ и n - ного порядка в общем случае) уравнению относительно q, называемому *характеристическим уравнением*:

$$-q^3 + J_1(\hat{\mathbf{Q}})q^2 - J_2(\hat{\mathbf{Q}})q + J_3(\hat{\mathbf{Q}}) = 0. \tag{1.56}$$

Коэффициенты $J_k(\hat{\mathbf{Q}})$ $(k = \overline{1,3})$, называемые *главными инвариантами тензора* $\hat{\mathbf{Q}}$, определяются из соотношений:

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}) = q_{1\cdot}^{\cdot 1} + q_{2\cdot}^{\cdot 2} + q_{3\cdot}^{\cdot 3}; \quad J_2(\hat{\mathbf{Q}}) = \begin{vmatrix} q_{1\cdot}^{\cdot 1} & q_{1\cdot}^{\cdot 2} \\ q_{2\cdot}^{\cdot 1} & q_{2\cdot}^{\cdot 2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{2\cdot}^{\cdot 2} & q_{2\cdot}^{\cdot 3} \\ q_{3\cdot}^{\cdot 2} & q_{3\cdot}^{\cdot 3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_{3\cdot}^{\cdot 3} & q_{3\cdot}^{\cdot 1} \\ q_{1\cdot}^{\cdot 3} & q_{1\cdot}^{\cdot 1} \end{vmatrix};$$

$$J_3(\hat{\mathbf{Q}}) = \begin{vmatrix} q_{1\cdot}^{\cdot 1} & q_{1\cdot}^{\cdot 2} & q_{1\cdot}^{\cdot 3} \\ q_{2\cdot}^{\cdot 1} & q_{2\cdot}^{\cdot 2} & q_{2\cdot}^{\cdot 3} \\ q_{3\cdot}^{\cdot 1} & q_{3\cdot}^{\cdot 2} & q_{3\cdot}^{\cdot 3} \end{vmatrix}. \tag{1.57}$$

Пусть корнями уравнения (1.56) являются q_1, q_2, q_3. Тогда согласно теореме Вьета

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}) = q_1 + q_2 + q_3; \quad J_2(\hat{\mathbf{Q}}) = q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1; \quad J_3(\hat{\mathbf{Q}}) = q_1q_2q_3. \tag{1.58}$$

Заметим, что выражения (1.58) повторят соотношения (1.57), если принять $q_{k\cdot}^{\cdot k} = q_k$ (по k не суммировать) и $q_{r\cdot}^{\cdot k} = 0$ при $k \neq r$. После определения корней характеристического уравнения можно из системы (1.55) найти соответствующие этим корням собственные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Каждая пара значений $\mathbf{e}_k$ и q_k удовлетворяет уравнению (1.54). То есть

$$\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{e}_k = q_k \mathbf{e}_k.$$

Напомним, что по индексу k суммирование не производится, как по индексу, повторяющемуся в разных слагаемых (элементах различных сторон равенств).

Умножим обе части последнего равенства слева скалярно на $\mathbf{e}_r$. С учетом того, что главные векторы симметричного тензора взаимно ортогональны, (в курсе линейной алгебры это было доказано для самосопряженных операторов), получим

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{rk} q_k.$$

Преобразуем последнее равенство, приняв собственные векторы тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ за базис $\mathbf{e}^{\text{т}} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ рассматриваемого пространства:

$$\mathbf{e}_r \cdot q_{mn}\mathbf{e}^m\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_k = q_{mn}\delta_r^m\delta_k^n = q_{rk} = \delta_{rk}q_k.$$

Полученное соотношение указывает на то, что в ортонормированном базисе собственных векторов симметричного тензора его компоненты с одинаковыми индексами равны соответствующим главным значениям тензора, а компоненты с различными индексами равны нулю. Поэтому в базисе $\mathbf{e}^{\text{т}}$ тензор $\hat{\mathbf{Q}}$ представляется в виде суммы трех диад

$$\hat{\mathbf{Q}} = q_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} q_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k. \tag{1.59}$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть $q_1 = q_2 \neq q_3$. Тогда из (1.59) получим

$$\hat{\mathbf{Q}} = q_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) + (q_3 - q_1)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = q_1\hat{\mathbf{I}} + (q_3 - q_1)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Для записанного тензора характерным является лишь одно направление. Это направление, которое определяется вектором $\mathbf{e}_3$. Оставшиеся два направления, составляющие с вектором $\mathbf{e}_3$ ортонормированный базис, могут быть сориентированы в пространстве $\Re_3$ произвольно.

Пусть все три главные значения тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ равны q. Тогда

$$\hat{\mathbf{Q}} = q\hat{\mathbf{I}}.$$

Все направления пространства $\Re_3$ являются главными. Тензоры, обладающие таким свойством, называются *шаровыми*. Название связано с тем, что квадратичная форма, составленная из компонентов такого тензора, имеет равные коэффициенты при неизвестных и при ее равенстве некоторому фиксированному значению представляет собой сферу (шар).

Заметим, что несимметричный тензор второго ранга имеет неортогональные собственные векторы, а его главные значения представляют собой комплексные числа.

1.14 Теорема Кейли-Гамильтона

Найдем различные степени симметричного тензора второго ранга $\hat{\mathbf{Q}}$, представленного в базисе его собственных векторов в $\Re_3$:

$$\hat{\mathbf{Q}} = q_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} q_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k.$$

В этом разделе, как и в предыдущем, для удобства записи все индексы у компонентов тензоров и базисных векторов будем писать снизу.

Найдем квадрат тензора $\hat{\mathbf{Q}}$:

$$\hat{\mathbf{Q}}^2 = \sum_{k=1}^{3} q_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \cdot \sum_{r=1}^{3} q_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = \sum_{k=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} q_k q_r \delta_{kr} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_r =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} q_k^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = q_1^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + q_2^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + q_3^2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Продолжая далее получать последующие степени тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, придем к общей формуле для определения $\hat{\mathbf{Q}}^n$ симметричного тензора, представленного в базисе его собственных векторов:

$$\hat{\mathbf{Q}}^n = \sum_{k=1}^{3} q_k^n \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = q_1^n \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + q_2^n \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + q_3^n \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \tag{1.60}$$

Можно показать, что формула (1.60) справедлива при дробных и отрицательных значениях показателя степени n. Так

$$\hat{\mathbf{Q}}^{-1} = \sum_{k=1}^{3} q_k^{-1} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k; \qquad \hat{\mathbf{Q}}^{1/2} = \sum_{k=1}^{3} \sqrt{q_k} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k. \tag{1.61}$$

Запись второго соотношения (1.61) предполагает, что все главные значения тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ – неотрицательные числа.

Косвенной проверкой справедливости формул (1.61) являются следующие соотношения:

$$\hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1} = \hat{\mathbf{I}}; \qquad \hat{\mathbf{Q}}^{1/2} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{1/2} = (\hat{\mathbf{Q}}^{1/2})^2 = \hat{\mathbf{Q}}.$$

Используя формулу (1.60), запишем выражение

$$\hat{\mathbf{Q}}^3 = \sum_{k=1}^{3} q_k^3 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \tag{1.62}$$

и преобразуем его, воспользовавшись характеристическим уравнением (1.56) для q_k $(k = \overline{1,3})$:

$$-q_k^3 + J_1(\hat{\mathbf{Q}}) q_k^2 - J_2(\hat{\mathbf{Q}}) q_k + J_3(\hat{\mathbf{Q}}) = 0. \tag{1.63}$$

Подставим полученное из (1.63) выражение для q_k^3 в (1.62):

$$\hat{\mathbf{Q}}^3 = J_1(\hat{\mathbf{Q}})\sum_{k=1}^{3} q_k^2\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k - J_2(\hat{\mathbf{Q}})\sum_{k=1}^{3} q_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + J_3(\hat{\mathbf{Q}})\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k.$$

Отсюда, с учетом формулы (1.60), получим

$$-\hat{\mathbf{Q}}^3 + J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}}^2 - J_2(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}} + J_3(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}} = 0. \tag{1.64}$$

Последнее соотношение сформулируем в виде теоремы.

Теорема Кейли-Гамильтона. *Степени $\hat{\mathbf{Q}}^3, \hat{\mathbf{Q}}^2, \hat{\mathbf{Q}}$ и $\hat{\mathbf{Q}}^0 = \hat{\mathbf{I}}$ симметричного тензора второго ранга $\hat{\mathbf{Q}}$ связаны между собой такой же зависимостью, как степени q^3, q^2 и q его главных значений в характеристическом уравнении.*

Заметим, что соотношение (1.64) будет справедливо и для матрицы тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ и вообще для любой симметричной матрицы.

Теорема Кейли-Гамильтона имеет очевидное практическое значение. Соотношение (1.64) можно использовать для выражения любых целых (положительных и отрицательных) и дробных степеней тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ через $\hat{\mathbf{Q}}^2$, $\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{Q}}^0 = \hat{\mathbf{I}}$ и три главные инварианта этого тензора.

Так, из (1.64) непосредственно найдем

$$\hat{\mathbf{Q}}^3 = J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}}^2 - J_2(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}} + J_3(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}}. \tag{1.65}$$

Умножим обе части (1.65) на $\hat{\mathbf{Q}}$ скалярно

$$\hat{\mathbf{Q}}^4 = J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}}^3 - J_2(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}}^2 + J_3(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}}$$

и подставим в полученную зависимость вместо $\hat{\mathbf{Q}}^3$ выражение (1.65). После приведения подобных получим

$$\hat{\mathbf{Q}}^4 = [J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) - J_2(\hat{\mathbf{Q}})]\hat{\mathbf{Q}}^2 + [J_3(\hat{\mathbf{Q}}) - J_1(\hat{\mathbf{Q}})J_2(\hat{\mathbf{Q}})]\hat{\mathbf{Q}} + J_1(\hat{\mathbf{Q}})J_3(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}}.$$

Дальнейшая процедура получения $\hat{\mathbf{Q}}^n$ очевидна, хотя и громоздка.

Для получения тензора отрицательной степени умножим (1.64) на $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$. Из полученного выражения найдем

$$\hat{\mathbf{Q}}^{-1} = \frac{1}{J_3(\hat{\mathbf{Q}})}[\hat{\mathbf{Q}}^2 - J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}} + J_2(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}}]. \tag{1.66}$$

Умножим (1.66) на $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$ и подставим в полученное выражение вместо $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$ зависимость (1.66). После преобразования получим

$$\hat{\mathbf{Q}}^{-2} = \frac{1}{J_3^2(\hat{\mathbf{Q}})}\{J_2(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{Q}}^2 + [J_3(\hat{\mathbf{Q}}) - J_1(\hat{\mathbf{Q}})J_2(\hat{\mathbf{Q}})]\hat{\mathbf{Q}} + [J_2^2(\hat{\mathbf{Q}}) - J_1(\hat{\mathbf{Q}})J_3(\hat{\mathbf{Q}})]\hat{\mathbf{I}}\}. \tag{1.67}$$

Теорема Кейли-Гамильтона, доказанная для симметричных тензоров второго ранга, остается справедливой и для несимметричных тензоров [1].

