

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР**

**КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА**

Ю. М. АРЫШЕНСКИЙ, В. В. УВАРОВ, В. Ю. НЕНАШЕВ

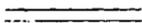
**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
РАСЧЕТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
КУЗНЕЧНО-ШТАМПОВОЧНОГО ПРОИЗВОДСТВА**

Учебное пособие по курсу «Обработка металла давлением»

**Рассмотрено и утверждено редакционным советом института
12 января 1972 года**

В учебном пособии изложены некоторые положения теории обработки металлов давлением с учетом анизотропии материала. Показано их применение при технологических расчетах ряда процессов холодной и горячей штамповки. В нем рассмотрены, главным образом, те вопросы, которые недостаточно полно изложены в изданной литературе.

Пособие является дополнением к существующим учебникам и предназначено для студентов старших курсов и аспирантов.



Ответственный редактор — В. А. Башлыков
Рецензенты — проф. М. И. Разумихин,
проф. Я. Финкельштейн

ВВЕДЕНИЕ

В Директивах XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—75 годы отмечается, что необходимо развивать высшее образование в соответствии с требованиями научно-технического прогресса, повышать качество подготовки будущих специалистов. Эти задачи, в частности, вызывают необходимость улучшения теоретической подготовки студентов по тем дисциплинам, которые лежат в основе их квалификации. Следовательно, кроме лекций, излагающих основы теории, требуются и такие, которые отражали бы постановку более общих (проблемных) вопросов, позволили бы глубже изучить современные методы, увидеть их сильные и слабые стороны.

Этому, в основном, и посвящено предлагаемое пособие. Оно расширяет и обобщает некоторые вопросы, недостаточно полно изложенные в учебниках, в духе их практического применения в технологических расчетах обработки металлов давлением. Известно, что при решении задач обработки металлов давлением используются основные положения теории пластичности и от того, насколько она разработана, зависит уровень проводимых расчетов.

Теория пластичности в настоящее время является одной из наиболее бурно развивающихся областей механики сплошных сред. С одной стороны, расширяется область применения теории, с другой — происходит все более глубокое осмысливание ее основ. В частности, в СССР и за рубежом большое внимание уделяется изучению вопросов, связанных с теорией неоднородных и анизотропных тел, т. е. тел, которые более реально отражают действительное состояние металла во время его обработки.

Так, если рассматривать анизотропию (неодинаковость свойств в различных направлениях), то она присуща большинству выпускаемых полуфабрикатов (листы, трубы, профили

и др.). В последние годы появился ряд новых материалов (особенно широко используемых в конструкциях летательных аппаратов), у которых это свойство выражено настолько резко, что использование постулата изотропии приводит к грубым ошибкам при расчетах.

Исследования, проводимые в этой области, позволяют изложить некоторые вопросы обработки давлением и указать их практическое применение не в чистом виде, а с более общих позиций теории пластичности анизотропных сред.



Часть I. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Глава 1.1. ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРЕ

Тензорный анализ нашел широкое применение при изучении основ механики сплошных сред, кристаллографии и многих других разделов теоретических и технических дисциплин.

Тензор характеризуется определенным рангом (валентностью) [1]. Наиболее простым является тензор нулевого ранга. Он представляет собой скалярную величину и его единственная компонента a не меняет своего значения при преобразовании базиса (координатной системы). Поэтому тензор нулевого ранга называют также инвариантом (т. е. неизменным).

Вектор-тензор первого ранга можно задать тремя числами a_i , которые при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой преобразуются по формулам $a'_i = \alpha_{ij} a_j$, где α_{ij} — косинусы углов между новыми и старыми осями. Два повторяющихся индекса означают суммирование от 1 до 3. В развернутом виде можно записать

$$a'_1 = a_1 \cos(1'1) + a_2 \cos(1'2) + a_3 \cos(1'3),$$

$$a'_2 = a_1 \cos(2'1) + a_2 \cos(2'2) + a_3 \cos(2'3),$$

$$a'_3 = a_1 \cos(3'1) + a_2 \cos(3'2) + a_3 \cos(3'3).$$

Тензором второго ранга называется любая величина, определяемая девятью числами a_{ij} в декартовой системе координат, которые при преобразовании базиса меняются по следующему закону:

$$a_{i'j'} = \alpha_{ii'} \alpha_{jj'} a_{ij}.$$

Коэффициенты a_{ij} можно представить в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяют тензоры третьего, четвертого и т. д. рангов в пространстве любого числа измерений.

В общем случае, для того чтобы совокупность величин $a_{ijk\dots m}$, зависящая от выбора базиса, была тензором, необходимо и достаточно, чтобы при переходе от одного ортонормированного базиса к другому, она изменялась по закону

$$a_{i'j'k'\dots m'} = a_{i't}a_{j'u}a_{k'v}\dots a_{m'm}a_{ijk\dots m}.$$

Тензорный анализ оказался очень полезным при изучении свойств кристаллов и поликристаллических однородных тел. Различают два типа свойств. К первому относят свойства, не зависящие от направления (плотность, теплоемкость и др.). Описать их можно скалярными величинами.

Свойства второго типа зависят от направления в материале, при этом тело считается анизотропным по отношению к ним. Они описываются тензорными величинами второго и более высоких рангов. В некоторых случаях может оказаться, что отдельные характеристики, относящиеся ко второму типу, для конкретного материала будут одинаковыми во всех направлениях. Такой материал называют изотропным по отношению к ним. В качестве примера можно указать на модули упругости и пластичности изотропных сред, хотя в общем случае — это свойства второго типа.

При использовании тензорного анализа следует также различать полевые и материальные тензоры. Первые не зависят от рассматриваемой среды и ее симметрии. К ним, в частности, относятся тензоры напряжений и деформаций. Один из них описывает внешнее воздействие на тело, а второй — реакцию на это воздействие.

Материальные тензоры характеризуют свойства тела в зависимости от направления. Поэтому, например, анизотропия механических свойств может быть охарактеризована только материальными тензорами.

В работе Е. К. Ашкенази [2] отмечается, что напряженное состояние может быть изотропным (гидростатическое давление), однако анизотропное тело изменит свою форму, так как его свойства в разных направлениях различны. При этом, математически, полевые тензоры напряжений и деформаций окажутся связанными между собой материальным тензором.

1.2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Существующие в настоящее время теории пластичности можно разделить на две группы.

К первой относятся теории деформационного типа, устанавливающие зависимости между компонентами напряжений и деформаций.

Вторая группа — это теории течения. Они рассматривают связи между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений. В частном случае используют зависимости скоростей деформаций от напряжений.

Каждая из теорий имеет определенную, наиболее целесообразную, область применения. Например, при анализе большинства технологических процессов, где не требуется строгого математического решения, широкое распространение получила деформационная теория, точнее теория малых упруго-пластических деформаций. В работе [3] отмечено, что деформационная теория позволяет упростить метод решения краевых задач, поскольку она исключает необходимость затруднительного интегрирования вдоль всего пути деформирования. В данном пособии основное внимание уделено расчету технологических процессов, поэтому деформационная теория взята за основу.

Теория малых упруго-пластических деформаций в случае изотропного тела описывается [4]:

а) тремя уравнениями статического равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} = 0;$$

б) шестью геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right);$$

в) шестью физическими уравнениями, которые могут иметь различную форму записи. Например,

$$\sigma_{jk} - \sigma_{ср} \delta_{jk} = \frac{2}{3} E' \varepsilon_{jk},$$

где $\sigma_{ср}$ — среднее напряжение; $E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ — модуль пластичности, задаваемый в виде функциональной связи между интенсивностью напряжений σ_i и деформаций $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$;

$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$ — символ Кронекера;

г) выражением при интенсивности деформаций

$$\varepsilon_j = \left(\frac{2}{3} e_{jk} e_{jk} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где e_{jk} — компоненты девiatorа деформаций.

Всего имеется семнадцать уравнений с семнадцатью неизвестными.

Если рассматривать состояние равновесия и не использовать компоненты смещения, то задачу можно свести к разрешению четырнадцати уравнений с четырнадцатью неизвестными. Здесь взамен шести геометрических уравнений используется первая группа уравнений неразрывности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Иногда вместо шести физических уравнений принимается одно уравнение — условие пластичности. Его форма определяется принятой гипотезой начала пластической деформации.

Рассмотрим указанные группы уравнений. Очевидно, что они, отражая разные стороны процесса пластического деформирования, записаны с помощью тензоров различного типа. Так, например, условия равновесия (п. а), условия неразрывности, геометрические соотношения (п. б) выражены с помощью полевых тензоров. Это объясняется тем, что перечисленные уравнения не отражают состояния тела (упругое, пластическое, вязко-пластическое и т. д.) и его симметрию. Следовательно, они будут общими для изотропных и анизотропных сред.

Иначе обстоит дело с физическими уравнениями (п. в). Они содержат как полевые тензоры (напряжений и деформаций), так и скалярную величину $\frac{2}{3} E'$, которая является частным случаем материального тензора. Уравнения связи, записанные в форме (в) или аналогичной ей, действительны только для изотропных тел и при анизотропном материале применяться не могут.

Поэтому, прежде чем говорить об использовании основных уравнений теории пластичности в технологических расчетах обработки давлением, необходимо установить возможные формы записи условия пластичности и связи между напряжениями и деформациями, когда металл является анизотропным.

1.3. НЕКОТОРЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

§ 1. Сущность анизотропии и ее виды

Анизотропия связана с физическим строением металлов и сплавов. Она имеет двойственную природу: «Кристаллографическую», вызванную преимущественной ориентировкой кристаллографических направлений при обработке, и «Механическую», обусловленную вытянутостью зерен и неметаллических включений [5]. При относительно малых степенях деформации преобладает механическая анизотропия, при больших — оба вида.

Преимущественная ориентировка кристаллографических направлений относительно внешних деформирующих сил образует текстуру деформации. Слабое ее проявление может наблюдаться при 5—10% деформации. Максимальная же четкость текстуры достигается при деформациях порядка 70—90% [6]. Текстура и степень ее совершенства определяются в первую очередь типом решетки, а затем структурой, химическим составом и схемой деформации. Она характеризуется осью (ориентировкой направления) и плоскостью (ориентировкой определенных плоскостей в кристалле). Например, текстура волочения определяется только осью, в то время как при прокатке большинство зерен устанавливается таким образом, что определенная кристаллографическая плоскость становится параллельно

плоскости прокатки (например, листа), а определенное кристаллографическое направление располагается вдоль проката.

При рекристаллизации первоначальная преимущественная ориентация в одних случаях уничтожается, в других сохраняется, а иногда преобразуется в текстуру рекристаллизации, образование которой также вызывает анизотропию свойств.

В самом общем случае анизотропия может быть криволинейной, однако металлические тела обладают определенной симметрией механических свойств. Наиболее важными для практики являются два случая симметрии: ортогональная анизотропность и трансверсальная изотропность.

В случае ортогональной анизотропности через каждую точку тела можно провести три плоскости симметрии механических свойств. Эти тела называют также ортотропными. У трансверсально изотропного (транстропного) тела через каждую точку проходит плоскость, в которой все направления эквивалентны.

Например, если в плоскости листа свойства одинаковы, но различные с его толщиной, то лист будет считаться трансверсально изотропным. Если же и в плоскости свойства разные, то наблюдается случай ортотропного тела.

§ 2. Энергетическое условие пластичности Мизеса и его выражение через технические константы

Общий случай

Характерной особенностью любого условия пластичности является наличие в нем, кроме компонент напряжений, величин, отражающих свойства материала. Поэтому условие текучести будет физически обоснованным только тогда, когда его можно представить в виде общего инварианта как тензора напряжений (девиатора напряжений), так и материального тензора. Это затрудняет разработку критериев текучести и их использование в расчетах.

Из всех предложенных гипотез начала пластической деформации анизотропных сред наибольшее распространение получило условие Р. Мизеса [7], хотя самым автором оно и не было выражено через технические константы. В тензорной форме его можно представить так

$$F = \frac{1}{2} \kappa_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{lm}. \quad (1.1)$$

Тогда в развернутом виде оно запишется следующим образом:

$$F = \frac{1}{2} \left[\kappa_{1111} \sigma_{11}^2 + \kappa_{2222} \sigma_{22}^2 + \kappa_{3333} \sigma_{33}^2 + 2(\kappa_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + \right. \\ \left. + \kappa_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + \kappa_{3311} \sigma_{33} \sigma_{11}) + 4(\kappa_{1212} \sigma_{12}^2 + \kappa_{2323} \sigma_{23}^2 + \right. \\ \left. + \kappa_{3131} \sigma_{31}^2) + 4(\kappa_{1112} \sigma_{11} \sigma_{12} + \kappa_{1123} \sigma_{11} \sigma_{23} + \kappa_{1131} \sigma_{11} \sigma_{31} + \right. \\ \left. + \kappa_{2212} \sigma_{22} \sigma_{12} + \kappa_{2223} \sigma_{22} \sigma_{23} + \kappa_{2231} \sigma_{22} \sigma_{31} + \kappa_{3312} \sigma_{33} \sigma_{12} + \right.$$

$$+ \kappa_{3323} \sigma_{33} \sigma_{23} + \kappa_{3331} \sigma_{33} \sigma_{31} + \delta (\kappa_{1226} \sigma_{12} \sigma_{23} + \kappa_{2331} \sigma_{23} \sigma_{31} + \kappa_{3112} \sigma_{31} \sigma_{12}) = \text{const (inv)}. \quad (1.1a)$$

Здесь $\{\sigma_{ij}\}$, $\{\sigma_{lm}\}$ — тензоры напряжений второго ранга, а $\{\kappa_{ijklm}\}$ — материальный тензор четвертого ранга, у которого наблюдается следующая симметрия:

$$\begin{aligned} \kappa_{ijklm} &= \kappa_{jilm} \\ \kappa_{ijklm} &= \kappa_{ijmli} \\ \kappa_{ijklm} &= \kappa_{mlij}. \end{aligned}$$

В условии пластичности Р. Мизеса принято допущение о том, что добавление гидростатического давления не влияет на наступление текучести материала. Поэтому

$$\begin{aligned} \kappa_{1111} + \kappa_{1122} + \kappa_{3311} &= 0 \\ \kappa_{2222} + \kappa_{1122} + \kappa_{2233} &= 0 \\ \kappa_{3333} + \kappa_{3311} + \kappa_{2233} &= 0 \\ \kappa_{1112} + \kappa_{2212} + \kappa_{3312} &= 0 \\ \kappa_{1123} + \kappa_{2223} + \kappa_{3323} &= 0 \\ \kappa_{1131} + \kappa_{2231} + \kappa_{3331} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При переходе к новым осям координат составляющие материального тензора преобразуются по указанным ранее формулам

$$\kappa'_{ijklm} = \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} \alpha_{l'l} \alpha_{m'm} \kappa_{ijklm}, \quad (1.3)$$

где $\alpha_{i'i}$ — косинусы углов между новыми и старыми осями.

Например, в случае поворота вокруг произвольной оси z имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \kappa'_{1111} &= \kappa_{1111} \cos^4 \psi + \kappa_{2222} \sin^4 \psi + 2(\kappa_{1122} + 2\kappa_{1212}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \\ &\quad + 2(\kappa_{1112} \cos^2 \psi + \kappa_{2212} \sin^2 \psi) \sin 2\psi \\ \kappa'_{2222} &= \kappa_{1111} \sin^4 \psi + \kappa_{2222} \cos^4 \psi + 2(\kappa_{1122} + 2\kappa_{1212}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \\ &\quad - 2(\kappa_{1112} \sin^2 \psi + \kappa_{2212} \cos^2 \psi) \sin 2\psi \\ \kappa'_{1122} &= \kappa_{1122} + [\kappa_{1111} + \kappa_{2222} - 2(\kappa_{1122} + 2\kappa_{1212})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \\ &\quad + (\kappa_{2212} - \kappa_{1112}) \sin 2\psi \cos 2\psi \\ \kappa'_{1212} &= \kappa_{1212} + [\kappa_{1111} + \kappa_{2222} - 2(\kappa_{1122} + 2\kappa_{1212})] \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \\ &\quad + (\kappa_{2212} - \kappa_{1122}) \sin 2\psi \cos 2\psi \\ \kappa'_{1112} &= \frac{1}{2} [\kappa_{2222} \sin^2 \psi - \kappa_{1111} \cos^2 \psi + (\kappa_{1122} + 2\kappa_{1212}) \cos 2\psi] \sin 2\psi + \\ &\quad + \kappa_{1112} \cos^2 \psi (\cos^2 \psi - 3\sin^2 \psi) + \kappa_{2212} \sin^2 \psi (3\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \\ \kappa'_{2212} &= \frac{1}{2} [\kappa_{2222} \cos^2 \psi - \kappa_{1111} \sin^2 \psi - (\kappa_{1122} + 2\kappa_{1212}) \cos 2\psi] \sin 2\psi + \\ &\quad + \kappa_{1112} \sin^2 \psi (3\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) + \kappa_{2212} \cos^2 \psi (\cos^2 \psi - 3\sin^2 \psi) \\ \kappa'_{3333} &= \kappa_{3333} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
\kappa'_{2233} &= \kappa_{2233} \cos^2\psi + \kappa_{3311} \sin^2\psi - \kappa_{3312} \sin 2\psi \\
\kappa'_{3311} &= \kappa_{2233} \sin^2\psi + \kappa_{3311} \cos^2\psi + \kappa_{3312} \sin 2\psi \\
\kappa'_{3312} &= \frac{1}{2} (\kappa_{2233} - \kappa_{3311}) \sin 2\psi + \kappa_{3312} \cos 2\psi = \\
&= \frac{1}{2} (\kappa_{1111} - \kappa_{2222}) \sin 2\psi - (\kappa_{1112} + \kappa_{2212}) \cos 2\psi \quad (1.4) \\
\kappa'_{2323} &= \kappa_{2323} \cos^2\psi + \kappa_{3131} \sin^2\psi - \kappa_{2331} \sin 2\psi \\
\kappa'_{3131} &= \kappa_{2323} \sin^2\psi + \kappa_{3131} \cos^2\psi + \kappa_{2331} \sin 2\psi \\
\kappa'_{2331} &= \frac{1}{2} (\kappa_{2323} - \kappa_{3131}) \sin 2\psi + \kappa_{2331} \cos 2\psi.
\end{aligned}$$

Остальные восемь формул не выписываем, так как в дальнейшем они не будут использованы.

Отметим величины, остающиеся при этом инвариантными:

$$\begin{aligned}
i_0 &= \kappa_{1111} + \kappa_{2222} + 2\kappa_{1122} \\
i_1 &= \kappa_{1212} + \kappa_{1122} \\
i_2 &= i_0 + 2i_1 = \kappa_{1111} + \kappa_{2222} + 2\kappa_{1212} \quad (1.5) \\
i_3 &= \kappa_{2233} + \kappa_{3311} = -i_0 \\
i_4 &= \kappa_{2323} + \kappa_{3131} \\
\kappa_{3333} &= i_0
\end{aligned}$$

Для установления связи между напряжениями и деформациями воспользуемся ассоциированным законом течения, согласно которому условие пластичности и скорости или приращения компонент деформации оказываются связанными между собой [4]

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.6)$$

где f — рассматриваемое условие пластичности, а $d\lambda$ — неопределенный множитель Лагранжа, постоянный для данных значений деформаций.

Продифференцировав условие пластичности Р. Мизеса, получим

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{11} &= d\lambda [\kappa_{1111}\sigma_{11} + \kappa_{1122}\sigma_{22} + \kappa_{3311}\sigma_{33} + 2(\kappa_{1112}\sigma_{12} + \kappa_{1123}\sigma_{23} + \kappa_{1131}\sigma_{31})] \\
d\varepsilon_{22} &= d\lambda [\kappa_{1122}\sigma_{11} + \kappa_{2222}\sigma_{22} + \kappa_{2233}\sigma_{33} + 2(\kappa_{2212}\sigma_{12} + \kappa_{2223}\sigma_{23} + \kappa_{2231}\sigma_{31})] \\
d\varepsilon_{33} &= d\lambda [\kappa_{3311}\sigma_{11} + \kappa_{2233}\sigma_{22} + \kappa_{3333}\sigma_{33} + 2(\kappa_{3312}\sigma_{12} + \kappa_{3323}\sigma_{23} + \kappa_{3331}\sigma_{31})] \quad (1.7) \\
d\varepsilon_{12} &= d\lambda [\kappa_{1112}\sigma_{11} + \kappa_{2212}\sigma_{22} + \kappa_{3312}\sigma_{33} + 2(\kappa_{1212}\sigma_{12} + \kappa_{1223}\sigma_{23} + \kappa_{1231}\sigma_{31})] \\
d\varepsilon_{23} &= d\lambda [\kappa_{1123}\sigma_{11} + \kappa_{2223}\sigma_{22} + \kappa_{3323}\sigma_{33} + 2(\kappa_{1223}\sigma_{12} + \kappa_{2323}\sigma_{23} + \kappa_{2331}\sigma_{31})] \\
d\varepsilon_{31} &= d\lambda [\kappa_{1131}\sigma_{11} + \kappa_{2231}\sigma_{22} + \kappa_{3331}\sigma_{33} + 2(\kappa_{3112}\sigma_{12} + \kappa_{2331}\sigma_{23} + \kappa_{3131}\sigma_{31})].
\end{aligned}$$

Здесь $\{d\varepsilon_{ij}\}$ — тензор приращения пластических деформаций. При дифференцировании учтено, что σ_{ij} и σ_{ji} физически различны, хотя и равны по величине.

В случае простого нагружения, когда отношение компонент напряжений не изменяется, между приращениями деформаций наблюдается линейная зависимость типа $d\epsilon_1 = \text{const} d\epsilon_2$. Имеется она и при конечных деформациях, если компоненты k_{ijklm} сохраняют свое значение. В этом случае приращения деформаций можно заменить деформациями, а $d\lambda$ поменять на λ .

Ортотропное тело

Для металлических полуфабрикатов (листов, лент, труб и др.) характерна ортогональная анизотропия свойств материала. Поэтому, основные уравнения теории пластичности анизотропных сред необходимо рассмотреть применительно к этому случаю. Запишем условие пластичности через составляющие тензора анизотропии в главных осях

$$F = \frac{1}{2} [K_{1111}\sigma_{11}^2 + K_{2222}\sigma_{22}^2 + K_{3333}\sigma_{33}^2 + 2(K_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + K_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + K_{3311}\sigma_{33}\sigma_{11}) + 4(K_{1212}\sigma_{12}^2 + K_{2323}\sigma_{23}^2 + K_{3131}\sigma_{31}^2)] = \text{const (inv)} \quad (1.8)$$

При этом уравнения связи (1.7) преобразуются:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \lambda (K_{1111}\sigma_{11} + K_{1122}\sigma_{22} + K_{3311}\sigma_{33}) \\ \epsilon_{22} &= \lambda (K_{1122}\sigma_{11} + K_{2222}\sigma_{22} + K_{2233}\sigma_{33}) \\ \epsilon_{33} &= \lambda (K_{3311}\sigma_{11} + K_{2233}\sigma_{22} + K_{3333}\sigma_{33}) \\ \epsilon_{12} &= 2\lambda K_{1212}\sigma_{12} \\ \epsilon_{23} &= 2\lambda K_{2323}\sigma_{23} \\ \epsilon_{31} &= 2\lambda K_{3131}\sigma_{31}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $\{K_{ijklm}\}$ — материальный тензор, выраженный через главные составляющие.

Для нахождения его инвариантов используем единичный тензор $\{\delta_{ik}\}$, где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ и материальный тензор изотропного тела $\{\delta_{ijklm}\}$, у которого $\delta_{iiii} = 1$, $\delta_{iiij} = -1/2$ (при $i \neq j$), $\delta_{ijij} = 1/4$ (при $i \neq j$), а остальные составляющие равны нулю. Это очевидно из условия пластичности изотропного тела.

С помощью формул (1.3) можно показать, что составляющие тензора $\{\delta_{ijklm}\}$ не изменяются при повороте осей, т. е. он играет роль шарового тензора.

Известно [1], что свертка тензоров до скаляра представляется собой инвариант. Проводя эту операцию, получаем

$$\begin{aligned} I_0 &= K_{ijklm}\delta_{ijklm} = K_{1111} + K_{2222} + K_{3333} + 2(K_{1122} + K_{2233} + K_{3311}) = \\ &= K_{1111} + K_{2222} + K_{3333} + 2(K_{1122} + K_{2233} + K_{3311}) = 0 \\ I &= K_{ijklm}\delta_{ijilm} = K_{1111} + K_{2222} + K_{3333} - (K_{1122} + K_{2233} + K_{3311}) + \\ &+ 3(K_{1212} + K_{2323} + K_{3131}) = K_{1111} + K_{2222} + K_{3333} - (K_{1122} + K_{2233} + \\ &+ K_{3311}) + 3(K_{1212} + K_{2323} + K_{3131}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$I_1 = \frac{1}{3} (I - I_0) = \kappa_{1212} + \kappa_{2323} + \kappa_{3131} - \kappa_{1122} - \kappa_{2233} - \kappa_{3311} = \\ = K_{1212} + K_{2323} + K_{3131} - K_{1122} - K_{2233} - K_{3311}.$$

Отметим, что равенство I_0 нулю вытекает из (1.2).

Для практического использования уравнений теории необходимо составляющие материального тензора выразить через технические константы. По аналогии с теорией упругости анизотропных сред [16] в качестве таких констант примем коэффициенты поперечной деформации $\mu_{\text{ек}}$. Здесь первый индекс показывает направление поперечной деформации, а второй — направление действия силы. Причем показатели $\mu_{\text{ек}}$ определяются при линейном напряженном состоянии. Поэтому из (1.9) получаем

$$\frac{K_{1122}}{K_{1111}} = -\mu_{21}, \quad \frac{K_{1122}}{K_{2222}} = -\mu_{12}, \quad \frac{K_{3311}}{K_{3333}} = -\mu_{13}, \\ \frac{K_{3311}}{K_{1111}} = -\mu_{31}, \quad \frac{K_{2233}}{K_{2222}} = -\mu_{32}, \quad \frac{K_{2233}}{K_{3333}} = -\mu_{23}. \quad (1.11)$$

Используя формулы (1.2) и (1.11), можно установить следующую связь между коэффициентами:

$$\mu_{21} + \mu_{31} = 1 \\ \mu_{32} + \mu_{12} = 1 \\ \mu_{13} + \mu_{23} = 1, \\ \mu_{13}\mu_{21}\mu_{32} = \mu_{12}\mu_{31}\mu_{23}, \quad (1.12)$$

Отсюда очевидно, что независимыми могут быть только два показателя, например, μ_{12} и μ_{21} , а остальные выражаются через них.

Из соотношений (1.11) и (1.12) следует, что

$$K_{2233} = \frac{1-\mu_{12}}{\mu_{12}} K_{1122}, \quad K_{3311} = \frac{1-\mu_{21}}{\mu_{21}} K_{1122} \\ K_{1111} = -\frac{1}{\mu_{21}} K_{1122}, \quad K_{2222} = -\frac{1}{\mu_{12}} K_{1122} \\ K_{3333} = -\frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}{\mu_{12}\mu_{21}} K_{1122}. \quad (1.13)$$

Попутно заметим, что формулы (1.11), (1.12) и (1.13) справедливы не только в главных, но и в произвольных осях. Теперь остается определить коэффициенты K_{1122} , K_{1212} , K_{3131} и K_{2323} и тогда составляющие материального тензора будут найдены. Воспользуемся формулами преобразования (1.4), которые запишем для случая главных осей:

$$\kappa''_{1111} = K_{1111} \cos^4\varphi + K_{2222} \sin^4\varphi + 2(K_{1122} + 2K_{1212}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\ \kappa''_{2222} = K_{1111} \sin^4\varphi + K_{2222} \cos^4\varphi + 2(K_{1122} + 2K_{1212}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\ \kappa''_{1122} = K_{1122} + [K_{1111} + K_{2222} - 2(K_{1122} + 2K_{1212})] \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\ \kappa''_{1212} = K_{1212} + [K_{1111} + K_{2222} - 2(K_{1122} + 2K_{1212})] \sin^2\varphi \cos^2\varphi$$

$$\kappa_{1112} = \frac{1}{2} [K_{2222} \sin^2 \varphi - K_{1111} \cos^2 \varphi + (K_{1122} + 2K_{1212}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi$$

$$\kappa''_{2212} = \frac{1}{2} [K_{2222} \cos^2 \varphi - K_{1111} \sin^2 \varphi - (K_{1122} + 2K_{1212}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi$$

$$\kappa''_{3333} = K_{3333}$$

$$\kappa''_{2233} = K_{2233} \cos^2 \varphi + K_{3311} \sin^2 \varphi$$

$$\kappa''_{3311} = K_{2333} \sin^2 \varphi + K_{3311} \cos^2 \varphi$$

(1.14)

$$\kappa_{3312} = \frac{1}{2} (K_{2233} - K_{3311}) \sin 2\varphi = \frac{1}{2} (K_{1111} - K_{2222}) \sin 2\varphi$$

$$\kappa''_{2323} = K_{2323} \cos^2 \varphi + K_{3131} \sin^2 \varphi$$

$$\kappa''_{3131} = K_{2323} \sin^2 \varphi + K_{3131} \cos^2 \varphi$$

$$\kappa''_{2331} = (K_{2323} - K_{3131}) \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$\kappa''_{1123} = \kappa''_{1131} = \kappa''_{2223} = \kappa''_{2231} = \kappa''_{3323} = \kappa''_{3331} = \kappa''_{3112} = \kappa''_{1223} = 0,$$

что следует из (1.3).

Здесь φ — угол поворота вокруг главной оси 3.

Если положить $\varphi = 45^\circ$, то из первых трех уравнений (1.14), получим

$$\kappa''_{1111} = \kappa''_{2222} = \frac{1}{4} (K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122}) + K_{1212},$$

$$\kappa''_{1122} = \frac{1}{4} (K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122}) - K_{1212}. \quad (1.15)$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{\kappa''_{1112}}{\kappa''_{1111}} = \frac{\kappa''_{1122}}{\kappa''_{2222}} = \frac{\frac{1}{4} (K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122}) - K_{1212}}{\frac{1}{4} (K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122}) + K_{1212}}$$

или

$$-\mu_{12}^{45^\circ} = -\mu_{21}^{45^\circ} - \nu_1 = \frac{\frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{21}} \right) - \frac{K_{1212}}{K_{1122}}}{\frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{21}} \right) + \frac{K_{1212}}{K_{1122}}}.$$

Тогда

$$K_{1212} = -K_{1122} \frac{1}{4} \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}{\mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}. \quad (1.16a)$$

До этого проводился поворот вокруг оси 3. Если рассмотреть преобразование коэффициентов при повороте последовательно около осей 1 и 2, то аналогично с (1.16a) можно получить

$$K_{2323} = -\frac{1}{4} K_{2223} \frac{\mu_{23} + \mu_{32} - 2\mu_{23}\mu_{32}}{\mu_{23}\mu_{32}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2}.$$

$$K_{3131} = -\frac{1}{4}K_{3311} \frac{\mu_{13} + \mu_{31} - 2\mu_{31}\mu_{13}}{\mu_{13}\mu_{31}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3}. \quad (1.16б)$$

С помощью (1.11) и (1.12) формулы (1.16б) преобразуются в

$$\begin{aligned} K_{2323} &= -\frac{1}{4}K_{1122} \frac{1}{\mu_{21}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \\ K_{3131} &= -\frac{1}{4}K_{1122} \frac{1}{\mu_{12}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3}. \end{aligned} \quad (1.16в)$$

Здесь μ_1 — коэффициент поперечной деформации под углом 45° к осям 1 и 2; μ_2 — коэффициент поперечной деформации под углом 45° к осям 2 и 3; μ_3 — коэффициент поперечной деформации под углом 45° к осям 3 и 1.

