

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Б.В. СКВОРЦОВ, А.В. ПАРШИНА*

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАДИОАВТОМАТИКИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 11.03.01 Радиотехника, по специальности 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2018

УДК 621.396(075)  
ББК 32.84я7  
С427

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В.И. Б а т и щ е в ;  
канд. техн. наук, доц. Д.В. Р о д и н

*Скворцов, Борис Владимирович*

**С 427** **Теоретические основы радиоавтоматики:** учеб. пособие /  
*Б.В. Скворцов, А.В. Паришина.* – Самара: Изд-во Самарского  
университета, 2018. – 196 с.: ил.

**ISBN 978-5-7883-1311-5**

Рассмотрены основы теории линейных систем автоматического регулирования радиотехническими системами и устройствами. Даны методы математической идентификации объектов и элементы оптимального синтеза при наличии помехи.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 11.03.01 Радиотехника, по специальности 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы.

Подготовлено на кафедре электротехники.

УДК 621.396(075)  
ББК 32.84я7

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Основные понятия теории автоматического регулирования и управления .....	5
2 Объект управления .....	6
3 Виды управления .....	7
4 Классификация САУ .....	8
5. Типовая схема САР .....	10
6 Примеры САР .....	10
7 Теория линейных САУ. Типовые воздействия на САУ .....	13
8 Основные характеристики звеньев САУ .....	16
9 Общие свойства линейных звеньев .....	19
10 Типовые звенья САУ .....	20
11 Звенья с модулированным сигналом .....	32
12 Соединение линейных звеньев .....	38
13 Определение передаточных функций элементов САУ по экспериментальным частотным характеристикам .....	42
14 Определение передаточной функции звена по экспериментальным переходным характеристикам .....	46
15 Реальные элементы САУ и их характеристики. Датчики .....	50
16 Усилители .....	55
17 Сравнивающие устройства, дискриминаторы .....	57
18 Исполнительные устройства .....	61
19 Функциональные и структурные схемы САУ и их передаточные функции .....	71
20 Передаточная функция по возмущению .....	78
21 Примеры радиотехнических САР .....	81
22 Устойчивость САУ .....	91
23 Устойчивость систем с запаздыванием .....	102

24 Влияние параметров системы на ее устойчивость .....	106
25 Качество процессов управления (качество САУ).....	114
26 Методы анализа качества процессов управления. прямые методы анализа .....	118
27 Косвенные методы исследования качества САУ .....	120
28 Ошибки вынужденных режимов. Динамические ошибки.....	128
29 Коррекция САУ .....	134
30 Виды коррекции.....	134
31 Методы синтеза корректирующих устройств.....	136
32 Синтез последовательного корректирующего устройства по ЛАЧХ.....	138
33 Синтез параллельного корректирующего устройства по ЛАЧХ	139
34 Реализация корректирующих устройств .....	143
35 Анализ случайных процессов в линейных САУ.....	144
36 Анализ прохождения случайного сигнала через линейную систему .....	149
37 Определение ошибки САУ при случайных помехах .....	152
38 Синтез САУ по минимуму среднеквадратической ошибки .....	155
39 Краткие выводы по анализу случайных сигналов в линейных системах радиоавтоматики .....	161
Заключение.....	162
Список литературы.....	163
Приложение А – Характеристики типовых звеньев.....	164
Приложение Б – Задания для индивидуального выполнения .....	167

## ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления как наука возникла в 1887 г., когда профессор Санкт-Петербургского технологического университета Вышнеградский А.В. сформулировал основные принципы регулирования паровых котлов. В дальнейшем эта наука получила колоссальное развитие и была сформулирована как кибернетика. *Кибернетика* – наука об управлении объектами. Родоначальником кибернетики считается Норберт Винер, сформулировавший в начале 40-х годов XX века основные принципы конструирования вычислительных и управляющих машин. Кибернетика состоит из двух больших разделов – информатики и автоматики, математическая часть которой и есть теория автоматического управления. *Техническая кибернетика* – наука об управлении техническими объектами. *Радиоавтоматика* – часть технической кибернетики, связанная с автоматическим управлением радиотехническими объектами. Объектом управления в радиоавтоматике может быть транзистор, микросхема, генератор, радиоприемник, радиостанция, блок питания, антенна, электродвигатель и другие устройства.

## 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

*Объект управления* – устройство, которое работает в требуемом режиме, причем режим работы обеспечивается специально организованными управляющими воздействиями.

*Управление* – формирование управляющих воздействий.

*Регулирование* – частный вид управления – обеспечение постоянства какого-либо параметра объекта управления.

*Автоматическое управление* – управление без участия человека.

*Управляющее устройство* – устройство, оказывающее влияние на объект управления.

САУ (система автоматического управления) – совокупность объекта управления и управляющего устройства, взаимодействующих между собой.

Воздействия на САУ– влияние устройства управления или внешней среды на объект управления – бывают детерминированные и случайные.

Задающее воздействие – планируемое воздействие.

Ошибка управления – разность между номинальным и реальным значениями выходного сигнала.

## 2 ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ

В общем случае объект управления может быть представлен в виде, показанном на рис. 1, где  $\bar{F}$  – совокупность неконтролируемых воздействий,  $\bar{Z}$  – совокупность контролируемых воздействий,  $\bar{Y}$  – совокупность выходных параметров,  $\bar{X}$  – совокупность управляющих сигналов.

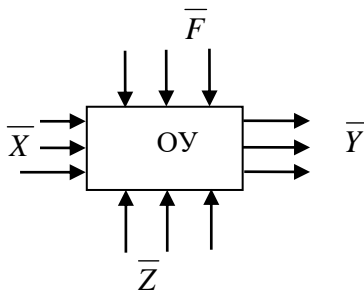


Рис. 1. Объект управления

Для управления объектом необходимо знать функцию преобразования  $\bar{Y} = Q(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ . Объект называется односвязным, если на входе один параметр. Объект называется многосвязным, если на входе несколько параметров.

Задачей системы АРУ является обеспечение управления объектом, не зная точной функции преобразования.

### 3 ВИДЫ УПРАВЛЕНИЯ

1. Жесткое управление (рис. 2) – управляющий сигнал формируется без учета возмущающих воздействий и выходного сигнала.

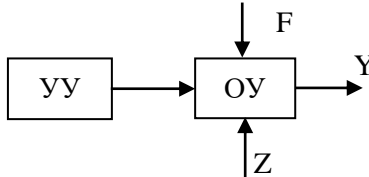


Рис. 2. Жесткое управление

2. Управление по возмущению (рис. 3) – управляющий сигнал формируется с учетом контролируемых возмущающих воздействий, но без учета реального значения выходного сигнала.

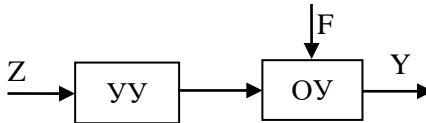


Рис. 3. Управление по возмущению

3. Управление по отклонению (управляющее воздействие формируется в зависимости от реального значения выходного параметра  $X = f(Y - X_0)$ ) (рис. 4, 5).

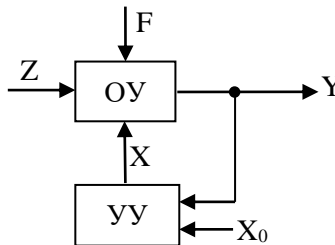


Рис. 4. Управление по отклонению

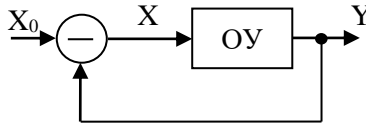


Рис. 5. Классическая (каноническая) схема автоматического управления по отклонению

Здесь реальное значение выходного параметра сравнивается с эталонным значением, и если они отличаются, то сравнивающее устройство выдает сигнал рассогласования, который воздействует на объект управления таким образом, чтобы свести рассогласование к нулю.

4. Комбинированное управление (рис. 6) – объединяет управление по отклонению и возмущению.

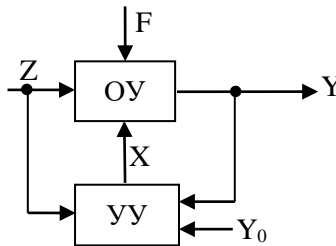


Рис. 6. Комбинированное управление

В соответствии с видом управления различают замкнутые и разомкнутые САУ. В разомкнутой САУ информация идет в одном направлении. В замкнутой САУ информация циркулирует по контуру и используется для формирования управляющего сигнала, если  $X_0 = \text{const}$ , то имеет место регулирование (система автоматического регулирования – САР).

## 4 КЛАССИФИКАЦИЯ САУ

Классификация САУ строится по следующим признакам:

1. По виду управления:



- программные;
  - следящие;
  - адаптивные.
2. По характеру сигналов:
    - непрерывные;
    - импульсные;
    - цифровые.
  3. По виду зависимости:
    - линейные;
    - нелинейные.
  4. По стационарности:
    - стационарные;
    - нестационарные;
    - квазистационарные.
  5. По структуре:
    - статические;
    - астатические.

*Адаптивная система* (рис. 7) – дополнительно содержит устройство адаптации (УА), которое управляет устройством управления с целью оптимизации САУ по заданному критерию.

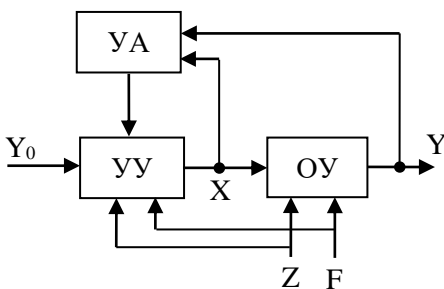


Рис. 7. Адаптивная система

Адаптивные САУ бывают: экстремальные, самонастраивающиеся, самоорганизующиеся, самообучающиеся.

## 5 ТИПОВАЯ СХЕМА САУ

Любая САУ имеет типовую структурную схему, приведенную на рис. 8.

На структурной схеме обозначены: ОУ – объект управления; Д – датчик-преобразователь выходного сигнала с ОУ в форму, удобную для дальнейшего использования; СУ – сравнивающее устройство; ЗУ – задающее устройство (формирует эталонный сигнал); У – усилитель, на который подается сигнал рассогласования  $\delta = Y_0 - Y_1$ ; ИУ – исполнительное устройство.

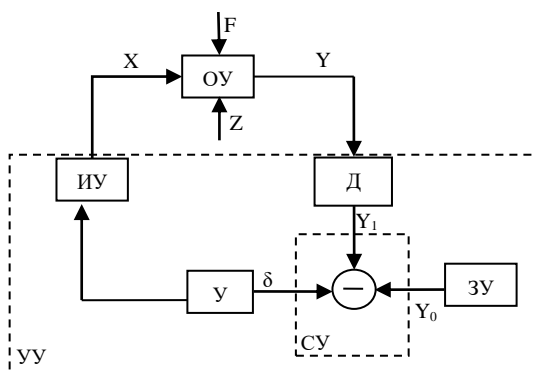


Рис. 8. Типовая схема САУ

Целью регулирования является обеспечение постоянства выходного параметра  $Y = \text{const}$ . Мерой эталонного параметра является сигнал  $Y_0$ , формируемый задающим устройством ЗУ. Если выходной сигнал отличается от требуемого, то сравнивающее устройство выдаст сигнал рассогласования  $\delta = Y_0 - Y_1$ , который, усиливаясь, воздействует на объект управления таким образом, чтобы свести рассогласование к нулю.

## 6 ПРИМЕРЫ САУ

1) Система автоматического регулирования угловой скорости вращения вала электродвигателя (рис. 9). Применяется в аудио- и видеосистемах, а также в электроприводах силовых установок.

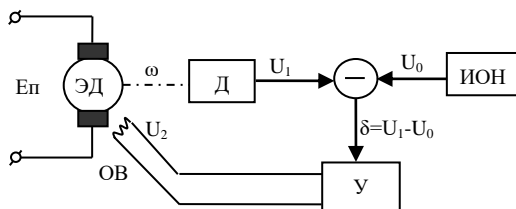


Рис. 9. Система автоматического регулирования угловой скорости вращения вала двигателя:

ЭД – электродвигатель, Д – датчик, ИОН – источник опорного напряжения, У – усилитель, ОВ – обмотка возбуждения

*Цель* – стабилизация угловой скорости вращения  $\omega$  вала двигателя. ЭД имеет обмотку якоря, подключенную к напряжению питания  $E_{\text{п}}$  и обмотку возбуждения ОВ, подключенную к выходу усилителя рассогласования. Если скорость вращения отличается от требуемой, заданной напряжением  $U_0$ , то сравнивающее устройство выдает сигнал рассогласования  $\delta$ , который меняет ток обмотки возбуждения таким образом, чтобы свести рассогласование к нулю.

2) Система автоматической регулировки усиления (АРУ) в радиоприемных устройствах (рис. 10). Применяется в радиоприемниках, системах звукозаписи и звуковоспроизведения.

*Цель* – адаптивное уменьшение коэффициента усиления промежуточных каскадов радиоприемного устройства при больших входных сигналах. Это необходимо для увеличения качества приема и предотвращения перегрузки выходных каскадов.

Например, самолет может находиться в 100 метрах от радиостанции или в 1000 километрах от нее. При этом уровень входного сигнала бортового радиоприемника может изменяться в миллион и более раз (более 120дБ). Поэтому необходимо применение в бортовом радиоприемнике системы АРУ, которая приспособляла бы радиоприемник под различный уровень входных сигналов. Система АРУ необходима также при использовании частотно-модулированных сигналов, когда передаваемая (принимаемая) информация заложена в изменении частоты. При этом необходимо стабилизировать амплитуду формируемого сигнала.

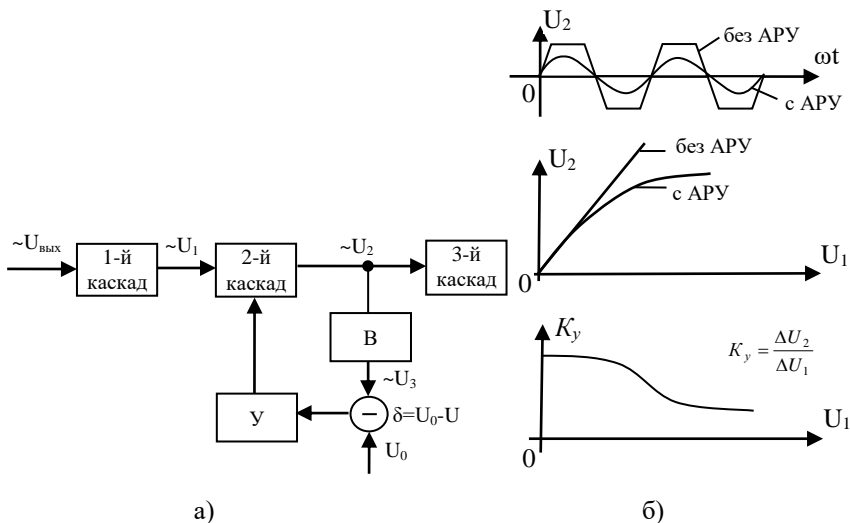


Рис. 10. Структурная схема системы АРУ (а) и характеристики, иллюстрирующие ее назначение и принцип работы (б):

В – выпрямитель, У – усилитель обратной связи

Система работает таким образом: промежуточный каскад усилителя с АРУ охвачен обратной связью, образованной выпрямителем В, сравнивающим устройством и усилителем У. При малых входных сигналах  $U_1$ , при которых выпрямленное значение  $U_3$  выходного сигнала  $U_2$  не превышает заданного  $U_0$ , промежуточный каскад имеет большой коэффициент усиления.

Амплитудные характеристики с АРУ и без АРУ совпадают. Если выпрямленное значение  $U_3$  выходного сигнала  $U_2$  превышает  $U_0$ , то сравнивающее устройство выдает сигнал рассогласования, который воздействует на промежуточный каскад таким образом, чтобы уменьшить его коэффициент усиления. Для этого сигнал рассогласования может управлять глубиной обратной связи, входным делителем или режимом работы активных элементов промежуточного каскада.

## 7 ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ САУ. ТИПОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА САУ

В общем случае, САУ можно изобразить в виде (рис. 11):



Рис. 11. Структурная схема САУ

При исследовании характеристик САУ целесообразно пользоваться простейшими сигналами, на которые может быть разложен любой сложный сигнал. Простейшими сигналами являются следующие:

1) Гармонический сигнал (рис. 12):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[Ae^{j(\omega t + \varphi)}].$$

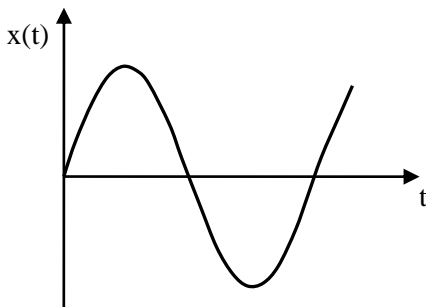


Рис. 12. Гармонический сигнал

Последнее равенство следует из разложения по формуле Эйлера:

$$Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + jA \sin(\omega t + \varphi) = \text{Re} + j \text{Im}.$$

2) Единичный скачок (рис.13):  $1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$

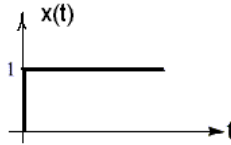


Рис. 13. Единичный скачок

3. Единичный импульс или дельта-функция (рис.14):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0 \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

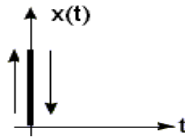


Рис. 14. Единичный импульс

Причем справедливо соотношение:

$$\delta(t) = \frac{d\{1(t)\}}{dt}, \quad 1(t) = \int \delta(t) dt.$$

При исследовании линейных САУ пользуются операторным изображением сигналов по Лапласу:  $x(t) \rightarrow X(p)$ .

Прямое преобразование Лапласа:

$$X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt.$$

Обратное преобразование:

$$x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt} dp.$$

Как правило, операторное изображение входного сигнала представляет собой отношение полиномов:

$$X(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}.$$

Обратное преобразование Лапласа для отношения полиномов имеет вид:

$$L^{-1} \left\{ \frac{B(p)}{A(p)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[ \frac{(p - p_k)^{m_k} B(p)}{A(p)} e^{pt} \right]_{p=p_k}^{(m_k-1)},$$

где  $p_k$  – корни уравнения  $A(p) = 0$ ,  $m_k$  – кратность  $k$ -го корня.

По теореме Виета справедливо следующее соотношение:

$$A(p) = a_n (p - p_1)^{m_1} (p - p_2)^{m_2} \dots (p - p_n)^{m_n}.$$

При отсутствии кратных корней обратное преобразование Лапласа для отношения полиномов имеет вид:

$$L^{-1} \left\{ \frac{B(p)}{A(p)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Основные свойства преобразования Лапласа, которые будем использовать в данном курсе:

$$L \left\{ a \sum_{k=1}^n x_k(t) \right\} = a \sum_1^n X_k(p),$$

$$L \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = p^n X(p), \quad L[1(t)] = \frac{1}{p}, \quad L[\delta(t)] = 1,$$

$$L[t] = \frac{1}{p^2}, \quad L[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{p + \alpha}.$$

## 8 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ САУ

САУ можно представить в виде соединения звеньев. Одним из этих звеньев обязательно является объект управления. Любая часть САУ может быть рассмотрена как звено системы. Реальные звенья и элементы могут иметь различные конструкции и разные физические принципы работы, но с точки зрения анализа работы имеют значения лишь математические зависимости, связывающие входные и выходные сигналы звеньев.

Если преобразование сигнала может производиться только в одном направлении, то такое звено называется однонаправленным (звеном направленного действия). При этом сигналы, действующие на входе и на выходе, можно представлять в обычной или операторной форме (рис. 15).

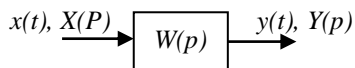


Рис. 15. Иллюстрация к описанию однонаправленных звеньев

В общем случае любая линейная САУ или ее часть (звено) описывается следующими характеристиками:

### 1) Дифференциальное уравнение

$$\sum_0^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_0^m b_k \frac{d^k x}{dt^k} \quad (m \leq n).$$

В операторной форме дифференциальное уравнение при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$y(p) \sum_0^n a_k p^k = x(p) \sum_0^m b_k p^k.$$

2) *Передаточная функция* – отношение операторных изображений выходного и входного сигналов (обычно отношение полиномов).



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}.$$

Полюсами передаточной функции называются корни уравнения  $A(p)=0$ .

Нулями передаточной функции называются корни уравнения  $B(p)=0$ .

3) *Комплексный коэффициент передачи (ККП) системы* – отношение преобразований Фурье выходного и входного сигналов.

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{\sum b_k (j\omega)^k}{\sum a_k (j\omega)^k} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega),$$

где  $x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ .

Формально ККП системы образуется из передаточной функции путем замены  $p$  на  $j\omega$ .

Графическое изображение комплексного коэффициента передачи называется *годографом* системы (звена) (рис. 16). Каждая точка годографа иллюстрирует коэффициент усиления  $A(\omega)$  и фазу выходного сигнала  $\varphi(\omega)$ .

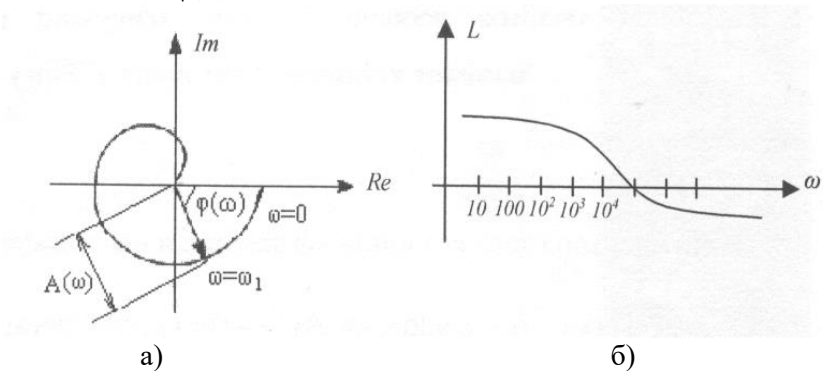


Рис. 16. Пример годографа (а) и ЛАЧХ звена (б)

4) *Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)* – зависимость коэффициента усиления от частоты:

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = |W(j\omega)|.$$

Используется также логарифмическая АЧХ (ЛАЧХ):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

При построении ЛАЧХ горизонтальная шкала откладывается в декадах (рис. 16), а коэффициент усиления измеряется в децибелах. При этом следует помнить, что коэффициент усиления есть отношение амплитуд сигналов на входе и на выходе звена, поэтому коэффициенту усиления  $A=10$  соответствует  $L=20 \lg 10 = 20$  дБ, при  $A=1$ ,  $L=0$ ; при  $A=0,1$  дБ,  $L=-20$  дБ; при  $A=100$ ,  $L=40$  дБ; при  $A=1000000$ ,  $L=120$  дБ. Отметим, что в отличие от всегда положительной АЧХ ЛАЧХ отрицательна при  $A < 1$ .

Преимущества ЛАЧХ:

- позволяет графически изображать  $A(\omega)$  в широком диапазоне частот;
- для наиболее распространенного последовательного соединения звеньев ЛАЧХ всей системы получается путем суммирования ЛАЧХ отдельных звеньев.

Кроме обычной ЛАЧХ в теории автоматического управления используют также асимптотическую ЛАЧХ – это ЛАЧХ, которая получается в результате аппроксимации обычной ЛАЧХ ломаной линией с наклоном, кратным 20 дБ/дек.

5) *Фазочастотная характеристика (ФЧХ)* – зависимость фазы выходного сигнала от частоты:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}.$$

6) *Переходная функция  $h(t)$*  – выходной сигнал при подаче на вход единичного скачка. Применяется для оценки качества систем управления.

При  $x(t)=1(t)$ :

$$x(p) = L[1(t)] = \frac{1}{p}, y(p) = x(p)W(p),$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p}, h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}.$$

7) *Весовая функция*  $w(t)$  – это выходной сигнал при подаче на вход  $\delta$ -функции.  $x(p) = 1$ ,  $L[\delta(t)] = 1$ ,  $w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$ .

Такая функция применяется для оценки устойчивости системы. По весовой функции можно определить выходной сигнал системы:  $y(t) = \int_0^{\infty} w(t-t')x(t')dt'$ , при  $t = 0$   $w(t) = 0$ .

Переходная и весовая функции связаны соотношением:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

## 9 ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

В линейных звеньях, полюса которых находятся в левой полуплоскости, существует однозначная взаимосвязь между АЧХ и ФЧХ. Это следует из преобразования Гильберта для комплексных функций.

Если есть функция  $F(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$ , все полюса которой имеют отрицательную вещественную часть, то действительная и мнимая части связаны соотношением:

$$\text{Im}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(v)}{v - \omega} dv; \text{Re}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(v)}{v - \omega} dv.$$

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega) = F(j\omega);$$

$$\text{Im}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(v)}{v - \omega} dv = \varphi(\omega);$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 8,7 \ln A(\omega); \varphi(\omega) = \frac{1}{8,7\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(v)}{v - \omega} dv.$$

Это означает, что какой-либо амплитудно-частотной характеристике звена или системы соответствует одна единственная фазочастотная характеристика.

## 10 ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ САУ

Звенья могут иметь различную физическую структуру. Они могут быть электрическими, механическими, гидравлическими, пневматическими. Но с математической точки зрения все многообразие реальных звеньев можно свести к типовым, с помощью которых можно представить сложную САУ. *Типовые* звенья – наиболее простые звенья, в которых физические процессы описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

1) *Пропорциональное звено*. Электрическая и механическая модели пропорционального звена представлены на рис. 17. Механическая модель представлена в виде редуктора с числом зубьев на колесах  $n_1$  и  $n_2$ . Характеристики пропорционального звена имеют вид:

- уравнение преобразования:  $y = kx$ ,
- передаточная функция (ПФ):  $W(p) = k$  ;
- комплексный коэффициент передачи (ККП):  $W(j\omega) = k$  ;
- АЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ пропорционального звена соответственно:

$$A(\omega) = k, \quad L(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}} = 0 ;$$

- переходная функция:  $h(t) = L^{-1} \left[ \frac{k}{p} \right] = k1(t)$  .

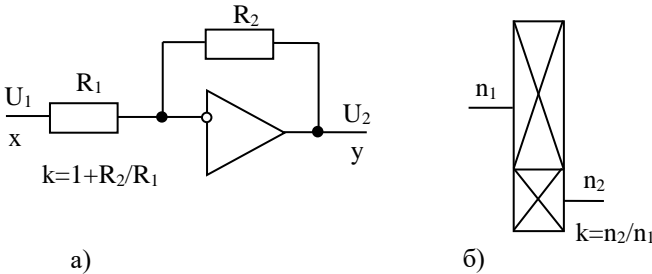


Рис. 17. Электрическая (а) и механическая (б) модели пропорционального звена

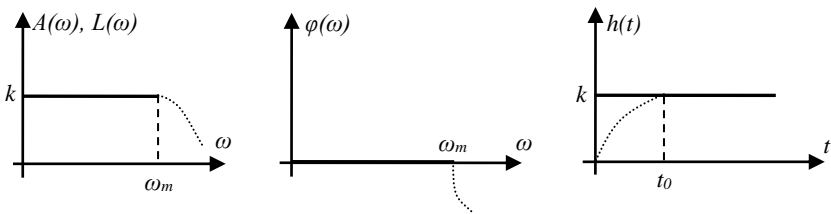


Рис. 18. АЧХ, ФЧХ и переходная функция пропорционального звена

Графики рассмотренных функций показаны на рис. 18.

Любое реальное звено может соответствовать какому-то типовому только в определенном диапазоне частот  $\omega_0 < \omega < \omega_m$ . При больших частотах вступают в силу различные физические процессы, поэтому коэффициент усиления снижается до нуля. Для трансформатора и резистора это межвитковые связи, для усилителя – внутренние и монтажные емкости, для редуктора – упругость валов. При частотах больших  $\omega_m$  все характеристики имеют вид пунктирной линии.

2) *Интегрирующее звено* (рис. 19):

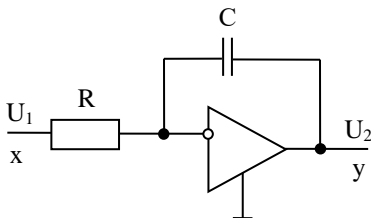


Рис. 19. Электрическая модель интегрирующего звена

Основное уравнение интегрирующего звена:  $U_2 = \int_0^t U_1(t) dt$ .

Остальные характеристики имеют вид:

$$W(p) = \frac{k}{p}, \quad W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega},$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = -\frac{\pi}{2},$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega ,$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}, h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k}{p^2} \right\} = kt .$$

Отметим, что ЛАЧХ имеет наклон -20 дБ/дек и пересекает ось частоты при  $\omega = k$  (рис. 20).

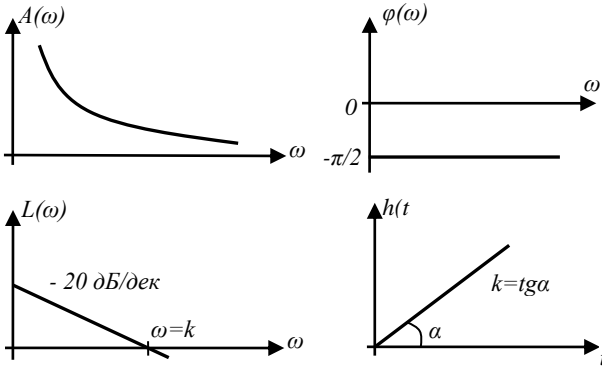


Рис. 20. Характеристики интегрирующего звена

### 3) Дифференцирующее звено (рис. 21):

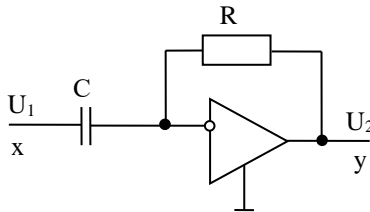


Рис. 21. Электрическая модель дифференцирующего звена

Уравнение преобразования:  $y = k \frac{dx}{dt}$ .

Остальные характеристики имеют вид:

$$W(p) = kp, \quad W(j\omega) = kj\omega, \quad A(\omega) = k\omega, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$h(t) = L^{-1}(k) = k\delta(t), \quad L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Графики рассмотренных функций показаны на рис. 22.

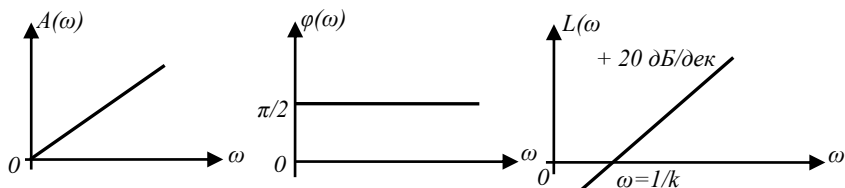


Рис. 22. Характеристики дифференцирующего звена

Отметим, что ЛАЧХ дифференцирующего звена имеет наклон  $+20\text{дБ/дек}$  и пересекает ось частоты при  $\omega = 1/k$ .

4) *Инерционное звено* (рис. 23):

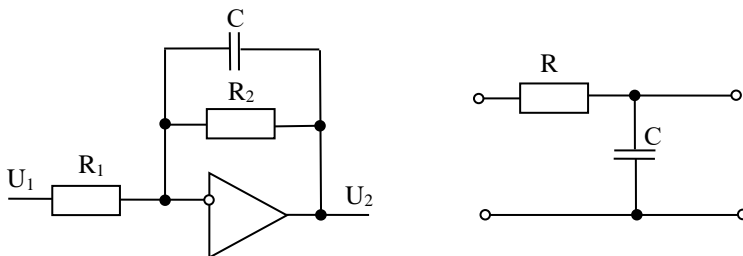


Рис. 23. Электрические модели инерционного звена

Основное уравнение преобразования:  $T \frac{dy}{dt} + y = kx$ .

Для электрической модели с операционным усилителем:

$$k \approx \frac{R_2}{R_1}, \quad T = CR_2.$$

Другие характеристики:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T)} = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = k \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2} = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega),$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \omega T,$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg(1 + \omega^2 T^2).$$

Кроме простой ЛАЧХ в теории управления используется асимптотическая ЛАЧХ. Она строится следующим образом:

- весь диапазон частот разбивается на характерные участки, определяемые коэффициентом при частоте под логарифмом;
- при построении асимптоты оставляют только то слагаемое под логарифмом, которое максимально на рассматриваемом участке частоты.

В данном случае получим:

$$L_a = \begin{cases} 20 \lg k, & 0 < \omega < \frac{1}{T}, \quad \text{т.к. } \omega T < 1 \text{ и } \lg 1 = 0 \\ 20 \lg k - 20 \lg \omega T, & \frac{1}{T} < \omega < \infty; \end{cases}$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{k}{p(Tp + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{B(p)}{A(p)} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t} = k(1 - e^{-\frac{t}{T}});$$

$$A(p) = p(Tp + 1) = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -1/T;$$

$$A'(p) = 2Tp + 1, \quad A'(p_1) = 1, \quad A'(p_2) = -1.$$

Графики рассмотренных функций показаны на рис. 24.



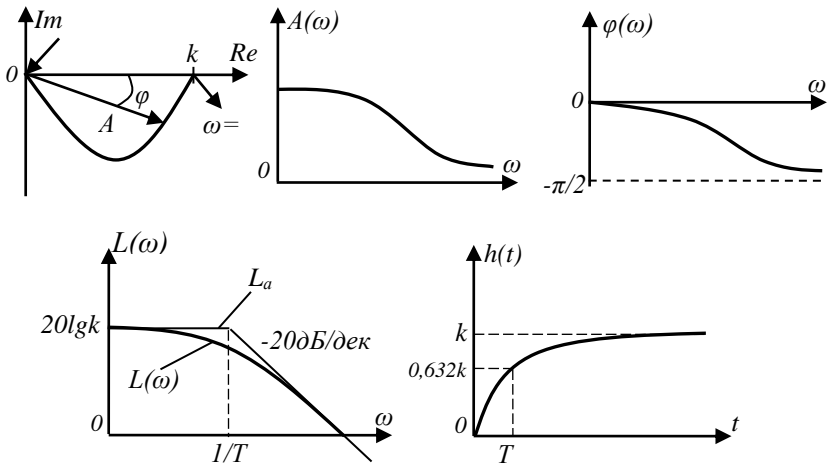


Рис. 24. Характеристики инерционного звена

5) Форсирующее звено (рис. 25):

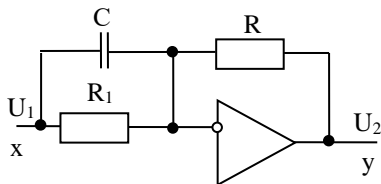


Рис. 25. Электрическая модель форсирующего звена

Уравнение преобразования:  $y = k(T \frac{dx}{dt} + x)$ .

Для электрической модели:  $k \approx \frac{R_2}{R_1}$ ,  $T = CR_1$ .

$$W(p) = k(1 + pT), \quad W(j\omega) = k(1 + j\omega T),$$

$$A(\omega) = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega T),$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 10 \lg(1 + \omega^2 T^2).$$

Для асимптотической ЛАЧХ можно записать:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k, & 0 < \omega < \frac{1}{T} \\ 20 \lg k + 20 \lg \omega T, & \frac{1}{T} < \omega < \infty. \end{cases}$$

Переходная характеристика:

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{k}{p} + kT\right) = k1(t) + kT\delta(t).$$

Графики рассмотренных функций представлены на рис. 26.

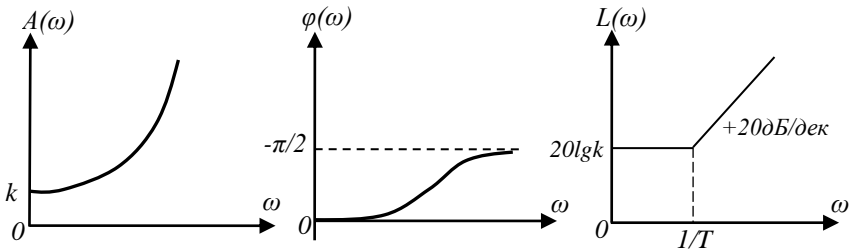


Рис. 26. Частотные характеристики форсирующего звена

б) *Инерционно-форсирующее звено* (рис. 27):

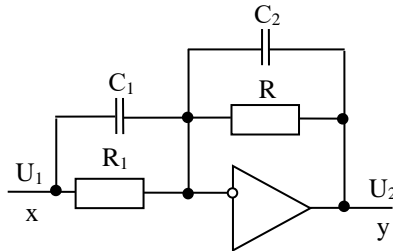


Рис. 27. Электрическая модель инерционно-форсирующего звена

$y + T_2 \frac{dy}{dt} = k(x + T_1 \frac{dx}{dt})$  – дифференциальное уравнение.

Характеристики инерционно-форсирующего звена:

$$W(p) = k \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}, \quad W(j\omega) = k \frac{1 + \omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_2^2},$$

$$A(\omega) = k \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T_2^2}}, \quad \varphi(\omega) = \text{arctg } \omega T_1 - \text{arctg } \omega T_2,$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 10 \lg(1 + \omega^2 T_1^2) - 10 \lg(1 + \omega^2 T_2^2).$$

Выражения для асимптот ЛАЧХ получаются путем разбивки диапазона частот на участки, отделяемые значениями  $\frac{1}{T_1}$  и  $\frac{1}{T_2}$ .

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{k(1 + T_1 p)}{(1 + T_2 p)p} \right\} = k \left\{ 1 + \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right\}.$$

Характеристики, вид которых зависит от соотношения постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ , показаны на рис. 28.

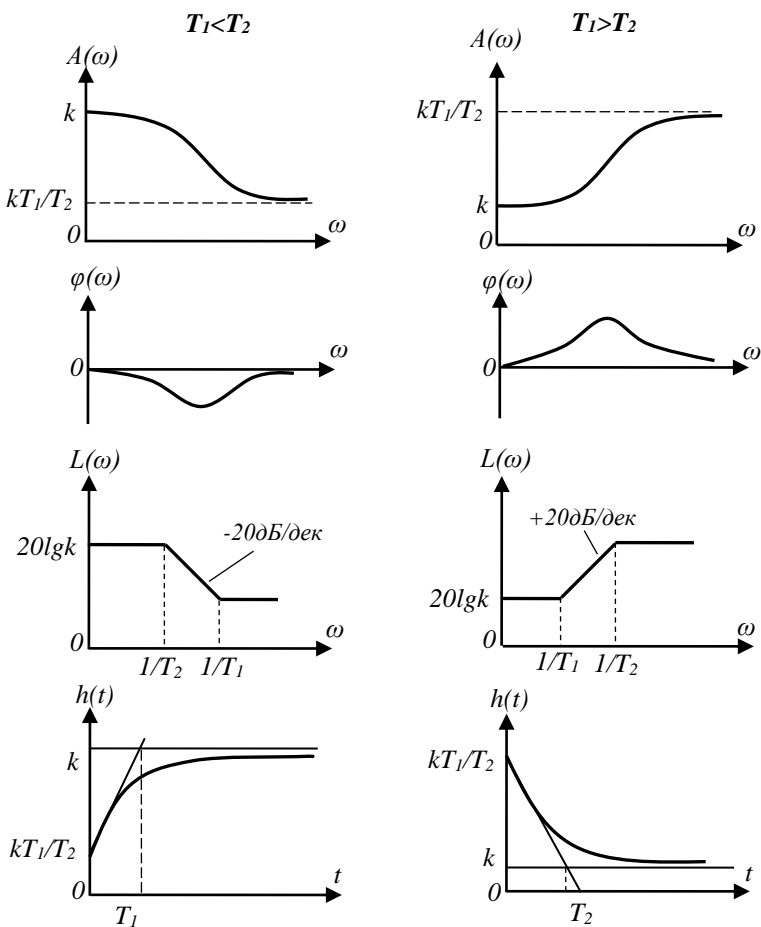


Рис. 28. Характеристики инерционно-форсирующего звена

7) Колебательное звено (рис. 29).

Дифференциальное уравнение:  $T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon T \frac{dy}{dt} + y = kx$ .