1.15 Соотношения между главными инвариантами тензоров различных степеней

Найдем первый инвариант тензора $\hat{\mathbf{Q}}^2$:

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2) = tr\hat{\mathbf{Q}}^2 = \sum_{k=1}^{3} q_k^2 \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{3} q_k^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \tag{1.68}$$

Аналогично для первого инварианта тензора $\hat{\mathbf{Q}}^n$ получим

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^n) = tr\hat{\mathbf{Q}}^n = \sum_{k=1}^{3} q_k^n = q_1^n + q_2^n + q_3^n. \tag{1.69}$$

Выразим второй инвариант тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ (1.58)

$$J_2(\hat{\mathbf{Q}}) = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1 \tag{1.70}$$

через его первый инвариант (1.58) и инвариант $J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2)$, определяемый формулой (1.68). Для этого возведем (1.58) в квадрат и затем воспользуемся зависимостями (1.58) и (1.68):

$$J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2q_1q_2 + 2q_2q_3 + 2q_3q_1 = J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2) + 2J_2(\hat{\mathbf{Q}}).$$

Отсюда получим формулу, связывающую второй инвариант тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ с первыми инвариантами этого тензора и тензора $\hat{\mathbf{Q}}^2$:

$$J_2(\hat{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}\left[J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) - J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2)\right]. \tag{1.71}$$

Выразим главные инварианты тензора $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$ через главные инварианты тензора $\hat{\mathbf{Q}}$. Из (1.66) имеем

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}) = \frac{1}{J_3(\hat{\mathbf{Q}})}\left[J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2) - J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) + 3J_2(\hat{\mathbf{Q}})\right].$$

Подставляя сюда найденное из (1.71) значение

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2) = J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) - 2J_2(\hat{\mathbf{Q}}),$$

получим

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}) = \frac{J_2(\hat{\mathbf{Q}})}{J_3(\hat{\mathbf{Q}})}. \tag{1.72}$$

Ссылаясь снова на (1.71), запишем:

$$J_2(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}) = \frac{1}{2}\left[J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}) - J_1(\hat{\mathbf{Q}}^{-2})\right].$$

Подставляя в это соотношение (1.72) и найденное из (1.67) выражение для $J_1(\hat{\mathbf{Q}}^{-2})$, после преобразований придем к формуле

$$J_2(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}) = \frac{J_1(\hat{\mathbf{Q}})}{J_3(\hat{\mathbf{Q}})}.$$

Наконец, выражение для третьего инварианта тензора $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$ запишем, ссылаясь на свойства определителей обратных матриц:

$$J_3(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}) = \frac{1}{J_3(\hat{\mathbf{Q}})}.$$

Можно показать, что любые инварианты тензоров различных степеней могут быть представлены через их главные инварианты. То есть, тензор второго ранга в $\Re_3$ имеет только три независимых инварианта.

1.16 Девиатор и шаровой тензор

Изотропный тензор $\frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}}$ называется *шаровой частью тензора* $\hat{\mathbf{Q}}$. Тензор, оставшийся после выделения из $\hat{\mathbf{Q}}$ шаровой части, называется *девиатором* $\hat{\mathbf{Q}}$ и обозначается $\hat{\mathbf{Q}}' \equiv dev\hat{\mathbf{Q}}$ от английского *deviate* – отклонение:

$$dev\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}} - \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}}.$$

Таким образом, любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы его шаровой части и девиатора:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}} + dev\hat{\mathbf{Q}}.$$

Найдем главные значения и главные инварианты $dev\hat{\mathbf{Q}}$. Обозначим главные значения девиатора через γ. Характеристическое уравнение для их определения запишется в виде

$$\left| q_{k\cdot}^{\cdot r} - \delta_{k\cdot}^{\cdot r}\left[\gamma + \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})\right]\right| = 0.$$

Главные значения γ_m $(m = \overline{1,3})$ девиатора, получаемые из кубического характеристического уравнения, связаны с главными значениями q_m тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ соотношением

$$\gamma_m = q_m - \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})$$

или

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}(2q_1 - q_2 - q_3);\ \gamma_2 = \frac{1}{3}(2q_2 - q_3 - q_1);\ \gamma_3 = \frac{1}{3}(2q_3 - q_1 - q_2). \quad (1.73)$$

Главные направления $dev\hat{\mathbf{Q}}$ совпадают с главными направлениями тензора $\hat{\mathbf{Q}}$. Действительно, из равенства (1.54)

$$\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e} = \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{e} + dev\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e} = q\mathbf{e}$$

следует

$$dev\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e} = \left[q - \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})\right]\mathbf{e} = \gamma\mathbf{e}. \quad (1.74)$$

То есть, вектор $\mathbf{e}$, удовлетворяющий уравнению (1.54), удовлетворяет также уравнению (1.74).

Найдем инварианты девиатора, используя формулы (1.58). Имея в виду равенства (1.73), получим

$$J_1(dev\hat{\mathbf{Q}}) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0;$$

$$J_2(dev\hat{\mathbf{Q}}) = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 = J_2(\hat{\mathbf{Q}}) - \frac{1}{3}J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}); \quad (1.75)$$

$$J_3(dev\hat{\mathbf{Q}}) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = J_3(\hat{\mathbf{Q}}) - \frac{1}{3}J_1(\hat{\mathbf{Q}})J_2(\hat{\mathbf{Q}}) + \frac{2}{27}J_1^3(\hat{\mathbf{Q}}).$$

Подставляя в (1.75) вместо $J_1(\hat{\mathbf{Q}})$ и $J_2(\hat{\mathbf{Q}})$ их выражения (1.58) через главные значения q_m тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, можно прийти к зависимости

$$J_2(dev\hat{\mathbf{Q}}) = -\frac{1}{6}\left[(q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_1)^2\right].$$

Отсюда следует, что $J_2(dev\hat{\mathbf{Q}}) \le 0$.

В механике деформируемого твердого тела наряду с тремя главными инвариантами тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ и его девиатора часто используется другая тройка инвариантов. В их число входит первый инвариант $J_1(\hat{\mathbf{Q}})$ тензора; инвариант

$$\Gamma = \sqrt{-J_2(dev\hat{\mathbf{Q}})}, \tag{1.76}$$

называемый интенсивностью тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, и инвариант ψ, называемый углом вида состояния, определяемого этим тензором. Угол ψ находится из характеристического уравнения для девиатора тензора $dev\hat{\mathbf{Q}}$, которое можно привести к кубическому уравнению

$$\gamma^3 - \Gamma^2\gamma = J_3(dev\hat{\mathbf{Q}}). \tag{1.77}$$

Решение уравнения (1.77) удобно представлять в тригонометрической форме

$$\gamma = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin\psi. \tag{1.78}$$

Подставим это решение в (1.77)

$$\frac{2\Gamma^3}{3\sqrt{3}}(4\sin^3\psi - \sin\psi) = J_3(\mathrm{dev}\hat{\mathbf{Q}})$$

или

$$-\frac{2\Gamma^3}{3\sqrt{3}}\sin 3\psi = J_3(dev\hat{\mathbf{Q}}).$$

Отсюда для ψ получаем три значения

$$\psi + \frac{2\pi}{3}k = \frac{1}{3}\arcsin\left[-\frac{3\sqrt{3}J_3(dev\hat{\mathbf{Q}})}{2\Gamma^3}\right] \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Каждому из значений "k" соответствует свое выражение (1.78) для γ :

$$\gamma_1 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin\psi; \qquad \gamma_2 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin(\psi + \frac{2\pi}{3}); \qquad \gamma_3 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}}\sin(\psi + \frac{4\pi}{3}).$$

Выбор при решении задач $J_1(\hat{\mathbf{Q}}), \Gamma$ и ψ в качестве инвариантов связан с их четким геометрическим и физическим смыслом. Так, для тензора деформации $\hat{\mathbf{E}}$ $J_1(\hat{\mathbf{E}})$ отвечает за изменение объема тела, $\Gamma(\hat{\mathbf{E}})$ – за изменение его формы, а инвариант $\psi(\hat{\mathbf{E}})$ ответственен за вид деформированного состояния. Каждому из различных видов деформации (растяжение, сжатие, сдвиг) соответствуют свои конкретные значения $\psi \in [-\pi/6, \pi/6]$.

1.17 Полярное разложение тензора

В разделе (1.16) дано часто используемое в приложениях представление симметричного тензора в виде суммы его шаровой и девиаторной составляющих.

Рассмотрим еще одно используемое в приложениях представление, применимое к невырожденным (отличный от нуля определитель матрицы тензора) и, в общем, несимметричным тензорам. Пусть таковым является тензор $\hat{\mathbf{T}}$.

Теорема 1.*Произвольный тензор второго ранга можно представить в виде скалярного произведения симметричного тензора и тензора поворота:*

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}\cdot\hat{\mathbf{S}} \qquad \text{или} \qquad \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}}. \tag{1.79}$$

Доказательство справедливости теоремы можно найти в специальной литературе по тензорному исчислению. В данном пособии ограничимся лишь некоторыми пояснениями.

В оба соотношения (1.79) входит один и тот же тензор $\hat{\mathbf{S}}$, являющийся тензором поворота. Кроме этого тензора рассматриваемые соотношения содержат $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ – левый и $\hat{\mathbf{\Pi}}$ – правый (по их положению в соотношениях (1.79)) положительно определенные (имеющие положительные главные значения) симметричные тензоры. Положительность и симметрия упомянутых тензоров вытекают из получаемых с использованием (1.79) соотношений:

$$\hat{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}^2 \Longrightarrow \hat{\mathbf{\Lambda}} = (\hat{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}})^{1/2}; \qquad \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1}\cdot\hat{\mathbf{T}};$$

$$\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{\Pi}}^2 \Longrightarrow \hat{\mathbf{\Pi}} = (\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{T}})^{1/2}; \qquad \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}}^{-1}.$$

Таким образом, все вновь введенные тензоры определяются по исходному тензору $\hat{\mathbf{T}}$.

Равенство правых частей выражения (1.79) одному и тому же тензору $\hat{\mathbf{T}}$ дает возможность установить зависимость между тензорами $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}} = \hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}}\cdot\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} \qquad \text{и} \qquad \hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{\Lambda}}\cdot\hat{\mathbf{S}}.$$

Если рассмотренные тензоры наделить физическим смыслом, например, считать $\hat{\mathbf{T}}$ тензором деформации, то $\hat{\mathbf{S}}$ будет описывать поворот элемента деформируемого тела как жесткого целого, а тензоры $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$ – искажение тела или собственно деформацию. Поэтому тензоры $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$ называют левым и правым тензорами искажения.

Теорема 2. *Главные значения левого и правого тензоров искажения совпадают.*

Для доказательства теоремы найдем необходимые для этого главные инварианты тензоров $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$:

$$J_1(\hat{\mathbf{\Lambda}}) = \left(\hat{\mathbf{T}}:\hat{\mathbf{T}}^{\text{т}}\right)^{1/2} = \left(\hat{\mathbf{T}}^{\text{т}}:\hat{\mathbf{T}}\right)^{1/2} = J_1(\hat{\mathbf{\Pi}});$$

$$J_1(\hat{\mathbf{\Lambda}}^2) = \hat{\mathbf{T}}:\hat{\mathbf{T}}^{\text{т}} = \hat{\mathbf{T}}^{\text{т}}:\hat{\mathbf{T}} = J_1(\hat{\mathbf{\Pi}}^2).$$

Обозначим собственные значения левого и правого симметричных (!) тензоров искажения через λ_k и π_k $(k = \overline{1,3})$, а собственные направления соответственно $\mathbf{e}_k$ и $\tilde{\mathbf{e}}_k$. Представим $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$ в базисе их собственных векторов:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k; \qquad \hat{\mathbf{\Pi}} = \sum_{k=1}^{3} \pi_k \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k;$$

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}^2 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k; \qquad \hat{\mathbf{\Pi}}^2 = \sum_{k=1}^{3} \pi_k^2 \tilde{\mathbf{e}}_k \tilde{\mathbf{e}}_k.$$

Из последних выражений следует:

$$J_1(\hat{\mathbf{\Lambda}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \qquad J_1(\hat{\mathbf{\Pi}}) = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3;$$

$$J_1(\hat{\mathbf{\Lambda}}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \qquad J_1(\hat{\mathbf{\Pi}}^2) = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2.$$