Затем, подставляя значения K_{ijlm} из формул (1.11) и (1.16) в выражение инварианта I_1 , найдем

$$K_{1122} = -4I_1 \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_{12}}, \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= 4(\mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{12}\mu_{21}) + (\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} + \\ &+ \mu_{12} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} + \mu_{21} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из формул (1.11), (1.13) и (1.17) получим:

$$\begin{aligned} K_{2233} &= -4I_1 \frac{\mu_{21}(1 - \mu_{12})}{\varphi_{12}}, \quad K_{3311} = -4I_1 \frac{\mu_{12}(1 - \mu_{21})}{\varphi_{12}} \\ K_{1111} &= 4I_1 \frac{\mu_{12}^2}{\varphi_{12}}; \quad K_{2222} = 4I_1 \frac{\mu_{21}^2}{\varphi_{12}} \\ K_{3333} &= 4I_1 \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_{12}}, \quad K_{2323} = I_1 \frac{\mu_{12}}{\varphi_{12}} \frac{1 + \mu_2}{1 - \mu_2} \\ K_{1212} &= I_1 \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_{12}} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}, \quad K_{3131} = I_1 \frac{\mu_{21}}{\varphi_{12}} \frac{1 + \mu_3}{1 - \mu_3}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Заметим, что для перехода $\{K_{ijlm}\}$ в тензор изотропного тела $\{\delta_{ijlm}\}$ при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_{ij} = 0,5$ необходимо принять

$$I_1 = \frac{15}{4}.$$

Итак, найдены все составляющие материального тензора в главных осях анизотропии, которые включают в себя пять технических констант μ_{12} , μ_{21} , μ_1 , μ_2 , μ_3 . В произвольных же осях составляющие тензора определяются формулами (1.3). За интенсивность напряжений примем следующий инвариант:

$$\sigma_i = \sqrt{2F}. \quad (1.20)$$

В развернутом виде он выглядит так:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{15}{\varphi_{12}}} \sqrt{\frac{\mu_{12}\sigma_{11}^2 + \mu_{21}\sigma_{22}^2 + [\mu_{12}(1-\mu_2) + \mu_2(1-\mu_{12})]\sigma_{33}^2 - 2}{[\mu_{12}\mu_{21}\sigma_{11}\sigma_{22} + \mu_{21}[(1-\mu_{12})\sigma_{22}\sigma_{33} + \mu_{12}(1-\mu_{21})\sigma_{33}\sigma_{11}] + \mu_{12}(1-\mu_{21}) + \mu_{21}(1-\mu_{12})] \times \frac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\sigma_{12}^2 + \mu_{12}\frac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\sigma_{23}^2 + \mu_{21}\frac{1+\mu_3}{1-\mu_3}\sigma_{31}^2}} \quad (1.20a)$$

или при использовании зависимостей (1.2)

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{15}{\varphi_{12}}} \mu_{12}\mu_{21} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 +} \\ &\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\right] \frac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\sigma_{12}^2 +} \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{1}{\mu_{21}} \frac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\sigma_{23}^2 + \frac{1}{\mu_{12}} \frac{1+\mu_3}{1-\mu_3}\sigma_{31}^2}. \end{aligned} \quad (1.20b)$$

Для определения интенсивности деформаций ε_i и множителя $\lambda = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$, используя формулы (1,2), преобразуем уравнения

связи следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} [\mu_{12}\mu_{21}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \mu_{12}(1 - \mu_{21})(\sigma_{11} - \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} [\mu_{12}\mu_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})(\sigma_{22} - \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \lambda \frac{15}{\varphi_{12}} [\mu_{12}(1 - \mu_{21})(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})(\sigma_{33} - \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{15}{\varphi_{12}} \lambda (\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}) \frac{1+\mu_1}{1-\mu_1} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \frac{15}{\varphi_{12}} \lambda \mu_{12} \frac{1+\mu_2}{1-\mu_2} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \frac{15}{\varphi_{12}} \lambda \mu_{21} \frac{1+\mu_3}{1-\mu_3} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Из этой системы уравнений и дополнительного соотношения

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) = 0$$

находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{22} &= \frac{\varphi_{12}}{15\lambda(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \varepsilon_{11} - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \varepsilon_{22} \right] \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= \frac{\varphi_{12}}{15\lambda(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} \right] \\ \sigma_{33} - \sigma_{11} &= \frac{\varphi_{12}}{15\lambda(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \left[\varepsilon_{33} - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \varepsilon_{11} \right]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Теперь подставим (1.22) в условие пластичности

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15}} \sqrt{\frac{1}{(1-\mu_{12}\mu_{21})^2} \left\{ \mu_{12}\mu_{21} \left[\varepsilon_{11} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) - \varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \right]^2 + \right.} \\
 &\rightarrow \sqrt{-\varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right)^2 + \mu_{21} \left(1 - \mu_{12} \left[\varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) - \varepsilon_{33} \right]^2 + \right.} \\
 &\quad \left. \rightarrow \sqrt{+ \mu_{12} (1 - \mu_{21}) \left[\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \right)^2 \right] + \right.} \\
 &\rightarrow \sqrt{+ 4 \frac{(1-\mu_4)}{(1+\mu_1)[1-\mu_{21}]\mu_{12} + \mu_{21}(1-\mu_{12})} \varepsilon_{12}^2 + 4 \frac{(1-\mu_2)}{(1+\mu_2)\mu_{12}} \varepsilon_{23}^2 + \right.} \\
 &\quad \left. \rightarrow \sqrt{+ 4 \frac{(1-\mu_3)}{(1+\mu_3)\mu_{21}} \varepsilon_{31}^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15}} \sqrt{\frac{1}{(1-\mu_{12}\mu_{21})^2} \left\{ \mu_{12}\mu_{21} \left[\varepsilon_{11} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) - \varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \right]^2 + \right.} \\
 &\quad \left. \rightarrow \sqrt{+ \mu_{21} (1 - \mu_{12}) \left[\varepsilon_{22} \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) - \varepsilon_{33} \right]^2 + \right.} \\
 &\quad \left. \rightarrow \sqrt{+ \mu_{12} (1 - \mu_{21}) \left[\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \right]^2 + \right.} \\
 &\quad \left. + \sqrt{+ \frac{4(1-\mu_1)}{(1+\mu_1)[\mu_{12}(1-\mu_{21}) + \mu_{21}(1-\mu_{12})]} \varepsilon_{12}^2 + \right.} \\
 &\quad \left. \rightarrow \sqrt{+ \frac{4(1-\mu_2)}{(1+\mu_2)\mu_{12}} \varepsilon_{23}^2 + \frac{4(1-\mu_3)}{(1+\mu_3)\mu_{21}} \varepsilon_{31}^2}. \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Если использовать условные постоянства объема, то запись можно упростить:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{\varphi_{12}}{15}} \sqrt{\frac{1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}} \right) + \right.} \\
 &\rightarrow \sqrt{+ \frac{4(1-\mu_1)\varepsilon_{12}^2}{(1+\mu_1)[\mu_{12}(1-\mu_{21}) + \mu_{21}(1-\mu_{12})]} + \frac{4(1-\mu_2)}{\mu_{12}(1+\mu_2)} \varepsilon_{23}^2 + \right.} \\
 &\quad \left. \rightarrow \sqrt{+ \frac{4(1-\mu_3)}{\mu_{21}(1+\mu_3)} \varepsilon_{31}^2}. \quad (1.23a)
 \end{aligned}$$

Если же необходимо иметь запись интенсивности деформаций в произвольных осях, то аналогичным путем с помощью (1.2) можно преобразовать формулы (1.1) и (1.7). Иногда поступают и иначе: из (1.20) и (1.9) найдем λ и ε_i в главных осях

$$\varepsilon_i^2 = A_{ijlm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{lm}. \quad (1.24)$$

Так как σ_i и λ — инварианты, то и $\varepsilon_i = \text{inv}$. Следовательно, из (1.24) заключаем, что $\{A_{ijlm}\}$ есть тензор 4-го ранга, а A_{ijlm} — его составляющие в главных осях. Поэтому для определения

составляющих тензора $\{a_{ijlm}\}$ в произвольных осях следует пользоваться формулами преобразования (1.3). В результате получим

$$\varepsilon_i^2 = a_{ijlm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{lm} \quad (1.25)$$

Случай ортотропного тела, когда напряжение σ_{33} совпадает с главной осью анизотропии

При анализе ряда операций листовой штамповки можно принять допущение о том, что напряжение, направленное по толщине материала, будет оставаться перпендикулярным плоскости полуфабриката или иметь небольшое отклонение, которым можно пренебречь. Наложение этого условия приведет к тому, что $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$.

Из (1.3), (1.4) и (1.14) следует, что

$$\kappa_{1123} = \kappa_{1131} = \kappa_{2223} = \kappa_{2231} = \kappa_{3331} = \kappa_{1223} = \kappa_{3112} = \kappa_{3323} = 0.$$

Тогда условие пластичности запишется так:

$$F = \frac{1}{2} [\kappa_{1111} \sigma_{11}^2 + \kappa_{2222} \sigma_{22}^2 + \kappa_{3333} \sigma_{33}^2 + 2(\kappa_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + \kappa_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + \kappa_{3311} \sigma_{33} \sigma_{11}) + 4\kappa_{1212} \sigma_{12}^2 + 4(\kappa_{1112} \sigma_{11} \sigma_{12} + \kappa_{2212} \sigma_{22} \sigma_{12} + \kappa_{3312} \sigma_{33} \sigma_{12})]. \quad (1.26)$$

Физические уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \lambda (\kappa_{1111} \sigma_{11} + \kappa_{1122} \sigma_{22} + \kappa_{3311} \sigma_{33} + 2\kappa_{1112} \sigma_{12}) \\ \varepsilon_{22} &= \lambda (\kappa_{1122} \sigma_{11} + \kappa_{2222} \sigma_{22} + \kappa_{2233} \sigma_{33} + 2\kappa_{2212} \sigma_{12}) \\ \varepsilon_{33} &= \lambda (\kappa_{3311} \sigma_{11} + \kappa_{2233} \sigma_{22} + \kappa_{3333} \sigma_{33} + 2\kappa_{3312} \sigma_{12}) \\ \varepsilon_{12} &= \lambda (\kappa_{1112} \sigma_{11} + \kappa_{2212} \sigma_{22} + \kappa_{3312} \sigma_{33} + 2\kappa_{1212} \sigma_{12}) \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{31} = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

В главных осях анизотропии будут иметь место выражения (1.20), (1.21), (1.23), если в них положить $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ и $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Например,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{15}{\varphi_{12}} \mu_{12} \mu_{21}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \dots} \\ &\rightarrow \sqrt{\dots + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) + \dots\right]} \\ &\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Однако применение формулы (1.28) при анализе операций листовой штамповки приводит к определенным затруднениям, так как значения μ_2 и μ_3 практически определить не удастся, следовательно, останется неизвестным коэффициент φ_{12} .

В этом случае можно предложить другой путь, т. е. использовать при выводе основных уравнений один из инвариантов I_4

i_1, i_2 (1.5). Например, возьмем инвариант $i_1 = \kappa_{1212} - \kappa_{1122} = K_{1212} - K_{1122}$. Подставляя в него значение K_{1212} из (1.16а), получим

$$K_{1122} = -4i_1 \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_1}, \quad (1.29)$$

где

$$\varphi_1 = 4\mu_{12}\mu_{21} + (\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}. \quad (1.30)$$

Остальные составляющие материального тензора можно получить из формул (1.19) при замене в них инварианта I_1 на i_1 и коэффициента φ_{12} на φ_1 :

$$\begin{aligned} K_{2233} &= -4i_1 \frac{\mu_{21}(1 - \mu_{12})}{\varphi_1}; & K_{3311} &= -4i_1 \frac{\mu_{12}(1 - \mu_{21})}{\varphi_1} \\ K_{1111} &= 4i_1 \frac{\mu_{12}}{\varphi_1}; & K_{2222} &= 4i_1 \frac{\mu_{21}}{\varphi_1} \\ K_{3333} &= 4i_1 \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_1} \\ K_{1212} &= i_1 \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_1} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для превращения уравнений теории в уравнения изотропного тела при $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu_1 = 0,5$ необходимо положить $i_1 = \frac{5}{4}$. Подставляя найденное значение коэффициентов K_{ijklm} , получим

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{5}{\varphi_1} \mu_{12}\mu_{21}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 +} \\ &\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) +} \right. \\ &\left. \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)}\right] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{\varphi_1}{5}} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}}\right) \frac{1}{1 - \mu_{21}\mu_{12}} +} \\ &+ \sqrt{\frac{4(1 - \mu_1)\varepsilon_{12}^2}{(1 + \mu_1)[\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})]}}; \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{5}{\varphi_1} [\mu_{12}\mu_{21}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \mu_{12}(1 - \mu_{21})(\sigma_{11} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{5}{\varphi_1} [\mu_{12}\mu_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})(\sigma_{22} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{5}{\varphi_1} [\mu_{12}(1 - \mu_{21})(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})(\sigma_{33} - \sigma_{22})] \quad (1.34)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{5}{\varphi_1} [\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})] \sigma_{12}.$$

Весь вывод основных соотношений сделан в предположении, что существует тензор анизотропии (материальный тензор).

Для подтверждения этого положения необходимо экспериментально доказать существование инвариантов, неиспользованных в записях уравнений связи, выражений интенсивности напряжений и деформаций. В подтверждении теории проверим инвариант i_0 . Запишем

$i_0 = \kappa_{11\#1} + \kappa_{2222} + 2\kappa_{1122} = \kappa_{3333} = K_{1111} + K_{2222} + 2K_{1122} = K_{3333}$ через технические контакты

$$i_0 = 4i_1 \frac{\mu'_{12} + \mu'_{21} - 2\mu''_{21}\mu'_{12}}{\varphi_2} = 4i_1 \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}{\varphi_1},$$

где

$$\varphi_2 = 4\mu'_{12}\mu'_{21} + (\mu'_{12} + \mu'_{21} - 2\mu''_{12}\mu'_{21}) \frac{\mu''_{12} + \mu''_{21} + 2\mu''_{12}\mu''_{21}}{\mu''_{12} + \mu''_{21} - 2\mu''_{12}\mu''_{21}};$$

μ'_{21} и μ'_{12} — коэффициенты поперечной деформации в произвольных осях;

μ_{21}'' и μ_{12}'' — коэффициенты поперечной деформации под углом 45° к произвольным осям.

Из-за наличия симметрии свойств в полуфабрикатах, полученных прокаткой (например, листах) i_0 можно записать в следующем виде:

$$i_0 = 4i_1 \frac{\mu_\varphi + \mu_{90-\varphi} - 2\mu_\varphi \mu_{90-\varphi}}{\varphi_2} = 4i_1 \frac{\mu_{21} + \mu_{12} - 2\mu_{21}\mu_{12}}{\varphi_1},$$

где

$$\varphi_2 = 4\mu_\varphi \mu_{90-\varphi} + (\mu_\varphi + \mu_{90-\varphi} - 2\mu_\varphi \mu_{90-\varphi}) \frac{\mu_{\varphi+45^\circ} + \mu_{\varphi-45^\circ} + 2\mu_{\varphi+45^\circ} \mu_{\varphi-45^\circ}}{\mu_{\varphi+45^\circ} + \mu_{\varphi-45^\circ} - 2\mu_{\varphi+45^\circ} \mu_{\varphi-45^\circ}}.$$

Здесь должно выполняться соотношение

$$\mu_\varphi = \mu_{-\varphi} = \mu_{180-\varphi}.$$

В качестве оси отсчета можно выбрать направление проката. Используя данные наших экспериментов и экспериментов Тульского политехнического института [34], проведем проверку i_0 на различных материалах при испытаниях, когда $\varphi = 22,5^\circ$ и $\varphi = 30^\circ$:

Марка материала	μ_{21} (μ_{90°)	μ_{15°	μ_{30°	μ_{45°	μ_{60°	μ_{75°	μ_{12} (μ_{90°)	φ_1	φ_2	i_0 в главн. осях	i_0 в произв. осях
Д16АМ	0,36	0,41	0,45	0,46	0,44	0,38	0,34	1,71	1,93	1,31	1,30
ВТ1—2	0,73	0,64	0,70	0,78	0,82	0,77	0,73	5,36	4,43	0,41	0,41
1Х18Н10Т	0,47	0,45	0,5	0,52	0,51	0,48	0,47	2,39	2,4	1,05	1,04

	μ_{21} (μ_{90°)	$\mu_{22,5^\circ}$	μ_{45°	$\mu_{67,5^\circ}$	μ_{12} (μ_{90°)	φ_1	φ_2	i_0 в главн. ных осях	i_0 в произв. осях
ОТЧ—1	0,72	0,75	0,84	0,87	0,80	6,56	5,44	0,282	0,29
МА—8	0,58	0,60	0,62	0,65	0,66	3,54	3,55	0,664	0,662
Л—62[34]	0,46	0,48	0,51	0,49	0,45	2,37	2,38	1,05	1,05
О8КП[34]	0,57	0,51	0,41	0,59	0,68	2,68	2,9	0,86	0,86

Отсюда видно — экспериментальные данные подтверждают существование инварианта i_0 , что позволяет сделать заключение о правомерности записи основных уравнений в тензорной форме. Некоторое расхождение в значениях i_0 , вычисленного в главных и произвольных осях, объясняется погрешностью при определении μ .

Для корректности теории необходимо и достаточно положить любой из инвариантов $\{k_{ijlm}\}$, отличный от нуля, равным соответствующему инварианту $\{\sigma_{ijlm}\}$ материального тензора изотропного тела. Поэтому можно получить основные уравнения при использовании инварианта i_0 , приняв его, как и в изотропном теле, равным единице.

Тогда из (1.11) найдем:

$$\begin{aligned} K_{1111} &= \frac{\mu_{12}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}; & K_{2222} &= \frac{\mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}; \\ K_{1122} &= -\frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}; & K_{3333} &= 1; \\ K_{2233} &= -\frac{\mu_{21}(1 - \mu_{12})}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}; \\ K_{3311} &= -\frac{\mu_{12}(1 - \mu_{21})}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Теперь остается неизвестной лишь одна составляющая тензора анизотропии K_{1212} . Для ее определения рассмотрим напряженно-деформированное состояние тела в осях, расположенных под углом 45° к главным осям 1 и 2. Используя уравнение (1.15) и подставляя в него значения коэффициентов, получим

$$K_{1212} = \frac{1}{4} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}. \quad (1.36)$$

Таким образом получены все составляющие материального тензора.

Попутно отметим, что если раньше инвариант i_1 был принят постоянным и равным $\frac{5}{4}$, то теперь он будет менять свое значение в зависимости от материала, т. е.

$$i_1 = K_{1212} - K_{1122} = \frac{1}{4} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} + \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}.$$

Чисто линейное напряженное состояние простым стандартным испытанием на растяжение можно создать только в образцах, вырезанных в направлениях главных осей анизотропии. В связи с этим, встречаются затруднения при нахождении μ_1 . Поэтому выразим коэффициент K_{1212} через более легко определяемую величину

$$m = -\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}. \quad (1.37)$$

Ее можно получить при испытании образцов, ось которых составляет угол 45° с 1 и 2, и когда

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} = 0; \quad \varepsilon_{12} = 0.$$

Тогда из (1.27) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{45^\circ} &= \lambda (\kappa_{1111}^{45^\circ} \sigma_{11} + 2\kappa_{1112}^{45^\circ} \sigma_{12}) \\ \varepsilon_{22}^{45^\circ} &= \lambda (\kappa_{1222}^{45^\circ} \sigma_{11} + 2\kappa_{2212}^{45^\circ} \sigma_{12}) \\ \varepsilon_{12} &= \lambda (\kappa_{1112}^{45^\circ} \sigma_{11} + 2\kappa_{1212}^{45^\circ} \sigma_{12}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= -\frac{\kappa_{1112}^{45^\circ}}{2\kappa_{1212}^{45^\circ}} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{22}^{45^\circ} &= \lambda \left[\kappa_{1122}^{45^\circ} - \frac{(\kappa_{2212}^{45^\circ})(\kappa_{1112}^{45^\circ})}{\kappa_{1212}^{45^\circ}} \right] \sigma_{11} \\ \varepsilon_{11}^{45^\circ} &= \lambda \left[\kappa_{1111}^{45^\circ} - \frac{(\kappa_{1112}^{45^\circ})^2}{\kappa_{1212}^{45^\circ}} \right] \sigma_{11}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m = -\frac{\kappa_{1122}^{45^\circ} \kappa_{1212}^{45^\circ} + \kappa_{2212}^{45^\circ} \kappa_{1112}^{45^\circ}}{\kappa_{1111}^{45^\circ} \kappa_{1212}^{45^\circ} - (\kappa_{1112}^{45^\circ})^2} = -\frac{\kappa_{1122}^{45^\circ} \kappa_{1212}^{45^\circ} - (\kappa_{1112}^{45^\circ})^2}{\kappa_{1111}^{45^\circ} \kappa_{1212}^{45^\circ} - (\kappa_{1112}^{45^\circ})^2}. \quad (1.39)$$

Подставляя сюда значение коэффициентов из (1.14), найдем, что

$$m = \frac{(4K_{1212} - 1)(K_{1111} + K_{2222} - 2K_{1122}) + (K_{2222} - K_{1111})^2}{(4K_{1212} - 1)(K_{1111} + K_{2222} - 2K_{1122}) - (K_{2222} - K_{1111})^2}.$$

Обозначая

$$\frac{(K_{2222} - K_{1111})^2}{K_{1111} + K_{2222} - 2K_{1122}} = \frac{(\mu_{21} - \mu_{12})^2}{(\mu_{21} + \mu_{12})^2 - 4\mu_{21}^2 \mu_{12}^2} = \nu,$$

окончательно получим

$$K_{1212} = (1 - \nu) \frac{1}{4} \frac{(1+m)}{(1-m)}. \quad (1.40)$$

Определим величину расхождения между коэффициентами μ_1 и m , для чего воспользуемся записью K_{1212} через то и другое значение. В результате незначительных преобразований, найдем, что

$$\mu_1 = \frac{2m - \nu(1+m)}{2 - \nu(1+m)}.$$

Экспериментальные данные показывают, что ν близко к нулю ($0 \div 0,05$) и поэтому для технических расчетов можно принять $\mu_1 = m$. Тогда можно записать

$$K_{1212} = \frac{1}{4} \frac{(1 + \mu_1)}{(1 - \mu_1)} \approx \frac{1}{4} \frac{(1 + m)}{(1 - m)}. \quad (1.41)$$

Теперь остается выразить через полученные константы основные уравнения теории. В результате подстановки коэффициентов интенсивность напряжений приобретает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \rightarrow} \\ &\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) + \rightarrow} \right. \\ &\left. \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\right] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Аналогично интенсивность деформаций запишется так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sqrt{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}} \sqrt{\frac{1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})^2} \left\{ \mu_{12}\mu_{21} \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_{11} + \rightarrow \right. \right.} \\ &\rightarrow \left. \left. \sqrt{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_{22}} \right]^2 + \mu_{21}(1 - \nu_{12}) \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} \right]^2 + \rightarrow \right.} \\ &\rightarrow \left. \sqrt{\left(\mu_{12}(1 - \mu_{21}) \left[\varepsilon_{33} - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_{11} \right]^2 \right) + \rightarrow} \right. \\ &\left. \rightarrow \sqrt{\frac{4(1 - \mu_1)}{(1 + \mu_1)[\mu_{12}(1 - \mu_{21}) + \mu_{21}(1 - \mu_{12})]} \varepsilon_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

или с учетом постоянства объема

$$\varepsilon_i = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}} \right) \frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} + \frac{4(1 - \mu_1)}{1 + \mu_1} \varepsilon_{12}^2} \quad (1.43a)$$

Уравнения связи между напряжениями и деформациями можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}} [(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - \nu_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{\mu_{23}}{\mu_{32}} [(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - \mu_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} [(\sigma_{33} - \sigma_{22}) - \mu_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{22})]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}$$

Как известно, функциональная зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ определяется при испытаниях материала на линейное растяжение или сжатие. Из формул (1.42), (1.43) или (1.44) видно, что если принять $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$, то σ_i будет равняться σ_{33} , а $\varepsilon_i = \varepsilon_{33}$.

Таким образом, в нашем случае для построения кривой упругости достаточно испытать материал в третьем направлении. Однако осуществить это на листовых металлах практически не удастся. Следовательно, нужно предусмотреть возможность получения необходимых данных при растяжении материала в плоскости листа.

Если создать линейное напряженное состояние в первом направлении ($\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$), то из выражения (1.42) получим:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}} \sigma_{11} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}} \sigma_{11}$$

или

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}}} \quad (1.43)$$

Обозначим отношение

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{\mu_{13}/\mu_{31}}} = \sigma_{i1} \quad (1.46)$$

Полученная интенсивность будет инвариантной при условии, что коэффициент $\frac{1}{\sqrt{\mu_{13}/\mu_{31}}}$ все время вне зависимости от положения осей остается постоянным, связанным с главными осями анизотропии.

Интенсивность деформации, когда действует только σ_{11} , приобретает вид:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \varepsilon_{11} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}}} = \varepsilon_{i1} \quad (1.47)$$

По аналогии обозначим величину

$$\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\mu_{31}/\mu_{13}}} = \varepsilon_{i1} \quad (1.48)$$

Здесь коэффициент $\frac{1}{\sqrt{\mu_{31}/\mu_{13}}}$ также имеет постоянное значение, зависящее только от материала.

Естественно, все рассуждения можно повторить и при испытании материала во втором направлении. Тогда

$$\sigma_{i2} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\frac{\mu_{23}}{\mu_{32}}}} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{i2} = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}}} \quad (1.49)$$

Правомерность подобного введения подтверждается и тем, что произведение интенсивностей, которое с точностью до постоянного множителя равно работе, будет одним и тем же вне зависимости от направления

$$\sigma_i \varepsilon_i = \sigma_{i1} \varepsilon_{i1} = \sigma_{i2} \varepsilon_{i2}$$

Найденные соотношения позволяют записать уравнения (1.44) следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_{i1}} [(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - \mu_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} [(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - \mu_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} [(\sigma_{33} - \sigma_{22}) - \mu_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{22})] \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \cdot \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12},\end{aligned}\quad (1.50)$$

причем между интенсивностями напряжений и деформаций существует следующая зависимость:

$$\sigma_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \sigma_{i1}; \quad \varepsilon_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \varepsilon_{i1}.\quad (1.51)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} = E'_1; \quad \frac{\sigma_{i2}}{\varepsilon_{i2}} = E'_2; \quad \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_{i3}}{\varepsilon_{i3}} = E'_3, \text{ то}$$

уравнения связи между напряжениями и деформациями можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E'_1} \sigma_{11} - \frac{\mu_{12}}{E'_2} \sigma_{22} - \frac{\mu_{13}}{E'_3} \sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E'_2} \sigma_{22} - \frac{\mu_{23}}{E'_3} \sigma_{33} - \frac{\mu_{21}}{E'_1} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E'_3} \sigma_{33} - \frac{\mu_{31}}{E'_1} \sigma_{11} - \frac{\mu_{32}}{E'_2} \sigma_{22} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \sigma_{12}\end{aligned}\quad (1.52)$$

или в обычном обозначении

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E'_1} \sigma_x - \frac{\mu_{12}}{E'_2} \sigma_y - \frac{\mu_{13}}{E'_3} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E'_2} \sigma_y - \frac{\mu_{23}}{E'_3} \sigma_z - \frac{\mu_{21}}{E'_1} \sigma_x \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E'_3} \sigma_z - \frac{\mu_{31}}{E'_1} \sigma_x - \frac{\mu_{32}}{E'_2} \sigma_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (1.52a)$$

Модули пластичности связаны между собой следующим образом:

$$E'_1 \mu_{12} = E'_2 \mu_{21}; \quad E'_1 \mu_{13} = E'_3 (E') \mu_{31}.$$

Отметим, что в общем случае ортотропного тела можно ввести интенсивности разных направлений, однако здесь σ_i и ε_i будут совпадать с направлением 3.

В заключение приведем запись уравнений связи (обобщенного закона Гука) для упругой ортогональной анизотропии [16]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_z & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_z & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_3} \sigma_z - \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_y & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{31}} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — модули Юнга по главным направлениям упругости, а $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{13}$ — коэффициенты Пуассона.

Из изложенного видно, что в основу теории упругости и деформационной теории пластичности могут быть положены зависимости аналогичной формы записи. Далее, как показал А. А. Ильющин [19], интенсивность напряжений, возникающая в теле при любой деформации (упругой или пластической) для каждого материала есть определенная непрерывная функция интенсивности деформации $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. В упругой области она имеет вид $\sigma_i = E\varepsilon_i$, а в пластической $\sigma_i = E^1\varepsilon_i$.

Ортотропное тело имеет три главных направления, в каждом из которых свои модули упругости и пластичности. В связи с этим и появляются три вида связей

$$\sigma_{i1} = \Phi_1(\varepsilon_{i1}); \quad \sigma_{i2} = \Phi_2(\varepsilon_{i2}); \quad \sigma_{i3} = \Phi_3(\varepsilon_{i3})$$

действительных как в упругой, так и в пластической области.

Запись основных соотношений теории пластичности с помощью трех модулей является удобной при решении конкретных задач, особенно если это решение учитывает упругие деформации.

Случай ортотропного тела, когда главные напряжения совпадают с главными осями анизотропии

Различные операции листовой штамповки можно проанализировать с помощью главных напряжений, если их направления известны. Причем, когда металл анизотропен, желательнее главные напряжения совместить с направлениями симметрии материала, так как только тогда оси эллипсоида деформаций совпадут с осями эллипсоида напряжений [2].