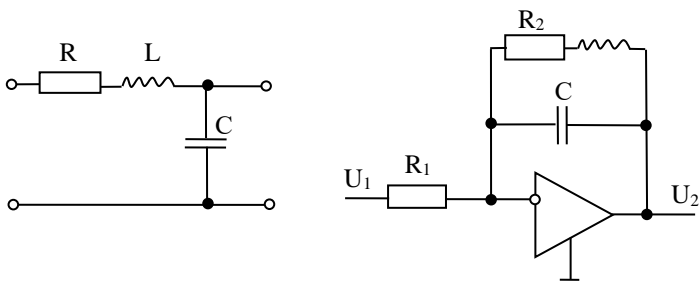


Рис. 29. Электрическая модель колебательного звена

Характеристики колебательного звена:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\varepsilon T p + 1},$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2 (j\omega)^2 + 2\varepsilon T j\omega + 1} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\varepsilon^2 T^2 \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{2\varepsilon T \omega}{1 - \omega^2 T^2},$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg \{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2 T^2\},$$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k, & \omega < 1/T, \\ 20 \lg k - 40 \lg \omega T, & \omega > 1/T, \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Рассмотренные характеристики показаны на рис. 30.

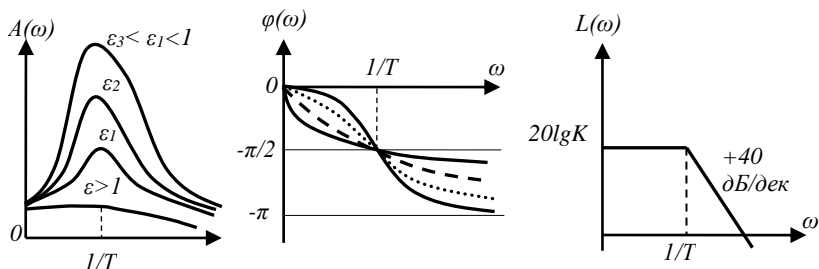


Рис. 30. АЧХ, ФЧХ и ЛАЧХ колебательного звена

Переходная характеристика:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{k}{(T^2 p^2 + 2\varepsilon T p + 1)p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{B(p)}{A(p)} \right\},$$

$$A(p) = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{T}.$$

При  $\varepsilon < 1$

$$h(t) = k \left[ (1 - ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)) \right], \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{T}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{T}.$$

При  $\varepsilon > 1$

$$L(t) = k(1 + c_1 e^{p_2 t} + c_2 e^{p_3 t}).$$

Переходные характеристики показаны на рис. 31.

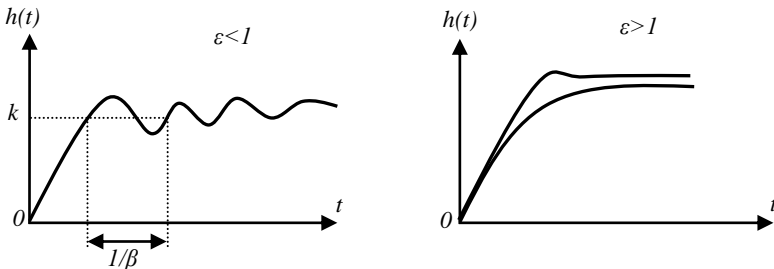


Рис. 31. Переходные характеристики колебательного звена при разных  $\varepsilon$

*Замечание.* В общем случае, если передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{a^2 p^2 + bp + c}, \quad \text{то необходимо найти корни этого трехчлена.}$$

Если корни  $p_1, p_2$  комплексные, то это звено следует отнести к типовому колебательному звену; а если корни действительные, то необходимо разложить этот трехчлен по теореме Виета и рассмотреть звено как последовательное соединение двух инерционных звеньев:  $a^2 p^2 + bp + c = a(p - p_1)(p - p_2)$ . ЛАЧХ квадратного трехчлена с действительными корнями показана на рис. 32.

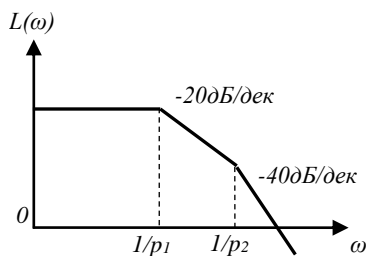


Рис. 32. ЛАЧХ квадратного трехчлена при действительных корнях

8) *Звено чистого запаздывания.*

Сигнал на выходе этого звена повторяет входной сигнал с постоянным запаздыванием.

Дифференциальное уравнение:  $y(t) = x(t - \tau)$ .

Характеристики звена:

$$W(p) = e^{-p\tau} \quad W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau ;$$

$$A(\omega) = 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega\tau, \quad h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-p\tau}}{p} \right\} = 1(t - \tau).$$

Характеристики показаны на рис. 33.

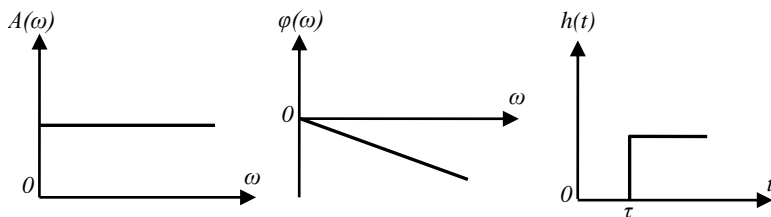


Рис. 33. Характеристики звена чистого запаздывания

Примером такого звена может быть телевизионный кабель с индуктивностью  $L_0$ , емкостью  $C_0$ , нагруженный на согласованное

сопротивление  $Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ ,  $\tau = l\sqrt{L_0 C_0}$ , где  $l$  – длина кабеля. Звено

используется при моделировании импульсных и цифровых схем.

## 11 ЗВЕНЬЯ С МОДУЛИРОВАННЫМ СИГНАЛОМ

До сих пор рассматривались звенья с немодулированным сигналом. В радиоавтоматике часто используются звенья, у которых сигнал представляет собой переменное напряжение (ток) некоторой частоты  $\omega_0$ , называемой несущей (рис. 34). Это могут быть усилители, чувствительные элементы и т.д. В этом случае закон изменения сигнала во времени характеризуется изменением амплитуды или действующего значения этого напряжения, т.е. огибающей. При этом передаваемая информация закладывается в огибающую модулированного сигнала. Сущность простейшей амплитудной модуляции показана на рис. 35.

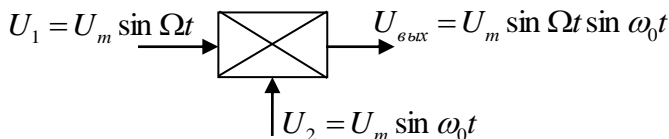


Рис. 34. Иллюстрация к амплитудной модуляции сигнала:  
 $\omega_0$  – несущая частота,  $\Omega$  – частота огибающей

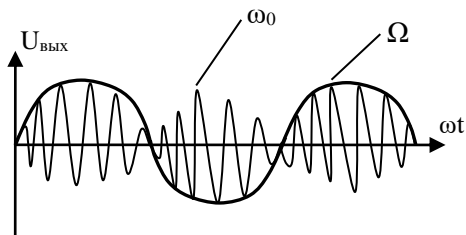


Рис. 35. Простейшая амплитудная модуляция

При расчете систем автоматического управления, работающих с модулируемым сигналом, возникают две задачи.

1) *Задача анализа* – определение воздействия звена с заданной передаточной функцией на огибающую модулированного сигнала, т.е. нахождение передаточной функции  $W_\Omega(p)$  и комплексного коэффициента передачи  $W(j\Omega)$  по огибающей.

2) *Задача синтеза* – синтезировать звено, которое по своему воздействию на огибающую модулированного сигнала было бы



эквивалентно заданному (в частности типовому) звену, используемому в системе с немодулируемым сигналом.

Рассмотрим первую задачу – задачу анализа.

Дано:  $W(p)$ ,  $W(j\omega)$ ,  $\omega_0$ .

Определить:  $W_\Omega(p)$ ,  $W(j\Omega)$ .

Без доказательства приведем правило определения передаточной функции звена по огибающей. Если на обычное звено с передаточной функцией  $W(p)$  и ККП  $W(j\omega)$  идет модулируемый сигнал с частотой огибающей  $\Omega$  и несущей частотой  $\omega_0$ , то передаточная функция и ККП по огибающей будут иметь вид:

$$W_\Omega(p) = W(p + j\omega_0);$$

$$W(j\Omega) = W[j(\Omega + \omega_0)].$$

Например:  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$ ;  $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$ .

Соответственно передаточная функция и ККП по огибающей определяются:

$$W_\Omega(p) = \frac{k}{1 + T(p + j\omega_0)}; W(j\Omega) = \frac{k}{1 + Tj(\omega_0 + \Omega)}.$$

АЧХ и ФЧХ по огибающей примет вид (рис. 36):

$$A(\Omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\Omega + \omega_0)^2 T^2}}, \quad \varphi(\Omega) = -\arctg(\Omega + \omega_0)T.$$

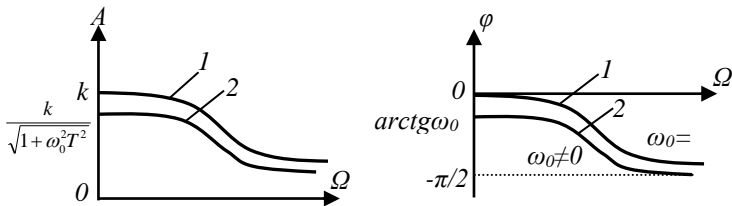


Рис. 36. Иллюстрация к правилам определения АЧХ и ФЧХ по огибающей сигнала:

1 – немодулированный сигнал; 2 – модулированный сигнал

Отметим, что рассмотренный метод позволяет находить ККП по огибающей только для звеньев с симметричной АЧХ, т.е. таких, у которых в выражении для АЧХ замена  $+\omega$  на  $-\omega$  не приводит к изменению значения АЧХ. В общем случае эквивалентная передаточная функция для огибающей может быть определена из выражения:

$$W(j\Omega) = \frac{W[j(\Omega + \omega_0)] + \omega[j(\Omega - \omega_0)]}{2},$$

$$W_{\Omega}(p) = \frac{W(p + j\omega_0) + W(p - j\omega_0)}{2}.$$

Однако эти выражения нельзя использовать для элементарных интегрирующего и дифференцирующего звеньев.

Рассмотрим вторую задачу – задачу синтеза.

Дано:  $W_{\Omega}(p)$ ;  $W(j\Omega)$ ;  $\omega_0$  – передаточная функция, ККП по огибающей и несущая частота соответственно.

Найти:  $W(p)$ ,  $W(j\omega)$  – передаточную функцию и ККП звеньев по абсолютной частоте.

Фактически это соответствует синтезу звеньев, которые по огибающей модулированного сигнала имеют требуемые характеристики. Без доказательства приведем правило определения указанных характеристик.

Для того, чтобы по своему действию на огибающую модулированного сигнала звено соответствовало заданным функциям  $W_{\Omega}(p)$  и ККП  $W(j\Omega)$ , необходимо, чтобы по абсолютной частоте звено имело соответственно следующие характеристики:

$$\text{ПФ: } W(p) = W_{\Omega}(p - j\omega_0).$$

$$\text{ККП: } W(j\omega) = W_{\Omega}[j(\omega - \omega_0)].$$

Например, пусть необходимо синтезировать звено с ПФ и ККП по огибающей  $W_{\Omega}(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  и  $W(j\Omega) = \frac{k}{Tj\Omega + 1}$ , т.е. инерционное звено. Этому звену соответствует схема на рис. 37.

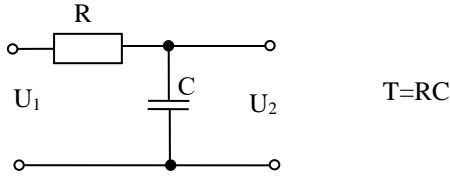


Рис. 37. Иллюстрация к примеру решения задачи синтеза

Тогда по абсолютной частоте звено должно иметь следующие характеристики:

$$W(p) = W(p - j\omega_0) = \frac{k}{T(p - j\omega_0) + 1}, \quad W(j\omega) = \frac{k}{Tj(\omega - \omega_0) + 1}.$$

АЧХ и ФЧХ для модулированного сигнала инерционного звена имеют вид (рис. 38):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega - \omega_0)T.$$

Такие характеристики мы должны обеспечить у звена по абсолютной частоте, чтобы по огибающей модулированного сигнала оно было инерционным.

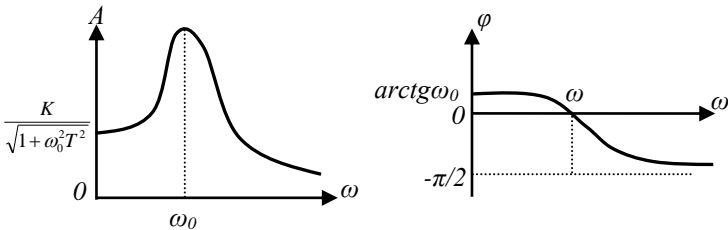


Рис. 38. Иллюстрация к решению задачи синтеза звена с требуемыми характеристиками по огибающей модулированного сигнала

Такая АЧХ реализуется звеном, представленным на рис. 39.

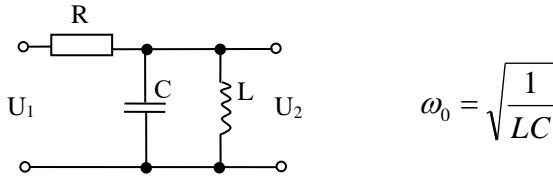


Рис. 39. Иллюстрация к реализации звена

Проиллюстрируем применение изложенного правила на примере инерционно-дифференцирующего звена (RC-цепь) (рис. 40).

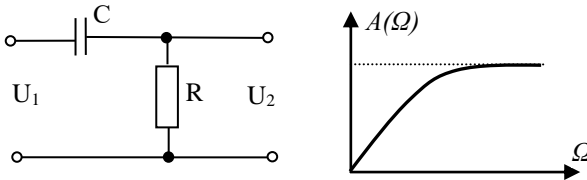


Рис. 40. Схема и АЧХ инерционно-дифференцирующего звена с немодулированным сигналом

Для немодулированного сигнала АЧХ его имеет вид, показанный на рис. 40. Пусть по огибающей звено должно иметь следующие характеристики:

$$W(j\Omega) = \frac{jk\Omega}{1 + jk\Omega}; \quad W_{\Omega}(p) = \frac{kp}{1 + pT};$$

$$A(\Omega) = \frac{k\Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\Omega) = \arctg \frac{1}{\Omega T}.$$

Если на простое звено, показанное на рис. 40, подать модулированный сигнал, то дифференцирование не получится. Действительно, рассмотрим входной сигнал  $U_1 = U_1(t)\cos\omega_0 t$ , где  $U_1(t)$  – передаваемый сигнал. Продифференцируем это выражение.

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{dU_1(t)}{dt} \cos \omega_0 t - \omega_0 U_1(t) \sin \omega_0 t.$$

В результате получилось 2 слагаемых. Первое слагаемое является полезным, так как содержит требуемую производную от огибающей, а второе – вредным, так как оно представляет собой ложный сигнал, который может в сотни раз превышать по уровню полезный сигнал. Согласно изложенному правилу запишем КПП аperiodического звена для модулированного сигнала по абсолютной частоте.

$$W(j\omega) = \frac{jk(\omega - \omega_0)}{Tj(\omega - \omega_0) + 1};$$

$$A(\omega) = \frac{k(\omega - \omega_0)}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2 T^2}}; \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{(\omega - \omega_0)T}.$$

Такая АЧХ реализуется, например, цепочкой, показанной в правой части рис. 41,  $LC = 1/\omega^2$ .

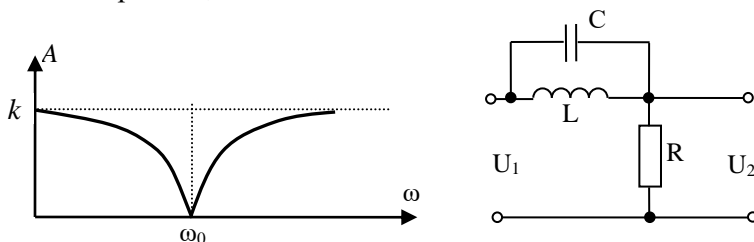


Рис. 41. АЧХ и схема, реализующая инерционно-дифференцирующие свойства по огибающей модулированного сигнала

ФЧХ синтезированного звена должна иметь вид, показанный на рис. 42. Из АЧХ видно, что звено не должно пропускать несущую частоту.

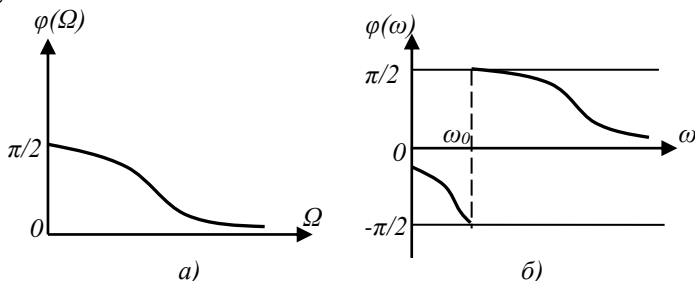


Рис. 42. ФЧХ инерционно-дифференцирующего звена по огибающей и по абсолютной частотам: а) по огибающей; б) по абсолютной частоте

## 12 СОЕДИНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Соединение звеньев бывает трех видов: последовательное, параллельно-согласное, параллельно-встречное.

1) Последовательное соединение (рис. 43):

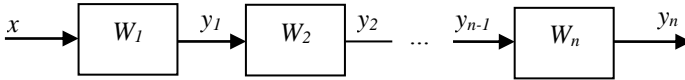


Рис. 43. Последовательное соединение звеньев

Здесь выходная величина одного звена является входной величиной другого, поэтому  $X_k = Y_{k-1}$ ;  $X_{k+1} = Y_k$ . Для каждого звена можно записать:

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= W_1(p)X_1(p) \\
 &\dots\dots\dots \\
 Y_k(p) &= W_k(p)X_k(p) \\
 &\dots\dots\dots \\
 Y_n(p) &= W_n(p)X_n(p)
 \end{aligned}$$

Исключив отсюда по уравнению  $X_{k+1} = Y_k$  все промежуточные сигналы, можно получить:

$$Y_n(p) = W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p)X_1(p) \text{ или } W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \prod_{k=1}^n W_k(p),$$

т.е. передаточная функция системы последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев. Аналогично для ККП:

$$W(j\omega) = \prod_{k=1}^n W_k(j\omega) = \prod_{k=1}^n [A_k(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)}] = e^{j\sum\varphi_k(\omega)} \prod_{k=1}^n A_k(\omega).$$

Таким образом, модули ККП (АЧХ) перемножаются, а фазы (ФЧХ) складываются. Для логарифмической АЧХ (ЛАЧХ) имеем

$$\begin{aligned}
 20 \lg A_{\text{общ}}(\omega) &= 20 \lg \prod_{k=1}^n A_k(\omega) = \sum_{k=1}^n 20 \lg A_k = \sum_{k=1}^n L_k(\omega); \\
 \varphi_{\text{общ}} &= \sum \varphi_k(\omega); \quad A_{\text{общ}} = \prod A_k(\omega).
 \end{aligned}$$

Таким образом, результирующая ЛАЧХ последовательного соединения звеньев получается в результате графического суммирования их ЛАЧХ. ФЧХ суммируется без логарифмирования.

Например, пусть система состоит из двух последовательно соединенных инерционных звеньев (рис. 44):

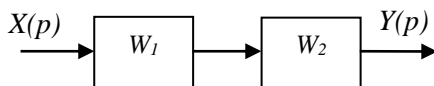


Рис. 44. Иллюстрация к задаче последовательного соединения двух инерционных звеньев

$$\text{Если } W_1 = \frac{K_1}{T_1 p + 1} \text{ и } W_2 = \frac{K_2}{T_2 p + 1}, \text{ то } W(p) = \frac{K_1 K_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Сложение асимптотических ЛАЧХ показано на рис. 45. Здесь  $L_1 = 20 \lg K_1 - 20 \lg \omega T_1$ ;  $L_2 = 20 \lg K_2 - 20 \lg \omega T_2$ ;  $L = L_1 + L_2$ . Для определения частоты среза системы приравняем общую ЛАЧХ к нулю. Частота среза  $\omega_{cp}$  – это частота, при которой коэффициент усиления системы становится равным единице, то есть ЛАЧХ пересекает ось частоты.

$$20 \lg K_1 K_2 - 20 \lg \omega T_1 - 20 \lg \omega T_2 = 0; \quad 20 \lg K_1 K_2 = 20 \lg \omega^2 T_1 T_2,$$

$$40 \lg \omega = 20 \lg \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2}; \quad \omega_{cp} = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{T_1 T_2}}.$$

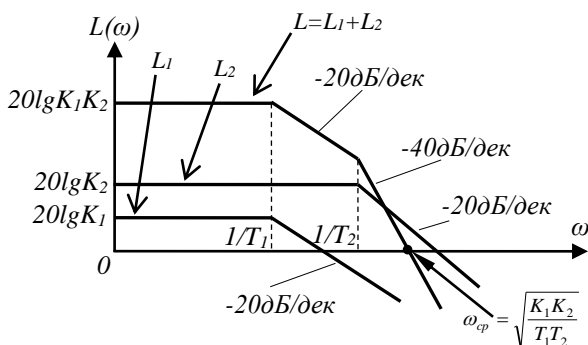


Рис. 45. Иллюстрация к определению общей ЛАЧХ при последовательном соединении звеньев

Это свойство сложения АЧХ очень важное и широко используется при коррекции САР, а также при анализе устойчивости.

2) Параллельно-согласное соединение звеньев (рис. 46).

Здесь на все входы звеньев подается одна и та же величина, а выходные сигналы суммируются с соответствующими знаками:

$$X=X_1=X_k=X_n, Y = \sum_{k=1}^n Y_k ; Y_k=W_k(p)X(p);$$

$$Y(p) = X(p) \sum_{k=1}^n W_k(p); W(p) = \sum_{k=1}^n W_k(p).$$

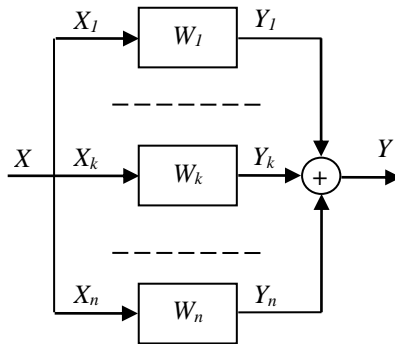


Рис. 46. Параллельно -согласное соединение звеньев

При параллельно-согласном включении общая передаточная функция системы равна сумме передаточных функций звеньев.

Соответственно для ККП переходной функции имеем:

$$W(j\omega) = \sum_{k=1}^n W_k(j\omega) = \sum_{k=1}^n A_k(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)}, h(t) = \sum_{k=1}^n h_k(t).$$

3) Параллельно-встречное соединение звеньев (рис. 47):

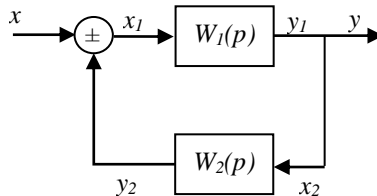


Рис. 47. Параллельно-встречное соединение звеньев



Выходной сигнал в таком случае определится как:

$$Y(p) = Y_1(p) \text{ и } X_1 = X \pm Y_2.$$

Это соединение, которое образует замкнутую систему. Здесь второе звено играет роль обратной связи по отношению к первому. Здесь выходной сигнал первого звена, являясь выходом всей системы, поступает на вход второго звена, выходной сигнал которого со знаком «+» или «-» складывается с входным сигналом  $x$ . Если сигнал  $y_2$  складывается с входным сигналом  $x$ , то обратная связь положительная (ПОС); если вычитается, то обратная связь отрицательная (ООС).

Таким образом, если

$$X_1(p) = X(p) + Y_2(p) - \text{ПОС},$$

$$X_1(p) = X(p) - Y_2(p) - \text{ООС}.$$

Для ООС имеем:

$$Y(p) = X_1(p)W_1(p); \quad X_1(p) = X(p) - Y(p)W_2(p);$$

$$Y(p) = [X(p) - Y(p)W_2(p)]W_1(p).$$

Решаем относительно  $Y(p)$ :

$$Y(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} X(p); \quad W_{оос}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

Для ПОС аналогично можно получить:

$$W_{пос}(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}.$$

В теории колебаний обычно рассматриваются цепи с ПОС.

В теории регулирования и управления большей частью рассматриваются цепи с ООС. Рассмотрим случай, когда имеет место простая 100%-я обратная связь (рис. 48), т.е.  $W_2 = 1$ .

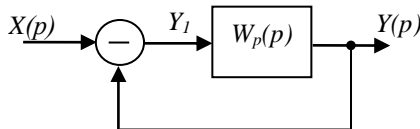


Рис. 48. Звено, охваченное 100%-й обратной связью

В теории автоматике используются понятия замкнутой и разомкнутой САУ, под которой понимают звено прямого преобразования (рис.48).

В этом случае передаточная функция всей замкнутой системы имеет вид:  $W(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$ ; отсюда  $W_p(p) = \frac{W(p)}{1 - W(p)}$ ,

где  $W_p(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы.

Полученные выражения показывают взаимосвязь передаточных функций замкнутой и разомкнутой САУ при единичной ООС. Все рассмотренные ранее типовые звенья могут быть сведены к различным соединениям трех простейших элементарных звеньев – пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего.

### 13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ САУ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Как правило, передаточные функции реальных элементов САУ неизвестны. Однако они могут быть определены по экспериментальным характеристикам. В частности, по экспериментально снятым амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристикам. Для снятия АЧХ и ФЧХ собирается установка, показанная на рис. 49.

На исследуемый элемент подается гармонический сигнал  $x(t) = A_1 \sin \omega t$ . На выходе измеряется амплитуда и фаза выходного сигнала.

$$y = A_2(\omega) \sin [\omega t + \varphi(\omega)].$$

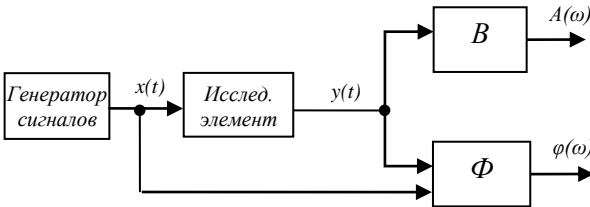


Рис. 49. Установка для снятия АЧХ и ФЧХ звена:  
В – вольтметр, Ф – фазометр

Снимаются показания при изменении частоты генератора. Заполняется табл. 1.

Таблица 1. Таблица показаний

$\omega$	$A_2(\omega)$	$A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1}$	$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	
0					
10					
100					
...					

Затем графически строятся АЧХ, ЛАЧХ, ФЧХ.

Для построения АЧХ берется отношение  $A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1}$ .

При обработке результатов применяют два метода: метод аппроксимации ЛАЧХ и метод неопределенных коэффициентов.

#### *Метод аппроксимации ЛАЧХ*

Строится ЛАЧХ  $L(\omega)$ . Затем ЛАЧХ аппроксимируется. При чем аппроксимацию проводят линиями с наклоном, кратным 20 дБ/декаду: 0, 20, 40, 60 дБ/дек. или -20, -40, -60 и т.д. дБ/дек. Ранее показано, что ЛАЧХ типовых звеньев, т.е. звеньев, описываемых дифференциальным уравнением не выше второго порядка, достаточно точно аппроксимируются ломаной с наклонами 0,  $\pm 20$ ,  $\pm 40$  дБ/дек. Статический коэффициент усиления  $k$  определяется значением  $A(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ , для систем с интегрирующим звеном при  $\omega = k$ , для системы с дифференцирующим звеном при  $\omega = 1/k$ , когда  $L(\omega) = 0$  на начальном участке ЛАЧХ. Затем по виду ЛАЧХ относят это звено к какому-либо из типовых звеньев, для которых передаточная функция известна. Постоянные времени  $T$  определяют по частоте сопряжений линий ЛАЧХ  $\omega_c = 1/T$ . Например, звено ЛАЧХ, ФЧХ которого показаны на рис. 50, можно идентифицировать как инерционное:

$$W(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

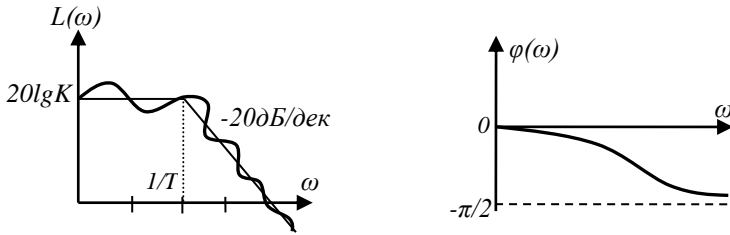


Рис. 50. Пример аппроксимации ЛАЗХ

Передаточная функция уточняется по ФЧХ. Общий порядок дифференциального уравнения определяется наклоном ЛАЗХ в высокочастотной области. Пример ЛАЗХ более высокого порядка приведена на рис. 51.

Если ЛАЗХ можно представить как последовательное соединение типовых звеньев, то нужно это делать, учитывая, что ЛАЗХ и ФЧХ при последовательном соединении звеньев складываются.

Если исследуемый элемент САУ описывается дифференциальным уравнением выше второго порядка и ЛАЗХ достаточно точно аппроксимируется ломаной линией с углами наклона, кратными 20 дБ/дек., то общая передаточная функция определяется через передаточные функции типовых звеньев, т.к. в этом случае исследуемый элемент можно представить в виде последовательного соединения типовых звеньев.

На рис. 51 имеет место последовательное соединение форсирующего, инерционного и колебательного звеньев.

$$W(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{(1 + T_2 p)(T_3^2 p^2 + 2\varepsilon T_3 p + 1)}$$

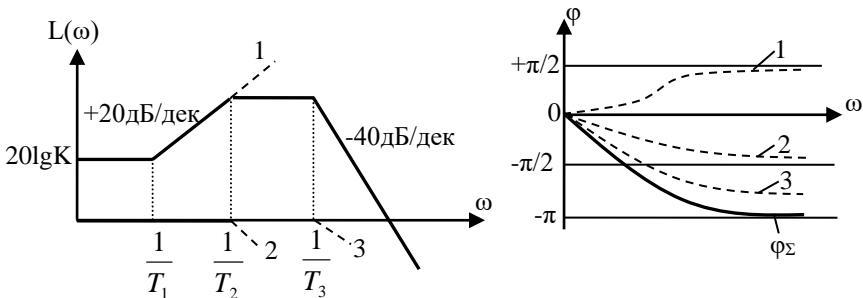


Рис. 51. ЛАЗХ и ФЧХ сложной системы:

1 – форсирующее звено, 2 – инерционное звено, 3 – колебательное звено

При определении состава звеньев общий коэффициент усиления  $K_y$  относится к низкочастотному звену. Для остальных звеньев он приравнивается к единице (см. рис. 51).

### *Метод неопределенных коэффициентов*

В общем случае, когда ЛАЧХ не поддается аппроксимации, т.е. постоянные времени близки, то передаточная функция может быть определена следующим образом.

Представим:

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}.$$

Ей соответствует ККП:

$$W(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k} = \operatorname{Re}(\omega, a, b) + j \operatorname{Im}(\omega, a, b) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

здесь  $a_k$  и  $b_k$  – искомые коэффициенты, а в правой части равенства  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  – экспериментально снятые характеристики. Имеем  $m+n+2$  неизвестных. Задавая  $m+n+2$  – значениями частоты  $\omega_i$  получим систему с нужным количеством линейных алгебраических уравнений, решение которых дает искомые значения  $a$  и  $b$ :

$$\frac{\sum_{k=0}^m b_k (j\omega_i)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega_i)^k} = A(\omega_i) e^{j\varphi(\omega_i)}.$$

Здесь в правой части стоит конкретное комплексное число, составленное из экспериментальных данных. Точность метода определяется значениями  $m$  и  $n$  и оценивается сравнением теоретических и экспериментальных значений АЧХ и ФЧХ. Решение проводится на ЭВМ путем последовательного итеративного наращивания числа коэффициентов  $m$  и  $n$ . Систему можно разбить на две подсистемы относительно действительной и мнимой частей.

## 14 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗВЕНА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ПЕРЕХОДНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Для того чтобы определить передаточную функцию по переходной характеристике, на вход звена от генератора (см. рис. 49) подается единичный скачок. Реально это периодический сигнал прямоугольной формы (меандр), длительность которого заведомо больше времени переходного процесса исследуемого звена. По осциллографу снимается переходная характеристика.

Существует несколько способов определения передаточной функции по экспериментальной переходной характеристике.

*Метод сопоставления переходных характеристик (ПХ) реального и типового звеньев*

Метод заключается в том, что ПХ сопоставляется по виду с ПХ типового элементарного звена и на этой основе определяется вид передаточной функции.

Например, если переходная функция имеет вид, показанный на рис. 52, то ей соответствует передаточная функция  $W(p) = \frac{k}{1+Tp}$ . Постоянная времени определяется по уровню  $h(t)=0,632k$ . Действительно, при  $t=T$  имеем  $h(t) = k(1 - e^{-\frac{T}{T}}) = k(1 - e^{-1}) = 0,632k$ .

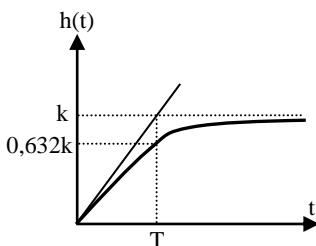


Рис. 52. Переходная функция инерционного звена

Другой способ для ее установления заключается в определении времени, в течение которого выходная величина возрастает от начального значения до конечного, при условии, что скорость изме-

нения выходной величины остается неизменной, равной ее начальному значению. То есть в точке  $t=0$  к переходной функции проводится касательная, точка пересечения которой с уровнем  $h(t)=k$  определит постоянную времени (рис. 52).

Если переходная функция имеет вид, показанный на рис. 53, то ее передаточную функцию можно смоделировать инерционно-дифференцирующим звеном:  $W(p) = \frac{kp}{1+Tp}$ , которому соответству-

ет переходная функция  $h(t) = ke^{-\frac{t}{T}}$ , а постоянная времени определяется по уровню  $h(t) = 0,368k$ .

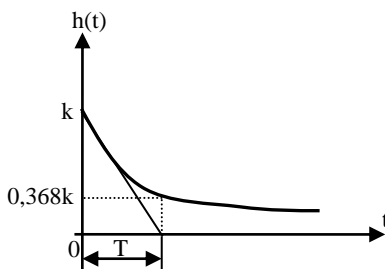


Рис. 53. Переходная функция инерционно-дифференцирующего звена

Для элементов САУ, имеющих переходные характеристики, показанные на рис. 54, передаточная функция модулируется инерционно-форсирующим звеном:  $W(p) = k \frac{1+T_1p}{1+T_2p}$ .

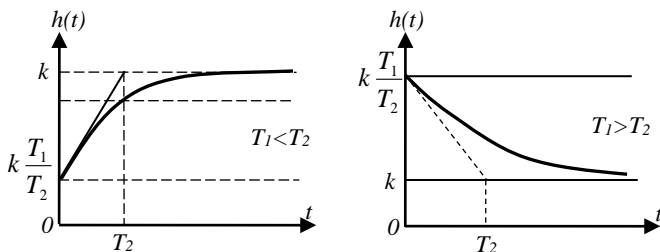


Рис. 54. Переходная функция инерционно-форсирующего звена для различных соотношений постоянных времени

Постоянная времени  $T_1$  определяется по точке пересечения касательной при  $t=0$  с уровнем установившегося режима.

Для переходной функции, показанной на рис. 55, подходит передаточная функция:  $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\varepsilon T p + 1}$ .

Определение параметров  $T$  и  $\varepsilon$  осуществляется по формулам:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \alpha^2}}; \quad \alpha = \frac{1}{T_1} \ln \frac{A_1}{A_2}; \quad \varepsilon = \alpha T.$$

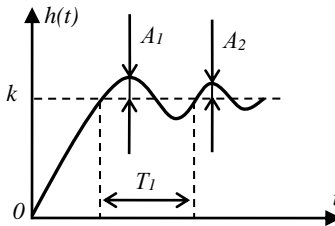
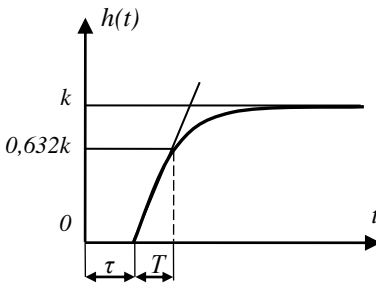


Рис. 55. Переходная функция колебательного звена

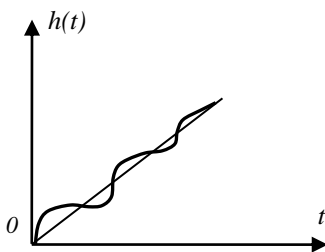
По переходной характеристике можно определить последовательное соединение типовых звеньев. На рис. 56, 57 показаны переходные и передаточные функции различного соединения звеньев.



$$W(p) = \frac{\kappa e^{-p\tau}}{Tp + 1}$$

Рис. 56. Переходная функция последовательно соединенных инерционного звена и звена чистого запаздывания





$$W(p) = \frac{k}{p(T^2 p^2 + 2\varepsilon T p + 1)}$$

Рис. 57. Последовательное соединение интегрирующего и колебательного звеньев

### Метод аппроксимации

Применяется, когда вид переходной функции не соответствует типовому звену. Допустим, что экспериментально получена переходная характеристика, показанная на рис. 58. По виду она не соответствует ранее рассмотренным типовым звеньям.

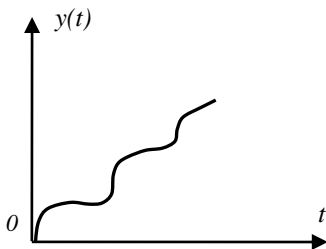


Рис. 58. Переходная характеристика сложной системы

Для определения передаточной функции необходимо выполнить следующие действия.

1) Аналитически аппроксимировать полученную кривую полиномом:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n C_k t^k.$$

2) Найти изображение по Лапласу полученной функции:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n C_k t^k \right) e^{-pt} dt.$$

3) Учитывая, что  $X(p) = \frac{1}{p}$ , найти передаточную функцию по

формуле:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = Y(p)p.$$

Аппроксимацию экспериментальной кривой целесообразно проводить не степенным полиномом, а ортогональными функциями

$y(t) = \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(t)$ , например полиномами Чебышева, Лежандра, Лаг-

гера, Фурье, тем более, что разложение функции по ортогональным полиномам всегда может быть преобразовано в обычный полином. Отметим, что вместо единичного скачка на входе может быть любой сигнал, однако в этом случае нужно будет определять отображение Лапласа и для входного сигнала  $X(p)$ . На современных персональных компьютерах, используя соответствующие математические пакеты, может быть аппроксимирована практически любая кривая. Аппроксимация, как правило, производится по методу наименьших квадратов исходя из требуемой точности приближения.

## **15 РЕАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ САУ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ДАТЧИКИ**

Реальные элементы САУ могут быть разделены на 4 основные группы: датчики (измерительные преобразователи), усилители, дискриминаторы (сравнивающие устройства) и исполнительные устройства. Эти элементы присутствуют, как правило, во всех САУ и, кроме ранее рассмотренных характеристик, оцениваются также следующими параметрами:

- 1) уровень собственных шумов элемента;
- 2) максимальная мощность на входе и выходе элемента;
- 3) входное и выходное сопротивления, которые нужны для согласования элементов при соединениях.

Отметим, что все элементы автоматики должны удовлетворять требованиям государственной системы приборов (ГСП), то есть

иметь входные и выходные сигналы, соответствующие унифицированному ряду, например ток 4 – 20 мА, напряжение 0 – 5В и т.д.

*Датчики* преобразуют заданную или управляемую величину в сигнал, удобный для передачи и дальнейшей обработки. В САР датчики, как правило, преобразуют неэлектрическую величину в электрическую. Наиболее часто в САР применяются датчики, преобразующие механическое линейное перемещение или угол поворота в электрический сигнал. Механическое перемещение напрямую связано с другими физическими параметрами, такими как давление, сила, ускорение, расход, температура, высота, скорость, курс и т.д. Из огромного количества указанных датчиков рассмотрим только некоторые простейшие.

### *Потенциометрические датчики*

Входной величиной является перемещение электрического контакта  $x$ , выходной – напряжение в нагрузке  $U_n$ . На потенциометр подано питающее напряжение  $U_0$  (рис. 59).

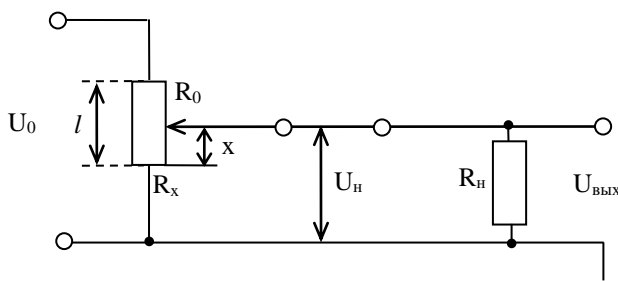


Рис. 59. Потенциометрический датчик перемещения

Если потенциометр линейный, то  $\frac{R_x}{R_0} = \frac{x}{l}$ , где  $x$  – перемещение движка потенциометра (входной сигнал) и  $l$  – длина потенциометра.