Для вторых инвариантов с учетом соотношения (1.71) получим

$$J_2(\hat{\mathbf{\Lambda}}) = \frac{1}{2}\left(J_1^2(\hat{\mathbf{\Lambda}}) - J_1(\hat{\mathbf{\Lambda}}^2)\right) = \frac{1}{2}\left(J_1^2(\hat{\mathbf{\Pi}}) - J_1(\hat{\mathbf{\Pi}}^2)\right) = J_2(\hat{\mathbf{\Pi}}).$$

Третьи инварианты тензоров также равны в силу очевидного равенства

$$J_3(\hat{\mathbf{\Lambda}}) = det\hat{\mathbf{\Lambda}} = (det\hat{\mathbf{T}})^{1/2}(det\hat{\mathbf{T}}^{\text{т}})^{1/2} = det\hat{\mathbf{\Pi}} = J_3(\hat{\mathbf{\Pi}}).$$

Если главные инварианты тензоров $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ и $\hat{\mathbf{\Pi}}$, педставляющие собой коэффициенты двух кубических характеристических уравнений

$$-\lambda^3 + J_1(\hat{\mathbf{\Lambda}})\lambda^2 - J_2(\hat{\mathbf{\Lambda}})\lambda + J_3(\hat{\mathbf{\Lambda}}) = 0,$$

$$-\pi^3 + J_1(\hat{\mathbf{\Pi}})\pi^2 - J_2(\hat{\mathbf{\Pi}})\pi + J_3(\hat{\mathbf{\Pi}}) = 0,$$

равны, то равны и решения этих уравнений. То есть

$$\lambda_k = \pi_k \qquad (k = \overline{1,3}).$$

1.18 Вектор тензора

Определение. *Вектором* $\mathbf{q}_n$ *симметричного тензора второго ранга* $\hat{\mathbf{Q}}$, *действующего на площадке пространства* $\Re_3$, *называется скалярное произведение этого тензора слева на вектор единичной нормали* $\mathbf{n}$ *к этой площадке:*

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{Q}}.$$

Проекцию вектора $\mathbf{q}_n$ на направление нормали $\mathbf{n}$ можно определить из выражения

$$q_{nn} = \mathbf{q}_n\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n}.$$

Нормальная составляющая вектора тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ представляется в виде

$$\mathbf{q}_{nn} = q_{nn}\mathbf{n} = (\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Касательная составляющая этого вектора, действующая вдоль орта $\boldsymbol{\tau}$, $(\boldsymbol{\tau}\perp\mathbf{n})$ определяется вектором

$$\mathbf{q}_{n\tau} = \mathbf{q}_n - q_{nn}\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{Q}} - (\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = q_{n\tau}\boldsymbol{\tau}. \tag{1.80}$$

Так что

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{nn} + \mathbf{q}_{n\tau}.$$

Отметим, что вектор $\mathbf{q}_{n\tau}$ может быть найден из выражения

$$\mathbf{q}_{n\tau} = (\mathbf{n}\times\mathbf{q}_n)\times\mathbf{n} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{q}_n - (\mathbf{q}_n\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Это равенство, очевидно, равносильно соотношению (1.80).

В частном случае, если площадка выбрана таким образом, что $\mathbf{n}$ совпадает с одним из собственных векторов $\mathbf{e}_k$ тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, то

$$\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n} = \hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e}_k = q_k\mathbf{e}_k,$$

где $q_k = q_{nn}$ – модуль вектора тензора на рассматриваемой площадке и $q_{n\tau} = 0$.

1.19 Тензорные поверхности

В курсе линейной алгебры рассматривалось представление общего уравнения поверхностей второго порядка в операторной форме. В частности, квадратичная форма $K = A_{kn}x^k x^n$ представлялась в виде скалярного произведения вектора $\mathbf{x}$ на вектор $A\mathbf{x}$ (A – самосопряженный оператор).

В тензорной алгебре роль самосопряженного оператора играет симметричный тензор второго ранга $\mathbf{A}$. В частности, уравнение

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = 1$$

в ортонормированном базисе $\mathbf{i}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_n)$ приводится к скалярному виду (записывается в координатной форме)

$$A_{kr}x^k x^r = 1$$

и определяет собой некоторую гиперповерхность в $\Re_n$.

Используя процедуру отыскания собственных направлений тензора $\mathbf{A}$, можно найти в $\Re_n$ такой ортонормированный базис $\mathbf{e}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\cdots\mathbf{e}_n)$, в котором тензор $\mathbf{A}$ будет представлен его собственными значениями $A_1, A_2 \ldots A_n$. Пусть в базисе собственных значений тензора $\mathbf{A}$ вектор $\mathbf{x} = \bar{x}^k\mathbf{e}_k$. Тогда последнее уравнение перепишется в каноническом виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\bar{x}_k\bar{x}_k = 1.$$

В частности, для эллипсоида в $\Re_n$ получим уравнение:

$$\frac{\bar{x}_1^2}{a_1^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{\bar{x}_n^2}{a_n^2} = 1,$$

где $a_k^2 = 1/A_k \quad (k = \overline{1,n})$.

Конечно, в уравнении для "эллипсоида" не все числа, стоящие в знаменателе, будут положительными. Однако, в физических приложениях наибольшее распространение находят положительно определенные тензоры, у которых, как ранее отмечалось, все собственные значения положительны. Например, для тензора напряжений, широко используемого в механике деформируемых сред, тензорная поверхность в виде эллипсоида определяет поле равных напряжений.

Вопросы для самоконтроля к гл. 1

1. В чем заключается инвариантность вектора? Скаляра?

2. Тензор (вектор) является величиной, инвариантной по отношению к преобразованию базиса. Почему его координаты изменяются при преобразовании базиса?

3. Как перейти от операторной записи к координатно-индексной?

4. Какие правила необходимо соблюдать в расстановке свободных и немых индексов в выражениях, связывающих тензорные величины?

5. Какими признаками должен обладать математический объект, чтобы его можно было считать тензором?

6. Как можно представить тензор в заданном базисе?

7. Как преобразуется тензор при преобразовании базиса? А его компоненты?

8. Как образовать диаду векторов? Полиаду?

9. Чем определяется ранг тензора? Существуют ли способы понижения ранга тензора?

10. Как располагаются диады базисных векторов с одинаковыми индексами по отношению к координатным плоскостям? С различными?

11. Как определить ранг тензора, образованного скалярным, векторным или неопределенным произведениями двух тензоров?

12. Как найти след тензора?

13. Как связан след тензора с инвариантами тензора?

14. Как можно в матричном виде представить тензорные уравнения, связывающие тензоры произвольных рангов?

15. Как образуются степени тензоров?

16. Как осуществить симметрирование и альтернирование тензоров?

17. Как образуется вектор, сопутствующий тензору? Для каких тензоров он будет существовать?

18. Какие зависимости приводят к установлению связи между символами Кронекера и Леви-Чивита?

19. Что такое изотропный тензор? Связано ли количество независимых изотропных тензоров с их рангом?

20. Может ли быть обратный тензор несимметричным?

21. Как осуществить жесткий поворот тензора второго ранга? Вектора?

22. Как найти тензор, обратный к тензору поворота?

23. Сколько существует главных значений у тензора? Главных направлений?

24. Можно ли однозначно определить собственные направления шарового тензора?

25. В чем смысл теоремы Кейли-Гамильтона? Как воспользоваться соотношениями, связанными с этой теоремой для нахождения тензоров n-ной степени?

26. Как можно возвести в степень тензор, представленный его компонентами в собственном базисе?

27. Сколько независимых инвариантов может иметь тензор второго ранга? Первого?

28. Для чего следует разбивать тензор на сумму шарового тензора и девиатора?

29. В чем смысл полярного разложения тензора?

30. Что такое вектор тензора?

31. Что такое тензорная поверхность? Тензорный эллипсоид?

Глава 2

Тензорная алгебра в криволинейных ортогональных и косоугольных координатах

2.1 Преобразование произвольных систем координат

В практических задачах математического описания явлений и процессов, протекающих в реальном, осязаемом нами мире, точкам пространства можно поставить в соответствие некоторые числа. Так, в пространстве $\Re_1$ положение точки, находящейся на прямой или на одномерной кривой, определяется числом (координатой точки), равным расстоянию до этой точки от некоторого фиксированного начала отсчета (длина дуги для кривой). В $\Re_2$ положение точки однозначно описывается парой чисел (координатами точки), в $\Re_3$ – тройкой, а в $\Re_n$ – количество координат равно n.

Чаще всего на практике используются рассмотренные в главе 1 прямолинейные взаимно ортогональные упорядоченные системы координат (декартовы координаты). Наряду с декартовыми достаточно широкое распространение находят и другие системы координат: полярная для $\Re_2$, цилиндрическая и сферическая для $\Re_3$, произвольная криволинейная для $\Re_n$ (при любых n).

Выбор подходящей для исследования системы координат во многом зависит от характера решаемых задач. Неразумно, например, при исследовании процесса деформирования цилиндра, находящегося под воздействием осесимметричной нагрузки, использовать нецилиндрическую систему координат, ибо в противном случае вместо двумерной задачи исследователю придется иметь дело с решением трехмерной задачи.

При решении задач, связанных с движением сред, обойтись одной системой координат, как правило, не удается. В этом случае приходится вводить дополнительную систему координат, а порой и не одну. Например, при исследовании движения тела одна система координат связывается с этим телом, а другая фиксируется в его начальном положении (в положении наблюдателя, исследующего движение). При описании процесса деформирования сплошных сред одна система координат может быть связана с начальным положением среды, а вторая "вмораживается" в среду и деформируется вместе с ее частицами. Одно из основных требований, предъявляемых к выбору систем координат, – это требование их невырожденности (например, три координаты пространства $\Re_3$ не должны иметь общей касательной плоскости ни в одной точке пространства). Это требование связано с выполнением условия *гомеоморфности*, то есть условия того, что точки пространства и их координаты связаны между собой взаимно однозначно.

Рассмотрим две системы координат в пространстве $\Re_n$:

$$X^{\text{т}} = (x^1 x^2 \dots x^n) \quad \text{и} \quad Z^{\text{т}} = (\zeta^1 \zeta^2 \dots \zeta^n).$$

При выполнении требования гомеоморфности между введенными координатами, характеризующими одинаковые точки пространства, должна быть гомеоморфная связь. То есть одновременно должны существовать две однозначные зависимости

$$x^k = x^k(\zeta^1 \zeta^2 \dots \zeta^n) \quad \text{и} \quad \zeta^k = \zeta^k(x^1 x^2 \dots x^n) \quad (k = \overline{1,n}).$$

Будем считать (это вполне естественно и не накладывает никаких ограничений на описываемые процессы), что функция x^k непрерывна вместе со всеми своими производными по совокупности аргументов $\zeta^1 \zeta^2 \dots \zeta^n$, а ζ^k – по $x^1 x^2 \dots x^n$.

Введенное предположение позволяет установить связь между бесконечно малыми приращениями координат двух систем:

$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \zeta^r}\, d\zeta^r \qquad \text{и} \qquad d\zeta^r = \frac{\partial \zeta^r}{\partial x^k}\, dx^r \qquad (k, r = \overline{1,n}). \tag{2.1}$$

Следуя принятым выше обозначениям для матриц координат, которые для их дифференциалов записываются в виде

$$dX^{\text{т}} = (dx^1 dx^2 \dots dx^n) \qquad \text{и} \qquad dZ^{\text{т}} = (d\zeta^1 d\zeta^2 \dots d\zeta^n),$$

и вводя обозначения для квадратных матриц производных, стоящих множителями у дифференциалов (2.1)

$$A = (a^{k\cdot}_{\cdot r}) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \zeta^r}\right), \qquad B = (b^{k\cdot}_{\cdot r}) = \left(\frac{\partial \zeta^r}{\partial x^k}\right),$$

перепишем (2.1) в матричной форме:

$$dX = AdZ, \qquad dZ = BdX.$$

Напомним, что индекс, стоящий первым у элементов матриц, обозначает номер строки, а вторым – номер столбца матрицы, на пересечении которых находится этот элемент.

