

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

И. П. ЗАВЕРШИНСКИЙ, Е. Я. КОГАН

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 530.1
ББК 22.236.35
3-134



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геoinформационных технологий"**

Рецензенты: докт. ф.-м. наук, доц. Н. Е. Молсевич
докт. техн. наук, проф. А. Ю. Привалов

Завершинский И.П.

3-134

Теория колебаний и волн: учеб. пособие / *И. П. Завершинский, Е. Я. Коган* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 160 с : ил.

ISBN 978-5-7883-0529-5

Представлены все основные разделы теории колебаний и волн. Кратко изложены основные теоретические положения и подробно описано большинство методов решения задач в этой области. Приведены примеры использования данных методов в основных областях приложений теории колебаний и волн: физики, химии, биологии, экологии и экономики. Это дает возможность научиться решать наиболее практически важные задачи. Предназначено для студентов обучающихся по направлениям "Прикладная математика и физика", "Физика" и др.

УДК 530.1
ББК 22.236.35

ISBN 978-5-7883-0529-5

© Завершинский И.П., Коган Е.Я., 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	6
1 Колебания. Основные понятия и способы описания.....	8
1.1 Колебательные процессы. Основные понятия.....	8
1.2 Описание колебательных процессов.....	10
1.2.1 Прямое решение уравнений колебательного процесса.....	13
1.2.2 Выделение нормальных колебаний.....	17
1.2.3 Построение фазового портрета.....	18
2 Динамические системы с одной степенью свободы.....	24
2.1 Линейные системы с одной степенью свободы.....	24
2.2 Гармонический осциллятор. Параметры колебаний.....	28
2.3 Нелинейные консервативные системы с одной степенью свободы.....	32
2.4 Итерационные методы анализа колебательных систем.....	36
2.4.1 Метод разложения по малому параметру.....	36
2.4.2 Осциллятор Дуффинга. Метод Линшtedта – Пуанкаре.....	38
3 Нелинейные диссипативные системы с одной степенью свободы.....	41
3.1 Метод многих масштабов.....	41
3.2 Автоколебания. Метод ван дер Поля. Генератор ван дер Поля.....	45
3.3 Точечное отображение для генератора ван дер Поля.....	49
3.4 Быстрые и медленные движения.....	51
4 Динамические системы с полутора степенями свободы.....	53
4.1 Колебания в линейных системах с полутора степенями свободы.....	53
4.1.1 Вынужденные колебания гармонического осциллятора. Гармоническая внешняя сила.....	54
4.1.2 Негармоническая, но периодическая внешняя сила: $F(t) = F(t+T)$	56
4.1.3 Произвольная внешняя сила.....	57
4.1.4 Гармонический осциллятор под действием обобщенных внешних сил.....	59
4.2 Линейные системы с полутора степенями свободы с меняющимися под действием внешних факторов параметрами.....	61
4.2.1 Сравнимые частоты. Уравнение Матвея.....	61

4.2.2 Стохастический параметрический резонанс.....	67
4.2.3 Адиабатические инварианты.....	68
4.2.4 Движения в быстроосциллирующих полях.....	69
4.3 Нелинейные динамические системы с полутора степенями свободы.....	71
4.3.1 Осциллятор Дуффинга под импульсным воздействием.....	71
4.3.2 Осциллятор Дуффинга. Нелинейный резонанс.....	72
4.3.3 Хаотические колебания. Система Лоренца.....	73
5 Динамические системы с двумя степенями свободы.....	74
5.1 Линейные системы с двумя степенями свободы.....	74
5.2 Нелинейные системы с двумя степенями свободы. Двухконтурный автогенератор.....	77
6 Динамические системы с двумя с половиной степенями свободы.....	79
7 Волновые процессы.....	82
7.1 Колебания в цепочках.....	83
7.2 Предельный переход к волновому процессу.....	85
7.3 Классификация волновых процессов.....	85
7.4 Примеры волновых процессов.....	87
8 Волны в однородных средах. Бегущие волны. Стоячие волны.....	92
8.1 Неограниченные среды. Задача Коши. Параметры волны.....	93
8.1.1 Волновое уравнение. Гармоническое начальное возмущение.....	94
8.1.2 Уравнение Клейна-Гордона. Группы волн. Дисперсия.....	96
8.1.3 Энергия и импульс волн.....	99
8.2 Конечный отрезок. Одномерный случай. Стоячие волны.....	100
8.3 Многомерные задачи. Волноводы и резонаторы.....	107
9 Волны в неоднородных средах.....	110
9.1 Пример решаемой задачи.....	110
9.2 Приближенные методы анализа волновых процессов.....	112
9.2.1 Метод последовательных приближений.....	112
9.2.2. Асимптотический метод.....	116
9.3 Периодически неоднородные среды.....	122
10 Нелинейные волны. Типы нелинейных волн.....	124
10.1 Простые волны. Уравнение Римана. Уравнение Бюргерса.....	124

10.1.1 Уравнение Римана.....	124
10.1.2 Слабые ударные волны. Уравнение Бюргерса.....	131
10.2 Автоволны.....	135
10.2.1 Волна эпидемии. Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова. Фазовая автоволна переключения.....	135
10.2.2 Триггерная автоволна переключения.....	138
10.3 Солитоны.....	141
11 Взаимодействие волн.....	146
12 Автомодельные и бегущие волны.....	152
Библиографический список	154

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия характеризовались бурным развитием теории колебаний и волн, что привело к существенному изменению ее содержания.

Во-первых, в силу потребностей конкретных научных дисциплин чрезвычайно разрослась база применения идей теории колебаний и волн, она обогатилась примерами колебательных систем, расширилась феноменология колебательных процессов. Это привело к парадоксальному результату – обнаружился факт модельного единства колебательных и волновых процессов различной природы, что, в свою очередь, привело к тому, что предмет теории колебаний и волн существенно отличается от предметов конкретных дисциплин. Большинство научных дисциплин выделяют свой предмет, отпавляясь от физической природы исследуемого объекта. Фундаментальное отличие теории колебаний и волн состоит в том, что ее предмет определяется по другому принципу, а именно, по наличию колебательной по своему характеру динамики безотносительно к физической сущности рассматриваемых явлений. Среди задач теории колебаний и волн можно назвать классификацию колебательных и волновых процессов, разработку математических моделей для их описания, выявление законов, являющихся общими для систем разной физической природы.

Во-вторых, произошли изменения, которые затронули содержание и методический инструментарий теории нелинейных колебаний и волн и связаны с появлением и широким распространением компьютеров. Те задачи, которые ранее требовали кропотливого исследования или же оставались недоступными, теперь оказалось возможным анализировать с привлечением методов численного моделирования с наглядным и быстрым представлением результатов посредством компьютерной графики. Все это ведет к необходимости переосмысления содержательной части теории колебаний и волн.

Поэтому основное внимание уделяется краткому обоснованию основных шагов построения той или иной модели явления из конкретной предметной области, которые более подробно описаны в учебниках по теории колебаний и волн и другой специальной литературе, и, прежде всего, подробной демонстрации применения тех или иных математических методов к решению основных задач теории колебаний и волн.

Разбиение содержания по разделам в данной книге, прежде всего в пер-

вой части – теории колебаний несколько отличается от стандартного: линейные процессы \rightarrow нелинейные процессы. Оно основано на классификации динамических систем по степеням свободы. В первой главе книги даются основные понятия теории колебаний и дается классификация колебательных систем. Глава 2 книги посвящена описанию колебаний в динамических системах с одной степенью свободы, к которым относятся свободные колебания в линейных и нелинейных динамических системах второго порядка. Приведены примеры процессов, сводящихся к модели нелинейного консервативного осциллятора. Рассмотрен принцип получения точного решения уравнений колебательного процесса и основные методы качественного и приближенного анализа – метод фазовой плоскости, метод разложения по малому параметру, метод Линшtedта-Пуанкаре, метод многих масштабов, метод точечных отображений. В главе 3 описаны колебания в нелинейных диссипативных системах с одной степенью свободы. В главе 4 рассмотрены колебания в динамических системах с полутора степенями свободы. Это – неавтономные системы второго порядка и автономные системы третьего порядка. Рассматриваются такие явления, как резонанс, параметрический резонанс и динамический хаос. В параграфе 4.1 рассматриваются вынужденные колебания гармонического осциллятора для гармонической, периодической и произвольной внешней силы. Рассмотрено явление резонанса. Параграф 4.2 посвящен описанию параметрически возбуждаемых систем с полутора степенями свободы. Рассмотрены случаи сравнимых частот, медленно меняющихся полей и быстроменяющихся параметров. Глава 5 посвящена описанию колебаний в динамических системах с двумя степенями свободы. Это – неавтономные системы третьего порядка и автономные системы четвертого порядка. Глава 6 посвящена описанию линейных колебаний в системах из двух связанных осцилляторов под действием гармонических внешних сил.

В главе 7 даны основные понятия теории волн, проведен предельный переход от дискретных сред к непрерывным, приведены различные варианты классификации волновых процессов и примеры описания волновых процессов различного вида. В главе 8 приведены основные методы описания волновых процессов в неограниченных и ограниченных однородных средах. Способ подачи материала предполагает опережающее или параллельное изучения курса «Уравнения математической физики» и предпола-

гает знание основных методов решения начальных, краевых и смешанных задач математической физики. Глава 9 посвящена описанию волновых процессов в неоднородных средах, прежде всего, в слабонеоднородных и периодических средах. В главе 10 дано краткое введение в теорию нелинейных волн. Приведена классификация нелинейных волновых процессов по критерию взаимодействия волн друг с другом. Изложение материала следует данной классификации. Приведен ряд примеров описания нелинейных волновых процессов. В главе 11 рассмотрены методы описания нелинейного взаимодействия волн. В главе 12 рассмотрены автомодельные волны.

1 КОЛЕБАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ

1.1 Колебательные процессы. Основные понятия

Колебательный процесс – это процесс, характеризующийся хотя бы приближительной повторяемостью параметров, характеризующих состояние системы, число которых в данный момент времени конечно.

Колебания

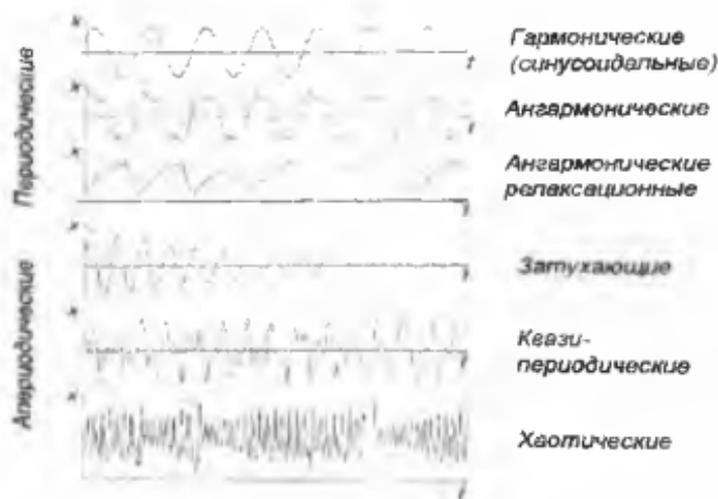


Рис. 1.1.1 Зависимость амплитуды от времени для различных колебательных процессов

Под *состоянием* системы в некоторый момент времени понимается набор величин, количество которых достаточно для того, чтобы определить эти же величины в последующие моменты времени. Конечность числа па-

раметров, характеризующих состояние системы, является основным критерием, разделяющим колебательные и волновые процессы.

Простейшим примером колебательной системы является гармонический осциллятор, описываемый двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, дополненной двумя начальными условиями:

$$\dot{x} = v, \dot{v} = -2\gamma v - \omega_0^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0; \dot{x}|_{t=0} = v_0. \quad (1.1.1)$$

Решение (1.1.1) имеет вид повторяющихся с периодом $T = 2\pi/\omega$, где

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, функций:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + ((\gamma x_0 + v_0)/\omega) \sin \omega t), \\ v(t) &= e^{-\gamma t} \left\{ v_0 \cos \omega t - \left[\omega (1 + \gamma^2/\omega^2) x_0 + \gamma v_0 \right] \sin \omega t \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Приведенное определение колебаний очень широкое и подразумевает дальнейшую конкретизацию и детализацию. Например, говорят о колебаниях свободных и вынужденных, консервативных и диссипативных, линейных (гармонических) и нелинейных (ангармонических) и так далее.

Свободные колебания – колебания, происходящие в отсутствие внешних воздействий на систему. *Вынужденные колебания* – колебания, происходящие в присутствии внешних воздействий на систему.

Колебания называют *линейными* или *нелинейными*, если они описываются линейными или нелинейными уравнениями соответственно.

Необходимым условием возникновения колебаний является наличие у системы состояния устойчивого равновесия (хотя бы метастабильного). При этом, если квазилинейная система выведена из данного состояния, то в соответствии с *принципом ле Шателье* в ней возникают процессы, стремящиеся вернуть систему в исходное состояние. Динамический баланс обобщенных сил, выводящих и возвращающих систему в положение равновесия, лежит в основе колебательного процесса. Такое утверждение в целом справедливо и для существенно нелинейных систем, однако при этом существует ограничение на амплитуду внешнего воздействия, поскольку метастабильную систему можно необратимо вывести из состояния равновесия. Кроме того, процесс установления равновесия не обязательно носит колебательный характер. Он может, например, носить характер экспоненциальной релаксации. Пример – RC – контур.

1.2. Описание колебательных процессов

Процесс, характеризующийся хотя бы приближительной повторяемостью состояний системы, может быть описан различными способами, из которых базовыми являются два основных: формулировка дифференциальных или разностных уравнений, описывающих процессы в системе.

• Системы с непрерывным временем и их классификация

Если число параметров системы, позволяющих определить состояние системы, конечно $N < \infty$, то ее называют *сосредоточенной*. Колебательные процессы в системах с непрерывным временем обычно описываются сосредоточенными системами дифференциальных уравнений. Сосредоточенной системой N -го порядка, в частности, является система N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t), \quad i = \overline{1, \dots, N} \quad (1.2.1)$$

с N начальными условиями $x_i(0) = x_{i0}, i = \overline{1, \dots, N}$. Состояние системы характеризуется в данном случае N величинами. Если число параметров системы, позволяющих определить ее системы, бесконечно $N \rightarrow \infty$, то ее называют *распределенной*. Таким образом, математическим аппаратом, адекватным этому способу описания колебаний, является аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений [II.26-28, III.1-3, 13, 15-17]. Выделим два основных понятия теории дифференциальных уравнений, на базе которых будет структурировано дальнейшее изложение теории колебаний.

Степень свободы системы. Число степеней свободы динамической системы p равно числу величин, полностью характеризующих состояние системы N , деленному на два (для автономных систем - порядку системы дифференциального уравнения, деленному на два): $p = N/2$.

Это понятие возникло при развитии механики. Простейший тип механического движения - движение вдоль направления, задаваемого декартовой прямой, описывается вторым законом Ньютона для некоторой координаты, то есть обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В этом случае говорят, что система обладает одной степенью свободы.

Приведем методику расчета числа степеней свободы.

а. Автономные системы. Автономным системам отвечают дифференциальные или разностные уравнения, в которые время не входит явным обра-

зом – параметры системы не зависят от времени и на нее не действуют обобщенные внешние силы.

В этом случае уравнению второго порядка (или системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка) соответствует система с одной степенью свободы, третьего порядка – с полутора степенями, четвертого порядка – с двумя и т.д. Автономные системы описывают свободные колебания.

Пример: Уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ – уравнение второго порядка, параметры которого не зависят от времени и на нее не действуют обобщенные внешние силы – одна степень свободы.

б. Неавтономные системы. Неавтономные системы – это системы, в которые время входит явно. Состояние автономной системы второго порядка в произвольный момент времени t характеризуется двумя величинами: x и \dot{x} (или x_1 и x_2), т.е. $N = 2$. Если в нее явно входит время, то кроме указанных величин следует указать и момент времени, к которому они относятся: (x, \dot{x}, t) или (x_1, x_2, t) . Всего этих величин $N = 3 \Rightarrow n = N/2 = 1.5$. Поэтому наличие внешних сил или зависимости параметров системы от времени добавляет половину степени свободы. Неавтономные системы описывают вынужденные или параметрические колебания.

Пример: Уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \Omega t)x = f(t)$ – уравнение 2-го порядка, параметры которого зависят от времени и на нее действуют обобщенные внешние силы – уравнение с полутора степенями свободы.

Фазовое пространство. Множество всех возможных состояний системы называют фазовым пространством. *Размерность фазового пространства* для автономных сосредоточенных систем равна количеству величин, характеризующих состояние системы, т.е. для автономных систем равна порядку системы N , а для неавтономных – $N + 1$. Характер эволюции системы по аналогии с механикой и статистической физикой удобно характеризовать *фазовым объемом*. Элементарный фазовый объем $d\Gamma$ системы (1.2.1) равен: $d\Gamma = dx_1 dx_2 \dots dx_N$. Относительное изменение фазового объема с течением времени равно:

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\frac{dx_1}{dt} dx_2 \dots dx_N + \frac{dx_2}{dt} dx_1 dx_3 \dots dx_N + \dots + \frac{dx_N}{dt} dx_1 \dots dx_{N-1}}{dx_1 dx_2 \dots dx_N} = \frac{dx_1}{dx_1} + \frac{dx_2}{dx_2} + \dots + \frac{dx_N}{dx_N}$$

По отношению к тому, как меняется фазовый объем системы с течением времени, системы принято делить на консервативные и диссипативные.



Рис 1.2.1

Если фазовый объем не меняется с течением времени

$\Gamma^{-1}\Gamma = 0$, то систему называют *консервативной*, (рис. 1.2.1), где показано фазовое пространство гармонического осциллятора. Если фазовый объем меняется с течением времени $\Gamma^{-1}\Gamma \neq 0$, то систему называют *диссипативной*.

Пример: Относительный фазовый объем гармонического осциллятора

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \quad \frac{dv}{dt} = -2\gamma v - \omega_0^2 x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{1}{dx dv} \left(\frac{dx}{dt} dv + \frac{dv}{dt} dx \right) = \frac{dx}{dx} \frac{dv}{dv} = 0 - 2\gamma = -2\gamma, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

и эта система консервативна при $\gamma = 0$ и диссипативна при $\gamma \neq 0$.

Выделим также еще одно весьма важное определение. Система уравнений называется *динамической*, если она имеет единственное решение при $t \rightarrow \infty$. Большинство задач теории колебаний описываются динамическими системами.

• Системы с дискретным временем

Точечным отображением (отображением последования) N – го порядка называют систему N алгебраических уравнений вида

$$x_{i,n+k} = f_i(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{N,n}), \quad k \geq 1$$

с N начальными условиями

$$x_{i,n=0} = x_{in}, \quad i = \overline{1, \dots, N}.$$

Системы с непрерывным временем всегда могут быть сведены к системам с дискретным временем [I.1.11,12, II.13,16]. Кроме того, отображения последования могут формулироваться и независимо от систем с непрерывным временем. Анализ подобных отображений обычно проще решения дифференциальных уравнений. Стандартным способом исполнения процедуры перехода от непрерывных систем временем к дискретным является *метод отображений Пуанкаре* [I.1.11, II.13]. Проиллюстрируем методику реализации этого метода для автономной динамической системы третьего порядка, фазовое пространство которой трехмерно. Выберем двумерную

площадку S таким образом, чтобы фазовые траектории многократно ее пересекали не по касательной.