Для выходного сигнала можно получить:

$$U_{\text{вых}} = U_n = \frac{U_0 R_n \frac{x}{l}}{R_n + R_0 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}.$$

При  $R_n \rightarrow \infty$  имеем режим холостого хода и  $U_{\text{вых}} = U_0 \frac{x}{l}$  –

выходной сигнал пропорционален перемещению движка (рис. 60). Сопротивление нагрузки искажает статическую характеристику. Поэтому при использовании датчика нужно подбирать такое сопротивление нагрузки, которое вносит погрешность не больше допустимой.

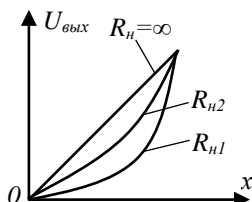


Рис. 60. Нагрузочная характеристика потенциометрического датчика

Для достаточно широкого диапазона частот потенциометрический датчик можно считать безынерционным звеном. Для него ККП  $W(j\omega) = K$  и  $W(p) = K$ . Частота ограничена паразитной конструкционной емкостью. Потенциометры бывают круговые и линейные, для круговых  $K$  измеряется в  $[B/град]$  и для линейных  $[B/м]$ .

Промышленностью выпускаются потенциометры, имеющие погрешность в режиме холостого хода 0,05 – 0,1 %.

#### *Индуктивные датчики перемещений*

В радиоустановках главным образом используются датчики, основанные на изменении взаимной индуктивности обмоток. Причем наиболее распространены датчики, оформленные в виде электрических машин переменного тока. Простейший пример такого преобразователя показан на рис. 61.

Здесь в зависимости от угла поворота  $\alpha$  подвижной рамки 3 в ее обмотке наводится ЭДС, пропорциональное углу поворота:  $U_{\text{вых}} = U_m \sin \alpha$ . Приведенный датчик является ярким примером звена с модуляцией. Здесь несущей частотой является частота питания  $U_m = U_{m1} \sin \omega_0 t$ . В подавляющем большинстве частота питания  $\omega_0$  намного больше частоты изменения входной механической величины, что позволяет считать индуктивные преобразователи безынерционными, тогда  $W(j\omega) = K [B/град]$ ;  $W(p) = K$ .

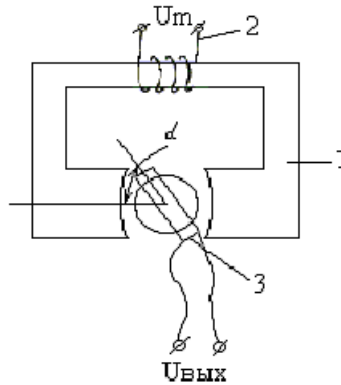


Рис. 61. Трансформаторный преобразователь угла поворота вала:  
 1 – магнитопровод, 2 – обмотка возбуждения,  
 3 – измерительная подвижная обмотка

Среди индуктивных датчиков широко распространены также сельсины,  $\sin$ - $\cos$ -ые вращающиеся трансформаторы, редуктосины и другие датчики, которые также работают по принципу изменения взаимоиנדуктивности.

*Тахогенераторы (ТГ)* – это устройства, преобразующие скорость вращения вала в напряжение, пропорциональное скорости (рис. 62). По существу ТГ аналогичны обычным электрическим генераторам, но отличаются от них только маленькой мощностью и, соответственно, малыми габаритами, весом. ТГ бывают постоянного и переменного тока.

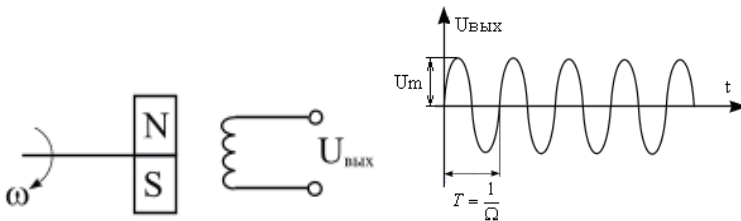


Рис. 62. Тахогенератор

Простейший ТГ представляет собой синхронную машину с ротором в виде постоянного магнита. Выходное напряжение такого генератора имеет амплитуду и частоту, которые пропорциональны

скорости вращения.  $Um=Ke\Phi\Omega$ , где  $Ke$  – коэффициент, зависящий от конструкции якоря,  $\Phi$  – поток возбуждения,  $\Omega$  – угловая скорость.

Бывает, что вместо постоянного магнита вращается обмотка возбуждения. При этом, как правило, поток возбуждения прямо пропорционален току возбуждения. По угловой скорости ТГ является пропорциональным звеном  $W_{\alpha}(j\omega)=k[\text{В/об}]$ . Однако если входной величиной является угол поворота  $\alpha$ , то ТГ является идеальным дифференцирующим звеном, т.к.  $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$ ,  $W_{\alpha}(j\omega)=kj\omega$  [В/град],

$W(p)=kp$ . Промышленностью выпускаются индуктивные датчики круговых и линейных перемещений с погрешностью 0,5-1,0%.

*Пьезоэлектрические преобразователи* (рис. 63) применяются для преобразования силы, давления, ускорения в электрический сигнал. Такие преобразователи основаны на применении пьезоэлектрического эффекта, заключающегося в электризации кристалла под действием механических напряжений – прямой пьезоэффект. Здесь действие силы  $F_x$  приводит к деформации, что вызывает появление напряжения на металлических электродах, нанесенных на пьезокристалл.

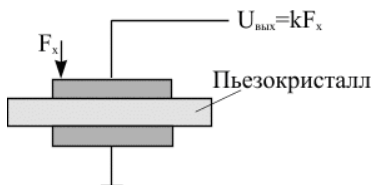


Рис. 63. Пьезоэлектрический преобразователь

Ускорение, давление, вибрации линейно связаны с усилием, что используется для создания соответствующих датчиков, которые можно считать безынерционными:  $W(p)=k$ .

В приборостроении используется также обратный пьезоэффект – деформация кристалла под действием электрического поля – применяется для преобразования электрического сигнала в перемещение, что, в свою очередь, используется для создания микромашин, в частности микроботов.

*Термоэлектрические датчики* применяются для преобразования температуры в электрический сигнал. Здесь различают:

- термопары – вырабатывают термоЭДС на стыке разнородных металлов;
- терморезисторы – изменяют сопротивление под действием температуры;
- термоанемометры – применяются для измерения скорости и направления газовых потоков.

Динамические свойства термодатчиков в первом приближении моделируются инерционным звеном.

*Оптические датчики* применяются для преобразования оптического излучения в электрический сигнал. Здесь различают: фоторезисторы, фотодиоды, фототранзисторы, фотоумножители. Их передаточные функции моделируются в первом приближении инерционным звеном.

*Тензодатчики* изменяют электрическое сопротивление кристалла под действием механических напряжений.

*Гироскопические датчики (ГД)* – аналогично тахогенераторам применяются для получения сигнала, пропорционального угловой скорости или производной от угла поворота.

Передаточная функция гироскопов, как правило, имеет вид:

$$W(p) = \frac{kp}{T^2 p^2 + 2\varepsilon Tp + 1}.$$

ГД применяются обычно на бортах подвижных объектов – в самолете, автопилотах, датчиках курса. В танках – для стабилизации ствола пушки. Активно разрабатываются волоконно-оптические гироскопы, используемые для высокоточной стабилизации стартовых платформ при пуске ракет. Подробно о датчиках неэлектрических величин описано в [5].

## 16 УСИЛИТЕЛИ

Применяются в основном для усиления сигналов рассогласования. Бывают: электронные, магнитные, электромашинные. Электронные усилители наиболее распространены. Их принципиальные схемы хорошо известны. Рассмотрим их с точки зрения применения

в САУ. Динамические свойства любого усилителя в общем случае определяются постоянными времени его входной  $T_1$  и выходной  $T_2$  цепей. На рис. 64 приведены типичные АЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ любого электронного усилителя переменного тока.

На основании анализа этих характеристик можно заключить, что в зависимости от диапазона частот, т.е. полосы пропускания системы, любой усилитель переменного тока можно рассматривать:

1) при  $\omega < \omega_1$  – как дифференцирующее звено, т.к. в этом диапазоне наклон характеристики  $+20$  дБ/дек, а сдвиг фазы  $+\pi/2$ ,  $W(p) = kT_1 p$ ;

2) при  $\omega_2 < \omega < \omega_3$  – как безынерционное звено  $W(p) = k$ ;

3) при  $\omega > \omega_2$  – как инерционное звено  $W(p) = \frac{k}{T_2 p + 1}$ ;

4) при  $\omega > \omega_4$  – как интегрирующее звено  $W(p) = \frac{k}{T_2 p}$ ;

5) при  $0 < \omega < \infty$  – как инерционно- дифференцирующее звено

$$W(p) = \frac{kT_1 p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

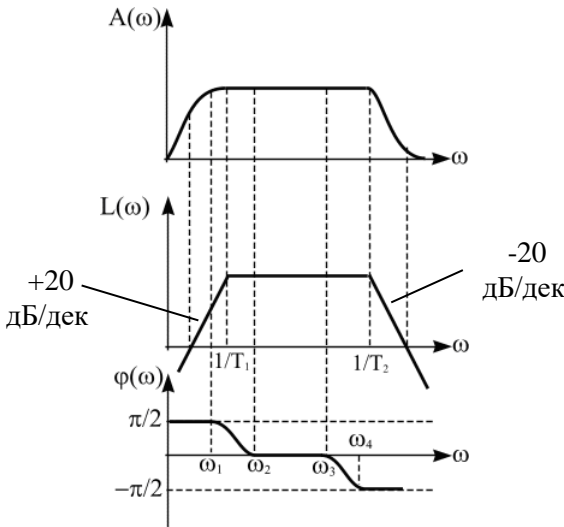


Рис. 64. Типичные АЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ усилителя переменного тока



Электронные усилители в настоящее время могут удовлетворить современные САУ по всем параметрам, в том числе по мощности, входным и выходным сопротивлениям и уровню шумов, поэтому для остальных видов усилителей ограничимся только записью их передаточных функций.

*Электромагнитный усилитель.* Применяется при больших температурах окружающей среды, когда полупроводники теряют работоспособность. Передаточная функция одного каскада описывается инерционным звеном.

*Электромашиный усилитель (ЭМУ).* Используется тогда, когда требуется получить большую мощность, которую трудно обеспечить электронным и магнитным усилителям. Обычно ЭМУ применяют для питания мощных исполнительных механизмов. Передаточная функция ЭМУ имеет вид:

$$W = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени входной и выходной цепей ЭМУ.

## 17 СРАВНИВАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА, ДИСКРИМИНАТОРЫ

Сравнивающие устройства (СУ) – это устройства, выполняющие вычитание заданной величины из величины контролируемого параметра. СУ (в радиотехнике их называют дискриминаторы) кроме операции вычитания осуществляют еще преобразование одного вида сигналов в другой и их усиление.

В современных САУ сигнал чаще всего передается изменением какого-либо электрического параметра – уровня тока или напряжения, амплитуды, фазы или частоты, синусоидальных колебаний. В зависимости от того, какая из этих величин применяется в системе, употребляется тот или другой дискриминатор.

### *Дискриминаторы уровня (ДУ)*

Предназначены для вычитания двух напряжений и последующего их усиления. Простейшая наиболее распространенная схема ДУ

имеет вид, представленный на рис. 65. Балансное включение двух транзисторных усилительных каскадов.

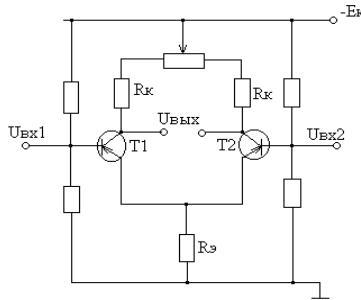


Рис. 65. Дискриминатор уровня на двух транзисторах

Выходное напряжение  $U_{вых} = k(U_{вх1} - U_{вх2})$ , здесь  $k$  зависит от коэффициента усиления транзисторов и сопротивлений  $Rэ$  и  $Rк$  схемы. В общем случае, передаточная функция схемы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

где  $T$  – постоянная времени, характеризующая инерционность транзисторов. Как правило,  $T$  достаточно мало, поэтому ДУ обычно рассматривают как безынерционное звено:

$$W(p) = k.$$

ДУ может быть построен также на операционном усилителе, который имеет два входа – прямой и инверсный (рис. 66).

$$\text{При } R_1 = R_2 = R; U_{вых} \approx \frac{R_{oc}}{R} (U_2 - U_1).$$

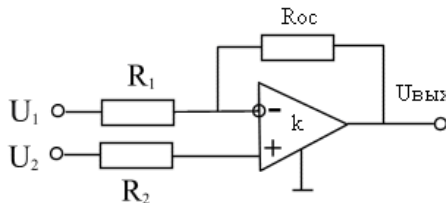


Рис. 66. Дискриминатор уровня (СУ) на операционном усилителе

Операционный усилитель использует, как правило, на входе схему, показанную на рис. 65. Передаточная функция аналогична.

### Дискриминаторы фазы (ДФ)

Это устройства, предназначенные для преобразования разности фаз двух синусоидальных колебаний одинаковой частоты в напряжение. В радиотехнике их еще называют фазовыми детекторами. Наиболее часто применяются балансный ДФ, принципиальная схема которого показана на рис. 67.

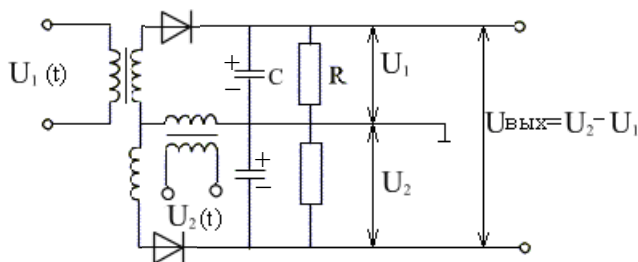


Рис. 67. Дискриминатор фазы

Эта схема может рассматриваться как два амплитудных детектора, включенных встречно по нагрузке, на один из которых подается напряжение, пропорциональное сумме, а на другой – разности входных сигналов. Эквивалентная схема показана на рис. 68.

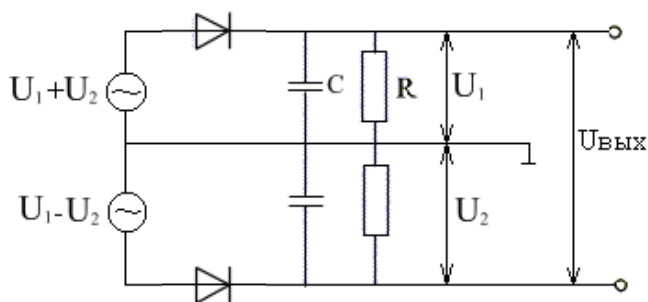


Рис. 68. Эквивалентная схема дискриминатора фазы

Для данного случая:

$$U_1 = U_{m1} \sin \omega t,$$

$$U_2 = U_{m2} \sin(\omega t + \varphi).$$

Без доказательства запишем:

$$U_{\text{вых}} = 2K_0 \frac{U_{m1} U_{m2}}{\sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2}} \cos \varphi = K_0 \cos \varphi.$$

Выходное напряжение пропорционально  $\cos \varphi$ . Здесь характеристика ДФ нелинейна. Если считать  $\cos \varphi$  как аргумент САУ, то в динамическом отношении любая схема ДФ эквивалентна инерционному звену, где постоянная времени определяется:  $T \approx RC$ .

### *Дискриминаторы частоты (ДЧ)*

Это устройства, предназначенные для преобразования разности частот в напряжение. В радиотехнике их называют еще частотными дискриминаторами. Основная характеристика ДЧ – зависимость выходного напряжения от разности частот  $U = f(\omega - \omega_0) = f(\Delta\omega)$ .

Применяются 2 метода задания эталонной частоты  $\omega_0$ :

- 1) эталонная частота, с которой сравнивается текущая частота сигнала, задается эталонным генератором;
- 2) эталонная частота задается входящими в состав ДЧ резонансными цепями.

Принципиальная схема ДЧ с резонансными цепями показана на рис. 69 (схема на расстроенных контурах). Здесь эталонная частота  $\omega_0$  задается резонансными  $LC$  цепями, имеющими разные резонансные частоты. Один контур настроен на резонансную частоту  $\omega_1$ , второй контур – на резонансную частоту  $\omega_2$ . Так как напряжение  $U = U_2 - U_1$ , то при частоте входного сигнала  $u(t)$ , равной  $\omega_0 U(t) = U_m \sin \omega_0 t$ , выходной сигнал  $U_{\text{вых}} = U_2 - U_1 = 0$ . При отличии частоты входного сигнала от эталонного значения  $\omega_0$  амплитуда на одном из контуров становится больше и выходное напряжение  $U_{\text{вых}} \neq 0$ . Типичная выходная характеристика рассмотренного ДЧ показана на рис. 69. Она может быть линеаризована при частотах  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .  $U_{\text{вых}} = k(\omega - \omega_0)$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от значений  $R, L, C$ .

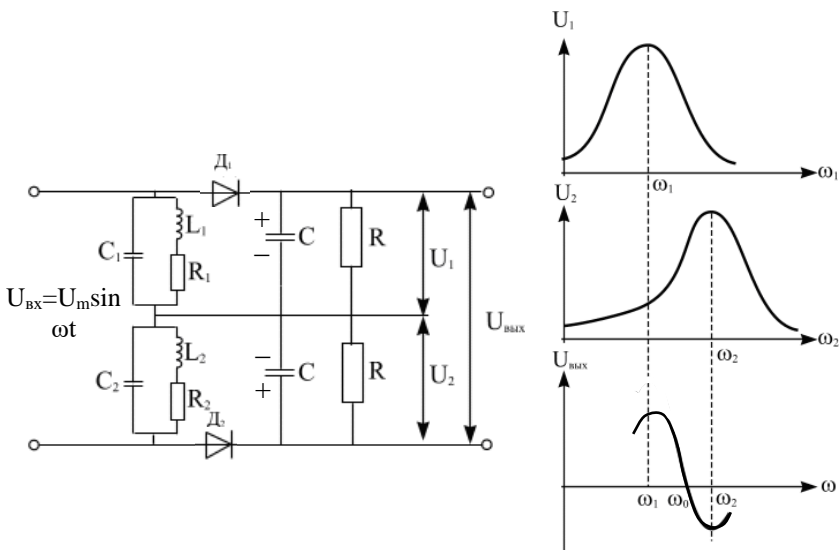


Рис. 69. Дискриминатор частоты на расстроенных контурах

## 18 ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

В радиотехнических САР используются следующие разновидности исполнительных устройств (ИУ):

1) Механические ИУ – обеспечивают механическое перемещение какого-либо регулирующего элемента с целью достижения цели управления (например, вращение антенны, перемещение движка потенциометра и т.д.). К ним относятся: электромеханические, гидравлические, пневматические ИУ.

2) Электронные ИУ – управляемые резисторы, емкости, индуктивности, транзисторы и другие устройства, используемые при автоматической стабилизации тока, напряжения, частоты, при автоматической настройке контуров, регулировке усиления и в других чисто электронных схемах.

### *Механические ИУ*

Их основным видом являются электродвигатели. Из всего многообразия двигателей в САУ применяются двигатели постоянного тока и асинхронные трехфазные двигатели переменного тока с короткозамкнутым или полым ротором. При определении передаточ-

ной функции двигателя обычно пренебрегают инерционностью управляющей обмотки двигателя, а в качестве выходной величины принимают угол поворота ротора. Тогда  $W(p) = \frac{k_{\text{о\ddot{a}}}}{p(T_{\text{эм}}p + 1)}$ , где  $T_{\text{эм}}$  –

электромеханическая постоянная времени двигателя, зависящая от мощности и массы движущихся элементов. Как видим, двигатель содержит интегрирующее звено. Двигатель, как правило, является основным звеном, определяющим динамические свойства САУ, поэтому желательно выбирать двигатель с меньшей постоянной времени.

### 1. Двигатель постоянного тока

Двигатель постоянного тока (рис.70) используется в мощных следящих системах.

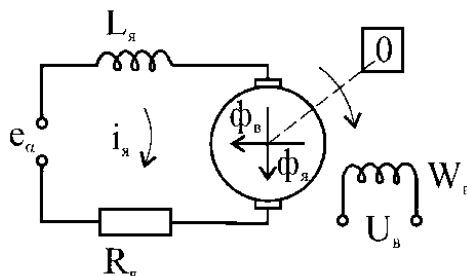


Рис. 70. Двигатель постоянного тока

Под действием напряжения  $e_\alpha$  протекает ток  $i_\alpha$ , который создает магнитный поток  $\phi_\alpha$ . Поток  $\phi_\alpha$ , взаимодействуя с потоком возбуждения  $\phi_e$ , создает вращающий момент, приложенный к якору двигателя. При вращении якоря двигателя в нем наводится противоЭДС, пропорциональная скорости вращения  $\omega$ .

Составим уравнение цепи, пренебрегая величиной  $L_\alpha$ , так как основным источником инерционности, значительно превышающим величину  $L_\alpha/R_\alpha$ , является инерционность механической нагрузки. По закону Кирхгофа имеем:

$$e_\alpha = R_\alpha i_\alpha + C_e \omega,$$

где  $C_e$  – коэффициент противоЭДС.

Разрешаем уравнение относительно тока якоря

$$i_\alpha = (e_\alpha - C_e \omega)/R_\alpha.$$

При постоянном значении потока возбуждения, удовлетворяющем условию  $\phi_e \gg \phi_n$ , вращающий момент двигателя пропорционален величине потока якоря  $\phi_n$  и тем самым току якоря  $i_n$

$$M_{\text{дв}} = C_M i_n = C_M \cdot \frac{e_\alpha - C_e \omega}{R_\text{я}}$$

Этот момент затрачивается на преодоление момента нагрузки  $M_H$  и момента инерции  $J \frac{d\omega}{dt}$ .

$$M_{\text{дв}} = M_H + J \frac{d\omega}{dt},$$

или

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_H = C_M \cdot \frac{e_\alpha - C_e \omega}{R_\text{я}}$$

Соберем члены, содержащие  $\omega$ , в одной части уравнения

$$j \frac{d\omega}{dt} + \frac{C_M C_e}{R_\text{я}} \omega = C_M \frac{e_\alpha}{R_\text{я}} - M_H.$$

Умножив обе части уравнения на величину  $\frac{R_\text{я}}{C_M C_e}$  получим:

$$T \frac{d\omega}{dt} + \omega = K(e_\alpha - e_{mp}),$$

где  $T = J \frac{C_M C_e}{R_\text{я}}$   $K=1/C_e$ ,  $e_{mp} = J \frac{R_\text{я}}{C_M} M_H$  - напряжение трогания.

Таким образом, в случае, когда в качестве выходной величины рассматривается скорость вращения  $\omega$ , двигатель постоянного тока представляется в виде последовательного соединения сравнивающего устройства и апериодического звена. Сравнивающее звено обусловлено следующим представлением: если  $e_\alpha > e_{mp}$  – ротор двигателя вращается, если  $e_\alpha \leq e_{mp}$  – ротор двигателя не вращается. В рассматриваемом случае происходит сравнение напряжения управления с напряжением трогания. Результат сравнения представляется состоянием якоря двигателя.

В большинстве случаев выходной величиной двигателя служит не скорость вращения якоря  $\omega$ , а его угловое положение  $\alpha$ . Эти

величины связаны соотношением  $\int_0^L \omega(t) dt$ . Учитывая эту связь, перепишем дифференциальное уравнение в терминах угла поворота якоря двигателя

$$\frac{d}{dt} \left[ T \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \right] = K(e_\alpha - e_{mp}).$$

Соответствующая передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{(Tp + 1)p},$$

Ей соответствует структурная схема, приведенная на рис. 71.

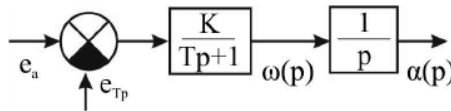


Рис.71. Структурная схема двигателя постоянного тока в терминах угловых величин

Таким образом, двигатель постоянного тока, описанный в терминах угловых величин, представляет собой последовательное соединение сравнивающего устройства, апериодического и интегрирующего звеньев.

Рассмотрим частотные и временные характеристики двигателя постоянного тока.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика равна:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T)}.$$

Представим её в алгебраической форме

$$W(j\omega) = -\frac{KT}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$



И найдём характерные точки:

$$\omega = 0: \operatorname{Re} W(j\omega) = -KT, \operatorname{Im} W(j\omega) = -\infty,$$

$$\omega = \frac{1}{T}: \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{-KT}{2}, \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{-KT}{2},$$

$$\omega = \infty: \operatorname{Re} W(j\omega) = 0, \operatorname{Im} W(j\omega) = 0.$$

На рис. 72 изображен годограф вектора  $W(j\omega)$ .

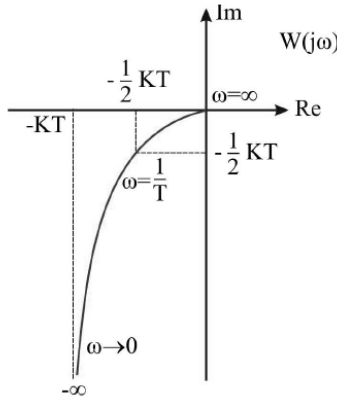


Рис. 72. График годограф вектора  $W(j\omega)$ .

Рассмотрим переходную характеристику. В силу аperiodичности двигателя постоянного тока мы имеем основание записать:

$$h(t) = K(e_\alpha^0 - e_{mp})(1 - e^{-t/T}) = \omega(t).$$

Соответственно для угла поворота  $\alpha(t)$ :

$$\alpha(t) = \int_0^L \omega(t) dt = K(e_\alpha^0 - e_{mp}) \left[ t - T(1 - e^{-t/T}) \right]$$

Из графика функции  $h(t)$  (рис.73) видно, что двигатель постоянного тока выполняет операцию интегрирования при  $t \gg T$ . В приведенных выражениях не учитывалась постоянная интегрирования  $C$ . Её учет перемещает всю картину по оси ординат на величину  $C$ .

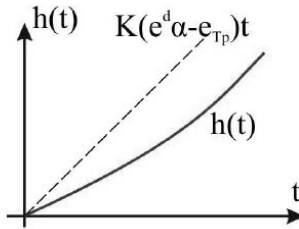


Рис.73. График функции  $h(t)$

## 2. Двухфазный асинхронный двигатель

Используется в маломощных следящих системах на переменном токе. Ротор двигателя полый короткозамкнутый в виде либо «беличьего колеса», либо в виде тонкостенного стакана. Материал ротора немагнитный – медь, алюминий. Статор двигателя (рис. 74) имеет две обмотки, ориентированные в пространстве под углом  $90^\circ$ . Одна из этих обмоток, обмотка возбуждения  $W_b$ , питается от сети переменного тока, вторая обмотка  $W_y$  получает питание от управляющего усилителя.

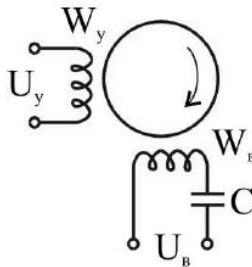


Рис.74. Статор асинхронного двигателя

Амплитуда и фаза управляющего напряжения зависят от величины и знака сигнала рассогласования следящей системы.

В одном случае фаза управляющего напряжения совпадает с фазой напряжения возбуждения  $U_b$ , в другом – отличается на  $180^\circ$ . Благодаря наличию емкости  $C$  ток и поток возбуждения сдвинуты по фазе относительно потока управления на  $\pm 90^\circ$ . Это приводит к тому, что совокупный результирующий поток статора  $\phi_c$  вращается. Если порождающие его потоки  $\phi_b$  и  $\phi_y$  одинаковы по амплитуде,

то величина результирующего потока постоянна и соответствующий вектор описывает окружность. При неравенстве указанных потоков величина результирующего потока меняется, а соответствующий вектор описывает эллипс. Направление вращения потока определяется соотношением фаз порождающих потоков: при  $\varphi_e - \varphi_y = \pi/2$  - по часовой, при  $\varphi_e - \varphi_y = -\pi/2$  - против часовой стрелки, в свою очередь знак разности определяется соотношением фаз напряжений управления и возбуждения; при их равенстве "+", при их противофазности "-".

Вращающийся поток статора наводит в роторе токи, которые порождают поток ротора. В результате взаимодействия потоков статора и ротора создается вращающий момент. Необходимо отметить, что скорость вращения ротора  $\Omega$  не может превосходить скорости вращения потока статора  $\Omega_0$ , так как именно благодаря разности этих скоростей появляется вращающий момент. Величина  $S = (\Omega_0 - \Omega) / \Omega_0$  называется скольжением и характеризует относительную разность указанных скоростей.

При малых величинах сигнала управления вращающий момент пропорционален потоку управления  $\Phi_y$  и величине скольжения  $S$ . Проследим прохождение сигналов. Увеличение  $U_y$  приводит к следующей цепочке

$$U_y \uparrow \Phi_y \uparrow \Phi_c \uparrow M_{\text{об}} \uparrow \Omega \uparrow S \downarrow M_{\text{об}} \downarrow \Omega \downarrow$$

В которой величины  $\Omega$  и  $M_{\text{об}}$  повторяются дважды: в одном случае они возрастают, в другом - убывают. Эта ситуация соответствует переходному процессу, когда величины  $M$ ,  $S$  и  $\Omega$  меняются, В установившемся режиме эти величины соответствуют входному сигналу  $U_y$ , причем  $\Omega$  и  $U_y$  находятся в линейной зависимости:

$$\Omega = K(U_y - U_{mp}),$$

где  $U_{mp}$  - напряжение трогания. При больших значениях  $U_y$  ( $\Phi_y \geq \Phi_e$ ) указанная зависимость перестает быть линейной.

На рис. 75 приведены графики скоростных характеристик двигателя. Угол наклона характеристик определяется коэффициентом передачи  $\varphi = \arctg K$ , напряжение трогания определяется нагрузкой

$$U_{mp} = \frac{1}{C_M} M_H.$$

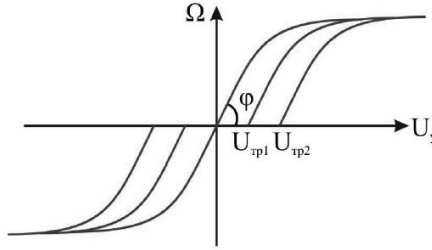


Рис. 75. Графики скоростных характеристик асинхронного двигателя

Используя уравнение статических скоростных характеристик, составим дифференциальное уравнение. В установившемся режиме  $M_H = M_{\partial\partial}$ , поэтому

$$M_{\partial\partial} = C_M \left( U_y - \frac{\Omega}{K} \right).$$

В переходном режиме вращающий момент уравнивается моментом нагрузки и моментом инерции

$$M_{\partial\partial} = M_H + J \frac{d\Omega}{dt};$$

В результате имеем:

$$J \frac{d\Omega}{dt} + M_H = C_M \left( U_y - \frac{\Omega}{K} \right).$$

Приводя уравнение к стандартному виду, получим

$$\tau \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = K(U_y - U_{mp}),$$

где  $\tau = J \frac{K}{C_M}$ ,  $U_{mp} = \frac{1}{C_M} M_H$ .

Учитывая равенство  $\alpha = \int \Omega(t) dt$ , переходим к дифференциальному уравнению относительно угла поворота

$$\frac{d}{dt} \left( \tau \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \right) = K(U_y - U_{mp}).$$

Переходя к операторным уравнениям, получим:

$$\Omega(p) = \frac{K}{\tau_p + 1} [U_y(p) - U_{mp}(p)]$$

$$\alpha(p) = \frac{\Omega(p)}{p} = \frac{K}{p(\tau_p + 1)} [U_y(p) - U_{mp}(p)]$$

Таким образом, двухфазный асинхронный двигатель имеет такие же характеристики, как двигатель постоянного тока, и представим в виде последовательного соединения сравнивающего устройства  $(U_y(p) - U_{mp}(p))$ , апериодического  $K/(\tau_p + 1)$  и интегрирующего  $1/p$  звеньев.

### *Электронные ИУ*

Их использование основано на изменении параметра какого-либо элемента схемы с целью достижения заданной цели регулирования. Здесь применяются управляемые резисторы, емкости, индуктивности.

1. *Управляемые резисторы* – их сопротивление зависит от управляющего сигнала:

- термоуправляемые – это терморезисторы, управляемые тепловым полем;
- фотоуправляемые – это фоторезисторы, управляемые оптическим сигналом;
- магнитоуправляемые – это резисторы, управляемые магнитным полем;
- полупроводниковые – это резисторы, управляемые электрическим сигналом;

2. *Управляемые емкости* – это варикапы, варакторы – их емкость зависит от приложенного управляющего напряжения. Существуют также фотоуправляемые емкости – фотоварикапы на основе МДП структур.

3. *Управляемые индуктивности*. Индуктивность зависит, например, от предварительного насыщения сердечника, которое достигается изменением постоянной составляющей питающего тока.

На основе названных элементов строятся электрически управляемые генераторы, устройства управляемой задержки, устройства управления фазовым сдвигом. Рассмотрим некоторые из них.

### Управляемые генераторы

Простейший управляемый генератор имеет вид, представленный на рис. 76. Здесь транзистор  $T_1$  охвачен ПОС через транзистор  $T_2$ . Частота генератора здесь  $\omega = \frac{K_1}{RC}$ . Если  $R$  сделать управляемым, например, поставить фоторезисторы, управляемые источником света (оптроне), яркость свечения которого зависит от применения к нему напряжения, то получим  $R=K_2U_1$ ,  $\omega = \frac{K_1}{K_2U_1C}$ .

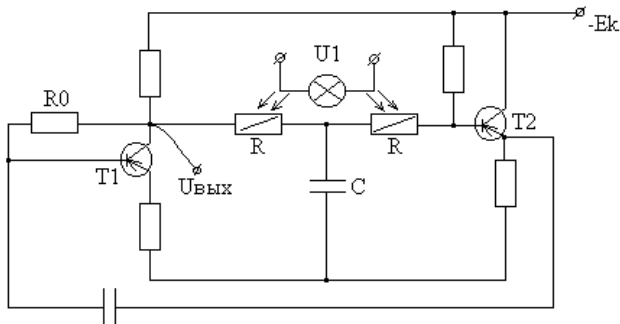


Рис. 76. Управляемый генератор на двух транзисторах и оптроне

Управляемый генератор на операционном усилителе показан на рис. 77. Здесь частота зависит от длительности заряда, емкости  $C$ , которая зависит от  $U_{вх}$ .  $f_{U_{вых}}=kU_{вх}$ . При достижении  $C$  заданного уровня происходит разряд  $C$  через диод. Для создания электрически управляемых генераторов используется микросхема КР1006ВИ1 (таймер).

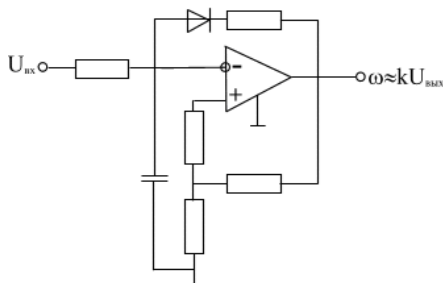


Рис. 77. Управляемый генератор на операционном усилителе

### Управляемая линия задержки

Схема показана на рис. 78. Здесь емкость варикапов зависит от напряжения  $U_{упр}$ .

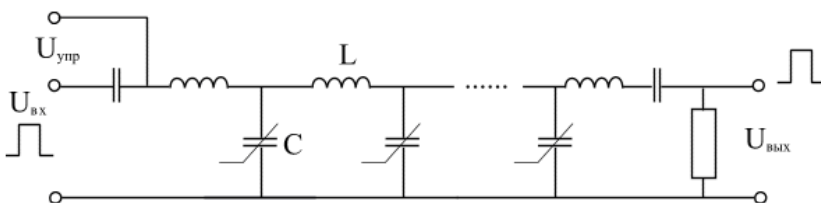


Рис. 78. Управляемая линия задержки

Выходной импульс задержан относительно входного на величину:  $\tau = n\sqrt{LC}$ ,  $C=f(U_{упр})$ . Аналогично строятся устройства управления фазовым сдвигом. Отметим в заключение, что ККП и передаточная функция любого реального элемента САУ могут быть определены по экспериментально снятым АЧХ, ФЧХ и переходной характеристикам.

## 19 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ САУ И ИХ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

При изображении систем управления применяют 2 принципа: функциональный и структурный, соответственно различают функциональные и структурные схемы.

*Схема структурная (СС)* – это схема, определяющая основные функциональные части изделия, их назначения и взаимосвязи. Их разрабатывают при проектировании изделия на стадии постановки задачи – используются для общего ознакомления с изделием.

*Схема функциональная (ФС)* – схема, разъясняющая физические процессы, протекающие в отдельных функциональных цепях изделия или в изделии в целом. Этими схемами пользуются для изучения принципов работы, а также для математического описания системы. Звенья функциональной схемы могут соответствовать отдельным математическим операциям преобразования сигнала.

*Схема принципиальная (полная) (ПС)* – схема, определяющая полный состав элементов и связей между ними и дающая детальное представление о принципе работы изделия.

Все ранее рассмотренные нами схемы САР являются структурными. Для составления ФС нужно знать подробное математическое описание системы. Однако если математическое описание САУ неизвестно, то для составления ФС нужно разделить структурную схему на элементарные звенья и заменить их набором типовых звеньев, математическое описание которых известно. Чтобы последующее звено не оказало влияния на предыдущее, входное сопротивление последующего звена должно быть достаточно большим. Если какое-либо последующее звено оказывает воздействие на предыдущее, то эти два звена нужно рассматривать совместно с учетом этого воздействия. Поясним на примерах методику составления функциональных схем.

#### *Регулятор угловой скорости вращения вала двигателя*

Структурная схема приведена на рис. 79, здесь входной величиной является напряжение  $U_0$ , соответствующее заданной угловой скорости вращения двигателя  $\omega_0$ . Выходной величиной является действительная угловая скорость  $\omega$ . Здесь каждый функциональный элемент схемы имеет следующие передаточные функции:

- 1) контролируемый двигатель  $W_1(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)}$ ;
- 2) датчик числа оборотов  $W_2(p) = k_2$ ;
- 3) сравнивающее устройство  $W_3(p) = k_3$ ;
- 4) усилитель мощности  $W_4 = \frac{k_4}{T_4 p + 1}$ .

Передаточная функция запишется:

$$W(p) = \frac{W_1 W_3 W_4}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4} = \frac{k_1 k_3 k_4}{p(T_1 p + 1)(T_4 p + 1) + k_1 k_2 k_3 k_4}.$$

Отметим, что здесь постоянные времени двигателя и усилителя мощности  $T_1$  намного больше постоянной времени сравнивающего устройства, поэтому последнее моделируется пропорциональным звеном  $W_5$ . В схемах могут иметь место параллельные корректирующие звенья и местные обратные связи (т.е. схема может быть многоконтурной).



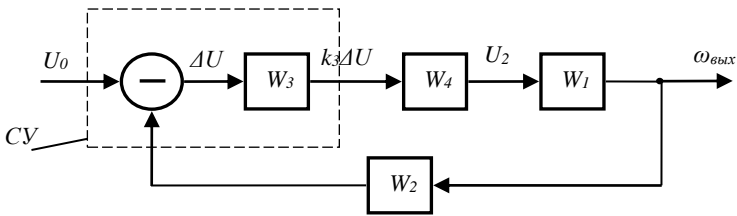


Рис. 79. Функциональная схема САР угловой скорости вращения вала двигателя

Например, часть схемы в целях стабилизации работы может быть охвачена местной отрицательной обратной связью  $W_6$ , а тахогенератор может иметь параллельное интегрирующее звено  $W_7$  (рис. 80). В любом случае схема должна преобразовываться к одноконтурной, где вместо каждого из местных контуров должно стоять звено с эквивалентной передаточной функцией.