В силу гомеоморфности отображений одной системы координат в другую матрицы A и B должны быть невырожденными. В этом случае их определители отличны от нуля:

$$\det A = |a^{k\cdot}_{\cdot r}| \neq 0, \qquad \det B = |b^{k\cdot}_{\cdot r}| \neq 0.$$

Найдем произведение матриц A и B:

$$AB = (a^{k\cdot}_{\cdot r} d^{r\cdot}_{\cdot m}) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \zeta^r}\frac{\partial \zeta^r}{\partial x^m}\right) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^m}\right) = (\delta^k_m) = I.$$

Из последнего равенства, согласно определению обратных матриц, следует

$$A = B^{-1}, \quad B = A^{-1}.$$

Кроме того,

$$\det(AB) = \det A \det B = I.$$

Отсюда находим

$$\det A = 1/\det B.$$

Определители матриц A и B называют якобианами (J) преобразования.

Таким образом, для обеспечения гомеоморфности отображения одной координатной системы в другую необходимо, чтобы якобиан преобразования координат был отличен от нуля.

2.2 Базисные векторы криволинейных координат

Пусть $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки M, принадлежащей некоторой кривой. Обозначим через ζ координату произвольной точки этой кривой, отсчитываемую от некоторой ее фиксированной точки (например, M) (рис. 2.1,a).

Пусть при переходе от точки M кривой к точке M_1 координата ζ получает приращение $\Delta\zeta$. При этом радиус-вектор точки изменится на величину $\Delta\mathbf{R}$.

Определение. *Производной вектора по криволинейной координате называется предел отношения приращения вектора к приращению координаты при стремлении последнего к нулю:*

$$\mathbf{R}_\zeta = \lim_{\Delta\zeta\to 0}\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\zeta} = \frac{d\mathbf{R}}{d\zeta}.$$

Очевидно, $\mathbf{R}_\zeta$ – вектор, касательный к кривой в точке с координатой ζ.

Пусть задана криволинейная в общем случае система координат X. Введем n векторов, касательных к координатным линиям x_k:

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x^k}. \tag{2.2}$$

На рис.2.1,b изображены базисные векторы, определяемые по радиусу-вектору $d\mathbf{R}$ в пространстве $\Re_2$. Базисные векторы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ линейно независимы, так как при "стягивании" координатных линий к точке их пересечения $\Delta\mathbf{R}_1$ и $\Delta\mathbf{R}_2$ становятся касательными векторами $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ к соответствующим координатным линиям.

В общем случае криволинейных координат векторы $\mathbf{R}_k$ различны для разных точек пространства. Исключение составляют *аффинные системы координат* – так называют прямолинейные, не обязательно ортогональные, координаты. В частном случае декартовых координат x^k векторы $\mathbf{R}_k$ могут представлять собой ортонормированный базис

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x^k}.$$

Последнее утверждение следует из того, что приращения радиуса-вектора в направлении прямых, которые в этом случае представляют собой координатные линии, лежат на этих прямых, а размерность модуля радиуса-вектора рассматриваемого пространства совпадает с размерностью координатных линий.

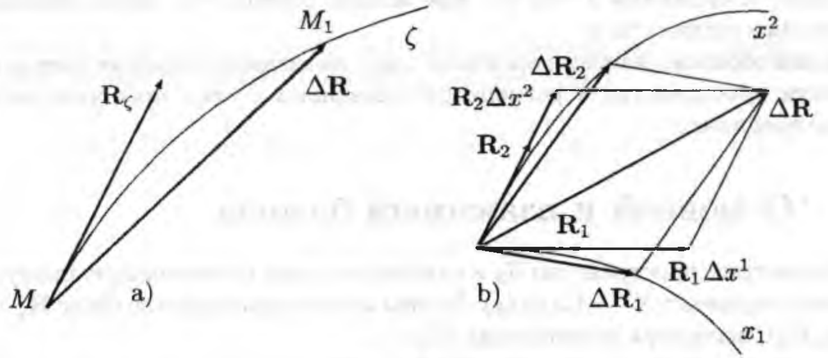

Рис. 2.1: Базисные векторы криволинейных координат

Для углубления понимания смысла базисных векторов, связанных с координатами, рассмотрим одномерное линейное пространство, положение точек которого определяется прямолинейной координатой x (рис. 2.2,a).

Рассмотрим в этом пространстве вектор $\Delta\mathbf{R}$, модуль (длина) которого определяется двумя единицами измерения координаты x. То есть $\Delta x = 2$. Тогда

$$\mathbf{R}_x = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta x} = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{R}.$$

Модуль $\mathbf{R}_x$ в этом случае будет равен единице размерности координаты x.

Получим новую координату $\bar{x}$ путем двукратного растяжения исходной координаты x (рис. 2.2,b). При сохранении длины вектора $\Delta\mathbf{R}$ базисный вектор $\mathbf{R}_{\bar{x}}$, связанный с координатой $\bar{x}$, увеличится при этом по сравнению с $\mathbf{R}_x$ в два раза, так как $\Delta\bar{x} = 1$. Тогда

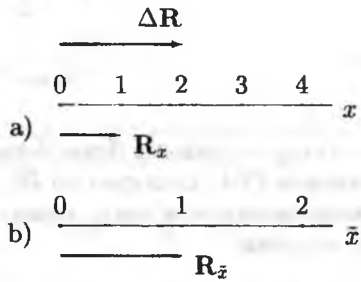

Рис. 2.2: Длина базисных векторов

$$\mathbf{R}_{\bar{x}} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta\bar{x}} = \Delta\mathbf{R}.$$

Ясно, что $\mathbf{R}_{\bar{x}} \neq \mathbf{R}_x$. Тем не менее, модуль вектора $\mathbf{R}_{\bar{x}}$ равен единице измерения координаты $\bar{x}$ так же, как модуль вектора $\mathbf{R}_x$ равен единице измерения координаты x.

Таким образом, базисные векторы ставят во взаимное соответствие размерности пространства и размерности связанных с этим пространством систем координат.

2.3 Основной и взаимный базисы

Рассмотрим пространство $\Re_3$ и связанную с ним произвольную правую систему координат $X^{\mathrm{T}} = (x_1 x_2 x_3)$. Введем в этом пространстве базис $\mathbf{R}_*^{\mathrm{T}} = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3)$, используя соотношения (2.2).

Определим объем V_* параллелепипеда, построенного на векторах введенного базиса ($V_* > 0$) :

$$V_* = \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3). \tag{2.3}$$

Базис $\mathbf{R}_*^{\mathrm{T}}$ будем называть *основным базисом* неортогональной в общем случае системы координат.

Наряду с основным базисом введем *взаимный базис* $\mathbf{R}^{*\mathrm{T}} = (\mathbf{R}^1 \mathbf{R}^2 \mathbf{R}^3)$, определяемый соотношением

$$\mathbf{R}^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kmr} (\mathbf{R}_m \times \mathbf{R}_r), \tag{2.4}$$

где

$$\epsilon^{kmr} = \frac{1}{V_*} e^{kmr}$$

($e^{kmr} = e_{kmr}$ – символы Леви-Чивита).

Умножая (2.4) скалярно на $\mathbf{R}_s$ и учитывая свойства смешанного произведения векторов и связь между символами Кронекера и Леви-Чивита (1.44), получим

$$\mathbf{R}^k \cdot \mathbf{R}_s = \frac{1}{2V_*} e^{kmr} (\mathbf{R}_m \times \mathbf{R}_r) \cdot \mathbf{R}_s = \frac{1}{2V_*} e^{kmr} e_{mrs} V_* = \delta_s^k. \tag{2.5}$$

Запишем выражение для объема V^* параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса, и преобразуем это выражение с учетом (2.3), (2.4) и свойств двойного векторного произведения:

$$V^* = \mathbf{R}^1 \cdot (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3) = \frac{1}{V_*^2} \mathbf{R}^1 \cdot [(\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1) \times (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)] =$$

$$= \frac{1}{V_*^2}\mathbf{R}^1\cdot[(\mathbf{R}_3\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2))\mathbf{R}_1 - (\mathbf{R}_1\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2))\mathbf{R}_3] = \frac{1}{V_*^2}\mathbf{R}^1\cdot V_*\mathbf{R}_1 = \frac{1}{V_*}.$$

Имея в виду (2.5), покажем, что базис, взаимный по отношению к взаимному, является основным базисом. Действительно:

$$\frac{1}{V^*}\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^3 = \frac{1}{V_*}[(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_1)\times(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)] = \frac{V_*}{V_*}\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1 \qquad \text{и т.д.}$$

То есть

$$\mathbf{R}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kmr}\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^r,$$

где

$$\epsilon_{kmr} = \frac{1}{V^*}e_{kmr}.$$

Подчеркнем, что основной и взаимный базисы порождены одной системой координат.

2.4 Преобразование векторов базиса при преобразовании координат

Предположим, что в $\Re_n$ имеются две системы координат: "старая" $X^\tau = (x_k)$ и "новая" $Z^\tau = (\zeta_m)$ $(k, m = \overline{1, n})$. Введем, следуя (2.2), "старый" $\mathbf{R}_k$ и "новый" $\tilde{\mathbf{R}}_m$ базисы:

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x^k}, \qquad \tilde{\mathbf{R}}_m = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\zeta^m}. \tag{2.6}$$

Учитывая существование гомеоморфности между координатами X и Z (раздел (2.1)), установим связь между базисными векторами (2.6):

$$\tilde{\mathbf{R}}_m = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\zeta^m} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\zeta^m} = \mathbf{R}_k a^{k\cdot}_{\cdot m} \qquad \text{или} \qquad \tilde{\mathbf{R}}_* = \mathbf{R}_* A;$$

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x^k} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\zeta^m}\frac{\partial\zeta^m}{\partial x^k} = \tilde{\mathbf{R}}_m b^{m\cdot}_{\cdot k} \qquad \text{или} \qquad \mathbf{R}_* = \tilde{\mathbf{R}}_* B.$$

При записи последних соотношений использованы обозначения раздела (2.1), из которых следует, что коэффициенты $a^{k\cdot}_{\cdot m}$ образуют матрицу A, которую можно назвать матрицей прямого преобразования базисов, то есть преобразования перехода от старого базиса к новому. Аналогично, коэффициенты $b^{m\cdot}_{\cdot k}$ образуют матрицу B, которую можно назвать матрицей обратного преобразования.

Несмотря на очевидную связь матриц A и $B = A^{-1}$ с матрицей S преобразования одного ортонормированного базиса в другой (раздел (1.1)), не следует отождествлять эти матрицы. Дело в том, что только в ортонормированном базисе матрицы A и B становятся ортогональными. В произвольном базисе они таковыми не будут.