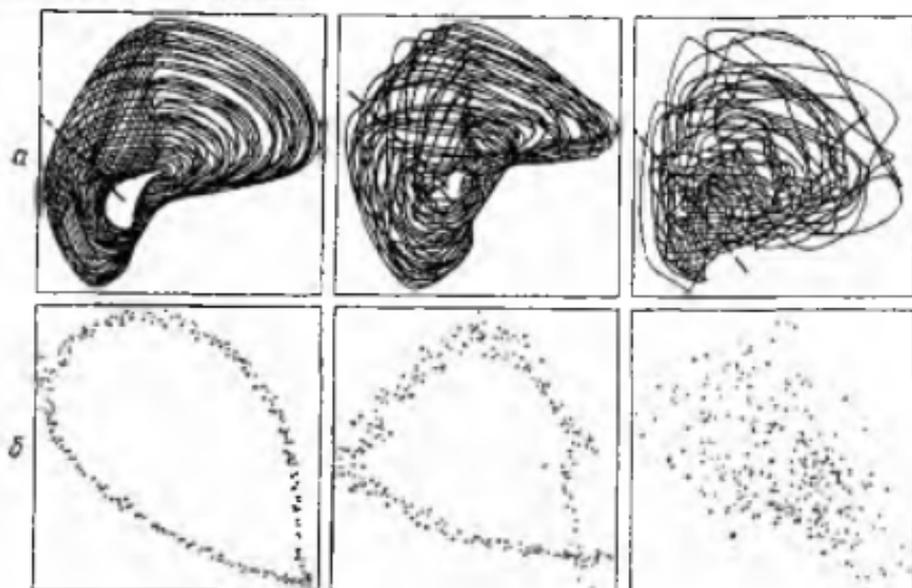


Рис. 1.2.2 Сечения Пуанкаре, полученные пересечением фазовых траекторий с плоскостью, проходящей через штриховую линию

Зададим на S систему отсчета (X, Y) , на площадке выберем начальную точку (x, y) , из нее выпускается фазовая кривая и отслеживается следующее пересечение (x', y') с S с проходом в том же направлении. Если поменять начальную точку, поменяется и образ. Так возникнет отображение $x' = f_1(x, y)$, $y' = f_2(x, y)$ поверхности S в себя – *отображение Пуанкаре* (рис. 1.2.2).

Этот метод, как и метод фазовой плоскости, является частично урезанным, так как информация о поведении системы между пересечениями теряется.

1.2.1 Прямое решение уравнений колебательного процесса

Этот метод оптимален при анализе линейных автономных систем и линейных неавтономных систем с постоянными коэффициентами.

- *Общая методика поиска решения линейных динамических систем.* Здесь кратко изложена методика анализа поведения линейных динами-

ческих систем, поскольку для них доказан ряд утверждений, серьезно формализующих и упрощающих поиск их решений.

Поведение линейных динамических систем описывается уравнением $\bar{L}\bar{x} = \bar{f}$,

где \bar{L} - линейный оператор, \bar{f} - известная функция. Оператор \bar{L} называется *линейным*, если для любых двух функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из области его определения выполняется условие

$$\bar{L}[C_1x_1(t)+C_2x_2(t)] = C_1\bar{L}x_1(t)+C_2\bar{L}x_2(t),$$

где C_1, C_2 - постоянные. Из линейности оператора \bar{L} следуют два утверждения, составляющие содержание *принципа суперпозиции*:

1) Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - два решения уравнения $\bar{L}\bar{x} = 0$, то их линейная комбинация $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ также является решением.

2) Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - два решения неоднородного уравнения $\bar{L}\bar{x} = \bar{f}$, то их разность $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ является решением однородного уравнения $\bar{L}\bar{x} = 0$.

В частности, эти утверждения полностью справедливы для нормальной системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\bar{x}} = \hat{F}(t)\bar{x} + \hat{g}(t) \Leftrightarrow \dot{x}_i = \sum_{j=1}^N f_{ij}(t)x_j + g_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2.3)$$

где $\hat{L} = \hat{D}/dt - \hat{F}$ и лежат в основе методики нахождения их решений.

В самом деле, в соответствии с принципом суперпозиции, *общее решение однородной* ($g_i=0, i=1, \dots, N$) *линейной системы* (1.2.3) $\bar{x}(t)$ *можно искать в виде суперпозиции частных решений* $\bar{x}_i(t)$:

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \bar{x}_i(t),$$

где c_i - N произвольных констант, которые в силу теоремы существования и единственности решения системы (1.2.3) должны быть определены из N начальных условий $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. Линейно независимые частные решения системы (1.2.3) $\bar{x}_i(t)$ также называют *фундаментальной системой* решений (1.2.3).

Рассмотрим частные случаи представления системы (1.2.3).

I. Однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами N – го порядка. Поиск решения в этом случае производится по следующей *схеме* [1.1-9]:

1. Решение (1.2.3) ищется в виде

$$\bar{x}(t) = \bar{C}e^{\lambda t} \Leftrightarrow x_i(t) = C_i e^{\lambda t}, \quad i = 1 \dots N.$$

2. Разыскиваются N корней $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ получившегося характеристического уравнения

$$\begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{ln} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

3. Решение для одной из переменных записывается в виде

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j t}.$$

Остальные ищутся с помощью оставшихся связей.

II. Если однородная система N – го порядка может быть представлена в виде одного дифференциального уравнения

$$x^{(N)} + a_1 x^{(N-1)} + \dots + a_N x = 0, \quad (1.2.4)$$

то поиск решения производится по аналогичной *схеме*

1. Решение уравнения (1.2.4) разыскивается в виде

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

2. Ищутся корни характеристического уравнения

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_N = 0.$$

3. Записывается решение уравнения (1.2.4) в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j t}.$$

III. Интегрирование *неоднородной* ($g_i \neq 0, i=1, \dots, N$) системы типа (1.2.3) сводится к нахождению фундаментальной системы однородной. В самом деле, разыскивая решение (1.2.3), когда $g_i(t) \neq 0$ хотя бы при одном значении i , в виде

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) x_j(t), \quad (1.2.5)$$

после подстановки в (1.2.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}}{dt} \bar{c}(t) + \frac{d\bar{c}}{dt} \hat{X} &= \hat{F} \cdot \hat{X} \cdot \bar{c}(t) + \bar{g}(t) \quad \frac{d\hat{X}}{dt} = \hat{F} \cdot \hat{X} \\ \Rightarrow \frac{d\bar{c}}{dt} \hat{X} &= \bar{g}(t) \quad \hat{X}^{-1} \Rightarrow \frac{d\bar{c}}{dt} = \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

где

$$\hat{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = (c_1, \dots, c_n).$$

Отсюда

$$\bar{c}(t) = \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt + \bar{c}_0.$$

Подставляя это соотношение в уравнения, полученные выше, получаем

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \hat{X}(t) \bar{c}_0 + \hat{X}(t) \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt \quad x_0 = x(t_0) = \hat{X}(t_0) \bar{c}_0 \\ \Rightarrow \bar{x}(t) &= \hat{X}(t) \hat{X}^{-1}(t_0) \bar{c}_0 + \hat{X}(t) \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Выражение (1.2.7), представляющее собой *общее решение неоднородного уравнения (1.2.3) есть сумма общего решения однородной части уравнения (1.2.3) и любого частного решения этого уравнения:*
 $\bar{x}_{O.H}(t) = \bar{x}_{O.O}(t) + \bar{x}_{ч.н}(t).$

Частное решение неоднородного уравнения иногда удается подобрать каким-либо другим способом (чаще всего это удается сделать для полиномов, тригонометрических и экспоненциальной функций).

Для практических приложений важно отметить, что большинство практических методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и их точных или приближенных решений собрано в справочниках по ОДУ [III-1,3] и если не стоит задача последовательного решения системы, то следует немедленно обратиться к одному из известных справочников.

1.2.2 Выделение нормальных колебаний

Уравнение линейного гармонического осциллятора можно представить в форме, отличающейся от (1.2.2). Такой переход производится с помощью линейного преобразования от динамических переменных x и y к новым переменным [1.2,3], которые выбираются так, чтобы получающиеся для них уравнения описывали не взаимодействующие друг с другом системы.

Поэтому чаще всего выделение нормальных мод проводят для систем взаимодействующих осцилляторов, понижая, тем самым, порядок анализируемой системы. Проиллюстрируем принципы применения этого метода для гармонического осциллятора.

Рассмотрим снова систему (1.2.2) Умножим первое и второе уравнения на некоторые константы α и β и сложим их. Такая процедура приводит к

$$\text{выражению } \frac{d}{dt}(\alpha x + \beta y) = -\frac{\beta}{\alpha} \omega_0^2 \left(\alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 2\gamma\beta)}{-\omega_0^2 \beta} y \right).$$

Выберем коэффициенты α и β так, чтобы в этой формуле множители перед y , а следовательно и выражения в больших круглых скобках, справа и слева были одинаковы. Это выполняется, если

$$\beta = -(\alpha^2 - 2\gamma\alpha\beta)/(\omega_0^2\beta)$$

или

$$\omega_0^2(\beta/\alpha)^2 - 2\gamma\beta/\alpha + 1 = 0,$$

откуда при $\gamma < \omega_0$ имеем $\beta/\alpha = \omega_0^{-2}(\gamma \pm i\omega)$.

Это уравнение определяет только отношение коэффициентов. Это объясняется линейностью уравнений (1.2.2). Один из коэффициентов, скажем α , следует находить из дополнительных соображений. Введем функции $a(t)$ и $a^*(t)$ с помощью соотношений

$$a(t) = \alpha \left(x + (\gamma + i\omega)y/\omega_0^2 \right),$$

$$a^*(t) = \alpha \left(x + (\gamma - i\omega)y/\omega_0^2 \right). \quad (1.2.8)$$

Эти величины называют *нормальными колебаниями*. Подставляя формулы (1.2.8) в уравнение (1.2.2), находим, что нормальные колебания удовлетворяют уравнениям

$$a(t) = (-\gamma - i\omega)a(t),$$

$$a^*(t) = (-\gamma + i\omega)a^*(t). \quad (1.2.9)$$

Уравнения (1.2.9) называют уравнениями гармонического осциллятора в форме нормальных колебаний. Их решения:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0) \exp(i(-\omega + i\gamma)t), \\ a^*(t) &= a^*(0) \exp(i(\omega + i\gamma)t). \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Заметим, что если по физическому смыслу координата и скорость осциллятора - действительные величины, то начальные значения нормальных колебаний $a(0)$ и $\dot{a}(0)$ комплексно сопряжены друг другу. Тогда из решений (1.2.10) следует, что нормальные колебания будут сопряжены друг другу и во все последующие моменты времени. В таком случае для описания динамики осциллятора достаточно одного из уравнений (1.2.9). Поскольку нормальные колебания - комплексные функции, то число степеней свободы сохраняется при переходе от уравнения (1.2.2) к уравнениям (1.2.9). Из (1.2.10) следует, что колебанию $a(t)$ соответствует комплексная собственная частота $-\omega + i\gamma$, а колебанию $\dot{a}(t)$ - собственная частота $\omega + i\gamma$. Этим исчерпывается спектр собственных частот линейного осциллятора с затуханием.

До этого момента коэффициент α оставался неопределенным. Как уже говорилось, поскольку уравнения линейны, его выбор обусловлен только соображениями удобства. Часто просто считают $\alpha = 1$, при рассмотрении параметрических процессов принято выбирать α так, чтобы в пределе нулевого затухания $\gamma = 0$ энергия осциллятора определялась выражением $W = \omega_0 a^*(t)a(t)$. Тогда для каждого типа осциллятора коэффициент α получается свой. Например, для грузика на пружинке, подставляя в последнее соотношение выражение $W = (mv^2/2 + kx^2/2)$ и формулы (1.2.8), находим, что $\alpha = (k/(2\omega_0))^{1/2}$. В такой нормировке нормальные колебания равны

$$a(t) = \sqrt{k/2\omega_0} \left(x + (\gamma + i\omega)v/\omega_0^2 \right), \quad a^*(t) = \sqrt{k/2\omega_0} \left(x + (\gamma - i\omega)v/\omega_0^2 \right).$$

Из этих уравнений можно выразить величины x и v :

$$x = \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega} \right) a^* \right), \quad v = \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \frac{\omega_0^2}{i\omega} (a - a^*).$$

Для осцилляторов других типов легко получить аналогичные выражения.

1.2.3 Построение фазового портрета

В ряде случаев, прежде всего для нелинейных систем, поведение системы можно качественно исследовать путем построения ее фазового портрета [1.2,5,7] - в простейшем случае системы второго порядка вида

$$\dot{x} = f_1(x, y), \dot{y} = f_2(x, y) \quad (1.2.11)$$

зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Иногда фазовый портрет может быть получен непосредственно из системы (1.2.11) путем деления одного из уравнений системы на другое и решения полученного уравнения первого порядка. Однако это бывает редко. Эта зависимость несет меньшую информацию, чем решения $x=x(t)$, $y=y(t)$, однако позволяет исследовать поведение системы в окрестности так называемых *особых точек* (x_j, y_j) , где $f_{1,2} = 0$ и, исходя из топологических соображений, качественно построить фазовые кривые на всей плоскости, давая представление о структуре решения при любых значениях x, y . Последовательность при построении фазового портрета состоит из четырех шагов.

I. Поиск особых точек. Особые точки (x_j, y_j) динамической системы определяются из уравнений

$$f_1(x_j, y_j) = 0, f_2(x_j, y_j) = 0.$$

II. Линеаризация системы (1.2.11) в окрестности особой точки. Решение (1.2.11) ищется в виде

$$x = x_j + x', y = y_j + y',$$

где $x' \ll x_j, y' \ll y_j$,

а функции f_j раскладывают в ряд Тейлора с точностью до слагаемых первого порядка по x', y' . В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} x' + \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} y', \\ \frac{dy'}{dt} = \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} x' + \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} y', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = ax' + by', \\ \frac{dy'}{dt} = cx' + dy'. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

Матрицу

$$\tilde{j} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} & \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} \\ \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} & \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} \end{pmatrix} \text{ называют матрицей Якоби.}$$

При этом необходимо выполнение условий $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$, если это не так, то линейного приближения недостаточно для исследования устойчивости.

III. Получение характеристического уравнения. Решение системы (1.2.12) ищется в виде $x' = A \exp(\lambda t)$, $y' = B \exp(\lambda t)$. Эти соотношения подставляются в систему (1.2.12). В результате получается система линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} \left(\left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda \right) A + \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} B = 0, \\ \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} A + \left(\left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda \right) B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda)A + bB = 0, \\ cA + (d - \lambda)B = 0. \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, только когда равен нулю определитель из коэффициентов при A и B:

$$\begin{vmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda & \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} \\ \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} & \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.2.14)$$

Раскрывая его, получаем характеристическое уравнение для определения λ_i :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \text{Sp}[\bar{L}]\lambda + \text{Det}[\bar{L}] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - S\lambda + D = 0, \quad (1.2.15)$$

где S – след матрицы \bar{L} , D – ее определитель.

IV. Решение характеристического уравнения и анализ его корней. Корни характеристического уравнения (1.2.14) равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4D}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \text{ и могут быть:}$$

а) Мнимыми $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{D} = i\sqrt{ad - bc}$ при $S=0, D>0$. В этом случае особую точку называют *центром*. Пример – гармонический осциллятор при $\gamma = 0$. При этом система (1.2.11) имеет вид

$$\dot{x}' = y', \quad \dot{y}' = -\omega_0^2 x'.$$

Она может быть переписана в форме $dy'/dx' = -\omega_0^2 x'/y'$. Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение в виде уравнения эллипса $x'^2/\omega_0^2 + y'^2 = C = \text{const}$.

б) Комплексно сопряженными $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\eta$ при $S^2 \ll 4D$. В этом случае особую точку называют *фокусом*. Пример – гармонический осциллятор при $\gamma \neq 0$. При этом система (1.2.11) имеет вид $\dot{x}' = y', \dot{y}' = -\omega_0^2 x' - 2\gamma y'$. Она может быть переписана в форме $dy'/dx' = -(2\gamma y' + \omega_0^2 x')/y'$, а после замены $y' = x'z$ в виде

$$\frac{zdz}{z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2} = -\frac{dx'}{x'}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными при $\gamma^2 < \omega_0^2$ имеет решение, которое после возвращения к исходным переменным имеет вид

$$\sqrt{y'^2 + 2\gamma x' y' + \omega_0^2 x'^2} = C \exp\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \arctg \frac{y' + \gamma x'}{\omega_0^2 - \gamma^2 x'^2}\right).$$

Делая упрощающую замену

$$u = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x' = \omega x', \quad v = y' + \gamma x',$$

последнее соотношение мы можем представить в форме

$$u^2 + v^2 = C^2 \exp\left(\frac{2\gamma}{\omega} \arctg \frac{v}{u}\right).$$

Наконец, после перехода к полярным координатам $u = \rho \cos\varphi, v = \rho \sin\varphi$, имеем уравнение *спирали*

$$\rho = C \exp(\gamma\varphi/\omega).$$

При этом, если $\eta = \text{Im}[\lambda_{1,2}] < 0, (S < 0, D > 0)$, то особую точку называют *устойчивым фокусом*. Устойчивый фокус при этом является простейшим примером *аттрактора* размерности $d = 1$ - множеством, к которому асимптотически притягиваются фазовые траектории (рис.1.2.3).

Если $\mu = \text{Im}[\lambda_{1,2}] > 0$ ($S > 0, D > 0$), то особую точку называют *неустойчивым фокусом*.

в) Действительными и имеют один знак $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ ($S^2 > 4D$). В этом случае особую точку называют *узлом*.

Повторяя те же действия, что и в предыдущем разделе, при $\gamma^2 > \omega_0^2$ приходим к уравнению фазовой траектории вида $v = C u^{q_2/q_1}$, где

$$v = y' + q_1 x', \quad u = y' + q_2 x', \quad \text{а } q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0, \quad q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0.$$

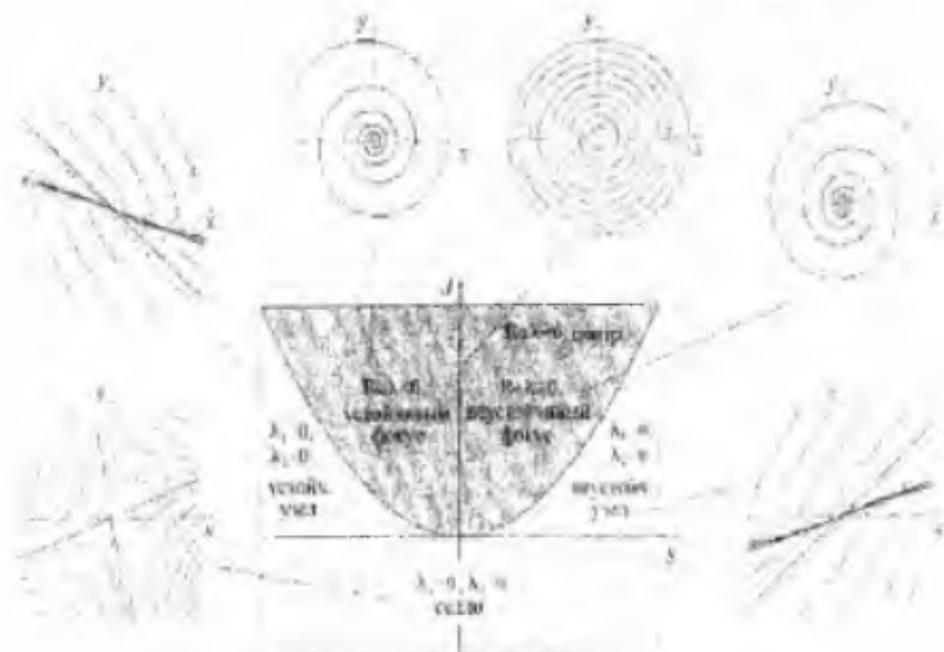


Рис. 1.2.3 Фазовый портрет гармонического осциллятора

При этом, если ($S < 0, D > 0$), $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то особую точку называют *устойчивым узлом*. Это пример *аттрактора* размерности $d = 1$ - множество, к которому притягиваются фазовые траектории.