В этом случае в уравнениях теории пластичности исчезнут касательные напряжения и сдвиги и они будут иметь вид:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{21}\mu_{12}}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \dots} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{+\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (1.54)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2^2}{\mu_{21}}}; \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i1} &= \sqrt{\mu_{21}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ \varepsilon_{i2} &= \sqrt{\mu_{12}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1'} \sigma_1 - \frac{\mu_{12}}{E_2'} \sigma_2 - \frac{\mu_{13}}{E_3'} \sigma_3, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2'} \sigma_2 - \frac{\mu_{23}}{E_3'} \sigma_3 - \frac{\mu_{21}}{E_1'} \sigma_1, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E_3'} \sigma_3 - \frac{\mu_{31}}{E_1'} \sigma_1 - \frac{\mu_{32}}{E_2'} \sigma_2. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Отметим, что коэффициенты поперечной деформации можно заменить другими деформационными константами. Так, широкое распространение получил показатель r , равный отношению деформации по ширине образца к его деформации по толщине. В некоторых случаях пользуются обратной величиной $R = \frac{1}{r}$.

Если принять $R = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$ — коэффициент, определяемый при действии силы в первом направлении, а $R_2 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$ — во втором, то, используя условие постоянства объема, можно установить, что $R_1 = \frac{1}{\mu_{21}} - 1$, $R_2 = \frac{1}{\mu_{12}} - 1$ или

$$\mu_{12} = \frac{1}{1+R_2}; \quad \mu_{21} = \frac{1}{1+R_1} \quad (1.58)$$

Тогда выражения интенсивностей напряжений и деформаций запишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{R_1+R_2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + R_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + R_1(\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_1 + R_2}} \sqrt{(R_2 + 1)\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + (R_1 + 1)\varepsilon_2^2}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Уравнения связи, как в данном частном случае, так и в общем случае ортотропного тела можно выразить через разности напряжений.

Например,

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2 \right] \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right] \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left[\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1 \right].\end{aligned}\quad (1.60)$$

Из выражений (1.60) получим

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_3} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2}{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{R_2 \varepsilon_1 - R_1 \varepsilon_2}{R_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_3} \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1} = \frac{R_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - R_2 \varepsilon_1} \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) \varepsilon_1} = \frac{R_2 \varepsilon_1 - R_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - R_2 \varepsilon_1}.\end{aligned}\quad (1.61)$$

§ 3. Кусочно-линейное условие пластичности

В настоящее время наибольшее применение получили две теории, предсказывающие начало пластического течения в металлах: энергетическая и кусочно-линейная. В частном случае (изотропное тело) кусочно-линейная теория носит название теории максимальных касательных напряжений.

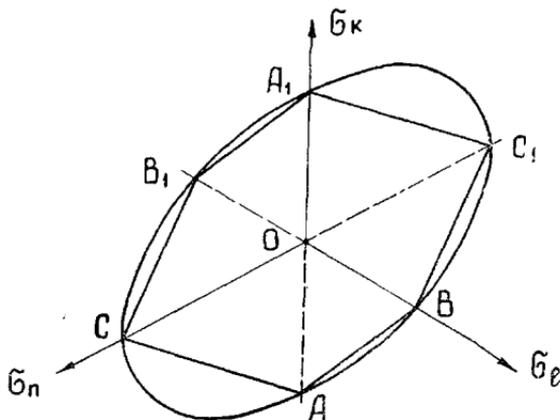


Рис. 1.1. Фигура пластичности в девиаторной плоскости

Оба условия пренебрегают влиянием среднего напряжения (первым инвариантом тензора напряжений), поэтому линии текучести могут быть рассмотрены в девиаторной плоскости, где кусочно-линейная теория интерпретируется шестиугольником пластичности (рис. 1.1).

Если принять, что пределы текучести на сжатие и растяжение одного направления

равны между собой, то условие пластичности ортотропного материала при указанной индексации осей ($l=1, n=2, k=3$) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{s1}} - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_{s3}} &= \pm 1 \quad (AB \text{ и } A_1B_1) \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_{s3}} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{s2}} &= \pm 1 \quad (AC \text{ и } A_1C_1) \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_{s1}} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_{s2}} &= \pm 1 \quad (BC_1 \text{ и } CB_1) \end{aligned} \quad (1.62)$$

или

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} (\sigma_3 - \sigma_2) &= \pm \sigma_{s1} \quad (AB \text{ и } A_1B_1) \\ (\sigma_2 - \sigma_1) - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} (\sigma_3 - \sigma_1) &= \pm \sigma_{s2} \quad (AC \text{ и } A_1C_1) \\ (\sigma_1 - \sigma_3) - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} (\sigma_2 - \sigma_3) &= \pm \sigma_{s1} \quad (BC \text{ и } CB_1). \end{aligned} \quad (1.63)$$

В отличие от изотропного тела, здесь кусочно-линейное условие пластичности можно записать и через разные пределы текучести на сжатие и растяжение одного направления. Однако в данном пособии подобное условие рассматриваться не будет, так как оно еще не нашло практического применения. Интересующихся этим вопросом отсылаем к книге Д. Д. Ивлева [10].

Попутно отметим, что наибольшее расхождение между энергетическим и кусочно-линейным условиями ортотропного тела, составляет (рис. 1.2): при $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ и $|\sigma_1| > \sigma_2$ и $|\sigma_1| < |\sigma_2|$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{L_{OD_1} - L_{OE}}{L_{OE}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{13}\mu_{31}}} - 1}, \\ \text{при } \sigma_1 \sigma_2 > 0 \text{ и } |\sigma_1| < |\sigma_2| \\ h_2 &= \frac{L_{OD_2} - L_{OF}}{L_{OF}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{23}\mu_{32}}} - 1}, \\ \text{при } \sigma_1 \sigma_2 < 0 \\ h_3 &= \frac{L_{OD_3} - L_{ON}}{L_{ON}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{\mu_{12}\mu_{21}}} - 1}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

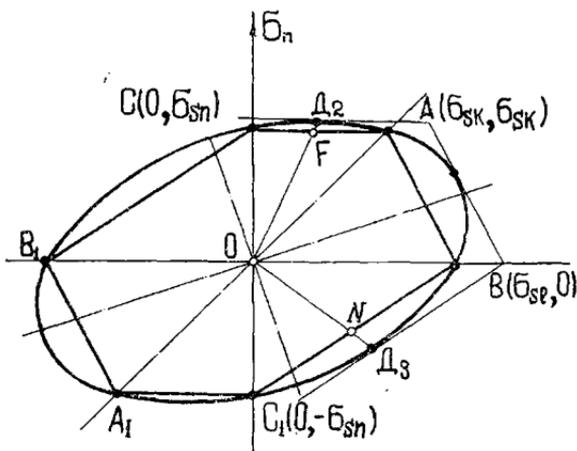


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация энергетического и кусочно-линейного условий пластичности при плоско-напряженном состоянии

Но кусочно-линейное условие пластичности не всегда удобно использовать при решении некоторых задач, так как это связано с разрывным изменением ориентации плоскостей пластичности в зависимости от сравнительной величины трех главных напряжений. Иначе говоря, если напряженное состояние в различных частях тела неодинаково, то в ряде случаев приходится пользоваться различными аналитическими формами условия пластичности. Более того, необходимо заранее знать, какое из главных напряжений будет наибольшим, какое промежуточным и наименьшим. Энергетическое же условие пластичности свободно от этого недостатка.

Вместе с тем (как следует из самого названия) кусочно-линейное условие удобно тем, что имеет линейную форму записи.

§ 4. Соотношение теории пластичности трансверсально изотропных сред

Как уже отмечалось, металлические полуфабрикаты обладают симметрией механических свойств. В частности, у прутков и труб, в силу особенностей их изготовления, наблюдается трансверсальная изотропия, выраженная в том, что механические свойства в поперечном сечении примерно одинаковы, но отличны от свойств продольного направления. Практически этот вид анизотропии может быть принят и для листов из некоторых сплавов. Кроме того, при анализе ряда операций холодной штамповки свойства в плоскости листа осредняют, применяя условно расчетную схему трансверсальной изотропии.

Следовательно, данный вид симметрии металлического тела встречается довольно часто и представляет определенный теоретический и практический интерес в обработке давлением.

В общем случае, в зависимости от ориентировки, могут наблюдаться три возможных расположения плоскости изотропии. Рассмотрим их и выясним, как при этом изменяются основные соотношения теории пластичности ортотропной среды, так как трансверсальная изотропия является ее частным видом.

1. Плоскость, в которой все свойства одинаковы, связана с направлениями 1 и 2.

Тогда $\mu_{12} = \mu_{21}$, $\mu_{31} = \mu_{32} = 1 - \mu_{12}$, $\mu_{23} = \mu_{13} = 0,5$.
Очевидно, что в случае трансверсальной изотропии определению подлежит только один коэффициент поперечной деформации. Кусочно-линейное условие пластичности примет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{2(1 - \mu_{12})} (\sigma_3 - \sigma_2) = \pm \sigma_{s1} \quad (AB \text{ и } A_1B_1)$$

$$(\sigma_2 - \sigma_1) - \sqrt{2(1 - \mu_{12})} (\sigma_3 - \sigma_1) = \pm \sigma_{s1} \quad (AC \text{ и } A_1C_1) \quad (1.65)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{s1} \quad (BC \text{ и } CB_1).$$

Энергетическое условие пластичности запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{i1} = \sigma_{i2} &= \sqrt{1 - \mu_{12}} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \sigma_i = \sigma_{i3} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \mu_{12})}} \sigma_{i1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Интенсивность деформаций определяем по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}^2}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\mu_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2} \\ \varepsilon_i = \varepsilon_{i3} &= \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_{12}}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\mu_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

И, наконец, физические уравнения принимают такую форму:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} [(\sigma_1 - \sigma_3) + \mu_{12}(\sigma_3 - \sigma_2)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} [(\sigma_2 - \sigma_3) + \mu_{12}(\sigma_3 - \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{1 - \mu_{12}}{1 - \mu_{12}^2} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{1 + \mu_{12}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{1}{1 - \mu_{12}^2} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} [(1 - \mu_{12})\varepsilon_2 - \mu_{12}\varepsilon_3] \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{1}{1 - \mu_{12}^2} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} [\mu_{12}\varepsilon_3 - (1 - \mu_{12})\varepsilon_1]. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Можно также пользоваться и следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_3} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} \varepsilon_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} \varepsilon_3}{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} \varepsilon_3 - \varepsilon_1} \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} \varepsilon_3 - \varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

По аналогии, рассматривая два других случая трансверсальной изотропии, получим уравнения подобной формы записи, которые приведены в таблице 1.

Значения коэффициентов μ_{ik}	Условия пластичности
<p>Плоскость изотропии</p> <p>1—2</p> <p>$\mu_{21} = \mu_{12}$,</p> <p>$\mu_{31} = \mu_{32} = 1 - \mu_{12}$,</p> <p>$\mu_{23} = \mu_{13} = 0,5$</p>	<p>Кусочно-линейное</p> $(\sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{2(1 - \mu_{12})}(\sigma_3 - \sigma_2) = \pm \sigma_{s1}$ $(\sigma_2 - \sigma_1) - \sqrt{2(1 - \mu_{12})}(\sigma_3 - \sigma_1) = \pm \sigma_{s1}$ $\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{s1}$ <p>Энергетическое</p> $\sigma_{i1} = \sigma_{i2} =$ $= \sqrt{1 - \mu_{12}} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$ $\sigma_{i3} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \mu_{12})}} \sigma_{i1}$
<p>Плоскость изотропии</p> <p>2—3</p> <p>$\mu_{23} = \mu_{32}$,</p> <p>$\mu_{12} = \mu_{13} = 1 - \mu_{32}$,</p> <p>$\mu_{21} = \mu_{31} = 0,5$</p>	<p>Кусочно-линейное</p> $(\sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{\frac{2}{1 - \mu_{32}}}(\sigma_3 - \sigma_2) = \pm \sigma_{s1}$ $\sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_{s2}$ $(\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{\sqrt{2(1 - \mu_{32})}}(\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \sigma_{s1}$ <p>Энергетическое</p> $\sigma_{i2} = \sigma_{i3} =$ $= \sqrt{1 - \mu_{32}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{\mu_{32}}{1 - \mu_{32}}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ $\sigma_{i1} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \mu_{32})}} \sigma_{i3}$
<p>Плоскость изотропии</p> <p>1—3</p> <p>$\mu_{13} = \mu_{31}$</p> <p>$\mu_{21} = \mu_{23} = 1 - \mu_{31}$,</p> <p>$\mu_{12} = \mu_{32} = 0,5$</p>	<p>Кусочно-линейное</p> $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_{s1}$ $(\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{1}{\sqrt{2(1 - \mu_{31})}}(\sigma_3 - \sigma_1) = \pm \sigma_{s2}$ $(\sigma_1 - \sigma_3) - \sqrt{2(1 - \mu_{31})}(\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \sigma_{s1}$ <p>Энергетическое</p> $\sigma_{i1} = \sigma_{i3} =$ $= \sqrt{1 - \mu_{31}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{\mu_{31}}{1 - \mu_{31}}(\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ $\sigma_{i2} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \mu_{31})}} \sigma_{i1}$

Интенсивность деформаций	Физические уравнения
$\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{12}^2}} \times$ $\times \sqrt{\varepsilon_1^2 + 2\mu_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}$ $\varepsilon_{i3} = \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_{12}}} \times$ $\times \sqrt{\varepsilon_{i1}^2 + 2\mu_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}$	$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} [(\sigma_1 - \sigma_3) + \mu_{12} (\sigma_3 - \sigma_2)]$ $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} [(\sigma_2 - \sigma_3) + \mu_{12} (\sigma_3 - \sigma_1)]$ $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]$ <p>ИЛИ</p> $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{1 + \mu_{12}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ $\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{1}{1 + \mu_{12}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\varepsilon_2 - \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} \varepsilon_3 \right)$ $\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{1}{1 + \mu_{12}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right)$
$\varepsilon_{i2} = \varepsilon_{i3} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu_{32})(2 - \mu_{32})}} \times$ $\times \sqrt{\varepsilon_2^2 + 2\mu_{32} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2}$ $\varepsilon_{i1} = \sqrt{\frac{2}{2 - \mu_{32}}} \times$ $\times \sqrt{\varepsilon_2^2 + 2\mu_{32} \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2}$	$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]$ $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} [(\sigma_2 - \sigma_1) - \mu_{32} (\sigma_3 - \sigma_1)]$ $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} [(\sigma_3 - \sigma_1) - \mu_{32} (\sigma_2 - \sigma_1)]$ <p>ИЛИ</p> $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2(1 - \mu_{32})}{1 + \mu_{32}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\frac{\mu_{32}}{1 - \mu_{32}} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right)$ $\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{2(1 - \mu_{32})}{1 + \mu_{32}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$ $\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{2(1 - \mu_{32})}{1 + \mu_{32}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\varepsilon_3 - \frac{\mu_{32}}{1 - \mu_{32}} \varepsilon_1 \right)$
$\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i3} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{31}^2}} \times$ $\times \sqrt{\varepsilon_3^2 + 2\mu_{31} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \frac{3\mu_{31} - 1}{2} \varepsilon_1^2}$ $\varepsilon_{i2} = \sqrt{\frac{2}{1 + \mu_{31}}} \times$ $\times \sqrt{\frac{3\mu_{31} - 1}{2} \varepsilon_1^2 + 2\mu_{31} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2}$	$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} [(\sigma_1 - \sigma_2) - \mu_{31} (\sigma_3 - \sigma_2)]$ $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{i2}}{\sigma_{i2}} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right]$ $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{i3}}{\sigma_{i3}} [(\sigma_3 - \sigma_2) - \mu_{31} (\sigma_1 - \sigma_2)]$ <p>ИЛИ</p> $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{1 + \mu_{31}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{1 - \mu_{31}} \varepsilon_2 \right)$ $\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{1}{1 + \mu_{31}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \cdot \left(\frac{\mu_{31}}{1 - \mu_{31}} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right)$ $\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{1}{1 + \mu_{31}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$

Глава 1.4. СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

В основе классической теории упругости и пластичности лежит постулат о шаровой изотропии. Прикладная теория пластичности также пользуется этим допущением. С его применением решено много технически важных задач. И хотя металлические тела являются анизотропными, в ряде случаев анизотропией можно пренебречь, что зависит в основном от материала, подвергаемого обработке, и параметров процесса. Так, например, небольшие отклонения коэффициента поперечной деформации от 0,5 обычно не оказывают существенного влияния на точность при технологических расчетах процессов обработки давлением, особенно, если определяются силовые параметры или металл подвергнут горячей обработке.

Все это говорит о том, что теория пластичности изотропного тела имеет исключительно важное значение в обработке металлов давлением. Рассмотрим как будут выглядеть условия пластичности и физические уравнения.

Кусочно-линейное условие (максимальных касательных напряжений), как видно из формул (1.62), математически выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_3 &= \pm \sigma_s \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_s \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_s.\end{aligned}$$

Энергетическое условие текучести Мизеса (1.1) выглядит так:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s$$

Физические уравнения (1.7) получают следующую форму записи:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]\end{aligned}\tag{1.70}$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1).\end{aligned}\tag{1.71}$$

При изложении методов решения задач обработки металлов давлением будут показаны и другие выражения уравнений связи между напряжениями и деформациями.

Интенсивность деформации имеет вид:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (1.72)$$

или

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)}$$

Глава 1.5. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА И ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

При теоретическом анализе многих процессов обработки металлов давлением можно избежать использования общей задачи и свести ее либо к плоской, либо к осесимметричной. Например, при обтяжке листовых металлов напряжениями по толщине заготовки можно пренебречь и принять схему плоского напряженного состояния; гибку широких листов рассматривать при условии сохранения размеров по ширине детали, т. е. применить схему плоской деформации и т. д.

Для этих частных случаев напряженно-деформированного состояния, имеющих большую практическую ценность, необходимо записать основные уравнения теории пластичности.

§ 1. Плоское деформированное состояние

Представим себе тело, у которого размеры по одной из осей, например Z , значительно больше размеров в двух других направлениях. Пусть оно нагружено равномерно распределенными вдоль оси Z силами, перпендикулярными к ней. Если взять два смежных сечения, достаточно удаленных от концов, то они в процессе деформирования остаются плоскими. Это и есть случай плоской деформации.

Теория плоской деформации изотропного тела является наиболее развитой ветвью математической теории пластичности. Она нашла широкое применение при решении целого ряда задач. Так, на основе плоской деформации проанализированы такие процессы как прокатка, осадка плит и т. д.

Рассмотрим основные уравнения теории пластичности и их особенности в случае плоской деформации.

1. **Уравнения равновесия.** Если принять, как указано выше, размеры в направлении Z намного большими, чем по X и Y , то тогда

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0.$$

Это приведет к тому, что из трех уравнений равновесия останется только два

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (1.73)$$

Третье уравнение выполняется тождественно. Аналогичная форма записи сохранится и в случае $\varepsilon_x=0$ или $\varepsilon_y=0$. Условия равновесия в полярных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Здесь ρ — радиус-вектор, а θ — полярный угол.

В частном случае, когда напряжения не зависят от θ , условия равновесия определяются одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \quad (1.75)$$

2. Уравнения связи и условия пластичности. Примем, что оси симметрии материала 1, 2, 3 совпадают с осями основной системы координат x, y, z . Тогда для ортотропной среды возможны три случая связи между напряжениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = 0 \quad \sigma_1 &= \mu_{21} \sigma_2 + \mu_{31} \sigma_3 \\ \varepsilon_2 = 0 \quad \sigma_2 &= \mu_{32} \sigma_3 + \mu_{12} \sigma_1 \\ \varepsilon_3 = 0 \quad \sigma_3 &= \mu_{13} \sigma_1 + \mu_{23} \sigma_2 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Причем каждое из этих уравнений может быть показано и через разности напряжений, например, при $\varepsilon_2=0$.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1}{\mu_{32}} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{\mu_{12}} (\sigma_2 - \sigma_3).$$

Указанные три случая, в свою очередь, приводят к девяти формам записи условий пластичности, как энергетического, так и кусочно-линейного.

Для сокращения числа уравнений примем условие, что всегда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Это возможно лишь при $\varepsilon_2=0$. В действительности если $\varepsilon_1=0$, то из уравнений (1.76) получается $\sigma_2 > \sigma_1$, так как коэффициенты поперечной деформации не могут быть больше единицы, а при $\varepsilon_3=0$, $\sigma_3 > \sigma_1$. Это противоречит принятому условию.

Положение, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ позволяет вместо девяти форм записи условия пластичности использовать только одну, выраженную через разности крайних напряжений, а именно, при энергетическом условии пластичности

$$\sigma_{i1} = \sqrt{1 - \mu_{21} \mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_{s1} \quad (1.77)$$

а при кусочно-линейном

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \left(\sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} - \frac{1}{\mu_{32}} \right) = \pm \sigma_{s2} \quad (1.78)$$

или, заменяя μ_{32} и μ_{23} на μ_{12} , μ_{21} , получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \left(\sqrt{1 - 2\mu_{12} + \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} - \frac{1}{1 - \mu_{12}} \right) = \sigma_{s2}. \quad (1.79)$$

Интенсивность деформаций при $\varepsilon_2=0$ запишется следующим образом:

$$\sigma_{i_1} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}}. \quad (1.80)$$

В случае трансверсально изотропного материала в плоскости действия крайних напряжений наблюдается равенство $\mu_{21} = \mu_{12}$. Тогда уравнения (1.77), (1.79), (1.80) преобразуются:

$$\sigma_{i_1} = \sqrt{1 - \mu_{12}^2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \varepsilon_{i_1} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 - \mu_{12}^2}}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \left(\sqrt{2(1 - \mu_{12})} - \frac{1}{1 - \mu_{12}} \right) = \pm \sigma_s.$$

При полной симметрии (изотропное тело) они переходят в известные выражения:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_s$$

§ 2. Плоское напряженное состояние

Подход к анализу процессов, где используется схема плоского напряженного состояния, должен быть совершенно иным, чем при плоской деформации или осесимметричной задаче. Считают [3], что здесь имеет место самостоятельная двухмерная задача, которая не является частным случаем общей.

Очевидно, что приравнение нулю одного из напряжений приводит к упрощению равновесия и сплошности тела. Уравнения равновесия имеют такой же вид, как и при плоской деформации (1.73), а из уравнений неразрывности остается только одно. Условия пластичности практически остаются такими же трудноприменимыми, как и при объемной задаче, что объясняется отсутствием вполне определенного (чистого) отношения между напряжениями. Только по найденным деформациям, используя уравнения связи, можно судить о величине напряжений.

Следовательно, при плоском напряженном состоянии основные значения приобретают физические уравнения. Их запись зависит от того, какое из главных напряжений равно нулю. Например, если при ортотропном материале $\sigma_1=0$, то:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \frac{\varepsilon_{i_1}}{\sigma_{i_1}} (\mu_{31} \sigma_3 + \mu_{21} \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{i_2}}{\sigma_{i_2}} (\sigma_2 - \mu_{32} \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_{i_3}}{\sigma_{i_3}} (\sigma_3 - \mu_{23} \sigma_2) \end{aligned} \quad (1.81)$$

Схема напряжений	Условия пластичности	Физические уравнения
$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 \neq 0$ $\sigma_3 \neq 0$	<p>Энергетическое</p> $\sigma_{11} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sqrt{\sigma_2^2 + \frac{\mu_{32}}{\mu_{23}} \sigma_3^2 - \mu_{32} \sigma_2 \sigma_3}$ <p>Кусочно-линейное</p> $\left(\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} - 1 \right) \sigma_3 - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sigma_2 = \pm \sigma_{s1} (\sigma_2 \sigma_3 > 0, \sigma_2 > \sigma_3)$ $\left(\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{13}}} - 1 \right) \sigma_2 - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{13}}} \sigma_3 = \pm \sigma_{s1} (\sigma_2 \sigma_3 > 0, \sigma_3 > \sigma_2)$ $\sigma_2 - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} \sigma_3 = \pm \sigma_{s2} (\sigma_2 \sigma_3 < 0)$	$\sigma_2 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} \varepsilon_2 - \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 \right)$ $\sigma_3 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \left(\varepsilon_3 - \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 \right)$
$\sigma_2 = 0$ $\sigma_1 \neq 0$ $\sigma_3 \neq 0$	<p>Энергетическое</p> $\sigma_{11} = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\mu_{31} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\mu_{31}^2}{\mu_{13}} \sigma_3^2}$ <p>Кусочно-линейное</p> $\left(\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} - 1 \right) \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_{s1} (\sigma_1 \sigma_3 > 0, \sigma_1 > \sigma_3)$ $\left(\sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} - 1 \right) \sigma_1 - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} \sigma_3 = \pm \sigma_{s2} (\sigma_1 \sigma_3 > 0, \sigma_3 > \sigma_1)$	$\sigma_1 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 - \frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} \varepsilon_2 \right)$ $\sigma_3 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \left(\varepsilon_3 - \frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} \varepsilon_2 \right)$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \sigma_3 = \pm \sigma_{s1} \quad (\sigma_1 \sigma_3 < 0)$$

Энергетическое

$$\sigma_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \left(\sigma_1^2 - 2\mu_{21} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \sigma_2^2 \right)}$$

Кусочно-линейное

$$\sigma_1 - \sigma_2 \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \right) = \pm \sigma_{s1} \quad (\sigma_1 \sigma_2 > 0, \sigma_1 > \sigma_2)$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 \left(1 - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} \right) = \pm \sigma_{s2} \quad (\sigma_1 \sigma_2 > 0, \sigma_2 > \sigma_1)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sigma_2 = \pm \sigma_{s1} \quad (\sigma_1 \sigma_2 < 0)$$

$$\sigma_1 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right)$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 \neq 0$$

$$\sigma_2 \neq 0$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i_1}}{\varepsilon_{i_1}} \left(\frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} \varepsilon_2 - \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 \right) \\ \sigma_3 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{\sigma_{i_1}}{\varepsilon_{i_1}} \left(\varepsilon_3 - \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 \right).\end{aligned}\quad (1.82)$$

Отсюда видно, что отношение напряжений σ_2 и σ_3 равно

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{\frac{\mu_{31}}{\mu_{21}} \varepsilon_2 - \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \frac{\mu_{32}}{\mu_{12}} \varepsilon_1}.\quad (1.83)$$

Условия пластичности при $\sigma_1=0$ запишутся следующим образом:

энергетическое

$$\sigma_{i_1} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sqrt{\sigma_2^2 - \mu_{32} \sigma_2 \sigma_3 + \frac{\mu_{32}}{\mu_{23}} \sigma_3^2}\quad (1.84)$$

кусочно-линейное (1.63)

при $\sigma_2 \sigma_3 > 0$ и $\sigma_3 > \sigma_2$

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} - 1 \right) \sigma_2 - \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \sigma_3 = \pm \sigma_{s_1}$$

при $\sigma_2 \sigma_3 > \sigma_3$ и $\sigma_2 > \sigma_3$

$$\left(\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} - 1 \right) \sigma_3 - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \sigma_2 = \pm \sigma_{s_1}\quad (1.85)$$

$$\text{при } \sigma_2 \sigma_3 < 0 \sigma_2 - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} \sigma_3 = \pm \sigma_{s_2}$$

Аналогично рассмотрим и два других случая, когда $\sigma_2 = 0$ либо $\sigma_3 = 0$. Полученные уравнения сведем в таблицу 2.

Основные уравнения при плоском напряженном состоянии трансверсально изотропного материала зависят от положения плоскости изотропии. Так, если она характеризуется 1 и 2 направлениями, то

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad \mu_{32} = \mu_{31} = 1 - \mu_{21}, \quad \mu_{23} = \mu_{13} = 0,5.$$

Тогда, приняв $\sigma_3=0$, основные уравнения запишутся так:
энергетическое условие пластичности

$$\sigma_{i_1} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}\quad (1.86)$$

кусочно-линейное условие пластичности

при $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ и $\sigma_1 > \sigma_2$

$$\sigma_1 - \sigma_2 [1 - \sqrt{2(1 - \mu_1)}] = \pm \sigma_{s_1}\quad (1.87)$$

при $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ и $\sigma_2 > \sigma_1$

$$\sigma_2 - \sigma_1 [1 - \sqrt{2(1 - \mu_{12})}] = \pm \sigma_{s_1}$$

при $\sigma_1 \sigma_2 < 0$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{s_1}$$

уравнения связи между напряжениями и деформациями

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}^2} \cdot \frac{\sigma_{i_1}}{\varepsilon_{i_1}} \left(\frac{1 - \mu_{12}}{\mu_{12}} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \right), \\ \sigma_2 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}^2} \cdot \frac{\sigma_{i_1}}{\varepsilon_{i_1}} \left(\frac{1 - \mu_{12}}{\mu_{12}} \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right).\end{aligned}\quad (1.88)$$

Наконец, при изотропном теле основные формулы приобретают следующие выражения ($\sigma_3 = 0$):

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} \\ \begin{cases} \sigma_1 = \pm \sigma_s \\ \sigma_2 = \pm \sigma_s \\ \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_s \end{cases}\end{aligned}\quad (1.89)$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3).$$

§ 3. Осесимметричное напряжение и деформированное состояние

При анализе ряда операций обработки металлов давлением (осадка и прошивка цилиндрических заготовок, волочение и прессование прутков и т. д.) обычно решается осесимметричная задача.

В случае анизотропного материала ее можно разделить на две, в зависимости от того, будет ли наблюдаться симметрия по деформации или по напряжениям. Если тело изотропно, то задача, по существу, решается одна, так как симметрия по напряжениям автоматически приводит к симметрии по деформациям. При ортотропном металле могут быть решены обе указанные задачи, хотя здесь встречаются определенные трудности.

Так, при осесимметричной деформации (рассматривается цилиндрическая система координат) вследствие связи коэффициентов поперечной деформации с направлением симметрии материала напряжения σ_θ зависят от угла θ . Условия равновесия, если их рассматривать в главных направлениях, упрощаются. Правда, они сохраняют свою запись через частные производные. При известном пределе текучести и граничных условиях получается замкнутая система уравнений.

При симметрии по напряжениям линии главных напряжений представляют собой эллипсы и гиперболы, а не окружности и прямые лучи, свойственные изотропному телу. В этом случае условия равновесия необходимо рассматривать в эллиптической ортогональной системе координат.

Более подробно обе задачи анализироваться не будут, так как в практике они встречаются довольно редко. Это объясняется тем, что большинство полуфабрикатов круглого сечения, например, прутки и трубы, практически, обладают трансверсальной изотропией.

Анализ осесимметричной задачи трансверсально изотропного материала аналогичен случаю изотропного тела с учетом разницы свойств среды в плоскости, где они эквивалентны, и в перпендикулярном к ней направлении.