Установим связь между векторами взаимных базисов старой $\mathbf{R}^k$ и новой $\tilde{\mathbf{R}}^m$ систем координат. Разложим вектор $\tilde{\mathbf{R}}^m$ по взаимному базису старой системы координат: $\mathbf{R}^{*\tau} = (\mathbf{R}^1\mathbf{R}^2\mathbf{R}^3)$:

$$\tilde{\mathbf{R}}^m = c^{m\cdot}_{\cdot l}\mathbf{R}^l.$$

Умножим скалярно представленное разложение на вектор $\tilde{\mathbf{R}}_r$ основного базиса и преобразуем полученное выражение

$$\delta^m_r = \tilde{\mathbf{R}}^m \cdot \tilde{\mathbf{R}}_r = c^{m\cdot}_{\cdot p}\mathbf{R}^p \cdot a^{s\cdot}_{\cdot r}\mathbf{R}_s = c^{m\cdot}_{\cdot p}a^{s\cdot}_{\cdot r}\delta^p_s = c^{m\cdot}_{\cdot p}a^{p\cdot}_{\cdot r}.$$

То есть

$$c^{m\cdot}_{\cdot p}a^{p\cdot}_{\cdot r} = \delta^m_r.$$

Из этого соотношения следует, что множители $c^{m\cdot}_{\cdot s}$ образуют матрицу, обратную по отношению к матрице $A = (a^{s\cdot}_{\cdot r})$ и, следовательно, равную матрице B обратного преобразования базисов. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{R}}^m = b^{m\cdot}_{\cdot l}\mathbf{R}^l \qquad \text{или} \qquad \tilde{\mathbf{R}}^* = B\mathbf{R}^*.$$

Умножение последнего матричного равенства на матрицу прямого преобразования A слева приведет к обратной зависимости:

$$\mathbf{R}^m = a^{m\cdot}_{\cdot l}\tilde{\mathbf{R}}^l \qquad \text{или} \qquad \mathbf{R}^* = A\tilde{\mathbf{R}}^*.$$

Для сопоставления правил преобразований координат и базисов, осуществляемых с помощью матриц A и B, составим таблицу матричных преобразований (положения "$*$" верхнее или нижнее указывает на расположение индексов у элементов соответствующих матриц):

$$\begin{array}{rl} \tilde{\mathbf{R}}_* = A\mathbf{R}_*; & \mathbf{R}_* = B\tilde{\mathbf{R}}_*; \\ \tilde{\mathbf{R}}^* = B\mathbf{R}^*; & \mathbf{R}^* = A\tilde{\mathbf{R}}^*; \\ d\tilde{X}^* = BdX^*; & dX^* = Ad\tilde{X}^*. \end{array} \tag{2.7}$$

Обратим внимание на особенности составленной таблицы.

1. В левом столбце стоят формулы преобразования величин, связанных со "старым" базисом и координатами в "новые" величины; в правом столбце

– наоборот.
2. Если принять за основу преобразование старого основного базиса в новый (векторы основного базиса помечены нижними индексами) с помощью матрицы A (первая формула левого столбца таблицы), то аналогичное преобразование для величин взаимного базиса (помечены верхними индексами) осуществляется с помощью матрицы $B = A^{-1}$.
3. В преобразованиях правого столбца формул по сравнению с преобразованиями левого столбца матрицы A и B меняются местами.

Определение.*Если в некотором пространстве заданы своими координатами некоторые элементы* **x** *и* **y** *этого пространства, которые при изменении базиса пространства оба изменяются при помощи одного и того же оператора (матрицы, наример, A), то такие элементы называются ковариантными. Если же один из элементов преобразуется с помощью одной матрицы (например, A), а другой элемент – с помощью другой матрицы (например, B) и матрицы связаны между собой соотношением $A = B^{-1}$, то элементы* **x** *и* **y** *называются контравариантными.*

Понятия ко- и контравариантный связаны с латинскими словами: *co* – совместно, сообща; *contra* – напротив, наоборот; *vario* – изменять.

В тензорном исчислении принято называть величины, изменяющиеся при их преобразовании от представления в старом базисе к представлению в новом базисе с помощью матрицы A (первая формула левого столбца таблицы) – *ковариантными* и отмечать нижними индексами. В противном случае величины называют *контравариантными* и отмечают индексами, ставящимися сверху.

2.5 Ковариантные и контравариантные компоненты тензоров

Свяжем с линейным пространством L_n некоторый основной базис $\mathbf{R}_*^{\text{т}} = (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\cdots\mathbf{R}_n)$ и будем считать, что по основному базису определены векторы взаимного базиса $\mathbf{R}^{*\text{т}} = (\mathbf{R}^1\mathbf{R}^2\cdots\mathbf{R}^n)$.

Представим некоторый вектор $\mathbf{d}$ в виде разложения по векторам основного и взаимного базисов:

$$\mathbf{d} = d_k\mathbf{R}^k, \qquad \mathbf{d} = d^k\mathbf{R}_k. \tag{2.8}$$

Если использовать матричное представление базисных векторов и обозначить $D_*^{\text{т}} = (d_1 d_2 \ldots d_n), D^{*\text{т}} = (d^1 d^2 \ldots d^n)$, то равенства (2.8) можно записать в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{R}_*^{\mathrm{T}} D^* = D^{*\mathrm{T}} \mathbf{R}_*; \qquad \mathbf{d} = \mathbf{R}^{*\mathrm{T}} D_* = D_{\mathrm{T}}^* \mathbf{R}^*.$$

Умножая (2.8) скалярно на $\mathbf{R}_m$ и $\mathbf{R}^m$, соответственно, и учитывая (2.5), получим формулы для определения ко- (d_m) и контравариантных (d^m) компонентов вектора:

$$d_m = \mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_m; \qquad d^m = \mathbf{d}\cdot\mathbf{R}^m.$$

С другой стороны, согласно определению скалярного произведения и проекции вектора получим:

$$d_m = |\mathbf{d}||\mathbf{R}_m| \cos(\mathbf{d}\,\hat{}\,\mathbf{R}_m) = |\mathbf{R}_m| \text{Пр}_{\mathbf{R}_m}\mathbf{d} = |\mathbf{R}_m| d_{(m)};$$

$$d^m = |\mathbf{d}||\mathbf{R}^m| \cos(\mathbf{d}\,\hat{}\,\mathbf{R}^m) = |\mathbf{R}^m| \text{Пр}_{\mathbf{R}^m}\mathbf{d} = |\mathbf{R}^m| d^{(m)}.$$

Проекции $d_{(m)}$ и $d^{(m)}$ вектора $\mathbf{d}$ на направления базисных векторов $\mathbf{R}_m$ и $\mathbf{R}^m$ называются *физическими компонентами вектора* $\mathbf{d}$ в основном и взаимном базисах.

Величины, рассмотренные в этом разделе, изображены на рис.2.3 для пространства $\Re_3$. Для большей наглядности предполагалось, что в неортогональном базисе $\mathbf{R}_*^{\mathrm{T}} = (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3)$ вектор $\mathbf{R}_3$ ортогонален плоскости векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, расположенных в плоскости листа.

Векторы взаимного базиса определяются из соотношений:

$$\mathbf{R}^1 = \frac{1}{V_*}\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 \perp \begin{cases} \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{cases}; \qquad \mathbf{R}^2 = \frac{1}{V_*}\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1 \perp \begin{cases} \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_1 \end{cases}.$$

Направления векторов $\mathbf{R}_3$ и $\mathbf{R}^3$, конечно, будут совпадать, хотя их модули в общем не будут равны из-за разностей площадей параллелограммов, построенных в плоскости листа на векторах основного и взаимного базисов.

Вектор $\mathbf{d}$, лежащий в плоскости листа, может быть представлен в виде разложений по направлениям векторов основного или взаимного базисов:

$$\mathbf{d} = d^1\mathbf{R}_1 + d^2\mathbf{R}_2; \qquad \mathbf{d} = d_1\mathbf{R}^1 + d_2\mathbf{R}^2.$$

Проекции вектора $\mathbf{d}$ на направления базисных векторов (физические компоненты) соответствуют на рисунке отрезкам:

$$d_{(1)} = OK_1, \quad d_{(2)} = OK_2, \quad d^{(1)} = OK^1, \quad d^{(2)} = OK^2.$$

По установленному правилу преобразования базисов при переходе от одной системы координат к другой из условия инвариантности векторов можно установить правило преобразования его компонентов.

Представим вектор $\mathbf{d}$ в старом и новом ковариантных базисах n-мерного пространства:

$$\mathbf{d} = d^k \mathbf{R}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{d} = \bar{d}^k \bar{\mathbf{R}}_k. \tag{2.9}$$

Преобразуем первое из соотношений (2.9) с учетом правила преобразования базисных векторов (2.7):

$$\mathbf{d} = d^k b^{m\cdot}_{\cdot k} \bar{\mathbf{R}}_m \equiv d^m b^{k\cdot}_{\cdot m} \bar{\mathbf{R}}_k.$$

Сравнивая множители, стоящие при базисных векторах $\bar{\mathbf{R}}_k$ полученного выражения и второго выражения (2.9), запишем правило преобразования координат вектора

$$\bar{d}^k = b^{k\cdot}_{\cdot m} d^m \quad \text{или} \quad \bar{D}^* = BD^*.$$

Аналогичные преобразования для представления вектора во взаимном базисе приводят к соотношению

$$\bar{d}_k = a_{k\cdot}^{\cdot m} d_m \quad \text{или} \quad \bar{D}_* = BD_*.$$

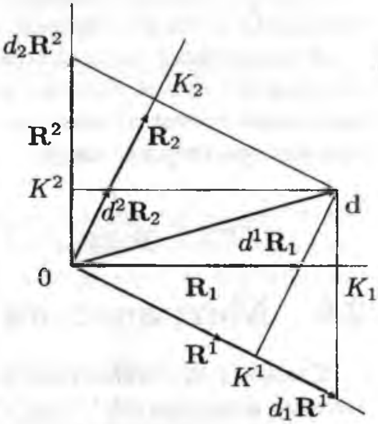

Рис. 2.3: Базисные векторы косоугольных координат

Обратимся теперь к тензору второго ранга $\hat{\mathbf{Q}}$, который можно представить в одном из следующих видов:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}_*^{\mathsf{T}} Q^{**} \mathbf{R}_* = \mathbf{R}^{*\mathsf{T}} Q_{**} \mathbf{R}^* = \mathbf{R}_*^{\mathsf{T}} Q^{*\cdot}_{\cdot *} \mathbf{R}^* = \mathbf{R}^{*\mathsf{T}} Q_{*\cdot}^{\cdot *} \mathbf{R}_*.$$

Опираясь на правила преобразования базисных векторов, образующих диады, и на требование инвариантности тензоров, можно получить правило преобразования матриц их компонентов. Запишем, например, последнее из приведенных представлений тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ в новом базисе

$$\hat{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{R}}^{*\mathsf{T}} \bar{Q}_{*\cdot}^{\cdot *} \bar{\mathbf{R}}_*$$

и преобразуем в нем матрицы новых базисных векторов к старым (2.7):

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{*\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} \bar{Q}_{*\cdot}^{\cdot *} A \mathbf{R}_* = \mathbf{R}^{*\mathsf{T}} Q_{*\cdot}^{\cdot *} \mathbf{R}_*.$$

Сравнение множителей, стоящих между двумя матрицами базисных векторов $\mathbf{R}^{*\mathsf{T}}$ и $\mathbf{R}_*$, позволяет записать искомое правило преобразования

$$Q_{*\cdot}^{\cdot *} = B^{\mathsf{T}} \bar{Q}_{*\cdot}^{\cdot *} A.$$

Обратное преобразование получим, умножая последнее выражение слева на $B^{-\text{т}} = A^{\text{т}}$ и справа на $A^{-1} = B$:

$$\bar{Q}_{*\cdot}^{\cdot *} = A^{\text{т}} Q_{*\cdot}^{\cdot *} B.$$

Правила преобразования матриц компонентов других представлений тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, а также тензоров, ранг которых отличен от двух, очевидны.

В заключение раздела отметим, что физические компоненты тензоров получаются путем деления их компонентов с ко- и контравариантными индексами соответственно на модули базисных векторов $\mathbf{R}_k$ и $\mathbf{R}^k$. Так, для тензора второго ранга

$$q_{(km)} = \frac{d_{km}}{|\mathbf{R}_k||\mathbf{R}_m|}, \quad q^{(kr)} = \frac{d^{kr}}{|\mathbf{R}^k||\mathbf{R}^m|}, \quad q_{(k)\cdot}^{\cdot(m)} = \frac{d_{k\cdot}^{\cdot m}}{|\mathbf{R}_k||\mathbf{R}^m|}.$$

2.6 Метрический тензор

Свяжем с пространством $\Re_3$ криволинейную, в общем неортогональную систему координат $X^{\text{т}} = (x^1 x^2 x^3) = (x^k)$. Пусть базисные векторы основного $\mathbf{R}_k$ и взаимного $\mathbf{R}^k$ базисов этой системы координат известны.