Если ($S > 0, D > 0$), $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то особую точку называют *неустойчивым узлом*.

г) Действительными и имеют разные знаки $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ ($D < 0$). В этом случае особую точку называют *седлом*. Этот случай реализуется при $\omega_0^2 < 0$.

При этом

$$q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0, \quad q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0.$$

У нелинейных систем может быть несколько особых точек различного типа [1.1,2]. Рассмотрим законы совместного существования различных типов состояний равновесия и замкнутых траекторий. Пусть есть векторное поле на плоскости. Нарисуем замкнутый контур (рис. 1.2.4) не проходящий через состояние равновесия. Если взять на нем точку S и двигать ее вдоль контура, то вектор поля, проходящий через эту точку, будет непрерывно вращаться. Когда точка сделает полный оборот, то вектор повернется на угол $2\pi j$, где j - целое число. Направление вращения вектора будем считать положительным, если оно совпадает с направлением движения S . Целое число j носит название *индекса Пуанкаре*. Для контура на рис. 1.2.4 $j = 0$.

Если состояние равновесия окружить замкнутым контуром, то нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла, фокуса равны $+1$, а для седла -1 . Для предельного цикла $j = +1$.

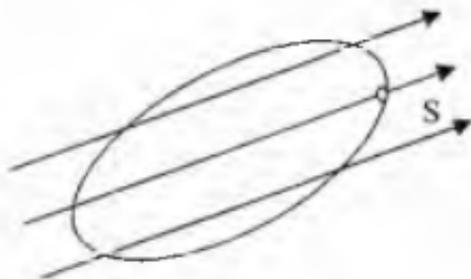


Рис. 1.2.4

Индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек. Отсюда сразу ясно, например, что предельного цикла, внутри которого находятся два седла или два седла и фокус, существовать не может, так как для него $j = +1$, а для трех таких состояний равновесия общее $j = -1$. А вот в случае седла и двух фокусов предельный цикл может существовать, так как в этом случае сумма j равна $-1 + 1 + 1 = +1$. Два состояния равновесия (седло и узел), могут слиться и исчезнуть, так как их совместный индекс $j = 0$ и т.д. Итак, опираясь на *теорию индексов Пуанкаре*, можно утверждать следующее:

1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится, по крайней мере, одна особая точка, так как индекс такой траектории равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, $j = 0$.
2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая

точка, то это не может быть седло, а только точка с $j = +1$.

3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся несколько простых особых точек, то число их всегда нечетно, а число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.

4. Если на фазовой плоскости есть узел или фокус, а также седло, то они могут быть соединены фазовой кривой.

2 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Колебания в системах с одной степенью свободы – это свободные колебания в системах второго порядка.

2.1 Линейные системы с одной степенью свободы

Колебательные

процессы, соответствующие данным системам, относятся, с одной стороны, к простейшим, а с другой к наиболее известным процессам, изученным подробно. Это базовые явления. Изложение в этом разделе идет от частного к общему приводятся примеры известных колебательных процессов из разных областей и

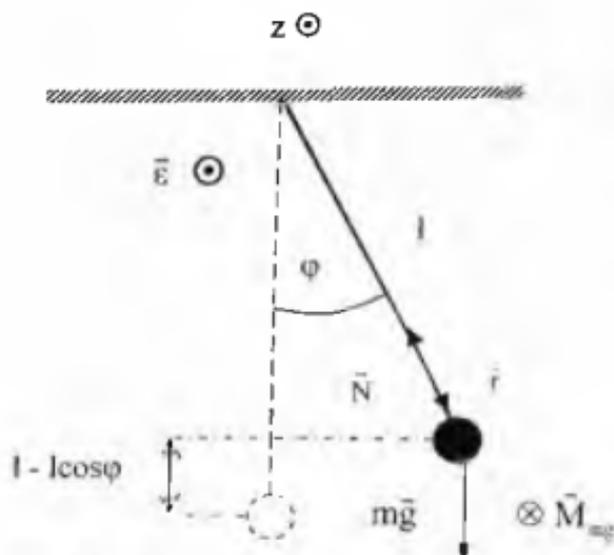


Рис. 2.1.1. Модель математического маятника

показывается, что их малые колебания описываются единым образом – на основе модели гармонического осциллятора.

Пример 1. Математический маятник. Свободные колебания математического маятника (рис.2.1.1) могут быть описаны с помощью *основного уравнения вращательного движения*

$$I\ddot{\epsilon} = \sum_j \vec{M}_j = \sum_j [\vec{F}_j, \vec{r}_j], \quad (2.1.1)$$

где I - момент инерции тела, $\ddot{\epsilon}$ - угловое ускорение, $\sum_j \vec{M}_j$ - сумма моментов сил, действующих на тело. Потенциальная энергия маятника равна (рис. 2.1.2) $U = mgl(1 - \cos\varphi) = 2mgl\sin^2(\varphi/2)$. Фазовые кривые показаны на рис. 2.1.3.

Положение равновесия определяется условием

$$dU/d\varphi = 0 \Rightarrow mgl\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Число n может принимать два значения для разных положений равновесия:

- Нижнее $n = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Так как

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow 0} = mgl\cos(-\varepsilon) = mgl\cos\varepsilon \approx mgl > 0,$$

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi} = mgl\cos(+\varepsilon) = mgl\cos\varepsilon \approx mgl > 0,$$

то это — *минимум*, т.е. устойчивое положение равновесия.

- Верхнее $n = 1 \Rightarrow \varphi = \pi$.

Так как

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi - \varepsilon} = mgl\cos(\pi - \varepsilon) = mg(\cos\pi\cos\varepsilon + \sin\pi\sin\varepsilon) \approx -mgl < 0,$$

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi + \varepsilon} = mgl\cos(\pi + \varepsilon) = mg(\cos\pi\cos\varepsilon - \sin\pi\sin\varepsilon) \approx -mgl < 0,$$

то это положение равновесия — *максимум*, т.е. неустойчивое положение равновесия. Любое, сколь угодно малое воздействие выводит маятник из него и возвращает в нижнее. Перебор остальных значений n не дает новых положений равновесия. Из нижнего положения равновесия маятник выводится тем или иным внешним воздействием, возвращающая сила — сила тяжести. Заметим, что момент силы натяжения нити равен нулю, поскольку $\vec{N} \parallel \vec{r}$. В проекции на ось z в пренебрежении трением в точке подвеса име-

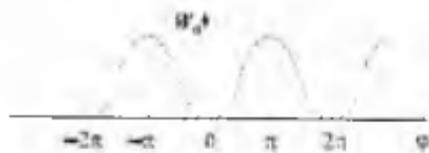


Рис. 2.1.2



Рис. 2.1.3

ем $\ddot{\varphi} + (mgl/I)\sin\varphi = 0$, где $I = I_0 + ml^2$ - момент инерции тела. Для математического маятника $I_0 = 0$. После подстановки

$$\ddot{\varphi} + (g/I)\sin\varphi = 0. \quad (2.1.2)$$

Если $\varphi \ll 1$, то $\sin\varphi \approx \varphi$. В этом случае уравнение (2.1.2) становится линейным:

$$\ddot{\varphi} + (g/I)\varphi = 0, \quad (2.1.3)$$

а колебания называют *малыми*.

Пример 2. RLC-контур. Свободные колебания в RLC-контуре (рис. 2.1.4) могут быть описаны с помощью *второго правила Кирхгофа*

$$\sum_j U_j = \sum_n \varepsilon_n, \quad (2.1.4)$$

где U_j - падение напряжения на j -м элементе, $\sum_n \varepsilon_n$ - сумма э.д.с., действующих в контуре.

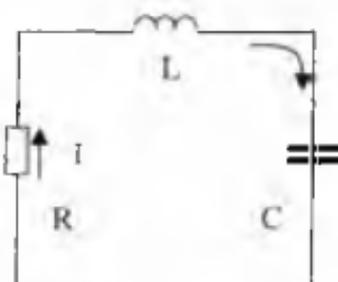


Рис.2.1.4

Здесь $U_1 = U_R = IR$ - падение напряжения на активном сопротивлении, $U_2 = U_C = q/C$ - падение напряжения на конденсаторе, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = -LI$ э.д.с. индукции. В результате получим уравнение $IR + q/C = -LI$. Дифференцируя последнее уравнение по времени и пользуясь определением силы тока $I = \dot{q}$, после деления уравнения на L получаем

окончательно уравнение того же вида, что и (2.1.3):

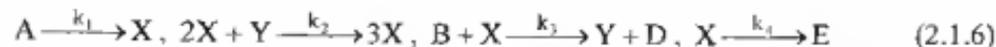
$$\ddot{I} + R\dot{I}/L + I/LC = 0. \quad (2.1.5)$$

Полная энергия рассматриваемой системы имеет вид

$E = q^2/2C + Li^2/2 = q^2/2C + L\dot{q}^2/2$, поэтому роль потенциальной энергии здесь играет энергия конденсатора $U = q^2/2C$. Положение равновесия оп-

ределяется условием $dU/dq = 0 \Rightarrow q/C = 0 \Rightarrow q = 0$. Это минимум, т.к. $d^2U/dq^2|_{q \rightarrow 0} = 1/C > 0$. Принцип Ле Шателье в этом случае имеет вид *правила Ленца*.

Пример 3. Брюсселятор Реакция, являющаяся моделью реакции Белоусова-Жаботинского [II.34]:



с учетом диффузии (процесс «5») и конвективного переноса реагентов X и Y (процесс «6») описывается системой

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \underbrace{-\bar{v}X}_{(5)} + \underbrace{k_1 A}_{(1)} + \underbrace{k_2 X^2 Y}_{(2)} - \underbrace{k_3 BX}_{(3)} - \underbrace{k_4 X}_{(4)} + \underbrace{D_1 \Delta X}_{(5)}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \underbrace{-\bar{v}Y}_{(6)} + \underbrace{k_3 BX}_{(3)} - \underbrace{k_2 X^2 Y}_{(2)} + \underbrace{D_2 \Delta Y}_{(5)} \quad (2.1.7)$$

Концентрация вещества X увеличивается в процессах «1» и «2» (знаки «+») и уменьшается в процессах «3» и «4» (знаки «-»). Концентрация вещества Y увеличивается в процессе «3» (знак «+») и уменьшается в процессе «2» (знак «-»). Поскольку появление данной молекулы в сфере взаимодействия не зависит от появления в этой сфере других частиц, то по теореме об умножении вероятностей результат взаимодействия представляется в виде произведения концентраций веществ, участвующих в акте взаимодействия.

В пренебрежении процессами диффузии и конвективного переноса и малых отклонениях от положения равновесия

$$X' = X - A \ll A, \quad Y' = Y - B \ll B$$

при $k_j = 1, \forall j$ система (2.1.7) сводится к виду

$$\dot{X}' = A^2 Y' + (B - 1) X', \quad \dot{Y}' = -A^2 Y' - B X', \quad (2.1.8)$$

которое может быть записано в форме одного уравнения

$$\dot{Y}' + (B - 1 - A^2) Y' + (1 - 2B) A^2 Y' = 0 \quad (2.1.9)$$

Пример 4. Простейшая модель национальной экономики. Динамика национальных доходов и расходов описывается уравнениями [II.30]

$$\dot{I} = I - aC, \quad \dot{C} = b(1 - C - G), \quad (2.1.10)$$

где $I > 0$ - национальный доход, $C > 0$ - потребительские расходы, $G = G_0 = \text{const} \geq 0$ - правительственные расходы. При малых отклонениях от положения равновесия

$$I' = I - aG_0/(a-1) \ll aG_0/(a-1), \quad C' = C - G_0/(a-1) \ll G_0/(a-1)$$

система (2.1.10) сводится к системе $\dot{I}' = I' - aC'$, $\dot{C}' = b(I' - C')$, которая может быть записана в форме одного уравнения второго порядка

$$\ddot{C}' + (b-1)\dot{C}' + b(a-1)C' = 0. \quad (2.1.11)$$

Пример 5. Модель Лотки-Вольтерра. Будем полагать, что на замкнутом ареале живут хищники с концентрацией на единицу площади n и их жертвы – вегетарианцы с концентрацией на единицу площади N . Жертвы питаются растительной пищей, которая имеется в избытке, а хищники только жертвами. Будем считать, что скорость изменения числа особей каждого вида в отсутствие другого пропорциональна общему их числу на данный момент. Учитывая то, что изменение численности вида из-за наличия другого будет пропорционально количеству встреч, то есть произведению численностей обоих видов, можно записать для скорости изменения числа жертв и хищников [1.2, II.33]:

$$\dot{N} = aN - bnN, \quad \dot{n} = -An + BnN, \quad (2.1.12)$$

где $a > 0$ – мальтузианский параметр, $b > 0$, $A > 0$ – коэффициент естественной смертности хищников, $B > 0$. Отсюда можно получить уравнение для отклонений численности видов от положения равновесия ($A/B, a/b$), пренебрегая членами второго порядка малости

$$\dot{N}' = -ABn'/b, \quad \dot{n}' = abN'/b \quad (2.1.13)$$

Отсюда следует уравнение, описывающее изменение численности каждого вида: дифференцируя первое уравнение (2.1.13) после учета второго получим

$$\ddot{N}' + AaN' = 0. \quad (2.1.14)$$

2.2 Гармонический осциллятор. Параметры колебаний

Уравнения (2.1.3), (2.1.5), (2.1.9), (2.1.11), (2.1.14) могут быть записаны в единой!!! форме. Таким образом, малое колебание любой природы описывается единым образом – моделью *гармонического осциллятора*:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.2.1)$$

Различными в каждом конкретном случае будут лишь выражения для двух параметров, значения которых определяют характер движения в системе – *коэффициента диссипации* 2γ , определяющего скорость уменьшения (или увеличения при $\gamma < 0$) амплитуды и ω_0 – *собственной частоты колебаний*.

Смысл этих параметров заключается в следующем. Если промежуток времени $\Delta t = 1/\gamma$, то $A_0/A = e$. Отсюда вытекает физический смысл коэффициента затухания: величина $1/\gamma$ равна промежутку времени, по истечении которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Частота колебаний связана с *периодом* колебаний – минимальным промежутком времени T , в течение которого фаза колебаний принимает то же значение, что и в момент времени $t = 0$: $\omega_0 = 2\pi/T$

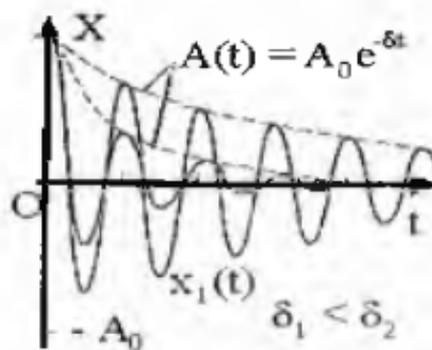


Рис. 2.2.1

Уточним использованные термины. Для этого заметим, что общее решение уравнения (2.2.1) может быть переписано в виде [II.26-28, III.1,3], (рис. 2.2.1)

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.2.2)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Уравнение (2.2.1) дополняется начальными условиями

$$x(t=0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (2.2.3)$$

Удовлетворяя решение (2.2.1) начальным условиям (2.2.3), получаем следующие выражения для амплитуды A и начальной фазы φ :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{\gamma}{\omega} - \frac{v_0}{x_0 \omega}. \quad (2.2.4)$$

Для характеристики интенсивности затухания вводят также понятие *логарифмического декремента затухания*. Пусть T – период затухающего колебания, A_n и A_{n+1} – амплитудные значения функции $x(t)$ для двух ее последовательных экстремумов. Величина d , равная $d = \ln(A_n/A_{n+1})$, называется логарифмическим декрементом затухания. Выясним связь между γ и d :

$$d = \ln(A_n/A_{n+1}) = \ln(A_0 e^{-\gamma n} / A_{n+1} e^{-\gamma(n+1)}) = \ln(e^{\gamma T}) = \gamma T. \quad (2.2.5)$$

Используя уравнение (2.2.4), можно преобразовать закон изменения амплитуды: $A_n = A_0 e^{-\gamma t} = A_0 e^{-\gamma n T} = A_0 e^{-d n}$ (рис. 2.2.2), где $n = t/T$ - число колебаний за время t . Если $n = 1/d$, то $A_0/A_n = e = 2.7318$. Если значение d невелико ($d \ll 1$), то можно показать, что $(A_n - A_{n+1})/A_n = d$. Логарифмический декремент связан с другой важной характеристикой колебаний - *добротностью* Q следующим соотношением: $Q = \pi/d = \pi/\gamma T$.