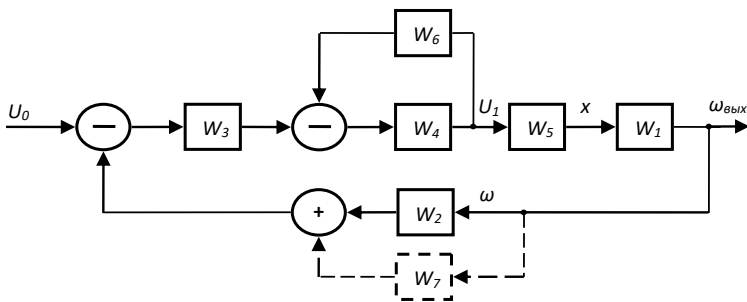


Рис. 80. Пример функциональной схемы

Если обозначить  $W_4' = \frac{W_4}{1 + W_4 W_6}$ , а  $W_2' = W_2 + W_7$ , то переда-

точная функция примет вид  $W(p) = \frac{W_4' W_5 W_1 W_3}{1 + W_1 W_2' W_3 W_4' W_5}$ . Общее пра-

вило составления передаточной функции многоконтурной САР по структурной схеме заключается в следующем: система сводится к одноконтурной, затем выделяются входная и выходная величины, относительно них выделяют участок прямого  $W_n(p)$  и обратного преобразования (обратной связи)  $W_{oc}(p)$ , схема сводится к типовому виду, показанному на рис. 81, а передаточная функция находится по ранее полученной формуле:

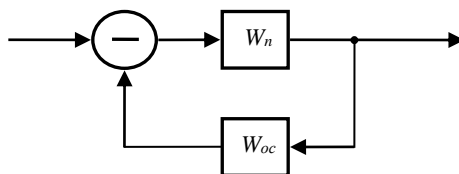


Рис. 81. Канонический вид функциональной схемы САУ

$$W = \frac{W_n}{1 + W_n W_{oc}}.$$

В формуле в числителе стоит произведение передаточных функций звеньев, находящихся между входом и выходом, а в знаменателе единица складывается с произведением передаточных функций прямого и обратного участков преобразования.

Например, для схемы, показанной на рис. 82, общая передаточная функция запишется:

$$W'_5 = W_2 + W_5; W'_4 = \frac{W_4 W'_5}{1 + W_4 W'_5 W_7} = \frac{W_4 (W_2 + W_5)}{1 + W_4 (W_2 + W_5) W_7};$$

$$W = \frac{W_1 W_3 W'_4}{1 + W_1 W_3 W'_4 W_6} = \frac{W_3 W_1 (W_2 + W_5)}{1 + W_4 (W_2 + W_5) (W_1 W_3 W_6 + W_7)}.$$

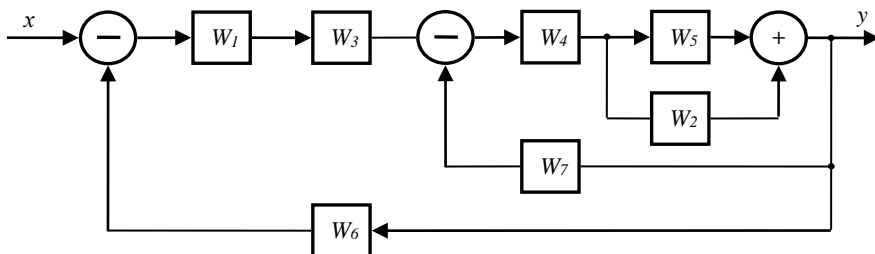


Рис. 82. Пример функциональной схемы САУ

Бывают такие сложные схемы, для которых затруднительно составить общую передаточную функцию. Поэтому их необходимо преобразовать к виду, допускающему написание общей передаточной функции системы. При этом, независимо от преобразований, общие динамические свойства системы должны сохраняться.

Например, в схеме, показанной на рис. 83, нельзя непосредственно выделить типовые соединения. Написание передаточной функции здесь затруднительно.

Нужно преобразовать схему таким образом, чтобы в ней соединение звеньев сводилось к трем типовым видам: последовательному, параллельному согласному и параллельному встречному. Поэтому важно установить общие правила, с помощью которых одна схема может быть преобразована в другую с сохранением динамических характеристик системы.

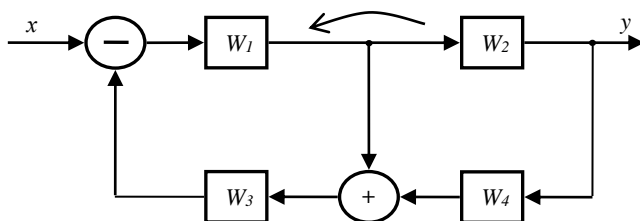


Рис. 83. Пример функциональной схемы с перекрестными связями

### *Правила преобразования функциональных схем*

Различают три основных вида преобразования схем:

- 1) перемещение суммированного узла через узел разветвления;
- 2) перемещение звена через узел разветвления;
- 3) перемещение звена через суммирующий узел.

Правила преобразования схем при каждом из этих видов перемещения зависят от того, совпадает или не совпадает направление перемещения с направлением сигнала. В связи с этим различают 6 правил преобразования схем:

1. Перенос суммирующего узла через узел разветвления по направлению сигнала (рис. 84).

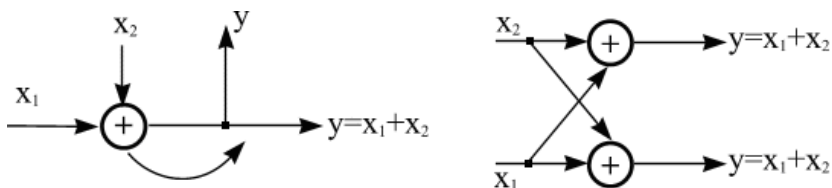


Рис. 84. Иллюстрация к правилу переноса узла через узел разветвления

2. Перенос суммирующего узла через узел разветвления против направления сигнала (рис. 85).

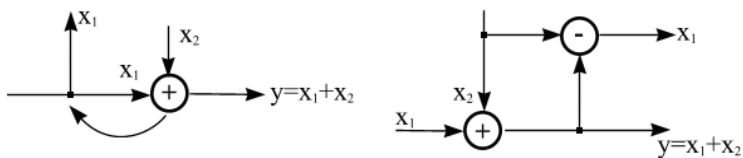


Рис. 85. Иллюстрация к правилу переноса узла через узел разветвления

3. Перемещение звена через узел разветвления по направлению сигнала (рис. 86).

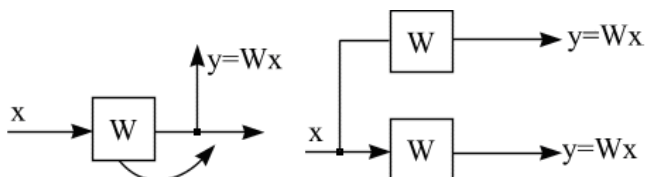


Рис. 86. Иллюстрация к правилу переноса звена

4. Перемещение звена через узел против направления сигнала (рис. 87).

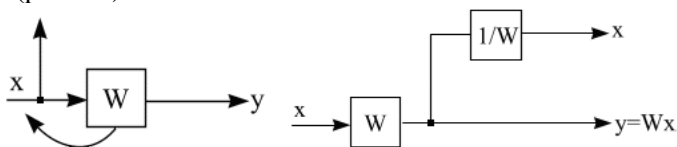


Рис. 87. Иллюстрация к правилу перемещения звена через узел

5. Перемещение звена через суммирующий узел по направлению сигнала (рис. 88).

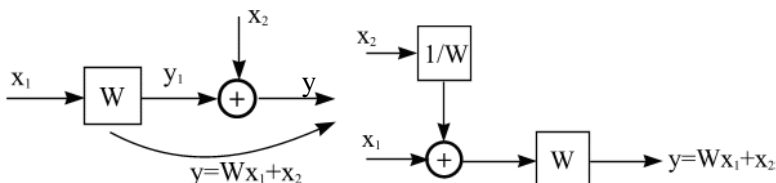


Рис. 88. Иллюстрация к правилу перемещения звена через суммирующий узел

6. Перемещение звена через суммирующий узел против направления сигнала (рис. 89).

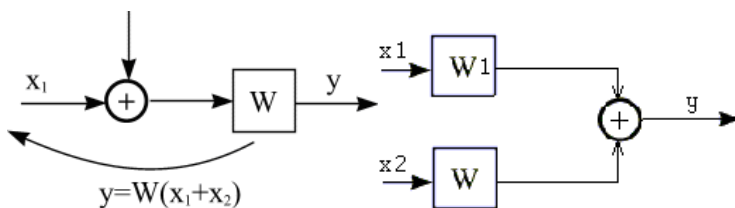


Рис. 89. Иллюстрация к правилу перемещения звена через суммирующий узел

Применение этих правил дает возможность проводить самые различные преобразования структурных схем. Например, указанную на рис. 90 схему можно преобразовать следующим образом: перенесем звено  $W_2$  через узел разветвления против направления сигнала (рис. 90).

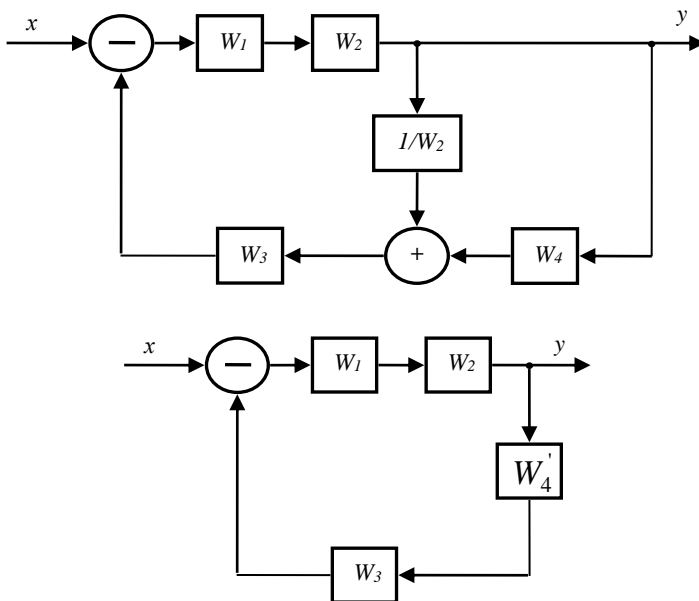


Рис. 90. Этапы преобразования схемы с перекрестными связями

Здесь мы имеем уже типовое соединение звеньев:

$$W_4' = W_4 + \frac{1}{W_2}; \quad W = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4'} = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_3 + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Важнейшим условием преобразования схем является сохранение математической операции преобразования сигнала.

## 20 ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПО ВОЗМУЩЕНИЮ

Ранее нами рассматривались передаточные функции по управляющему воздействию. Однако на систему могут действовать различные возмущающие воздействия, например радиопомехи, климатические факторы. Для анализа влияния возмущающего воздействия на выходной сигнал системы необходимо найти передаточную функцию по возмущению. Возмущение может действовать в любой точке структурной схемы и изображаться на ней в виде суммирующих узлов.

Например, для схемы, представленной на рис. 91, возмущение действует между звеньями  $W_4$  и  $W_5$ , что может соответствовать шуму звена.

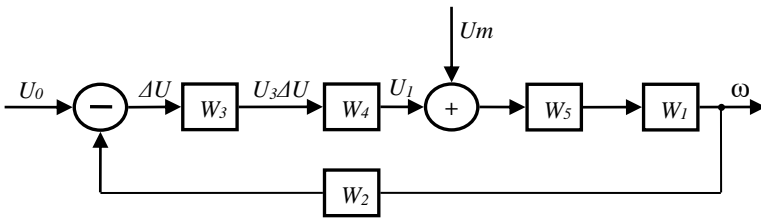


Рис. 91. Схема с одним возмущением

Передаточная функция по возмущению  $U_m$  будет иметь вид:

$$W_m = \frac{W_5 W_1}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4 W_5}.$$

Здесь в числителе стоит произведение передаточных функций звеньев, находящихся между возмущающим воздействием и выхо-

дом, а в знаменателе – произведение передаточных функций всех звеньев системы.

Рассмотрим схему с несколькими возмущающими воздействиями (рис. 92). Здесь  $F_1$ ;  $F_2$ ;  $F_3$  – возмущающие воздействия,  $y$  – выходная величина;  $x_0$  – задающее воздействие.

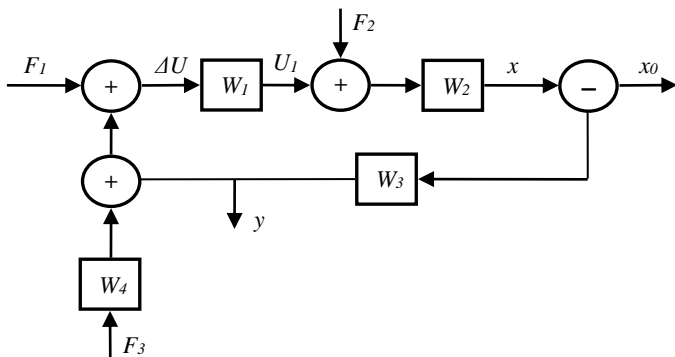


Рис. 92. Схема с несколькими возмущающими воздействиями

Пользуясь правилами преобразования, сведем все возмущения в один узел (рис. 93). Из примера видно, что любую совокупность возмущающих воздействий, действующую в различных узлах схемы, можно свести к одному эквивалентному воздействию, приведенному к определенной точке схемы:  $F_{\text{Э}} = F_1 + F_2/W_1 + F_3W_4$ .

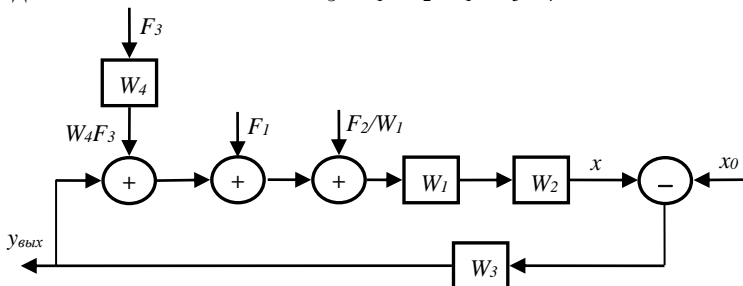


Рис. 93. Иллюстрация к преобразованию возмущающих воздействий

Передаточная функция по эквивалентному возмущению будет иметь вид: 
$$W_{F_{\text{Э}}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3}.$$

По входному сигналу  $W_x = \frac{W_3}{1 + W_1 W_2 W_3}$ .

Передаточная функция по возмущению для схемы на рис. 94:

$$W_F = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2}, \text{ по входному сигналу } - W_x = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}.$$

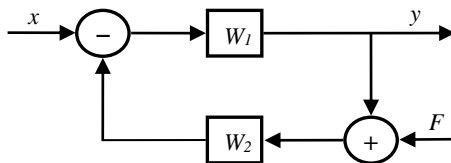


Рис. 94. Иллюстрация к определению передаточной функции по возмущению:  $x$  – входной сигнал,  $F$  – возмущение,  $y$  – выходной сигнал

Передаточная функция полностью характеризует САУ. По ней могут быть определены все характеристики САУ – статическая и переходная характеристики, оценена устойчивость. Таким образом, функциональная схема, состоящая из сочетаний различных простейших звеньев, позволит полностью выполнить анализ системы. Точность анализа зависит от количества простейших звеньев, к которым сводится система. Например, двигатель в зависимости от требуемой точности может моделироваться либо одним интегрирующим звеном, либо двумя последовательно соединенными интегрирующим и инерционным звеньями. Очевидно, что точность представления системы во втором случае выше. Отметим, что практически любое пропорциональное звено можно считать инерционным. Однако нет никакого смысла бесконечно усложнять систему. Из передаточной функции может быть найдено полное дифференциальное уравнение системы. Дифференциальное уравнение является наиболее общей математической моделью любой САУ. Его решение может полностью характеризовать САУ. Однако прямое решение дифференциальных уравнений часто бывает затруднительным, поэтому при анализе линейных САУ пользуются в основном передаточной функцией и получаемыми из нее частотными характеристиками.



## 21 ПРИМЕРЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ САР

### Система автоматической подстройки частоты (АПЧ)

Система АПЧ применяется для стабилизации частоты колебаний генераторов, для слежения за частотой сигнала в радиоприемных устройствах, в демодуляторах частотно-модулированных колебаний и других радиотехнических устройствах.

а) Система АПЧ в качестве стабилизатора частоты колебаний генератора показана на рис. 95. Целью регулирования является поддержание постоянной частоты генератора  $\omega$ . Здесь установка  $\omega_0$  задается дискриминатором частоты.

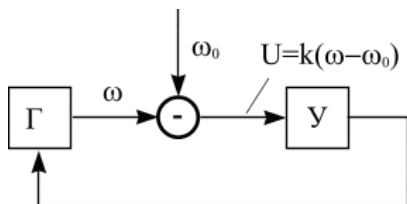


Рис. 95. Структурная схема системы АПЧ в режиме стабилизации частоты

Типичная дискриминационная характеристика имеет вид, показанный на рис. 96.

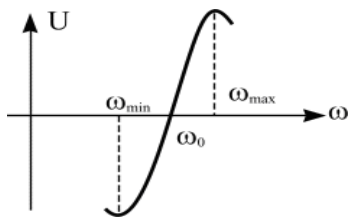


Рис. 96. Дискриминационная характеристика, где  $U = (\omega - \omega_0)K$

Напряжение  $U$  усиливается и воздействует на управляющий элемент генератора таким образом, чтобы свести разность частот  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  к нулю, тем самым стабилизировать его частоту. В качестве управляющего элемента может применяться варикап, расположенный в частотно-задающем контуре генератора.

б) Применение системы АПЧ для слежения за частотой сигнала в радиоприемных устройствах. Структурная схема гетеродинного приемника, в котором для стабилизации промежуточной частоты сигнала применяется система АПЧ, имеет вид, показанный на рис.97.

Настроить радиоприемник на частоту  $\omega_c$  нужной радиостанции – это означает внести сигнал, передаваемый на этой частоте, в полосу пропускания усилителя промежуточной частоты (УПЧ).

В этом приемнике частота  $\omega_c$  входного сигнала  $U_c(t)$  складывается с частотой гетеродина  $\omega_r$ , образуя сигнал промежуточной частоты  $\omega_{пр}$ , который усиливается услителем промежуточной частоты УПЧ и поступает на последующие каскады, в которых в дальнейшем выделяется только полезный сигнал радиостанции. При отсутствии системы АПЧ нестабильность входного сигнала и частоты гетеродина может привести к уходу промежуточной частоты сигнала за пределы полосы пропускания УПЧ и к нарушению нормальной работы приемника.

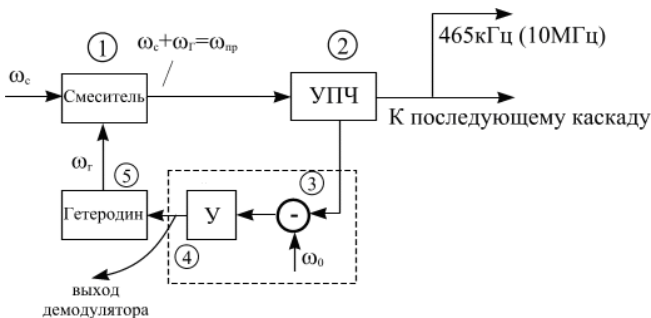


Рис. 97. Структурная схема супергетеродинного приемника:

- 1 – смеситель, 2 – усилитель промежуточной частоты, 3 – дискриминатор, 4 – усилитель постоянного тока, 5 – гетеродин

Целью регулирования является стабилизация частоты  $\omega_{пр}$ . Здесь выходной сигнал частоты  $\omega_c$  поступает на вход смесителя 1. На выходе смесителя 1 получается сигнал промежуточной частоты  $\omega_{пр} = \omega_c + \omega_r$ , который после УПЧ поступает на выход и в дискриминатор 3. В дискриминаторе производится сравнение заданного значения  $\omega_0$  и фактического значения частоты  $\omega_{пр}$ . В результате этого сравнения дискриминатор вырабатывает напряжение  $U_g = K(\omega_0 - \omega_{пр})$ ,

пропорциональное отклонению частоты  $\omega_{np}$  от заданного значения. Это напряжение усиливается усилителем 4 и поступает на управляющий элемент гетеродина 5 (например, на управляемую емкость (варикап) или индуктивность), который меняет частоту колебаний, генерируемых гетеродином 5, в сторону уменьшения отклонения частоты  $\omega_{np}$  от требуемого значения  $\omega_0$ .

В результате работы системы АПЧ промежуточная частота сигнала поддерживается близкой к центральной частоте УПЧ, это позволяет повысить качество приема для широкого диапазона частот входных сигналов.

Для составления функциональной схемы рассмотрим отдельные звенья системы АПЧ, которые можно приравнять к типовым:

1) смеситель:  $W_1 = K_1$ ;

2) усилитель промежуточной частоты:  $W_2 = \frac{K_2}{T_2 p + 1}$ ;

3) дискриминатор:  $W_3 = \frac{K_3}{T_3 p + 1}$ ;

4) усилитель постоянного тока:  $W_4 = \frac{K_4}{T_4 p + 1}$ ;

5) гетеродин:  $W_5 = K_5$ .

Функциональная схема АПЧ будет иметь вид (рис. 98):

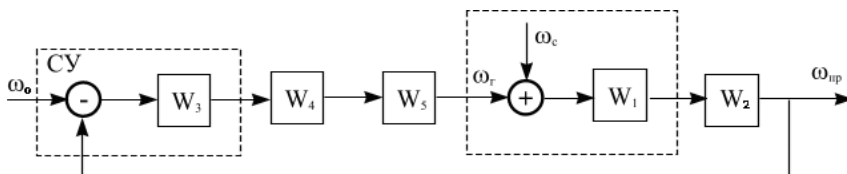


Рис. 98. Функциональная схема АПЧ

Передаточная функция примет вид:

$$W(p) = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4 W_5}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4 W_5} = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_5}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5} = \frac{K}{K + (1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)},$$

где  $K$  – общий коэффициент усиления системы.

При использовании системы АПЧ в качестве демодулятора частотно-модулированных колебаний выходной сигнал снимается с усилителя постоянного тока (см. рис. 97).

### *Система фазовой автоматической подстройки частоты (ФАПЧ)*

Системы ФАПЧ используются в тех же устройствах, что и АПЧ, и кроме того применяются в качестве демодуляторов в устройствах с фазовой модуляцией, в устройствах воспроизведения магнитной записи и других радиотехнических схемах. Структурная схема простейшей системы имеет тот же вид, что и АПЧ, только вместо ЧД используется фазовый дискриминатор. Особенность ФАПЧ состоит в том, что измерительным элементом, с помощью которого осуществляется сравнение двух частот, является фазовый детектор (ФД). Фаза и частота колебаний связаны интегральным соотношением:

$$\varphi(t) = \int_0^T \Delta\omega(t)dt, \text{ где } T - \text{ постоянная времени ФД, следовательно}$$

фазовый детектор выполняет функции интегрирующего звена. Принцип работы состоит в следующем: если частота генератора  $\omega_r$  отличается от  $\omega_0$ , то фазовый детектор выдает сигнал рассогласования, пропорциональный интегралу от разности сравниваемых частот:

$$U_{\varphi\delta} = K \int_0^T (\omega_0 - \omega_r) dt = K \int_0^T \Delta\omega dt .$$

Это напряжение после усиления воздействует на управляющий элемент генератора, который изменяет частоту до тех пор, пока рассогласование частот не будет сведено к нулю. Таким образом, в функциональной схеме фазовый детектор будет моделироваться тремя звеньями: сравнивающим звеном, звеном интегрирования, преобразующим разность частот в фазу сигнала, и пропорциональным преобразованием фазы в напряжение с коэффициентом передачи  $K_1$ . Функциональная схема примет вид (рис. 99):

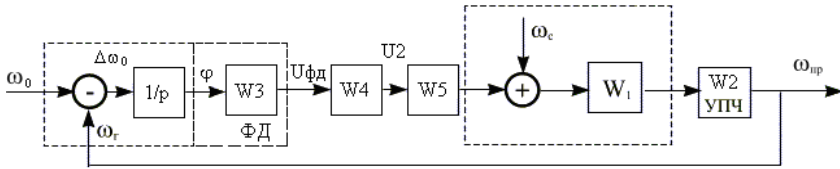


Рис. 99. Функциональная схема системы АФЧК

Тогда передаточная функция примет вид:

$$W(p) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_5}{p(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5} =$$

$$= \frac{K}{K + p(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)},$$

где  $K$  – общий коэффициент усиления системы. Отметим, что в общем случае зависимость напряжения ФД от фазы нелинейна  $U_{\phi\delta} = F(\varphi)$ , однако здесь для простоты она принята линейной.

Рассмотренные две системы автоматической подстройки частоты являются примерами статической и астатической систем регулирования. Их отличие состоит в следующем. В *статической* системе управляющее воздействие формируется непосредственно в пропорциональной зависимости от сигнала рассогласования. В *астатической* системе управляющее воздействие формируется пропорционально интегралу от сигнала рассогласования, т.е. в астатической системе всегда есть интегрирующее звено. В дальнейшем будет показано, что в конечном итоге в астатической системе ошибка регулирования принципиально может быть сведена к нулю, а в статической системе стремится к некоторому постоянному значению, зависящему от общего коэффициента усиления системы.

*Система автоматического сопровождения цели по угловым координатам*

Структурная схема показана на рис. 100. Назначение системы – выдавать оперативную информацию об угловых координатах движущейся цели.

Антенна состоит из параболического рефлектора и излучателя, вращающегося с постоянной скоростью. Рефлектор может поворачиваться вокруг двух осей: вертикальной (угол азимута  $\alpha$ ) и горизон-

тальной (угол места  $\beta$ ). К каждой из осей рефлектора через редуктор подсоединен выходной вал двигателей с независимым возбуждением. Управляющие сигналы поступают на двигатели от электромашиных усилителей. Таким образом, в системе имеются 2 одинаковых канала: канал азимута и канал угла места, задачей которых является обеспечение сопровождения цели в двух плоскостях в пространстве. Благодаря тому, что ось излучателя по отношению к оси рефлектора смещена на некоторый угол, при вращении излучателя осуществляется модуляция отраженных от цели импульсов. Антенна является одновременно и излучателем, и приемником, и угловым дискриминатором.

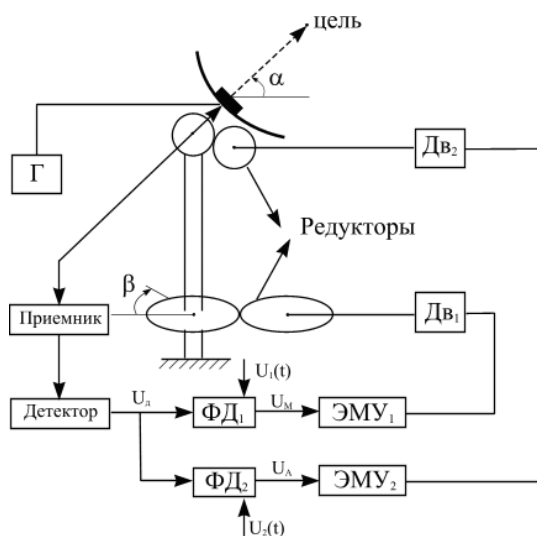


Рис. 100. Структурная схема системы автоматического сопровождения цели по угловым координатам:

$\Gamma$  – генератор, Дв – двигатель, ФД – фазовый детектор, ЭМУ – электромашинный усилитель

Угловой дискриминатор обнаруживает отклонение равносигнального направления следящей антенны от направления на объект и преобразует это отклонение в постоянное или переменное напряжение. Принцип работы углового дискриминатора иллюстрируется рис. 101, 102, 103. Антенна имеет диаграмму направленности, показанную на рис. 101.

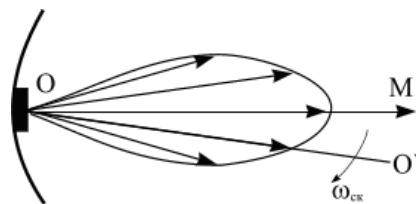


Рис. 101 – Диаграмма направленности антенны:  
 OM – направление максимального излучения,  
 OO' – ось вращения диаграммы направленности

Излучатель вращается с постоянной скоростью  $\omega_{ск}$  относительно оси  $OO'$ , не совпадающей с направлением максимального излучения  $OM$ . Таким образом диаграмма направленности будет вращаться с угловой скоростью  $\omega_{ск}$ , а ось максимума излучения описывает в пространстве коническую поверхность (рис. 102). Два крайних положения диаграммы направленности имеют вид, показанный на рис. 102, из которого видно, что в направлении  $OO''$  интенсивность излучения не меняется при вращении.

Это направление называется равносигнальным.

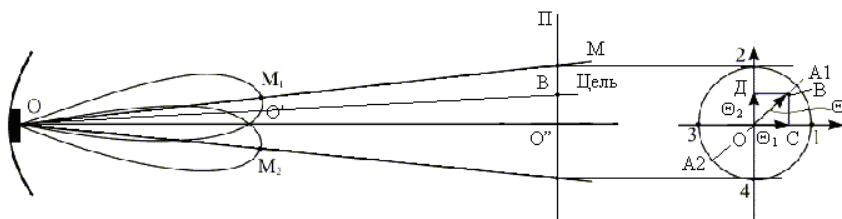


Рис. 102. Иллюстрация к принципу работы углового дискриминатора:  
 OO'' – равносигнальное направление антенны, OB – направление на цель

Пересечем пространственную диаграмму направленности плоскостью  $\Pi$ , перпендикулярной оси вращения. Ось максимума излучения  $OM$  описывает в этой плоскости окружность с центром  $O''$ .

Пусть  $OB$  – направление на цель. Точка  $B$  – пересечение плоскости с направлением на цель. Если точка  $B$  не совпадает с точкой  $O''$ , то есть цель не находится на оси вращения, то интенсивность облучения цели будет периодически изменяться. Интенсивность облучения объекта максимальна, когда максимум излучения проходит

через точку  $A_1$  (наиболее близкую к цели). Интенсивность облучения минимальна в точке  $A_2$  в момент наибольшего удаления максимума излучения от точки  $B$ . Аналогично изменяется в процессе сканирования и коэффициент усиления антенны при работе ее на прием для сигналов, отраженных от объекта. Амплитуда радиоимпульсов, принятых радиоприемным устройством, если  $O''$  и  $B$  не совпадают, имеет вид, показанный на рис. 103, а. Максимальный сигнал имеет место в тот момент, когда диаграмма направленности находится между точками 1 и 2. Если точки  $O''$  и  $B$  совпадают, то сигнал приемника имеет вид, показанный на рис. 103, б (здесь совпадают направление на цель и ось вращения диаграммы направленности).

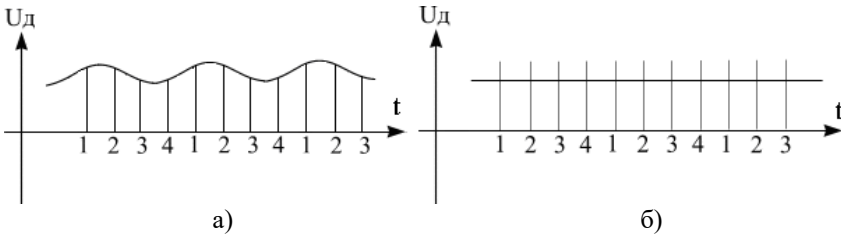


Рис. 103. Сигналы детектора в моменты несовпадения (а) и совпадения (б) оси вращения диаграммы направленности с направлением на цель

В этом случае максимум излучения находится на неизменном направлении от объекта. Следовательно амплитуда отраженных радиоимпульсов постоянна. Поэтому направление оси вращения диаграммы направленности называют равносигнальным направлением. Проекция вектора  $OB$  на оси координат определяют отклонение объекта от равносигнального направления в азимутальной ( $OC$ ) и угломестной ( $OD$ ) плоскостях.

Обозначим вектор  $\overline{OB} = \theta$ ;  $\overline{OC} = \theta_1$ ;  $\overline{OD} = \theta_2$ . Выражение для огибающей отраженного сигнала имеет вид:

$$U_{ог}(t) = \sqrt{2}U_g(\theta) \cos(\omega_{ck}t - \varphi).$$

Этот сигнал образуется на выходе детектора. При малых  $\theta$   $U_g(\theta) = K_g \cdot \theta$ . Выделение из напряжения огибающей  $U_{ог}(t)$  для азимутального и угломестного каналов производится с помощью фазовых дискриминаторов, в которых источники опорного напряжения сдвинуты на  $90^\circ$ :



$$U_1(t) = U_0 \cos \omega_{\text{сч}} t,$$

$$U_2(t) = U_0 \cos \left( \omega_{\text{сч}} t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда на выходе дискриминаторов появляются напряжения, пропорциональные векторам  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$U_A = K_g \cdot \theta \cdot \cos \varphi = K_g \theta_1,$$

$$U_M = K_g \cdot \theta \cdot \sin \varphi = K_g \theta_2.$$

Эти напряжения обрабатываются двигателями места и азимута. Глубина модуляции характеризует величину рассогласования между осью рефлектора и направлением на цель, а фаза модуляции определяет знак рассогласования. Принятые антенной импульсы, отраженные от цели, поступают в приемник, имеющий схему автоматического регулирования усиления (АРУ). Благодаря работе схемы АРУ амплитуда видеосигнала на выходе приемника не зависит от расстояния до цели и ее размера.

Для обработки рассогласования по обоим каналам управления используется коммутатор, который последовательно подключает соответственные двигатели обработки ошибки.

При этом алгоритм обработки следующий. Включается один канал, например  $\alpha$ , и вращает антенну по этому углу до тех пор, пока общий сигнал ошибки не станет минимальным. Затем подключается канал  $\beta$  и сводит общую ошибку до нуля. Процесс обработки ошибки можно проиллюстрировать графически.

Общую ошибку можно рассматривать как вектор, длина которого равна:  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2}$ , где  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\beta$  – составляющие ошибки по углам (рис. 104).

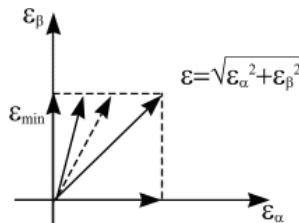


Рис. 104. Иллюстрация к обработке ошибки рассогласования

Очевидно, что если отработать ошибку по одной составляющей, то общая ошибка минимизируется. Как только общая ошибка становится минимальной, включается второй канал и полностью обрабатывает ошибку, поэтому в коммутатор должен входить также анализатор ошибки. Для того чтобы успевать отслеживать цель, быстрдействие системы с учетом коммутации должно быть много больше скорости движения цели.

Составим функциональную схему по одному каналу,  $x_0$  – равносигнальное направление антенны (рис. 105).

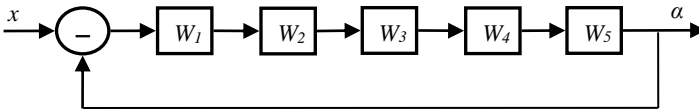


Рис. 105. Функциональная схема одного канала системы сопровождения цели по угловым координатам

Здесь сравнивающим устройством является сама антенна.

Звено 1 – под ним можно объединить все антенное устройство, приемник и детектор с фильтром:  $W_1 = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$ , где  $T_1$  – в основном определяется постоянная времени фильтра.

Звено 2 – усилитель и коммутатор. Из них существенная постоянная времени у усилителя низких частот:  $W_2 = \frac{K_2}{T_2 p + 1}$ .

Звено 3 – электромашинный усилитель имеет передаточную функцию:  $W_3(p) = \frac{K_3}{(1 + T_3' p)(1 + T_3'' p)}$ .

Звено 4 – двигатель:  $W_4 = \frac{K_4}{p(T_4 p + 1)}$ .

Звено 5 – редуктор с передаточным числом  $W_5 = K_5$ . Общая передаточная функция системы по одному каналу примет вид:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{W_1 W_2 W_3 W_4 W_5}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4 W_5} = \\
 &= \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3' p)(1 + T_3'' p)(1 + T_4 p) + k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}.
 \end{aligned}$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют методику перехода от структурной схемы к функциональной с последующим определением общей передаточной функции системы управления.

## 22 УСТОЙЧИВОСТЬ САУ

Устойчивость САУ определяет ее принципиальную работоспособность. Если система устойчива, то она работоспособна, т.е. может обрабатывать рассогласование.

САУ является *устойчивой*, если после окончания внешнего кратковременного воздействия она с течением времени возвратится к исходному состоянию.

Идеальным кратковременным воздействием является  $\delta$ -функция, поэтому судить об устойчивости принято по весовой функции  $w(t)$ .

Если:  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$  – САУ устойчива;

$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty$  – САУ не устойчива;

$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$  – САУ нейтральна.

Наиболее полно вопросы устойчивости исследованы Ляпуновым. Пусть дана система с известной передаточной функцией (рис. 106):

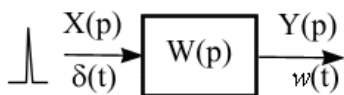


Рис. 106. Система с известной передаточной функцией

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, A(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n.$$

Если  $x(t) = \delta(t)$ ; то  $x(p) = 1$ , тогда  $y(p) = W(p)$ ;  
 $y(t) = w(t) = L^{-1}[W(p)]$ .

### Теорема

Для того чтобы линейная САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы имели отрицательную вещественную часть, т.е. находились в левой полуплоскости.

### Доказательство

$$w(t) = L^{-1}[W(p)] = L^{-1} \left[ \frac{B(p)}{A(p)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{(\alpha_k + j\beta_k)t} = \sum_{k=1}^n C_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k),$$

где  $p_k$  – корни уравнения  $A(p) = 0$ ,  $p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$ .

1. Если  $\alpha_k < 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ , т.к.  $e^{\alpha_k t} \rightarrow 0$ , т.е. САУ устойчива (рис. 107).

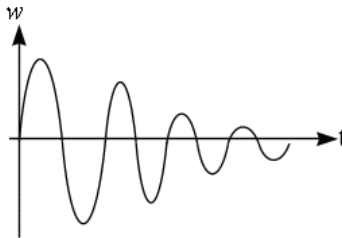


Рис. 107. Иллюстрация к описанию устойчивой САУ

2. Если  $\alpha_k > 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty$ , т.к.  $e^{\alpha_k t} \rightarrow \infty$ , т.е. САУ неустойчива (рис. 108).

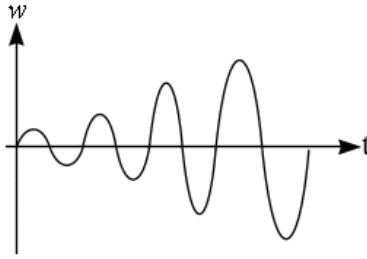


Рис. 108. Иллюстрация к описанию неустойчивой САУ

3.  $\alpha_k = 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ , т.е. нейтральна (рис. 109).

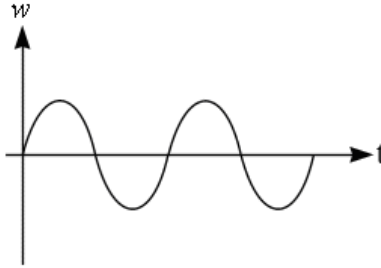


Рис. 109. Иллюстрация к описанию нейтральной САУ

### Теорема 2

*Необходимым условием устойчивости является то, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны.*

#### Доказательство

Доказательство приведем для случая, когда все корни характеристического уравнения действительны:  $p_k = \alpha_k$ .

Дано: система устойчива и она имеет все корни характеристического уравнения  $p_k < 0$ .

Доказать, что коэффициенты положительны:  $a_k > 0$ .

Разложим полином  $A(p)$  на сомножители по теореме Виета:

$$A(p) = a_n(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_k)\dots(p - p_n) = \sum_{k=1}^n a_k p^k .$$

Если все  $p_k < 0$ , то все сомножители  $(p - p_k)$  заведомо положительны, значит и коэффициенты  $a_k > 0$ , так как перемножение всех положительных сомножителей дает только положительные коэффициенты.

Таким образом, если система устойчива, то она точно имеет только *положительные коэффициенты* в характеристическом уравнении. Но из того, что она имеет в характеристическом уравнении только положительные коэффициенты, *не следует*, что она устойчива. Однако претендовать на устойчивость может только система с положительными коэффициентами в характеристическом уравнении. Таким образом, в общем случае для суждения об устойчивости нужно найти корни характеристического уравнения и посмотреть знак их вещественной части. Поиск корней для систем выше третьего порядка в аналитическом виде затруднителен. Для суждения об устойчивости систем без решения характеристического уравнения разработаны *критерии устойчивости*.

Совокупность правил, позволяющих судить об устойчивости, без решения характеристического уравнения системы называется *критериями устойчивости*.

Бывают алгебраические и частотные критерии устойчивости.

*Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Рауса*

Пусть дано характеристическое уравнение:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} \dots a_1 p^1 + a_0 = 0 .$$

Составляется таблица Рауса по следующим правилам (табл. 2):

1-я строка – выписываются коэффициенты характеристического уравнения, начиная с первого через один. Вторая строка – оставшиеся коэффициенты. Третья и последующие строки определяются через предыдущие по рекуррентным формулам.

$$\lambda_i = \frac{C_{i-2,1}}{C_{i-1,2}} \quad C_{i,j} = C_{i-2,j+1} - \lambda_i C_{i-1,j+1} \quad - \text{рекуррентная формула}$$

для  $i \geq 3$  и  $j \geq 1$ , где  $i$  – номер строки, а  $j$  – номер столбца.

Таблица 2. Таблица Рауса

$\begin{matrix} \rightarrow j \\ \downarrow i \end{matrix}$	$C_{11} = a_n$	$C_{12} = a_{n-2}$	$C_{13} = a_{n-4}$	.....
	$C_{21} = a_{n-1}$	$C_{22} = a_{n-3}$	$C_{23} = a_{n-5}$	.....
$\lambda_3 = \frac{C_{11}}{C_{21}}$	$C_{31} = C_{12} - \lambda_3 C_{22}$	$C_{32} = C_{13} - \lambda_3 C_{23}$	.....	.....
$\lambda_4 = \frac{C_{21}}{C_{31}}$	$C_{41} = C_{22} - \lambda_4 C_{32}$	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
$\lambda_{n+1} =$	$C_{n+1,1}$	0	0	0

Общее число строк таблицы Рауса  $n+1$ .

Формулировка критерия Рауса:

*Система устойчива, если все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса положительны, т.е.  $C_{11} > 0$ ;  $C_{21} > 0$ ;  $C_{31} > 0$ ;  $C_{i,1} > 0$ ; ...  $C_{n,1} > 0$ .*

По этому критерию можно узнать число корней характеристического уравнения, находящихся в правой полуплоскости. Это число характеризует степень неустойчивости системы. Число корней характеристического уравнения находится в правой полуплоскости, равно числу переменных знаков в первом столбце таблицы Рауса.

Пример:  $A(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 10 = 0$ .

	1	3	10
	2	4	0
$\lambda_3=1/2$	$3-4/2=1$	10	0
$\lambda_4=2$	$4-20=-16$	0	
$\lambda_5=-1$	10		

Система неустойчива, т.к. один отрицательный коэффициент в первом столбце. Число корней, находящихся в правой полуплоско-

сти, равно 2, так как имеем две переменные знаков в первом столбце таблицы Рауса.

### *Критерии Гурвица*

Составляется определитель Гурвица.

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Для этого по главной диагонали выписываются все коэффициенты характеристического уравнения, начиная со второго. Затем от главного диагонального элемента вниз выписываются коэффициенты по возрастанию степени  $n$ , а вверх – по убыванию степени  $n$ .

### Формулировка критерия Гурвица:

*Система устойчива, если все диагональные миноры определителя Гурвица положительны, т.е.*

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 > 0; \Delta_n > 0.$$

Отметим, что всегда  $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$ .

Для предыдущего примера имеем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 2 > 0 \\ \Delta_2 &= 6 - 4 = 2 > 0 \\ \Delta_3 &= -32 \\ \Delta_4 &= -32 \cdot 10 = -320 < 0 \end{aligned}$$

Система неустойчива. По критерию Гурвица можно определить диапазон изменения какого-либо параметра, в котором система будет оставаться устойчивой. Например, пусть дано характеристическое уравнение:



$$p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + k = 0.$$

Найти значения  $k$ , при которых система устойчива. Составим определитель Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & k & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & k \end{vmatrix} \quad \Delta_1=2>0; \Delta_2=2>0$$

$$\begin{cases} \Delta_3 = 8 - 4k > 0, \\ \Delta_4 = k(8 - 4k) > 0. \end{cases}$$

Из решения последней системы неравенств получаем ответ:  $0 < k < 2$ .

Число корней в правой полуплоскости по критерию Гурвица определить нельзя.

#### *Критерий Найквиста*

По этому критерию об устойчивости замкнутой системы судят по частотным характеристикам разомкнутой системы. Для оценки устойчивости системы по критерию Найквиста необходимо сделать следующее.

1) Привести систему к виду с единой обратной связью, где  $W_p(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$ , где  $K(p)$  и  $D(p)$  – полиномы от  $p$  (рис. 110).



Рис. 110. Иллюстрация к описанию критерия Найквиста

$$W_s(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{K(p)}{K(p) + D(p)}.$$

2) Оценить устойчивость разомкнутой системы, и если разомкнутая система неустойчива, то найти число корней характеристического уравнения  $D(p) = 0$ , находящихся в правой полуплоскости  $m$  (например, критерий Рауса).

3) Построить годограф разомкнутой системы (рис. 111), т.е. взять  $W_p(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{D(j\omega)} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$ .

По нему оценить устойчивость по следующим *правилам*.

Замкнутая САР устойчива, если при изменении частоты от 0 до бесконечности годограф разомкнутой системы охватывает точку  $(-1;0)$  в положительном направлении (против часовой стрелки)  $m/2$  раз, где  $m$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

Например, при  $m=2$  годограф устойчивой в разомкнутом состоянии системы имеет вид, показанный на рис. 111. Годограф охватывает в положительном направлении точку  $(-1;0)$  один раз ( $m/2=1$ ). Система устойчива. Выражение «охватывает» можно пояснить следующим образом: если из точки  $(-1;0)$  построить вектор к линии годографа, то он будет охватывать точку  $(-1;0)$  1 раз, если угол его поворота при изменении  $0 < \omega < \infty$  будет равен  $2\pi$ ; и охватывать  $k$ -раз, если угол его поворота равен  $k \cdot 2\pi$ .

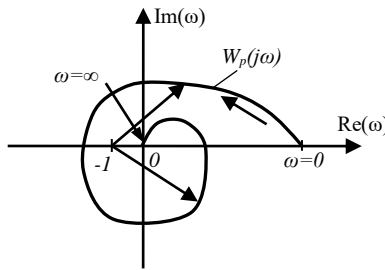


Рис. 111. Иллюстрация к описанию критерия Найквиста

В частном случае, если разомкнутая система устойчива, т.е.  $m=0$ , для устойчивости замкнутой системы годограф  $W_p(j\omega)$  может не охватывать точку  $(-1,0)$  вообще.

Для практических применений удобно использовать несколько иную формулировку критерия Найквиста. Если переход годографа из

верхней полуплоскости в нижнюю (сверху вниз) при возрастании частоты называть *положительным*, а переход из нижней полуплоскости в верхнюю (снизу вверх) – *отрицательным*, то критерии Найквиста можно сформулировать следующим образом:

*Замкнутая САР будет устойчива, если при изменении частоты от 0 до  $\infty$  разность между числом положительных (сверху вниз) и числом отрицательных (снизу вверх) переходов годографом разомкнутой системы отрезка действительной оси  $(-\infty, -1)$  равна  $m/2$ , где  $m$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

В частном случае, когда  $m=0$ , замкнутая система устойчива, если указанная разность равна 0. Для астатических систем (для которых при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $W_p(j\omega) \rightarrow \infty$ ) годограф нужно дополнить дугой бесконечно большого радиуса, соединяющей точку годографа при  $\omega=0$  с точкой положительного участка действительной оси, причем соединение производить в положительном направлении (против часовой стрелки).

*Пример.* Пусть  $m=2$ . Система в разомкнутом состоянии неустойчива (рис. 112). Годограф на участке  $(-\infty, -1)$  имеет 2 положительных и 1 отрицательный переход, их разность  $2-1=1=m/2$ , следовательно замкнутая система устойчива.

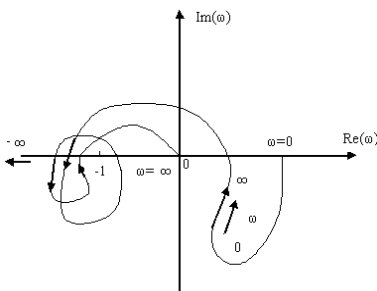


Рис. 112. Иллюстрация к описанию критерия Найквиста

### *Критерий Найквиста для логарифмических характеристик. Запасы устойчивости*

Критерий устойчивости Найквиста может быть сформулирован применительно к логарифмическим характеристикам системы в

разомкнутом состоянии. Точками пересечения  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  годографа  $W_p(j\omega)$  с отрезком действительной оси  $(-\infty; -1)$  (рис. 113) соответствуют точки, для которых

$$L(\omega) = 20 \lg |W_p(j\omega)| > 0$$

$$\text{и } \varphi(\omega) = \arg W_p(j\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = -\pi; -3\pi; -5\pi; \dots$$

Тогда критерий устойчивости для логарифмических характеристик может быть сформулирован следующим образом:

*Замкнутая САР устойчива, если на участке положительности ЛАЧХ разность между числом отрицательных и положительных переходов фазочастотной характеристики линии  $\varphi = -\pi$  равна  $m/2$ , где  $m$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

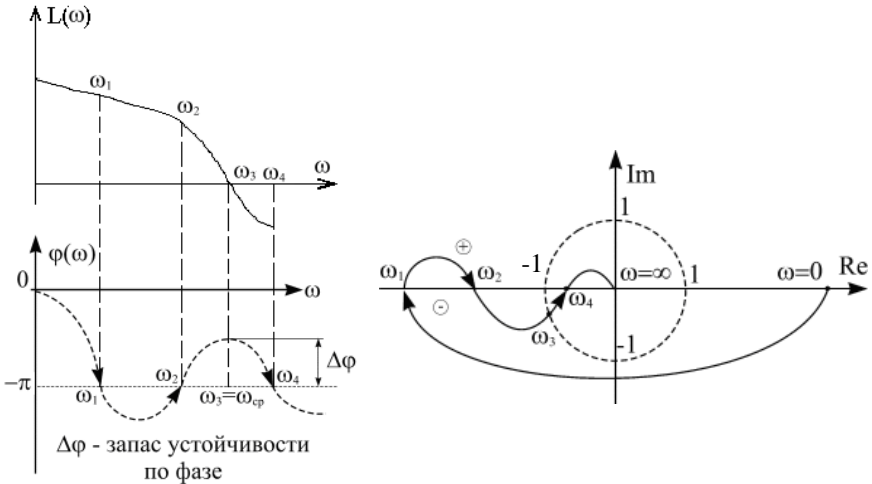


Рис. 113. Иллюстрация к критерию Найквиста по логарифмическим характеристикам

Если  $m=0$ , то система с характеристиками, показанными на рис. 114, устойчива. Отметим, что если ЛАЧХ  $L(\omega)=0$ , то АЧХ

$A(\omega)=1$ , т.е. в момент перехода ЛАЧХ через ноль коэффициент усиления системы становится меньше 1. Частота, при которой ЛАЧХ переходит через ось абсцисс, называется частотой среза.

Для простых систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, условие устойчивости их в замкнутой системе может быть сформулировано проще: для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо, чтобы на частоте среза фазочастотная характеристика разомкнутой устойчивой системы была больше  $-\pi$  [ $\varphi(\omega) > -\pi$ ].

Например, рассмотрим характеристики, показанные на рис. 114. Здесь на частоте среза  $\varphi(\omega_{cp}) > -\pi$ , поэтому можно определить запасы устойчивости по амплитуде и по фазе. Запас по фазе:  $\Delta\varphi = \pi - \varphi(\omega_{cp})$ ; запас по амплитуде:  $\Delta A = 1 - A(\omega_{cp})$  и  $\Delta L = 1 - L(\omega_{cp})$ . Если годограф разомкнутой системы целиком находится внутри круга единичного радиуса, то система будет абсолютно устойчивой (рис. 115). Если годограф проходит через точку  $(-1, 0)$ , то система находится на границе устойчивости, т.е.  $\Delta A=0$ ;  $\Delta\varphi=0$ .

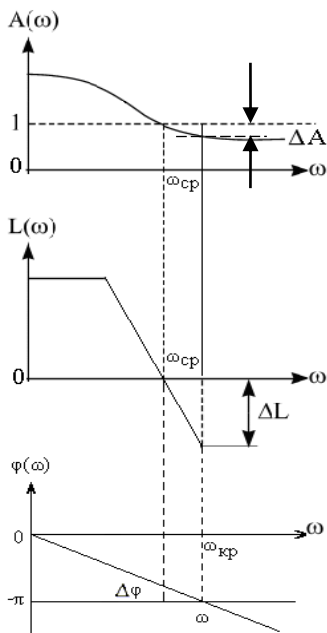


Рис. 114. Иллюстрация к понятию «запасов устойчивости»

Это следует из выражения:  $W(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}$ , откуда следует,

что при  $W_p(j\omega) = -1$  ККП стремится к бесконечности, система теряет устойчивость.

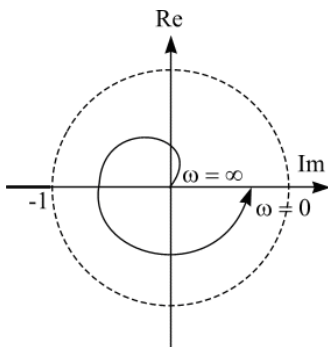


Рис. 115. Иллюстрация к понятию абсолютной устойчивости

Следовательно граница устойчивости имеет место при совпадении частоты среза с критической частотой. В системе возникают незатухающие колебания. Если  $\omega_{cp} > \omega_{кр}$ , то в системе будут иметь место колебания с возрастающей амплитудой.

Среди частотных критериев также известен критерий Михайлова, который в данном пособии не рассматривается. Подробно о нем описано в [4].

## 23 УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Критерий Найквиста может быть распространен и для систем, описываемых иррациональными и трансцендентными функциями. Правда, только для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии.

Пусть дана САР со звеном запаздывания (рис. 116), где  $W_1(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$  – дробно-рациональная функция,  $W_2(p) = e^{-p\tau}$  – звено запаздывания.

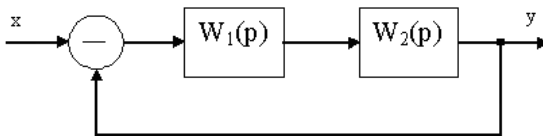


Рис. 116. Структурная схема системы с запаздыванием

Передаточная функция в разомкнутом состоянии:  $W_p(p) = W_1(p)e^{-p\tau}$ . Соответственно ККП  $W_p(j\omega) = W_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}$ , т.к.  $W_1(j\omega) = A_1(j\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , то для разомкнутой системы можно записать  $W_p(j\omega) = A_1(\omega)e^{j(\varphi(\omega) - \omega\tau)}$ .

Из анализа выражений видно, что для построения частотного годографа системы с запаздыванием нужно построить годограф системы без запаздывания и каждый вектор (каждую точку) этого годографа повернуть в отрицательном направлении (по часовой стрелке) на угол  $\omega\tau$  (рис. 117). На рис. 117 пунктиром показан круг единичного радиуса. Заметим, что при  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\omega\tau \rightarrow \infty$ . Так как при большом  $\omega$ ,  $W_1(j\omega)$  обычно мал, то годограф системы с запаздыванием закручивается вокруг нуля (рис. 117),  $W_p(j\omega)$  – это система с запаздыванием, а  $W_1(j\omega)$  – система без запаздывания. Здесь аналогично система будет устойчивой, если годограф не охватывает точку  $(-1,0)$ . Очевидно, что при некотором значении  $\tau \approx \tau_0$  годограф может пройти через точку  $(-1,0)$ , т.е. система выйдет на границу устойчивости. При дальнейшем увеличении  $\tau$  годограф охватит точку  $(-1,0)$  и система тем более станет неустойчивой.

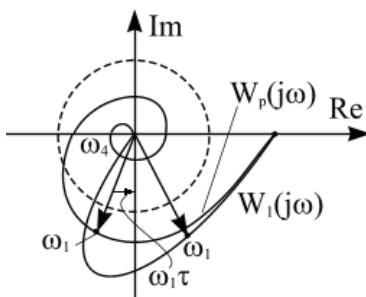


Рис. 117. Влияние запаздывания на годограф разомкнутой системы

Если еще увеличивать  $\tau$ , то это может привести к тому, что годограф, деформируясь, снова не будет охватывать точку  $(-1,0)$  и си-

стема вновь станет устойчивой. Дальнейшее увеличение  $\tau$  может опять привести к неустойчивости, т.е. в зависимости от частотных свойств при изменении  $\tau$  система может несколько раз терять и приобретать устойчивость. Определим условия возникновения неустойчивости. Эти условия определяются равенством:

$$W_p(j\omega) = W_1(j\omega_{cp})e^{-j\tau\omega_{cp}} = -1,$$

$$A_1(\omega_{cp})e^{j[\phi(\omega_{cp}) - \omega_{cp}\tau]} = -1,$$

где  $\omega_{cp}$  – частота среза, здесь  $A_1(\omega)$  и  $\phi(\omega)$  – АЧХ и ФЧХ систем без запаздывания. Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} A_1(\omega_{cp}) = 1; \\ \phi(\omega_{cp}) - \omega_{cp}\tau = -\pi(2k + 1), \text{ где } k=0; 1; 2\dots \end{cases}$$

Из первого выражения определяем частоту среза, из второго значения  $\tau_m$ , при которых система выходит на границу устойчивости:

$$\tau_m = \frac{\phi(\omega_{cp}) + \pi(2k + 1)}{\omega_{cp}}.$$

Гарантированная устойчивость имеет место при  $m=0$ . Если  $\tau < \tau_0$ , то система устойчива, если  $\tau > \tau_0$ , то система неустойчива;

если  $\Delta\phi$  – запас устойчивости по фазе системы без запаздывания, то  $\Delta\phi = \pi - \phi(\omega_{cp})$  и  $\tau_0 = \frac{\Delta\phi + 2k\pi}{\omega_{cp}}$ .

Заметим, что если годограф  $W_1(j\omega)$  системы без запаздывания целиком лежит внутри единичной окружности, то система устойчива при любом значении  $\tau$ . Как уже отмечалось, в системе может быть несколько значений  $\tau_m$ , при которых система находится на границе устойчивости. В простейшем случае  $\tau$  выбирают минимальной.

*Пример.* Система состоит из инерционного звена и звена запаздывания:  $W_1 = \frac{K_1}{T_1 p + 1}$ ,  $W_2(p) = e^{-p\tau}$ .

Определить  $\tau$ , при котором замкнутая система устойчива, если  $K_1 > 1$ . Имеем:



$$A(\omega_{cp}) = \frac{K_1}{\sqrt{1 + \omega_{cp}^2 T_1^2}} = -1,$$

$$K_1^2 = 1 + \omega_{cp}^2 T_1^2; \omega_{cp} = \frac{\sqrt{K_1^2 - 1}}{T_1}; A(\omega) = \frac{K_1}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg}(\omega T_1); \varphi(\omega_{cp}) = -\text{arctg}\sqrt{K_1^2 - 1}.$$

Годограф  $W_1(p)$  имеет вид, представленный на рис. 118:

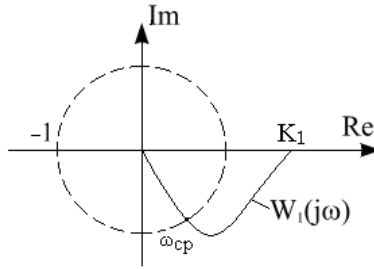


Рис. 118. Иллюстрация к примеру построения годографа

Тогда  $\tau_0 = \frac{(\pi - \text{arctg}\sqrt{K_1^2 - 1})T_1}{\sqrt{K_1^2 - 1}}$ , при  $\tau \geq \tau_0$  замкнутая система

будет неустойчивой, а при  $\tau < \tau_0$  – устойчивой.

*Сравнение критериев устойчивости.*

Критерий Гурвица целесообразно применять, когда характеристическое уравнение  $n \leq 4$ .

Критерий Рауса – при  $n > 4$  он дает быстрый ответ при численно заданных коэффициентах.

Критерий Найквиста – для сложных систем, этот критерий является единственно приемлемым, когда часть или все характеристики отдельных звеньев заданы экспериментально. Применим при анализе систем, описанных трансцендентными и иррациональными функциями, систем с запаздыванием.

## 24 ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотренные критерии дают возможность сделать заключение об устойчивости системы. С помощью этих критериев можно проследить влияние некоторых параметров на устойчивость системы – в частности определить предельные значения коэффициента усиления или времени запаздывания. Для исследования влияния различных параметров на ее устойчивость разработаны специальные методы. Существует 2 основных метода: метод корневого годографа и метод  $D$ -разбиений. Рассмотрим наиболее распространенный из этих методов – метод  $D$ -разбиения.

### *Метод $D$ -разбиения*

Пусть дано характеристическое уравнение

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Это уравнение имеет набор корней  $p_k = \alpha_k \pm j\omega_k$ . При заданном значении коэффициентов уравнения в общем случае оно имеет  $m$  корней в правой полуплоскости и  $(n-m)$  корней в левой полуплоскости. При изменении коэффициентов уравнения корни его перемещаются в комплексной плоскости. При некотором значении коэффициентов один из корней может попасть в начало координат или пара корней попадет на мнимую ось, т.е.  $\alpha_k=0$  корни, в общем виде, будут иметь вид:  $p_k = j\omega_k$ .

Рассмотрим более подробно случай, когда  $n=3$ , т.е. характеристическое уравнение имеет вид:

$$A(p) = p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Каждой совокупности  $a_i$  в трехмерном пространстве коэффициентов соответствует единственная точка. Каждой совокупности коэффициентов характеристического уравнения (рис. 119, а) соответствует определенное расположение корней уравнения в комплексной плоскости корней (рис. 119, б). Например, точке  $M$  в пространстве коэффициентов соответствуют точки  $m_1, m_2, m_3$  в комплексной плоскости корней; точке  $N$  – корни  $n_1, n_2, n_3$ .

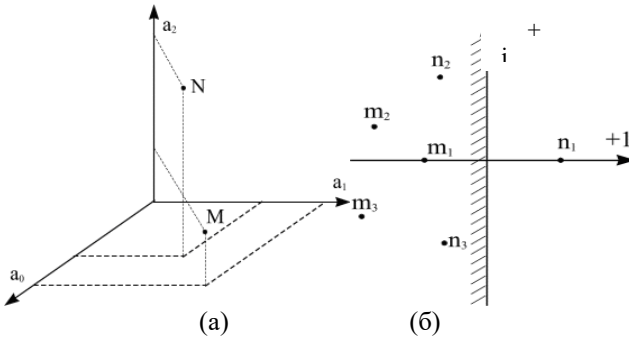


Рис. 119. Иллюстрация к понятию  $D$ -разбиения:  
 а) точки пространства коэффициентов, б) точки комплексной плоскости корней

$D$ -разбиением называется разбиение пространства коэффициентов характеристического уравнения на области с различным значением числа корней в правой полуплоскости.

Для уравнения третьей степени можно наметить в пространстве коэффициентов 4 области:  $D(3)$ ,  $D(2)$ ,  $D(1)$ ,  $D(0)$ . Последняя область является областью устойчивости.

Переход через границу  $D$ -разбиения соответствует переходу корней уравнения через мнимую ось, поэтому уравнение границы  $D$ -разбиения получается из характеристического уравнения  $A(p)=0$  заменой  $p$  на  $j\omega$ . По полученному в параметрической форме уравнению можно построить границу области  $D$ -разбиения, задаваясь значением  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Аналогичным способом можно построить области  $D$ -разбиения в пространстве не коэффициентов уравнения, а параметров системы, от которых зависят коэффициенты, например постоянных времени  $T_i$  или коэффициентов усиления  $K_i$  отдельных звеньев.

#### *$D$ -разбиение по двум параметрам*

Во многих случаях необходимо выяснить влияние на устойчивость двух параметров системы. В этом случае характеристическому уравнению придают вид:

$$A(p) = \tau G(p) + \gamma Q(p) + R(p) = 0,$$

где  $G(p)$ ,  $Q(p)$ ,  $R(p)$  – полиномы от  $p$ ;

$\tau$  и  $\gamma$  – параметры системы, по которым проводится исследование устойчивости.

Граница  $D$ -разбиения в плоскости параметров  $\tau$  и  $\gamma$  определится уравнением:  $\tau G(j\omega) + \gamma Q(j\omega) + R(j\omega) = 0$ .

Обозначим:

$$G(j\omega) = G_1(\omega) + jG_2(\omega),$$

$$Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega),$$

$$R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega).$$

Тогда исходное уравнение можно разбить на два уравнения, приравняв действительную и мнимую части к 0.

$$\begin{cases} \tau G_1(\omega) + \gamma Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0, & (1) \\ \tau G_2(\omega) + \gamma Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0. & (2) \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно  $\tau$  и  $\gamma$ , получаем:

$$\tau = \frac{\Delta\tau}{\Delta(\omega)}, \quad \gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta(\omega)},$$

$$\text{где } \Delta(\omega) = \begin{vmatrix} G_1 & Q_1 \\ G_2 & Q_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta\tau = \begin{vmatrix} -R_1 & Q_1 \\ -R_2 & Q_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta\gamma = \begin{vmatrix} G_1 & -R_1 \\ G_2 & -R_2 \end{vmatrix}.$$

При  $\Delta \neq 0$  для каждого значения  $\omega$  можно определить  $\tau$  и  $\gamma$  и, таким образом, в плоскости  $\tau$  и  $\gamma$  построить границу  $D$ -разбиения при  $-\infty < \omega < \infty$ .

В общем случае уравнения (1) и (2) для фиксированной частоты  $\omega$  в плоскости  $\tau$  и  $\gamma$  представляют собой прямые (1) и (2), точка пересечения которых принадлежит к искомой границе  $D$ -разбиения (рис. 120).

Рассмотренное решение имеет особые случаи при некоторых значениях частоты.

1)  $\Delta=0$ ;  $\Delta\tau\neq 0$ ;  $\Delta\gamma\neq 0$ . В этом случае прямые, изображающие уравнения (1) и (2) в плоскости  $\tau$  и  $\gamma$ , параллельны, т.е. пересекаются в бесконечности (рис. 121).

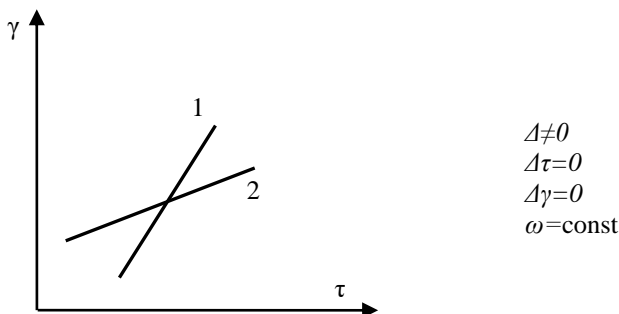


Рис. 120. Иллюстрация к понятию  $D$ -разбиения по двум параметрам

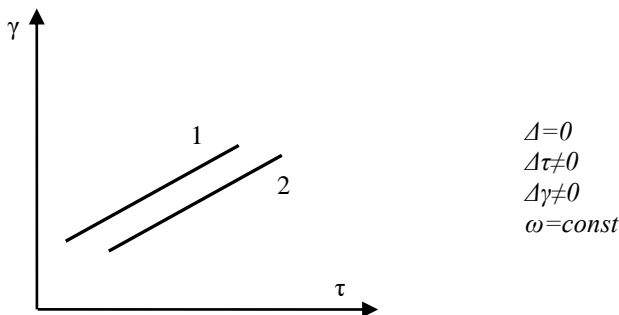


Рис. 121. Иллюстрация к понятию  $D$ -разбиения по двум параметрам

2)  $\Delta=0$ ;  $\Delta\tau=0$  или  $\Delta\gamma=0$ , или  $\Delta\tau=\Delta\gamma=0$ . В этом случае уравнения (1) и (2) становятся эквивалентными, т.е. изображающие их прямые в плоскости  $\tau$ ,  $\gamma$  сливаются в одну. Границе  $D$ -разбиения при таком значении частоты соответствует прямая, а не точка (рис. 122).

Эта прямая называется *особой прямой*, т.е. прямая, получающаяся в плоскости  $D$ -разбиения на частоте, при которой все определители  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  равны 0. В большинстве практических задач особые прямые отвечают значению частот  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ . При  $\omega=0$  всегда  $\Delta=0$ .

Отметим, что  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  – нечетная функция  $\omega$ , следовательно функции  $\tau(\omega)$  и  $\gamma(\omega)$  – четные функции  $\omega$ . Поэтому границы  $D$ -разбиения для положительных и отрицательных значений частот совпадают.

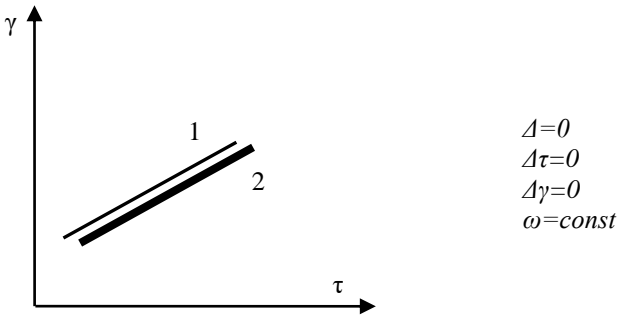


Рис. 122. Иллюстрация к понятию  $D$ -разбиения по двум параметрам

### *Правила штриховки границы $D$ -разбиения*

1. Граница  $D$ -разбиения штрихуется дважды с одной и той же стороны и слева – при обходе по возрастанию  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , если главный определитель  $\Delta > 0$ , а справа, если главный определитель  $\Delta < 0$ .

Границы  $D$ -разбиения для положительных и отрицательных значений  $\omega$  совпадают [ $\tau(\omega)$ ;  $\gamma(\omega)$  – четные функции], поэтому она штрихуется дважды с одной и той же стороны. Текущая точка по границе  $D$ -разбиения пробегает дважды при  $-\infty < \omega < 0$  и  $0 < \omega < \infty$ , при этом знак  $\Delta$  меняется.

2. Штриховка особых прямых, получающихся при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ , одинарная и производится так, чтобы вблизи точки сопряжения прямой и кривой  $D$ -разбиения заштрихованные и незаштрихованные стороны прямой и кривой были направлены друг к другу и далее вдоль прямой направление штриховки не менялось (рис. 123).

3. Штриховка особых прямых, получающихся при  $\omega = \omega_1$  ( $\omega_1 \neq 0$  и  $\omega_1 \neq \infty$ ), производится следующим образом:

а) если при  $\omega = \omega_1$  главный определитель  $\Delta$ , проходя через ноль, меняет знак, то штриховка особой прямой двойная и производится по рассмотренному выше правилу штриховки особых прямых (рис. 124, а).

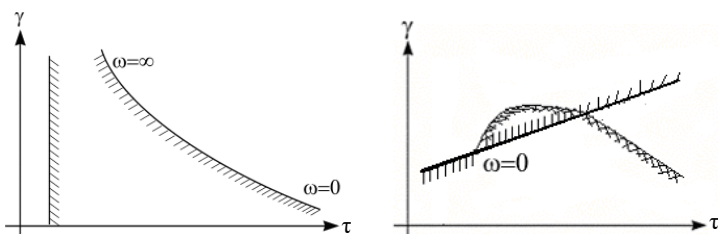


Рис. 123. Иллюстрация к правилам штриховки границы  $D$ -разбиения

б) если при  $\omega = \omega_1$ ,  $\Delta$ , проходя через ноль, не меняет знак, то особая прямая не штрикуется вообще и выбрасывается из рассмотрения (рис. 124, б).

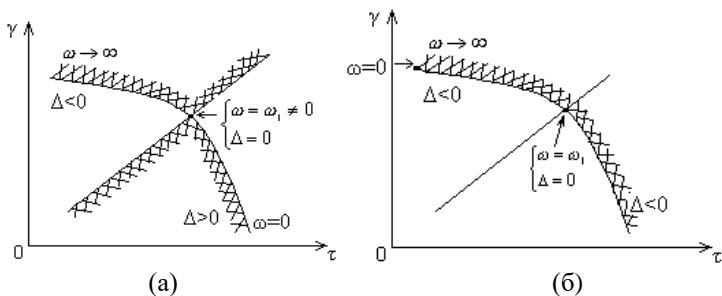


Рис. 124. Иллюстрация к штриховке особых прямых:

а) штрикуется двойной штриховкой, б) не штрикуется и не рассматривается

При построении границы  $D$ -разбиения по двум параметрам следует правильно ориентировать оси. Для приведенной выше системы уравнений  $\tau$  нужно откладывать по оси абсцисс, а  $\gamma$  – по оси ординат, т.е. необходимо всегда первый параметр в уравнениях (1) и (2) откладывать по оси абсцисс, а второй – по оси ординат. В противном случае изменяется ориентация штриховки относительно правой и левой сторон. Если  $\Delta \equiv 0$ , то границей  $D$ -разбиения являются только особые прямые. Оси координат, как правило, всегда являются особыми прямыми.

После построения границы  $D$ -разбиения и нанесения на них штриховки производится разметка областей. Для этого находят число корней  $m$  в правой полуплоскости для некоторых значений  $\tau$  и  $\gamma$ ,

для которых это сделать легко. Затем по границе  $D$ -разбиений производят разметку других областей по следующему правилу. Если при изменении значений  $\tau$  и  $\gamma$  текущая точка переходит с гладкой стороны на заштрихованную и пересекает двойную штриховку, то число корней в правой полуплоскости уменьшается на 2, если одинарную штриховку, то число корней в правой полуплоскости уменьшается на 1. И наоборот, если текущая точка пересекает границу  $D$ -разбиения с заштрихованной стороны на гладкую, то число корней характеристического уравнения, находящихся в правой полуплоскости, увеличивается на 2 при пересечении двойной штриховки; и на 1 – при пересечении одинарной штриховки. Таким образом, находят области устойчивости  $D(0)$ , если они есть, т.е. значения  $\tau$  и  $\gamma$ , при которых  $m=0$ .

Например, если известно, что в некоторой области  $\tau$  и  $\gamma$  характеристическому уравнению соответствует  $m$  корней в правой полуплоскости  $D(m)$ , то в других областях число корней характеристического уравнения иллюстрируется рис. 125.

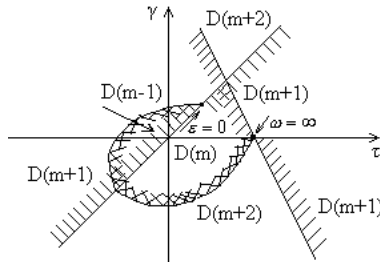


Рис. 125. Иллюстрация к правилу разметки областей  $D$ -разбиения

Если в плоскости корней штриховать мнимую ось слева, то в плоскости  $\tau$  и  $\gamma$  граница  $D$ -разбиения должна штриховаться также слева по обходу при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Если какому-либо параметру  $\tau$  и  $\gamma$  соответствует уравнение, имеющее  $m$  корней в правой полуплоскости, то такое же число корней в правой полуплоскости имеет уравнение, соответствующее любым другим значениям  $\tau$  и  $\gamma$ , к которым можно перейти, не пересекая границы  $D$ -разбиения. Таким образом, для того, чтобы знать распределение корней относительно мнимой оси при любых значениях  $\tau$  и  $\gamma$ , достаточно знать распределение корней при одном значении  $\tau$  и  $\gamma$ .



*Пример.* Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости, если она есть (рис. 126).

$$W(p) = \frac{1000}{p^4 + 2p^3 + 10p^2 + ap + 2b},$$

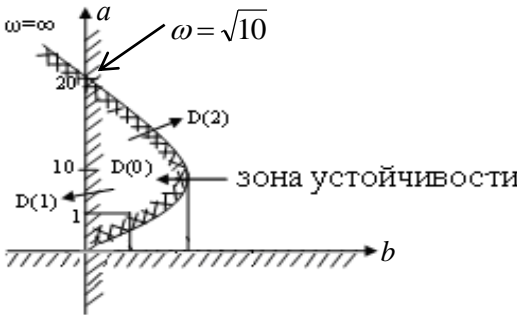
$$A(p) = p^4 + 2p^3 + 10p^2 + ap + 2b,$$

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= (j\omega)^4 + 2(j\omega)^2 + 10(j\omega)^2 + aj\omega + 2b = \\ &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 10\omega^2 + aj\omega + 2b. \end{aligned}$$

Разделим на действительную и мнимую части.

$$\begin{aligned} \text{Re: } & \begin{cases} 26 + 0 \cdot a + \omega^4 - 10\omega^2 = 0 \\ 0 \cdot b + a\omega - 2\omega^3 = 0 \end{cases} & \begin{cases} b = \frac{10\omega^2 - \omega^4}{2} \\ a = 2\omega^2 \end{cases} & \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} = 2\omega \end{aligned}$$

При  $\omega=0$  имеем особые прямые, уравнения которых имеют вид  $a=0$ ;  $b=0$ . Эти уравнения получаются путем подстановки частоты, обращающей в ноль главный определитель, в исходные уравнения для действительной и мнимой частей.



$\omega$	$a$	$b$
0	0	0
1	2	4,5
$\sqrt{10}$	20	0
10	200	-4500
$-\infty$	$\infty$	$-\infty$

Рис. 126. Иллюстрация к построению  $D$ -разбиения

Исследуем устойчивость системы при  $a=1, b=1$ .

$$A(p) = p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p + 2.$$

Воспользуемся критерием Рауса, составим табл. 3.

Таблица 3. Таблица по критерию Рауса

	1	10	2
	2	1	0
1/2	19/2	2	0
4/19	11/19	0	0
361/22	2	0	0

При выбранных значениях  $a$  и  $b$  система устойчива, так как все коэффициенты первого столбца таблицы Рауса положительны. Система будет также устойчива при всех других значениях  $a$  и  $b$ , к которым можно перейти, не пересекая границы  $D$ -разбиения.

### *Структурная устойчивость*

Устойчивость системы зависит не только от величины тех или иных параметров, но и от ее структуры.

Система называется *структурно-неустойчивой*, если её нельзя сделать устойчивой, меняя в любых пределах значения всех параметров. Устойчивость такой системы можно обеспечить только путем изменения её структуры.

Система называется *структурно-устойчивой*, если её устойчивость можно обеспечить выбором параметров.

В некоторых случаях по виду структурной схемы можно определить имеет ли она в своих параметрах область устойчивости. Можно показать, что наличие двух неустойчивых инерционных звеньев  $W(p) = \frac{1}{Tp-1}$  или двух интегрирующих звеньев  $W(p) = \frac{1}{p}$ , или

одного интегрирующего и одного неустойчивого инерционного звена в одном контуре достаточно, чтобы система была структурно-неустойчивой. В теории автоматического управления разработаны условия структурной устойчивости систем, которые, однако, достаточно сложны для запоминания и могут быть найдены в справочниках по теории автоматического управления.

## **25 КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ (КАЧЕСТВО САУ)**

Устойчивость САУ является важным, но не единственным условием применимости САУ для решения конкретных технических задач. Очевидно, что устойчивая система при обработке различных воздей-

ствий может быть недостаточно точной или недостаточно быстродействующей, недостаточно плавной и т.д.

*Комплекс критериев, характеризующих САУ при обработке различных воздействий, объединяется понятием качества управления (или качества САУ).*

Качество САУ оценивают по характеру переходного процесса, возникающего на выходе системы при обработке возбуждающего воздействия. Всякий процесс на выходе системы состоит из вынужденной и свободной составляющих. При этом *свободная* составляющая характеризуется переходной функцией системы (т.е. её реакцией на единичный скачок), что соответствует режиму включения системы.

*Вынужденная* составляющая – это изменение выходного сигнала во времени в установившемся режиме. *Установившийся режим* – это состояние системы после окончания переходного процесса. Установившийся режим определяется характером изменения во времени задающего воздействия и определяет выполнение цели регулирования.

Если задающее воздействие постоянно  $x(t) = x_0 1(t)$ , то для системы с единичной обратной связью выходной процесс может быть представлен в одном из трех видов (рис. 127).