Будем считать, что плоскость изотропии проходит через поперечное сечение полуфабриката и совпадает с осями 1 и 2. Тогда коэффициенты поперечной деформации получают следующее значение:

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad \mu_{32} = \mu_{31} = 1 - \mu_{12}, \quad \mu_{23} = \mu_{13} = 0,5.$$

При осесимметричном напряженном состоянии компоненты напряжений не зависят от угла θ и, следовательно, все производные по этой координате в дифференциальных уравнениях равновесия обратятся в нуль. Кроме того, в плоскостях θ не возникнут касательные напряжения. Следовательно, напряжение σ_θ всегда будет главным, а ось ρ может иметь любое направление в плоскости z . Таким образом, компоненты напряжений при осесимметричном напряженном состоянии можно записать так [11]:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\rho & 0 & \tau_{\rho z} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \tau_{z\rho} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Всего будет три нормальных и два равных между собой касательных напряжения. При этом напряжение $\sigma_\theta = \sigma_2$, т. е. оно всегда является главным.

Условие равновесия в цилиндрической системе координат имеет следующее математическое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Энергетическое условие пластичности (1.45) для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\sigma_{i_1} = \sigma_{i_2} \sqrt{1 - \mu_{12}} \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.91)$$

Изменим индексы 1, 2, 3 на ρ , θ и z . Тогда получим

$$\sigma_{i\rho} = \sigma_{i\theta} = \sqrt{1 - \mu_{\rho\theta}} \sqrt{\frac{\mu_{\rho\theta}}{1 - \mu_{\rho\theta}} (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2} \quad (1.92)$$

Здесь не имеет значения, какой из индексов 1 или 2 заменить на ρ или θ , а индексацию коэффициентов поперечной деформации можно было бы оставить и прежней, так как $\mu_{12} = \mu_{\rho\theta}$. В частном случае, когда $\sigma_\theta = \sigma_\rho$ имеем

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \pm \sqrt{2(1 - \mu_{\rho\theta})} \sigma_{s\rho}. \quad (1.93)$$

Это же выражение получается и в случае кусочно-линейного условия пластичности (1.63).

И, наконец, когда металл изотропен, то уравнение (1.92) преобразуется:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}. \quad (1.94)$$

И, соответственно, при $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, получаем

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \pm \sigma_s(\sigma_i). \quad (1.95)$$

Глава 1.6. УПРОЩЕННЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УСЛОВИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

При решении конкретных задач обработки металлов давлением не всегда целесообразно записывать условия пластичности в обычной форме (1.45), (1.63). Так, например, если принята схема плоской деформации при осесимметричном напряженном состоянии, то условие равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0.$$

Очевидно, в этом случае и условие пластичности лучше всего выразить через разности только двух напряжений σ_ρ и σ_θ . Следует также отметить, что полная форма энергетического условия текучести имеет нелинейный вид. Это в свою очередь усложняет решение поставленной задачи.

Даже из этих примеров видно, какое большое значение в теории обработки металлов давлением имеют особые формы записи условий пластичности. Разберем наиболее важное из них.

§ 1. Запись энергетического условия пластичности в линейной форме

Это условие чаще всего преобразуют в уравнение

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta \sigma_{ik}. \quad (1.96)$$

Здесь, β — коэффициент Лодэ, учитывающий влияние среднего по величине напряжения и анизотропию среды.

Примем материал ортотропным и учтем при этом следующую особенность. В ортотропном теле главные напряжения σ_{\max} , σ_{\min} , $\sigma_{\text{ср}}$ могут быть различным образом ориентированы относительно осей анизотропии. В одних случаях σ_{\max} совпадут,

например, с направлением проката, в других — с направлением поперек его, в третьих — с направлением, перпендикулярном плоскости проката. То же самое можно сказать относительно σ_{cp} и σ_{min} . Механические свойства у ортотропного тела различны, следовательно, на величину β будет оказывать влияние расположение напряжений σ_{max} , σ_{cp} и σ_{min} относительно осей анизотропии, в направлении которых и записано условие пластичности.

В общем случае возможны шесть вариантов взаимного расположения главных напряжений относительно зафиксированных (условно принятых) осей анизотропии.

Рассмотрим случай, когда σ_{max} совпадает с направлением 1 (вдоль проката), σ_{cp} — с направлением 2 (поперек проката), а σ_{min} — с направлением 3 (перпендикулярно плоскости проката). Тогда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ и величина, характеризующая напряженное состояние ν_σ , запишется так:

$$\nu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \quad (1.97)$$

Отсюда среднее напряжение σ_2 можно выразить через σ_1 и σ_3 следующим образом:

$$\sigma_2 = \nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1.97a)$$

Подставляя это выражение в условие пластичности (1.45), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{i_1} &= \sqrt{\mu_{21}} \sqrt{\left(\sigma_1 - \nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_3 - \sigma_1)^2 +} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\left(\nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \left[\frac{\mu_{21}}{4} (\nu_\sigma - 1)^2 + \frac{\mu_{21}}{4} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) (\nu_\sigma + 1)^2 + (1 - \mu_{21}) \right]} \end{aligned}$$

Из этого следует

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma_{i_1}}{\sqrt{\frac{\mu_{21}}{4} (\nu_\sigma - 1)^2 + \frac{\mu_{21}}{4} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) (\nu_\sigma + 1)^2 + 1 - \mu_{21}}} \quad (1.98)$$

Таким образом, величина коэффициента β_1^1 составляет

$$\beta_1^1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_{21}}{4} (\nu_\sigma - 1)^2 + \frac{\mu_{21}}{4} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) (\nu_\sigma + 1)^2 + 1 - \mu_{21}}} \quad (1.99)$$

или

$$\beta'_1 = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}}}{\sqrt{v_\sigma^2 + 2(1 - 2\mu_{12})v_\sigma + 4 \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - 4\mu_{12} + 1}}. \quad (1.99a)$$

Если записать упрощенное выражение условия пластичности через интенсивности напряжений других направлений σ_{12} и σ_{13} , то коэффициент β'_1 изменится, соответственно, на величину

$$\sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \text{ и } \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}}.$$

При $\mu_{21} = \mu_{12} = 0,5$ соотношение (1.98) переходит в обычное выражение условия пластичности изотропного материала.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i. \quad (1.100)$$

где

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + v_\sigma^2}},$$

Отметим, что запись условия пластичности анизотропного тела в упрощенной форме позволяет судить о том, насколько оно отличается от условия пластичности изотропной среды.

Рассматривая другие комбинации расположения главных напряжений относительно осей анизотропии, получим подобные записи условия пластичности и соответствующие им коэффициенты β' (таблица 3).

С учетом соотношений

$$\mu_{21} + \mu_{31} = 1, \quad \mu_{12} + \mu_{32} = 1, \quad \mu_{23} + \mu_{13} = 1,$$

$$\frac{\mu_{21} \mu_{32}}{\mu_{12}} = \frac{\mu_{31} \mu_{23}}{\mu_{13}} \text{ и } \sigma_{i_2} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \sigma_{i_1}, \quad \sigma_{i_3} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}} \sigma_{i_1},$$

указанные в таблице шесть случаев записи условия пластичности можно представить в виде одного общего выражения

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \beta' \sigma_{i \max}. \quad (1.101)$$

Коэффициент β' в этом случае запишется так:

$$\beta' = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{\max. \text{ ср}}}{\mu_{\text{ср. max}}}}}{\sqrt{v_\sigma^2 + 2(1 - 2\mu_{\max. \text{ ср}})v_\sigma + 4 \frac{\mu_{\max. \text{ ср}}}{\mu_{\text{ср. max}}} - 4\mu_{\max. \text{ ср}} + 1}}. \quad (1.102)$$

Здесь

- $\sigma_{i \max}$ — интенсивность напряжений в направлении действия максимального главного напряжения;
- μ_{kl} — коэффициент поперечной деформации, где первый индекс показывает, в направлении какого из напряжений следует рассматривать поперечную деформацию при линейном растяжении

<p>$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$</p>	$\beta_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1 \sigma_{i1}}{1}$ $\beta_1 = \sqrt{\frac{M_{21} \left(\frac{1}{M_{12}} - 1 \right)^2 + \frac{M_{21}}{4} \left(\frac{1}{M_{12}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + 1 - M_{21}}{4}}$
<p>$\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$</p>	$\beta_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1 = \beta_2 \sigma_{i1}}{1}$ $\beta_2 = \sqrt{\frac{M_{21} \left(\frac{1}{M_{12}} - 1 \right) \left(1 - \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{M_{21}}{4} \left(1 + \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + 1 - M_{21}}{4}}$
<p>$\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$</p>	$\beta_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3 = \beta_3 \sigma_{i1}}{1}$ $\beta_3 = \sqrt{\frac{M_{21} \left(1 - \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{(1 - M_{21}) \left(1 + \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{M_{21}}{M_{12}} - M_{21}}{4}}{4}}$
<p>$\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$</p>	$\beta_4 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2 = \beta_4 \sigma_{i1}}{1}$ $\beta_4 = \sqrt{\frac{(1 - M_{21}) \left(1 - \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{M_{21}}{4} \left(1 + \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{M_{21}}{M_{12}} - M_{21}}{4}}$
<p>$\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$</p>	$\beta_5 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2 = \beta_5 \sigma_{i1}}{1}$ $\beta_5 = \sqrt{\frac{(1 - M_{21}) \left(1 - \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{M_{21}}{4} \left(\frac{1}{M_{12}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt{1/\sigma} \right)^2 - M_{21}}{4}}$
<p>$\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$</p>	$\beta_6 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 = \beta_6 \sigma_{i1}}{1}$ $\beta_6 = \sqrt{\frac{M_{21} \left(\frac{1}{M_{21}} - 1 \right) \left(1 - \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + \frac{(1 + M_{21}) \left(1 + \sqrt{1/\sigma} \right)^2 + M_{21}}{4}}{4}}$

(сжатию) образца, вырезанного в направлении действия напряжения, указанного вторым индексом.

Например, $\mu_{\max, \text{cp}}$ — это отношение поперечной деформации в направлении максимального напряжения к продольной деформации образца при линейном растяжении его в направлении σ_{cp} .

Однако при нахождении упрощенной записи условия пластичности возможен и другой подход. За основу примем направление главных напряжений, считая, что всегда σ_1 — максимальное, σ_2 — среднее по величине, а σ_3 — минимальное напряжение. Этим в дальнейшем и определяется индексация осей анизотропии. В этом случае нежелательно применение цифро-

вой индексации при определении коэффициентов поперечной деформации материала. Можно рекомендовать следующие обозначения: «а» — направление проката, «в» — направление поперек проката, «с» — перпендикулярно плоскости проката. Цифровую же индексацию следует вводить позднее при анализе конкретного процесса обработки давлением.

Такой подход освобождает от шести видов упрощенной записи условия пластичности и оно записывается только одним выражением

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta'_1 \sigma_{i_1}. \quad (1.103)$$

Рассмотрим, в каком случае β'_1 принимает экстремальное значение. Для этого необходимо, чтобы производная функция $\beta'_1 = f(v_\sigma)$ была равна нулю или обращалась в бесконечность. Производная $f'(v_\sigma)$ определяется из выражения (1.99):

$$f'(v_\sigma) = \frac{-2 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} (v_\sigma + 1 - 2\mu_{12})}}{\left[v_\sigma^2 + 2v_\sigma (1 - 2\mu_{12}) + 4 \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - 4\mu_{12} + 1 \right]^{3/2}}.$$

Следовательно, значения v_σ^* , удовлетворяющие необходимому условию экстремума, могут быть получены из уравнений

$$v_\sigma^* + 1 - 2\mu_{12} = 0$$

и

$$(v_\sigma^*)^2 + 2v_\sigma^* (1 - 2\mu_{12}) + 4 \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - 4\mu_{12} + 1 = 0.$$

Последнее из них, при $\mu_{12} \neq 0$, $\mu_{21} \neq 0$ и $\mu_{12} \neq 1$, $\mu_{21} \neq 1$ действительных решений не имеет, так как дискриминант уравнения меньше нуля. Это означает, что функция $\beta'_1 = f(v_\sigma)$ имеет экстремум при значениях v_σ^* , равных

$$v_\sigma^* = 2\mu_{12} - 1. \quad (1.104)$$

Соответственно, экстремальная величина $\beta'_{1\max}$ согласно выражению (1.104) составляет

$$\beta'_{1\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{21} \mu_{12}}}. \quad (1.105)$$

Заметим, что при $\mu_{12} = \mu_{21} = 0,5$ выражение (1.105) переходит в обычное соотношение для изотропного материала

$$\beta_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Среднее напряжение при $v_\sigma^* = 2\mu_{12} - 1$, как следует из (1.97а), равно

$$\sigma_2 = \sigma_1 \mu_{12} + \sigma_3 (1 - \mu_{12}).$$

Отсюда видно, что оно равно полусумме двух других напряжений только при $\mu_{12} = 0,5$.

При указанном соотношении напряжений имеем случай плоской деформации, так как одна из главных деформаций обращается в нуль. В действительности, подставив в уравнение

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{i_2}}{\sigma_{i_2}} [\sigma_2 - (1 - \mu_{12})\sigma_3 - \mu_{12}\sigma_1]$$

значение σ_2 получим, что $\varepsilon_2 = 0$. Следовательно, как и в случае изотропного тела, коэффициент β'_1 имеет экстремальное значение при плоской деформации.

При анализе некоторых процессов обработки металлов давлением, например, вытяжке, используется [12] упрощенная форма записи условия пластичности, где величина β принимается равной средне-интегральному значению $\bar{\beta}$. Для изотропного тела она равна

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{2}{\sqrt{3+v_\sigma^2}} dv_\sigma = \ln(v_\sigma + \sqrt{3+v_\sigma^2}) \Big|_{-1}^{+1} = 1,0986 \approx 1,1.$$

В случае ортотропного материала величина $\bar{\beta}'_1$ определяется из аналогичного соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'_1 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} dv_\sigma}{\sqrt{v_\sigma^2 + 2v_\sigma(1 - 2\mu_{12}) + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - 4\mu_{12} + 1}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \operatorname{Arsh} \frac{v_\sigma - 2\mu_{12} + 1}{2 \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}} \Big|_{-1}^{+1}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

После подстановки пределов и ряда преобразований выражение (1.106) можно записать так:

$$\bar{\beta}'_1 = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \ln \frac{\sqrt{1 - 2\mu_{12} + \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} + 1 - \mu_{12}}}{\sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} - \mu_{12}}}. \quad (1.106a)$$

В заключение отметим, что условие пластичности ортотропного материала может быть записано в линейной форме подобно изотропному телу. Однако здесь коэффициент β' учитывает не только характер напряженного состояния, но и зависит от степени анизотропии деформируемого металла.

§ 2. Представление энергетического условия пластичности в параметрической форме

В обработке металлов давлением существует ряд задач по определению напряжений и деформаций при плосконапряженном состоянии. Использование условия пластичности в упро-

щенной линейной форме записи не дает однозначного решения, так как неизвестно точное значение β .

Однако отдельные задачи, в частности, осесимметричное деформирование тонкостенных оболочек, удастся решить, если использовать параметрическое представление условия пластичности.

Рассмотрим вначале случай изотропного тела. Как показал А. Надаи [13], энергетическое условие пластичности изотропного тела

$$\sigma_s^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2$$

геометрически интерпретируется эллипсом с углом наклона осей 45° и может быть записано, как всякое уравнение эллипса, в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos \psi \\ \sigma_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos \left(\psi - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (1.107)$$

Здесь, ψ — функция, через которую выражены напряжения σ_1 и σ_2 .

Пределы изменения этой функции устанавливаются исходя из знаков действующих напряжений или, другими словами, от условий конкретной задачи.

Так при

$$\sigma_1 > 0 \text{ и } \sigma_2 < 0 \quad \frac{3}{2} \pi \leq \psi \leq \frac{11}{6} \pi.$$

Аналогично можно установить, что

$$\text{при } \sigma_1 < 0 \text{ и } \sigma_2 < 0 \quad \frac{5}{6} \pi \leq \psi \leq \frac{3}{2} \pi,$$

$$\text{при } \sigma_1 > 0 \text{ и } \sigma_2 > 0 \quad -\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

и, наконец, при

$$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0 \quad \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{5}{6} \pi.$$

Перейдем теперь к анализу условия пластичности анизотропного тела. Если принять плоскую задачу по напряжениям, то условие пластичности ортотропного тела запишется в виде (из таблицы 2):

$$\sigma_s^2 = \sigma_1^2 - 2\mu_{21} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\mu_{21}^2}{\mu_{12}} \sigma_2^2. \quad (1.108)$$

Выражение (1.108) является уравнением эллипса. Однако оси эллипса не образуют с координатными осями угол равный 45° . Величина этого угла зависит от степени анизотропии материала (μ_{12} и μ_{21}).

Воспользуемся обычными приемами аналитической геометрии и найдем каноническую форму уравнения эллипса (1.108). Прежде всего определим угол поворота α для приведения канонической форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_{12}} - \frac{1}{\mu_{21}} \right) \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_{21} - \mu_{12}}{\sqrt{(\mu_{21} - \mu_{12})^2 + 4\mu_{12}^2 \mu_{21}^2}} \right)} \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_{21} - \mu_{12}}{\sqrt{(\mu_{21} - \mu_{12})^2 + 4\mu_{12}^2 \mu_{21}^2}} \right)}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Далее, найдем значения полуосей в новой координатной системе

$$\frac{a'}{b'} \Big| = \frac{\sqrt{2} \sigma_{s_1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}}$$

Тогда уравнение эллипса в этих координатах будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{s_1}^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}} \right]^2 + \\ & + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{s_1}^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}} \right]^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Уравнение (1.110) теперь можно представить в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{s_1} \sqrt{\frac{2}{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}} \cos \varphi \\ \sigma_2 &= \sigma_{s_1} \sqrt{\frac{2}{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Переходя к прежним координатным осям σ_1 и σ_2 , по известным формулам преобразования, получим, что

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{s_1} (N \cos \varphi - M \sin \varphi) \\ \sigma_2 &= \sigma_{s_1} (N \cos \varphi + M \sin \varphi) \end{aligned} \quad (1.112)$$

Здесь

$$N = \sqrt{\frac{2}{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_{21} - \mu_{12}}{\sqrt{(\mu_{21} - \mu_{12})^2 + 4\mu_{12}^2 \mu_{21}^2}}\right)} \quad (1.113)$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\left(1 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}\right)^2 + 4\mu_{21}^2}}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_{21} - \mu_{12}}{\sqrt{(\mu_{21} - \mu_{12})^2 + 4\mu_{12}^2 \mu_{21}^2}}\right)}$$

Уравнения (1.112) могут быть преобразованы в

$$\sigma_1 = \sigma_s \sqrt{N^2 + M^2} (\cos \beta \cos \varphi - \sin \varphi \sin \beta), \quad (1.114)$$

$$\sigma_2 = \sigma_s \sqrt{N^2 + M^2} (\cos \beta \cos \varphi + \sin \varphi \sin \beta),$$

где

$$\cos \beta = \frac{N}{\sqrt{N^2 + M^2}} \quad (1.115) \quad \sin \beta = \frac{M}{\sqrt{N^2 + M^2}}. \quad (1.116)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_s \sqrt{N^2 + M^2} \cos(\varphi + \beta) \\ \sigma_2 &= \sigma_s \sqrt{N^2 + M^2} \cos(\varphi - \beta). \end{aligned} \quad (1.117)$$

Обозначив через функцию Ψ сумму $(\varphi + \beta)$, получим окончательное выражение условия пластичности в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{N^2 + M^2} \sigma_s \cos \psi, \\ \sigma_2 &= \sqrt{N^2 + M^2} \sigma_s \cos(\psi - 2\beta). \end{aligned} \quad (1.118)$$

Отметим, что при $\mu_{12} = \mu_{21} = 0,5$ выражения (1.118) переходят в обычные соотношения для изотропного металла. Действительно,

$$\sqrt{N^2 + M^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad 2\beta = 2 \arccos \frac{N}{\sqrt{N^2 + M^2}} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\sigma_{s_1} = \sigma_s$$

Характерной особенностью уравнения (1.118) является то, что пределы изменения величины Ψ зависят не только от знаков напряжений σ_1 и σ_2 , но и от степени анизотропии (μ_{12} и μ_{21}). Поэтому в каждом конкретном случае необходимо сначала по формулам (1.113) и (1.115) определить значение N , $\sqrt{N^2 + M^2}$ и 2β , а затем уже отыскивать пределы изменения функции Ψ .

Определяя область применения уравнения (1.118) в задачах обработки металлов давлением, прежде всего следует отме-

тить целесообразность использования его при совместном решении с уравнениями равновесия осесимметричной оболочки (безмоментное уравнение Лапласа), особенно с учетом изменения ее толщины.

Как правило, в уравнениях равновесия не удается записать члены, содержащие напряжения в виде разностного выражения типа $\eta(\sigma_1 - \sigma_2)$, с тем, чтобы в дальнейшем, используя условие пластичности, заменить разность величиной $\beta\sigma_s$, упростив этим решение. Тогда введение параметрической формы уравнения пластичности позволяет получить вполне определенные дифференциальные уравнения, а затем и решить их.

§ 3. Запись кусочно-линейного условия пластичности

Условие пластичности по максимальным касательным напряжениям изотропного тела не учитывает влияния среднего напряжения, так как оно записано только через два крайних напряжения. Другое дело, если материал является ортотропным или трансверсально-изотропным. Здесь кусочно-линейное условие текучести выражено через все три главных напряжения и естественно, нуждается в упрощении. При этом желательно представить его в форме аналогичной изотропному телу.

Выпишем условие пластичности ортотропной среды (1.63)

$$(\sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} (\sigma_3 - \sigma_2) = \pm \sigma_{s_1} \quad (AB \text{ и } A_{11}B)$$

$$(\sigma_2 - \sigma_1) - \sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}} (\sigma_3 - \sigma_1) = \pm \sigma_{s_2} \quad (AC \text{ и } A_1C_1)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} (\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \sigma_{s_1} \quad (BC_1 \text{ и } CB_1).$$

Возьмем первое из этих уравнений. В изотропном теле отсутствует напряжение σ_2 , так как $\sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} = 1$. Покажем влияние этого напряжения. Используя известное соотношение $\sigma_2 = \frac{\nu_\sigma(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ путем элементарных преобразований первое уравнение приведем к виду:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \frac{2\sigma_{s_1}}{\sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}(\nu_\sigma + 1) + (1 - \nu_\sigma)}} \quad (AB \text{ и } A_1B_1). \quad (1.119)$$

Введем следующее обозначение

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}(\nu_\sigma + 1) + (1 - \nu_\sigma)}} \quad (1.120)$$

Тогда уравнение (1.119) запишется таким образом

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \alpha_2 \sigma_{s_1}. \quad (1.121)$$

Здесь, как и при энергетическом условии пластичности, коэффициент α , а там β , учитывает влияние среднего напряжения и анизотропию материала. Очевидно, что для изотропной среды $\alpha = 1$ независимо от ν_σ .

По аналогии второе уравнение системы (1.63) перепишем в виде:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm \frac{(\nu_\sigma + 1)\sigma_{s_2}}{\nu_\sigma - 1 + 2\sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}}} \quad (AC \text{ и } A_1C_1) \quad (1.122)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \alpha_1 \sigma_{s_2} & (1.122a) \\ \alpha_1 &= \frac{\nu_\sigma + 1}{\nu_\sigma - 1 + 2\sqrt{\frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}}} \end{aligned}$$

Подобным же образом преобразуем и третье уравнение:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{s_1} \frac{1 - \nu_\sigma}{2 - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}}(1 + \nu_\sigma)} \quad (BC_1 \text{ и } CB^1) \quad (1.123)$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \alpha_3 \sigma_{s_1} \quad (1.123a)$$

Здесь

$$\alpha_3 = \frac{1 - \nu_\sigma}{2 - \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}}(1 + \nu_\sigma)}$$

В заключение отметим, что полученная форма записи кусочно-линейного условия в принципе не отличается от аналогичного выражения энергетического условия текучести.

Глава 1.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ НАДАИ-ЛОДЕ НАПРЯЖЕННОГО ν_σ И ДЕФОРМИРОВАННОГО ν_ε СОСТОЯНИИ

Для успешного использования упрощенной формы записи условия пластичности анизотропных тел необходимо знать точное значение показателя напряженного состояния ν_σ , что особенно важно при применении схемы плоского напряженного состояния.

Обычно для этого, с помощью найденных деформаций, вычисляют показатель деформированного состояния ν_ε . Затем, используя связь между ν_σ и ν_ε , находят значение параметра Надаи-Лоде для напряжений, а по нему и β в условии пластичности. В случае изотропной среды эта связь очень проста $\nu_\sigma = \nu_\varepsilon$, т. е. наблюдается совпадение показателей напряженного и деформированного состояний. У анизотропного тела такого совпадения не наблюдается.

Найдем связь между ν_σ и ν_ε для случая ортотропной среды. В основу вывода положим условие, что σ_1 всегда максимальное, σ_2 — среднее по величине, а σ_3 — минимальное напряжение. Запишем параметр Надаи-Лоде в следующей форме

$$\nu_\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

Используя физические уравнения (1.60), находим разность главных напряжений через деформации. Тогда, после подстановки и несложных преобразований, получим:

$$\nu_\sigma = \frac{2\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\varepsilon_2 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\varepsilon_1 - \varepsilon_3}.$$

Из условия постоянства объема заменим ε_2 через ε_1 и ε_3 . В этом случае

$$\nu_\sigma = \frac{\left(\frac{2}{\mu_{21}} + \frac{1}{\mu_{12}} - 3\right)\varepsilon_1 + \left(\frac{2}{\mu_{21}} - 1\right)\varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\varepsilon_1}$$

или, обозначая отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_3$ через α , найдем

$$\nu_\sigma = \frac{\left(\frac{2}{\mu_{21}} + \frac{1}{\mu_{12}} - 3\right)\alpha + \frac{2}{\mu_{21}} - 1}{1 - \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\alpha}. \quad (1.124)$$

Показатель направляющего тензора деформации также выразим через α

$$\nu_\varepsilon = \frac{(\varepsilon_2 - \nu_1) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = 3 \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{\nu_\varepsilon - 3}{\nu_\varepsilon + 3}.$$

Подставив значение α в уравнение (1.124), получим

$$\nu_\sigma = \frac{\left(1 - 4\mu_{12} + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}\right)\nu_\varepsilon + 3(2\mu_{12} - 1)}{(2\mu_{12} - 1)\nu_\varepsilon + 3}.$$

Обозначим $1 - 4\mu_{12} + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}$ через C , а $2\mu_{12} - 1$ через D . Тогда

$$\text{или} \quad \nu_\sigma = \frac{C\nu_\varepsilon + 3D}{D\nu_\varepsilon + 3} \quad (1.125)$$

$$\nu_\varepsilon = \frac{3(D - \nu_\sigma)}{D\nu_\sigma - C}.$$

Очевидно, что в случае изотропного тела $C=3$, $D=0$ и тогда $\nu_\sigma = \nu_\varepsilon$.

Часть II. НЕКОТОРЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Математическая теория пластичности дает необходимый комплекс уравнений и устанавливает общую методику решения задач, связанных с формоизменением материала. Однако решение возникающей при этом сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных связано со значительными трудностями. Поэтому приходится прибегать к целому ряду упрощений математического, геометрического и физического характера, которые лежат в основе так называемых инженерных (приближенных) методов. И несмотря на то, что ни один из них в настоящее время не является совершенным, они нашли широкое применение при расчете различных параметров обработки металлов давлением.

Разберем некоторые из них.

Глава 2.1. МЕТОД СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ С УСЛОВИЕМ ПЛАСТИЧНОСТИ

Данный метод позволяет определить напряжения на контактной поверхности и усилие, потребное для деформирования тела. Точность полученных решений зависит от характера принятых допущений. Наиболее общим из них является замена объемной задачи — плоской или осесимметричной, так как в противном случае число неизвестных превышает число уравнений. Причем решение в замкнутом виде может быть получено исходя из условия пластичности лишь для частных случаев, когда касательные напряжения на контакте либо равны нулю, либо постоянны. Кроме этого в большинстве случаев приходится прибегать к использованию приближенных уравнений равновесия и условия пластичности.

Применение того или иного вида уравнений равновесия зависит от конкретной задачи. Здесь можно лишь указать на некоторые их формы записи.

Так для операций листовой штамповки Е. А. Попов [14] приводит необходимые выражения условий равновесия и тщательно анализирует их применимость. В частности, в случае осесимметричной задачи при плоском напряженном состоянии и отсутствии касательных напряжений ($\tau_{r\theta} = 0$) уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\rho d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0.$$

Эта запись может быть использована и при расчете изгибов широких листов.

При теоретическом анализе многих процессов обработки давлением применяют гипотезу плоских сечений (либо аналогичную ей по смыслу — тонких сечений, осредненных напряжений), в которой говорится о том, что плоские сечения, проведенные через тело, остаются таковыми в течение всего процесса деформирования. Ее использование полагает, что напряжения зависят только от одной из координат. Причем сдвиги не влияют на характер распределения нормальных напряжений по сечению.

Так, применение указанной гипотезы позволило получить уравнение равновесия широкой полосы при ее осадке в следующем виде [15]:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} \pm \frac{2\tau_{xy}}{h} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь ось y направлена по толщине h .

Теперь более подробно проанализируем возможность применения условия пластичности ортотропного тела при методе совместного решения.

В принципе (так как речь идет о напряжениях на контактной поверхности) в условии пластичности должно входить касательное напряжение τ_{xy} . Однако при решении задач рассматривают лишь два крайних случая: либо касательное напряжение принимают отсутствующим, либо считают его максимальным.

В первом случае, когда заведомо известно, что касательное напряжение мало в сравнении с напряжением текучести, его величиной пренебрегают. Это эквивалентно утверждению о том, что направления осей координат мало отличается от главных. Тогда можно допустить, например, следующую форму записи энергетического условия пластичности:

$$\sigma_x - \sigma_z = \beta'_1 \sigma_{s1}. \quad (2.2)$$

Если деформируемый материал будет трансверсально изотропным или изотропным, в этом уравнении изменится лишь значение коэффициента β' . Необходимо помнить, что у ортотропного и трансверсального изотропного тел β' меняется в

более широких пределах, чем от 1 до $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Поэтому, если при изотропном металле в случае плоского напряженного состояния можно использовать любое из этих значений, то при анизотропном материале к применению условия пластичности в упрощенном виде нужно подходить более осторожно.