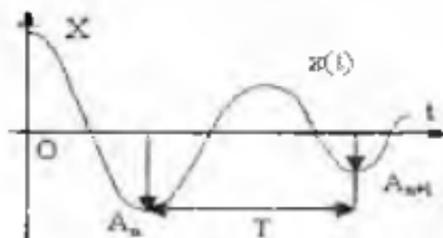


Рис. 2.2.2

Полная энергия колебаний W складывается из кинетической W_K и потенциальной W_{II} энергий:

$$W = W_K + W_{II} = m\dot{x}^2/2 + m\omega^2 x^2/2.$$

Подсчитаем полную механическую энергию гармонического осциллятора, совершающего колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Так как

$$W_K = m\dot{x}^2/2 = (mA^2\omega_0^2/2)\sin^2(\omega t + \varphi), \quad W_{II} = m\omega_0^2 x^2/2 = (mA^2\omega_0^2/2)\cos^2(\omega t + \varphi),$$

то $W = mA^2\omega_0^2/2$. Из закона сохранения энергии следует, что по мере совершения колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий равняются максимальному значению полной механической энергии. При наличии трения в системе полная механическая энергия системы с течением времени уменьшается, но ее мгновенное значение, попрежнему, равняется максимальной потенциальной энергии, относящейся к данному моменту времени. Следовательно, для затухающих колебаний, подчиняющихся закону $x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$, будет справедливо выражение:

$$W = mA^2(t)/2 = mA_0^2\omega_0^2 e^{-2\gamma t}/2. \text{ Спектр линейного осциллятора показан на рис. 2.2.3.}$$

• *Точечное отображение для гармонического осциллятора.*

Рассмотрим гармонический осциллятор $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, упомянутый выше с более простыми начальными условиями $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0 = 0$.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + \gamma x_0 \omega^{-1} \sin \omega t), \quad v = -e^{-\gamma t} (\omega + \gamma^2 \omega^{-1}) x_0 \sin \omega t.$$

Будем следить, для определенности, за последовательными пересечениями фазовой траектории оси абсцисс. В момент пересечения $\sin \omega t = 0$, т.е. пересечения происходят в моменты времени $t_n = \pi n / \omega$. В эти моменты координата точки пересечения оси абсцисс фазовой траекторией равна $x_n = x(t_n) = (-1)^n x_0 \exp(-\pi \gamma / \omega)$, или, в рекуррентной форме,

$$x_{n+1} = -\exp(-\pi \gamma / \omega) x_n = \rho x_n. \quad (2.2.6)$$

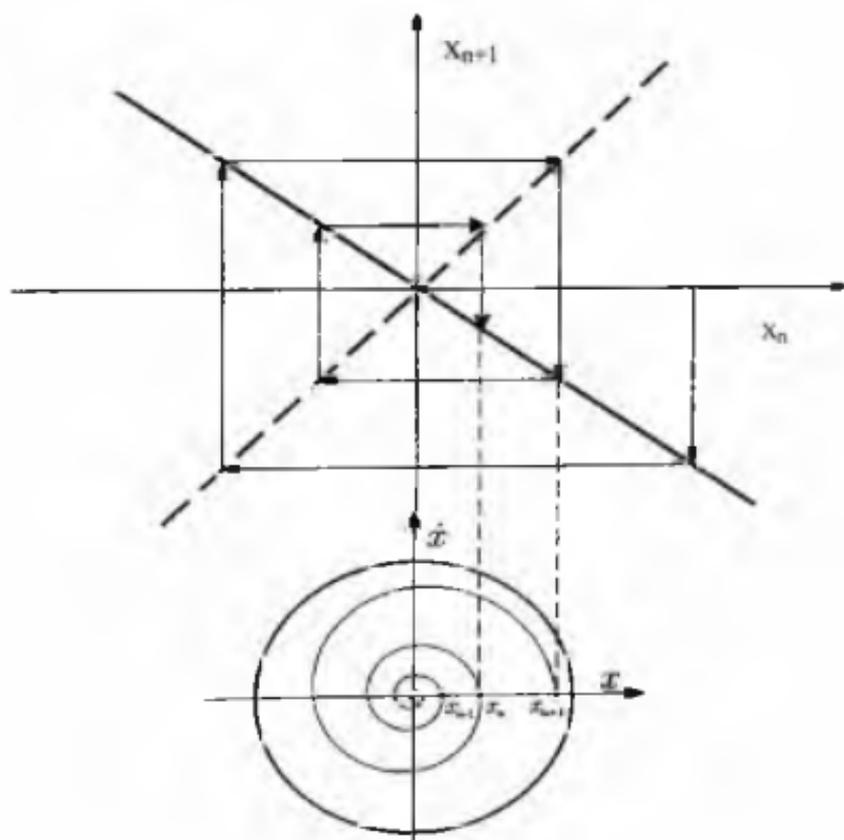


Рис. 2.2.2 Диаграмма Ламера для гармонического осциллятора

Построим данную последовательность на плоскости (x_{n+1}, x_n) .

Методика построения следующая.

1. Выберем на оси x_n начальную точку x_1 при $n = 1$. Соответствующую ей точку x_2 найдем, используя (2.2.6).

2. Для нахождения следующей точки превратим ординату x_2 в абсциссу x_2 , переходя на биссектрису $x_{n+1} = x_n$. Такому переходу соответствует придание точке x_2 статуса начального условия для второго шага. Новой абсциссе соответствует ордината x_3 , определяемая прямой (2.2.6).

3. Многократно повторяя это построение, получаем ломаную, называемую *лестницей Ламерея* (рис.2.2.2).

Эта последовательность в силу условия $|dx_{n+1}/dx_n| < 1$ сходится к предельной точке $x^* = 0$, определяемой из условия $x^* = f(x^*)$. Ее называют *неподвижной точкой отображения*. Видно, что данная последовательность соответствует периодически повторяющемуся процессу.

2.3 Нелинейные консервативные системы с одной степенью свободы. Примеры колебательных систем

В этом разделе рассмотрены нелинейные колебания в некоторых кон-

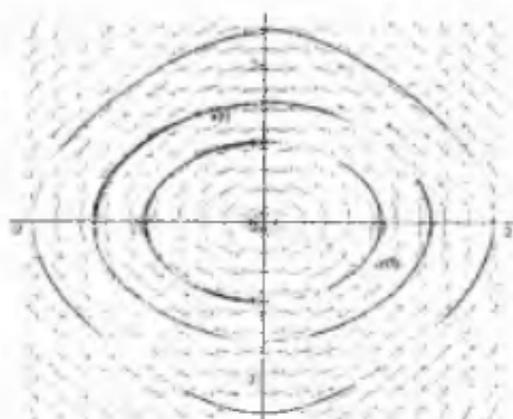


Рис.2.3.1

сервативных системах второго порядка. В отличие от линейных систем, для нелинейных не существует общих методов решения уравнений, в силу чего консервативные системы 2-го порядка представляют собой исключение, когда задача может быть решена до конца без использования приближенных методов.

Приведем примеры процессов, приводящих к уравнениям

нелинейных консервативных колебаний.

Пример 1. Математический маятник. Рассмотрим уравнение (2.1.2): $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \Omega, \dot{\Omega} = -\omega_0^2 \sin \varphi$. Относительное изменение фазового объема системы равно нулю:

$$\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = (d\dot{\varphi}/d\varphi + d\dot{\Omega}/d\Omega)/d\varphi d\Omega = 0 + 0 = 0,$$

поэтому система консервативна. Приведенное уравнение решается точно. Методика решения такова. Умножим уравнение на $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right) - \omega_0^2 (\cos \varphi) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем уравнение фазовых траекторий

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \omega_0^2 \cos \varphi - \omega_0^2 \cos \varphi_0, \quad (2.3.1)$$

где константа интегрирования в правой части выбрана в удобной для дальнейшего анализа форме. Фазовая плоскость математического маятника показана на рис. 2.3.1. Константа φ_0 имеет смысл максимального отклонения маятника от положения равновесия, где

$$\dot{\varphi} = 0.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{-1/2} d\varphi = 2^{1/2} \omega_0 dt$$

и проинтегрируем его еще раз. В результате получаем решение

$$2^{-1/2} \int_0^{\varphi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{-1/2} d\varphi = \omega_0 (t - t_0),$$

которое можно записать в эквивалентной форме

$$\int_0^{\varphi/2} (\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2))^{-1/2} d\varphi = 2\omega_0 (t - t_0),$$

причем $\varphi(t_0) = 0$. Константы φ_0 и t_0 могут быть выражены через начальные условия, но в данном случае использование начальных условий менее удобно. После замены переменных $\sin(\varphi/2) = x \sin(\varphi_0/2)$ получаем

$$\omega_0 (t - t_0) = \int_0^x \left[(1 - x^2)(1 - q^2 x^2) \right]^{-1/2} dx,$$

где

$$\sin \frac{\varphi}{2} = x \sin(\varphi_0/2), \quad u = \sin(\varphi/2) \sin^{-1}(\varphi_0/2).$$

Обращение последнего интеграла приводит к решению [III.24,25]

$$\sin \varphi / \sin \varphi_0 = \operatorname{sn}[\omega_0 (t - t_0), \sin(\varphi_0/2)].$$

Пример 2. Модель Лотки-Вольтерра. Снова рассмотрим модель Лотки-Вольтерра (2.1.12). Эта система, очевидно, путем замены переменной также может быть сведена к одному уравнению

$$\ddot{n} - n^{-1}(\dot{n})^2 = (a - bn)(\dot{n} + An), \quad (2.3.2)$$

однако его аналитическое решение, в отличие от предыдущей задачи, много сложнее. Исследуем структуру решения на фазовой плоскости. Анализ дает следующее:

I. У системы существует единственная особая точка $(b/a, B/A)$.

II. Уравнение для отклонений численности видов от положений равновесия получаем, линеаризуя исходную систему

$$\dot{N}' = -ABn'/b, \quad \dot{n}' = abN'/b.$$

III. Отсюда нетрудно получить характеристическое уравнение, разыскивая решение данной системы в виде $N' = C \exp(\lambda t)$, $n' = D \exp(\lambda t)$. В результате получим уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, где $\omega^2 = Aa$.

IV. Его корни уравнения имеют вид: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, эта точка - центр. Следовательно, численность каждого вида описывается уравнениями

гармонических колебаний вида $\{n; N\} = \{n_0; N_0\} + \{n'; N'\} \sin(\omega t + \delta)$, которое описывает устойчивый колебательный процесс. Фазовый портрет системы, уравнение которого можно получить, вводя обозначения $n = x$, $y = \dot{x} = dx/dt$, приведен на рис. 2.3.2. Тогда учитывая, что $dy/dt = \omega^2 x$, можно получить $dy/dx = -y/\omega^2 x$. Проводя интегрирование и вводя обозначение $k^2 = 2c$, где c - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями, получим уравнение эллипса $y^2/k^2 + x^2/(k^2/\omega^2) = 1$ с полуосями k и k/ω . Замкнутыми являются и фазовые траектории системы далеко вдали от особой точки.

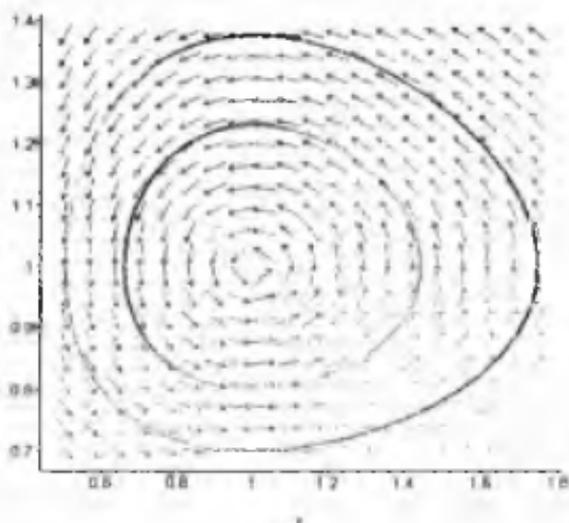


Рис.2.3.2

• *Спектр колебаний.*

Нелинейные колебания имеют еще одну важную характеристику – *спектр колебаний*. Известно, что периодическую функцию $F(t)$ можно разложить в ряд по гармоническим компонентам - синусам, косинусам или экспонентам, *ряд Фурье* [III.19-21], который имеет вид

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t / T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n t / T) =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n t / T + \chi_n), \quad (2.3.3)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \langle F(t) \rangle, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt,$$

$$n=1,2,3,\dots, \quad \sin \chi_n = -b_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \chi_n = a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

В ситуации, когда колебательный процесс представляет собой суперпозицию отдельных гармонических сигналов, для понимания сути такого процесса удобно использовать *спектр колебаний*. При графическом отображении спектра колебаний по оси абсцисс указывают частоты колебаний ω_n или их номера n , а по оси ординат указывают квадраты их амплитуд a_n^2 . На рис.2.3.3

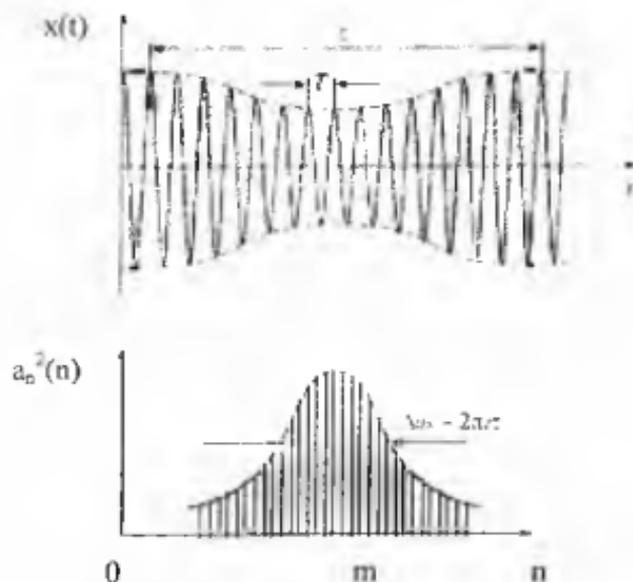


Рис. 2.3.3

показан сигнал, представляющийся рядом (2.3.3), группирующийся вокруг частоты с номером m , и его спектр. Спектр позволяет видеть, какая часть энергии сосредоточена в гармонике.

2.4 Итерационные методы анализа колебательных систем

Здесь демонстрируются основные принципы и детали применения приближенных методов анализа нелинейных колебательных систем – разложения по малому параметру. Необходимость их развития обусловлена двумя факторами – точное решение уравнений колебательного процесса часто записывается в сложном виде, а метод фазовой плоскости дает лишь основные представления об основных чертах процесса, но не дает решения.

2.4.1 Метод разложения по малому параметру

Как мы видели выше, анализ даже консервативных систем часто сопряжен с существенными техническими сложностями, уже там решение записывается только в неявном виде с использованием специальных функций. Поэтому часто для анализа нелинейных колебательных процессов приходится применять или *качественные методы* или (и) *методы теории возмущений*.

Рассмотрим осциллятор вида [1,14,II.3]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0. \quad (2.4.1)$$

Введем безразмерные время и координату $t = \omega_0 t$, $x = x/A$. Тогда уравнение (2.4.1) примет вид

$$\ddot{\bar{x}} + \bar{x} + \epsilon \bar{x}^2 = 0, \quad (2.4.2)$$

где $\epsilon = \alpha A / \omega_0^2$.

Рассмотрим случай *слабой нелинейности*, когда $\epsilon \ll 1$, т.е. уравнение (2.4.2) содержит *малый параметр*. Уравнение (2.4.2) близко к уравнению линейного консервативного осциллятора, оно отличается от него малым слагаемым порядка ϵ . Поэтому ясно, что при $\epsilon \ll 1$ решение будет иметь вид квазигармонических колебаний (близких к гармоническим).

Построим приближенное решение (2.4.2). Наиболее простой способ состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда по степеням $\epsilon \ll 1$:

$$x(t) = x_1(t) + \epsilon x_2(t) + \epsilon^2 x_3(t) + \dots \quad (2.4.3)$$

считая x_i величинами порядка единицы – подобный прием называют методом *разложения по малому параметру*. Подставив (2.4.3) в (2.4.2), получим

$$\ddot{\bar{x}}_1 + \epsilon \ddot{\bar{x}}_2 + \epsilon^2 \ddot{\bar{x}}_3 + \dots + \bar{x}_1 + \epsilon \bar{x}_2 + \epsilon^2 \bar{x}_3 + \dots + \epsilon \bar{x}_1^2 + 2\epsilon^2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \dots = 0 \quad (2.4.4)$$

Приравнявая в (2.4.4) к нулю члены при одинаковых степенях ϵ , приходим к системе «зацепляющихся» уравнений:

$$\varepsilon^0: \bar{x}_1 + x_1 = 0,$$

$$\varepsilon^1: \bar{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0,$$

$$\varepsilon^2: \bar{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0 \text{ и т. д.}$$

Первое уравнение есть уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид $x = a \cos(t + \varphi)$, где амплитуда a и начальная фаза φ - постоянные, определяемые из начальных условий. Подставим это решение во второе уравнение, чтобы найти x_2 :

$$\bar{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -a^2/2 - (a^2/2)\cos 2(t + \varphi).$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением линейного консервативного осциллятора под внешним воздействием. Его решение следует искать в виде $x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) + x_{2\text{чн}}$. a_1 и φ_1 по-прежнему определяются из начальных условий. Как известно из теории линейных колебаний, в спектре вынужденных колебаний будут содержаться те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая и вторая гармоники. Нетрудно найти, что

$$x_{2\text{чн}} = -a^2/2 + (a^2/6)\cos 2(t + \varphi).$$

$$\text{Итак, получаем } x_2 = a_1 \cos(t + \varphi) - a^2/2 + (a^2/6)\cos 2(t + \varphi).$$

Полученное решение содержит *четыре* независимых постоянных, для определения которых имеются только *два* начальных условия. Поэтому можно две из этих постоянных выбрать произвольным образом. Наиболее удобно положить $a_1 = 0$ (константы произвольные, и будет множитель при $\cos(t + \varphi_1)$ иметь вид a или $a + a_1$ - безразлично). В дальнейшем условимся во всех высших порядках малости занулять составляющие, соответствующие собственным колебаниям. Окончательный вид решения с точностью до членов порядка ε^2 :

$$x_2 \approx a \cos(t + \varphi) + \left(-a^2/2 + (a^2/6)\cos 2(t + \varphi)\right) + \dots \quad (2.4.5)$$

Как видно из выражения (2.4.5), в спектре колебаний появляются высшие гармоники: нулевая и вторая, амплитуды которых имеют порядок εa^2 , т.е. много меньше амплитуды основной составляющей. Можно продолжить описанную процедуру, продвигаясь во все более высокие порядки малости. В решении появятся высшие гармоники. Однако их амплитуды будут еще меньше (порядка $\varepsilon^{n-1} a^n$, где n - номер гармоники), поскольку нелинейность

является слабой и амплитуды высших гармоник должны быстро уменьшаться с ростом их номера. Остается вычислить константы a и φ . Пусть начальные условия имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Тогда, используя выражение (2.4.5), легко найти, что

$$x_0 = a \cos \varphi - \varepsilon \left(a^2 / 2 - (a^2 / 6) \cos 2\varphi \right), \quad -y_0 = a \sin \varphi - (\varepsilon a^2 / 3) \sin 2\varphi. \quad (2.4.6)$$

Это система трансцендентных уравнений, получить точное решение которой в общем случае не удастся. Однако, учитывая, что в (2.4.6) содержится малый параметр, можно представить решение в виде рядов

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \quad (2.4.7)$$

В разложениях (2.4.7) нужно учитывать то же число членов, что и в решении (2.4.5). Подставим (2.4.7) в систему (2.4.6) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке по ε будем иметь: $a_0 \cos \varphi_0 = x_0$, $a_0 \sin \varphi_0 = -y_0$, откуда нетрудно найти амплитуду и начальную фазу нулевого порядка

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

$$\varphi_0 = -2 \operatorname{arctg} \left(y_0 / \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right) \right).$$

Члены порядка ε^1 в (2.4.6) дают систему линейных уравнений относительно a_1 , φ_1 , найти решение которой не представляет труда:

$$a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - a_0^2 / 2 + (a_0^2 / 6) \cos 2\varphi_0 = 0.$$

$$a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + (a_0^2 / 3) \sin 2\varphi_0 = 0.$$

2.4.2 Осциллятор Дуффинга. Метод Линистедта - Пуанкаре

Прямое разложение по степеням малого параметра не всегда приводит к успеху. Дело в том, что на каждом шаге слагаемые предыдущего порядка малости переходят в правую часть и начинают играть роль внешней силы. При этом может возникнуть ситуация, при которой внешнее воздействие будет иметь частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Решение полученного уравнения будет нарастать, и их амплитуда может стать большей, чем допустимо соответствующим порядком теории возмущений. В силу сказанного в данном случае надо модифицировать метод разложения по малому параметру так, чтобы исключить соответствующие

слагаемые. Чтобы показать, как это делается, рассмотрим осциллятор Дуффинга [I.1, 14, II.3]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (2.4.8)$$

Используем замену переменных раздела 2.4.1. Тогда (2.4.8) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.4.9)$$

где теперь $\varepsilon = \beta A / \omega_0^2$. Будем снова рассматривать случай слабой нелинейности, т.е. положим $\varepsilon \ll 1$. Отыскивая решение в виде разложения по малому параметру $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$,

будем иметь

$$\varepsilon^0: \ddot{x}_1 + x_1 = 0;$$

$$\varepsilon^1: \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0.$$

В нулевом порядке по ε по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид

$$x_1 = a \cos(t + \varphi).$$

Найдем x_2 . После подстановки выражения для x_1 второе уравнение приводится к виду

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = a^3 \cos^3(t + \varphi) = -a^3 [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)] / 4 \quad (2.4.10)$$

Найдем решение (2.4.10). Так как нелинейность кубическая, то в спектре воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение будем искать в виде суммы откликов на них:

$$x_2 = x_{21} + x_{23},$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\ddot{x}_{21} + x_{21} = (3a^3/4) \cos(t + \varphi), \quad \ddot{x}_{23} + x_{23} = (a^3/4) \cos 3(t + \varphi). \quad (2.4.11)$$

Решение второго уравнения системы (2.4.11) находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте выпуждающей силы:

$$x_{23} = (a^3/32) \cos 3(t + \varphi).$$

Что же касается первого уравнения системы (2.4.11), то в нем внешнее воздействие имеет частоту, равную!!! частоте собственных колебаний осциллятора. Как известно из теории линейных колебаний, в этом случае возникает резонанс, выражающийся в неограниченном нарастании амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид

$$x_{21} = -(3a^3 t / 8) \cos(t + \varphi).$$

Это так называемый *секулярный* или *вековой* член. Окончательно решения с точностью до членов второго порядка малости принимают вид:

$$x_{21} = a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-\left(3a^3 t / 8\right) \cos(t + \varphi) + \left(a^3 / 32\right) \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots$$

$$x_{23} = \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi). \quad (2.4.12)$$

Обратим внимание, что как бы ни был мал параметр ε , с течением времени второй член в решении (2.4.12), неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения по степеням ε на больших временах нарушается. В чем причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются *неизохронными*, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение по степеням ε принципиально не учитывает неизохронность: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники (для осциллятора с квадратичной нелинейностью, рассмотренного в разделе 2.4.1, мы пришли бы к сходному результату, если бы продвинулись в вычислениях ещё на порядок).