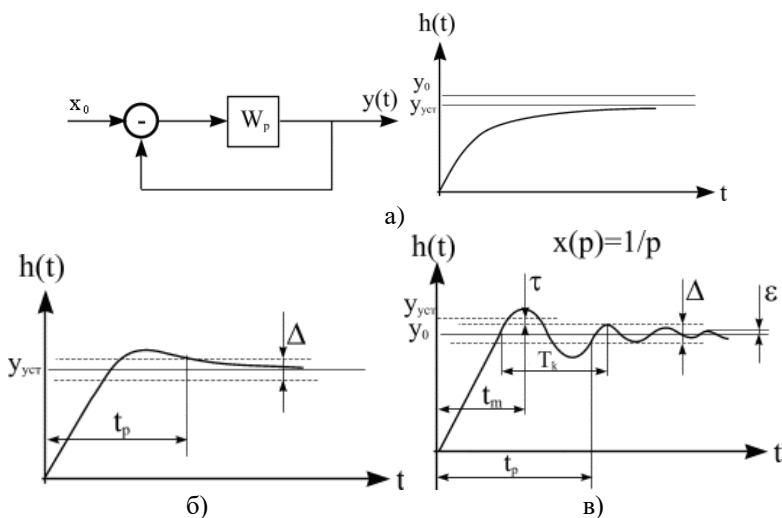


Рис. 127. Виды переходных процессов:

- а) монотонный процесс, б) колебательный процесс без перерегулирования, в) колебательный процесс с перерегулированием

Во всех случаях вынужденная составляющая выходного сигнала  $y(t) = y_{уст}$ . Если на вход системы подключается, например, линейно-изменяющийся сигнал  $x(t) = K_1 t + a_0$ , то выходной сигнал может иметь вид, показанный на рис. 128. Здесь вынужденная составляющая выходного сигнала линейно-изменяющаяся.

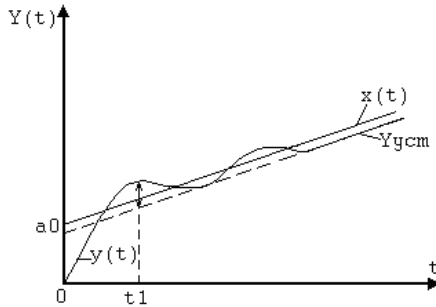


Рис. 128. Выходной сигнал при линейно-изменяющемся входном сигнале

В общем случае при любом входном сигнале качество процесса управления характеризуется следующими *показателями качества*:

1. Погрешность системы (установившееся рассогласование).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - y(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\varepsilon(t)], \text{ где } \varepsilon(t) = x(t) - y(t) \text{ — текущее}$$

рассогласование системы. Таким образом, погрешность системы равна рассогласованию в установившемся режиме. Вспомним теоремы о предельных значениях для изображений Лапласа.

Если  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p); \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Тогда для погрешности замкнутой системы регулирования можно записать:  $\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p[x(p) - y(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} px(p)[1 - W(p)]$ , где

$y(p) = x(p) \cdot W(p)$ . Для единичного скачка  $x(p) = \frac{1}{p}$ , тогда

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - W(p)] = 1 - W(0).$$

Если  $\varepsilon = 0$  — система астатическая, а если  $\varepsilon \neq 0$  — система статическая.

2. Время регулирования  $t_p$  (время затухания переходного процесса) – это время, в течение которого разность между текущим и установившимся значениями рассогласования становится меньше наперед заданной величины (рис. 127):

$$|\varepsilon(t) - \varepsilon| \leq \Delta \cdot |h(t) - y_{уст}| \leq \Delta.$$

Обычно переходной процесс считают законченным, если  $\Delta = \pm 5\%$  от установившегося значения.

3. Максимальное перерегулирование  $\varepsilon_m$  равно максимальному выбросу выходного сигнала над величиной установившегося режима. Обычно перерегулирование выражают в относительных единицах

$\sigma = \frac{\varepsilon_m}{y_0}$ , где  $y_0$  – базовое значение, определяемое установившимся режимом работы системы. Для переходной характеристики

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)}.$$

Допустимое значение перерегулирования для САУ, полученное на основании опыта эксплуатации, составляет 10-30%, в ряде случаев допускается перерегулирование 70%. В некоторых случаях, например во взрывоопасных средах, требуется, чтобы переходный процесс протекал без перерегулирования, т.е. был монотонным.

4. Время максимального перерегулирования  $t_m$  – это время, при котором имеет место максимальное перерегулирование.

5. Частота колебаний в переходном процессе  $\omega_k$ , или период колебаний  $T_k$ :  $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$ .

6. Число колебаний (перерегулирований) за время регулирования  $0 < t < t_p$ :  $N_k = \frac{t_p}{T_k}$ .

Показатели качества 3, 4, 5, 6 характеризуют плавность протекания переходных процессов. Таким образом, все показатели качества САУ полностью характеризуются переходной функцией системы. Поэтому для анализа качества управления системы необходимо найти её переходную функцию.

## 26 МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Оценка качества процесса управления сводится к определению перечисленных показателей качества управления. Различают прямые и косвенные методы анализа качества управления.

*Прямые методы* – это методы, позволяющие непосредственно осуществить построение переходного процесса и по нему определить показатели качества управления.

*Косвенные методы* – это методы, позволяющие определить показатели качества управления без непосредственного построения переходного процесса.

### *Прямые методы анализа качества САУ*

1. *Классический метод* – решение дифференциальных уравнений, описывающих САУ. Процесс на выходе линейной системы описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k}.$$

Здесь входной сигнал  $x(t)$  – известен.

Для решения дифференциального уравнения нужно знать начальные условия, которые, как правило, задаются в виде конкретных значений для искомой функции и ее производных при  $t=0$ :  $y=\mu$ ;

$$\frac{dy}{dt} = \mu_1; \quad \frac{dy^2}{dt^2} = \mu_2 \dots; \quad \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} = \mu_{n-1}; \quad x = \Theta \dots; \quad \frac{dx^{m-1}}{dt^{m-1}} = \Theta_{m-1}.$$

Решение этого дифференциального уравнения даст искомый выходной сигнал в виде:

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t} + y_{\text{вых}}(t),$$

где  $p_k$  – корни характеристического уравнения  $\sum_{k=1}^n a_k p^k = 0$ ,  $C_k$  – постоянные определяемые начальными условиями,  $y_{\text{вых}}(t)$  – вынужденная составляющая выходного сигнала, определяемая видом входного сигнала.

Таким образом, при решении дифференциального уравнения определяется как вынужденная, так и свободная составляющая выходного сигнала. Методы решения таких уравнений рассмотрены в курсе высшей математики. Здесь могут применяться:

- аналитические методы при  $n \leq 3$  (они требуют значения корней характеристического уравнения);
- решение на ПК численными методами для  $n$  – любого, в том числе  $>100$ .

Отметим, что возможность применения ПК для решения таких уравнений обеспечивает большую эффективность классического метода анализа качества САУ, т.к. современное программное обеспечение включает в себя стандартные математические программы, позволяющие легко решать указанные уравнения практически для любых значений  $n$ .

2. *Операторный метод.* Данный метод основан на обратном преобразовании Лапласа исходного дифференциального уравнения, либо на использовании передаточной функции. Метод удобен при нулевых начальных условиях. Изображение Лапласа дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$x(p) \sum_{k=0}^m b_k p^k = y(p) \sum_{k=0}^n a_k p^k .$$

Отсюда

$$y(p) = \frac{B(p)}{A(p)} x(p) = \frac{A_1(p)}{B_1(p)} ,$$

$$\text{где } B_1(p) = \sum_{k=0}^m b_k p^k ; A_1(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k .$$

В общем случае, когда уравнение  $A_1(p) = 0$  имеет кратные корни, т.е.  $A_1(p)$  можно представить в виде  $A_1(p) = a_0 (p - p_1)^{m_1} (p - p_2)^{m_2} \dots (p - p_n)^{m_n}$ , то при нулевых начальных условиях

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[ \frac{(p - p_k)^{m_k} B_1(p) e^{pt}}{A_1(p)} \right]_{p=p_k}^{(m_k-1)} .$$

Здесь от скобки берется производная порядка  $(m_k - 1)$  по параметру  $p$ . Если уравнение  $A_1(p) = 0$  не имеет кратных корней, т.е.  $m_k = 1$ , то выражение приводится к виду:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(p - p_k) B_1(p) e^{pt}}{A_1(p)} \right]_{p=p_k} = \sum_{k=1}^n \frac{B_1(p_k)}{A'_1(p_k)} e^{p_k t}.$$

Последнее равенство доказывается в высшей математике. Приведенные выражения позволяют определить выходной сигнал по передаточной функции системы и входному сигналу. При этом определяется и вынужденная и свободная составляющие выходного сигнала. Еще раз отметим, что приведенные выражения справедливы только для нулевых начальных условий. При ненулевых условиях все значительно сложнее.

3. *Частотный метод*. Основан на обратном преобразовании Фурье. Если известен комплексный коэффициент передачи системы  $W(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$ , то выходной сигнал при подаче на вход

единичного скачка  $x(p) = \frac{1}{p}$  (переходная функция) определяется по

формуле:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega,$$

где  $\text{Re}(\omega)$  – действительная часть ККП. В тех случаях, когда аналитическое вычисление интегралов затруднено, а также когда вещественная частотная характеристика задана графиком или таблицей, то прибегают к графическому вычислению переходных функций (метод трапеций), разработанному Солодовниковым В.В.

## 27 КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КАЧЕСТВА САУ

Эти методы позволяют определить показатели качества без построения переходного процесса.

1. *Оценка вида переходного процесса по вещественной частотной характеристике (ВЧХ)*

Пусть ВЧХ замкнутой системы имеет вид, показанный на рис. 129. Интервал частот, при котором  $\text{Re}(\omega) \geq 0$ , называется интервалом положительности  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ . Интервал частот, при котором  $|R(\omega)|$



меньше наперед заданной положительной величины, называется интервалом несущественных частот. Влиянием этой части ВЧХ можно пренебречь. Кроме того, если при  $\omega > \omega_n |R(\omega)| < 0,2R(0)$ , то при оценке качества переходного процесса можно принимать во внимание только интервал положительности.

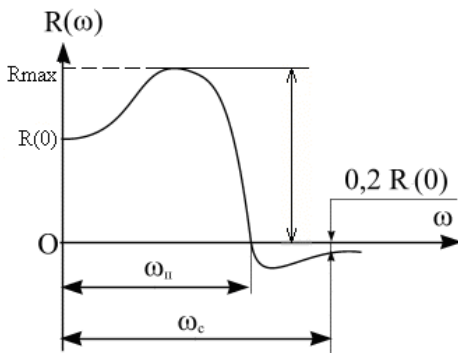


Рис. 129. Пример ВЧХ

### *Правила оценки переходного процесса по ВЧХ*

1. Установившееся значение выходного сигнала при подаче на вход единичного скачка равно начальному значению ВЧХ  $-R(0)$ .  $h(\infty) = R(0)$ .
2. Если ВЧХ является непрерывной положительной и убывающей функцией, то величина перерегулирования не превышает 18% (кривая 2, рис. 130).

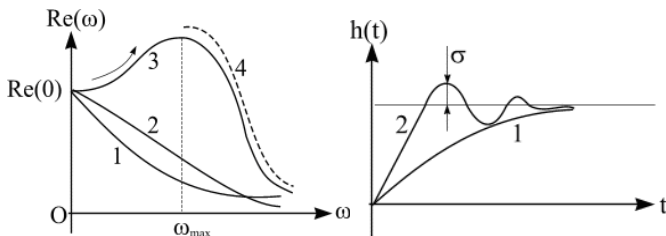


Рис. 130. Соответствие между ВЧХ и переходной функцией

3. Если производная  $\frac{dR(\omega)}{d\omega}$  представляет из себя отрицательную, убывающую по модулю непрерывную функцию  $\omega$ ,  $R(\infty)=0$ , то переходный процесс будет монотонным (кривая 1, рис. 130).

4. Если  $R(\omega) > R(0)$ , то переходный процесс не монотонный.

5. В общем случае время регулирования при  $\Delta=5\%$   $t_p > \frac{\pi}{\omega_n}$ .

Для монотонных процессов время регулирования  $t_p > \frac{4\pi}{\omega_n}$ .

6. Склонность системы к колебаниям тем больше, чем выше пик у ВЧХ. В частности этот пик уходит в бесконечность (кривая 1, рис. 131), если система находится на границе колебательной устойчивости, что соответствует наличию пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении. При наличии одного нулевого корня в бесконечность уходит начальное значение ординаты ВЧХ (кривая 2, рис. 131).

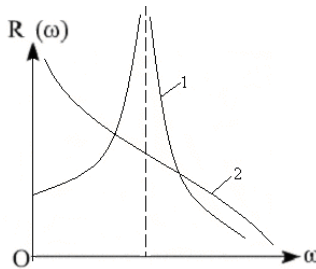


Рис. 131. Виды ВЧХ

Склонность системы к колебаниям характеризуют численно показателем колебательности, который определяется  $M = \frac{|W_3(\omega_m)|}{W_3(0)}$ .

Чем больше показатель  $M$ , тем более склонна система к колебаниям. На основании этих правил можно грубо оценить качество регулирования системы.

*2.Оценка качества замкнутых САУ по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутых САУ*

Метод позволяет оценить качество замкнутых САУ по ЛАЧХ разомкнутых САУ. Исследование качества минимально-фазовых систем, которые в разомкнутом состоянии могут быть представлены последовательным соединением типовых звеньев, целесообразно проводить по логарифмическим частотным характеристикам. Напомним, что ФЧХ минимально-фазовых систем однозначно связана с ЛАЧХ, а асимптотическая ЛАЧХ состоит из отрезков, наклон которых кратен 20 дБ/дек.

Метод подходит для систем, передаточную функцию которых в разомкнутом состоянии можно записать в виде:

$$W_p(p) = \frac{k(T_0 p + 1)^l}{p(T_1 p + 1)^r (T_2 p + 1)^l}, \text{ где } l=1; 2; r=1; 2.$$

Этой передаточной функции соответствует типичная ЛАЧХ (рис. 132).

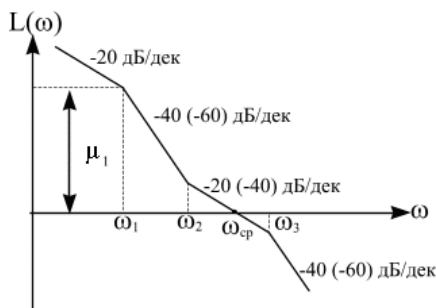


Рис. 132. Типичная ЛАЧХ разомкнутой системы

Здесь в скобках показаны наклоны участков ЛАЧХ, соответствующие  $l=2$ ;  $r=2$ . Создан набор номограмм, которые связывают конкретные значения параметров типичной ЛАЧХ  $\mu_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_{cp}$  с параметрами соответствующей ей переходной функции. Эти номограммы приводятся, как правило, в справочниках и учебниках по АРУ. Номограммы позволяют упростить исследование качества систем управления, т.к. они дают возможность определить многие показатели качества регулирования без построения переходного процесса. Номограммы построены в предположении, что система имеет одно интегрирующее звено, поэтому наклон ЛАЧХ в низкочастотной области составляет  $-20$  дБ/дек. Однако эти номограммы можно при-

менить и к статическим системам, т.к. параметры переходного процесса определяются видом АЧХ разомкнутой системы в области частоты среза. При применении этих номограмм для анализа статических систем параметры переходного процесса будут несколько завышены. Номограммы построены в относительных величинах, поэтому могут применяться для любого диапазона частот. В качестве этих относительных величин выбраны:

$$\frac{\omega_m}{\omega_{cp}}, \text{ где } \omega_m - \text{резонансная частота АЧХ замкнутой системы};$$

$\omega_{cp}$  – частота среза ЛАЧХ разомкнутой системы;

$$\frac{\omega_k}{\omega_{cp}}, \text{ где } \omega_k - \text{частота колебаний в переходном процессе};$$

$$t_m \cdot \omega_{cp}, \text{ где } t_m - \text{время максимального перерегулирования};$$

$t_p \cdot \omega_{cp}$ , где  $t_p$  – время регулирования (затухания переходного процесса).

Всего имеется 17 номограмм, которые различаются значениями отношения  $\omega_3/\omega_{cp}$  и величинами наклона характеристик на двух участках:  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  и  $\omega > \omega_3$ . Определение параметров переходного процесса производится в следующем порядке:

1. Определяется номограмма по наклонам участков ЛАЧХ при  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  и  $\omega > \omega_3$ , а также по значению  $\omega_3/\omega_{cp}$ .

2. Определяется величина  $\mu_1$ ,  $\omega_1/\omega_{cp}$ ,  $\omega_3/\omega_{cp}$  для выбора типа номограммы и графика из данного семейства.

3. Определяются параметры переходного процесса в функции  $\omega_1/\omega_{cp}$ .

Отметим, что существуют точно такие же номограммы для определения параметров АЧХ замкнутой системы по типовой ЛАЧХ разомкнутой системы. Они, как правило, рисуются совместно с номограммами для определения качества переходного процесса.

Отметим, что если в системе нет звеньев, подходящих под типовое выражение для  $l=2$ ;  $r=2$ , а есть звенья с достаточно близкими постоянными времени, то эти постоянные времени усредняются по формуле  $T = \sqrt{T_1 T_2}$  и точную функцию системы подводят к типичному виду. Например, если в передаточной функции имеется произведение  $(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \approx (T p + 1)^2$ .

### 3. Интегральные оценки качества

Основаны на вычислении площади, заключенной между осью абсцисс и кривой текущего рассогласования системы. Для систем с единичной обратной связью  $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ . График текущего рассогласования системы в общем случае имеет вид, показанный на рис. 133.

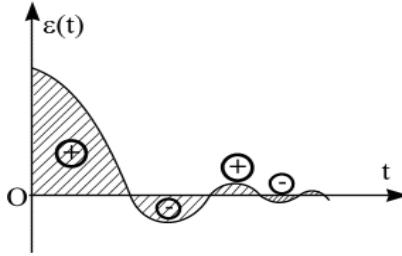


Рис. 133. Текущее рассогласование системы для колебательных процессов

Очевидно, что чем меньше площадь, ограниченная осью времени и кривой текущего рассогласования системы, тем выше качество переходного процесса. Различают два вида интегральных оценок — линейную и квадратичную.

а) *Линейная интегральная оценка.*

$$S = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt = \int_0^{\infty} [x(t) - y(t)] dt.$$

Вычисление этого интеграла не требует знания выходного сигнала  $y(t)$ . Его можно вычислить, используя изображение Лапласа.

Действительно, учитывая, что  $\varepsilon(p) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-pt} dt$ , можно записать:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-pt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} [X(p) - Y(p)] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} X(p) [1 - W(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - W(p)}{p} \right], \end{aligned}$$

где  $x(p) = \frac{1}{p}$ .

Очевидно, что линейная интегральная оценка пригодна только для оценки монотонных переходных процессов (рис. 134), т.к. для колебательных процессов площади, расположенные выше и ниже оси времени, вычитаются.

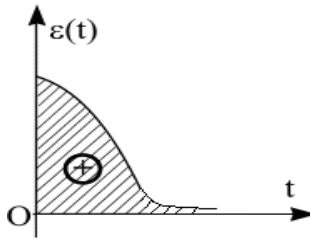


Рис. 134. Текущее рассогласование системы для монотонных процессов

От этого недостатка свободна квадратичная интегральная оценка.

*б) Квадратичная интегральная оценка.*

Имеет вид:

$$S_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt .$$

Этот интеграл проще всего вычисляется с помощью теоремы Релея:

$$S_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\varepsilon(j\omega)|^2 d\omega ,$$

где  $\varepsilon(j\omega)$  – амплитудный спектр рассогласования системы. В большинстве случаев изображение

$$\varepsilon(j\omega) = \frac{1 - W(j\omega)}{j\omega} = \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^m d_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n c_k (j\omega)^k}$$

– это дробно-рациональная функция. По теореме Релея интегралы от дробно-рациональных функций сводятся к виду:

$$S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{D(j\omega)D(-j\omega)}{C(j\omega)C(-j\omega)} d\omega.$$

Эти интегралы вычислены впервые в функции коэффициентов  $d_k, c_k$  для  $n \leq 10$  и  $m = n - 1$ . В справочниках по математике и книгах по АРУ существуют таблицы этих интегралов.

Интегральные оценки качества можно использовать не только для анализа, но и для синтеза систем управления.

*Пример.*

Определить СКО  $S_0$  для переходной функции системы с передаточной функцией  $W(p) = \frac{1}{p^3 + Ap^2 + Bp + 1}$  и вычислить значения  $A$  и  $B$ , минимизирующие среднеквадратичную ошибку.

Имеем  $\varepsilon(p) = \frac{1 - W(p)}{p} = \frac{p^2 + Ap + B}{p^3 + Ap^2 + Bp + 1}$ . По таблице, приводящейся в справочниках, находим для  $n = 3$ :

$$S_0 = \frac{b_2^2 C_0 C_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) C_0 C_3 + b_0^2 C_2 C_3}{2C_0 C_3 (C_1 C_2 - C_0 C_3)}.$$

Здесь  $b_0 = C_1 = B$ ;  $b_1 = C_2 = A$ ;  $b_2 = C_3 = C_0 = 1$ , откуда  $S_0 = \frac{B}{2} + \frac{A^2}{2(AB - 1)}$ . Для нахождения оптимальных  $A$  и  $B$  находим частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_0}{\partial A} = \frac{2A(AB - 1) - A^2 B}{2(AB - 1)^2} = 0, \\ \frac{\partial S_0}{\partial B} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{A^3}{(AB - 1)^2} \right] = 0; \quad A_{opt} = 1, B_{opt} = 2; S_{0\ min} = 1,5. \end{cases}$$

Решение системы дает оптимальные значения коэффициентов  $A$  и  $B$ , минимизирующие интегральную оценку качества. Таким обра-

зом, этот метод пригоден не только для анализа, но и для синтеза систем управления.

Недостатки интегральных оценок состоят в том, что они не характеризуют плавность протекания процессов и не позволяют вычислить конкретные значения  $t_p, \tau, \varepsilon, N_k$ . Достоинством является то, что эта оценка может использоваться для оптимизации САУ.

## 28 ОШИБКИ ВЫНУЖДЕННЫХ РЕЖИМОВ. ДИНАМИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

Вынужденный режим – это выходной сигнал систем, когда свободная составляющая затухнет. Вынужденный режим обеспечивает выполнение цели управления. Как правило, вынужденный режим отличается от требуемого режима, соответствующего цели управления. Поэтому важно рассмотреть погрешности вынужденных режимов. Вынужденный режим определяется характером задающего воздействия и не зависит от начальных условий.

В принципе ошибку установившегося режима можно определять как разность между требуемым режимом, соответствующим заданной цели управления, и вынужденной составляющей выходного сигнала, определяемого из решения уравнений, описывающих САУ,  $\varepsilon_s(t) = y_s(t) - y_{zm}(t)$ . Однако более удобно анализировать вынужденный режим по методу коэффициентов ошибок.

### *Метод коэффициентов ошибки*

Определим передаточную функцию системы по ошибке. Рассмотрим систему в каноническом виде (рис. 135).

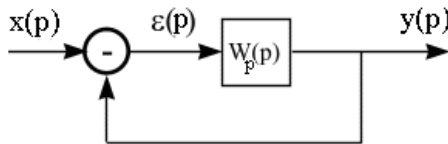


Рис. 135. Система в каноническом виде

Найдем рассогласование системы:

$$\varepsilon(p) = x(p) - y(p) = x(p) \left[ 1 - \frac{y(p)}{x(p)} \right] = x(p) [1 - W(p)],$$



$$\text{где } W(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

– передаточная функция замкнутой системы;

$$W_\varepsilon(p) = 1 - W(p) = 1 - \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} = \frac{1}{1+W_p(p)}$$

– передаточная функция системы по ошибке.

Если

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \text{ то } W_\varepsilon(p) = \frac{A(p) - B(p)}{A(p)} = \frac{G(p)}{A(p)}.$$

Следовательно, в общем виде передаточная функция по ошибке может быть представлена дробно-рациональной функцией

$$W_\varepsilon(p) = \frac{g_0 + g_1 p + \dots + g_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots + C_n p^n.$$

Полином  $\sum_{k=1}^n C_k p^k$  получается в результате алгебраического деления двух полиномов. Умножая правую и левую части равенства на знаменатель дроби и приравнивая коэффициенты при равных степенях  $p$ , получаем систему уравнений для коэффициентов  $C_k$ .

Отсюда по цепочке находим коэффициенты:

$$\begin{cases} g_0 = a_0 C_0 \\ g_1 = a_0 C_1 + a_1 C_0 \\ g_2 = a_0 C_2 + a_1 C_1 + a_2 C_0 \\ \dots \\ g_m = a_0 C_m + a_1 C_{m-1} + a_2 C_{m-2} + \dots + a_m C_0 \\ \dots \\ 0 = a_0 C_n + a_1 C_{n-1} + \dots + a_n C_0 \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{g_0}{a_0}, C_1 = \frac{1}{a_0}(g_1 - C_0 a_1), C_2 = \frac{1}{a_0}(g_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1)$$

$$C_k = \frac{1}{a_0} \left[ g_k - \sum_{r=1}^k C_{k-r} a_r \right],$$

причем при  $k > m$   $g_k = 0$ ; при  $r > n$   $a_r = 0$ .

Другая формула для определения коэффициентов  $C_k$  имеет вид:

$$C_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k W_\varepsilon(p)}{dp^k} \right|_{p=0}.$$

Так как  $\varepsilon(p) = x(p)W_\varepsilon(p) = x(p) \sum_{k=1}^n C_k p^k$ , то по коэффициен-

там  $C_k$  и известному внешнему воздействию  $x(t)$  можно определить величину ошибки.

$$\varepsilon_\varepsilon(t) = C_0 x + C_1 \frac{dx}{dt} + C_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + C_n \frac{d^n x}{dt^n}.$$

Первое слагаемое  $C_0 x$  – называется статической ошибкой, или *статизмом* системы. Второе слагаемое определяет ошибку по скорости, третье слагаемое – ошибку по ускорению. Все составляющие ошибки, кроме статизма, объединяются понятием *динамические ошибки*. Ошибки вынужденных режимов при отработке переменных во времени воздействий называют *динамическими ошибками*.

*Пример.*

Определить погрешность вынужденного режима системы (рис. 136), передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{100}{p(1+0,1p)(1+0,01p)} = \frac{100}{0,001p^3 + 0,11p^2 + p}.$$

Входной сигнал системы:

$$x(t) = 20 - 2t - 0,5t^2 \text{ [рад]}.$$

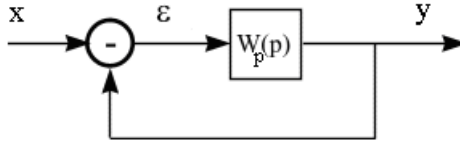


Рис. 136. Иллюстрация к примеру определения погрешности вынужденного режима системы

Находим передаточную функцию по ошибке:

$$\begin{aligned}
 W_{\varepsilon}(p) &= 1 - W(p) = 1 - \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{1}{1 + W_p(p)} = \\
 &= \frac{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) + 100} = \frac{0,001p^3 + 0,11p^2 + p}{0,001p^3 + 0,11p^2 + p + 100}.
 \end{aligned}$$

По рекуррентной формуле находим:

$$C_0 = \frac{g_0}{a_0} = 0, \quad C_1 = \frac{1}{a_0}(g_1 - C_0 a_1) = \frac{1}{100} = 0,01c;$$

$$C_2 = \frac{1}{a_0}(g_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1) = \frac{1}{K}(T_1 + T_2 - \frac{1}{K}) = 0,001c^2.$$

Находим производные

$$x'(t) = (2 - t) \frac{pad}{c}; \quad x''(t) = -1 \frac{pad}{c^2}.$$

Погрешность вынужденного режима определится:

$$\varepsilon(t) = C_0 x(t) + C_1 x'(t) + C_2 x_1''(t) = 0,019 - 0,01t(pad).$$

Вынужденный режим системы определится:

$$y(t) = x(t) - \varepsilon(t) = 19,981 + 2,01t - 0,5t^2(pad).$$

Отметим, что число коэффициентов, необходимых для решения задачи, определяется порядком входного сигнала. В нашем случае  $x'''(t) = 0$ .

*Порядок астатизма систем автоматического управления*

Ошибка системы определяется по формуле

$$\varepsilon(t) = C_0 x + C_1 \frac{dx}{dt} + C_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + C_n \frac{d^n x}{dt^n}.$$

Точность установившегося движения системы определяется коэффициентами ошибки. Это положено в основу классификации систем по точности. Основным признаком точности системы является *порядок астатизма*.

*Порядок астатизма системы равен номеру первого не равного нулю коэффициента ошибки.* Для системы с нулевым порядком астатизма  $C_0 \neq 0$ . Для системы с первым порядком астатизма  $C_0 = 0; C_1 \neq 0 \dots$  Для системы с  $\gamma$ -порядком астатизма  $C_0 = 0; C_1 = 0 \dots C_\gamma \neq 0$ .

Рассмотрим систему с единичной обратной связью.

Если  $W_p(p) = \frac{B(p)}{G(p)}$ , то  $W_3(p) = \frac{B(p)}{B(p) + G(p)} = \frac{B(p)}{A(p)}$ , тогда

передаточная функция по ошибке примет вид:

$$W_\varepsilon(p) = 1 - W_3(p) = \frac{G(p)}{B(p) + G(p)} = \frac{G(p)}{A(p)},$$

где  $A(p) = B(p) + G(p)$  – характеристический полином замкнутой системы;  $G(p)$  – характеристический полином разомкнутой системы. Если в разомкнутой системе есть интегрирующие звенья, то в её передаточной функции присутствуют множители вида  $\frac{1}{p}$ , поэтому

для характеристического полинома  $G(p)$  в общем случае можно записать:

$$G(p) = p^\gamma (g_\gamma + g_{\gamma+1} p + \dots + g_{\gamma+m} p^m),$$

где  $\gamma$  – порядок астатизма системы, т.е. порядок астатизма системы определяется числом интегрирующих звеньев в ней.

Действительно, если  $\gamma=0$ , то  $G(p) = g_0 + g_1p + \dots + g_m p^m$ , т.е.

имеем систему с нулевым порядком астатизма. Для неё  $C_0 = \frac{g_0}{a_0} \neq 0$ ,

т.к.  $g_0 \neq 0$ . Система с нулевым порядком астатизма называется *статической*.

Из общего выражения для ошибки видно, что в статической системе вынужденная погрешность при обработке постоянного воздействия  $x(t) = x_0 = \text{const}$  пропорциональна величине этого воздействия  $\varepsilon_s = C_0 x_0$ . Эту величину называют еще статической ошибкой

системы. Если  $W_p(p) = \frac{K(p)}{G(p)} = K$ , то

$$W_3(p) = \frac{K}{1+K}; W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1+K}.$$

$$G(p) = 1 = a_0; A(p) = 1+k = g_0; C_0 = \frac{1}{1+k}; \varepsilon_s = C_0 x_0 = \frac{x_0}{1+k}.$$

Таким образом, в статической системе погрешность вынужденного режима обратно пропорциональна коэффициенту усиления системы. Для повышения точности системы нужно увеличивать её коэффициент усиления.

Вынужденная погрешность системы с астатизмом первого порядка при обработке постоянного воздействия равна нулю, а при обработке линейно-изменяющего воздействия  $x(t) = A_0 + A_1 t$  постоянна и пропорциональна скорости изменения этого воздействия  $\varepsilon_s = C_1 A_1$ . Аналогично вынужденная погрешность системы с астатизмом порядка  $\gamma$  при обработке воздействия, выражаемого в виде полинома  $x(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_\gamma t^\gamma$ , постоянна и пропорциональна значению  $A_\gamma$ ,  $\varepsilon_s = C_\gamma A_\gamma$ .

Таким образом, чем выше порядок астатизма системы, тем точнее система. Однако заметим, что реализация замкнутых систем с высоким порядком астатизма достаточно затруднительна, т.к. САР, содержащая больше двух интегрирующих звеньев в одном контуре,

структурно неустойчива и не может быть реализована без специальных корректирующих устройств.

## 29 КОРРЕКЦИЯ САУ

Как правило, САУ строится из стандартных элементов, имеющих в распоряжении разработчика. Часто бывает так, что построенная по тривиальной схеме система не удовлетворяет заданным критериям качества регулирования или требуемым запасам устойчивости. Поэтому требуемого качества регулирования часто можно достичь путем коррекции САУ.

*Под коррекцией САУ понимается выбор и расчет параметров специальных корректирующих устройств, обеспечивающих заданные статические и динамические характеристики САУ.*

Коррекция относится к области синтеза САУ, т.к. при ее расчете нужно выяснить, какие дополнительные звенья должны быть введены в систему для обеспечения заданных характеристик. В некоторых случаях система без корректирующих звеньев вообще не может работать, т.к. является структурно-неустойчивой.

## 30 ВИДЫ КОРРЕКЦИИ

1. *Последовательная коррекция* – корректирующие устройства включаются последовательно в тракт прямой передачи сигнала (рис. 137).

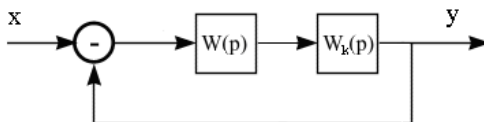


Рис. 137. Схема последовательной коррекции

Для передаточной функции  $W_{Pck}(p)$  скорректированной разомкнутой системы можно записать  $W_{Pck}(p) = W(p)W_k(p)$ , здесь  $W(p)$  –

передаточная функция нескорректированной разомкнутой системы;  
 $W_k(p)$  – передаточная функция корректирующего устройства,

$$W_{ck} = \frac{W_1 W_k}{1 + W_1 W_k}.$$

2. *Параллельная коррекция* – корректирующие устройства включаются в цепь местной обратной связи, охватывающей одно или несколько звеньев (рис. 138),  $W_{ck}(p) = \frac{W_1 W_2}{1 + W_2 W_k + W_1 W_2}$ , здесь  $W_1$ ,  $W_2$  – передаточные функции частей системы, не охваченных и охваченных корректирующей связью соответственно.

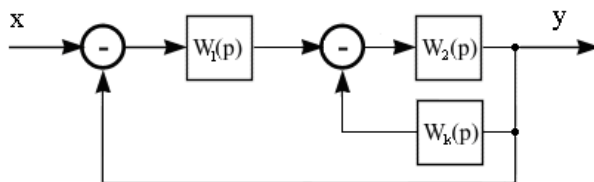


Рис. 138. Схема параллельной коррекции

3. *Коррекция по возмущению* – корректирующее устройство включается в прямую связь, по которой входной сигнал вводится в заданную точку системы (рис. 139).

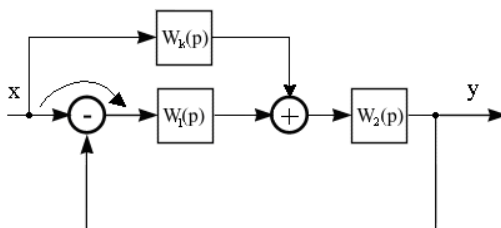


Рис. 139. Схема коррекции по возмущению

Путем преобразования структурной схемы для передаточной функции скорректированной замкнутой системы можно получить:

$$W_{ck}(p) = \frac{(W_1 + W_k)W_2}{1 + W_1W_2}.$$

Первый шаг такого преобразования – перенос узла разветвления через суммирующий узел по стрелке (рис. 139).

Такая коррекция не влияет на свободные колебания и устойчивость замкнутой системы. Она уменьшает динамические ошибки системы. Действительно, для передаточной функции по ошибке можно записать:

$$W_{\varepsilon}(p) = 1 - W_{ck}(p) = \frac{1 - W_k(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

Отсюда следует, что, выбрав передаточную функцию корректирующего устройства из условия  $W_k(p) = \frac{1}{W_2(p)}$ , можно полностью

устранить динамическую ошибку независимо от вида входного воздействия. Однако для большинства САУ применение этого метода затруднено в связи с трудностью реализации передаточной функции  $W_k(p)$ . Приведенные виды коррекции не исключают друг друга – возможны их комбинации.

## 31 МЕТОДЫ СИНТЕЗА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Наиболее распространены следующие:

1. *Аналитические методы.* Для них по известной желаемой передаточной функции аналитически определяется передаточная функция корректирующего звена. Например, если известна передаточная функция скорректированной разомкнутой системы  $W_{Pck}(p)$ , которая обеспечит заданное качество регулирования, то передаточная функция корректирующего звена для последовательной коррекции определится  $W_k = \frac{W_{Pck}(p)}{W(p)}$ . Аналогично можно определить пе-

редаточную функцию корректирующего звена при параллельной коррекции. Если передаточная функция скорректированной системы



неизвестна, то находится аналитическое выражение, связывающее показатели качества системы с параметрами корректирующего устройства и ищутся значения параметров, соответствующих заданному качеству регулирования. К этому методу относится, например, синтез корректирующих устройств по интегральным критериям качества.

2. *Графоаналитические методы.* Эти методы наиболее распространены, они основаны на построении логарифмических характеристик разомкнутой системы. При этом широко используются косвенные оценки качества переходного процесса непосредственно по ЛАЧХ. При синтезе корректирующего устройства одна из основных задач сводится к формированию желаемой ЛАЧХ, т.е. ЛАЧХ скорректированной системы. В общем случае желаемая ЛАЧХ строится из условия обеспечения требуемого качества управления и требуемых запасов устойчивости. В этом плане существуют некоторые общие рекомбинации для построения желаемых ЛАЧХ:

а) ЛАЧХ нескорректированной системы и желаемая ЛАЧХ должны совпадать друг с другом в возможно более широком диапазоне частот. В противном случае реализация корректирующих устройств усложняется.

б) В низкочастотной области наклон характеристики должен составлять  $-20\gamma \frac{\partial B}{\partial \text{дек}}$  (где  $\gamma$  – порядок астатизма системы). Низкочастотная асимптота при частоте  $\omega=1$  имеет ординату  $20 \lg K$ , где  $K$  – коэффициент усиления всей системы.

в) При частоте среза  $\omega_c$ , т.е. когда  $20 \lg |W_p(\omega_c)| = 0$ , наклон желаемой ЛАЧХ целесообразно выбрать  $-20 \frac{\partial B}{\partial \text{дек}}$ , что обеспечивает, как правило, необходимый запас устойчивости по фазе. Требуемая частота среза может быть приближенно определена по формуле:

$$\omega_c \geq \frac{K_1 \pi}{t_p},$$

где  $t_p$  – заданное время переходного процесса;

$K_1$  – коэффициент, определенный из графика по заданной величине перерегулирования  $\varepsilon_m$  (рис. 140).

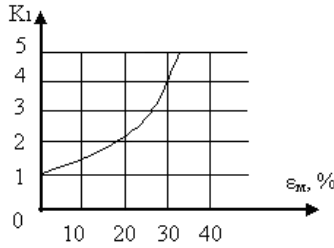


Рис. 140. Зависимость коэффициента  $K_1$  в формуле определения частоты среза от перерегулирования

г) Выбор желаемой ЛАЧХ можно определить, пользуясь номограммами, связывающими параметры ЛАЧХ с показателями качества регулирования. Эти номограммы приводятся в справочниках и учебниках по АРУ.

## 32 СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ПО ЛАЧХ

При последовательной коррекции амплитудные и фазовые характеристики скорректированной разомкнутой системы будут выражаться следующими уравнениями:

$$L_{ck}(\omega) = L(\omega) + L_k(\omega),$$

$$\varphi_{ck}(\omega) = \varphi(\omega) + \varphi_k(\omega).$$

Отсюда ЛАЧХ и ФЧХ корректирующего устройства можно записать:

$$L_k(\omega) = L_{ck}(\omega) - L(\omega),$$

$$\varphi_k(\omega) = \varphi_{ck}(\omega) - \varphi(\omega).$$

По найденным ЛАЧХ и ФЧХ подбирают корректирующие звенья и вычисляют численные значения ее параметров. Корректирующие звенья реализуются с помощью RC цепочек.

*Пример.*

Пусть ЛАЧХ нескорректированной системы изображена в виде  $L_H$  на рис. 141:

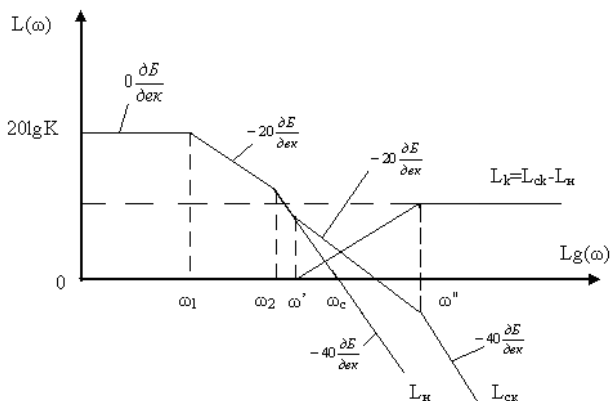


Рис. 141. ЛАЧХ скорректированной системы

Допустим, из условия требуемого качества регулирования получена желаемая ЛАЧХ (ЛАЧХ скорректированной  $L_{ck}$ , см. рис. 141).

Такая  $L_k(\omega)$  реализуется с помощью инерционно-форсирующего звена  $W_k(p) = K_1 \frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}$  при  $T_1 > T_2$ ;  $K_1 = 1$ ,  $\omega' = \frac{1}{T_2}$  и  $\omega'' = \frac{1}{T_1}$ .