Бесконечно малый элемент $d\mathbf{R}$ рассматриваемого пространства можно представить в виде разложения, например, по базисным векторам $\mathbf{R}_k$:

$$d\mathbf{R} = \mathbf{R}_k dx^k.$$

Найдем квадрат длины этого элемента

$$ds^2 = d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R} = \mathbf{R}_k\cdot\mathbf{R}_n dx^k dx^n = g_{kn} dx^k dx^n. \tag{2.10}$$

Приращения dx^k криволинейных координат можно считать прямолинейными в силу их малости. При этом выражение (2.10) может рассматриваться как квадратичная форма переменных dx^k. Поэтому входящие в это выражение коэффициенты

$$g_{kn} = \mathbf{R}_k\cdot\mathbf{R}_n \tag{2.11}$$

представляют собой ковариантные компоненты симметричного тензора второго ранга. Отметим, что эти компоненты являются следом диады базисных векторов

$$tr(\mathbf{R}_k\mathbf{R}_n) = \mathbf{R}_k\cdot\mathbf{R}_n = g_{kn} \tag{2.12}$$

и этим они напоминают компоненты δ_{kn} единичного тензора в ортонормированном базисе. На этом сходство тензора с компонентами g_{kn} и единичного тензора не заканчивается.

Обратимся к диадам векторов сопряженного и смешанного базисов и найдем их следы:

$$tr(\mathbf{R}^k\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^k\cdot\mathbf{R}^n = g^{kn}; \quad tr(\mathbf{R}^k\mathbf{R}_n) = \mathbf{R}^k\cdot\mathbf{R}_n = g^k_n = \delta^k_n. \qquad (2.13)$$

Точки над (под) индексами у g^k_n, как и у символов Кронекера, можно не ставить в силу симметрии образуемых ими тензоров.

Используя правила преобразования базисных векторов $\mathbf{R}_k(\mathbf{R}^k)$ (2.7), легко убедиться в том, что тензор

$$\hat{\mathbf{g}} = g^{kn}\mathbf{R}_k\mathbf{R}_n = g_{kn}\mathbf{R}^k\mathbf{R}^n = g^k_n\mathbf{R}_k\mathbf{R}^n = \delta^k_n\mathbf{R}_k\mathbf{R}^n = \mathbf{R}_k\mathbf{R}^k \qquad (2.14)$$

является инвариантной по отношению к преобразованию координат величиной. Действительно, с учетом полученных ранее правил преобразования ко- и контравариантных величин, например, для первого из вышеприведенных представлений тензора $\hat{\mathbf{g}}$ получим

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{R}_k\cdot\mathbf{R}_n)\mathbf{R}^k\mathbf{R}^n = b^{m\cdot}_{\cdot k}b^{r\cdot}_{\cdot n}(\bar{\mathbf{R}}_m\cdot\bar{\mathbf{R}}_r)a^{k\cdot}_{\cdot p}a^{n\cdot}_{\cdot s}\bar{\mathbf{R}}^p\bar{\mathbf{R}}^s =$$

$$= (b^{m\cdot}_{\cdot k}a^{k\cdot}_{\cdot p})(b^{r\cdot}_{\cdot n}a^{n\cdot}_{\cdot s})\bar{g}_{mr}\bar{\mathbf{R}}^p\bar{\mathbf{R}}^s = \delta^m_p\delta^r_s\bar{g}_{mr}\bar{\mathbf{R}}^p\bar{\mathbf{R}}^s = \bar{g}_{ps}\bar{\mathbf{R}}^p\bar{\mathbf{R}}^s = \hat{\bar{\mathbf{g}}}.$$

Компоненты этого тензора при переходе от нового базиса к старому преобразуются, очевидно, по правилу

$$g_{kn} = b^{m\cdot}_{\cdot k}b^{r\cdot}_{\cdot n}\bar{g}_{mr},$$

а диада по правилу

$$\mathbf{R}^k\mathbf{R}^n = a^{k\cdot}_{\cdot p}a^{n\cdot}_{\cdot s}\bar{\mathbf{R}}^p\bar{\mathbf{R}}^s.$$

Аналогично записываются правила обратного преобразования

$$\bar{g}_{kn} = a^{m\cdot}_{\cdot k}a^{r\cdot}_{\cdot n}g_{mr}; \qquad \bar{\mathbf{R}}^k\bar{\mathbf{R}}^n = b^{k\cdot}_{\cdot p}b^{n\cdot}_{\cdot s}\mathbf{R}^p\mathbf{R}^s.$$

Тензор $\hat{\mathbf{g}}$, введенный в этом разделе, называется *метрическим*. Название связано с тем, что компоненты этого тензора, как это следует из формулы (2.11) и свойств скалярного произведения, определяют модули базисных векторов и углы между ними.

Найдем следы тензора $\hat{\mathbf{g}}$, представленного формулами (2.14):

$$tr\hat{\mathbf{g}} = g_{kn}tr(\mathbf{R}^k\mathbf{R}^n) = g^{kn}tr(\mathbf{R}_k\mathbf{R}_n) = g^k_n tr(\mathbf{R}_k\mathbf{R}^n)$$

или с учетом (2.12) и (2.13)

$$tr\hat{\mathbf{g}} = g_{kn}g^{kn} = g^{kn}g_{kn} = g^k_n g^n_k = \delta^k_n\delta^n_k = \delta^k_k = g^k_k = 3.$$

Последнее равенство говорит о том, что, во-первых, след тензора $\hat{\mathbf{g}}$ совпадает со следом единичного тензора; во-вторых, с помощью компонентов $g_{kn}(g^{kn})$ тензора можно опускать (поднимать) индексы – "жонглировать" индексами – как у компонентов тензора, так и у базисных векторов (2.14). То есть

$$\mathbf{R}_k = g_{kn}\mathbf{R}^n; \quad \mathbf{R}^k = g^{kn}\mathbf{R}_n; \quad \mathbf{R}_k = g_k^n\mathbf{R}_n.$$

Операция "жонглирования " индексами справедлива для тензоров любого ранга. Например:

$$^{(4)}\hat{\mathbf{T}} = t_{krnm}\mathbf{R}^k\mathbf{R}^r\mathbf{R}^n\mathbf{R}^m = t_{krnm}\mathbf{R}^k g^{pr}\mathbf{R}_p\mathbf{R}^n\mathbf{R}^m =$$

$$= t_{k\cdot nm}^{\cdot p}\mathbf{R}^k\mathbf{R}_p\mathbf{R}^n\mathbf{R}^m = \ldots = t^{spqt}\mathbf{R}_s\mathbf{R}_p\mathbf{R}_q\mathbf{R}_t.$$

За тензором $\hat{\mathbf{g}}$ сохраняется роль единичного тензора при его умножении скалярно справа или слева на любой тензор. Докажем справедливость утверждения на примере вектора (тензора первого ранга):

$$\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{g}} = a^k\mathbf{R}_k\cdot g_{mn}\mathbf{R}^m\mathbf{R}^n = a^k g_{mn} g_k^m\mathbf{R}^n = a^k g_{kn}\mathbf{R}^n = a^k\mathbf{R}_k = \mathbf{a}.$$

Временно (только для доказательства следующего положения) введем обозначения: $\hat{\mathbf{g}}^* = g^{kn}\mathbf{R}_k\mathbf{R}_n$ и $\hat{\mathbf{g}}_* = g_{lm}\mathbf{R}^l\mathbf{R}^m$. Найдем скалярное произведение этих тензоров

$$\hat{\mathbf{g}}^*\cdot\hat{\mathbf{g}}_* = g^{kn}\mathbf{R}_k\mathbf{R}_n\cdot g_{lm}\mathbf{R}^l\mathbf{R}^m = g^{kn}g_{lm}\mathbf{R}_k g_n^l\mathbf{R}^m = g_m^k\mathbf{R}_k\mathbf{R}^m = \mathbf{R}_k\mathbf{R}^k = \hat{\mathbf{I}}.$$

Так что

$$\hat{\mathbf{g}}^* = \hat{\mathbf{g}}_*^{-1}.$$

Этого результата следовало ожидать, так как свойство единичного тензора быть равным своему обратному тензору инвариантно, то есть остается справедливым для любой системы координат.

Обозначим через g_* определитель матрицы ковариантных компонентов метрического тензора и через g^* – контравариантных. Если обозначить через $A^{km}(A_{km})$ алгебраические дополнения элементов $g_{km}(g^{km})$ соответственно(!),то элементы обратных матриц определятся из соотношений (обратите внимание на расстановку индексов)

$$g^{mk} = \frac{A^{mk}}{g_*} = \frac{\partial g_*}{g_*\partial g_{km}}; \quad g_{mk} = \frac{A_{mk}}{g^*} = \frac{\partial g^*}{g^*\partial g^{km}}. \tag{2.15}$$

2.7 Площади и объемы, порождаемые базисными векторами

Предварительно получим формулу для скалярного произведения двух векторов, представляющих собой векторные произведения векторов:

$$P = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}).$$

Имея в виду свойства смешанного произведения векторов $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ и выражение для вычисления двойного векторного произведения векторов, получим

$$P = [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\cdot\mathbf{d} = [(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}]\cdot\mathbf{d} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$

или

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

В частности, скалярное произведение двух одинаковых векторных произведений

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2.$$

Используя это выражение, найдем, например, площадь P_1 параллелограмма, построенного на базисных векторах $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$:

$$P_1 = \sqrt{(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3)\cdot(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3)} =$$

$$= \sqrt{(\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_2)(\mathbf{R}_3\cdot\mathbf{R}_3) - (\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{R}_3)^2} = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} = \sqrt{A^{11}}.$$

Ссылаясь на формулы (2.15), выразим A^{11} через определитель метрического тензора. Тогда

$$P_1 = \sqrt{g_* g^{11}}.$$

С другой стороны

$$P_1 = |\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3| = V_* \left|\mathbf{R}^1\right| = V_*\sqrt{g^{11}}.$$

Сравнение двух последних выражений позволяет записать соотношения:

$$V_* = \sqrt{g_*} = 1/V^*; \qquad V^* = \sqrt{g^*} = 1/V_*; \qquad g_* = 1/g^*.$$

2.8 Главные значения и инварианты симметричного тензора

Для демонстрации особенностей оперирования тензорными величинами в неортогональных базисах приведем последовательность отыскания главных значений и главных инвариантов симметричного тензора $\hat{\mathbf{Q}}$. Пусть главные направления этого тензора определяются единичным вектором $\mathbf{e}$, а главные значения – скаляром q. Тогда

$$\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{e} = q\mathbf{e}.$$

Представим входящие в это выражение тензорные величины в неортогональном базисе

$$q_{m\cdot}^{\cdot n}\mathbf{R}^m\mathbf{R}_n\cdot e_k\mathbf{R}^k = q_{m\cdot}^{\cdot n}e_k g_n^k\mathbf{R}^m = qe_n g_m^n\mathbf{R}^m.$$

Это векторное равенство приводит к системе уравнений

$$(q_{m\cdot}^{\cdot n} - qg_m^n)e_n = 0,$$

в которой неизвестные компоненты вектора главных направлений e_n связаны условием нормирования

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = g^{km}e_k e_m = 1.$$

Запишем характеристическое уравнение

$$|q_{m\cdot}^{\cdot n} - qg_m^n| = 0.$$

Это уравнение не отличается от характеристического уравнения для ортонормированного базиса (раздел 1.13) потому, что в нем компоненты тензора представлены в смешанном ко- и контравариантном базисах. В противном случае в уравнении будут фигурировать компоненты метрического тензора, "жонглирующие" индексами.