Итак, нужно модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Введем в уравнении (2.4.8) новую переменную $\tau = \omega t$. Поскольку $d/dt = \omega d/d\tau$, получим

$$\omega^2 \ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (2.4.13)$$

Схема действий такова – мы будем искать решение уравнения (2.4.13) в виде разложений в степенной ряд как для переменной x , так и для частоты ω : $x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots$, $\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$. Первый член в разложении для ω при этом представляет собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. А следующие поправки $\omega_1, \omega_2, \dots$ будут играть двойную роль – описывать эффекты неизохронности и выбираться так, чтобы обнулить секулярные члены, позволяя избавиться от растущих слагаемых.

Подставим эти разложения в уравнение (2.4.13). Тогда получим

$$(1 + 2\varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 (\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots)(\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \dots) + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon x_1^2 x_2 + \dots = 0. \quad (2.4.14)$$

После несложных вычислений (2.4.14) приводится к виду

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon (\ddot{x}_2 + x_2 + 2\omega_1 \dot{x}_1 + x_1^3) + \dots = 0. \quad (2.4.15)$$

Приравнивая к нулю члены нулевого и первого порядков малости, будем иметь

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1 \dot{x}_1 - x_1^3. \quad (2.4.16)$$

Решение первого уравнения системы (2.4.16) запишем в виде $x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$.

Подставив это соотношение в правую часть второго уравнения системы (2.4.16), найдем, что

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - a^3(3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi))/4 \quad (2.4.17)$$

Теперь необходимо выбрать ω_1 таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные $\cos(\tau + \varphi)$, которые приводят к секулярному росту решения для x_2 . Для этого, очевидно, следует положить $\omega_1 = 3a^3/8$. Теперь уравнение (2.4.17) принимает вид

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -(a^3/4) \cos 3(\tau + \varphi).$$

Его решение

$$x_2 = (a^3/32) \cos 3(\tau + \varphi)$$

не содержит секулярных составляющих и разложение остается равномерно пригодным при всех t . Окончательный вид найденного решения с точностью до членов $-\varepsilon^1$:

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + (\varepsilon a^3/32) \cos 3(\omega t + \varphi),$$

$$\omega \approx 1 + 3\varepsilon a^2/8. \quad (2.4.18)$$

Если параметр $\varepsilon > 0$, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при $\varepsilon < 0$ частота, наоборот, уменьшается.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Здесь рассмотрены нелинейные колебания в некоторых диссипативных системах второго порядка [1.1,2,14]. Эффективными способами анализа x систем является метод фазовой плоскости и методы теории возмущений.

3.1 Метод многих масштабов

В реальных системах часто существует целый набор характерных времен задачи, связанных со скоростями протекания тех или иных процессов, часто сильно отличающихся друг от друга. В таких случаях кажется естественным выделить соответствующие временные масштабы задачи и прово-

дить анализ поведения системы на соответствующем масштабе отдельно, таким образом определяя вклад отдельного процесса в динамику системы.

Продемонстрируем данную методику на примере модели Дуффинга с учетом диссипативных процессов. Приближенное решение (2.4.18), полученное при помощи метода Линшtedта Пуанкаре, можно представить в виде

$$x = a \cos(t + 3a^2 \epsilon t / 8 + \varphi) + (\epsilon a^3 / 32) \cos(3t + 9a^2 \epsilon t / 8 + 3\varphi). \quad (3.1.1)$$

Зависимость от времени входит в это выражение двояким образом: $x = x(t, \epsilon t)$. Поскольку ϵ является малым параметром, зависимость от ϵt можно интерпретировать как медленное изменение параметров колебания. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, мы приходим к представлению решения в виде $x = x(t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \epsilon^3 t)$.

Введем обозначения $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, $T_2 = \epsilon^2 t$ и т. д.

Зависимость от очередного аргумента T_n характеризует изменения, которые проявляются на последовательно возрастающих масштабах времени.

Идея перехода от единственного времени t к набору переменных T_n лежит в основе метода многих масштабов, позволяющего получать решения широкого класса задач теории колебаний. Это связано с тем, что в конкретных системах часто существует целый набор характерных времен, связанных со скоростями протекания тех или иных процессов.

Продемонстрируем его применение на примере уравнения Дуффинга. Для общности включим в него слабое затухание

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + x + \epsilon x^3 = 0. \quad (3.1.2)$$

Здесь γ считается величиной порядка единицы. Отметим, что метод Линшtedта - Пуанкаре неприменим в случае, когда учитывается затухание, так как в нем изначально предполагается, что амплитуда и частота колебаний являются постоянными, и эффекты уменьшения амплитуды описать не удастся. При переходе к новым переменным T_n операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = \hat{D}_0 + \epsilon \hat{D}_1 + \epsilon^2 \hat{D}_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \hat{D}_0^2 + 2\epsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 + \epsilon^2 (\hat{D}_1^2 + 2\hat{D}_1 \hat{D}_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Решение для переменной x по-прежнему будем искать в виде степенного ряда $x(t) = x_1(t) + \epsilon x_2(t) + \epsilon^2 x_3(t) + \dots$. Подставляя это разложение и разложение (3.1.3) в уравнение (3.1.2), получим

$$\begin{aligned} & \hat{D}_0^2 x_1 + 2\epsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \dots + \epsilon \hat{D}_0^2 x_2 + \dots + 2\epsilon \gamma \hat{D}_0 x_1 + \dots \\ & \dots + x_1 + \epsilon x_2 + \dots + \epsilon x_1^3 + 3\epsilon^2 x_1^2 x_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Приравняв к нулю члены порядка ϵ^0 и ϵ^1 , приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \hat{D}_0^2 x_1 + x_1 = 0, \\ & \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -2\epsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 - 2\gamma \hat{D}_0 x_1 - x_1^3. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Решение первого уравнения системы (3.1.5) по-прежнему запишем в виде $x_1 = \cos(T_0 + \varphi)$, но теперь будем считать a и φ не постоянными величинами, а функциями, зависящими от медленных переменных: $a = a(T_1, T_2, \dots)$, $\varphi = \varphi(T_1, T_2, \dots)$. Действительно, уравнение (3.1.2) в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение гармонического осциллятора, потому что решение в порядке ϵ^0 - квазигармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Подставим решение $x_1 = \cos(T_0 + \varphi)$ в правую часть второго уравнения системы (3.1.5). Учтем, что оператор \hat{D}_0 действует только на аргумент T_0 , а оператор \hat{D}_1 на медленно меняющиеся переменные a, φ . Получим

$$\begin{aligned} & \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = 2\left(\hat{D}_1 a \sin(T_0 + \varphi) + a \hat{D}_1 \varphi \cos(T_0 + \varphi)\right) + \\ & + 2\gamma a \sin(T_0 + \varphi) - a^3 \cos^3(T_0 + \varphi) = \\ & = 2\left(\hat{D}_1 a + \gamma a\right) \sin(T_0 + \varphi) + \left(2a \hat{D}_1 \varphi - \frac{3a^3}{4}\right) \cos(T_0 + \varphi) - \frac{a^3}{4} \cos 3(T_0 + \varphi). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

В правой части уравнения (3.1.6) следует приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные $\cos(T_0 + \varphi)$, $\sin(T_0 + \varphi)$. Это приводит к уравнениям

$$\hat{D}_1 a + \gamma a = 0, \quad \hat{D}_1 \varphi - 3a^2/8 = 0. \quad (3.1.7)$$

Таким образом, мы получили *укороченные* дифференциальные уравнения, которые описывают динамику медленно меняющихся переменных $a(T_1)$, $\varphi(T_1)$.

В случае консервативного осциллятора ($\gamma = 0$) уравнения (3.1.7) приводят к результату, в точности совпадающему с методом Линшtedта - Пуанкаре:

$$a = a_0, \quad \varphi = 3a_0^2 T_1 / 8 + \varphi_0,$$

где a_0, φ_0 - постоянные, определяемые из начальных условий. Величина $\hat{D}_1 \varphi$ поправка к частоте, появляющаяся из-за нелинейных эффектов. Для нее мы получаем значение $3a^3 / 8$.

При $\gamma > 0$ найти решение укороченных уравнений нетрудно:

$$a = a_0 e^{-\gamma T_1}, \quad \varphi = \varphi_0 + 3a_0^2 (1 - e^{-2\gamma T_1}) / 16\gamma. \quad (3.1.8)$$

Эти соотношения описывают экспоненциальное затухание амплитуды; при этом поправка к частоте также уменьшается. После исключения секулярных членов уравнение (3.1.6) принимает вид

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -(a^3 / 4) \cos 3(T_0 + \varphi).$$

Оно, очевидно, совпадает с уравнением, которое анализировалось в предыдущем разделе. Поэтому сразу запишем окончательный вид решения:

$$x \approx a(T_1) \cos(T_0 + \varphi(T_1)) + (\epsilon a^3(T_1) / 32) \cos 3(T_0 + \varphi(T_1)). \quad (3.1.9)$$

Зависимость амплитуды и фазы от медленного времени дается соотношениями (3.1.8). При использовании метода многих масштабов более удобно оперировать комплексной формой записи. Представим решение для x_1 в виде

$$x_1 = A(T_1) e^{i\tau_0} + \text{к.с.},$$

тогда уравнение (3.1.6) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= -\left((2i\hat{D}_1 A + 2i\gamma A) e^{i\tau_0} + \text{к.с.} \right) - (A e^{i\tau_0} + \text{к.с.})^3 = \\ &= -\left((2i\hat{D}_1 A + 2i\gamma A) e^{i\tau_0} - A^3 e^{3i\tau_0} - 3A^2 A^* + \text{к.с.} \right). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

В правой части (3.1.10) следует потребовать уничтожения секулярных членов, пропорциональных $e^{i\tau_0}$. Это приводит к комплексному уравнению

$$\hat{D}_1 A + \gamma A - 3i|A|^2 A / 2 = 0. \quad (3.1.11)$$

Вводя вещественные амплитуду и фазу $A = 0.5a e^{i\varphi}$ и разделяя вещественную и мнимую части, снова приходим к уравнениям (3.1.9).

3.2 Автоколебания. Метод ван дер Поля. Генератор ван дер Поля

Здесь изложен еще один метод анализа нелинейных колебаний, применяемый в ситуациях, когда наибольшими слагаемыми в модели являются слагаемые линейного консервативного осциллятора, а все остальные члены много меньше их. При этом, как известно из теории ОДУ, можно считать, что наличие этих слагаемых приводит к наличию медленной зависимости амплитуды колебаний от времени – *метод вариации произвольных постоянных*. Адаптация метода вариации произвольных постоянных к решению задач теории колебаний обычно называют *методом ван дер Поля*.

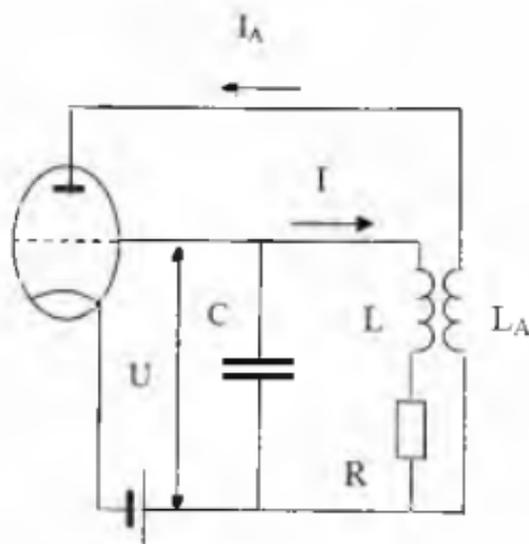


Рис.3.2.1

Для формулировки математической модели, описывающей процессы в схеме, показанной на рис. 3.2.1, составим уравнения, описывающие изменение напряжения на конденсаторе C в RLC контуре в сети сетки лампы. Аналогичное устройство может быть устроено на базе транзистора, [1.1,2]. При увеличении анодного тока I_A и соответствующем росте магнитного потока через катушку L_A возникает явление взаимной индукции катушек L и L_A , в силу чего в катушке L индуцируется ток I , направленный по правилу Ленца так, что конденсатор C заряжается и напряжение на сетке U возрастает. Тогда для RLC - контура в силу закона Ома для замкнутой цепи получаем равенство суммы падений напряжения на резисторе и конденсаторе (левая часть) сумме э.д.с. самоиндукции и взаимной индукции (правая часть), действующих в контуре

$$RI + U = -L\dot{I} + M\dot{I}_A, \quad (3.2.1)$$

где M – коэффициент взаимной индукции, причем знак при соответствующем слагаемом соответствует положительности э.д.с. взаимной индукции

при росте анодного тока I_A . Оно должно быть дополнено выражениями для тока и напряжения на конденсаторе

$$I = \dot{q},$$

$$U = \frac{q}{C} \Rightarrow I = C \frac{dU}{dt}$$

и выражением для сеточной характеристики лампы $I_A = I_A(U)$. Подставляя эти выражения в (3.2.1), приходим к уравнению [1.1,2,5,9]

$$LC\ddot{U} + RC\dot{U} + U = M\dot{I}_A \Leftrightarrow LC\ddot{U} + (RC - M dI_A / dU)\dot{U} + U = 0.$$

В соответствии с определением сеточной характеристики $S(U) = dI_A / dU$ последнее уравнение переписется в виде

$$LC\ddot{U} + [RC - MS(U)]\dot{U} + U = 0. \quad (3.2.2)$$

Очевидно, триод наиболее чувствителен к изменениям потенциала сетки в области максимальной крутизны сеточной характеристики. Для упрощения без потери общности будем считать, что рабочее напряжения $U_0 = 0$, чему соответствует анодный ток I_{A0} (точка перегиба на сеточной характеристике). Тогда в окрестности рабочей точки функция $S(U)$ может быть разложена в ряд Тейлора:

$$S = S_0 + \left. \frac{dS}{dU} \right|_{U=U_0} U + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 S}{dU^2} \right|_{U=U_0} U^2 = S_0 - S_2 U^2.$$

Отметим важный факт – в силу условий $M > 0$, $S_0 > 0$ при малых отклонениях от U_0 имеет место следующая цепочка связей: $\uparrow U \Rightarrow \uparrow I_A \Rightarrow \uparrow M\dot{I}_A \Rightarrow \uparrow \dot{I} \Rightarrow \uparrow \dot{U}$ и т. д., т.е. наблюдается *положительная обратная связь* между возмущениями параметров лампы и контура – малые возмущения нарастают. После подстановки выражения для сеточной характеристики в (3.2.2) получим

$$LC\ddot{U} + (RC - MS_0 + MS_2 U^2)\dot{U} + U = 0.$$

Далее, вводя переменные

$$\alpha = (MS_0 - RC)/LC, \quad \omega_0^2 = 1/LC, \quad \beta = 2MS_2/(RC - MS_0),$$

приходим к уравнению

$$\ddot{U} - \alpha(1 - \beta U^2)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0. \quad (3.2.3)$$

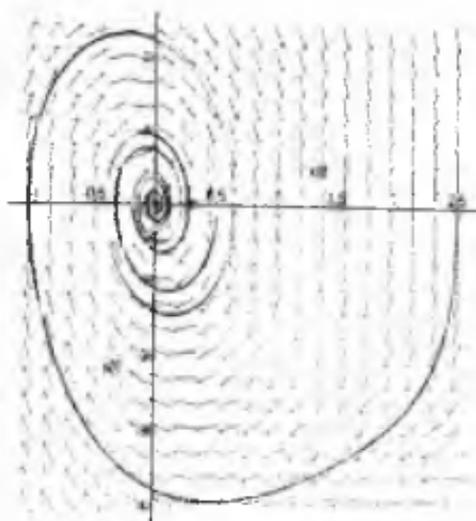


Рис.3.2.2. Фазовый портрет уравнения (3.2.4) при $\gamma < 0$

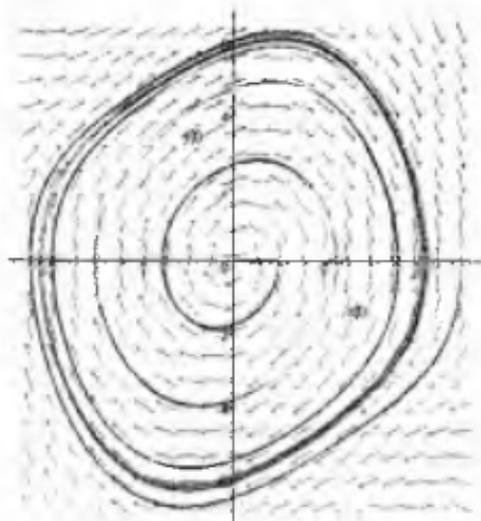


Рис.3.2.3. Фазовый портрет уравнения (3.2.4) при $\gamma > 0$

Вводя далее безразмерные переменные $x = \beta^{1/2}U$, $2\gamma = \alpha/\omega_0$, $t = \omega_0 t$, получаем уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} - 2\gamma(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.2.4)$$

Фазовый портрет уравнения (3.2.4) при $\gamma = -0.4$, $\omega_0^2 = 8$ и $\gamma = 0.4$, $\omega_0^2 = 8$ соответственно приведен на рис. 3.2.2. Здесь наблюдается явление *бифуркации* – качественное изменение характера поведения нелинейной системы при изменении внешних параметров. В данном случае при $\gamma < 0$ начальное возмущение затухает, а при $\gamma \geq 0$ ($MS_0 > RC$) любое возмущение асимптотически стремится к *аттрактору* размерности $d = 2$ – *предельному циклу*, описываемому периодическое решение.