Общая структурная схема скорректированной системы состоит из последовательного соединения двух инерционных и одного инерционно-форсирующего звена. Инерционно-форсирующее звено широко используется при коррекции, так как в зависимости от соотношения параметров  $T_1$  и  $T_2$  оно может вносить как опережение, так и запаздывание по фазе.

### 33 СИНТЕЗ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ПО ЛАЧХ

Структурная схема параллельной коррекции показана на рис. 142.

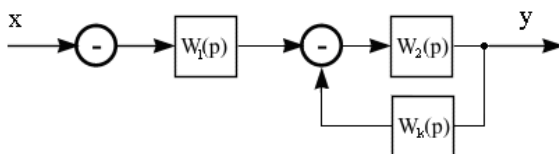


Рис. 142. Иллюстрация к расчету параллельной коррекции

Передаточная функция скорректированной разомкнутой системы имеет вид:  $W_{ck}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_k(p)W_2(p)}$ . Задача коррекции по

ЛАЧХ решается не так просто, как при последовательной коррекции.

Рассмотрим ККП:  $W_{ck}(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)W_2(j\omega)}{1 + W_k(j\omega)W_2(j\omega)}$ .

Рассмотрим два диапазона частот:

1. Если  $|W_k(j\omega)W_2(j\omega)| \ll 1$ , имеем:

$$W_{ck}(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega) = W_n(j\omega),$$

где  $W_n$  – передаточная функция нескорректированной системы, тогда

$$L_{ck}(\omega) \approx L_n(\omega),$$

$$\varphi_{ck}(\omega) \approx \varphi_n(\omega).$$

2. Для диапазона частот, когда  $|W_k(j\omega)W_2(j\omega)| \gg 1$ , имеем:

$$W_{ck}(j\omega) \approx \frac{W_1(j\omega)W_2(j\omega)}{W_k(j\omega)W_2(j\omega)} = \frac{W_n(j\omega)}{W_k(j\omega)W_2(j\omega)} = \frac{W_1(j\omega)}{W_k(j\omega)},$$

откуда

$$L_{ck}(\omega) = L_n(\omega) - L_k(\omega) - L_2(\omega),$$

$$\varphi_{ck}(\omega) = \varphi_n(\omega) - \varphi_k(\omega) - \varphi_2(\omega) \text{ и } L_{ck}(\omega) = L_1(\omega) - L_k(\omega),$$

откуда  $L_k = L_1(\omega) - L_{ck}(\omega)$ .

Таким образом, параллельная коррекция работает только в диапазоне частот, при которых  $|W_k(j\omega)W_2(j\omega)| \gg 1$ , или  $L_k(\omega) + L_2(\omega) > 0$ . Сопрягающая частота, на которой перестает действовать параллельная коррекция, определяется из выражений  $W_k(j\omega)W_2(j\omega) = 1$  или  $L_k(\omega) + L_2(\omega) = 0$ , что соответствует точке пересечения суммы  $L_k$  и  $L_2$  с осью абсцисс.

Последовательность синтеза параллельного корректирующего звена

- 1) Строится ЛАЧХ нескорректированной системы  $L_n(\omega)$ .
- 2) Строится желаемая ЛАЧХ скорректированной системы  $L_{ck}(\omega)$ .
3. Определяется суммарная характеристика:

$$L_k(\omega) + L_2(\omega) = L_n(\omega) - L_{ck}(\omega).$$

4. С учетом требований к системе, а также технической осуществимости, определяется структурная схема скорректированной системы, т.е. место съема и место ввода параллельной коррекции, после чего строится ЛАЧХ неохваченных звеньев  $L_l(\omega)$ .

5. Вычитая из характеристики  $L_l(\omega)$  в диапазоне частот, когда  $L_k(\omega) + L_2(\omega) > 0$ , характеристику  $L_{ck}(\omega)$ , находим ЛАЧХ корректирующего звена:

$$L_k(\omega), L_k = L_l(\omega) - L_{ck}(\omega).$$

6. По виду  $L_k(\omega)$  выбирается корректирующее звено.

*Пример.*

1) Пусть ЛАЧХ нескорректированной системы имеет вид, показанный на рис. 143 (это последовательное соединение трех инерционных звеньев – см. рис. 144). На рис. 143:  $K$  – коэффициент усиления скорректированной системы,  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ ;  $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ ;  $\omega_3 = \frac{1}{T_3}$ .

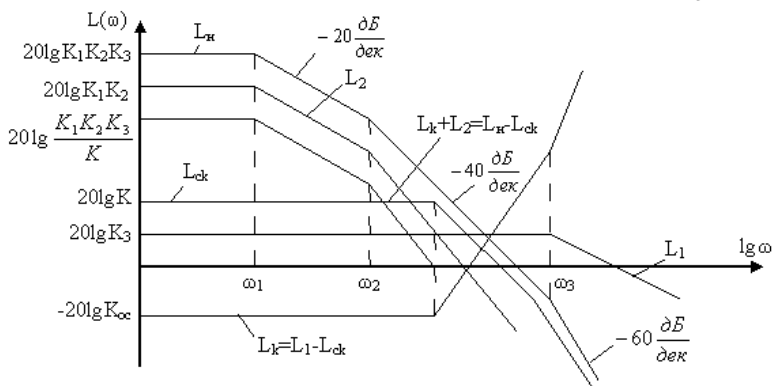


Рис. 143. Иллюстрация к синтезу параллельного корректирующего устройства

2) Из условия требуемого качества регулирования, допустим, нашли желаемую ЛАЧХ.

3) Строим характеристику  $L_k(\omega) + L_2(\omega) = L_n(\omega) - L_{ck}(\omega)$ .

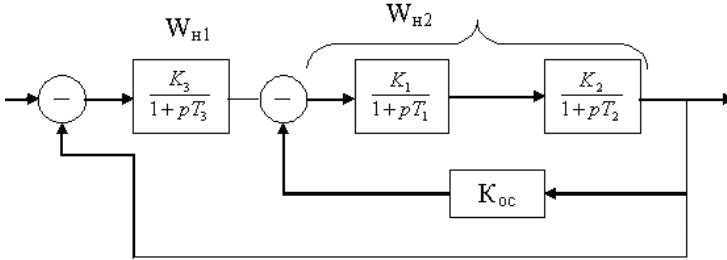


Рис. 144. Иллюстрация к синтезу параллельного корректирующего устройства

4) Из условия  $L_k(\omega) + L_2(\omega) > 0$  видно, что обратной связью должны охватываться 2 звена с большими постоянными времени. Строим структурную схему и ЛАЧХ неохваченных звеньев  $L_2(\omega)$ .

5) Вычитая из характеристики  $L_1$  линию  $L_{ck}$ , в диапазоне  $L_k(\omega) + L_2(\omega) > 0$  получаем ЛАЧХ корректирующего звена. Это получилась прямая ниже оси абсцисс – пропорциональное звено с коэффициентом передачи  $K_{oc} < 1$ .

При параллельной коррекции применяют 2 вида обратных связей:

1) *Жесткая обратная связь* – такая, при которой выходной сигнал звеньев, охваченных этой связью, передается на вход как в установившемся, так и в переходном режимах. Здесь корректирующие звенья не содержат интегрирующих и дифференцирующих звеньев.

2) *Гибкая обратная связь* – такая, при которой на вход охваченных обратной связью звеньев передаются только производные от выходной величины этих звеньев. Гибкая ОС оказывает воздействие на систему только в переходных режимах. Корректирующее звено имеет в своей структуре последовательно включенные в контур дифференцирующие или интегрирующие звенья.

В целом можно сказать, что жесткая ОС уменьшает и стабилизирует общий коэффициент усиления системы и уменьшает ее инер-

ционность. Гибкая ОС приводит к подавлению сигналов нижних или верхних частот. Из-за того, что жесткая ОС уменьшает общий коэффициент усиления, её применение ограничено. Поэтому чаще применяют гибкую ОС, которая позволяет повысить качество регулирования без уменьшения общего коэффициента усиления системы, однако гибкая ОС не стабилизирует коэффициент усиления системы.

### 34 РЕАЛИЗАЦИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

В качестве корректирующих устройств обычно применяют пассивные RC-четырёхполосники постоянного тока, включаемые в комплекте с усилителями. В справочниках по АРУ приводится большое количество различных элементарных электрических корректирующих устройств.

Приведем только некоторые из них (рис.145).

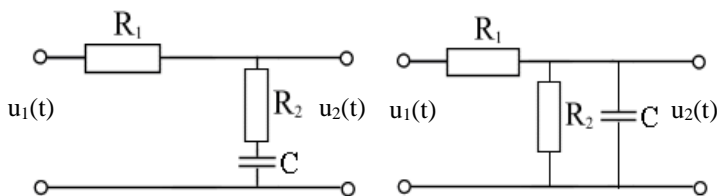


Рис. 145 . RC-четырёхполосники

$$W(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p},$$

где  $T_1 = R_2 C$  ;  $T_2 = (R_1 + R_2) C$  .

Применяют последовательное соединение элементарных корректирующих звеньев, соединяемых через разделительные усилители. Например, цепь (рис. 146), реализует передаточную функцию вида:

$$W(p) = K \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_3 p) \dots}{(1 + T_2 p)(1 + T_4 p) \dots}$$

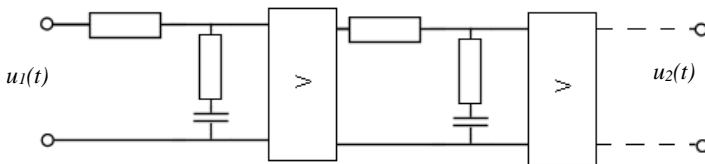


Рис. 146. Цепь с последовательным соединением элементарных корректирующих звеньев, соединенных через разделительные усилители

Корректирующее устройство необходимо включать в усиленно-преобразовательную часть системы, т.е. в цепь с малой мощностью.

### *Сравнительная оценка методов коррекции*

*Последовательная коррекция* проста в расчете и в реализации, позволяет изменять динамические свойства системы в широких пределах. Однако она уменьшает стабильность и помехозащищенность системы, т.к. вводится дополнительное звено, нестабильность которого прямо передается на выход системы.

*Параллельная коррекция* позволяет стабилизировать общий коэффициент преобразования системы, увеличить помехозащищенность, улучшить динамические свойства системы, однако она более сложна в расчетах и реализации.

## **35 АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ САУ**

До сих пор рассматривались системы автоматического управления при детерминированных внешних сигналах – т.е. сигналах, точно описываемых известной функцией времени.

Однако такие сигналы не исчерпывают все возможные условия функционирования САУ. На САУ действуют, как правило, *случайные сигналы*, т.е. сигналы, точное математическое описание которых невозможно. Отметим, что случайные сигналы могут быть как полезными, т.е. несущими полезную информацию, так и вредными.

Например, в системах сопровождения цели по углу невозможно точно предсказать поведение цели – входной сигнал носит случайный характер, но он полезный сигнал. Кроме того, на систему



могут действовать различные помехи, наводки – это вредные сигналы. Случайный сигнал, зависящий от времени, называют еще случайным процессом.

*Случайными процессами* называются процессы, которые в различные моменты времени могут принимать тот или иной вид (рис. 147). Случайные процессы описываются статистическими вероятностными характеристиками. При этом статистические оценки получают либо путем усреднения по множеству в фиксированные моменты времени  $t_k$ ,  $x_{oi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_k)$  – среднее значение по множеству, либо путем усреднения по времени для одной реализации случайного процесса,  $x_{ok} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_i(t_k)$  – среднее значение по времени.

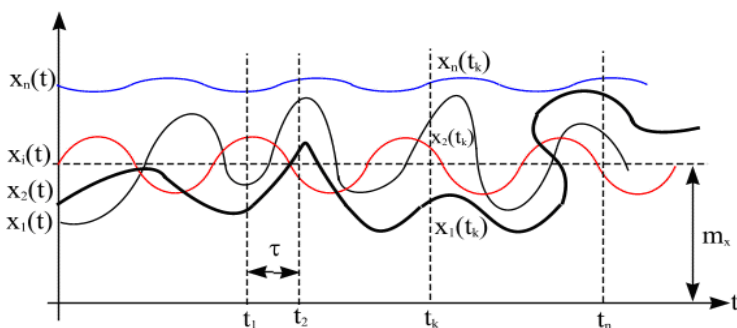


Рис. 147. Иллюстрация к понятию случайный процесс

*Стационарными* называют такие процессы, усредненные значения которых  $x_{oi}$  и  $x_{ok}$  не зависят от времени.

*Эргодическими* называют такие процессы, средние значения которых по времени и по множеству равны,  $x_{oi} = x_{ok}$ . В дальнейшем будем рассматривать только эргодические стационарные процессы.

Случайный процесс (СП) характеризуется следующими параметрами.

1. Среднее значение по времени на конечном интервале  $2T$ :

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

На бесконечном интервале  $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ .

Для эргодических СП  $\bar{x} = m_x(t_1)$ . Для эргодических стационарных СП  $\bar{x} = x_0 = \text{const}$ .

2. *Средняя мощность сигнала:*

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

3. *Автокорреляционная функция* – характеризует взаимосвязь между сечениями СП по времени. Для стационарных СП она не зависит от начала отсчета, а только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ .

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt.$$

Нормированная корреляционная функция:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}.$$

Её свойства

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau); \rho_x(\tau) \leq 1, R_x(0) = \overline{x^2(t)}.$$

4. *Взаимно-корреляционная функция* – характеризует взаимосвязь между двумя СП. Если СП стационарны, то

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt.$$

Нормированная автокорреляционная функция:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)R_y(0)}}; \rho_{xy}(\tau) \leq 1.$$

Если  $R_{xy}(\tau) = 0$ , то случайные сигналы некоррелированы.

5. *Спектральная плотность СП* – определяет распределение мощности сигнала по частоте.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)e^{-j\omega t} dt = |x(j\omega)|^2,$$

где  $x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$  – преобразование Фурье. По теореме Винера – Хинчина спектральная плотность и корреляционная функция связаны соотношениями:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos \omega\tau d\tau,$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos \omega\tau d\omega.$$

6. Взаимная спектральная плотность двух сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$S_{xy}(j\omega) = x(-j\omega) \cdot y(-j\omega)$$

может содержать мнимую часть:

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega.$$

7. Если сигнал состоит из суммы двух сигналов, корреляционные функции которых известны,  $z(t) = x(t) \pm y(t)$ , то

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm R_{xy}(\tau) \pm R_{yx}(\tau) \text{ и}$$

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega) \pm S_{xy}(j\omega) \pm S_{yx}(j\omega) =$$

$$= S_x(\omega) + S_y(\omega) \pm 2 \operatorname{Re} S_{xy}(j\omega).$$

*Свойства спектральной плотности*

1) Чем шире график корреляционной функции  $R_x(\tau)$ , тем уже график спектральной плотности  $S(\omega)$ . Это соответствует физической

сущности процесса – чем медленнее процесс, тем меньше значение в процессе имеют высокие частоты (рис. 148).

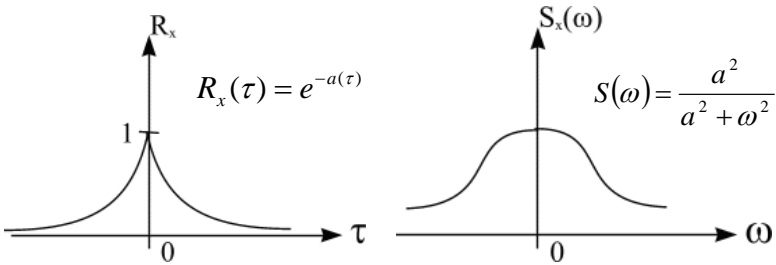


Рис. 148. Иллюстрация к описанию свойств спектральной плотности

2) Если  $R_x(\tau) = \delta(\tau)$ , то  $S(\omega) = 1$ . Такой сигнал называется *белым шумом*, а спектр – белым (рис. 149).

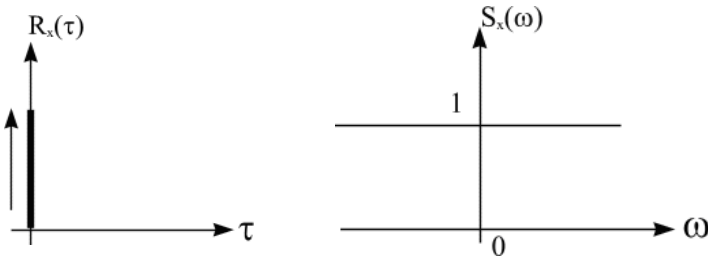


Рис. 149. Иллюстрация к описанию белого шума и его спектра

3) Если  $x(t) = a$ , то  $R(\tau) = a^2$ ;  $S(\omega) = \delta(\omega)$  (рис. 150).

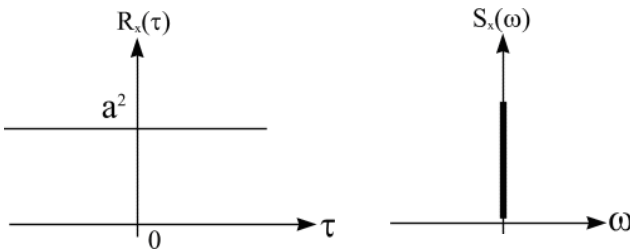


Рис. 150. Иллюстрация к описанию свойств спектральной плотности

## 36 АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ СИСТЕМУ

Задачей анализа является определение статистических характеристик выходного сигнала по известным статистическим характеристикам входного сигнала (рис. 151).

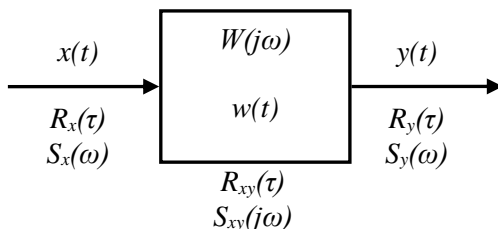


Рис. 151. Иллюстрация к описанию задачи анализа

Так, если на входе есть сигнал  $x(t)$  с известными  $R_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$  на входе линейной системы с комплексным коэффициентом передачи  $W(j\omega)$  и весовой функцией  $w(t)$ , то необходимо определить  $R_y(\tau)$ ,  $S_y(\omega)$ ,  $R_{xy}(\tau)$ ,  $S_{xy}(\tau)$ .

Выходной сигнал определяется по формуле:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau)w(\tau)d\tau.$$

Для частотного спектра выходного сигнала можно записать

$$y(j\omega) = W(j\omega)x(j\omega),$$

где  $x(j\omega)$  и  $y(j\omega)$  – преобразования Фурье от  $x(t)$  и  $y(t)$ ;  $W(j\omega)$  – ККП системы.

Зная входной и выходной сигналы системы, можно определить все статистические характеристики по классическим ранее определенным формулам. Однако легче получать статистические характеристики выходного сигнала путем определения его спектральной плотности, т.к. результирующие выражения не содержат интегралов свертки и поэтому их легче использовать в численных расчетах. Без доказательства приведем формулу, определяющую спектральную

плотность выходного сигнала  $S_y(\omega)$  через спектральную плотность входного сигнала  $S_x(\omega)$ :

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность выходного сигнала равна произведению квадрата модуля ККП на спектральную плотность входного сигнала.

Взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов определяется:

$$\begin{aligned} S_{xy}(j\omega) &= W(j\omega)S_x(\omega), \\ S_{yx}(j\omega) &= W(-j\omega)S_x(\omega). \end{aligned}$$

Корреляционная функция выходного сигнала определится:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 \cos \omega\tau d\omega, \end{aligned}$$

а средняя мощность сигнала на выходе:

$$\overline{y^2(t)} = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega.$$

Тогда взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов определится:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xy}(\omega) |W(j\omega)|^2 \cos \omega\tau d\omega.$$

*Пример.*

Рассмотрим прохождение белого шума через инерционное звено.

$$R_x(\tau) = \delta(\tau); S_x(\omega) = N_0.$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}; \overline{x^2(t)} = \delta(0) = R(0) = \infty.$$

Для аналогичных характеристик выходного сигнала получим

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 = \frac{K^2 N_0}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$R_y(\tau) = K^2 N_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{K^2 N_0}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

Средний квадрат шумов на выходе:

$$\overline{y^2(t)} = R_y(0) = \frac{K^2 N_0}{2T}; \quad \overline{y^2(t)} = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega.$$

Из примера видно, что при подаче на вход сигнала с бесконечно большой средней мощностью  $[x^2(t) = N_0 \delta(0) = \infty]$  мощность выходного сигнала ограничена значением  $\frac{K^2 N_0}{2T}$ . Таким образом,

инерционное звено является фильтром случайных сигналов. Обобщая, можно сказать, что любую систему автоматики или её часть можно рассматривать как фильтр случайных сигналов.

Если на входе двух линейных систем с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  подаются взаимно коррелированные сигналы, то выходные сигналы также будут коррелированы (рис. 152).

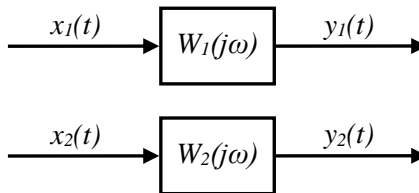


Рис. 152. Иллюстрация к описанию коррелированных сигналов

Если заданы  $R_{x_1 x_2}(\tau)$  и  $S_{x_1 x_2}(j\omega)$ , то

$$S_{y_1 y_2}(j\omega) = W_1(-j\omega)W_2(j\omega)S_{x_1 x_2}(j\omega).$$

Соответственно

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_1 y_2}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

### 37 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОШИБКИ САУ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХАХ

В общем случае на САУ действует полезный сигнал  $U(t)$ , состоящий из детерминированной и случайной частей и случайных помех  $F(t)$ , приложенных к различным точкам системы. Однако, в общем случае, все помехи могут быть приведены к одной точке системы, в том числе и ко входу. Действие помехи приводит к появлению ошибки в системе управления. Поэтому перед системой управления помимо требуемого преобразования полезного сигнала ставится еще задача фильтрации помехи.

*Ошибкой системы  $\Delta(t)$  считается разность между действительным  $y(t)$  и желаемым  $z(t)$  выходными сигналами. При этом под желаемым выходным сигналом понимают сигнал, который бы получился в результате преобразования только полезного сигнала эталонной системой.*

Это определение соответствует структурной схеме, показанной на рис. 153. Схема состоит из реально существующей анализируемой системы  $W(p)$  и эталонной системы  $W_{эт}(p)$ , соответствующей идеальному преобразованию сигнала:

$$\Delta(t) = y(t) - z(t).$$

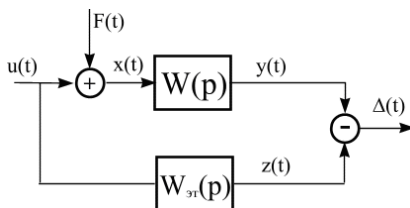


Рис. 153. Иллюстрация к понятию ошибки САУ при случайных помехах



Определим среднеквадратическую ошибку системы  $\overline{\Delta^2(t)}$ .

В операторной форме выражение для ошибки имеет вид:

$$\Delta(p) = y(p) - z(p) = W(p)[u(p) + F(p)] - W_{эм}(p)u(p) = \\ = [W(p) - W_{эм}(p)]u(p) + W(p)F(p).$$

Отсюда видны две составляющие ошибки, обусловленные отличием реальной и эталонной систем (первое слагаемое) и наличием помехи (второе слагаемое). Этому уравнению соответствует структурная схема (рис. 154).

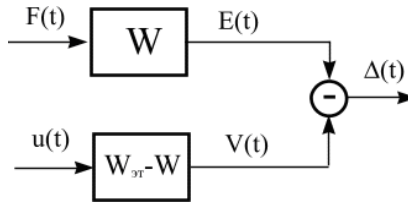


Рис. 154. Иллюстрация к описанию составляющих ошибки САУ

Здесь  $E(t)$  и  $V(t)$  – сигналы, вызванные помехой и полезным сигналом соответственно. При этом для их спектров можно записать:

$$E(j\omega) = W(j\omega)F(j\omega); \quad V(j\omega) = [W_{эм}(j\omega) - W(j\omega)]u(j\omega),$$

тогда

$$S_{\Delta}(\omega) = S_V(\omega) + S_E(\omega) - 2 \operatorname{Re} S_{VE}(j\omega).$$

Выражая  $S_{\Delta}(\omega)$  через входные сигналы, получим

$$S_{\Delta}(\omega) = |W_{эм}(j\omega) - W(j\omega)|^2 S_u(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_F(\omega) - \\ - 2 \operatorname{Re}[W_{эм}(j\omega) - W(j\omega)]W(-j\omega)S_{Fu}(j\omega).$$

Если сигналы  $u(t)$  и  $F(t)$  – некоррелированные, то  $S_{Fu}(j\omega) = 0$ , тогда

$$S_{\Delta}(\omega) = |W_{эм}(j\omega) - W(j\omega)|^2 S_u(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_F(\omega).$$

Здесь первое слагаемое обусловлено отличием реальной системы от эталонной, второе слагаемое определяется помехой.

Тогда для среднеквадратической погрешности системы можно записать:

$$\overline{\Delta^2(t)} = R_{\Delta}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta}(\omega) d\omega; \quad R_x(0) = \overline{x^2(t)}.$$

Для линейных систем  $S_{\Delta}(\omega)$  представляет собой дробно-рациональную функцию, поэтому, как правило, вычисление  $\overline{\Delta^2(t)}$  сводится к вычислению интегралов вида:

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(j\omega)B(-j\omega)}{C(j\omega)C(-j\omega)} d\omega,$$

где  $B(j\omega)$  и  $C(j\omega)$  – полиномы.

Это стандартные интегралы, их таблицы приводятся в справочниках и книгах по АРУ.

*Пример.*

Найти среднеквадратическую погрешность  $\overline{\Delta^2(t)}$  системы, если:

$$S_F(\omega) = a^2; \quad S_u(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}; \quad W_{эм} = 1; \quad W(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T};$$

$$S_{Fu}(\omega) = 0.$$

Определим:

$$S_{\Delta}(\omega) = |W(j\omega) - W_{эм}(j\omega)|^2 S_u(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_F(\omega);$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(\omega) &= \frac{1}{1+\omega^2} \left| 1 - \frac{k}{1+j\omega T} \right|^2 + a^2 \left| \frac{k}{1+j\omega T} \right|^2 = \\ &= \frac{[(1-k) + j\omega T][ (1-k) - j\omega T ]}{[(1+j\omega)(1+j\omega T)][ (1-j\omega)(1-j\omega T) ]} + \frac{a^2 k^2}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)}. \end{aligned}$$

Здесь для вычисления  $\overline{\Delta^2(t)}$  имеем сумму двух интегралов. Из справочника находим:

$$\Delta^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Delta}(\omega) d\omega = \frac{T + (1-k)^2}{2(T+1)} + \frac{a^2 k^2}{2T}.$$

### **38 СИНТЕЗ САУ ПО МИНИМУМУ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ**

При синтезе САУ по минимуму среднеквадратической ошибки (СКО), в зависимости от степени детерминированности характеристик объекта, различают две постановки задачи.

#### *1) Частичный синтез*

Здесь структура системы задана и остается неизменной. При известных  $W(p)$ ,  $W_{sm}(p)$  и статистических характеристиках сигналов  $u(t)$  и  $F(t)$  находят такие значения параметров системы, при которых СКО минимальна, то есть  $\overline{\Delta^2(t)} = \min$ . В частичном синтезе при заданной структуре находят оптимальные значения параметров системы и минимальные значения СКО.

#### *2) Полный синтез*

Здесь ищут структуру системы, то есть передаточную функцию  $W(p)$ , такую, чтобы при известных  $W_{sm}(p)$  и статистических характеристиках сигналов  $u(t)$  и  $F(t)$  СКО была минимальна, то есть  $\overline{\Delta^2(t)} = \min$ .

Рассмотрим первую задачу – *частичный синтез*.

При известных  $W(p)$ ,  $W_{sm}(p)$ ,  $S_u(\omega)$ ,  $S_F(\omega)$  можно получить выражение для СКО системы. В общем случае она имеет вид

$$\overline{\Delta^2(t)} = f(g_1; g_2; \dots; g_n),$$

где  $g_1, g_2, \dots, g_n$  – параметры системы (коэффициент усиления, постоянные времени, запас устойчивости и т.д.).

Математически задача синтеза здесь сводится к определению параметров  $g_i$ , минимизирующих функцию  $f(g_1 \dots g_n)$ . Минимум может находиться численными методами или аналитически. Наиболее общими являются численные методы оптимизации. Например, методы градиентов или покоординатного спуска, легко реализуемые на ПК.

При аналитическом определении берутся произвольные по параметрам от функции  $\overline{\Delta^2(t)}$  и решается система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\Delta^2(t)}}{\partial g_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \overline{\Delta^2(t)}}{\partial g_n} = 0. \end{cases}$$

Из системы находятся оптимальные значения параметров  $g_i$ . Отметим, что этот метод дает правильные результаты только в том случае, когда имеют место не только необходимые, но и достаточные условия существования экстремума.

*Пример.*

Для предыдущего примера найти значения  $T_0$  и  $k$ , соответствующие минимуму СКО.

Имеем:

$$\Delta^2(t) = \frac{T_0 + (1-k)^2}{2(T_0 + 1)} + \frac{a^2 k^2}{2T_0}.$$

Берем частные производные, составляем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\Delta^2(t)}}{\partial k} = -\frac{1-k}{1+T_0} + \frac{a^2 k}{T_0} = 0, \\ \frac{\partial \overline{\Delta^2(t)}}{\partial T_0} = \frac{k(2-k)}{(1+T_0)^2} - \frac{a^2 k^2}{T_0^2} = 0; \end{cases}$$

совместное решение дает

$$T_0 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; k = 1 - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

При отсутствии помех, то есть при  $a = 0$ , оптимальные значения  $T_0 = 0$ ,  $k = 1$ , что соответствует пропорциональному звену с единичным коэффициентом усиления.

Рассмотрим вторую задачу – *полный синтез*.

Необходимо определить передаточную функцию системы при заданных статистических характеристиках сигналов и  $W_{эм}(p)$ , обеспечивающих минимум  $\overline{\Delta^2(t)}$ . Эта задача впервые была поставлена и решена советским ученым Колмогоровым А.Н. и, независимо от него, Н. Винером.

Для рассматриваемой нами структурной схемы, определяющей ошибку системы (см. рис. 147), можно записать:

$$\Delta(j\omega) = W_{эм}(j\omega)u(j\omega) - W(j\omega)x(j\omega),$$

$$\text{где } x(j\omega) = u(j\omega) + F(j\omega).$$

$$S_{\Delta}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) - 2 \operatorname{Re}[W_{эм}(j\omega)W(-j\omega)S_{xu}(j\omega)] + |W_{эм}(j\omega)|^2 S_u(\omega).$$

Колмогоровым показано, что минимальное значение спектральной плотности ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$  достигается в оптимальном виде комплексного коэффициента передачи, определенном по формуле

$$W_{онм}(j\omega) = \frac{W_{эм}(j\omega)S_{xu}(j\omega)}{S_x(\omega)}. \quad (3)$$

Доказательство приведено в [4]. Выражение (3) известно как формула Колмогорова–Винера. Следует обратить внимание, что здесь  $S_{xu}(j\omega)$  – это взаимная спектральная плотность полезного сигнала и его смеси с помехой  $x(t) = u(t) + F(t)$ .

Если помеха и сигнал некоррелированы, то есть  $S_{Fu}(\omega) = 0$ , то  $S_{xu}(\omega) = S_u(\omega)$ , а  $S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_F(\omega)$ .

Тогда

$$W_{onm}(j\omega) = \frac{W_{эм}(j\omega)S_u(\omega)}{S_u(\omega) + S_F(\omega)}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) определяют передаточную функцию системы, оптимальной по минимуму СКО.

Однако в большинстве практических задач определенные по формулам (3) и (4) передаточные функции физически трудно реализуемые, а системы, построенные по ним, в большинстве случаев неработоспособны, так как неустойчивы.

Например, если

$$W_{эм}(j\omega) = 1, S_u(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}, S_F(\omega) = 1, S_{Fu}(j\omega) = 0,$$

то

$$W_{onm}(j\omega) = \frac{1}{2 + \omega^2} = \frac{1}{(\sqrt{2} + j\omega)(\sqrt{2} - j\omega)};$$

$$W_{onm}(p) = \frac{1}{(\sqrt{2} + p)(\sqrt{2} - p)}. \quad (5)$$

Это выражение соответствует последовательному соединению двух инерционных звеньев, одно из которых неустойчиво, так как характеристическое уравнение имеет положительный корень  $p = \sqrt{2}$ .

Для нахождения оптимального значения  $W(j\omega)$  с учетом устойчивости Колмогоровым разработана методика квазиоптимального синтеза, заключающаяся в следующем:

1) Представим  $S_x(\omega)$  в виде двух сопряженных функций:

$$S_x(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega), \quad (6)$$

где  $\psi(j\omega)$  – имеет полюсы в верхней полуплоскости;  $\psi(-j\omega)$  – имеет полюсы в нижней полуплоскости,  $S_x(\omega)$  – всегда четная функция частоты.

Представление  $S_x(\omega)$  в виде (6) и выделение  $\psi(j\omega)$  называется факторизацией.

Тогда

$$W_{onm}(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \frac{W_{эм}(j\omega)S_{xu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)} \quad (7)$$

2) Перепишем (7) в виде

$$W_{onm}(j\omega)\psi(j\omega) = \frac{W_{эм}(j\omega)S_{xu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)} = R(j\omega) + N(-j\omega),$$

где правая часть представляется в виде двух слагаемых с полюсами, лежащими в верхней и нижней полуплоскостях. Эта операция носит название *расщепление*.

$$\text{Откуда } W_{onm}(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{\psi(j\omega)} + \frac{N(-j\omega)}{\psi(j\omega)} \text{ – расщепление.}$$

Первому из этих слагаемых соответствует устойчивая, а второму – неустойчивая передаточные функции. Отбрасывая неустойчивую часть, для оптимальной устойчивой системы получим:

$$W_{onm}(j\omega) = R(j\omega)/\psi(j\omega). \quad (8)$$

Это выражение известно как формула Колмогорова – Винера и применяется для определения оптимальных передаточных функций – устойчивых систем.

Если передаточная функция выбрана по формуле (8), то спектральная плотность ошибки определится:

$$S_{\Delta}(\omega) = \left| \frac{N(-j\omega)}{\psi(j\omega)} \right|^2 S_x(\omega) + |W_{эм}(j\omega)|^2 \left[ S_u(\omega) - \frac{|S_{xu}(j\omega)|^2}{S_x(\omega)} \right].$$

*Пример.*

Найти оптимальное значение  $W(j\omega)$  в предыдущем примере с учетом устойчивости. Проводим факторизацию:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= S_u(\omega) + S_F(\omega) = \\ &= 1 + \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{2+\omega^2}{1+\omega^2} = \left( \frac{\sqrt{2}+j\omega}{1+j\omega} \right) \left( \frac{\sqrt{2}-j\omega}{1-j\omega} \right) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega). \end{aligned}$$

В нашем случае

$$S_{xu} = S_u = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

Проводим расщепление:

$$\begin{aligned} \frac{W_{эм}(j\omega)S_{xu}(j\omega)}{\psi(-j\omega)} &= \frac{1 - j\omega}{(1 + \omega^2)(\sqrt{2} - j\omega)} = \\ &= \frac{1}{(1 + j\omega)(\sqrt{2} - j\omega)} = \frac{A}{1 + j\omega} + \frac{B}{\sqrt{2} - j\omega}. \end{aligned}$$

Приводя к общему знаменателю и сравнивая числитель, для определения коэффициентов  $A$  и  $B$  получаем уравнение:

$$A(\sqrt{2} - j\omega) + B(1 + j\omega) = 1.$$

Это уравнение разбивается на систему по действительной и мнимой частям:

$$\begin{cases} A\sqrt{2} + B = 1 \\ -A + B = 0, \end{cases}$$

откуда

$$A = B = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}; \quad R(j\omega) = \frac{1}{(1 + \sqrt{2})(1 + j\omega)}.$$

Для оптимального комплексного коэффициента передачи получаем:

$$W_{онм}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega)}{(1 + \sqrt{2})(1 + j\omega)(\sqrt{2} + j\omega)} = \frac{1}{2,4(\sqrt{2} + j\omega)}.$$

Передаточная функция квазиоптимальной устойчивой системы определится:

$$W_{онм}(p) = \frac{1}{2,4(\sqrt{2} + p)}.$$

В отличие от ранее полученной передаточной функции (5) в квазиоптимальной системе присутствуют только устойчивые звенья.



## 39 КРАТКИЕ ВЫВОДЫ ПО АНАЛИЗУ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ РАДИОАВТОМАТИКИ

1. Воздействие случайных помех на замкнутые системы приводит к появлению в них дополнительных ошибок.

2. Ошибка оценивается средней величиной и зависит от спектральной плотности сигналов и передаточной функции системы.

3. При заданных статистических характеристиках сигналов можно определить оптимальную передаточную функцию и оптимальные параметры системы.

Факторизация любой спектральной плотности может быть осуществлена следующим образом. Спектральная плотность, в общем случае, имеет вид (это четная функция частоты):

$$S_x(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_m\omega^{2m}}{a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + \dots + a_n\omega^{2n}} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \omega^{2k}}{\sum_{k=0}^n a_k \omega^{2k}}.$$

По теореме Виета можно разложить

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{b_m(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)\dots(\omega^2 - \omega_m^2)}{a_n(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)\dots(\omega^2 - \omega_n^2)} = \\ &= \frac{b_m(j\omega - \omega_1)(-j\omega - \omega_1)(j\omega - \omega_2)(-j\omega - \omega_2)\dots(j\omega - \omega_m)(-j\omega - \omega_m)}{a_n(j\omega - \omega_1)(-j\omega - \omega_1)(j\omega - \omega_2)(-j\omega - \omega_2)\dots(j\omega - \omega_n)(-j\omega - \omega_n)}. \end{aligned}$$

Отметим, что рассмотренные методы оптимизации справедливы только для стационарных эргодических систем с бесконечным временем наблюдения, то есть для систем, работающих в установившемся режиме. В более общем случае, то есть при оптимизации систем, работающих в переходных режимах и при нестационарных случайных процессах, применяют метод, разработанный Кальманом и Бьюси. Этот метод основан на применении понятия пространства состояний и сводится к синтезу фильтров Кальмана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

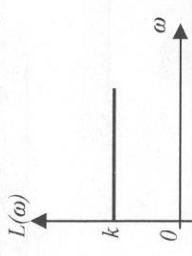
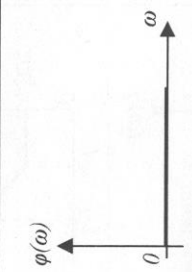

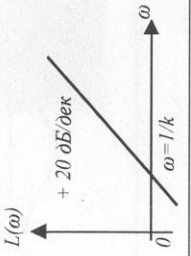
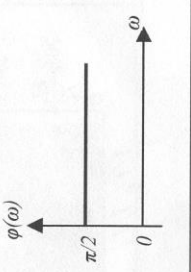
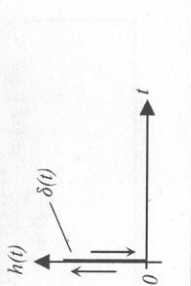
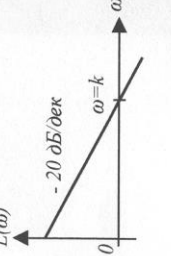

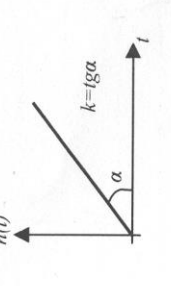
Любую систему автоматического управления можно смоделировать с использованием современных математических пакетов программного обеспечения, в частности, в оболочке MATLAB Simulink, и методом численного эксперимента проводить исследования влияния параметров на качество процессов управления. Однако без понимания классических основ теории управления и аналитических методов описания САУ любая компьютерная модель слепа и безжизненна. Книга дает минимальные знания, достаточные для понимания сущности проблем, возникающих на стадии постановки задачи при проектировании линейных систем радиоавтоматики.