Раскрытие определителя в характеристическом уравнении приводит к кубическому уравнению относительно q:

$$-q^3 + J_1(\hat{\mathbf{Q}})q^2 - J_2(\hat{\mathbf{Q}})q + J_3(\hat{\mathbf{Q}}) = 0.$$

Запишем выражения для главных инвариантов тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, представленного в смешанном базисе

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}) = q_{k\cdot}^{\cdot k} = g^{kn}q_{kn} = g_{kn}q^{kn};$$

$$J_3(\hat{\mathbf{Q}}) = |q_{k\cdot}^{\cdot k}| = |g^{kn}q_{kn}| = |g_{kn}||q^{kn}| = g^*|q_{kn}| = g_*|q^{kn}|.$$

Выражение для второго инварианта тензора получим, сославшись на (1.71):

$$J_2(\hat{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}\left[J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) - J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2)\right]. \tag{2.17}$$

Так как

$$\hat{\mathbf{Q}}^2 = q_{mn}q_{kr}g^{nk}\mathbf{R}^m\mathbf{R}^r = q_{m\cdot}^{\cdot k}q_{k\cdot}^{\cdot r}\mathbf{R}^m\mathbf{R}_r,$$

то

$$J_1(\hat{\mathbf{Q}}^2) = g^{nk}g^{mr}q_{mn}q_{kr} = q_{m\cdot}^{\cdot k}q_{k\cdot}^{\cdot m}$$

и

$$J_1^2(\hat{\mathbf{Q}}) = g^{mn}g^{kr}q_{mn}q_{kr} = q_{m\cdot}^{\cdot m}q_{k\cdot}^{\cdot k}.$$

Подставим последние два выражения в (2.17):

$$J_2(\hat{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{2}\left(g^{mn}g^{kr} - g^{nk}g^{mr}\right)q_{mn}q_{kr} = \frac{1}{2}\left(q_{m\cdot}^{\cdot m}q_{k\cdot}^{\cdot k} - q_{m\cdot}^{\cdot k}q_{k\cdot}^{\cdot m}\right).$$

Последовательность определения главных направлений тензоров, представленных в неортогональных базисах, не отличается от соответствующей последовательности случая ортонормированного базиса.

Вопросы для самоконтроля к гл. 2

1. Для чего на преобразование координат накладывается условие гомеоморфности?

2. Что такое якобиан преобразования координат? О чем говорит равенство якобиана нулю? Чему равен якобиан преобразования одной ортогональной декартовой системы координат в другую?

3. Какова необходимость введения различных систем координат?

4. Что такое матрицы прямого и обратного преобразования координат? Какова связь между этими матрицами?

5. Какие векторы можно принять за базисные в криволинейных координатах? Как понимать тот факт,что эти векторы можно считать единичными?

6. Может ли размерность базисных векторов отличаться от размерности рассматриваемого пространства? От размерности координат?

7. Что такое векторы взаимного базиса? Как они связаны с векторами основного базиса?

8. Какой базис является взаимным по отношению к взаимному?

9. Как изменяются базисные векторы при преобразовании координат?

10. Что такое ко- и контравариантные величины? Чем они отличаются при написании? Каково правило преобразования этих величин при преобразовании координат?

11. Как разложить вектор по ко- и контравариантному базису?

12. Каков смысл физических компонентов векторов?

13. Как можно представить тензор в ко-, контравариантных и смешанных полиадах базисных векторов?

14. Из какого условия можно получить правило преобразования компонентов тензора при преобразовании координат?

15. Как обеспечить инвариантность тензора, заданного своими компонентами, по отношению к преобразованию координат?

16. В чем заключается эквивалентность метрического тензора единичному тензору?

17. Чем определяется название метрического тензора?

18. В чем смысл понятия “жонглирование” индексами? Как его можно осуществить, не нарушая инвариантности тензоров?

19. С каким инвариантом метрического тензора связан объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах?

20. Как представляются изотропные тензоры в ко-, контравариантных и смешанных базисах?

21. В чем состоит особенность процедуры отыскания собственных значений симметричных тензоров в косоугольных базисах?

Глава 3

Упражнения

3.1 Упражнения к главе 1

Раздел 1.1

1. Свойства среды в некоторой точке, характеризуемой вектором $\mathbf{r} = x^k \mathbf{i}_k$, определяются выражением $\mathrm{R} = \rho \mathbf{r}$, где ρ – скаляр. Показать, что ρ – величина, инвариантная по отношению к преобразованию координат.
2. Найти компоненты вектора $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3$ в базисе, повернутом относительно $\mathbf{i}_3$ на угол $\pi/4$.
3. Убедиться в справедливости соотношения $s_{k\cdot}^{\cdot r} \bar{s}_{r\cdot}^{\cdot n} = \delta_k^n$, используя зависимости $s_{k\cdot}^{\cdot r} = cos(\mathbf{i}_k \hat{\ } \bar{\mathbf{i}}^r)$ в $\Re_2$.
4. Новый ортонормированный базис получен из старого путем поворота последнего вокруг базисного вектора $\mathbf{i}_2$ по часовой стрелке на угол α. Найти матрицу преобразования базисов.
5. Векторы нового $\bar{\mathbf{i}}$ и старого $\mathbf{i}$ базисов связаны соотношениями:

$$\bar{\mathbf{i}}_1 = \frac{1}{3}(2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3), \qquad \bar{\mathbf{i}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3), \qquad \bar{\mathbf{i}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}(-\mathbf{i}_1 + 4\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3).$$

Считая базис $\mathbf{i}$ ортонормированным, показать, что базис $\bar{\mathbf{i}}$ также ортонормированный. Найти матрицу преобразования базисов. Показать, что она ортогональна и ее определитель равен единице. Выразить векторы старого базиса через векторы нового.

Раздел 1.2

1. Систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_2 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$

записать в матричном и тензорном, в том числе с диадами, видах.

Раздел 1.3

1. Расписать выражение $a^{t\cdot}_{\cdot p} = s^{t\cdot}_{\cdot k} \bar{a}^{k\cdot}_{\cdot n} \tilde{s}^{n\cdot}_{\cdot p}$ для $a^{1\cdot}_{\cdot 1}$ и $a^{2\cdot}_{\cdot 3}$.
2. Используя соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, записать в компонентно-индексной форме соотношения $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{Y}} = \lambda\hat{\mathbf{X}}$.

Раздел 1.4

1. Для векторов **a**, **b** и **c**, заданных в ортонормированном базисе матрицами $a^{\mathsf{T}} = (1\ 2\ 3)$, $b^{\mathsf{T}} = (-1\ 0\ 2)$, $c^{\mathsf{T}} = (-2\ -1\ \ 0)$:
   а) записать выражения для диад **ab**, **bc** и **cb**;
   б) найти $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}$, $\mathbf{bc}\cdot\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{bc}$, $\mathbf{ab}\cdot\mathbf{bc}$.

Раздел 1.5

1. Записать выражение $AB^{\mathsf{T}} = S\bar{A}\bar{B}^{\mathsf{T}}S^{-1}$ в компонентно-индексной форме (A, B, S – матрицы тензоров второго ранга в $\Re_2$).
2. На кубе, образованном координатными плоскостями, расставить компоненты тензора $\hat{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.

Раздел 1.6

1. Расписать векторное произведение двух тензоров ${}^{(n)}\hat{\mathbf{A}}$ и ${}^{(m)}\hat{\mathbf{B}}$, представляя входящие в него тензоры через полиады ортонормированного базиса.

Раздел 1.8

1. Используя данные упражнения 1.4.1, найти следы тензоров **ab**, $\mathbf{a}\times\mathbf{bc}$, $\mathbf{ab}\cdot\mathbf{ac}$, $\mathbf{cb}\cdot\mathbf{bc}$.
2. Тензоры $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{Q}}$ в ортонормированном базисе пространства $\Re_3$ заданы своими матрицами

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{P}}^2$, $\hat{\mathbf{P}}^3$, $J_1(\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{Q}})$, $J_1(\hat{\mathbf{P}}^2)$, $J_1(\hat{\mathbf{P}}^3)$ и $J_1(\hat{\mathbf{P}}\cdot\hat{\mathbf{P}}^{\mathsf{T}})$.

3. Найти следы тензоров $\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{b}$, если в ортонормированном базисе

$$\begin{aligned} a &= (4\ \ -5\ \ 1); \\ b &= (0\ \ 1\ \ 2); \end{aligned} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Показать, что $\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}}:\mathbf{yx} = \hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}:\mathbf{xy}$.
5. Вывести условие, при котором $\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}$. Тензоры, удовлетворяющие этому условию, называются переставимыми.
6. Используя свойства скалярных произведений и векторы ортонормированного базиса, получить формулу для определения компонентов тензора ${}^{(n)}\hat{\mathbf{Q}} = q^{k_1k_2\ldots k_n}\mathbf{i}_{k_1}\mathbf{i}_{k_2}\ldots\mathbf{i}_{k_n}$.
7. Показать, что $\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}} \neq \pm\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{A}}$.
8. Используя полиадное представление тензоров, доказать справедливость соотношений: $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}}) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{C}}$, $(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}})$.
9. Доказать справедливость соотношений $a) tr(\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}) = (\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}):\hat{\mathbf{I}}$, $b) tr(\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{C}}) = (\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{C}}):\hat{\mathbf{I}} = (\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}):\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}:(\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{C}})$.
10. Получить формулу для $J_1(\hat{\mathbf{Q}}^n)$ $(\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}})$.

Раздел 1.9

1. Тензор $\hat{\mathbf{Q}}$ (упр.1.8.3) разложить на сумму симметричного и обратносимметричного тензоров. Найти: а) след скалярного произведения полученных тензоров; б) вектор $\boldsymbol{\omega}$, сопутствующий тензору $\hat{\mathbf{Q}}$.

Убедиться в справедливости формулы $\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\mathbf{x}$.

Раздел 1.10

1. Доказать, что сумма $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ равна нулю.
2. Для произвольного тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ найти тензоры $\hat{\mathbf{Q}}:{}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_k$ и ${}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_k:\hat{\mathbf{Q}}$ $(k = \overline{1,3})$.
3. Найти $tr\hat{\mathbf{I}}$, ${}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}\cdot{}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}$, ${}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}:{}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}$, $tr({}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}:{}^{(3)}\hat{\mathbf{I}})$.
4. Показать, что тензоры ${}^{(3)}\hat{\mathbf{I}}$ и ${}^{(4)}\hat{\mathbf{I}}_k$ $(k = \overline{1,3})$ изотропны.
5. Вывести формулу $\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma}^2 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\hat{\mathbf{I}} - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}$.

Раздел 1.12

1. По векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ получены векторы $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{S}}$ и $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{S}}$, где $\hat{\mathbf{S}}$ – ортогональный тензор. Показать, что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a}^*$. О чем свидетельствуют эти равенства?
2. Найти тензор, получаемый из соотношения $\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{S}}$.
3. Проверить, будет ли тензор $\hat{\mathbf{S}}^n$ ортогональным, если $\hat{\mathbf{S}}$ – ортогональный тензор и n – целый положительный показатель степени.
4. Расписать соотношение $\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{I}}$ в координатной форме. Убедиться в том, что в $\Re_3$ из этих соотношений получаются шесть независимых уравнений, после удовлетворения которым у тензора поворота остаются только три независимых компонента.

Раздел 1.13

1. Показать, что пропорциональные тензоры $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ $(\hat{\mathbf{A}} = \lambda\hat{\mathbf{B}})$ соосны (имеют одинаковые собственные векторы).

Раздел 1.14

1. Тензор $\hat{\mathbf{Q}}$ в ортонормированном базисе задан матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя теорему Кейли-Гамильтона, найти $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$. Убедиться в справедливости равенства $\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}^{-1} = \hat{\mathbf{I}}$.