Аналитическое описание явления автоколебаний может быть проведено только при условии $\gamma \ll 1$, когда можно воспользоваться методом ван дер Поля. Для этого перепишем уравнение (3.2.4) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\gamma(1 - x^2)\dot{x},$$

выделив, как всегда, малые слагаемые в правую часть. Будем искать решения этого уравнения, как и ранее, в виде

$$x = A(\epsilon t) \cos(\omega_0 t + \varphi(\epsilon t)),$$

пренебрегая в дальнейшем слагаемыми $\sim \varepsilon^2$ и выше. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{A \cos(\omega_0 t + \varphi)}} - 2A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{2A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} - \\ & - 2A\omega_0 \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} + \underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \\ & = 2\gamma(1 - A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) \left(\underline{A \cos(\omega_0 t + \varphi)} - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} \right). \end{aligned}$$

Слагаемые, подчеркнутые двумя чертами, являются слагаемыми основного приближения и всегда взаимно сокращаются в силу решения исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости амплитуды и фазы от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 1$ имеют порядок ε^2 и ими пренебрегают.

Для получения уравнения для медленно меняющейся амплитуды \dot{A} умножим приведенное выше равенство на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\omega_0 A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\omega_0 A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = A,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\omega_0 A \dot{\varphi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\omega_0 A \dot{\varphi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = A \dot{\varphi},$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} 2\gamma\omega_0 A^3 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \\ & = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\gamma\omega_0 A^3 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = \frac{\gamma A^3}{4}, \end{aligned}$$

а все остальные интегралы равны нулю [III.25], получаем

$$\dot{A} = \gamma(A - A^3/4), \quad A\dot{\varphi} = 0 \quad (3.2.5)$$

Первое уравнение системы (3.2.5) имеет стационарные состояния $A=0$ и $A=2$. Первое состояние неустойчиво и соответствует неустойчивому фокусу, второе устойчиво и соответствует предельному циклу, показанному на рис.3.2.3.

3.3 Точечное отображение для генератора ван дер Поля

Рассмотрим осциллятор ван дер Поля в режиме квазигармонических автоколебаний. Поскольку мы имеем дело с системой второго порядка, фазовое пространство которой двумерно, можно получить одномерное отображение вида $x_{n+1} = f(x_n)$ (рис. 3.3.1), причем в качестве x_n удобно выбрать точки пересечения траектории с положительной полуосью. Рассмотрим уравнение ван дер Поля

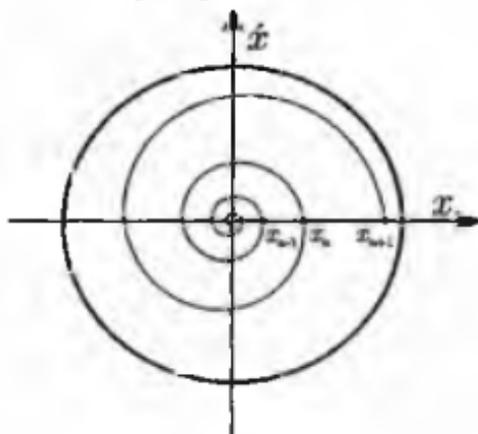


Рис.3.3.1

$$LC\ddot{U} + [RC - MS_0 + MS_2 U^2] \dot{U} + U = 0,$$

но введем безразмерные переменные: $\tau = \omega_0 t$, $x = U(\omega_0 MS_2)^{1/2}$, тогда получим

$$\ddot{x} + [\lambda - x^2] \dot{x} + x = 0, \quad (3.3.1)$$

где $\lambda = (MS_0 - RC)/(LC)^{1/2}$.

Соответствующее укороченное уравнение получается методами, описанными ранее, и имеет вид

$$\dot{A} = A(\lambda - A^2)/2.$$

Домножим это уравнение на A и обозначим $\rho = A^2$. Тогда получим следующее модельное уравнение

$$\dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho^2).$$

Дополним последнее уравнение начальным условием $\rho(0) = \rho_0$, в результате получим

$$\rho = \lambda \left[1 + (\lambda - \rho_0) e^{-\lambda t} / \rho_0 \right]^{-1},$$

откуда

$$x(t) \approx 2A(t) \cos(t + \varphi_0),$$

где

$$A(t) = \lambda^{1/2} e^{t/2} (\lambda + A_0^2 (e^{t/2} - 1))^{-1/2}.$$

Без ограничения общности можно выбрать $\varphi_0 = 0$. В точках пересечения с осью можно приближенно положить $\cos t \approx 1$, $t \approx 2\pi n$ (соответствие будет лучшим при меньших λ) и последовательно получить следующие выражения:

$$x_n = 2^{-1/2} \lambda^{1/2} x_0 e^{\pi n \lambda} (\lambda + x_0^2 (e^{2\pi n \lambda} - 1))^{-1/2},$$

$$x_{n+1} = 2^{-1/2} \lambda^{1/2} x_0 e^{\pi(n+1)\lambda} (\lambda + x_0^2 (e^{2\pi(n+1)\lambda} - 1))^{-1/2},$$

где введено обозначение $x_0 = 2A_0$.

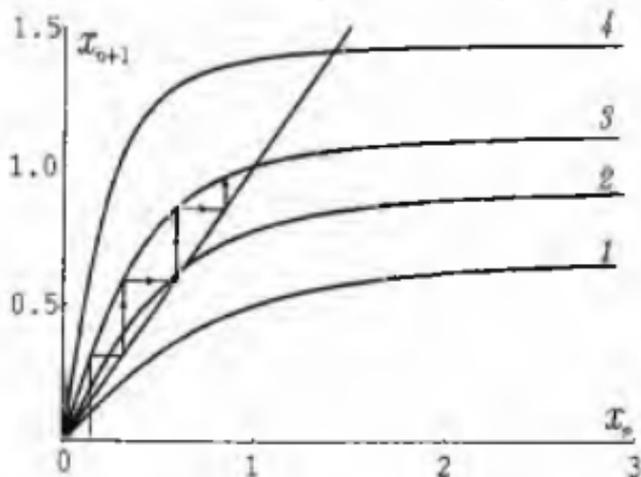
После несложных вычислений находим явное выражение для функции последования

$$x_{n+1} = x_n e^{\pi \lambda} \left(1 + \frac{x_n^2}{\lambda} (e^{2\pi \lambda} - 1) \right)^{-1/2}. \quad (3.3.2)$$

Отображение (3.3.2) имеет две неподвижные точки: $x_1 = 0$, что отвечает отсутствию колебаний, и $x_2 = 2\lambda^{1/2}$, что отвечает режиму установившихся автоколебаний. При этом значение амплитуды в точности соответствует найденному при помощи метода медленно меняющихся амплитуд. Проведем анализ неподвижных точек на устойчивость. Дифференцируя (3.3.2), получаем

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 8e^{\pi \lambda} \left(4 + \frac{x_n^2}{\lambda} (e^{2\pi \lambda} - 1) \right)^{-3/2} = \begin{cases} e^{\pi \lambda}, & x = x_1 \\ e^{-2\pi \lambda}, & x = x_2 \end{cases}$$

Нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при $\lambda = 0$. При $\lambda > 0$



появляется вторая неподвижная точка, которая является устойчивой. Таким образом, при помощи этого метода можно исследовать основные особенности динамики автоколебательных систем, определять положения аттракторов, выяснять вопрос об их устойчивости и т.д.

Рис.3.3.2

3.4. Быстрые и медленные движения

Затронем еще один важный класс задач - сильно нелинейные колебания в сильно неконсервативных системах, для которых можно выделить временные интервалы с различным характером изменения переменных - участки быстрых и медленных движений. Типичный пример - *релаксационные автоколебания*. Здесь мы демонстрируем метод, основанный на разделении быстрых и медленных движений для осциллятора Дуффинга с сильной диссипацией [1.14]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (3.4.1)$$

где γ - большой параметр. Для определенности будем считать $\beta > 0$. Введем новое время $\tau = t/2\gamma$. Уравнение (3.4.1) примет вид

$$\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (3.4.2)$$

где $\varepsilon = 1/4\gamma^2 \ll 1$. Таким образом, мы получили уравнение, содержащее малый параметр при старшей производной. Такие системы и удобно анализировать методом разделения движений.

Перепишем уравнение (3.4.2) в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon\dot{y} = -y - x - \beta x^3 = f(x, y). \quad (3.4.3)$$

Из уравнений (3.4.3) видно, что

$$dy/d\tau = f(x, y)/\varepsilon \gg 1$$

везде, за исключением области, где функция $f(x, y)$ близка к нулю. Условие $f(x, y) = 0$ определяет на плоскости (x, y) кубическую параболу $y = -x - \beta x^3$.

Это подпространство медленных движений нашей системы. Фактически движение изображающей точки будет медленным не только на этой кривой, но и в ее окрестности ширины ε , так что можно говорить и об области медленных движений.

Вне области медленных движений, разделив второе

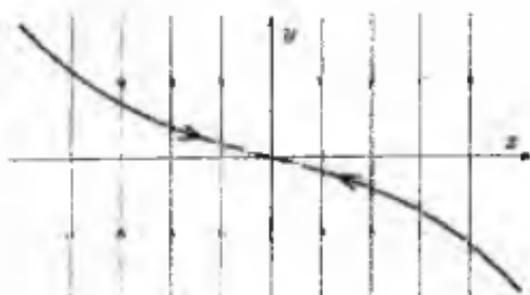


Рис. 3.4.1

уравнение на первое, найдем уравнение фазовых траекторий (рис. 3.4.1)
 $dy/dx = f(x, y)/\varepsilon y \gg 1$.

В области быстрых движений фазовые траектории близки к вертикальным прямым. Так можно построить фазовый портрет системы. Состояние равновесия — устойчивый узел в начале координат. Изображающая точка в начале быстро выходит в подпространство медленных движений, а затем медленно стремится к положению равновесия.

Получим приближенное решение уравнения (3.4.1), анализируя быстрые и медленные движения по отдельности, а затем «сшивая» полученные решения. В области быстрых движений можно пренебречь двумя последними слагаемыми в правой части второго уравнения системы (3.4.3) и записать $\varepsilon y \approx -y$. Решение этого уравнения есть $y = C_1 \exp(-t/\varepsilon)$.

Подставив это выражение в первое уравнение системы (3.4.3), найдем $x = C_2 - \varepsilon C_1 e^{-t/\varepsilon}$.

Постоянные $C_{1,2}$ определим из начальных условий. Если положить $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то нетрудно найти, что $C_1 = y_0$, $C_2 = x_0 + \varepsilon y_0$. Итак, решение для быстрых движений имеет вид

$$x_B = x_0 + \varepsilon y_0 (1 - e^{-t/\varepsilon}).$$

Для медленных движений имеем алгебраическое уравнение первого порядка $y = -x - \beta x^3$.

Разделив его на x^3 , получим

$$x^{-3} \dot{x} = -\beta - x^{-2} \Rightarrow \dot{u} = 2(u + \beta) \Rightarrow u = -\beta + C_3 e^{2t},$$

тогда в исходной переменной x :

$x_M = (C_3 e^{2t} - \beta)^{-1/2}$. Теперь необходимо сшить решения x_M и x_B . Для этого потребуем, чтобы

$$x_M(0) = x_B(\infty) = x_0 + \varepsilon y_0.$$

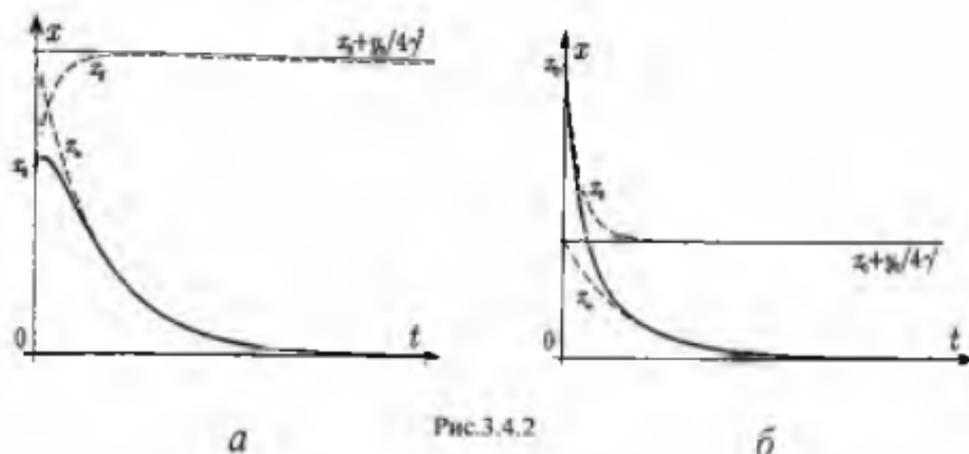
Это позволяет определить постоянную C_3 : $C_3 = \beta + (x_0 + \varepsilon y_0)^{-2}$.

Таким образом, выражение для x_M принимает вид

$$x_M = (x_0 + \varepsilon y_0) e^{-t} \left[1 + \beta (x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - e^{-2t}) \right]^{-1/2} \quad (3.4.4)$$

Окончательно решение сводится к виду:

$$x = x_B + x_M - x_M(0).$$



Складывая выражения, полученные выше, имеем

$$x = -\varepsilon y_0 e^{-t/\varepsilon} + (x_0 + \varepsilon y_0) e^{-t} \left[1 + \beta (x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - e^{-2t}) \right]^{1/2}. \quad (3.4.5)$$

Возвращаясь к исходному времени $t = 2\gamma\tau$, запишем (3.4.5) в виде

$$x = -\frac{y_0 e^{-2\gamma\tau}}{4\gamma^2} + \frac{(x_0 + y_0/4\gamma^2) e^{-\tau/2\gamma}}{\sqrt{1 + \beta (x_0 + y_0/4\gamma^2)^2 (1 - e^{-\tau/\gamma})}}. \quad (3.4.6)$$

Характерные зависимости $x(t)$ для различных знаков y_0 , построенные по формуле (3.4.6), приведены на рис.3.4.2 (для определенности $x_0 > 0$).

4 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПОЛУТОРА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Данный раздел охватывает широкий класс колебательных процессов в неавтономных системах второго порядка и автономных систем третьего порядка и таких явлений, как резонанс, параметрический резонанс и динамический хаос.

4.1 Колебания в линейных системах с полутора степенями свободы

Невероятно, но факт: какой-либо линейной автономной системы третьего порядка колебательного типа, естественным образом следующей из исходных уравнений какого-либо процесса, нет. Поэтому в данной главе изложение начинается с изучения свойств неавтономных систем второго порядка.

4.1.1 Вынужденные колебания гармонического осциллятора.

Гармоническая внешняя сила

Уравнение линейных вынужденных колебаний в общем случае для систем 2-го порядка имеет вид [1.1-4]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (4.1.1)$$

Будем считать, что внешняя сила действует на линейный гармонический осциллятор по гармоническому закону:

$F(t) = f_0 \cos \omega t$, $f_0 = F_0/m$. Уравнение (4.1.1) линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Решение неоднородного уравнения $x(t)$ представляет сумму общего решения однородного уравнения $x_1(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $x_2(t)$, т.е.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Функция $x_1(t)$ известна - это решение уравнения собственных затухающих колебаний, а второе будем искать в виде:

$x_2(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, где A и ϕ - амплитуда и сдвиг фаз между смещением и внешней силой. Таким образом, общее решение однородного уравнения будет иметь вид, приведенный на рис. 4.1.1:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi) + A \cos(\omega t + \phi), \quad (4.1.2)$$

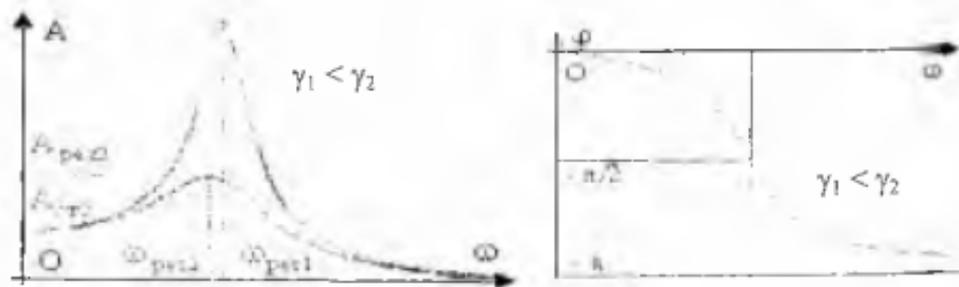


Рис. 4.1.2

Первое слагаемое правой части уравнения (4.1.2) описывает собственные затухающие колебания, зависящие от начальных условий. Из уравне-

ния (4.1.2) следует, что в течение определенного промежутка времени осциллятор будет совершать сложное негармоническое движение, т.к. оно является результатом сложения двух асинхронных колебаний. Однако через промежуток времени $t \sim 1/\gamma$ амплитуда и энергия собственных колебаний уменьшатся до нуля и они прекратятся. При этом второе слагаемое останется неизменным и результирующее колебание будет гармоническим. Найдем величины A и γ . При этом воспользуемся *методом комплексификации*, запишем внешнюю силу в виде $F(t) = f_0 \exp(i\omega t)$ и будем искать частное решение уравнения (4.1.1) в виде $x = A \exp(i\omega t + \phi)$.

Замечая, что $\cos(\omega t + \phi) = \Re[\exp(i\omega t + \phi)]$, а уравнение (4.1.1) – линейное, вначале найдем это решение в комплексной форме, а затем выделим в нем действительную часть. Такой способ действий сильно упрощает вычисления в силу того, что и интегрирование и дифференцирование экспоненты дает снова экспоненту. В результате имеем

$$A[-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2] = f_0 \exp(i\phi) \Rightarrow A[-\omega^2 + \omega_0^2] = f_0 \cos \phi, \quad A2\gamma\omega = f_0 \sin \phi.$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (4.1.3)$$

Зависимость $A(\omega)$ называют *резонансной кривой*. Вид этой кривой зависит от величины коэффициента затухания γ . Амплитуда, соответствующая значению $\omega = 0$, называется *статическим смещением*. Из рис. 4.1.2 видно, что при определенном значении частоты вынуждающей силы амплитуда осциллятора становится максимальной. Явление, при котором амплитуда колебаний системы достигает макси-

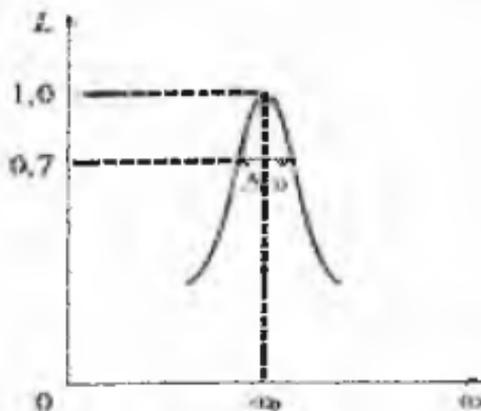


Рис. 4.1.3

мального значения, характерного для некоторого значения частоты вынуждающей силы называется *резонансом*. Частота вынуждающей силы, при

которой наступает данное явление, называется *резонансной*. Приравнивая к нулю производную от A по частоте, получим значения резонансной частоты и амплитуды:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_0}.$$

При значении $\gamma = 0 \Rightarrow A_{\text{рез}} \rightarrow \infty$. Как следует из соотношения (4.1.3), сдвиг по фазе между силой и смещением зависит от соотношения частот собственной и вынуждающей силы, а также от значения коэффициента затухания γ . При значении $\omega = \omega_0$ смещение отстает от силы на $\pi/2$. Это означает, что в момент, когда сила достигает своего максимального значения, смещение равно нулю, а когда сила равна нулю, смещение максимально. С возрастанием частоты отставание смещения от силы растет и при очень больших частотах приближается к π , т.е. сила и смещение колеблются в противофазе. Пусть при $\omega = \omega_0$ сила и смещение равны законам: $F = F_0 \cdot \cos \omega_0 t$; $x = A \cdot \sin \omega_0 t$. Тогда скорость колеблющейся частицы равна: $\dot{x} = v = -A \cos \omega_0 t$. Скорость и сила колеблются в фазе. Мощность, сообщаемая осциллятору, равна $N = F \cdot \dot{x}$. $N > 0 \forall t$, значит работа внешней силы максимальна. Самые неблагоприятные условия передачи энергии при $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$. При этом фазы силы и скорости отличаются почти на π . Значит сила примерно половину времени направлена противоположно скорости, а другую половину совпадает с ней. Амплитуда вынужденных колебаний падает в $\sqrt{2}$ раз при значениях $\omega_{\pm} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 \pm (2\gamma/\omega_{\text{рез}}) \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)/(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}}$.