Когда же касательное напряжение на контакте является постоянным и максимальным по значению, энергетические условия пластичности при плоской деформации может быть представлено в виде

$$\sigma_{i_1} = \sqrt{(1 - \mu_{12}\mu_{21})(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} \tau_{xz}^2}. \quad (2.3)$$

Замечая, что β_1 при плоской деформации равно

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_{21}\mu_{12}}},$$

найдем

$$\sigma_{i_1}^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_z)^2}{\beta_1^2} + \tau_{xz}^2 \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \cdot \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} = \sigma_{s_1}^2$$

или

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{\beta_1 \sigma_{s_1}} = \pm \sqrt{1 - \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \frac{1 + \mu_1}{(1 - \mu_1) \sigma_{s_1}^2} \tau_{xz}^2}.$$

Учитывая, что

$\sigma_{s_1} \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}} \cdot \frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1}} = T$ — есть предел текучести при сдвиге в плоскости xy , получим

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{\beta_1 \sigma_{s_1}} = \pm \sqrt{1 - \frac{\tau_{xz}^2}{T^2}}.$$

Когда $\tau_{xz} = T$, подкоренное выражение обращается в нуль и можно пользоваться следующей записью условия пластичности:

$$\sigma_x - \sigma_z = 0. \quad (2.4)$$

или в дифференциальной форме

$$d\sigma_x = d\sigma_z \quad (2.4a)$$

Такое же условие пластичности применяют и при изотропном материале [15].

Е. П. Унксов вычислил среднюю погрешность и показал, что условие пластичности в форме (2.4) следует использовать при $0,7K \geq \tau_{xz} \leq K$, где $K = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s$ (тело изотропное). Переходя к ортотропному материалу, можно сохранить те же пределы, однако здесь вместо отношения $\frac{\tau_{xz}}{K}$ необходимо рассматривать значения $\frac{\tau_{xz}}{T}$.

В основе этого метода лежит закон сохранения энергии по которому работа всех внешних сил A_B равна работе внутренних сил A_D [11].

$$A_B = A_D.$$

Величина A_D считается положительной, а A_B — отрицательной. Их сумма представляет собой полную работу деформации A .

$$A = A_D + (-A_B) \equiv 0.$$

По аналогии с тензорами напряжений и деформаций можно рассматривать отдельно энергию изменения объема и формы тела, т. е. $A_D = A_0 + A_\Phi$.

В связи с принятой гипотезой о несжимаемости $A_0 \equiv 0$ и тогда $A_D = A_\Phi$.

Работа внешних сил равна разности работ активных сил, развиваемых машиной, и сил внешнего трения

$$A_B = A_a - A_{тр}. \quad (2.5)$$

Поскольку работа — величина скалярная, не зависящая от симметрии тела, выражение приращения энергии внутренних сил определяется как для изотропного, так и анизотропного тел из одних и тех же выражений [16]:

$$dA_D = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

или

$$dA_D = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV. \quad (2.6)$$

Далее, подставим в формулу (2.6) значения деформаций, взятых из следующих физических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} (\sigma_1 - \mu_{21} \sigma_2 - \mu_{31} \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} (\sigma_2 - \mu_{32} \sigma_3 - \mu_{12} \sigma_1) \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} (\sigma_3 - \mu_{13} \sigma_1 - \mu_{32} \sigma_2) \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} dA_D &= \frac{\varepsilon_{i1}}{\sigma_{i1}} \left(\sigma_1^2 + \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}} \sigma_2^2 + \frac{\mu_{31}}{\mu_{13}} \sigma_3^2 - 2\mu_{21} \sigma_1 \sigma_2 - 2 \frac{\mu_{32} \mu_{21}}{\mu_{12}} \sigma_2 \sigma_3 - \right. \\ &\quad \left. - 2\mu_{31} \sigma_1 \sigma_3 \right) dV. \end{aligned}$$

Так как выражение в скобках представляет собой σ_{i1}^2 , то можно записать

$$dA_D = \sigma_{i1} \varepsilon_{i1} dV$$

или

$$A_D = \iiint_V \sigma_{i1} \varepsilon_{i1} dV.$$

Интенсивности напряжений и деформаций разных направлений связаны между собой зависимостями:

$$\sigma_{i_2} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}} \sigma_{i_1} \quad \sigma_{i_3} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}} \sigma_{i_1},$$

$$\varepsilon_{i_2} = \sqrt{\frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}} \varepsilon_{i_1} \quad \varepsilon_{i_3} = \sqrt{\frac{\mu_{31}}{\mu_{13}}} \varepsilon_{i_1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sigma_{i_2} \varepsilon_{i_2} = \sigma_{i_3} \varepsilon_{i_3} = \sigma_{i_1} \varepsilon_{i_1}.$$

Тогда

$$A_D = \iiint_V \sigma_{i_1} \varepsilon_{i_1} dV = \iiint_V \sigma_{i_2} \varepsilon_{i_2} dV = \iiint_V \sigma_{i_3} \varepsilon_{i_3} dV. \quad (2.7)$$

Таким образом, для использования в расчетах обработки металлов давлением метода баланса работ, интенсивности напряжений и деформаций можно взять по любому из направлений.

Запись уравнения работы поверхностных сил сохраняет такой же формальный вид, что и при изотропном теле:

$$A_B \iint_F (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dF,$$

где X, Y, Z — проекции сил, действующих по участку поверхности dF , на оси координат, а u_x, u_y, u_z — соответствующие им перемещения. Однако величины, входящие в это уравнение, могут зависеть как от степени анизотропии, так и ее характера. Например, при осадке первоначально цилиндрического ортотропного образца его сечение обращается в эллипс, что влияет и на величину площади, и на перемещения по координатным осям.

В качестве примера иллюстрирующего метод баланса работ, рассмотрим задачу сжатия длинной полосы между шероховатыми плитами (рис. 2.1).

Работа деформации при отсутствии упрочнения материала равна

$$A_D = \sigma_{i_1} \iiint_V \varepsilon_{i_1} dV \quad (2.8)$$

При плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) выраженные интенсивности ε_{i_1}

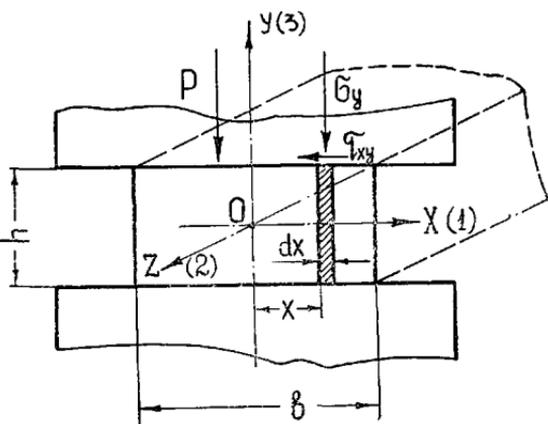


Рис. 2.1. Схема процесса осадки

для ортотропного тела записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{i_1} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu_{12}\mu_{21}}} \varepsilon_1; \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{i_1} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu_{12}\mu_{21}}} \frac{\Delta h}{h}.$$

Подставив значение ε_{i_1} в уравнение (2.8), получаем

$$A_D = \sigma_{s_1} \frac{1}{\sqrt{1-\mu_{12}\mu_{21}}} \frac{\Delta h}{h} \iiint_V dV. \quad (2.9)$$

Так как при плоской деформации длина тела остается без изменения, то интегрирование можно производить по площади. Если при этом величину $\sigma_{s_1} \sqrt{1-\mu_{21}\mu_{12}}$ обозначить через $2\kappa_1$, выражение (2.9) преобразится

$$A_D = 8\kappa_1 \frac{\Delta h}{h} l \int_0^{h/2} \int_0^{b/2} dx dy.$$

Поскольку оси координат расположены в центре полосы и рассматривается, вследствие симметрии, только четверть объема, то для нахождения всей работы A_D введен множитель, равный четырем.

После интегрирования и подстановки пределов окончательно получим

$$A_D = 2\kappa_1 \Delta h b l. \quad (2.10)$$

Работа активных сил определяется следующей формулой:

$$A_a = P_{\text{пол}} \Delta h. \quad (2.11)$$

Теперь остается определить работу сил трения. Она находится по уравнению энергии поверхностных сил. При этом нужно иметь в виду, что смещение на двух контактных поверхностях происходит только вдоль оси x , а поверхностным напряжением является $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

С учетом этого

$$A_{\text{тр}} = 4 \cdot 2\tau_{\kappa} l \int_0^{b/2} u_x dx, \quad (2.12)$$

где

$$u_x = \varepsilon_1 x = \frac{\Delta h}{h} x.$$

Интегрируя уравнение (2.12) и подставляя пределы, получим

$$A_{\text{тр}} = \tau_{\kappa} l \frac{\Delta h}{h} b^2.$$

В итоге, суммируя выражения работ, найдем, что

$$A_a = A_D + A_{\text{тр}}$$

или

$$P \Delta h = 2\kappa_1 \Delta h b l + \tau_{\text{кл}} \frac{\Delta h}{h} b^2.$$

Отсюда

$$P = b l \left(2\kappa_1 + \tau_{\text{к}} \frac{b}{h} \right).$$

Разделив обе части на площадь $F = b l$, определим удельное давление

$$p = 2\kappa_1 + \tau_{\text{к}} \frac{b}{h}. \quad (2.13)$$

Принимая тот или иной закон изменения $\tau_{\text{к}}$, можно получить несколько расчетных формул.

В заключение отметим, что рассматриваемый метод, как и метод совместного решения, принципиально можно использовать и для случая анизотропного металла в аналогичном классе задач.

Глава 2.3. МЕТОД СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ (СПДМ)

Этот метод разработан Ленинградской школой профессора Г. А. Смирнова-Аляева [17]. Он используется для решения практических задач на конечное формоизменение при монотонной или приближенно монотонной деформации изотропного тела.

Под монотонным (протекающим однозначно) подразумевается такой процесс деформации рассматриваемой малой материальной частицы, когда две ее точки либо все время приближаются, либо удаляются друг от друга и если при этом вид деформации (растяжение, сдвиг, сжатие), определяемый показателем ν_{ϵ} , остается неизменным [11].

Рассмотрим сущность данного метода сначала на изотропных телах.

Так как по условию монотонности соотношения главных деформаций не изменяются в течение всего процесса, то в качестве характеристики деформированного состояния можно принять конечные деформации. Тогда справедливо записать

$$\frac{e_1 - e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{e_1 - e_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \rho = \frac{1}{2G'}. \quad (2.14)$$

Здесь e_1, e_2, e_3 — конечные, логарифмические деформации. При простом нагружении $\nu_{\sigma} = \nu_{\epsilon}$. Следовательно, зная конечные

деформации, можно определить показатель напряженного состояния

$$\nu_{\sigma} = \frac{2\sigma_2 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2e_2 - \frac{e_1 - e_3}{2}}{e_1 - e_3} = \nu_{\varepsilon},$$

а по нему точное значение β из выражения

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_{\sigma}^2}}.$$

Это позволяет использовать упрощенную форму записи условия пластичности

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i.$$

Значение истинного предела текучести σ_i определяется из связи $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. Величина ε_i находится также по значениям результирующей деформации

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_1 - e_3)^2}.$$

В итоге для определения напряжений имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i, \quad (2.1)$$

$$2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = \nu_{\varepsilon} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

В качестве третьего уравнения можно взять одно из условий равновесия [11].

В частном случае, при плоском напряженном состоянии, задача упрощается. Для ее решения достаточно использовать уравнения связи между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1).$$

Прежде чем перейти к изложению применения метода СПДМ для анизотропных материалов, отметим, что условие монотонности здесь нарушаться не будет. Действительно, в случае ортотропной среды по главным осям анизотропии свойства тела постоянны и не меняются от точки к точке, т. е. оно однородно в этом направлении. А так как все основные соотношения записаны применительно к направлениям анизотропии, их можно использовать, как и в изотропном теле, для конечных деформаций.

Рассмотрим, как изменится запись уравнений, применяемых при этом методе, в случае ортотропного материала. Так, выражение (2.14) можно преобразовать

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right) e_1 - \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} &= \frac{\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \\ &= \frac{e_3 + \left(1 - \frac{1}{\mu_{12}}\right) e_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{1 - \mu_{21}\mu_{12}}{\mu_{12}} \frac{e_{i1}}{\sigma_{i1}} = \rho'. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Как видим, в уравнении появились коэффициенты поперечной деформации и, связанные с направлением величины σ_i и e_i . Значение интенсивности деформаций можно определить по формуле

$$e_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{\frac{1}{\mu_{12}} e_1^2 + 2e_1e_2 + \frac{1}{\mu_{21}} e_2^2}.$$

Затем, имея экспериментальную зависимость $\sigma_{i1} = \Phi_1(e_{i1})$, найдем и величину σ_{11} .

Использование функциональной связи между показателями напряженного и деформированного состояний

$$v_\sigma = f(v_\epsilon) \quad (1.125),$$

позволяет, как и при изотропном материале, найти точное значение коэффициентов β^1 . Это в свою очередь, дает возможность применить упрощенную запись условия пластичности

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1' \sigma_{i1}.$$

Таким образом, и при ортотропном теле задача сводится к аналогичной (2.15) системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \beta_1' \sigma_{i1} \\ 2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 &= v_\epsilon' (\sigma_1 - \sigma_3). \end{aligned}$$

При плоском напряженном состоянии можно использовать и следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{e_{i1}} \left[\left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) e_1 - e_3 \right], \\ \sigma_2 &= \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{e_{i1}} \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} \right) e_2 - e_3 \right]. \end{aligned}$$

Применение метода СПДМ будет показано при анализе процесса обтяжки.

Часть III. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ ХОЛОДНОЙ ШТАМПОВКИ

Расчет конкретной операции штамповки производится для нахождения необходимого комплекса параметров, определяющих данный технологический процесс:

силовых параметров — усилие, работа, мощность;

параметров, связанных с предельным формоизменением, минимальный радиусгиба, число потребных переходов и т.

точностных параметров — пружинение деформируемого металла и связанные с ним оптимальные формы инструмента и насадки;

геометрических параметров, определяющих форму заготовки.

Причем число факторов, которые необходимо учитывать при теоретическом анализе процесса, зависит от тех условий, в которых он протекает. Так, например, при расчете одних процессов необходимо учитывать трение, упрочнение и анизотропию металла, в то время как при расчете других некоторыми из них можно пренебречь.

Все это следует учитывать при выборе оптимальной расчетной схемы, которую, однако, нельзя назначать без знания напряженно-деформированного состояния материала в очаге деформации. Значительную помощь могут оказать диаграммы видов напряженного состояния.

Глава 3.1. ДИАГРАММЫ ВИДОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Как известно, любой процесс обработки металлов давлением характеризуется вполне определенными схемами главных напряжений и деформаций. Их совокупность представляет собой механическую схему деформации.

Важность изучения механической схемы деформации состоит в том, что ее вид определяет как способность вещества к пластическому формоизменению, так и к сопротивлению пластическим деформациям.

Однако, помимо схем главных напряжений и деформаций на указанные свойства оказывает влияние и величина средних

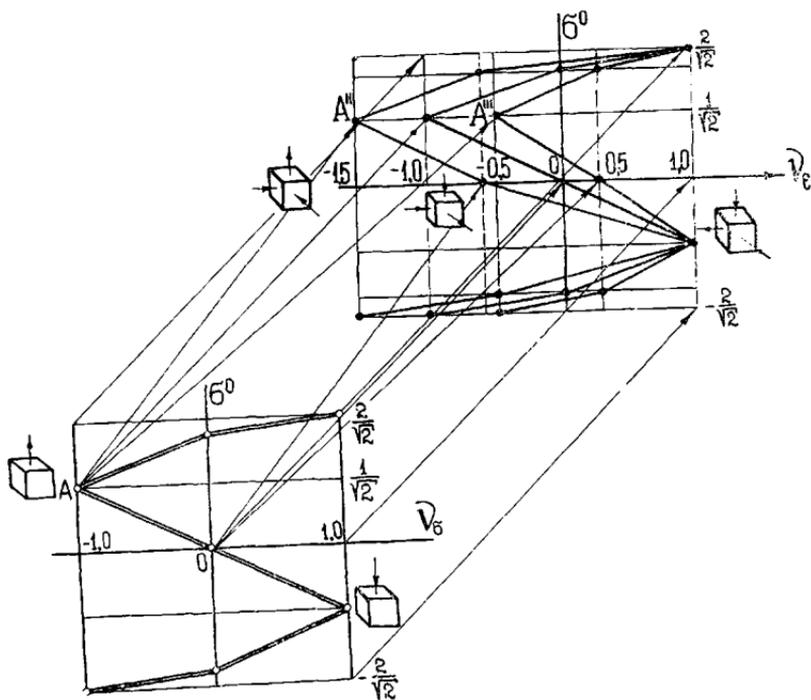


Рис. 3.1. Диаграммы видов напряженного состояния

Если по оси абсцисс вместо v_σ отложить показатель напряляющего тензора деформаций v_ϵ , а по другой оси — относительное среднее напряжение, то диаграмма видов напряженного состояния окажется связанной уже с деформированным состоянием тела. Другими словами, тензор относительных главных напряжений может быть выражен как через показатель напряляющего тензора напряжений, так и деформаций.

У изотропного тела наблюдается равенство $v_\sigma = v_\epsilon$. Отсюда ясно, что диаграммы видов напряженного состояния, выраженные через v_σ и v_ϵ совпадают между собой. При анизотропном материале такого совпадения не наблюдается, так как $v_\sigma \neq v_\epsilon$. Следовательно, диаграммы будут смещены относительно друг друга по оси v_σ (v_ϵ).

При анализе процессов обработки металлов давлением: в одних случаях (ряд операций листовой штамповки, волочение, прессование) за основу принимают напряженное состояние, в других (гибка широкой полосы, прокатка и т. д.) — деформированное состояние. В практике за основу может быть принята либо диаграмма в координатах $\sigma^\circ - v_\sigma$, либо — $\sigma^\circ - v_\epsilon$. При этом, если исходным взято напряженное состояние, то величина v_σ принимается независимой от анизотропии. Деформир

ванное же состояние (v_ϵ) определяется как схемой напряжений, так и свойствами материала. Естественно, что в другом случае независимым будет v_ϵ .

Рассмотрим вариант, когда за основу принято напряженное состояние. Тогда диаграмма в координатах $\sigma^\circ - v_\epsilon$ будет такой же, как при изотропном теле. Диаграмма, выраженная через $\sigma^\circ - v_\epsilon$, как видно из соотношения (1.125), изменяется в зависимости от анизотропии материала (рис. 3.1).

Для большей наглядности диаграммы построены для частного вида анизотропии — трансверсально изотропного металла, у которого $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu^1$. Не анализируя диаграмму в целом, остановимся лишь на частных случаях напряженного состояния (чистый сдвиг $v = 0$ и линейное растяжение $v_\epsilon = -1$). Из рис. 3.1 ясно, что чистый сдвиг по напряжениям и деформациям возможен только при изотропном теле. Если же μ^1 отличен от 0,5, то будем иметь уже объемную схему деформаций. Так, когда $\mu^1 > 0,5$ возникают две деформации растяжения и одна сжатия, в то время как при $\mu^1 < 0,5$, наоборот — две деформации сжатия и одна растяжения.

При линейном растяжении изотропного материала $v_\epsilon = -1$, при $\mu^1 = 0,7$, $v_\epsilon = -1,61$, а когда $\mu^1 = 0,3$, $v_\epsilon = -0,53$. Отсюда видно, что при сохранении объемной схемы деформации соотношения между главными деформациями меняются в зависимости от анизотропии тела.

Если же за основу взять схему деформаций, то в зависимости от степени анизотропии металла одному и тому же деформированному состоянию будут соответствовать различные схемы напряжений.

Сопоставляя диаграммы видов напряженного состояния изотропной и анизотропной среды, можно судить о том, какое влияние оказывает анизотропия на данный процесс, т. е. положительно или отрицательно влияет на пластичность материала и его сопротивление деформации. Это необходимо учитывать при составлении технологического процесса. Очевидно, что только анализ диаграмм видов напряженного состояния позволит правильно ответить на вопрос, рационально ли используются свойства материала при данной операции.

Глава 3.2. ГИБКА ЛИСТОВОГО МЕТАЛЛА

Под действием изгибающего момента (рис. 3.2) в продольном направлении часть заготовки получает растяжение, а другая — сжатие. При этом возникают тангенциальные напряжения σ_θ . В любой момент деформирования существует поверхность, разделяющая зоны сжатия и растяжения. Она носит название «нейтральная поверхность».

По мере изгиба отдельные слои заготовки нажимают друг на друга, что приводит к появлению радиальных напряжений

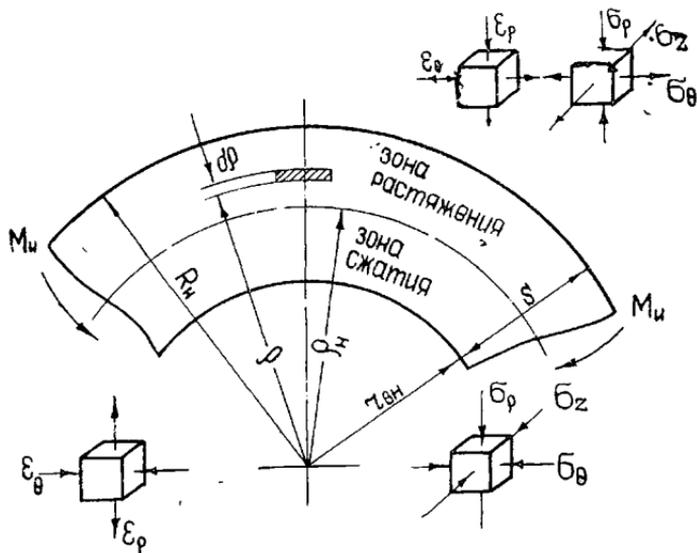


Рис. 3.2. Схема гибки широких листов

σ_ρ , увеличивающихся с уменьшением относительного радиуса кривизны детали.

Окончательная схема напряженно-деформированного состояния зависит от формы и размеров изгибаемого полуфабриката. Различают гибку узких и широких заготовок. К широким относятся в частности листы, при гибке которых в большой степени затруднена поперечная деформация. Из-за этого возникают аксиальные напряжения σ_z .

При теоретических расчетах поперечной деформацией обычно пренебрегают и принимают схему плоской деформации. Кроме этого используются следующие допущения:

считают, что главные оси напряжений и деформаций совпадают соответственно с радиальным (ось 3), тангенциальным (ось 1) и аксиальным (ось 2) направлениями. Тогда на площадках нормальных к ним касательные напряжения отсутствуют, что значительно упрощает анализ процесса;

при гибке на большие радиусы ($\frac{r_0}{S} > 2$) считается справедливой гипотеза плоских сечений.

§ 1. Распределение напряжений по сечению заготовки

Используя вышеуказанные допущения, условие равновесия можно записать следующим образом:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0.$$

Уравнение пластичности ортотропного тела представим в упрощенной форме

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} = \pm \beta'_{\max} \sigma_{s_1} (\sigma_{s\theta}). \quad (3.3)$$

Здесь знак плюс относится к зоне растяжения, а минус — сжатия.

Пренебрегая упругой зоной, методом совместного решения уравнений равновесия и пластичности, получаем формулы для напряжений.

Зона растяжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\beta'_{\max} \sigma_{s_1} \ln \frac{R_H}{\rho} \\ \sigma_{\theta} &= \beta'_{\max} \sigma_{s_1} \left(1 - \ln \frac{R_H}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (3.4a)$$

Зона сжатия

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -\beta'_{\max} \sigma_{s_1} \ln \frac{\rho}{r_B} \\ \sigma_{\theta} &= -\beta'_{\max} \sigma_{s_1} \left(1 + \ln \frac{\rho}{r_B}\right). \end{aligned} \quad (3.4b)$$

При этом были использованы следующие граничные условия: при $\rho = R_H$ и $\rho = r_B$, $\sigma = 0$.

Из условия равенства напряжений σ_{ρ} на границе зон сжатия и растяжения получаем известную формулу

$$\rho_H = \sqrt{R_H r_B}. \quad (3.5)$$

Таким образом, у ортотропных тел анизотропия не влияет на положение нейтрального волокна, но изменяет величину напряжений. Попутно отметим, что радиус нейтральной поверхности не зависит от упрочнения [20], [21].

Для определения отдельных параметров процесса гибки необходимо знать наибольшую величину радиальных напряжений. Очевидно, максимальная величина этих напряжений будет находиться на нейтральной поверхности. Подставив значение ρ_H из (3.5) в формулу (3.4), находим [11]:

$$\sigma_{\rho \max} = -\beta'_{\max} \sigma_{s_1} \ln \sqrt{\frac{R_H}{r_B}} = -\beta'_{\max} \sigma_{s_1} \ln \sqrt{1 + \frac{\rho_H}{r_B}}. \quad (3.6)$$

Из полученных выражений видно, что на $\sigma_{\rho \max}$ влияет не только относительная толщина заготовки, но и анизотропия ее свойств.

§ 2. Определение изгибающего момента

Для нахождения усилия и величины упругой отдачи при гибке необходимо знать величину изгибающего момента $M_{\text{из}}$, который определяется из условия равенства его моменту внутренних сил, создаваемого напряжением $\sigma_{\theta} = f(\rho)$.

Пренебрегая упругой областью и считая, что нейтральная поверхность совпадает со срединной, момент всего сечения на единицу ширины можно вычислить по формуле

$$M_n = \int_{\rho_n}^{R_n} \sigma_\theta \rho d\rho + \int_{r_B}^{\rho_n} (-\sigma_\theta) \rho d\rho = 2 \int_0^{S/2} \sigma_\theta y dy. \quad (3.1)$$

где $y = \rho - \rho_n$.

Для его определения примем дополнительное условие, что $\sigma_\rho = 0$, хотя это и вносит некоторую ошибку в расчет. В этом случае условие пластичности (3.3) запишется так:

$$\sigma_\theta = \pm \beta'_{\max} \sigma_{s_1}.$$

Подставим его в формулу момента. После интегрирования подстановки пределов получим

$$M_n = \beta'_{\max} \sigma_{s_1} \frac{S^2}{4} = \frac{\sigma_{s_1} S^2}{4 \sqrt{1 - \mu_{12} \mu_{21}}}. \quad (3.2)$$

Как и все предыдущие формулы, выражение момента получено без учета упрочнения материала.

Теперь рассмотрим, как изменится формула изгибающего момента, если упрочнение тела задано степенной функцией вида

$$\sigma_{i\theta} = K_\theta \varepsilon_{i\theta}^n \quad (\sigma_{i_1} = K_1 \varepsilon_{i_1}^n), \quad (3.3)$$

где K_θ (K_1) и n — константы материала [22].

Для определения интенсивности напряжений найдем отношение между напряжениями σ_θ и σ_z . С этой целью воспользуемся выражениями (1.57). В нашем случае они будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_1'} \sigma_\theta - \frac{\mu_{12}}{E_2'} \sigma_z, \\ \varepsilon_\rho &= -\frac{\mu_{21}}{E_1'} \sigma_\theta - \frac{\mu_{32}}{E_2'} \sigma_z. \end{aligned}$$

Так как согласно принятой схеме $\varepsilon_z = 0$, а $\varepsilon_\rho = -\varepsilon_\theta$, то между напряжениями получается следующая взаимосвязь:

$$\sigma_z = \mu_{12} \sigma_\theta.$$

Подставив найденное значение в уравнение (1.15) после нескольких преобразований, получим

$$\sigma_{i\theta} = \sqrt{1 - \mu_{21} \mu_{12}} \sigma_\theta. \quad (3.4)$$

Как известно из (1.56), интенсивность деформаций при плоской деформации имеет такую запись

$$\varepsilon_{i\theta} = \frac{\varepsilon_\theta}{\sqrt{1 - \mu_{12} \mu_{21}}}. \quad (1.56)$$

Заменим в функции (3.9) интенсивности напряжений и деформаций через их значения (1.56а), (3.10):

$$\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \sigma_{\Theta} = K_{\Theta} \frac{\varepsilon_{\Theta}^n}{(\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}})^n}.$$

Отсюда получим следующую формулу:

$$\sigma_{\Theta} = K'_{\Theta} \varepsilon_{\Theta}^n, \quad (3.11)$$

где

$$K'_{\Theta} = \frac{K_{\Theta}}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Согласно гипотезе плоских сечений относительная деформация произвольного волокна является линейной функцией его расстояния от нейтрального слоя, т. е. $\varepsilon_{\Theta} = \frac{y}{\rho_{\text{н}}}$.

Тогда

$$\sigma_{\Theta} = \frac{K'_{\Theta}}{\rho_{\text{н}}^n} y^n.$$

Подставим найденное значение тангенциального напряжения в формулу изгибающего момента (3.7)

$$M_{\text{н}} = 2 \frac{K'_{\Theta}}{\rho_{\text{н}}^n} \int_0^{S/2} y^{n+1} dy.$$

После интегрирования и подстановки пределов получаем

$$M_{\text{н}} = \frac{K'_{\Theta} S^{n+2}}{2^{n+1} (n+2) \rho_{\text{н}}^n}. \quad (3.12)$$

§ 3. Пружинение детали после гибки

Упругие деформации в материале после снятия нагрузки изменяют форму детали. Она, как говорят, «отпружинивает». Величину пружинения необходимо учитывать при изготовлении оснастки.

Согласно теореме о разгрузке А. И. Ильюшина [19] кривизна нейтрального слоя после удаления внешнего момента $\rho_{\text{ост}}$ определяется из следующей зависимости:

$$\frac{1}{\rho_{\text{ост}}} = \frac{1}{\rho_{\text{н}}} - \frac{M_{\text{н}}}{JE_1}, \quad (3.13)$$

где I — момент инерции сечения. Для листа он равен $I = \frac{bS^3}{12}$ или на единицу ширины $I = \frac{S^3}{12}$.

Преобразуем формулу (3.13):

$$\rho_{\text{ост}} = \frac{\rho_{\text{н}}}{1 - \rho_{\text{н}} \frac{M_{\text{н}}}{IE_1}}.$$

Подставив значение изгибающего момента и момента инерции сечения, получаем

$$\rho_{\text{ост}} = \frac{\rho_{\text{н}}}{1 - \rho_{\text{н}} \frac{3\beta'_{\text{max}} \sigma_{s1}}{E_1 S}}$$

— для идеально пластического тела.

$$\rho_{\text{ост}} = \frac{\rho_{\text{н}}}{1 - \frac{3K'_{\Theta}}{(n+2)E_1} \left(\frac{2\rho_{\text{н}}}{S}\right)^{1-n}}$$

— для упрочняемого тела.

Для определения угла пружинения используем свойство нейтрального волокна сохранять свою длину после пружинения

$$\alpha \rho_{\text{н}} = \alpha_{\text{ост}} \rho_{\text{ост}}.$$

При этом угол пружинения равен

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha_{\text{ост}} = \left(1 - \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_{\text{ост}}}\right) \alpha.$$

Подставим значение $\rho_{\text{ост}}$ и найдем:

$$\Delta \alpha = \rho_{\text{н}} \frac{3\beta'_{\text{max}} \sigma_{s1} \alpha}{E_1 S}$$

— для идеально пластического материала;

$$\Delta \alpha = \frac{3K'_{\Theta}}{(n+2)E_1} \left(\frac{2\rho_{\text{н}}}{S}\right)^{1-n} \alpha$$

— для упрочняемого тела.