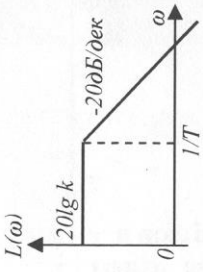
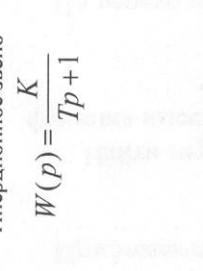

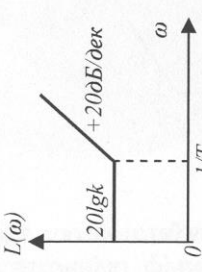
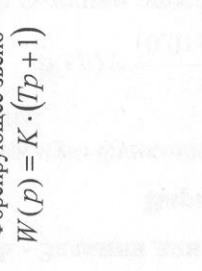

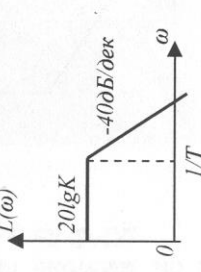
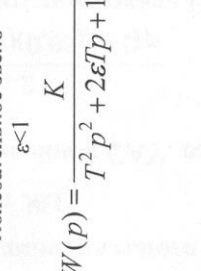

В рамках настоящего учебного пособия ставилась задача ознакомления читателя с основами теории линейных систем автоматического управления. Проблемные научные вопросы теории и практики САУ, к сожалению, остались за его рамками.

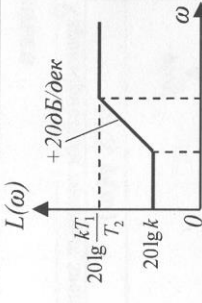
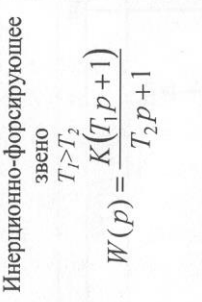

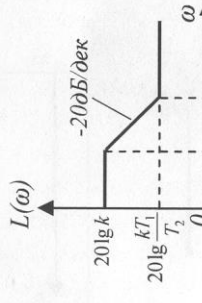
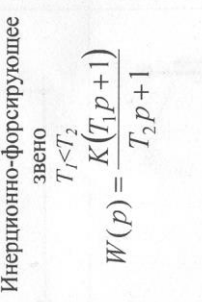

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пупков, Р.А. Методы теории автоматического управления / Р.А. Пупков. – М.: МВТУ им. Баумана, 1997.
2. Коновалов, Г.Ф. Радиоавтоматика : учеб. пособие / Г.Ф. Коновалов. – М.: Лань, 2017.
3. Арсеньев, Г.Н. Радиоавтоматика / Г.Н. Арсеньев, С.Н. Замуруев. – М.: Форум, Инфра-М, 2016.
4. Нетушил, А.В. Теория автоматического управления / А.В. Нетушил. – М.: Высшая школа, 1985.
5. Карманов, И.В. Радиоавтоматика: базовый конспект лекций / И.В. Карманов. – Казань: КГТУ им. Туполева, 2004.
6. Черных, А.В. Моделирование электротехнических устройств в MATLAB. SimPowerSystems и Simulink / А.В. Черных. – М.: ДМК-Пресс, 2014.

## Приложение А – Характеристики типовых звеньев

Передаточная функция звена $W(p)$	Характеристики типовых звеньев		
	ЛАЧХ $L(\omega)$	ФЧХ $\varphi(\omega)$	ПХ $h(t)$
Пропорциональное звено $W(p) = K$			
Дифференцирующее звено $W(p) = K \cdot p$			
Интегрирующее звено $W(p) = \frac{K}{p}$			

<p>Инерционное звено</p> $W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$			
<p>Форсирующее звено</p> $W(p) = K \cdot (Tp + 1)$			
<p>Колесательное звено</p> $\varepsilon < 1$ $W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\varepsilon Tp + 1}$			

<p>Инерционно-форсирующее звено  <math>T_1 &gt; T_2</math></p> $W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}$			
<p>Инерционно-форсирующее звено  <math>T_1 &lt; T_2</math></p> $W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}$			

## Приложение Б – Задания для индивидуального выполнения

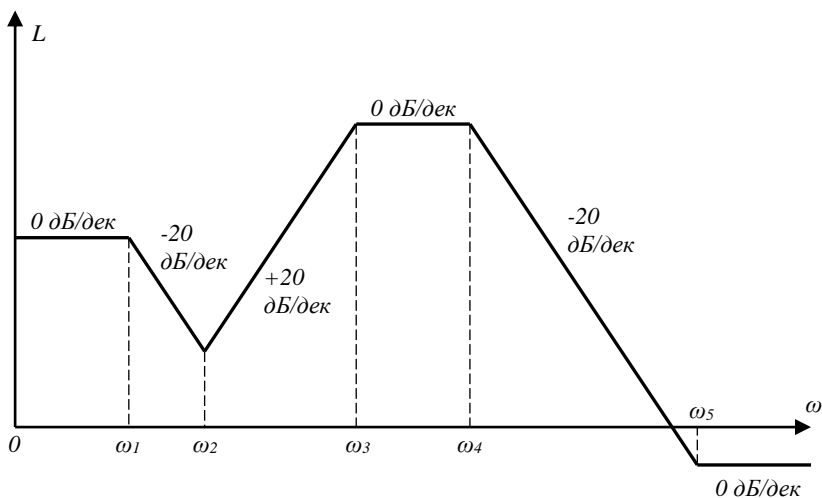
### Вариант №1

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

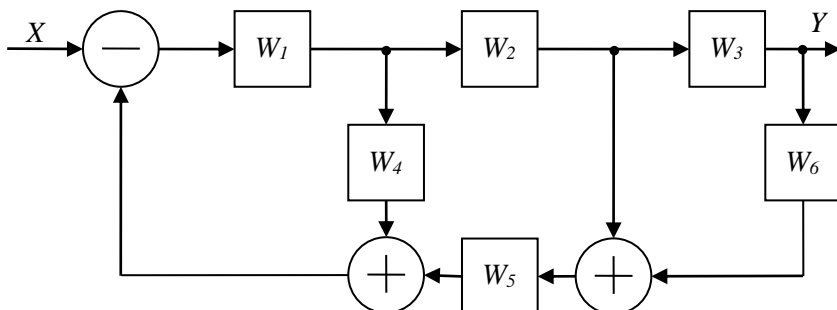
$$W(p) = \frac{2}{(0,01p + 1)(0,05p + 1)p}$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



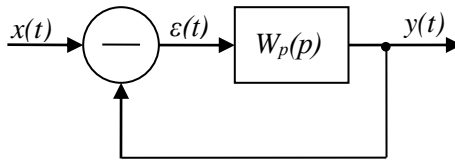
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{11}{p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 5p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{(0,1p+1)}{p^4 + ap^3 + bp^2 + 4p + 1}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 0,2p^2 + p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{2}{0,01p+1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{4 + \omega^2}$ , спектральная

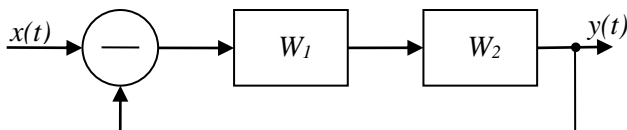
плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2 + \omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{\text{эт}}=1$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала:  $S_U = \frac{5}{4 + \omega^2}$ , спектральная плотность по-



мехи:  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы:  $W_{ЭТ}=1$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{1}{0,03p+1}, W_2 = e^{-p\tau}$$

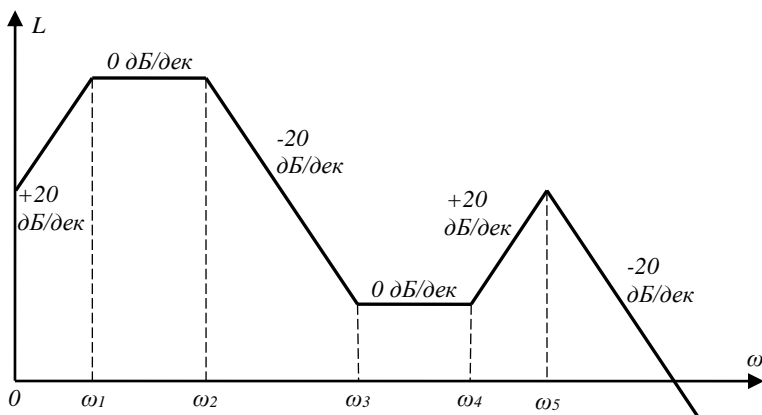
### Вариант №2

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

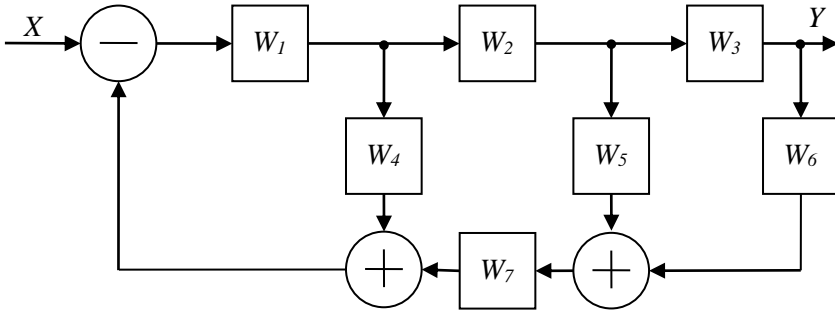
$$W(p) = \frac{2}{(0,2p+1)(0,5p+1)p}$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



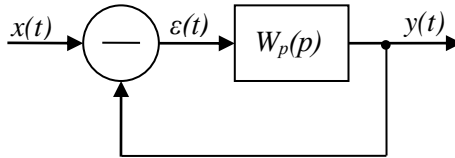
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{11}{2p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 5p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{20(0,2p + 1)}{0,2p^4 + ap^3 + bp^2 + 4p + 20}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 0,1p^2 + p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{2}{0,02p + 1}$ , спек-

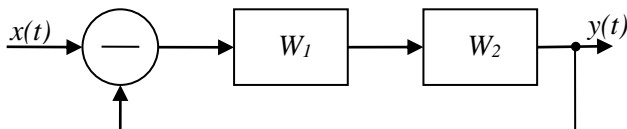
тральная плотность полезного сигнала:  $S_U = \frac{1}{1 + \omega^2}$ , спектральная

плотность помехи:  $S_F = \frac{1}{2 + \omega^2}$ , передаточная функция эталонной

системы:  $W_{ЭТ}=2$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала:  $S_U = \frac{3}{1 + \omega^2}$ , спектральная плотность помехи:  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы:  $W_{ЭТ}=2$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{2}{0,03p + 1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

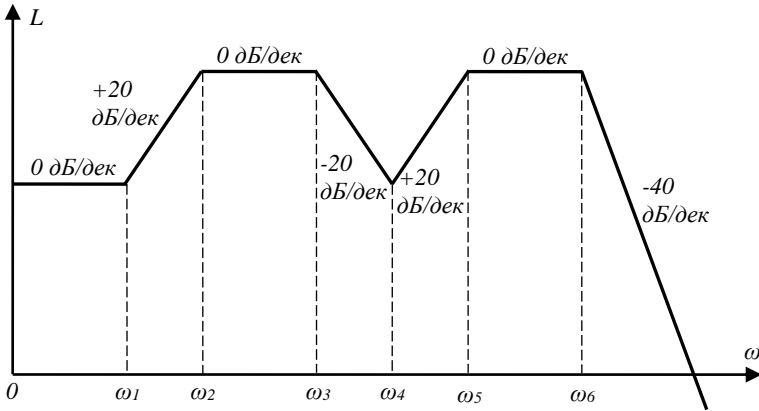
### Вариант №3

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

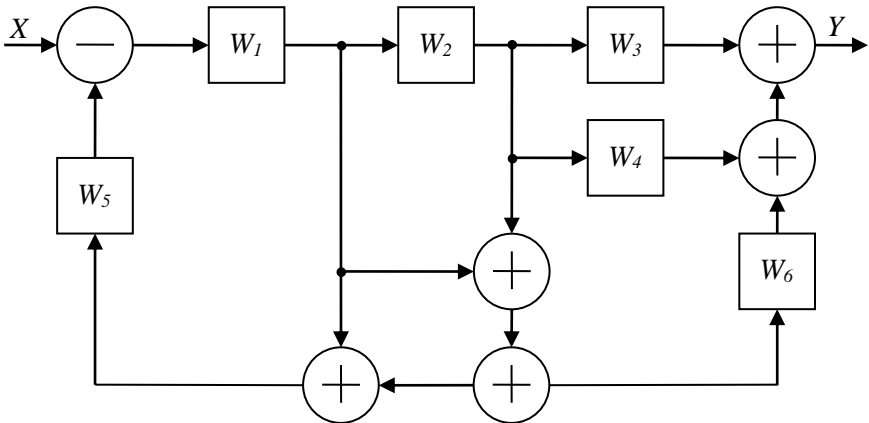
$$W(p) = \frac{3}{(0,3p + 1)(0,5p + 1)p}.$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



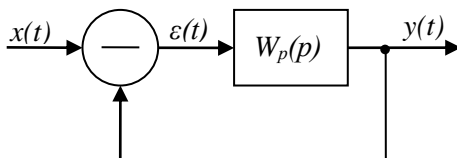
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{3}{3p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 5p + k}$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{3(0,1p+1)}{0,3p^4 + ap^3 + bp^2 + 4p + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 0,4p^2 + 2p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{3}{0,03p+1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала:  $S_U = \frac{1}{1+\omega^2}$ , спектральная

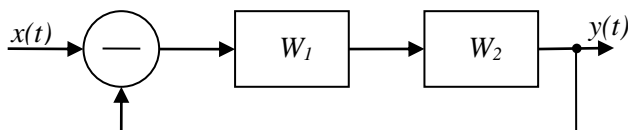
плотность помехи:  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы:  $W_{ЭГ} = 3$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плот-

ность полезного сигнала:  $S_U = \frac{8}{1+\omega^2}$ , спектральная плотность помехи:

$S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы:  $W_{ЭГ} = 3$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{3}{0,03p+1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$



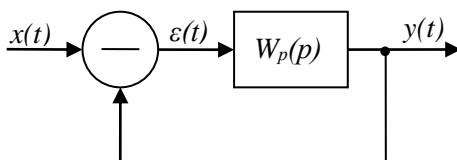
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{4}{4p^4 + 30p^3 + 2p^2 + 5p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{4(0,1p + 1)}{0,4p^4 + ap^3 + bp^2 + 4p + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,2p^3 + 0,1p^2 + p + 5}.$$

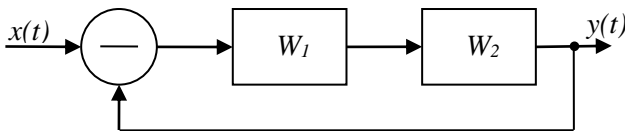
7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{3}{0,04p + 1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1 + \omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2 + \omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 4$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{15}{1 + \omega^2}$ , спектральная плотность поме-

хи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 4$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{4}{0,03p + 1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

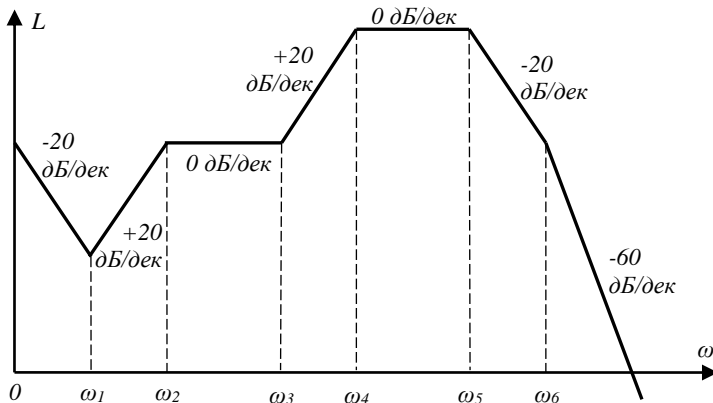
### Вариант №5

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{5}{(0,01p + 1)^2 (0,05p + 1)}.$$

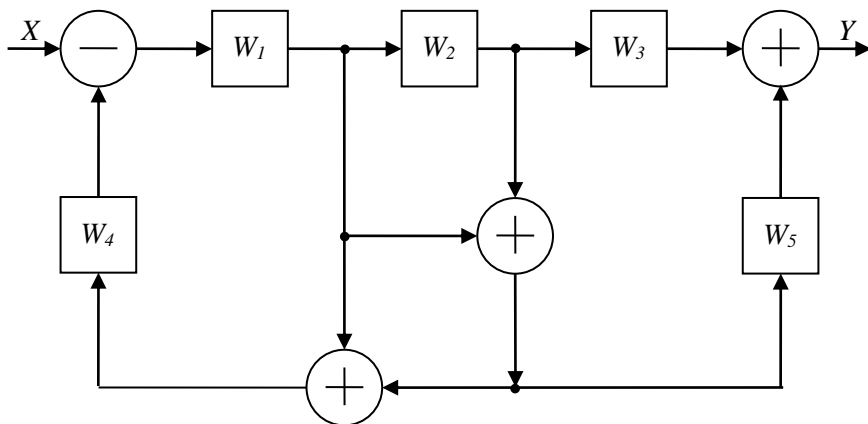
По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:





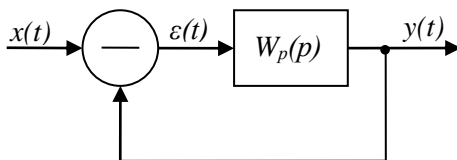
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{5}{5p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 3p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{5(0,1p + 1)}{0,5p^4 + ap^3 + bp^2 + 4p + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + p^2 + p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если

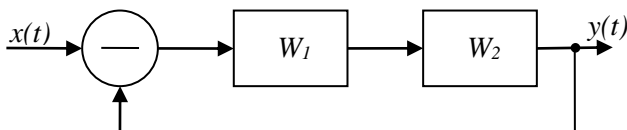
передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{5}{0,05p+1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1+\omega^2}$ , спектральная

плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 5$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{11}{4+\omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 5$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{5}{0,03p+1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

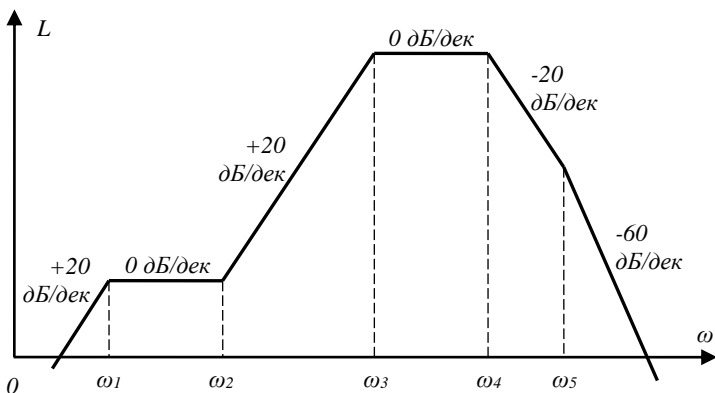
### Вариант № 6

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

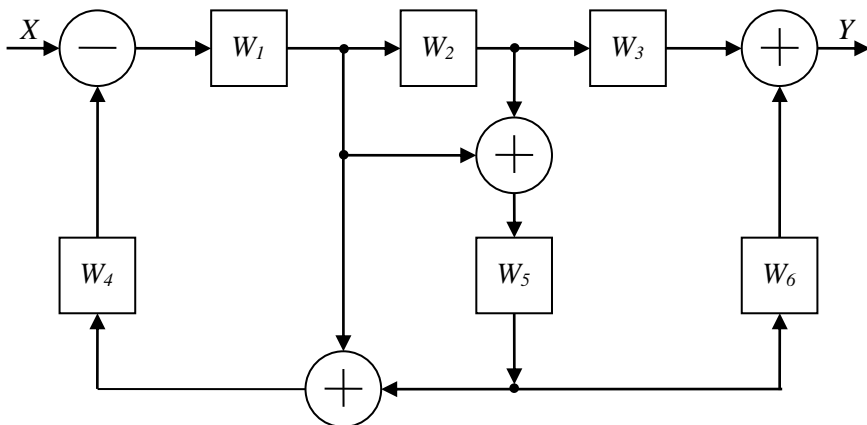
$$W(p) = \frac{6}{(0,02p+1)^2(0,05p+1)}.$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_x$  по структурной схеме



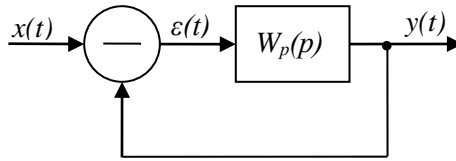
4. Найти значение  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{6}{6p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 3p + k}$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{6(0,1p + 1)}{6p^4 + ap^3 + bp^2 + 4p + 10}$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,3p^3 + p^2 + p + 5}.$$

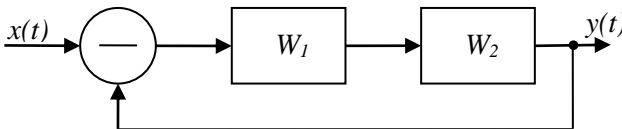
7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{6}{0,06p + 1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1 + \omega^2}$ , спектральная

плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2 + \omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{\text{ЭТ}} = 6$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{7}{9 + \omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{\text{ЭТ}} = 6$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{6}{0,03p + 1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

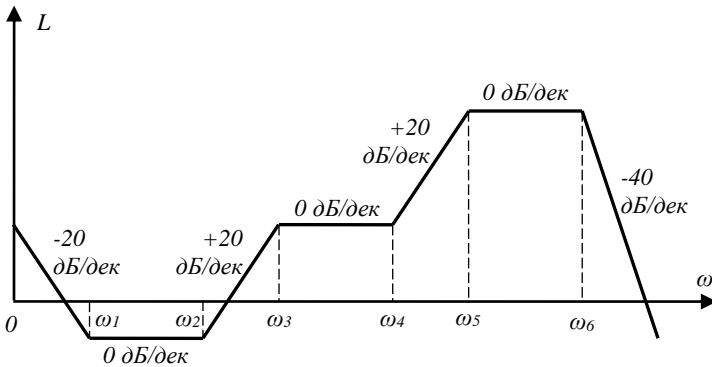
## Вариант №7

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

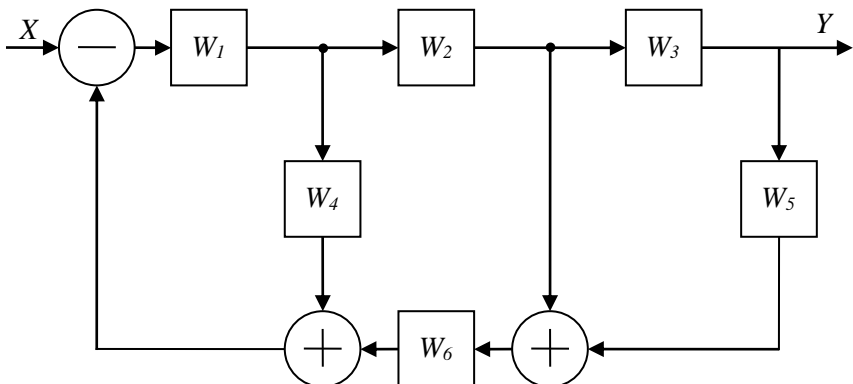
$$W(p) = \frac{7}{(0,004p + 1)^2(0,008p + 1)p}$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



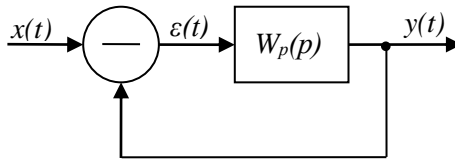
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{7}{7p^4 + 10p^3 + 3p^2 + 2p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{7(0,1p+1)}{bp^4 + ap^3 + 6p^2 + 4p + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,3p^3 + 0,1p^2 + p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Lambda}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{7}{0,07p+1}$ , спек-

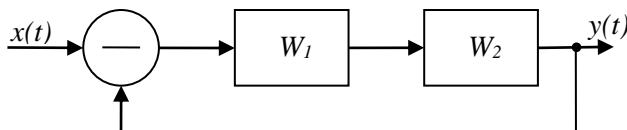
тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1+\omega^2}$ , спектральная

плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 7$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{24}{1+\omega^2}$ , спектральная плотность поме-

хи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭГ}=7$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{10}{0,06p + 1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

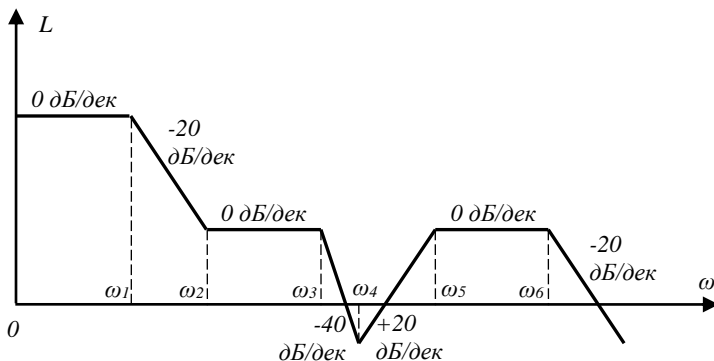
### Вариант №8

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

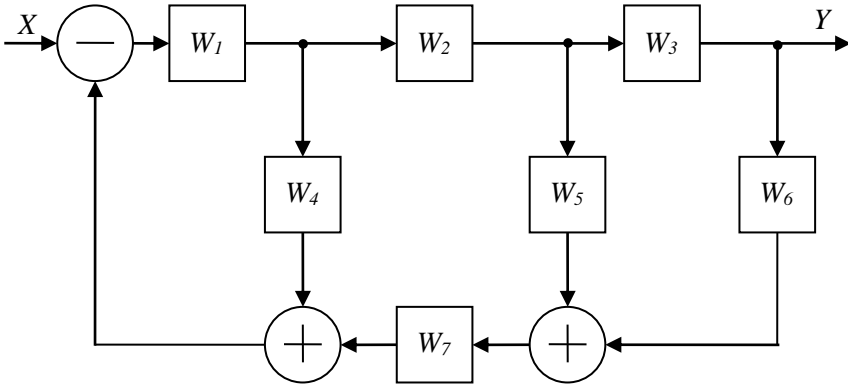
$$W(p) = \frac{8}{(0,0025p + 1)^2(0,01p + 1)}.$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



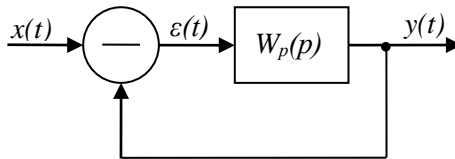
4. Найти значение  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{8}{8p^4 + 10p^3 + 4p^2 + 2p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{8(0,1p + 1)}{bp^4 + ap^3 + 8p^2 + 4p + 20}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{10}{0,3p^3 + 0,1p^2 + p + 10}.$$

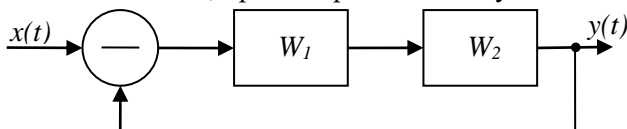
7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если



передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{8}{0,08p+1}$ , спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1+\omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭГ} = 8$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{21}{4+\omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭГ} = 8$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{10}{0,05p+1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

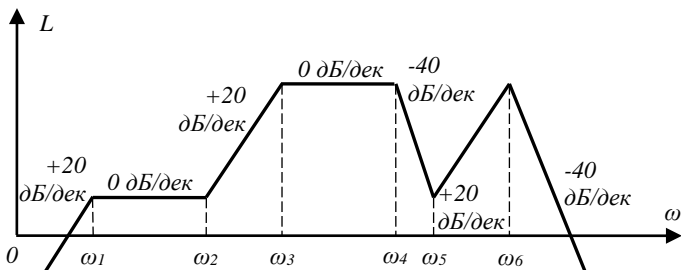
### Вариант №9

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

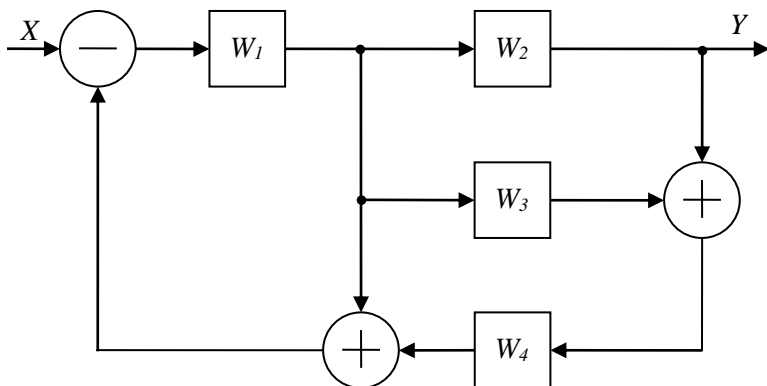
$$W(p) = \frac{9}{(0,005p+1)(0,05p+1)^2}.$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



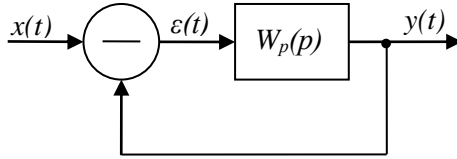
4. Найти значения  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{9}{9p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 1p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{9(0,1p+1)}{9p^4 + 4p^3 + bp^2 + ap + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 0,2p^2 + 0,2p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Delta}(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{9}{0,09p + 1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1 + \omega^2}$ , спектральная

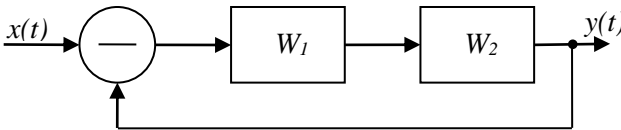
плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2 + \omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 9$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плот-

ность полезного сигнала  $S_U = \frac{19}{9 + \omega^2}$ , спектральная плотность поме-

хи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 9$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{10}{0,04p + 1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

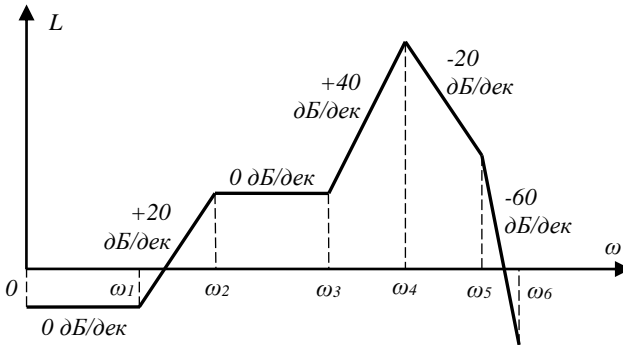
## Вариант №10

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

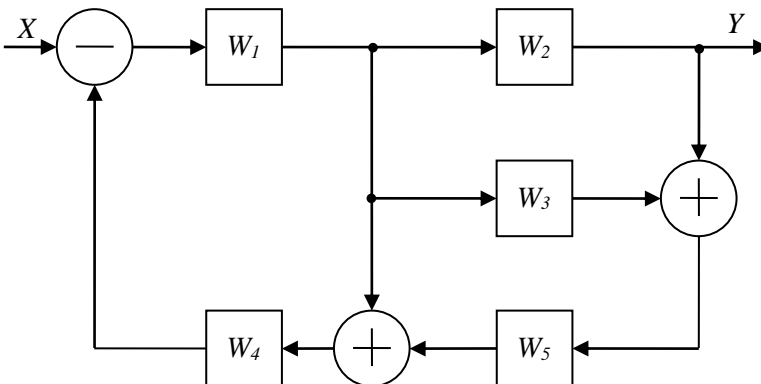
$$W(p) = \frac{10}{(0,02p + 1)^2 (0,005p + 1)^2}$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы по асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



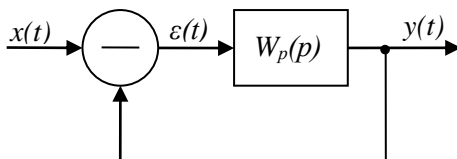
4. Найти значение  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{10}{10p^4 + 10p^3 + 2p^2 + 2p + k}$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{9(0,1p+1)}{bp^4 + ap^3 + 10p^2 + 4p + 10}$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 0,2p^2 + 0,2p + 5}$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_\Lambda(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{10}{0,1p+1}$ , спек-

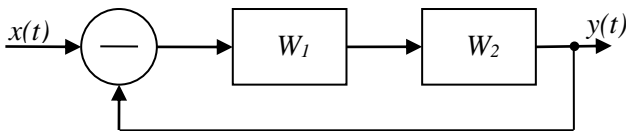
тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1+\omega^2}$ , спектральная

плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{\text{ЭТ}} = 10$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{9}{16+\omega^2}$ , спектральная плотность по-

мехи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 10$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{10}{0,03p + 1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

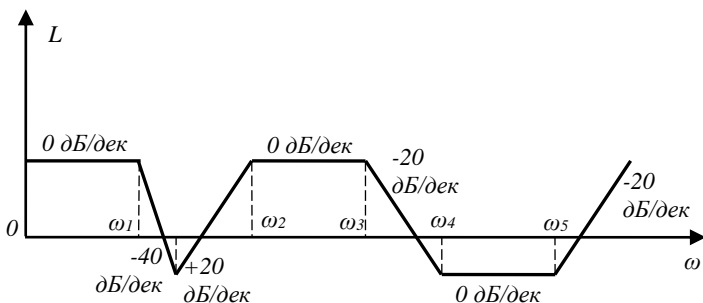
### Вариант №11

1. Найти переходную функцию линейной САУ, если передаточная функция имеет вид:

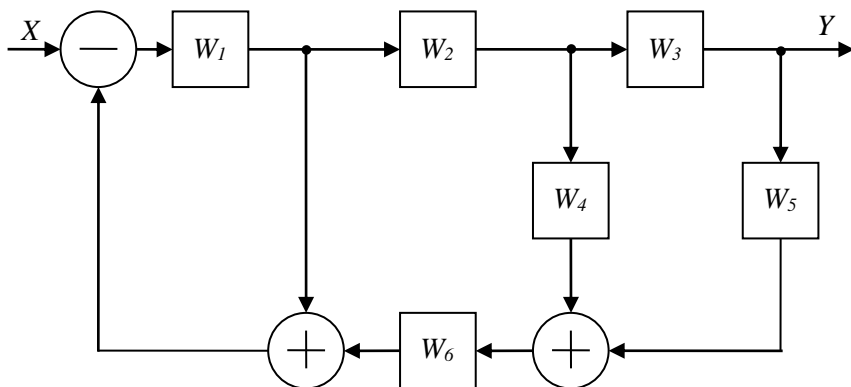
$$W(p) = \frac{20}{(0,001p + 1)(0,002p + 1)^2}.$$

По переходной функции определить показатели качества процесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы асимптотической ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.



3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



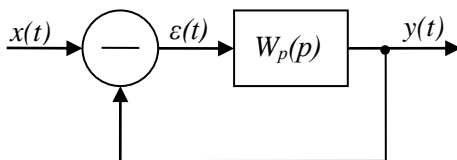
4. Найти значение  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{10}{8p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 4p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{2(0,1p + 1)}{20p^4 + 2p^3 + bp^2 + ap + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .



$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 0,3p^2 + 0,1p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_{\Lambda}(\omega)$ , если

передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{11}{0,02p+1}$ , спек-

тральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{1+\omega^2}$ , спектральная

плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной

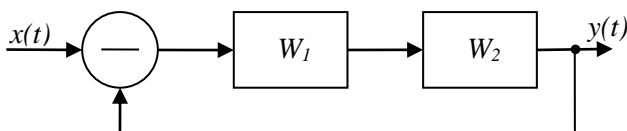
системы  $W_{ЭТ} = 11$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плот-

ность полезного сигнала  $S_U = \frac{48}{1+\omega^2}$ , спектральная плотность поме-

хи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 11$ , сиг-  
нал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{10}{0,02p+1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

### Вариант №12

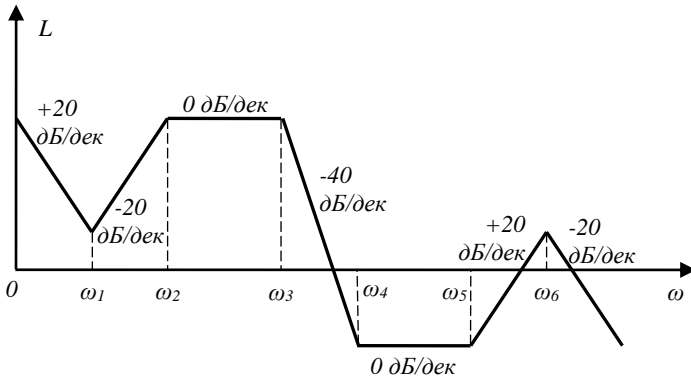
1. Найти переходную функцию линейной САУ, если переда-  
точная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{2}{(0,001p+1)(0,025p+1)^2}.$$

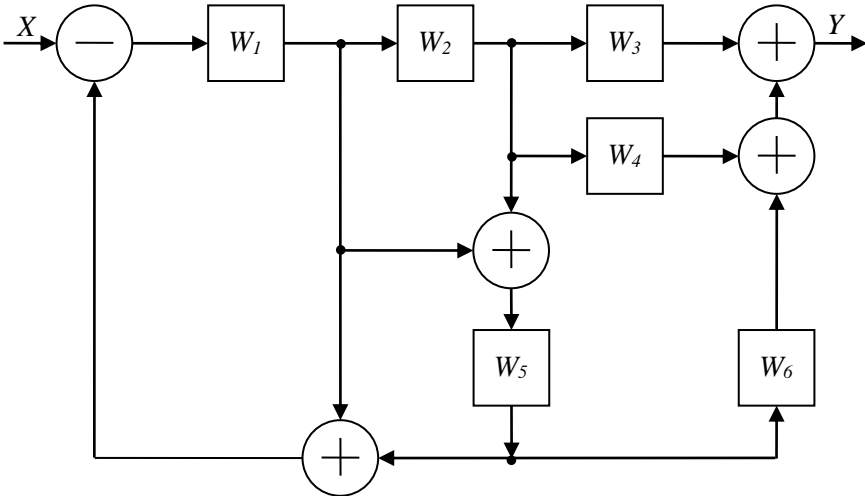
По переходной функции определить показатели качества про-  
цесса управления.

2. Найти передаточную функцию системы асимптотической  
ЛАЧХ и построить соответствующую ей ФЧХ.





3. Найти передаточную функцию  $W_X$  по структурной схеме:



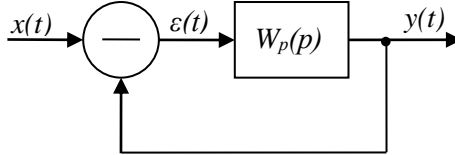
4. Найти значение  $k$ , при котором система устойчива, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{12}{2p^4 + 5p^3 + 2p^2 + 4p + k}.$$

5. Построить границу  $D$ -разбиения по параметрам  $a$  и  $b$  и найти область устойчивости системы, если передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{12(0,1p+1)}{40p^4 + 3p^3 + bp^2 + ap + 10}.$$

6. Найти ошибку установившегося режима  $\varepsilon(t)$  и выходной сигнал в установившемся режиме  $y(t)$ .

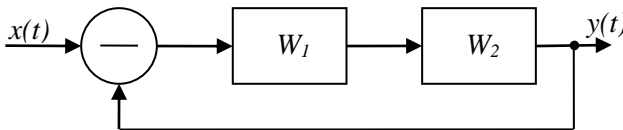


$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4, \quad W_p(p) = \frac{5}{0,1p^3 + 2p^2 + p + 5}.$$

7. Дать определение ошибки САУ, работающей при наличии помехи, и определить спектральную плотность ошибки  $S_\Lambda(\omega)$ , если передаточная функция системы имеет вид  $W(p) = \frac{12}{0,4p+1}$ , спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{1}{3+\omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = \frac{1}{2+\omega^2}$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 12$ , сигнал и помеха некоррелированы.

8. Найти оптимальную передаточную функцию устойчивой САУ, работающей при наличии помехи, если спектральная плотность полезного сигнала  $S_U = \frac{45}{4+\omega^2}$ , спектральная плотность помехи  $S_F = 1$ , передаточная функция эталонной системы  $W_{ЭТ} = 12$ , сигнал и помеха некоррелированы.

9. Найти значение  $\tau$ , при котором система устойчива.



$$W_1 = \frac{10}{0,01p+1}, \quad W_2 = e^{-p\tau}.$$

Учебное издание

*Скворцов Борис Владимирович,  
Паршина Александра Валерьевна*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
РАДИОАВТОМАТИКИ**

*Учебное пособие*

Редактор Т.К. К р е т и н и н а  
Компьютерная верстка Л.Р. Д м и т р и е н к о

Подписано в печать 30.11.2018. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печ. л. 12,25.  
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 28(Р5У)/2018.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Изд-во Самарского университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