Величину $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ называют *шириной резонанса* (рис.4.1.3). При $\gamma \ll 1 \Rightarrow \Delta\omega = 2\gamma$. Добротность вычисляется по формуле $Q = \omega_0/\Delta\omega$.

4.1.2 Негармоническая, но периодическая внешняя сила $F(t) = F(t+T)$

Известно, что периодическую функцию можно разложить в ряд по гармоническим компонентам — синусам, косинусам или экспонентам, это разложение называется *рядом Фурье* [III.19-21]. Ряд Фурье имеет вид

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \chi_n\right),$$

где $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \langle F(t) \rangle$, $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n=1,2,3,\dots, \quad \sin\chi_n = -b_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos\chi_n = a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Благодаря принципу суперпозиции отклик осциллятора на периодическую силу можно рассчитать как сумму откликов на действие каждой гармоники и вынужденное решение имеет вид

$$x(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \chi_n + \phi_n), \quad (4.1.4)$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$ - частота n -й Фурье гармоники, а фазовые сдвиги ϕ_n определяются из формул, подобных (4.1.3), где вместо ω следует подставить ω_n . Если добротность $Q \gg 1$, характер решения зависит от того, попадает ли частота хотя бы одной из гармоник в полосу резонанса. Если существует такое n , что выполняется условие $|\omega_0 - 2\pi n/T| \ll \gamma$, то гармоника с этим номером оказывает значительно большее воздействие на осциллятор, чем все остальные, благодаря резонансу. В таком случае

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \chi_n + \phi_n).$$

Если же все гармоники находятся вне резонанса, то их результирующее воздействие определяется, в основном, скоростью спада амплитуд a_n и b_n с ростом n . Таким образом, резонанс возможен не только под действием гармонической внешней силы, и данное выше определение резонанса требует обобщения. Резонанс под действием произвольной периодической внешней силы будет возникать, если собственная частота системы близка к частоте одной из Фурье-гармоник ω_n и амплитуда этой гармоники $(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ не равна нулю.

4.1.3 Произвольная внешняя сила

Уравнение гармонического осциллятора допускает точное решение для вынужденных колебаний и в случае произвольной внешней силы. Для его получения воспользуемся переходом к нормальным колебаниям [1.3]. Для этого перепишем уравнение (4.1.1) в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\gamma y + F(t). \quad (4.1.5)$$

Умножим второе уравнение на β и сложим с первым, тогда имеем

$$\dot{x} + \beta \dot{y} = -\beta \omega_0^2 (x + (1 - 2\gamma\beta)y / (-\omega_0^2\beta)) + \beta F(t).$$



Рис. 4.1.4

Потребуем, чтобы выражения в круглых скобках справа и слева совпали, это выполняется, если $\beta = -(1 - 2\gamma\beta) / (\omega_0^2\beta)$, или $\omega_0^2\beta^2 - 2\gamma\beta + 1 = 0$. Отсюда находим

$$\beta_{1,2} = (\gamma \pm i\omega) / \omega_0^2. \text{ Подстановка}$$

$\beta = \beta_{1,2}$ в это уравнение приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -(\gamma + i\omega)a(t) + (\gamma + i\omega)F(t) / \omega_0^2, \\ \dot{a}^* &= -(\gamma - i\omega)a^*(t) + (\gamma - i\omega)F(t) / \omega_0^2, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

где $a(t) = x + (\gamma + i\omega)y / \omega_0^2$, $a^*(t) = x + (\gamma - i\omega)y / \omega_0^2$ — нормальные координаты, а

$$x = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega} \right) a^* \right), \quad y = \frac{\omega_0^2}{2i\omega} (a - a^*) \quad (4.1.7)$$

исходные переменные. Решение первого уравнения системы (4.1.6) ищем в виде $a(t) = A(t)\exp[-(\gamma + i\omega)t]$. Для $A(t)$ получается уравнение $\dot{A} = (\gamma + i\omega)\exp[(\gamma + i\omega)t]F(t) / \omega_0^2$, проинтегрировав которое и подставив результат в формулу для комплексной амплитуды, получаем

$$a(t) = (\gamma + i\omega)\omega_0^{-2} \int_0^t \exp(-(\gamma + i\omega)(t - t')) F(t') dt'.$$

Используя это соотношение в первом из уравнений (4.1.7), получаем

$$x(t) = \omega^{-1} \int_0^t \exp(-\gamma(t - t')) \sin(\omega(t - t')) F(t') dt'. \quad (4.1.8)$$

При выводе (4.1.8) предполагалось, что сила начинает действовать на неподвижный осциллятор в момент времени $t = 0$. Если начальные координата и (или) скорость осциллятора ненулевые, то к (4.1.8) следует добавить слагаемые, соответствующие собственным затухающим колебаниям. Другой вариант начальных условий состоит в том, что к моменту времени t сила действует достаточно долго. В этом случае в уравнении (4.1.8) нижний предел интегрирования следует заменить на $-\infty$. Если $\gamma = 0$, то формулу (4.1.8) можно преобразовать к виду

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t,$$

$$\text{где } A(t) = -\omega_0^{-1} \int_0^t \sin \omega_0 t' F(t') dt', \quad B(t) = \omega_0^{-1} \int_0^t \cos \omega_0 t' F(t') dt'.$$

Если, например, $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$, то $A(t) = (F_0/2\omega_0)[t - \sin(2\omega_0 t)/(2\omega_0)]$ и при $t \rightarrow \infty$ решение неограниченно - получаем *секулярный* рост. Очевидно, что если с ростом t коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ остаются малыми, то резонанса в системе нет. Таким образом, условие отсутствия резонанса записывается в

$$\text{виде } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\sin \omega_0 t'; \cos \omega_0 t'\} F(t') dt' = 0.$$

Математически это соотношение означает, что функция $F(t)$ не должна содержать собственных функций задачи. На рис. 4.1.4 показано воздействие на осциллятор резкого толчка.

4.1.4 Гармонический осциллятор под действием обобщенных внешних сил

Часы с балансиром. Колебания часов с балансиром описываются уравнением [1.7]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = p \sum_n \delta(t - t_n)$$

при условии $x(t_n) = 0$, $\dot{x}(t_n) = y(t_n) > 0$. Его решение при $x(0) = 0$, $y(0) = y_1$ имеет вид: $x = y_1 \Omega^{-1} \exp(-\gamma t) \sin \Omega t$; $y = y_1 \exp(-\gamma t) (\cos \Omega t - \gamma \Omega^{-1} \sin \Omega t)$.

Через время $t = 2\pi/\Omega$ изображающая точка придет на полупрямую $x = 0$, $y > 0$ с ординатой $y' = y_1 \exp(-\delta)$, $\delta = 2\pi\gamma\Omega^{-1/2}$, $\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$.

Затем она совершает скачок в точку $y_2 = y' + p$, т.е. y_1 преобразуется в

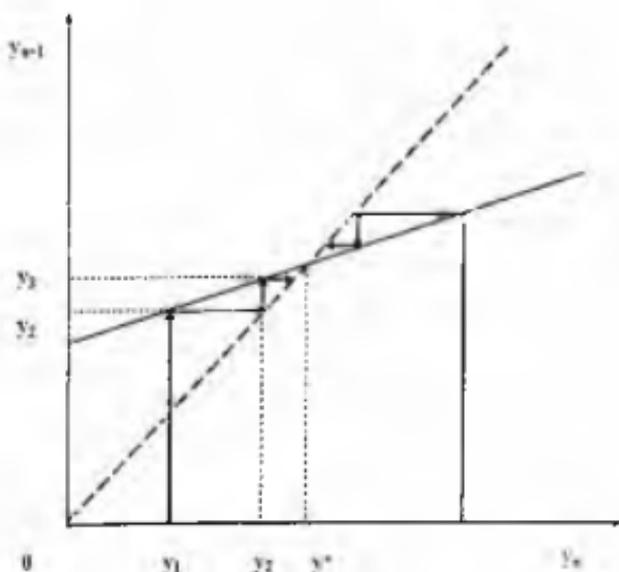


Рис.4.1.5. Диаграмма Ламерея часов с балансиром

y_2 по закону $y_2 = y_1 \exp(-\delta) + p$. Продолжая рассуждения, приходим к точечному отображению вида

$$y_{n+1} = e^{-\delta} y_n + p = q y_n + p.$$

Таким образом, фазовое пространство задачи есть плоскость (x, y) с разрезом по полупрямой $x = 0, y > 0$. Неподвижная точка отображения $y^* = f(y^*)$ находится на пересечении этой функции последования с биссектрисой $y_{n+1} = y_n$: $y^* = p / (1 - \exp(-\delta)) > 0$. Ей соответствуют стационарные колебания $y = y^*(\cos \Omega t - \Gamma \Omega^{-1} \sin \Omega t)$. Рассматривая последовательность точек $y_2 = f(y_1), y_3 = f(y_2), y_4 = f(y_3), \dots$ и соединяя их отрезками прямых, получаем диаграмму Ламерея (рис. 4.1.5). В силу условия $df/dy^* < 0$ точка y^* - устойчивая.

Гармонический осциллятор с отрицательным трением и

δ -образной внешней демпфирующей силой. Пусть демпфирующая сила

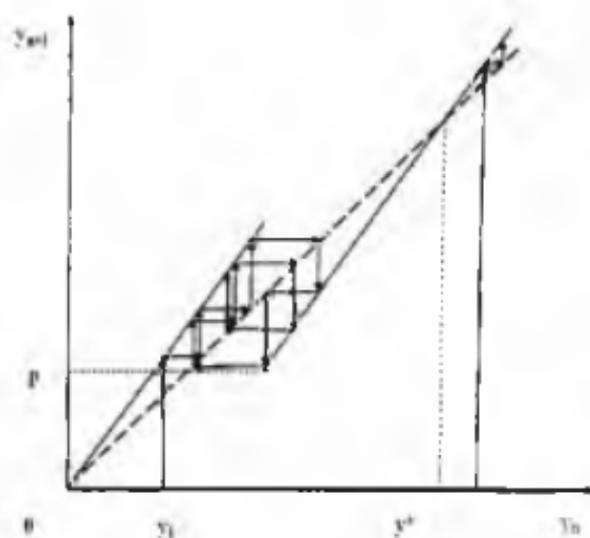


Рис. 4.1.6. Диаграмма Ламерея осциллятора с отрицательным трением и демпфирующей силой

действует при $x = 0$, когда $y \geq a > 0$, тогда в соответствии с [1.7] имеем

$$\ddot{x} - 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -p \sum_n \delta(t - t_n).$$

По аналогии с предыдущей задачей при тех же начальных условиях получим

$$y_{n+1} = \begin{cases} q y_n, & q y_n < p \\ q y_n - p, & q y_n \geq p \end{cases}$$

где $q = \exp(-\delta)$, $\delta = 2\pi\gamma\Omega^{-1/2}$, $\Omega = (\omega^2 - \gamma^2)^{1/2}$. Функция последования для этого случая представлена на рис. 4.1.6. Последующая точка

отображения никогда не совпадает с предыдущей, хотя есть область притяжения, которую точки отображения не покидают.

Таким образом, здесь возникает новый режим колебаний – режим динамического хаоса.

4.2 Линейные системы с полутора степенями свободы с меняющимися под действием внешних факторов параметрами

В некоторых случаях внешние воздействия сводятся к изменениям со временем параметров колебательной системы, рис. 4.2.1. В общем случае эти движения описываются уравнением

$$x^{(2n)} + g_1(t)x^{(2n-1)} + \dots + [g_{2n}(t) - p]x = 0. \quad (4.2.1)$$

Существует ряд случаев, когда анализ решений уравнения (4.2.1) можно проводить аналитически. Прежде всего, это случай малых амплитуд изменения параметра, когда работает один из методов теории возмущений. Введем характерное время T изменения функций $g_k(t)$ и рассмотрим три различных частотных предела: сравнимые частоты ($\omega_0 T \sim 1$), медленное изменение параметров ($\omega_0 T \gg 1$), быстроосциллирующие поля ($\omega_0 T \ll 1$).

4.2.1 Сравнимые частоты. Уравнение Матье

Положим $n = 1$ и рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + 4\varepsilon \cos \Omega t] x = 0 \quad (4.2.2)$$

уравнение Матье, где $0 < \varepsilon \ll 1$, где $g_k(t) = g_k(t+T) = g_k(t+2\pi/\Omega)$. В соответствии с последним условием решения уравнения (4.2.1) можно искать методом теории возмущений, где нулевое приближение ищется как решение уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Рассмотрим методы анализа решений уравнения (4.2.2).

а. Метод Флоке. Структура общего решения уравнения (4.2.1) определяется теоремой Флоке-Ляпунова [1.1-3, II.10,12,17]:

Система с n степенями свободы, описываемая дифференциальным уравнением порядка $2n$ с периодическими коэффициентами n -го порядка периода T , имеет $2n$ линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2n} C_k \exp(iq_k t) P_k(t), \quad \text{где } P_k(t) = P_k(t+T). \quad \text{В соответствии с теоремой}$$

Флоке-Ляпунова будем искать частные решения уравнения (4.2.2) в виде

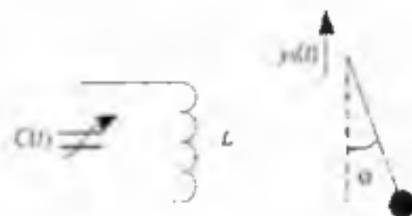


Рис. 4.2.1

$x(t) = \exp(iqt)P(t)$, $P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(ik\Omega t)$, где функция P является периодической с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Это - аналог процедуры поиска частного решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами в виде $x(t) = P \exp(iqt) = P \exp(i\omega_0 t)$ с целью получения характеристического уравнения. При этом, в силу условия $\epsilon \ll 1$, решение уравнения (4.2.2) должно быть близко к решению невозмущенного уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, то есть к функции $x = x_0 e^{i\omega_0 t}$. Найдем выражения для производных:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(e^{iqt} P(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} \right) = i q e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k i k \Omega e^{ik\Omega t}; \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(i q e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k i k \Omega e^{ik\Omega t} \right) = -q^2 e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + i q e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k i k \Omega e^{ik\Omega t} + \\ &+ i q e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k i k \Omega e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left(-k^2 \Omega^2 \right) e^{ik\Omega t} = \\ &= -e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left(q^2 + 2qk\Omega + k^2 \Omega^2 \right) e^{ik\Omega t} = -e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (k\Omega + q)^2 e^{ik\Omega t}. \end{aligned}$$

Найдем выражение для $x \cdot \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \Omega t &= e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} \frac{e^{-ik\Omega t} + e^{ik\Omega t}}{2} = \\ &= e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k e^{i(k-1)\Omega t} + x_k e^{i(k+1)\Omega t}}{2} = e^{iqt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_{k-1} e^{ik\Omega t} + x_{k+1} e^{ik\Omega t}}{2}. \end{aligned}$$

Последнее действие можно произвести, так как суммирование в последнем выражении производится по всем целым k . В результате

$$x \cdot \cos \Omega t = \frac{1}{2} \exp(iqt) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{k-1} + x_{k+1}) \exp(ik\Omega t). \quad (4.2.3)$$

Подставляя полученные выражения в (4.2.2) получаем равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 \right\} x_k + 2\epsilon \omega_0^2 (x_{k-1} + x_{k+1}) \exp(ik\Omega t) = 0, \quad \text{спра-}$$

ведливое при любых t , откуда следуют соотношения в общем и развернутом виде

$$[\omega_0^2 - (k\Omega + q)^2]x_k + 2\epsilon\omega_0^2(x_{k-1} + x_{k+1}) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.2.4)$$

$$\begin{cases} k = 0 : & [\omega_0^2 - q^2]x_0 + 2\epsilon\omega_0^2(x_{-1} + x_{+1}) = 0, \\ k = +1 : & [\omega_0^2 - (\Omega + q)^2]x_1 + 2\epsilon\omega_0^2(x_0 + x_2) = 0 \\ k = -1 : & [\omega_0^2 - (\Omega - q)^2]x_{-1} + 2\epsilon\omega_0^2(x_{-2} + x_0) = 0 \\ k = +2 : & [\omega_0^2 - (2\Omega + q)^2]x_2 + 2\epsilon\omega_0^2(x_1 + x_3) = 0 \\ k = -2 : & [\omega_0^2 - (2\Omega - q)^2]x_{-2} + 2\epsilon\omega_0^2(x_{-3} + x_{-1}) = 0 \\ k = +3 : & [\omega_0^2 - (3\Omega + q)^2]x_3 + 2\epsilon\omega_0^2(x_2 + x_4) = 0 \\ k = -3 : & [\omega_0^2 - (3\Omega - q)^2]x_{-3} + 2\epsilon\omega_0^2(x_{-4} + x_{-2}) = 0 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ решение уравнения (4.2.4) должно совпадать с решением уравнения гармонических колебаний

$$\begin{aligned} [\omega_0^2 - (k\Omega + q)^2]x_k = 0 &\Rightarrow \omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 = 0 \xrightarrow{q = \omega_0} \omega_0^2 - (k\Omega + \omega_0)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_0^2 - k^2\Omega^2 - 2k\Omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow -k^2\Omega^2 - 2k\Omega\omega_0 = 0 &\Rightarrow -k\Omega - 2\omega_0 = 0 \Rightarrow \Omega = -\frac{2}{k}\omega_0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Из (4.2.5) видно, что существует бесконечное количество частот $\Omega = -2\omega_0/k, k = -1, -2, -3, \dots$ (4.2.6)

удовлетворяющих данному условию. Вначале рассмотрим случай $k = -1$, когда $\Omega = 2\omega_0$. При малых, но конечных $\epsilon \ll 1$ решение уравнения (4.2.4) уже не должно совпадать с решением уравнения гармонических колебаний,

но должно быть близко к

нему. В низшем приближении можно ограничиваться

теми членами, коэффициенты перед которыми минимальны. Считая главным

коэффициентом x_0 , положим $q = \omega_0 + \delta, \delta \ll \omega_0, \Omega =$

$= 2\omega_0 + \Delta (k = -1)$. Кроме x_0 в силу (4.2.6) следует учесть еще только коэф-

фициент x_{-1} . Остальные коэффициенты много меньше. В результате имеем:

$$(\omega_0^2 - q^2)x_0 + 2\epsilon\omega_0^2x_{-1} = 0 \Rightarrow -2\delta\omega_0x_0 + 2\epsilon\omega_0^2x_{-1} = 0,$$

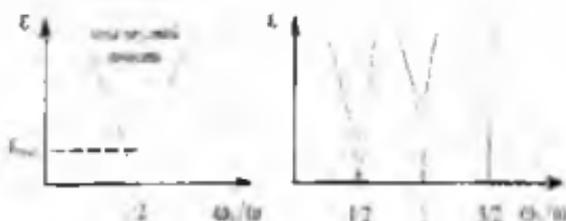


Рис. 4.2.2

$$(\omega_0^2 - (q - \Omega)^2)x_{-1} + 2\varepsilon\omega_0^2 x_0 = 0 \Rightarrow 2\omega_0(\delta - \Delta)x_{-1} + 2\varepsilon\omega_0^2 x_0 = 0,$$

откуда

$$4\omega_0^2\delta(\delta - \Delta)x_{-1} + 4\varepsilon^2\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \delta = \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \varepsilon^2\omega_0^2}. \quad (4.2.7)$$

Тогда решение (4.2.3) можно переписать в виде

$$x(t) = e^{i(\omega_0 + \delta)t} (x_{-1}e^{-i(2\omega_0 + \Delta)t} + x_0) = e^{\delta t} (x_{-1}e^{-i\Delta t} e^{-i\omega_0 t} + x_0 e^{i\omega_0 t}). \quad (4.2.8)$$

Из выражения (4.2.8) видно, что при условии существования комплексных корней у уравнения (4.2.7) $\varepsilon^2\omega_0^2 < \Delta^2/4 \Leftrightarrow -2\varepsilon\omega_0 < \Delta < 2\varepsilon\omega_0$ решение (4.2.8) может экспоненциально расти и этот рост – *параметрический резонанс* – имеет место в полосе частот

$$2\omega_0 - 2\varepsilon\omega_0 < \Omega < 2\omega_0 + 2\varepsilon\omega_0.$$

Эта полоса не является единственной – существует бесконечное количество резонансных частот (4.2.6), в окрестности которых имеется полоса $\Delta\Omega$, где наблюдается резонансная раскачка колебаний (рис. 4.2.2).