В практике вместо $\rho_{\text{н}}$ удобнее пользоваться внутренним радиусом $r_{\text{в}}$ [25]; поэтому заменяя $\rho_{\text{н}}$ через $r_{\text{в}} + \frac{S}{2}$, получим

$$\Delta \alpha = \left(r_{\text{в}} + \frac{S}{2}\right) \frac{3\beta'_{\text{max}} \sigma_{s1} \alpha}{E_1 S} \quad (3.14)$$

и

$$\Delta \alpha = \frac{3K'_{\Theta}}{(n+2)E_1} \left(\frac{2r_{\text{в}}}{S} + 1\right)^{1-n} \alpha. \quad (3.15)$$

§ 4. Определение давления резины при гибке материала по формблоку

Уже отмечалось, что знание величины изгибающего момента позволяет определять усилие для различных случаев гибки заготовок. При изготовлении деталей летательных аппаратов широкое распространение получила штамповка резиной—теория ее наиболее полно изложена в работе [24], взятой нами за основу.

Давления, которые должны быть приложены со стороны резины для изгиба борта, можно определять из условия равенства моментов внутренних и внешних сил

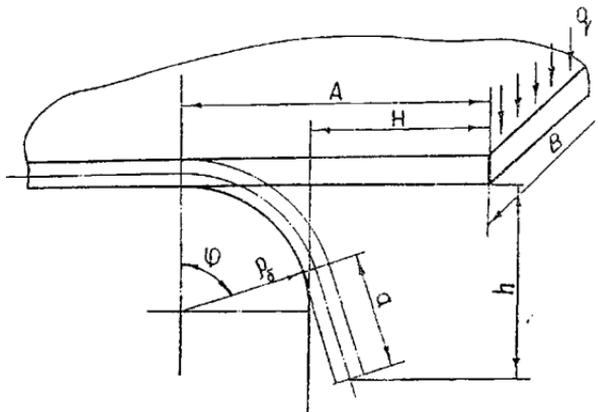


Рис. 3.3. Схема гибки резиной прямого борта

$$M_{\text{вн}} = M_{\text{н}}.$$

Момент внутренних сил на единицу ширины в случае упрочнения, выраженного степенной функцией, равен (3.12):

$$M_{\text{вн}} = \frac{K'_{\Theta} S^{n+2}}{2^{n+1} (n+2) r_n^n}.$$

Внешние силы создают следующий момент единичной ширины (рис. 3.3):

$$M_{\text{н}} = \frac{q_{\varphi} a^2}{2},$$

где $a = A - r_n \varphi$.

Тогда

$$M_{\text{н}} = \frac{q_{\varphi} (A - r_n \varphi)^2}{2}. \quad (3.16)$$

Приравнявая моменты внутренних и внешних сил, найдем значение потребного давления резины

$$q_{\varphi} = \frac{K'_{\Theta} S^{n+2}}{2^n (n+2) r_n^n (A - r_n \varphi)^2}. \quad (3.17)$$

При $A = \frac{\pi r_n}{2}$, ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) оно должно быть бесконечно большим. Чтобы борт получил полное прилегание к формблоку, требуется дополнительный припуск заготовки.

§ 5. Гибка листов на малые радиусы (стесненный изгиб), [35]

В конструкциях летательных аппаратов широко применяются соединения обшивки с гофрированными оболочками и гнутыми из листа профилями. Детали, полученные обычным гибом, имеют довольно большие радиусы, превышающие толщину материала в три раза и более. Это приводит к снижению жесткости профиля или оболочки, а следовательно, к утяжелению конструкции.

Изготовление детали с малыми радиусами ($r=S$ и менее) возможно с условием наложения сжимающих усилий в процессе формообразования угла. При этом наблюдается утолщение материала в зонегиба, что, естественно, повышает жесткость детали.

Рассмотрим подобный процесс (рис. 3.4). Обозначим начальную толщину листа — S_0 , толщину листа после деформации на биссектрисе углагиба — S , радиус внутреннего волокна $r_в$, радиус наружного волокна — $R_{н}$ и уголгиба через 2α . Будем считать, что осьгиба совпадает с направлением прокатки листа или перпендикулярно ему, т. е. совпадает с одной из главных осей анизотропии. Далее, как и при обычной гибке широких листов, принята схема плоской деформации.

Известно, что одним из основных допущений, лежащих в основе теории пластического изгиба, является гипотеза плоских сечений. Однако приемлема она лишь в случаях, когда под действием приложенной нагрузки лист принимает форму поверхности не имеющей резких изменений кривизны. Если же, участки большой кривизны сопрягаются с прямыми, как в рассматриваемой задаче, гипотеза плоских сечений несправедлива и может привести к существенным ошибкам.

В связи с этим примем гипотезу, основанную на следующих допущениях.

Продольные волокна и волокна нормальные плоскости листа, ортогональные до деформации, остаются ортогональными и после деформации.

Продольное волокно после деформации представляет собой дугу окружности (v_n) и прямые (av и nt), параллельные недеформированным полкам детали (рис. 3.4). Причем геометрическое место точек сопряжения криволинейных и прямолинейных участков деформированных волокон есть прямые линии (AB и CD). На рис. 3.4 $R_{н} < r_в + S_0$, что соответствует достаточно большим сжимающим усилиям. Если же $R_{н} = r_в + S_0$, то предложенная гипотеза автоматически переходит в гипотезу плоских сечений.

Согласно принятым допущениям, продольные и нормальные волокна после деформации образуют ортогональную сетку — сетку направлений главных деформаций — напряжений. И

Здесь U_2 — безразмерный параметр семейства окружностей (II) изменяется в следующем интервале:

$$-1 \leq u_2 \leq 1.$$

Для упрощения дальнейших математических преобразований введем новые координаты U_2 и φ , где φ — угол между осью ay и радиусом ρ дуги σ_n . При этом старые координаты x_1 и y_2 через новые выражаются следующим образом:

$$x_1 = [r_2 + r_1 + (r_2 - r_1)u_2] \sin \varphi \quad (3.19)$$

$$y_1 = [r_2 + r_1 + (r_2 - r_1)u_2] \cos \varphi + (\eta - r_2 + r_1)u_2 - (r_2 + r_1).$$

Тогда в новых координатах φ , U_2 уравнение семейства (I) есть $U_2 = \text{const}$.

Из (3.19) найдем тангенс угла наклона произвольной кривой $U_2 = U_2(\varphi)$, т. е. определим первую производную функцию

$$y'_1 = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial y_1}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_1}{\partial \varphi}}$$

или в нашем случае

$$y'_1 = \frac{[\eta - (r_2 - r_1)] \frac{du_2}{d\varphi} + (r_2 - r_1) \cos \varphi \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - [(r_2 + r_1) + (r_2 - r_1)u_2] u_2 \sin \varphi}{(r_2 - r_1) \sin \varphi \frac{du_2}{d\varphi} + [(r_2 + r_1) + (r_2 - r_1)u_2] \cdot \cos \varphi} \quad (3.20)$$

Отсюда тангенс угла наклона семейства (I) ($U_2 = \text{const}$) равен:

$$y'_{11} = -\text{tg} \varphi.$$

Из условия ортогональности семейств линий находим, что

$$y'_{12} = -\frac{1}{y'_{11}} = \text{ctg} \varphi.$$

Подставляя значение y'_{12} в левую часть уравнения (3.20), после элементарных алгебраических преобразований, получаем дифференциальное уравнение линий второго семейства:

$$\frac{d\varphi}{\sin \varphi} = (\lambda - 1) \frac{K du_2}{1 + Ku_2},$$

где

$$\lambda = \frac{\eta}{r_2 - r_1}; \quad \text{а } K = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Его решение есть:

$$\text{tg} \frac{\varphi}{2} = u_1 (1 + Ku_2)^{\lambda - 1}$$

или

$$\varphi = 2 \arctg [u_1 (1 + Ku_2)^{\lambda - 1}]. \quad (II)$$

Здесь U_1 — постоянная интегрирования, являющаяся параметром второго семейства (3.22). Его значение расположено в интервале

$$0 \leq u_1 \leq (1 + Ku_2)^{1-\lambda} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Кривые $U_2 = \text{const}$ и $U_1 = \text{const}$ представляют собой координатные линии ортогональной криволинейной системы (U_1, U_2) . Подставляя значение φ из (II)' в уравнения (3.19), находим выражение прямоугольных координат x, y через криволинейные ортогональные координаты U_1, U_2 :

$$x_1 = (r_2 + r_1)(1 + Ku_2) \frac{2u_1(1 + Ku_2)^{\lambda-1}}{1 + u_1^2(1 + Ku_2)^{2\lambda-2}} \quad (3.21)$$

$$y_1 = (r_2 + r_1) \left[(\lambda - 1)u_2 - 1 + (1 + Ku_2) \frac{1 - u_1^2(1 + Ku_2)^{2\lambda-2}}{1 + u_1^2(1 + Ku_2)^{2\lambda-2}} \right].$$

Теперь приступим к определению напряженно-деформированного состояния при стесненном изгибе.

Уравнения равновесия в ортогональной криволинейной системе координат [27] и главных напряжениях будут:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(H_2\sigma_1) - \sigma_2 \frac{\partial H_2}{\partial H_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(H_1\sigma_2) - \sigma_1 \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0,$$

где H_1 и H_2 — коэффициенты Ляме; σ_1 — напряжение продольного волокна, σ_2 — напряжение нормального волокна.

В дальнейшем используем только второе уравнение, преобразованное в

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} = \frac{\partial H_1}{\partial x_2} H_1^{-1} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.22)$$

где

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \right)^2. \quad (3.23)$$

В случае плоской деформации, при использовании степенной аппроксимации $\sigma_{11} = K_1 \varepsilon_{i1}^n$ (3.9) уравнения связи можно записать в следующем виде:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = K_1 (1 - \nu_{13}\nu_{31})^{\frac{-(1+n)}{2}} l_1^n = \mathcal{D} [\ln(1 + \varepsilon_1)]^n. \quad (3.24)$$

Здесь 3 — направление оси гiba (аксиальное направление), l_1 — истинная деформация в направлении <1 , а

$$\mathcal{D} = K_1 (1 - \nu_{13}\nu_{31})^{\frac{-(1+n)}{2}}$$

Подставляя значение разности напряжений в уравнение (3.22), получим

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} = D \frac{\partial H_1}{\partial u_2} H_1^{-1} [\ln(1 + \varepsilon_1)]^n. \quad (3.25)$$

Найдем величину $(1 + \varepsilon_1)$. Из $1 + \varepsilon_{1\text{отн}} = \frac{dS_1}{dS_{1\text{cp}}}$, где $\varepsilon_{1\text{отн}}$ — деформация продольного волокна относительно среднего, $dS_1 = H_1 dU_1$ — дифференциал дуги ($U_2 = \text{const}$) произвольного продольного волокна, а $dS_{1\text{cp}} = H_{1\text{cp}} dU_1$ — дифференциал дуги ($U_2 = 0$) срединного волокна, получим

$$H_{1\text{cp}} = H_1 \Big|_{u_2=0} = H_1(u_1, 0).$$

По правилу сложения относительных деформаций имеем

$$1 + \varepsilon_1 = (1 + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_{1\text{отн}}),$$

где ε_0 — деформация срединного волокна, которая является неизвестной функцией U_1 .

$$1 + \varepsilon_1 = (1 + \varepsilon_0) \frac{H_1}{H_{1\text{cp}}} = (1 + \varepsilon_0) \frac{H_1(u_1, u_2)}{H_1(u_1, 0)}. \quad (3.26)$$

Подставляя полученное выражение в (3.25), определим

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial u_2} = \left[\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, u_2) \right]^n \left(H_1^{-1} \frac{\partial H_1}{\partial u_2} \right) \quad (3.27)$$

$\sigma_2 = \frac{\bar{\sigma}_2}{D}$ — безразмерное напряжение.

Это уравнение легко проинтегрировать, считая выражение в круглых скобках частной производной по U_2 выражения квадратных скобок. Его решение есть:

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{1}{1+n} \left[\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, u_2) \right]^{1+n} + \varphi(u_1),$$

где $\varphi_1(U)$ — произвольная функция U_1 .

Неизвестные функции $(1 + \varepsilon_0)$ и φ найдем из граничных условий: $\bar{\sigma}_2 = 0$ при $U_2 \pm 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+n} \left[\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, 1) \right]^{1+n} + \varphi(u_1) &= 0, \\ \frac{1}{1+n} \left[\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, -1) \right]^{1+n} + \varphi(u_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Отсюда

$$\left[\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, 1) \right]^{1+n} = \left[\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, -1) \right]^{1+n} \quad (3.29)$$

Заметим, что показатель степени n надо рассматривать как нечетное число, так как функция $\sigma_{i1} = K_1 \varepsilon^n$ — нечетная. Тогда из уравнения (3.29) следует, что

$$\ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, 1) = \pm \ln \frac{1 + \varepsilon_0}{H_1(u_1, 0)} H_1(u_1, -1).$$

В полученной формуле надо взять знак минус, так как выражения, стоящие в левой и правой части, есть деформации наружного и внутреннего волокна, а они имеют противоположные знаки. В этом случае имеем

$$1 + \varepsilon_0 = \frac{H_1(u_1, 0)}{\sqrt{H_1(u_1, 1)H_1(u_1, -1)}}. \quad (3.30)$$

$$\varphi(u_1) = -\frac{1}{1+n} \left[\ln \sqrt{\frac{H_1(u_1, 1)}{H_1(u_1, -1)}} \right]^{1+n}.$$

Теперь можно записать выражения для деформаций и напряжения $\bar{\sigma}_2$ через H_1 :

$$1 + \varepsilon_1 = \frac{H_1(u_1, u_2)}{\sqrt{H_1(u_1, 1)H_1(u_1, -1)}}; \quad (3.31)$$

$$\bar{\sigma}_2 = -\frac{1}{1+n} \left\{ \left[\ln \sqrt{\frac{H_1(u_1, 1)}{H_1(u_1, -1)}} \right]^{n+1} - \left[\ln \frac{H_1(u_1, u_2)}{\sqrt{H_1(u_1, 1)H_1(u_1, -1)}} \right]^{n+1} \right\}. \quad (3.32)$$

Найдя значения частных производных $\frac{dx_1}{du_1}$ и $\frac{dy_1}{du_1}$ из уравнений (3.21) и подставляя их в (3.25), получим, что

$$H_1 = (r_2 + r_1) \frac{2(1 + Ku_2)\lambda}{1 + u_1^2(1 + Ku_2)^{2\lambda-2}}.$$

Подставляя значение H_1 в (3.31), найдем

$$1 + \varepsilon_1 = \frac{(1 + Ku_2)^\lambda}{(1 - K^2)^{0,5\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{[1 + u_1^2(1 + K)^{2\lambda-2}][1 + u_1^2(1 - K)^{2\lambda-2}]}}{1 + u_1^2(1 + Kn_2)^{2\lambda-2}} \quad (3.33)$$

Формулы для определения напряжений теперь можно представить в виде:

$$\frac{\sigma_2}{D} = -\frac{1}{1+n} \left\{ \ln \sqrt{\left(\frac{1+K}{1-K} \right)^\lambda \cdot \frac{1+u_1^2(1-K)^{2\lambda-2}}{1+u_1^2(1+K)^{2\lambda-2}}} \right\}^{1+n} - [\ln(1 + \varepsilon_1)]^{1+n}$$

$$\frac{\sigma_1}{D} = [\ln(1 + \varepsilon_1)]^n - \quad (3.34)$$

$$- \frac{1}{1+n} \left\{ \ln \sqrt{\frac{(1+K)^\lambda}{(1-K)} \cdot \frac{1+u_1^2(1-K)^{2\lambda-2}}{1+u_1^2(1+K)^{2\lambda-2}}} \right\}^{1+n} - [\ln(1 + \varepsilon_1)]^{1+n}.$$

Из формул (3.33) и (3.34) заключаем, что в рассмотренном процессе анизотропия не влияет на характер распределения деформаций и напряжений, но влияет на их величину.

На биссектрисе угла гiba $U_1=0$ и формулы (3.33), (3.34) значительно упрощаются.

$$1 + \varepsilon_{16} = \left(\frac{1 + KU_2}{\sqrt{1-K^2}} \right)^\lambda$$

$$\bar{\sigma}_{26} = \frac{\sigma_{16}}{D} = -\frac{1}{1+n} \left\{ \left[\frac{\lambda}{2} \ln \frac{1+K}{1-K} \right]^{1+n} - \left[\lambda \ln \frac{1+KU_2}{\sqrt{1-K^2}} \right]^{1+n} \right\}$$

$$\bar{\sigma}_{16} = \frac{\sigma_{16}}{D} = \left[\lambda \ln \frac{1+KU_2}{\sqrt{1-K^2}} \right]^n - \frac{1}{1+n} \left\{ \left[\frac{\lambda}{2} \ln \frac{1+K}{1-K} \right]^{1+n} - \left[\lambda \ln \frac{1+KU_2}{\sqrt{1-K^2}} \right]^{1+n} \right\}.$$

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о вычислении силовых факторов — усилия T и изгибающего момента M на биссектрисе угла гiba.

$$T = \int_{-S/2}^{S/2} \sigma_{16} dU = \frac{1}{2} \eta S_0 \int_{-1}^1 \sigma_{16} dU_2$$

$$M = \int_{-S/2}^{S/2} \sigma_{16} S U dU = \frac{S_0^2}{4} \eta^2 \int_{-1}^1 \sigma_{16} U_2 dU_2.$$

Если принять
$$\frac{T}{DS_0} = \tau = \frac{M}{DS_0^2} = m, \quad (3.36)$$

где τ и m — удельные безразмерные усилия и момент, тогда

$$\tau = \frac{1}{2} \eta \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{16} dU_2 \quad (21); \quad m = \frac{1}{4} \eta^2 \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{16} U_2 dU_2. \quad (3.37)$$

Заметим, что между величинами α_0 , S_b , S , R_H и r_B имеется чисто геометрическое соотношение

$$S \cos \alpha = S_0 - (1 - \cos \alpha)(R_H - r_B)$$

или в безразмерных величинах

$$\eta \cos \alpha = 1 - (1 - \cos \alpha)(r_2 - r_1). \quad (3.38)$$

Следовательно, при вычислении силовых факторов τ и m имеется три независимых параметра. На практике обычно известны α и r_1 . Тогда, если задано утолщение $\eta = \frac{S}{S_0}$, необходимое удельное усилие вычисляется по формуле (3.37) одним из методов приближенного интегрирования. Если же задано усилие, то выражение (3.37) является уравнением относительно η , которое решается одним из методов численного анализа. В реальных процессах на параметры α , r_1 и η могут быть наложены дополнительные связи, и диапазон их изменения обычно ограничен. Поэтому для расчета конкретного процесса желательно

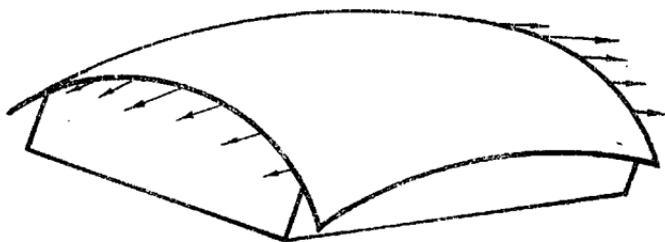


Рис. 3.5. Схема процесса обтяжки с растяжением

построить номограммы по уравнениям (3.37), (3.38), а не делать расчет для каждого случая в отдельности.

Глава 3.3. ОБТЯЖКА С РАСТЯЖЕНИЕМ ЛИСТОВЫХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

При изготовлении сложных деталей типа обшивок, обтекателей и т. д. широко применяется процесс обтяжки. Его сущность заключается в том, что плоская листовая заготовка, зажатая по концам, сначала изгибается по пуансону, а затем приобретает окончательную форму за счет продольных растягивающих усилий, приложенных к зажимам (рис. 3.5). Очевидно, что здесь процесс деформирования будет сложным, так как он включает в себя элементы изгиба и растяжения.

При изготовлении деталей методом обтяжки с растяжением возникает ряд вопросов, которые можно решить теоретическим путем, например, расчет формы заготовки, определение усилия, необходимого для проведения операции, точностные параметры, предельные возможности материала при данном процессе и т. д.

§ 1. Напряженно-деформированное состояние при обтяжке с растяжением

Как и большинство технологических операций обработки металлов давлением, обтяжка с растяжением характерна неравномерностью деформаций в различных зонах изделия. Поэтому, чтобы судить о поведении металла при изготовлении детали, необходимо знать его напряженно-деформированное состояние в этих зонах.

Для изучения напряженно-деформированного состояния воспользуемся методом СПДМ. В первую очередь определяем конечные деформации в исследуемых местах изделия. Их можно найти путем замера искажения координатной сетки, нанесенной на поверхность заготовки. В случае начальной круглой

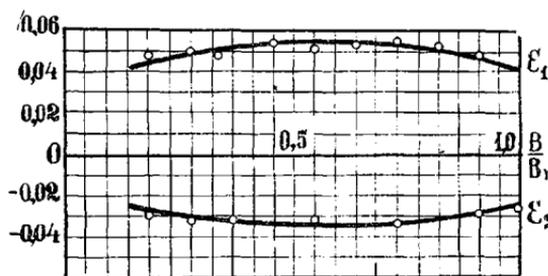
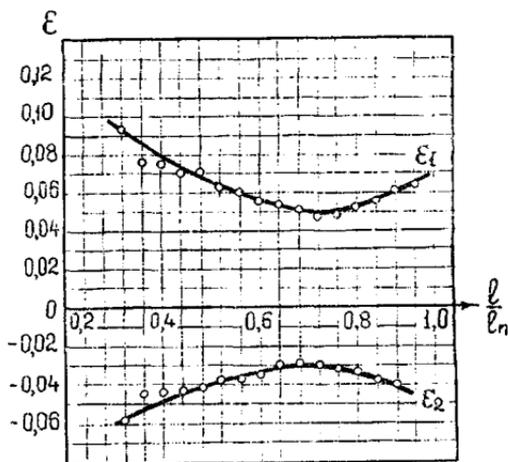


Рис. 3.6. Характер распределения деформаций в продольном направлении при обтяжке

напряжения связи (таблица 2), находят распределение напряжений в различных зонах детали. Типичный характер распределения напряжений показан на рисунке 3.7. Из графика видно, что напряжения σ_2 близки к нулю, следовательно, для некоторых расчетов при обтяжке с растяжением может быть принята схема линейного напряженного состояния.

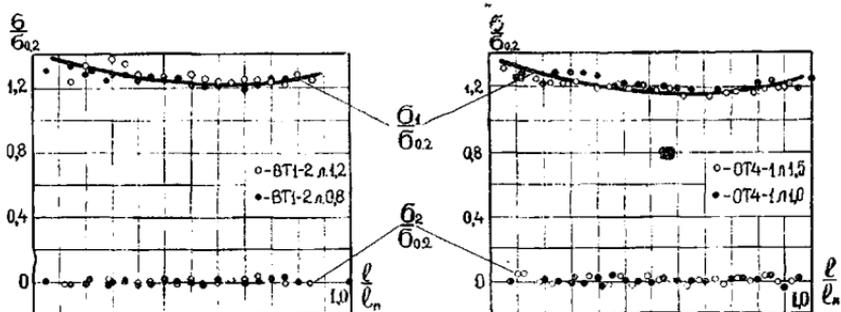


Рис. 3.7. Распределение напряжений при обтяжке

сетки с диаметром d , конечные деформации подсчитывают по формулам

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{2a}{d},$$

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{2b}{d} \text{ и } \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

где $2a$ и $2b$ — большая и малая оси полученного эллипса. Типичный характер распределения деформаций приведен на рис. 3.6.

Как следует из методов СПДМ, по найденным деформациям определяют их интенсивность (формула 1.47). После этого, применяя зависимость $\sigma_1 = \sigma(\varepsilon_1)$, находят величину интенсивности напряжений. Здесь можно воспользоваться либо графической зависимостью $\sigma_{i1} = \phi(\varepsilon_1)$ (кривые упрочнения), либо аналитическим выражением $\sigma_{i1} = K_1 \varepsilon_{i1}^n$. И наконец, применяя урав-

§ 2. Расчет формы заготовки

Неравномерный характер распределения напряжений и деформаций в материале при обтяжке приводит к разнотолщинности и ограничению его деформирования за один переход. В связи с этим, желательно использовать форму заготовки, которая позволила бы получить в различных зонах детали примерно одинаковую деформацию.

Для нахождения такой формы заготовки примем схему линейного напряженного состояния и рассмотрим характер действия сил при ее обтяжке (рис. 3.8).

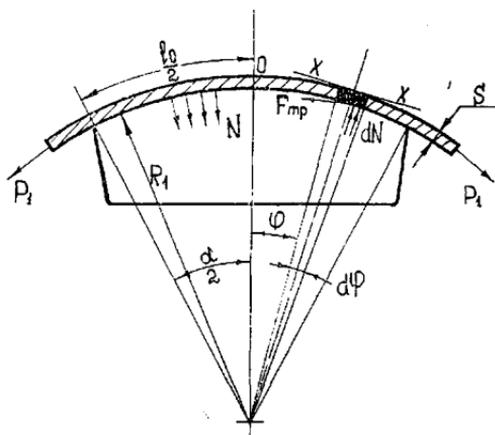


Рис. 3.8. Схема действия сил при обтяжке

Нормальное давление элемента заготовки составляет

$$dN = pBdl,$$

где $B = f(\varphi)$ — ширина заготовки; p — удельное давление, а $dl = R_1 d\varphi$ — дифференциал дуги.

Выразим удельное давление через напряжение σ_1 с помощью известного уравнения Лапласа $p = \frac{\sigma_1 S}{R_1}$. Тогда получим,

$$dN = \sigma_1 S B d\varphi.$$

Запишем выражение элементарной силы трения

$$dF_{\text{тр}} = f dN,$$

где f — коэффициент трения.

Подставляя в эту формулу значение dN , получим

$$dF_{\text{тр}} = \sigma_1 S B f d\varphi.$$

Уравнение равновесия элемента заготовки, вырезанного углом $d\varphi$, при проектировании силы на ось $X-X$, примет вид

$$\sigma_1 B S + d(\sigma_1 B S) - dF_{\text{тр}} - \sigma_1 B t = 0.$$

Так по условию $\sigma_1 = \text{const}$ (по углу), то и $S = \text{const}$. Следовательно,

$$dB - B f d\varphi = 0.$$

Интегрируя и подставляя начальные условия ($\varphi = 0, B = B_0$ — ширина заготовки в середине), найдем $B = B_0 l^{f\varphi}$. Угол φ обычно

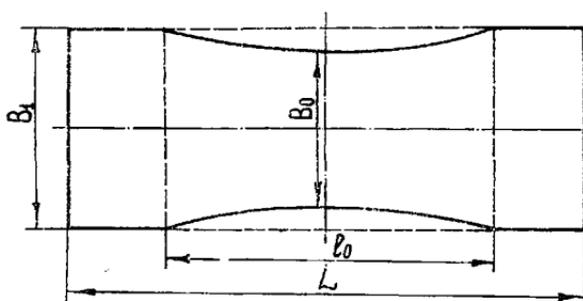


Рис. 3.9. Схема раскроя заготовки

следующим образом (рис. 3.9):
определить величину B_1 по формуле

$$B_1 = B_0 \left(1 + f \frac{l_0}{2R_1} \right).$$

Серединная ширина B_0 должна соответствовать ширине заготовки прямоугольной формы. Определяют ее по формуле:

$$B_0 = B_n (1 + \varepsilon_2) + 2\Pi,$$

где B_n — ширина развертки детали; n — величина технологического припуска на обрезку; ε_2 — деформация сужения материала при обтяжке.

Она выбирается в зависимости от необходимой степени деформации вдоль оси растяжения. Для ее определения необходимо ε_1 умножить на коэффициент поперечной деформации μ_{21} , т. е. $\varepsilon_2 = \mu_{21}\varepsilon_1$. Таким образом, ширина заготовки зависит от анизотропии материала;

вычислить длину заготовки по формуле, рекомендованной А. Н. Громовой [23]

$$L = l_0 + 2\Pi_1 + 2\Pi_2,$$

где Π_1 — припуск для зажима заготовки; Π_2 — припуск между зажимом и краем пуансона, величина которого выбирается экспериментальным путем;

соединить точки, соответствующие B_1 и B_0 дугами окружности.

§ 3. Влияние анизотропии на предельное формоизменение при обтяжке

Предельное формоизменение в операциях обработки металлов давлением определяется свойствами самого материала и видом напряженно-деформированного состояния, в котором он находится. Для анализа влияния напряженно-деформированного состояния целесообразно привлечь методику, предложенную С. И. Губкиным [18].

не превышает 6—9°, следовательно, для практики можно пользоваться приближенной формулой

$$B = B_0(1 + f\varphi)$$

или

$$B = B_0 \left(1 + f \frac{l}{2R_1} \right). \quad (3.39)$$

Практически раскрой можно провести

Поскольку схема процесса зависит как от величины среднего напряжения, так и от показателя напряженного состояния ν_σ , то математически это положение, на основании формул (3.1) и (3.2), можно представить как

$$\begin{aligned}\sigma_1^0 &= \sigma^0 + \frac{3 - \nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}} \\ \sigma_2^0 &= \sigma^0 + \frac{2 \nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}} \\ \sigma_3^0 &= \sigma^0 - \frac{3 + \nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}}.\end{aligned}\quad (3.40)$$

При анализе операций листовой штамповки часто принимается плоская схема напряжений. Иначе говоря, одно из главных напряжений равно нулю и возможны следующие случаи:

1. Двухосное растяжение ($\sigma_1^0 > \sigma_2^0 > 0$ и $\sigma_3^0 = 0$). Запишем связь между σ^0 и ν_σ :

$$\sigma^0 = \frac{3 + \nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}}.$$

Или, если обозначить отношение напряжений через $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = m$, получим

$$\sigma^0 = \frac{m + 1}{\sqrt{2} \sqrt{m^2 - m + 1}}.$$

2. Разноименная схема напряжений ($\sigma_1^0 > 0$, $\sigma_3^0 < 0$ и $\sigma_2^0 = 0$)

$$\sigma^0 = -\frac{2\nu_\sigma}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}},$$

или при

$$\begin{aligned}m &= \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \\ \sigma^0 &= \frac{m + 1}{\sqrt{2} \sqrt{m^2 - m + 1}},\end{aligned}$$

3. Двухосное сжатие ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 < 0$ и $\sigma_3 < 0$)

$$\sigma^0 = \frac{\nu_\sigma - 3}{\sqrt{2(3 + \nu_\sigma^2)}},$$

или при

$$\begin{aligned}m &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \\ \sigma^0 &= -\frac{m + 1}{\sqrt{2} \sqrt{m^2 - m + 1}}.\end{aligned}$$

Как видно из полученных выражений, напряженное состояние может быть полностью охарактеризовано только одним показателем — относительным средним напряжением, показателем ν_σ или же отношением главных напряжений m . Следовательно, и предельное формоизменение, связанное с видом напряженного состояния, определяется любой из указанных величин.