2. Выразить $J_2(\hat{\mathbf{Q}}^2)$ и $J_3(\hat{\mathbf{Q}}^2)$ через главные инварианты тензора $\hat{\mathbf{Q}}$.
3. В ортонормированном базисе пространства $\Re_3$ тензор $\hat{\mathbf{Q}}$ задан матрицами

$$a) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти: а) главные значения, направления и инварианты $\hat{\mathbf{Q}}$; б) матрицу Q в базисе главных направлений $\hat{\mathbf{Q}}$; в) матрицу Q в базисе, повернутом относительно базиса ее собственных направлений на угол $\pi/4$ вокруг базисного вектора, соответствующего минимальному собственному значению тензора $\hat{\mathbf{Q}}$.

4. Для тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, заданного в ортонормированном базисе матрицей $Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, определить $\hat{\mathbf{Q}}^{1/2}$ и $\hat{\mathbf{Q}}^{2/3}$. Найти $\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$ тремя способами: а) непосредственным обращением матрицы компонентов $\hat{\mathbf{Q}}$; б) через главные значения и главные векторы; в) с использованием теоремы Кейли-Гамильтона.
5. Для тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, заданного в ортонормированном базисе матрицей $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, определить $\hat{\mathbf{Q}}^4$ и $\hat{\mathbf{Q}}^6$ непосредственным вычислением и с использованием теоремы Кейли-Гамильтона.

Раздел 1.16

1. Тензоры, заданные матрицами в упражнении 1.14.3, разбить на сумму шарового тензора и девиатора. Найти второй и третий инварианты девиатора. Убедиться в справедливости соотношения $J_1(dev\hat{\mathbf{Q}}) = 0$. Доказать справедливость равенства

$$J_2(dev\hat{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{6}\left[(q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_1)^2\right].$$

Раздел 1.17

1. Доказать, что собственные значения тензоров $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Pi}$ полярного разложения тензора равны.
2. Найти правый, левый и ортогональный тензоры полярного разложения тензора, имеющего в ортонормированном базисе матрицу

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Раздел 1.18

1. Определить нормальную и тангенциальную составляющие вектора тензора, заданного в упражнении 1.14.1 на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i}_3$.
2. Базис $\mathbf{i}^{\tau} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ повернут на угол $\pi/6$ вокруг $\mathbf{i}_3$ и затем на $\pi/2$ вокруг нового положения $\mathbf{i}_1$ так, что после поворота векторы $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ совпадают. Найти: а) компоненты вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$ в новом базисе; б) нормальную и касательную составляющие тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, для которого $\mathbf{i}$ – базис собственных векторов, причем $q_1 = 1$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$ на площадке, равнонаклоненной к базисным векторам базиса $\mathbf{i}$.

Раздел 1.19

1. Построить поверхность тензоров, заданных в упражнении 1.14.3, в базисах их собственных векторов.

3.2 Упражнения к главе 2

Раздел 2.1

1. Найти якобиан преобразования одной декартовой системы координат $X = (x^k)$ в другую $Z = (\zeta^k)$ $(k = \overline{1,3})$, если $\zeta^1 = 2x^1 + \frac{1}{3}x^2 + x^3$; $\zeta^2 = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$; $\zeta^3 = x^1 + x^3$.
2. Известны координаты двух (трех) точек в двух декартовых косоугольных системах координат $x^k_{(i)}$ и $\zeta^k_{(i)}$ (i – номер точки, $k = \overline{1,2}$ или $k = \overline{1,3}$). Определить преобразование координат.
3. Известны углы $\alpha^k_r = (ox^k{}^\wedge o\zeta^r)$ $(k, r = \overline{1,3})$ декартовых систем координат x^k и ζ^r, а также углы $\gamma^k_r = (ox^k{}^\wedge ox^r)$ между координатными линиями исходной системы координат x^k. Определить преобразования координат и углы $\beta^k_r = (o\zeta^k{}^\wedge o\zeta^r)$.

Раздел 2.2

1. Показать, что векторы основного и взаимного базисов эквивалентны (выражаются друг через друга одинаковым образом).

2. Определить векторы основного и взаимного базисов цилиндрической системы координат. Установить соответствие между ними и базисом декартовой системы. Найти якобиан преобразования.
3. Условия упражнения 2.2.2 применить к сферической системе координат.
4. Угол между единичными базисными векторами $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ равен $\pi/6$. Эти векторы перпендикулярны вектору $\mathbf{R}_3$ и образуют с ним правую тройку векторов. Найти векторы взаимного базиса.

Раздел 2.4

1. Найти преобразование основного и взаимного базисов системы координат $Z^\text{т} = (\zeta^1\zeta^2\zeta^3)$ в базис системы координат $X^\text{т} = (x^1x^2x^3)$ по условиям упражнения 2.1.1. Записать обратные преобразования.

Раздел 2.5

1. В системе координат $X^\text{т} = (x^1x^2x^3)$ с ортонормированным базисом $\mathbf{i}^\text{т} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ задан вектор $\mathbf{d} = 2\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3$. Найти ко- и контравариантные компоненты вектора $\mathbf{d}$ в системе координат $Z^\text{т} = (\zeta^1\zeta^2\zeta^3)$, связанной с $X^\text{т} = (x^1x^2x^3)$ зависимостями упражнения 2.1.1. Определить физические компоненты вектора $\mathbf{d}$.
2. В базисах $\mathbf{R}_*$ и $\mathbf{R}^*$, полученных в упражнении 2.1.1, найти компоненты тензора $\hat{\mathbf{Q}}$, заданного в ортонормированном базисе матрицей $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, если известна матрица $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ преобразования координат.

Раздел 2.6

1. Найти метрический тензор в базисах $\mathbf{R}_*$ и $\mathbf{R}^*$, полученных в упражнении 2.1.1. Убедиться в том, что этот тензор в ортонормированном базисе единичный.

3.3 Расчетные работы (примерные задания)

Расчетная работа к главе 1

1. В ортонормированном базисе $\mathbf{i}^\text{т} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ задан вектор $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$. Найти компоненты вектора $\mathbf{r}$ в базисе $\bar{\mathbf{i}}^\text{т} = (\bar{\mathbf{i}}_1\bar{\mathbf{i}}_2\bar{\mathbf{i}}_3)$, образованном из $\mathbf{i}^\text{т}$ поворотом сначала на угол $\pi/6$ вокруг оси $\mathbf{i}_3$, а затем поворотом полученного базиса на угол $\pi/3$ вокруг нового положения оси $\mathbf{i}_1$.
2. Для векторов $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3$ найти $\mathbf{ab}$, $\mathbf{bc}$, $\mathbf{ab}{\cdot}\mathbf{c}$, $\mathbf{a}{\cdot}\mathbf{bc}$, $\mathbf{ab}{\times}\mathbf{c}$, $\mathbf{ab}{\cdot}\mathbf{bc}$, $tr(\mathbf{ab})$, $tr(\mathbf{ab}{\times}\mathbf{c})$, $tr(\mathbf{ab}{\cdot}\mathbf{bc})$, $J_2(\mathbf{ab}{\cdot}\mathbf{bc})$ и $J_3(\mathbf{ab}{\cdot}\mathbf{bc})$.
3. Тензор $\mathbf{Q}$ в ортонормированном базисе задан матрицей $Q = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$.

3.1. Найти тензоры $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{S}$ полярного разложения $\mathbf{Q}$.
3.2. Разложить $\mathbf{\Lambda}$ на шаровой тензор и девиатор.
3.3. Найти главные инварианты тензоров $\mathbf{Q}$, $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{S}$.
3.4. Представить $\mathbf{\Lambda}$ в базисе его собственных векторов.
3.5. Найти $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$.
3.6. Найти $\mathbf{Q}$, используя теорему Кейли-Гамильтона.
3.7. Найти вектор $\boldsymbol{\pi}$ тензора $\mathbf{\Pi}$ на площадке, равнонаклоненной к собственным векторам тензора $\mathbf{\Pi}$.
3.8. Построить гиперповерхность тензора $\mathbf{\Pi}$ ($\mathbf{x}\cdot\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{x} = 1$).

Расчетная работа к главе 2

1. В ортонормированном базисе декартовой системы координат задан вектор $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3$. Записать $\mathbf{a}$ в ортонормированном базисе векторов $\mathbf{e}_k$ $(k = \overline{1,3})$:

1.1. цилиндрической системы координат, если $\mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3$ направлен по оси цилиндра, а $\mathbf{e}_1$ составляет с $\mathbf{i}_2$ угол θ;

1.2. сферической системы координат, если $\mathbf{e}_1$ составляет с $\mathbf{i}_3$ угол θ, а φ – угол между $\mathbf{i}_1$ и плоскостью векторов $\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{e}_1$.

Найти якобианы соответствующих преобразований.

2. Заданы вектор $\mathbf{a} = 3\mathbf{R}^1 - 2\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^3$ и представление $\mathbf{R}^k$ в ортонормированном базисе $\mathbf{i}^{\mathrm{T}}$: $\mathbf{R}^1 = \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3; \mathbf{R}^2 = -2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3; \mathbf{R}^3 = 5\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$. Найти:

2.1. векторы $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$;

2.2. матрицы g_*, g^* метрических тензоров и физические компоненты $a_{(k)}$ вектора $\mathbf{a}$. Убедиться в том, что $g_* g^* = I$;

2.3. матрицу G преобразования базисов $\mathbf{R}^{*\mathrm{T}} = \mathbf{R}_*^{\mathrm{T}} G$;

2.4. компоненты тензора Леви-Чивита ϵ_{krm}.

Заключение

Вдумчивый читатель, добросовестно изучивший курс тензорной алгебры, не мог не отметить одно из основных достоинств математического аппарата тензорного исчисления, о котором не упоминалось в пособии, а именно – запись физических явлений и процессов в тензорно-операторной форме для пространства любого измерения практически не отличается от соответствующей записи для одномерного пространства (см., например, раздел 1.7). Это во многих случаях позволяет обобщить закономерности, выявленные для одномерных сред, на среды с отличной от единицы размерностью. Например, закон Гука зависимости между напряжениями и деформациями, установленный его автором для случая растяжения стержня, записывается в операторной форме так же, как для стержня. Разница будет заключаться лишь в смысле фигурирующих в записи величин. А именно, вместо одномерного напряжения в стержне, равного растягивающей силе, поделенной на площадь поперечного сечения стержня, в тензорно-операторном соотношении будет фигурировать тензор второго ранга напряжения, вместо относительного удлинения – тензор второго ранга деформации, а вместо модуля упругости (Юнга) – тензор четвертого ранга свойств материала.

После составления модели процесса или явления и обобщения этой модели на пространство необходимого измерения путем записи модели в тензорно-операторной форме переход к координатной записи для любых невырожденных систем координат становится "делом техники".

Добросовестные читатели пособия создали себе солидную базу для освоения "математизированных" наук. Автор желает им успеха на этом нелегком пути.

Автор выражает благодарность доцентам Г.Н.Горелову и Е.А.Ефимову за помощь в освоении издательской системы LaTeX, с использованием которой подготовлено данное пособие.

Библиография

[1] *Лурье А.И.*. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. С. 799 – 838 и 850 – 877.

[2] *Лурье А.И.*. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. С. 422 – 446.

[3] *Победря Б.Е.*. Лекции по тензорному исчислению. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 207 с.

[4] *Сокольников И.*. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1971. – 376 с.

[5] Введение в нелинейную механику. Ч.1. Необходимые сведения из тензорного исчисления: Методические указания /Сост. П.В.Трусов, Ю.И.Няшин; Перм. ун-т. – Пермь, 1992. – 104 с.

Учебное издание

Горлач Борис Алексеевич

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор Т.К.Кретинина
Техн. редактор Г.А.Усачева
Корректор Т.К.Кретинина

Лицензия ЛР N 020301
от 30 декабря 1996 г.

Подписано в печать 14.09.98. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,42 Усл. кр.-отт. 4,54 Уч.-изд. л. 4,75
Тираж 200 экз. Заказ 54.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева. 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 151.