Перейдем непосредственно к анализу процесса обтяжки с растяжением. Чрезмерное утонение может привести к неустранимым дефектам (надрывы, трещины, разрывы и т. п.). Соблюдение определенной степени утонения листа важно и в том случае, когда в конструкции детали введен жесткий допуск по толщине. Таким образом, предельное формоизменение в процессе обтяжки характеризуется допустимым утонением материала (деформацией ε_3). При этом напряжением по толщине σ_3 пренебрегаем, считая, что напряженное состояние является плоским (двухосное растяжение). Напряжение σ_1 действует в направлении растягивающего усилия, а σ_2 — в поперечном направлении плоскости листа.

Форма детали может быть охарактеризована геометрическим коэффициентом обтяжки $K_{обт}$, который связан с деформацией в направлении растягивающей силы соотношением [26]:

$$\varepsilon_1 = K_{обт} - 1 = \frac{l_{max}}{l_{min}} - 1,$$

где l_{max} и l_{min} — максимальная и минимальная длина образующих обшивки в направлении действия растягивающей силы.

Чтобы связать геометрические характеристики обшивки, утонение материала, его анизотропию с тем или иным напряженным состоянием, используем физические уравнения (таблица 2). Тогда, обозначая отношение деформаций ε_3 и ε_1 через α , а отношение напряжений σ_2/σ_1 через m получим

$$\alpha = \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{1 - K_{обт}} = \frac{\mu_{21}(m - \mu_{21})}{\mu_{12}(1 - \mu_{21}m)} + 1. \quad (3.41)$$

Аналогично, используя соотношения (1.100), можно получить ту же связь в несколько иной форме:

$$\nu_\varepsilon = 3 \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} = \frac{3(D - \nu_\sigma)}{D\nu_\sigma - c}$$

или

$$\alpha = \frac{(D - c) + \nu_\sigma(D - 1)}{-D - c + \nu_\sigma(D + 1)}. \quad (3.42)$$

Выражения (3.41) и (3.42) упрощаются в случае трансверсально изотропного металла, так как $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu'$.

$$\alpha = \frac{\varepsilon_3}{1 - K_{обт}} = \frac{m - \mu'}{1 - \mu'm} + 1, \quad (3.43)$$

$$\alpha = \frac{(\nu_{\sigma} + 3)(\mu' - 1)}{\mu'(\nu_{\sigma} + 1) - 2} \quad (3.44)$$

Последние уравнения позволяют анализировать утонение той или иной формы детали в зависимости от схемы процесса и анизотропии свойств материала.

Обратимся к примеру обтяжки с растяжением трансверсально изотропных металлов с различными степенями

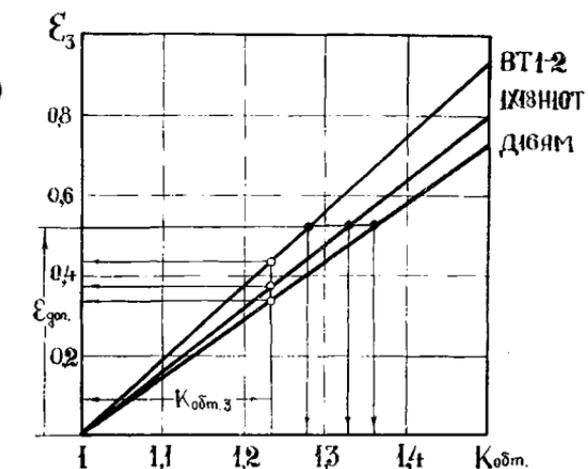


Рис. 3.10. Влияние анизотропии на геометрический коэффициент обтяжки

анизотропии — $\mu^1 \cong 0,35$ (алюминиевые сплавы типа Д16, АМГ-5 и др.); $\mu^1 \cong 0,5$ (нержавеющая сталь типа 1Х18Н10Т) и $\mu^1 \cong 0,65$ (сплавы титана типа ВТ1-2 ОТ4-1).

Как известно, величина m изменяется в зависимости от формы обшивки в пределах $m \cong 0,05 \div 0,15$. Используя соотношения (3.43), взаимосвязь формы детали $K_{обт.з}$, утонения ϵ_3 и степени анизотропии μ^1 можно графически представить так (рис. 3.10).

Из графика видно, что при одинаковом геометрическом коэффициенте обтяжки с увеличением величины μ^1 уменьшается утонение. Или иначе, при одинаковом допустимом утонении для материалов с большими значениями μ^1 можно получить более высокий геометрический коэффициент обтяжки.

Таким образом анизотропия материала оказывает заметное влияние на процесс обтяжки, определяя, наряду с другими факторами процесса, величину предельного формоизменения.

§ 4. Пружинение при обтяжке с растяжением

Определение пружинения при обтяжке в строгом решении — довольно сложная задача. Это объясняется тем, что получаемые детали являются оболочками двойной кривизны.

Рассмотрим схему нагружения при обтяжке с растяжением (рис. 3.11). Здесь M_1 и M_2 изгибающие моменты, а T_1 и T_2 — растягивающие усилия. Так как растягивающее усилие во втором направлении мало, то им можно пренебречь. Тогда средняя поверхность оболочки будет находиться в условиях одноосного растяжения. Далее будем считать, что оболочка является частью сферы радиуса R . Помимо этого при решении

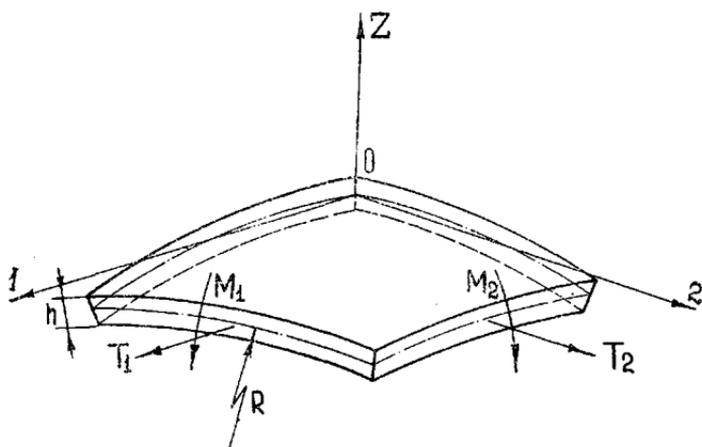


Рис. 3.11. Схема нагружения при обтяжке с растяжением

задачи примем обычные допущения технической теории оболочек [19], [28].

Вначале определим упругие деформации после снятия нагрузки. Их можно найти из следующих выражений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1ост} &= \varepsilon_{1\phi} + \varepsilon_{1раз} \\ \varepsilon_{2ост} &= \varepsilon_{2\phi} + \varepsilon_{2раз}.\end{aligned}\quad (3.45)$$

Здесь $\varepsilon_{1ост}$ и $\varepsilon_{2ост}$ — действительные остаточные упругие деформации; $\varepsilon_{1\phi}$ и $\varepsilon_{2\phi}$ — деформации оболочки вследствие изменения ее кривизны и линейных размеров при разгрузке; $\varepsilon_{1раз}$ и $\varepsilon_{2раз}$ — упругие деформации разгрузки, вычисленные в предположении равенства нулю остаточных напряжений. По гипотезе нормалей $\varepsilon_{1\phi} = \varepsilon_1 + H_1 z$, $\varepsilon_{2\phi} = \varepsilon_2 + H_2 z$, где ε_1 и ε_2 — упругие деформации срединной поверхности оболочки; H_1 и H_2 — изменение кривизны вследствие разгрузки.

Согласно теореме Ильюшина [19]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1раз} &= -\left(\frac{\sigma_{1н}}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{2н}\right) \\ \varepsilon_{2раз} &= -\left(\frac{\sigma_{2н}}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{1н}\right).\end{aligned}$$

Здесь E_1 и E_2 — модули упругости; ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона; $\sigma_{1н}$ и $\sigma_{2н}$ — напряжения под нагрузкой.

Знак минус показывает на то, что деформация при разгрузке противоположна напряжениям под нагрузкой.

Подставляя в формулы (3.45) значения $\varepsilon_{1\phi}$, $\varepsilon_{2\phi}$, $\varepsilon_{1раз}$ и $\varepsilon_{2раз}$, получаем

$$\varepsilon_{1ост} = \varepsilon_1 + H_1 z - \left(\frac{\sigma_{1н}}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{2н}\right),$$

$$\varepsilon_{2ост} = \varepsilon_2 + N_2 z - \left(\frac{\sigma_{2н}}{E_2} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{1н} \right). \quad (3.46)$$

Остаточные напряжения вычисляются по закону Гука для анизотропного тела [16]:

$$\sigma_{1ост} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} (\varepsilon_{1ост} + \nu_2 \varepsilon_{2ост})$$

$$\sigma_{2ост} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} (\varepsilon_{2ост} + \nu_1 \varepsilon_{1ост}).$$

Или, заменяя в этих формулах остаточные деформации их значениями из (3.46), найдем:

$$\sigma_{1ост} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} [(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2) + (N_1 + \nu_2 \chi_2) z] - \sigma_{1н} \quad (3.47)$$

$$\sigma_{2ост} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} [(\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1) + (N_2 + \nu_1 \chi_1) z] - \sigma_{2н}.$$

Как известно, внутренние усилия и моменты определяются из выражений:

$$\begin{aligned} T_{1ост} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1ост} dz; & T_{2ост} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2ост} dz \\ M_{1ост} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1ост} z dz; & M_{2ост} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2ост} z dz. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Подставляя в данные формулы соотношения (3.47) и проводя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} T_{1ост} &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 - T_{1н} \\ T_{2ост} &= C_{22} \varepsilon_2 + C_{21} \varepsilon_1 - T_{2н} \\ M_{1ост} &= D_{11} N_1 + D_{12} N_2 + M_{1н} \\ M_{2ост} &= D_{22} N_2 + D_{21} N_1 - M_{2н}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Здесь введены общепринятые обозначения:

$$C_{11} = \frac{E_1 h}{1-\nu_1\nu_2}; \quad C_{22} = \frac{E_2 h}{1-\nu_1\nu_2}; \quad C_{12} = C_{21} = \frac{E_1 \nu_2 h}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{E_2 \nu_1 h}{1-\nu_1\nu_2};$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)};$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{E_1 \nu_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} = \frac{E_2 \nu_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}.$$

Входящие в систему уравнений (3.49) $T_{1н}$, $T_{2н}$, $M_{1н}$, $M_{2н}$ вычисляются по формулам (3.48) при замене остаточных напряжений напряжениями нагрузки.

Для определения напряжений под нагрузкой необходимо знать величину возникающих деформаций. Так как принята

схема одноосного растяжения срединной поверхности оболочки в направлении 1, то $\varepsilon_{20} = -\mu_{21}\varepsilon_{10}$.

Здесь ε_{20} и ε_{10} — пластические деформации срединной поверхности оболочки.

По гипотезе Кирхгоффа имеем:

$$\varepsilon_{1n} = \varepsilon_{10} + \frac{z}{R}$$

$$\varepsilon_{2n} = -\mu_{21}\varepsilon_{10} + \frac{z}{R}.$$

Тогда по уравнениям связи между напряжениями и деформациями, в случае плоского напряженного состояния, находим:

$$\sigma_{1n} = \frac{\sigma_{i_1}}{\varepsilon_{i_1}} \left[(1 - \mu_{12}\mu_{21}) \varepsilon_{10} + (1 + \mu_{12}) \frac{z}{R} \right] \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$$

$$\sigma_{2n} = \frac{\sigma_{i_2}}{\varepsilon_{i_2}} \left[(1 + \mu_{21}) \frac{z}{R} \right] \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}.$$

Принимая степенной закон упрочнения $\sigma_{i1} = K_1 \varepsilon_{i1}^{n_1}$ и учитывая, что при развитых пластических деформациях $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i0}$, получим:

$$\sigma_{1n} = K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \left(\varepsilon_{10} + \frac{1 + \mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{z}{R} \right)$$

$$\sigma_{2n} = K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \frac{1 + \mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{z}{R} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}.$$

После подстановки значений напряжений в формулы (3.48) найдем:

$$M_{1n} = K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \frac{1 + \mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{h^3}{12} \frac{1}{R}$$

$$M_{2n} = K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \frac{1 + \mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^3}{12} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}.$$

Теперь уравнение (3.49) можно записать:

$$M_{1 \text{ ост}} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} (H_1 + \nu_2 H_2) \frac{h^3}{12} - K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \frac{1 + \mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{1}{R}.$$

$$M_{2 \text{ ост}} = \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} (H_2 + \nu_1 H_1) \frac{h^3}{12} - K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \frac{1 + \mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{h^3}{12} \frac{1}{R} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}.$$

Изменение кривизны H_1 и H_2 вычисляем из условия равенства нулю остаточных моментов. При этом пружинение будет несколько завышенным, так как изменение кривизны вызывает линейные деформации и напряжения.

Исходя из этого допущения, получим следующую систему:

$$H_1 + \nu_2 H_2 = \frac{(1 - \nu_1\nu_2) K_1 \varepsilon_{10}^{n-1}}{E_1} \cdot \frac{1 + \mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{1}{R}$$

$$H_2 + \nu_1 H_1 = \frac{(1 - \nu_1\nu_2) K_1 \varepsilon_{10}^{n-1}}{E_2} \cdot \frac{1 + \mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}.$$

Отсюда

$$H_1 = \frac{K_1 \varepsilon_{10}^{n-1}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left(\frac{1 + \mu_{12}}{E_1} - \nu_2 \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \cdot \frac{1 + \mu_{21}}{E_2} \right) \frac{1}{R}$$

$$H_2 = \frac{K_1 \varepsilon_{10}^{n-1}}{E_1 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \left[\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \frac{1 + \mu_{21}}{E_2} - \nu_1 \frac{1 + \mu_{12}}{E_1} \right] \cdot \frac{1}{R} \quad (3.50)$$

Учитывая, что $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$, окончательно найдем величины кривизны

$$H_1 = \frac{K_1 \varepsilon_{10}^{n-1}}{E_1 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \left[(1 + \mu_{12}) - \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} (1 + \mu_{21}) \right] \cdot \frac{1}{R}$$

$$H_2 = \frac{K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} \nu_1}{E_1 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \left[\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} \frac{(1 + \mu_{21})}{\nu_2} - (1 + \mu_{12}) \right] \cdot \frac{1}{R} \quad (3.51)$$

При ортотропном теле $H_1 = H_2$. В частном случае — трансверсальной изотропии $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\mu_{21} = \mu_{12} = \mu_1$, $E_1 = E_2 = E$, получим

$$H_1 = H_2 = \frac{K_1 \varepsilon_{10}^{n-1} (1 - \nu)}{E (1 - \mu_1) R} = \frac{1}{R_{\text{ост}}} - \frac{1}{R}. \quad (3.52)$$

Совершенно очевидно, что с ростом деформации пружинение уменьшается.

В практике обычно задается допуск на величину зазора между обшивкой и макетом (рис. 3.12).

Из чисто геометрических соображений имеем:

$$\delta_1 = \sqrt{R_{1 \text{ ост}}^2 - (R_{1 \text{ ост}} - R)^2 \sin^2 \alpha} - R - (R_{1 \text{ ост}} - R) \cos \alpha.$$

$$\delta_2 = \sqrt{R_{2 \text{ ост}}^2 - (R_{2 \text{ ост}} - R)^2 \sin^2 \beta} - R - (R_{2 \text{ ост}} - R) \cos \beta.$$

$$\delta_3 = \delta_1 + \delta_2$$

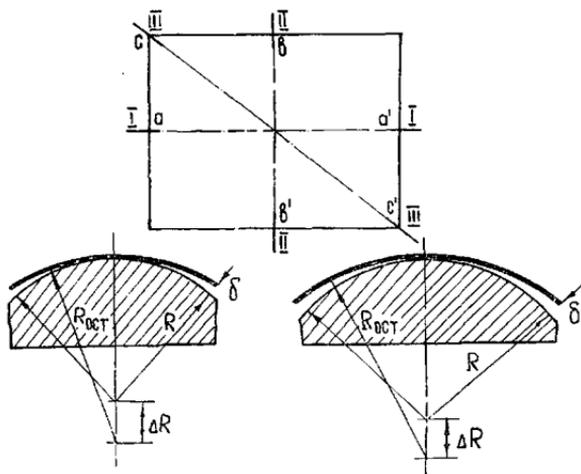


Рис. 3.12. Схема определения зазоров между макетом и обшивкой

Так как отношением $\left(\frac{R_{\text{ост}} - R}{R_{\text{ост}}}\right)^2 \sin^2 \alpha$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то

$$\begin{aligned}\delta_1 &\simeq (R_{1 \text{ ост}} - R)(1 - \cos \alpha) \\ \delta_2 &\approx (R_{2 \text{ ост}} - R)(1 - \cos \beta).\end{aligned}\tag{3.53}$$

В случае трансверсально изотропного тела

$$\begin{aligned}R_{1 \text{ ост}} &= R_{2 \text{ ост}} = R_{\text{ост}} \\ \delta_1 &\approx (R_{\text{ост}} - R)(1 - \cos \alpha) \\ \delta_2 &\approx (R_{\text{ост}} - R)(1 - \cos \beta).\end{aligned}\tag{3.54}$$



Часть IV. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГОРЯЧЕЙ ОБЪЕМНОЙ ШТАМПОВКИ

Штамповка является одним из наиболее распространенных способов массового изготовления деталей. Обладая относительной простотой, маневренностью отдельных операций, высокой производительностью, технологические процессы штамповки позволяют получить большое число однотипных деталей. Наилучшие механические характеристики, получаемые в поковках, способствуют широкому применению операций штамповки в мелкосерийном и индивидуальном производстве при изготовлении ответственных деталей.

В современных кузнечно-штамповочных цехах, наряду с прогрессивными процессами обработки металлов давлением, наиболее распространенным остается процесс штамповки в открытых штампах. Такое явление можно объяснить относительно высокой стойкостью, простотой наладки и изготовления инструмента. Однако значительные отходы металла в облой, достигающие в отдельных случаях 30%, 40%, ставят перед специалистами одну из основных задач — установить оптимальный объем облоя, обеспечивающий четкое заполнение гравюры при минимальных усилиях оборудования и максимальной стойкости штампов. Решение данной задачи ведется параллельно в двух направлениях:

Определение критерия сложности поковки.

Установление влияния формы и размеров облойной канавки на интенсивность заполнения штампов.

Последующее объединение полученных решений даст возможность установить технологически необходимый объем облоя, величина которого в настоящее время недостаточно изучена.

Ниже рассматривается ряд задач, позволяющих установить влияние формы облойной канавки на заполняемость открытого штампа.

Глава 4.1 АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБЛОЯ ПРИ ОТКРЫТОЙ ОБЪЕМНОЙ ШТАМПОВКЕ

Поступление металла в облой при штамповке поковок произвольной конфигурации неодинаково по периметру детали. Сложный характер течения металла приводит в этом случае к неравномерному образованию облоя. Изменяющийся вид напряженно-деформированного состояния облоя в значительной степени усложняет возможность установления характера его формоизменения.

В дальнейшем рассматриваются процессы горячей объемной штамповки осесимметричных и длинноосных деталей, характер течения металла в которых на последних стадиях штамповки может быть принят установившимся. При решении всех последующих задач приняты допущения:

1. Штамповка на последних стадиях протекает под действием простого нагружения.
2. Деформируемый металл несжимаем.
3. В процессе деформации металл не упрочняется.
4. Энергетическое условие пластичности принимается в упрощенной записи.

§ 1. Особенности работы открытых штампов с различными типами облойных канавок

Размеры и форма облойной канавки зависят от сложности поковки, а также от формы заготовки, поступающей в чистовой ручей. Функции, которые выполняет облойная канавка в открытом штампе, противоречивы.

С одной стороны — размеры и форма облойной щели должны обеспечить достаточный подпор для оформления поковки. При этом высокие напряжения в гравюре штампа желательно иметь с момента начала вытеснения металла в облой. Для выполнения указанного требования необходимо уменьшить высоту или увеличить ширину облойной щели. Еще более эффективным является применение сужающейся клиновидной облойной канавки [29].

С другой стороны — облойная канавка должна принять возможный избыток металла заготовки в конце процесса. При этом доштамповку желательно вести с минимальным подпором со стороны облоя. Однако любая облойная канавка, уменьшающая свою высоту по мере оформления поковки, непрерывно увеличивает напряжения в гравюре штампа до максимального значения. Интенсивность роста напряжений еще более возрастает при применении широких параллельных или сужающихся канавок. Отсюда следует, что вытеснение избыточного металла происходит при повышенных напряжениях, вызывает интенсивный износ порога облойной канавки и требует повышенной мощности применяемого оборудования.

Из сказанного можно заключить, что идеальная облойная канавка должна создавать максимальный подпор в начале образования облоя и сбрасывать его до нуля при доштамповке. Кроме того, работа расходуемая на деформацию облоя, должна быть минимальной. В настоящее время нет конструкции открытого штампа, облойная канавка которого полностью удовлетворяла бы этим требованиям. По мнению Я. М. Охрименко [30] правильная канавка в смысле геометрического построения должна иметь узкий выход из полости штампа и расширяться в сторону магазина, служащего для свободного размещения вытесняемого в него металла. Анализ работы расширяющейся клиновидной облойной щели [31] показывает более благоприятный для нее скоростной и силовой режимы течения металла, чем для щели с постоянной высотой. Однако в указанной работе не рассматривается влияние размеров и формы канавки на характер образования облоя и величину создаваемого им подпора. Тем самым ограничивается возможность практического применения таких форм канавок.

В хороших условиях работают открытые штампы, сохраняющие постоянной высоту облойной щели в течение всего процесса [32]. В этом случае подпор со стороны облоя остается постоянным, а образовавшийся тонкий заусенец не испытывает активной деформации со стороны инструмента. Однако подобные штампы пока не нашли широкого распространения ввиду сложности их изготовления и эксплуатации.

Для выбора оптимальных форм облойных канавок необходимо рассмотреть характер формоизменения облоя при разных условиях его образования и определить величину подпора, создаваемого в гравюре штампа канавками различных типов.

§ 2. Течение металла в облойную щель постоянной высоты

Рассмотрим осесимметричное выдавливание металла в облойную щель постоянной высоты (рис. 4.1). Образовавшийся при таком процессе облой можно рассматривать как кольцо, находящееся в плоско-напряженном состоянии под действием равномерного внутреннего давления. Под влиянием тангенциальных напряжений высота облоя по мере удаления от тела поковки уменьшается.

Для определения действующих в кольце напряжений воспользуемся методом совместного решения уравнения равновесия и условия пластичности. Пусть заштрихованный элемент (рис. 4.1) находится под действием равномерного напряженного состояния при допущении, что в процессе деформации плоские сечения не искажаются. Тогда условием равновесия для него будет служить уравнение

$$\frac{d\sigma_p}{d\rho} + \frac{\sigma_p - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \quad (4.1)$$

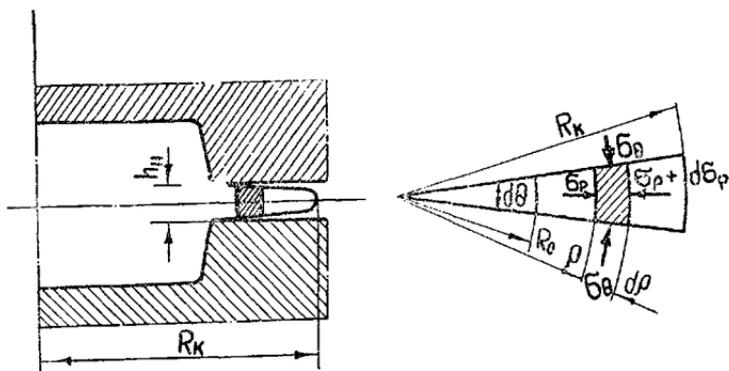


Рис. 4.1. Течение металла в облойную щель постоянной высоты

Условие пластичности для данного случая запишется

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} = \pm \beta \sigma_s. \quad (4.2)$$

Так как на внешней кромке облоя $\sigma_{\rho} = 0$, а σ_{θ} является растягивающим напряжением, в уравнении (4.2) необходимо принять положительный знак. После совместного решения уравнений (4.1) и (4.2) и последующего интегрирования получаем

$$\sigma_{\rho} = \beta \sigma_s \ln \rho + \ln C.$$

Постоянная интегрирования определится из условия, что при $\rho = R_k$, $\sigma_{\rho} = 0$, т. е.

$$\ln C = -\beta \sigma_s \ln R_k,$$

откуда

$$\sigma_{\rho} = \beta \sigma_s \ln \frac{\rho}{R_k}$$

или

$$-\sigma_{\rho} = \beta \sigma_s \ln \frac{R_k}{\rho}. \quad (4.3)$$

Принимая во внимание условие пластичности (4.2),

$$\sigma_{\theta} = \beta \sigma_s \left(\ln \frac{R_k}{\rho} + 1 \right). \quad (4.4)$$

Максимальные напряжения будут действовать на внутренней кромке облоя, т. е. при $\rho = R_0$,

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{\rho} &= \beta \sigma_s \ln \frac{R_k}{R_0} \\ \sigma_{\theta} &= \beta \sigma_s \left(\ln \frac{R_k}{R_0} + 1 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

Аналогичные выражения получены в работе [11] при рассмотрении напряженного состояния толстостенной трубы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления. Для определения формы профиля облоя воспользуемся уравнением связи напряжений и деформаций

$$\frac{\sigma_{\theta} - \sigma_n}{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_n} = \frac{\sigma_n - \sigma_{\rho}}{\varepsilon_n - \varepsilon_{\rho}} = \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\varepsilon_{\rho} - \varepsilon_{\theta}}.$$

Учитывая, что облой находится в плоско-напряженном состоянии ($\sigma_n = 0$), получим

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_n} = \frac{-\sigma_{\rho}}{\varepsilon_n - \varepsilon_{\rho}}. \quad (4.6)$$

Используя условие постоянства объема ($\varepsilon_{\rho} + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_n = 0$), можно из уравнения (4.6) исключить радиальную деформацию

$$\varepsilon_n = -\frac{\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho}}{2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho}} \varepsilon_{\theta}. \quad (4.7)$$

Заменяя напряжения σ_{θ} и σ_{ρ} их значениями из уравнений (4.4) и (4.4), находим

$$\varepsilon_n = -\frac{3\sigma_s \left(\ln \frac{R_k}{\rho} + 1 \right) + \left(-3\sigma_s \ln \frac{R_k}{\rho} \right)}{23\sigma_s \left(\ln \frac{R_k}{\rho} + 1 \right) - \left(-3\sigma_s \ln \frac{R_k}{\rho} \right)} \varepsilon_{\theta} = -\frac{1}{3 \ln \frac{R_k}{\rho} + 2} \varepsilon_{\theta} = -m \varepsilon_{\theta} \quad (4.8)$$

где $m = \frac{1}{3 \ln \frac{R_k}{\rho} + 2}$ — коэффициент, учитывающий изменение схемы напряженно-деформированного состояния по ширине облоя. Заменяя в уравнении (4.8) относительные деформации логарифмическими, получим

$$\ln \frac{h_n}{h} = m \ln \frac{\rho}{R_0}$$

или

$$\frac{h_n}{h} = \exp m \ln \frac{\rho}{R_0} = \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^m,$$

откуда

$$h = h_n \left(\frac{R_0}{\rho} \right)^m. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) описывает профиль образующегося облоя и может служить для выбора формы облойных канавок при штамповке осесимметричных поковок в штампах с постоянной высотой облойной щели.

§ 3. Течение металла в облойную щель с уменьшающейся начальной высотой

Схема образования облоя для рассматриваемого процесса представлена на рис. 4.2.

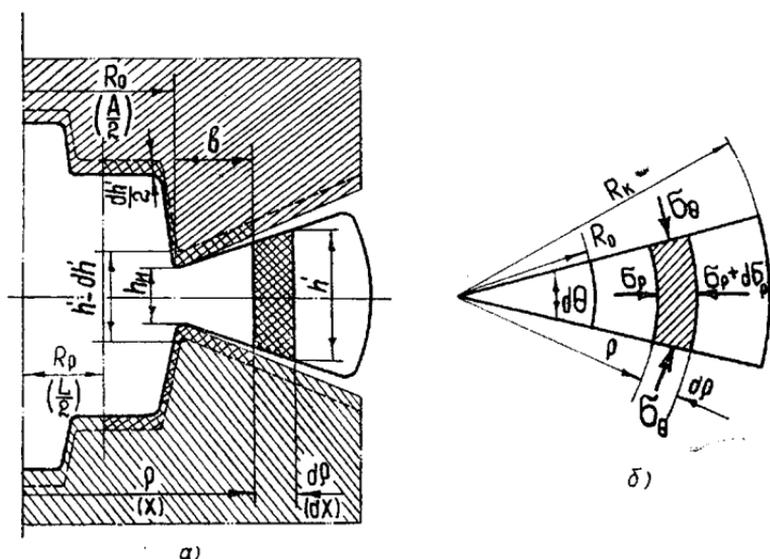


Рис. 4.2. Схема процесса деформации со свободно вытекающим облоем

За счет уменьшения высоты облойной щели в процессе штамповки высота образующегося облоя увеличивается по мере удаления от тела поковки. При штамповке в открытых штампах, когда происходит одновременное заполнение гравюры и облойной канавки, выдавливаемый из полости штампа металл разделяется на два потока. Граница раздела течения представляет из себя сложную поверхность. По мере увеличения сопротивления облойной щели эта граница перемещается к периметру поковки. В процессе же доштамповки, когда гравюра штампа заполнена, поверхность раздела перестает существовать, т. е. весь выдавливаемый из штампа металл идет на образование облоя. Примем, что на протяжении всего процесса граница раздела течения металла представляет цилиндрическую поверхность с переменным радиусом (рис. 4.2, а).

Рассмотрим изменение высоты облоя при штамповке длинноосных деталей. При длине детали значительно превышающей ее ширину течением металла вдоль оси штампа можно пренебречь, т. е. принять, что металл находится в плоско-деформированном состоянии. В этом случае образующийся облой не испытывает никаких деформаций и его профиль будет опреде-

ляться только кинематикой течения металла (характерные размеры для этого случая представлены на рис. 4.2,а в скобках).

Пусть, в какой-то момент времени, штампы сомкнулись на бесконечно малую величину dh' . При этом через произвольно выбранное сечение x вытек какой-то объем металла, увеличивший ширину облоя на dx .

Из рис. 4.2,а следует, что условие непрерывности требует равенства заштрихованных площадок, т. е.

$$\left(X - \frac{L}{2}\right) dh' = dx \left(h' - \frac{dh'}{2}\right),$$

откуда

$$\frac{dx}{x - \frac{L}{2}} = \frac{dh'}{h'}.$$

Интегрируя полученное уравнение при условии, что при $x = \frac{A}{2}$, $h' = h_n$, получаем

$$\ln \frac{h'}{h_n} = \ln \frac{x - \frac{L}{2}}{\frac{A}{2} - \frac{L}{2}},$$

откуда

$$h' = 2h_n \frac{x - \frac{L}{2}}{A - L}.$$

Учитывая (фиг. 4,2, а), что $x = \frac{A}{2} + b$, где b — текущая ширина облоя, окончательно получим

$$h' = h_n \left(1 + \frac{2b}{A - L}\right). \quad (4.10)$$

В процессе доштамповки, когда $L=0$, уравнение, описывающее профиль облоя, примет следующий вид:

$$h' = h_n \left(1 + \frac{2b}{A}\right). \quad (4.11)$$

При штамповке осесимметричных поковок аналогичные рассуждения позволяют составить следующее уравнение расхода металла:

$$\pi(\rho^2 - R_\rho^2) dh' = \pi[(\rho + d\rho)^2 - \rho^2] \left(h' - \frac{dh'}{2}\right), \quad (4.12)$$

откуда

$$dh' (\rho^2 - R_\rho^2) = 2\rho d\rho h',$$

или

$$\frac{dh'}{h'} = 2 \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - R_\rho^2}. \quad (4.13)$$

Проинтегрировав уравнение 4.13, находим

$$\ln h' = \ln (\rho^2 - R_0^2) + \ln C.$$

Воспользовавшись граничными условиями

$$\rho = R_0, \quad h' = h_n,$$

получим

$$\ln \frac{h'}{h_n} = \ln \frac{\rho^2 - R_0^2}{R_0^2 - R_0^2}, \quad (4.13a)$$

откуда

$$h' = h_n \frac{\rho^2 - R_0^2}{R_0^2 - R_0^2}. \quad (4.14)$$

В процессе доштамповки, при $R_p = 0$

$$h' = h_n \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2. \quad (4.15)$$

При выводе уравнения (4.15) так же, как и для плоской задачи, не учитывалась деформация облоя за пределами гравюры штампа. Однако в реальных процессах осесимметричной деформации облой испытывает влияние радиальных и тангенциальных напряжений, под действием которых изменяется его профиль.

При вытеснении металла из штампа облой работает подобно кольцу конического сечения под действием внутреннего давления. Статическое равновесие бесконечно малого элемента облоя (рис. 4,2, б), требует, чтобы

$$\sigma_\rho \rho d\theta (h' - dh') - (\sigma_\rho + d\sigma_\rho)(\rho + d\rho) h' + 2\sigma_\theta \left(h' - \frac{dh'}{2} \right) \sin \frac{d\theta}{2} d\rho = 0.$$

Пренебрегая дифференциалами более высоких порядков и принимая, что $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, получим:

$$d\sigma_\rho \rho h' = -\sigma_\rho \rho dh' - \sigma_\rho h' d\rho + \sigma_\theta h' d\rho$$

или

$$d\sigma_\rho = -\sigma_\rho \left(\frac{dh'}{h'} + \frac{d\rho}{\rho} \right) + \sigma_\theta \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.16)$$

Подставим значение $\frac{dh'}{h'}$ из уравнения (4.13) в полученное выражение, тогда

$$d\sigma_\rho = -\sigma_\rho \frac{2\rho d\rho}{\rho^2 - R_0^2} - \sigma_\rho \frac{d\rho}{\rho} + \sigma_\theta \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.17)$$

Решая уравнение (4.17) совместно с условием пластичности (4.2)

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \beta \sigma_s,$$

получим

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2\sigma_\rho \frac{\rho}{\rho^2 - R_p^2} = \frac{\beta\sigma_s}{\rho}. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

общий интеграл которого находится по формуле

$$y = e^{\int P dx} \left[\int Q e^{-\int P dx} dx + C \right].$$

Учитывая, что на внешней кромке облоя при $\rho = R_k$, $\sigma_\rho = 0$, и заменяя в формуле неопределенное интегрирование интегрированием в пределах от R_k до ρ , вычислим значение интегрирующего множителя:

$$\mu = e^{\int_{R_k}^{\rho} \frac{-2\rho}{\rho^2 - R_p^2} d\rho} = \frac{R_p^2 - \rho^2}{R_p^2 - R_k^2},$$

тогда

$$\sigma_\rho = \frac{R_p^2 - R_k^2}{R_p^2 - \rho^2} \int_{R_k}^{\rho} \frac{\beta\sigma_s (R_p^2 - \rho^2)}{\rho (R_p^2 - R_k^2)} d\rho,$$

откуда

$$-\sigma_\rho = \frac{\beta\sigma_s}{\rho^2 - R_p^2} \left(R_p^2 \ln \frac{\rho}{R_k} - \frac{\rho^2}{2} + \frac{R_k^2}{2} \right). \quad (4.19)$$

Тангенциальное напряжение определится из условия пластичности (4.2)

$$\sigma_\theta = \frac{\beta\sigma_s}{\rho^2 - R_p^2} \left(R_p^2 \ln \frac{\rho}{R_k} - \frac{\rho^2}{2} + \frac{R_k^2}{2} \right) + \beta\sigma_s. \quad (4.20)$$

Максимальное значение напряжений будет на внутренней кромке облоя, т. е. при $\rho = R_0$ (рис. 4.2, а). Из совместного решения уравнений (4.19) и (4.20) с уравнением связи напряжений и деформаций можно получить зависимость, описывающую профиль облоя с момента начала вытекания металла в щель. Однако такое уравнение будет зависеть от расположения границы раздела течения металла в гравюре штампа, описать которую аналитически в настоящее время не представляется возможным.

§ 4. Формоизменение облоя при доштамповке осесимметричных поковок

При доштамповке весь металл, выдавливаемый из гравюры штампа, идет на образование облоя. Приняв $R_p=0$ из уравнений (4.19) и (4.20), соответственно имеем:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_p &= \frac{\beta\sigma_s}{2} \left(\frac{R_k^2}{\rho^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\beta\sigma_s}{2} \left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Для вывода уравнения, описывающего профиль облоя в процессе доштамповки, воспользуемся полученным ранее соотношением между нормальной и тангенциальной деформациями в свободно вытекающем облое (4.7). Подставив значение напряжений из уравнения (4.21) в уравнение связи (4.7), получим:

$$\varepsilon_n = - \frac{\frac{\beta\sigma_s}{2} \left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 1 \right) + \frac{\beta\sigma_s}{2} \left(\frac{R_k^2}{\rho^2} - 1 \right)}{2 \frac{\beta\sigma_s}{2} \left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 1 \right) - \frac{\beta\sigma_s}{2} \left(\frac{R_k^2}{\rho^2} - 1 \right)} \varepsilon_\theta,$$

откуда

$$\varepsilon_n = - \frac{2 \left(\frac{R_k}{\rho} \right)^2}{\left(\frac{R_k}{\rho} \right)^2 + 3} \varepsilon_\theta = -m' \varepsilon_\theta, \quad (4.22)$$

где

$$m' = \frac{2 \left(\frac{R_k}{\rho} \right)^2}{\left(\frac{R_k}{\rho} \right)^2 + 3}.$$

Пусть в течение всего процесса кольцо облоя не теряет устойчивости (не изгибается), тогда переходя к логарифмическим деформациям, уравнение (4.22) можно переписать так:

$$\ln \frac{h'}{h} = m \ln \frac{\rho}{R_0} = m\delta_\theta,$$

где h — фактическая переменная высота облоя.

$$h = \frac{h'}{e^{m\delta_\theta}}. \quad (4.23)$$

Для определения h' воспользуемся уравнением (4.13, а). При $R_p = 0$ указанное соотношение запишется:

$$\ln \frac{h'}{h_n} = 2\delta_\theta,$$

откуда

$$h' = h_n e^{2\delta\theta}. \quad (4.24)$$

Подставив полученное значение h' в уравнение (4.23), имеем

$$h = h_n e^{\delta\theta(2-m')},$$

Подставив значение m' и проведя необходимые преобразования, окончательно получим

$$h = h_n \exp \frac{6 \ln \frac{\rho}{R_0}}{\left(\frac{R_k}{\rho}\right)^2 + 3}. \quad (4.25)$$

Таким образом, уравнение (4.25) описывает профиль свободно вытекающего облоя при доштамповке осесимметричных поковок.

§ 5. Влияние профиля облойной щели на характер образования облоя и стойкость открытых штампов

Как указывалось в § 1, облойная канавка должна уменьшать сопротивление течению металла на стадии доштамповки. Это может быть достигнуто, если удастся устранить деформацию облоя при вытеснении избытка металла из гравюры штампа. При изготовлении деталей в открытых штампах с параллельной или сужающейся облойной щелью металл, находящийся на поверхности порога облойного мостика, интенсивно остывает.

Особенно резко остывание наблюдается при штамповке на молотах за несколько ударов. Такое явление приводит к интенсивному росту напряжений на пороге облойной канавки и ее преждевременному износу. В отдельных случаях требуемые усилия возрастают настолько высоко, что окончательное оформление поковки становится невозможным без промежуточной обрезки облоя. Аналогичные явления наблюдаются при штамповке труднодеформируемых сплавов. В этом случае напряжения увеличиваются за счет значительно упрочнения материалов при высоких скоростях деформации.

Рассмотрим особенности

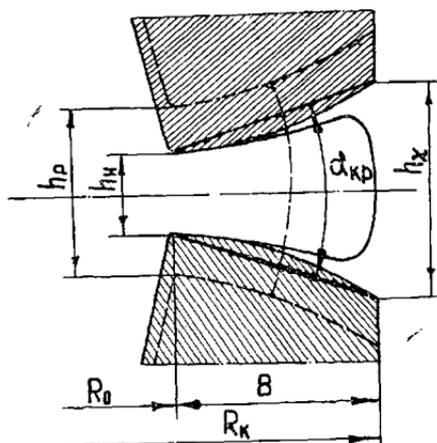


Рис. 4.3. Криволинейный профиль облойной канавки

работы открытого штампа с криволинейной расширяющейся облойной щелью. Пусть профиль поверхности порога облойной канавки штампа выполнен в соответствии с уравнением (4.25) для некоторой начальной расчетной высоты щели (h_p), причем $h_p > h_0$ — начальной высоты щели в конце процесса штамповки (рис. 4.3). За расчетную должна приниматься высота щели соответствующая моменту полного оформления поковки, тогда $\Delta h = h_p - h_0$ будет ходом доштамповки. При такой конструкции канавки процесс протекает следующим образом.

До начала образования облоя характер течения металла не зависит от формы облойной канавки. Вытекание его в облой, в общем случае, начнется при начальной высоте щели больше расчетной. Поэтому, в соответствии с уравнением (4.25), интенсивность роста высоты облоя превысит интенсивность роста высоты щели. Кроме того, наличие границы раздела течения металла в гравюре штампа также будет способствовать еще более интенсивному росту высоты облоя (см. уравнение (4.13 а)). Металл деформируется поверхностями порога канавки, что затрудняет его течение и создает дополнительный подпор в гравюре штампа. Следует заметить, что аналогичная составляющая сопротивления при штамповке с параллельными и сужающимися канавками выше, однако получаемое уменьшение подпора для расширяющихся канавок можно компенсировать путем применения меньшей начальной высоты щели в конце процесса. При достижении начальной высотой щели расчетного значения и при дальнейшем ее уменьшении необходимые давления в полости штампа будут обеспечиваться только за счет сопротивления выдавливанию металла в облой.

Дополнительный подпор за счет деформации облоя становится нецелесообразным. Если к этому моменту оформление поковки закончилось, то профиль вытекающего облоя будет соответствовать профилю облойной щели, а при дальнейшем незначительном смыкании штампов (доштамповке) образовавшийся облой отслаивается от поверхности порога канавки и перестает деформироваться (рис. 4.3). Если же к моменту достижения расчетной высоты щели оформление поковки не завершилось, то облой за счет наличия в штампе границы раздела течения и, следовательно, более интенсивного увеличения, продолжает деформироваться, создавая дополнительный подпор, необходимый для окончательного заполнения полости штампа. Отслоение облоя от поверхности порога канавки произойдет тогда при меньших значениях начальной высоты щели. Однако во всех случаях описанное явление позволяет закончить штамповку без деформации облоя, а, следовательно, и без напряжений на поверхности порога облойной канавки.

Таким образом, силовые условия работы открытых штампов с криволинейной расширяющейся облойной щелью более бла-

Глава 4.2. СОПРОТИВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЮ МЕТАЛЛОВ В ОБЛОЙНУЮ КАНАВКУ ОТКРЫТОГО ШТАМПА

В данной главе рассматривается влияние профиля облойной щели на величину максимальных напряжений, создаваемых ею по периметру поковки. Как указывалось выше, создание необходимого для заполнения гравюры подпора со стороны облоя является основной функцией облойной канавки. Для технологических расчетов необходимо иметь аналитические выражения, которые позволили бы правильно решить вопрос о применении того или иного типа облойной щели.

Величина среднего относительного удельного давления, создаваемого обломом в полости штампа, получила название сопротивления облойной канавки

$$K_{\text{обл}} = \frac{P_{\text{обл}}}{\sigma_s}$$

Это давление зависит от текущих размеров образующегося облоя, которые, в свою очередь, определяются характером формоизменения заготовки, принятыми размерами и формой облойной щели. Сопротивление облоя можно представить как сумму двух составляющих [33]

$$K_{\text{обл}} = K_{\text{щ}} + K_{\text{п}},$$

где $K_{\text{щ}}$ — сопротивление щели — среднее относительное давление, возникающее в полости штампа за счет сопротивления течению металла в облойную щель;

$K_{\text{п}}$ — сопротивление порога — относительное давление, создаваемое на входной кромке облойной канавки за счет сопротивления течению металла по плоскостям порога облойной щели.

Теоретически сопротивление щели может быть определено на основании анализа формы очага деформации, возникающего при доштамповке поковок [11]. Решение такой задачи широко освещено в литературе и в данной работе не рассматривается.

§ 1. Сопротивление порога щели прямолинейных облойных канавок

Рассмотрим сопротивление течению металла по плоскостям расширяющейся облойной щели (рис. 4.4, а). Для этого в секторе облоя с бесконечно малым углом φ выделим элемент толщиной $d\rho$, находящийся на расстоянии ρ от центра поковки. Примем, что в процессе деформации металл течет радиально в секторе, ограниченном углом α , а напряжения $\sigma_{\text{п}}$ и $\sigma_{\text{с}}$ являются главными. Кроме того, будем считать, что силы трения на кон-

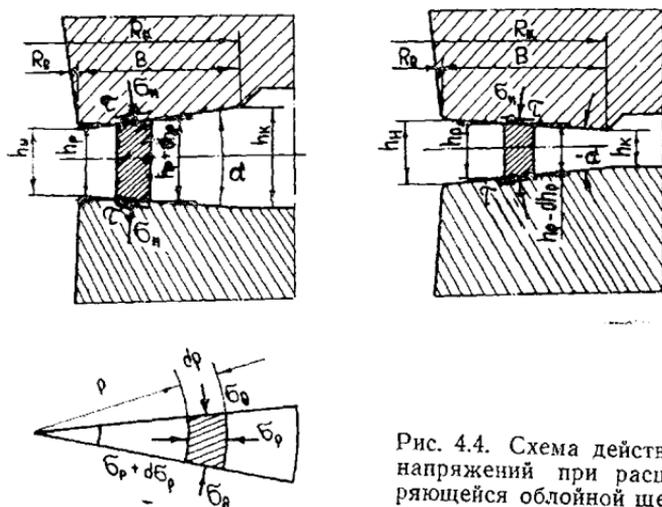


Рис. 4.4. Схема действия напряжений при расширяющейся облойной щели

тактной поверхности не влияют на распределение нормальных напряжений по высоте облоя и не меняют направления действия главных напряжений.

При принятых допущениях статическое равновесие выделенного элемента требует, чтобы

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \rho \varphi h_\rho - \sigma_r (\rho + d\rho) \varphi (h_\rho + dh_\rho) + 2\sigma_n \left(\rho + \frac{d\rho}{2} \right) \varphi \frac{d\rho}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} - 2\tau \left(\rho + \frac{d\rho}{2} \right) \varphi d\rho + 2\sigma_\theta \left(h_\rho + \frac{dh_\rho}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2} d\rho = 0.$$

Пренебрегая дифференциалами более высоких порядков и приняв, $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, получаем

$$\rho h_\rho d\sigma_r - \sigma_r \rho dh_\rho - \sigma_\theta h_\rho d\rho + 2\sigma_n \rho \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} d\rho - 2\tau \rho d\rho + \sigma_\theta h_\rho d\rho = 0.$$

Из рис. 4.4, а $d\rho = \frac{dh_\rho}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, а для осесимметричных процессов $\sigma_r = \sigma_\theta$, тогда

$$h_\rho d\sigma_r - \sigma_r dh_\rho + \sigma_n dh_\rho - \tau \frac{dh_\rho}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 0. \quad (4.29)$$

Пусть на контактной поверхности действуют постоянные касательные напряжения

$$\tau = \mu \sigma_s, \quad (4.30)$$

а условие пластичности для данного случая запишется в виде

$$\sigma_n - \sigma_r = \sigma_s. \quad (4.31)$$

Совместное решение уравнений (4.29), (4.30) и (4.31) позволяет получить следующее выражение:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \frac{dh_\rho}{h_\rho},$$

и после интегрирования

$$\sigma_\rho = \sigma_s \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) \ln h_\rho + C. \quad (4.32)$$

Постоянная интегрирования найдется из условия, что при $h_\rho = h_k$, $\sigma_\rho = 0$

$$C = -\sigma_s \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) \ln h_k,$$

тогда

$$\sigma_\rho = \sigma_s \left(1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \ln \frac{h_k}{h}, \quad (4.33)$$

а учитывая уравнение (4.31)

$$\sigma_n = \sigma_s \left[\left(1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \ln \frac{h_k}{h_\rho} + 1 \right]. \quad (4.34)$$

Максимальные напряжения будут действовать на внутренней кромке облоя при $h_\rho = h_n$, тогда сопротивление порога клиновидной расширяющейся облойной щели будет

$$K_n = \frac{\sigma_n \max}{\sigma_s} = \left(1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \ln \frac{h_k}{h_n} + 1 \quad (4.35)$$

Если рассмотреть схему действия напряжений для клиновидной сужающейся облойной щели (рис. 4.4, б), то при тех же допущениях условие равновесия выделенного элемента примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\sigma_\rho + d\sigma_\rho) \rho \varphi h_\rho - \sigma_\rho (\rho + d\rho) \varphi (h_\rho - dh_\rho) - 2\sigma_n \left(\rho + \frac{d\rho}{2} \right) \varphi \frac{d\rho}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} - \\ - 2\tau \left(\rho + \frac{d\rho}{2} \right) \varphi \frac{d\rho}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sigma_\theta \left(h_\rho - \frac{dh_\rho}{2} \right) d\rho \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения позволяет получить величину сопротивления порога клиновидной сужающейся щели

$$K_n = \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \ln \frac{h_k}{h_n} + 1. \quad (4.36)$$

Примем, что расширяющаяся щель характеризуется положительным углом наклона, а сужающаяся — отрицательным. Из геометрических соображений (рис. 4.4)

$$h_k = h_n + B \operatorname{tg}(\pm \alpha),$$

где принято, что $2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \operatorname{tg} \alpha$.

Тогда выражения (4.35) и (4.36) можно объединить в одно уравнение

$$K_n = \left[1 - \frac{2\mu}{\operatorname{tg}(\pm \alpha)} \right] \ln \left[1 + \frac{B}{h_n} \operatorname{tg}(\pm \alpha) \right] + 1. \quad (4.37)$$

Параллельную облойную щель можно рассматривать как частный случай клиновидной. Подстановка $\alpha=0$ в уравнение (4.37) приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Для малых значений $\operatorname{tg} \alpha$

$$\ln \left(1 + \frac{B \operatorname{tg} \alpha}{h_n} \right) = \frac{B \cdot \operatorname{tg} \alpha}{h_n},$$

тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_n = \left(1 + \frac{2\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \frac{B \cdot \operatorname{tg} \alpha}{h_n} + 1$$

и для параллельной щели получим

$$K_n = \frac{2\mu B}{h_n} + 1. \quad (4.38)$$

Выражение (4.38) известно из литературы как уравнение, описывающее изменение нормальных напряжений при осадке цилиндра между плоско-параллельными плитами.

§ 2. Сопротивление порога криволинейной расширяющейся облойной щели

Облойную щель с криволинейной поверхностью порога можно представить как расширяющуюся с переменным углом наклона. Для установления характера изменения этого угла воспользуемся уравнением (4.25), описывающим профиль свободно вытекающего облоя

$$h = h_n \exp \frac{6 \ln \frac{\rho}{R_0}}{\frac{R_k^2}{\rho^2} + 3}. \quad (4.25)$$

Прологарифмировав уравнение (4.25), имеем

$$\ln h = \ln h_n + \frac{6 \ln \frac{\rho}{R_0}}{\left(\frac{R_k}{\rho} \right)^2 + 3}.$$

откуда после дифференцирования

$$\frac{d(\ln h)}{d\rho} = \frac{dh}{h} = \frac{\left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 3\right) 6 \frac{1}{\rho} - 6 \ln \frac{\rho}{R_0} R_k^2 (-2\rho^{-3})}{\left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 3\right)^2},$$

или

$$\frac{dh}{d\rho} = \operatorname{tg} \alpha = h_n \left[\frac{6}{\left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 3\right) \rho} + \frac{12 \ln \frac{\rho}{R_0} R_k^2}{\left(\frac{R_k^2}{\rho^2} + 3\right)^2 \rho^3} \right] \exp \frac{6 \ln \frac{\rho}{R_0}}{\frac{R_k^2}{\rho^2} + 3}. \quad (4.39)$$

Поскольку рассматриваются напряжения на внутренней кромке облой, то при $\rho = R_0$ выражение (4.39) примет более простой вид

$$\operatorname{tg} \alpha = h_n \frac{6R_0}{R_k^2 + 3R_0^2}. \quad (4.40)$$

Конечную высоту криволинейной облойной щели можно определить из уравнения (4.25) путем подстановки $\rho = R_k$

$$h_k = h_n \exp 1,5 \ln \frac{R_k}{R_0}. \quad (4.41)$$

Подставив найденные значения из выражений (4.40) и (4.41) в уравнение (4.35), получим сопротивление порога криволинейной расширяющейся облойной щели

$$K_n = 1,5 \left[1 - \frac{\mu (R_k^2 + 3R_0^2)}{3R_0 h_n} \right] \ln \frac{R_k}{R_0}. \quad (4.42)$$

Сравнение численных значений, получаемых по уравнениям (4.35) и (4.42), показывает, что сопротивление порога криволинейной щели примерно на 10—15% выше, чем соответствующая величина для клиновидной щели. Поскольку в процессе штамповки ширина облой непрерывно увеличивается, то подставляя в уравнение (4.42) его фактический наружный радиус можно подсчитать сопротивление порога в любой момент деформации.

После отслоения облой от криволинейной поверхности порога канавки величина создаваемого им подпора будет определяться уравнением (4.21).

Таким образом получены уравнения (4.37, 4.42), пользуясь которыми можно определить величину подпора, создаваемого канавками различных типов. Эти уравнения могут быть использованы при расчетах технологических процессов штамповки осесимметричных деталей, обеспечивающих минимальные отходы металла в облой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А., Гольденберг В. В. Тензорное исчисление. «Наука», 1969.
2. Ашкенази Е. К. Анизотропия машиностроительных материалов. «Машиностроение». 1969.
3. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. Физматгиз, 1962.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. «Наука», М. 1969.
5. Тихонов Б. С. Прокатка цинка. Metallurgizdat. М. 1963.
6. Бернштейн, Займовский В. А. Структура и механические свойства металлов. Metallurgizdat. 1969.
7. Качанов Л. М. Механика пластических сред. ОГИЗ, 1948.
8. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. «Машиностроение», 1968.
9. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, 1956.
10. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. «Наука», 1966.
11. Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением «Машиностроение», 1971.
12. Шофман Л. А. Теория и расчеты процессов холодной штамповки. «Машиностроение», 1964.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел М. И. Л., 1954.
14. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. «Машиностроение», 1968.
15. Основы теории обработки металлов давлением, под ред. М. В. Сторожева. Mashgiz, 1959.
16. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.
17. Смирнов-Аляев Г. А. Механические основы пластической обработки металлов. «Машиностроение», 1968.
18. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов, т. I. Metallurgizdat, 1960.
19. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
20. Ренне И. П. Пластический изгиб листовой заготовки. Труды Тульского механического института, вып. 4. Оборонгиз, 1950.
21. Фарманова В. Н., Сапаровский С. В. Процесс штамповки резки резиной заготовок и деталей из листовых материалов. Труды КуАИ, вып. 41.
22. Лысов М. И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. «Машиностроение», 1966.
23. Громова А. Н. и др. Изготовление деталей из листов и профилей при серийном производстве. Оборонгиз, 1960.
24. Исаченков Е. И. Штамповка резиной и жидкостью. «Машиностроение», 1967.

25. Комаров А. Д., Сапаровский С. В., Смеляков Е. П., Фармапова В. Н. Штамповка резиной. Куйбышевское книжное издательство, 1964.

26. Горбунов М. Н. Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве летательных аппаратов. «Машиностроение», 1970.

27. Соколовский В. В. Теория пластичности. «Высшая школа», 1969.

28. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, 1949.

29. Северденко В. П., Просвиров Н. Т., Гаврилов М. Е. О величине облоя в открытых молотовых штампах. Сб. научных трудов ФТИ АН БССР., 1959.

30. Охрименко Я. М. Технология кузнечно-штамповочного производства, изд-во «Машиностроение», М., 1966.

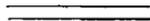
31. Северденко В. П., Калачев Е. Б. Влияние облойного мостика на рассеивание размеров «поковок», «Известия вузов», «Черная металлургия», № 3, 1965.

32. Смуров А. М., Козлова Н. Г. Авторское свидетельство № 224996, кл. 49, 6; 1968.

33. Богданов Е. С., Калачев М. И., Определение средних давлений течения металла в облой и гравюру штампа. Сб. научных трудов ФТИ, АН БССР, Минск, 1956.

34. Шевелев В. В. Расчет контура заготовки при вытяжке анизотропного материала. Сб. «Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением». Тула, 1968.

35. Проскураков Г. В., Калужский И. И. Теоретические исследования процессов получения профилей при волочении через инструментальную фильеру металлической ленты с непрерывно скользящим приложением усилия в процессе формообразования угла. Изв. вузов «Авиационная техника», 1968, № 3.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Часть I. Основные положения теории пластичности, использованные в обработке металлов давлением	5
Глава 1.1. Понятие о тензоре	5
Глава 1.2. Анализ уравнений теории пластичности	6
Глава 1.3. Некоторые положения теории пластичности анизотропных сред	8
§ 1. Сущность анизотропии и ее виды	8
§ 2. Энергетическое условие пластичности Мизеса и его выражение через технические константы	9
§ 3. Кусочно-линейное условие пластичности	28
§ 4. Соотношения теории пластичности трансверсально изотропных сред	30
Глава 1.4. Соотношения теории пластичности изотропного тела	34
Глава 1.5. Плоская задача и осесимметричное напряжение и деформированное состояние	35
§ 1. Плоское деформированное состояние	35
§ 2. Плоское напряженное состояние	37
§ 3. Осесимметричное напряжение и деформированное состояние	41
Глава 1.6. Упрощенные формы записи условий пластичности	43
§ 1. Запись энергетического условия пластичности в линейной форме	43
§ 2. Представление энергетического условия пластичности в параметрической форме	48
§ 3. Запись кусочно-линейного условия пластичности	52
Глава 1.7. Связь между параметрами Надаи-Лоде напряженного и деформированного ν_0 состояний	53
Часть II. Некоторые инженерные методы расчета процессов обработки металлов давлением	55
Глава 2.1. Метод совместного решения уравнений равновесия с условием пластичности	55
Глава 2.2. Метод баланса работ	58
Глава 2.3. Метод сопротивления металлов пластическим деформациям	61
Часть III. Применение теории пластичности при анализе конкретных процессов холодной штамповки	64
Глава 3.1. Диаграммы видов напряженного состояния	64
Глава 3.2. Гибка листового металла	67
§ 1. Распределение напряжений по сечению заготовки	68
§ 2. Определение изгибающего момента	69
§ 3. Пружинение детали после гибки	71
§ 4. Определение давления резины при гибке материала по формблоку	73

§ 5. Гибка листов на малые радиусы	74
Глава 3.3 Обтяжка с растяжением листовых металлов и сплавов.	81
§ 1. Напряженно-деформированное состояние при обтяжке с растяжением	81
§ 2. Расчет формы заготовки	83
§ 3. Влияние анизотропии на предельное формоизменение	84
§ 4. Пружинение при обтяжке с растяжением	87
Часть IV. Расчет технологических процессов горячей объемной штамповки	93
Глава 4.1 Анализ напряженно-деформированного состояния облоя при открытой объемной штамповке	94
§ 1. Особенности работы открытых штампов с различными типами облойных канавок	94
§ 2. Течение металла в облойную щель постоянной высоты	95
§ 3. Течение металла в облойную щель с уменьшающейся начальной высотой	98
§ 4. Формоизменение облоя при доштамповке осесимметричных поковок	102
§ 5. Влияние профиля облойной щели на характер образования облоя и стойкость открытых штампов	103
Глава 4.2 Сопротивление течению металла в облойную канавку открытого штампа	106
§ 1. Сопротивление порога щели прямолинейных облойных канавок	106
§ 2. Сопротивление порога прямолинейной расширяющейся облойной щели	109
Л и т е р а т у р а	111



*Юрий Михайлович Арышенский,
Вячеслав Васильевич Уваров,
Валерий Юлианович Ненашев*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
КУЗНЕЧНО-ШТАМПОВОЧНОГО ПРОИЗВОДСТВА.

Учебное пособие

Редактор А. И. Кондратьева
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. В. Телепегина

ЕО00186. Формат 60×90¹/₁₆. Объем 7,25 п. л.
Тираж 500 экз. Цена 37 коп.

Куйбышевский авиационный институт
им. С. П. Королева. Типография УЭЗ.
Заказ № 8970.

Изд-во «Волжская коммуна» г. Куйбышев, пр. Карла
Маркса, 201.