Например, для следующего резонанса, т.е. при $k = -2$ ($\Omega = \omega_0 + \Delta$) наибольшими в разложении (4.2.4) являются слагаемые с $k = -3, -2, -1, 0, +1$. В результате для резонансной полосы имеем соотношение

$$-10\varepsilon^2\omega_0/3 < \Delta < 10\varepsilon^2\omega_0/3.$$

6. Метод ван дер Поля

Перепишем уравнение (4.2.2) вблизи первой резонансной полосы $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$, $\Delta \ll 1$ в виде $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma\dot{x}$, где учтены и диссипативные слагаемые. При $\varepsilon \ll 1$ будем искать его решение в виде [1.1,2] $x = A(\varepsilon t) \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon t))$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - 2\underline{\dot{A}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)} - 2\underline{\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{(A\omega_0^2 - 2A\omega_0\varphi) \cos(\omega_0 t + \varphi)} - \\ & - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - (\underline{A\dot{\varphi}^2} - \underline{A\omega_0^2}) \cos(\omega_0 t + \varphi) = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - 2\gamma(\underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)}). \end{aligned}$$

Слагаемые, подчеркнутые двумя чертами – это слагаемые основного приближения и взаимно сокращаются в силу исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости ам-

плитуды и фазы от времени и малости коэффициента $\gamma \ll 1$ имеют порядок ε^2 и ими пренебрегают.

Далее имеет место следующая цепочка действий:

1. Для получения уравнения для \dot{A} умножим приведенное выше равенство на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем в порядке $\sim \varepsilon^1$ A , φ и их производные могут быть вынесены за знак интеграла. Учитывая

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt =$$

$$= -4\varepsilon\omega_0^2 A \frac{\cos 2\varphi \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} + \sin 2\varphi \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - \cos 2\varphi}{4\Delta}$$

$$- 4\varepsilon\omega_0^2 A \left[\frac{\cos 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - \sin 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0}}{4(4\omega_0 + \Delta)} \cos 2\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{4(4\omega_0 + \Delta)} \right] +$$

$$+ 4\varepsilon\omega_0^2 A \frac{\sin 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} + \cos 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0}}{4(4\omega_0 + \Delta)} \sin 2\varphi,$$

раскладывая это выражение в ряд Тейлора по малому отношению $2\pi\Delta/\omega_0$ и пренебрегая всеми слагаемыми порядка $\sim \varepsilon^2$ и выше, получаем

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt \approx 2\pi\varepsilon\omega_0 A \sin 2\varphi. \text{ Так как}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/\omega_0} A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = A \frac{\pi}{\omega_0}, \text{ то деля на } -2\pi, \text{ имеем:}$$

$$\dot{A} = -\varepsilon\omega_0 A \sin 2\varphi - \gamma A. \quad (4.2.9)$$

2. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное равенство на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем его. Тогда получим

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon\omega_0 \cos 2\varphi. \quad (4.2.10)$$

Решение уравнений (4.2.9), (4.2.10) при $\gamma = 0$ приводит к полученным результатам. Заметим, что здесь удобнее использовать метод ван дер Поля в

эквивалентной форме, разыскивая решение в виде $x = A(\varepsilon t)\sin\omega_0 t + B(\varepsilon t)\cos\omega_0 t$. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma\dot{x}$. Тогда имеем $\ddot{A}\sin\omega_0 t + \ddot{B}\cos\omega_0 t + 2\dot{A}\omega_0 \cos\omega_0 t - 2\dot{B}\omega_0 \cos\omega_0 t - A\omega_0^2 \sin\omega_0 t - B\omega_0^2 \cos\omega_0 t + \omega_0^2(A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) = 4\varepsilon\omega_0^2(A\cos 2\omega_0 t \sin\omega_0 t + B\cos 2\omega_0 t \cos\omega_0 t) - 2\gamma(\dot{A}\sin\omega_0 t + \dot{B}\cos\omega_0 t + A\omega_0 \cos\omega_0 t - B\omega_0 \sin\omega_0 t)$.

С подчеркнутыми слагаемыми поступим, как и выше. Для получения уравнений для \dot{A} и \dot{B} умножим приведенное выше равенство последовательно на $\cos\omega_0 t$ и $\sin\omega_0 t$ и проинтегрируем полученные уравнения от 0 до $0+2\pi/\omega_0$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \{A; B\} \{\sin^2 \omega_0 t; \cos^2 \omega_0 t\} dt \approx \{A; B\} \int_0^{2\pi/\omega_0} \{\sin^2 \omega_0 t; \cos^2 \omega_0 t\} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\{A; B\}}{2},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \{A; B\} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt \approx \{A; B\} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} A \cos 2\omega_0 t \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0 A \cos 2\omega_0 t \sin^2 \omega_0 t dt \approx \frac{\omega_0 A}{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \right) = -\frac{\omega_0 A}{2\pi \cdot 4},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t dt = \varepsilon\omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin 4\omega_0 t dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{\omega_0 B}{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\omega_0 B}{2\pi \cdot 4},$$

в результате мы получим пару уравнений вида

$$\dot{A} = \varepsilon\omega_0 B - \gamma A, \quad \dot{B} = \varepsilon\omega_0 A - \gamma B. \quad (4.2.11)$$

Будем искать решение системы (4.2.11) в виде $A=A_0 \exp(\lambda t)$, $B=B_0 \exp(\lambda t)$, тогда получим уравнения $(\gamma + \lambda)A - \varepsilon\omega_0 B = 0$, $(\gamma + \lambda)B - \varepsilon\omega_0 A = 0$, имеющие нетривиальные решения при условии

$$\begin{vmatrix} \gamma + \lambda & -\varepsilon\omega_0 \\ -\varepsilon\omega_0 & \gamma + \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\gamma + \lambda)^2 = \varepsilon^2 \omega_0^2 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \varepsilon\omega_0. \text{ Отсюда следует величина}$$

порога параметрического резонанса вблизи первой резонансной частоты:

$\varepsilon_{\min} = \gamma / \omega_0$. При меньших амплитудах возбуждение параметрического резонанса невозможно.

4.2.2 Стохастический параметрический резонанс

Рассмотрим это явление на примере гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + z(t)]x = 0 \quad (4.2.12)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, где $y = dx/dt$, $z(t)$ - гауссовская случайная функция с плотностью вероятностей $p(z) = \pi^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\{-z^2/\sigma^2\}$ ($\langle z \rangle = 0$, $\langle z^2 \rangle = 2\sigma^2$) при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ и найдем порог стохастического параметрического резонанса для вторых и четвертых моментов с учетом линейных потерь энергии. Перепишем (4.2.12) в виде двух уравнений первого

порядка и усредним по ансамблю реализаций, получаем $\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle$,

$\langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 (\langle x \rangle + \langle zx \rangle)$ и $\langle x(0) \rangle = 0$, $\langle y(0) \rangle = 1$. Эта система не замкнута относительно переменных $\langle x \rangle, \langle y \rangle$. По формуле Фуруцу-Новикова [II.37]

$\langle z(t)R[z(\zeta)] \rangle = \int d\tau B(t, \tau) \langle \delta R[z(\zeta)] / \delta z(\tau) \rangle$, где $B(t, t') = \langle z(t)z(t') \rangle$, при $R = x$

имеем с учетом определения вариационной производной $\delta F[f] / \delta f(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta F[f] / \delta \int dT \delta f(T)$ получаем:

$$\frac{\delta x}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta z} = -(1-z)\omega_0^2 \frac{\delta x}{\delta z} - \omega_0^2 x = -\omega_0^2 x \Rightarrow$$

$\langle zx \rangle = 0$, $\langle x \rangle = \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t$, $\langle y \rangle = \cos \omega_0 t$. Получим уравнения для вторых моментов, для чего умножим уравнения на x и y и усредним их:

$\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle xy \rangle$, $\langle xy \rangle = \langle y^2 \rangle$, $\langle y\dot{x} \rangle = -\omega_0^2 (\langle x^2 \rangle + \langle zx^2 \rangle)$, $\langle y^2 \rangle = -\omega_0^2 (\langle xy \rangle + \langle zxy \rangle)$,

$\langle x^2(0) \rangle = \langle x(0)y(0) \rangle = \langle y^2(0) \rangle = 0$.

Сложим второе и третье уравнения и используем формулу Фуруцу-Новикова:

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle xy \rangle, \quad \langle xy \rangle = \langle y^2 \rangle - \omega_0^2 \langle x^2 \rangle, \quad \langle y^2 \rangle = -2\omega_0^2 (\langle xy \rangle + \sigma^2 \omega_0^2 \langle x^2 \rangle). \quad (4.2.13)$$

Если интенсивность флуктуаций мала, задача имеет решение

$$\langle x^2 \rangle \approx 2\omega_0^{-2} \left[\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \left(\cos 2\omega_0 t + (3\sigma^2 \omega_0 / 4) \sin 2\omega_0 t \right) \right],$$

$$\langle xy \rangle = (4\omega_0)^{-1} \left[2 \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \sin 2\omega_0 t + \sigma^2 \omega_0 (\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2)) \cos 2\omega_0 t \right],$$

$$\langle y^2 \rangle = 2^{-1} \left[\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) (\cos 2\omega_0 t - (\sigma^2 \omega_0 / 4) \sin 2\omega_0 t) \right].$$

Видно, что здесь имеет место стохастическая параметрическая раскачка колебаний за счет флуктуаций параметров с инкрементом $\Gamma = \sigma^2 \omega_0^2$. Для вторых моментов область устойчивости имеет вид $\sigma^2 > 2\gamma \omega_0^2$, для четвертых: $\sigma^2 > (2\gamma/3\omega_0^2) (\omega_0^2 + 3\gamma^2) / (\omega_0^2 + 6\gamma^2)$.

4.2.3 Адиабатические инварианты

Пусть частота изменяется медленно: $\omega(t) = \omega_0 f(t/\tau)$, т.е. $\omega_0 \tau \gg 1$. Перейдем в уравнении (1.1.1) без трения к переменной $\zeta = t/\tau$ и введем малый параметр $\varepsilon = (\omega_0 \tau)^{-1}$. Тогда имеем уравнение Хилла

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + f(\zeta)x = 0. \quad (4.2.14)$$

Решение (4.2.14) ищем методом, в квантовой механике называемым методом ВКБ, а в оптике – приближением геометрической оптики [1.2,3, II.35]. Сделаем замену переменной



Рис. 4.2.3

$$x(\zeta) = \exp \left(\int_0^{\zeta} y(\zeta') d\zeta' \right) = \exp [\theta(\xi)].$$

Имея в виду соотношения

$$\dot{x} = y \exp [\theta(\xi)], \quad \ddot{x} + [y + y^2] \exp [\theta(\xi)] = 0,$$

подставим их в (4.2.14), тогда получим уравнение Риккати

$$\varepsilon^2 \dot{y} + \varepsilon^2 y^2 + f(\zeta) = 0, \quad (4.2.15)$$

решение которого ищется в виде ряда $y = \varepsilon^{-1} y_{-1} + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$. Подставляя его в (4.2.15), имеем $\varepsilon^0 (y_{-1}^2 + f) + \varepsilon^1 (\dot{y}_{-1} + 2y_{-1}y_0) + \dots = 0$. Приравнявая нулю выражения в круглых скобках, получаем:

- из первого уравнения $y_{-1} = \pm f^{1/2}$, используя это соотношение;

- из второго уравнения $y_0 = y_{-1}^{-1} \dot{y}_{-1} / 2 = \ln |y_{-1}|^{-1/2} = \ln |f|^{-1/4}$ и т.д.

Таким образом, решение уравнения (4.2.14) с указанной точностью имеет вид

$$x(\zeta) = \exp \left[\pm \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\zeta} \sqrt{f(\zeta')} d\zeta' + \ln |f(\zeta)|^{-1/4} \right] = \frac{1}{\sqrt[4]{f(\zeta)}} \exp \left[\pm \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\zeta} \sqrt{f(\zeta')} d\zeta' \right] \quad (4.2.16)$$

При заданных начальных условиях в размерных переменных (4.2.16) сводится к виду

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \cos \left[\int_0^t \omega(t') dt' \right] + \varphi_0 = A(t) \cos[\Phi(t)].$$

Например, для пружины с переменной жесткостью $k(t) = m\omega^2(t)$, энергия $W = m \frac{\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2}{2}$, $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \right] \cos[\Phi(t)] - \omega^2(t) \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \sin[\Phi(t)]$,

причем в выражении для \dot{x} первое слагаемое мало. В результате

$$W = \frac{mA_0^2}{2} \left[\frac{\omega^2(t) \sin^2 \Phi(t) + \omega^2(t) \cos^2 \Phi(t)}{\omega(t)} \right] = \frac{mA_0^2}{2} \omega(t) \Rightarrow \frac{W(t)}{\omega(t)} = \frac{mA_0^2}{2} = \text{const.}$$

Такие комбинации динамических переменных системы, которые остаются постоянными при медленном изменении ее параметров, называются *адиабатическими инвариантами* [I.1, II.36]. Их существование, как и существование законов сохранения, может облегчить изучение системы. На рис. 4.2.3 приведена графическая интерпретация адиабатического инварианта — площадь под замкнутой кривой — адиабатический инвариант.

4.2.4 Движения в быстроосциллирующих полях

Перепишем уравнение (4.2.2) в виде [I.3]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + 4\varepsilon \cos \Omega t] x = -4\varepsilon \omega_0^2 x \cos \Omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + f(x) = F(x) \cos \Omega t. \quad (4.2.17)$$

В задаче (4.2.17) есть два характерных времени изменения величины x — медленное время $\tau_1 \sim \omega_0^{-1}$ и быстрое $\tau_2 \sim \Omega^{-1} \ll \tau_1$.

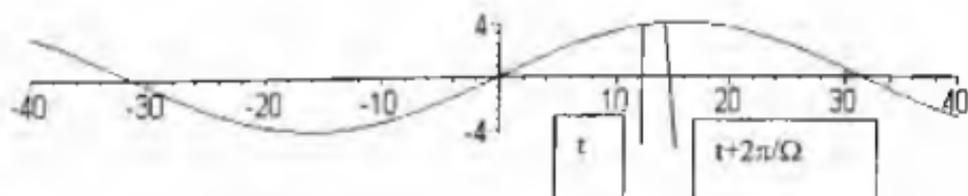


Рис. 4.2.4

В соответствии с этим в согласии с принципом суперпозиции будем искать ее решение в виде суммы двух функций, одна из которых (x_1) меняется медленно (с характерным временем τ_1), а другая (x_2) – быстро (с характерным временем τ_2):

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \mu x'(t) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} x(t) dt + \frac{\omega_0}{\Omega} x'(t).$$

Из рис. 4.2.4 видно, что усреднение по быстрому времени в соответствии с теоремой о среднем значении практически не меняет медленных функций. Подставим последнее уравнение в (4.2.17). Разложим функции f и F в ряд Тейлора с точностью до слагаемых $\sim \mu^1$:

$$\langle x' \rangle_{tt} + \mu \langle x' \rangle_{tt} + f(\langle x(t) \rangle) + (f)_{x|_{x=\langle x \rangle}} x'(t) = \left[F(\langle x(t) \rangle) + \mu (F)_{x|_{x=\langle x \rangle}} x'(t) \right] \cos \Omega t. \quad (4.2.18)$$



Рис. 4.2.5

Для быстроменяющихся величин, с учетом того, что F – ϵ , получаем для величин первого порядка малости ($(F)_{x|_{x=\langle x \rangle}} x'(t) \cos \Omega t$ – величина второго порядка малости), уравнение $\langle x' \rangle_{tt} + (f)_{x|_{x=\langle x \rangle}} x'(t) = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t$.

С учетом того, что $\langle x' \rangle_{tt} \sim \Omega^2 x'$,

$\mu (f)_{x|_{x=\langle x \rangle}} x'(t) = \omega_0^2 x' \ll \Omega^2 x'$, вторым слагаемым в правой части можно пренебречь по сравнению с первым, откуда получаем решение, которое позволяет выразить быстроосциллирующую величину через медленную амплитуду $\langle x \rangle$: $\mu x' = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t \Rightarrow x' = -\left(F(\langle x(t) \rangle) / \mu \Omega^2 \right) \cos \Omega t$.

Подставим x' в (4.2.18), усредним его по $2\pi/\Omega$ и получим уравнение для медленных движений

$$\langle x' \rangle_{tt} + f(\langle x(t) \rangle) = -\Omega^2 (F)_{x|_{x=\langle x \rangle}} F(\langle x(t) \rangle) \cos^2 \Omega t \Rightarrow \langle x' \rangle_{tt} + f(\langle x(t) \rangle) = -2^{-1} \Omega^2 (F)_{x|_{x=\langle x \rangle}} F(\langle x(t) \rangle),$$

откуда

$$\langle x \rangle_{tt} + f(\langle x(t) \rangle) = 2^{-1} \Omega^{-2} (F^2)_{x|_{x=\langle x \rangle}}.$$

Таким образом, быстрые движения оказывают влияние на поведение системы на медленные в следующем порядке. На рис. 4.2.5 приведен пример системы в быстроосциллирующих полях – маятник Капицы.

4.3 Нелинейные динамические системы с полутора степенями свободы

К данному классу относятся свободные колебания в системах третьего порядка и вынужденные колебания в системах второго порядка.

4.3.1 Осциллятор Дуффинга под импульсным воздействием

Важный класс задач, в которых возникают дискретные отображения, связан с изучением систем, находящихся под импульсным периодическим воздействием. В качестве примера получим дискретное отображение для осциллятора с кубической нелинейностью и затуханием, совершающего колебания под действием последовательности δ -образных импульсов:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_n \delta(t - nT). \quad (4.3.1)$$

Будем считать, что в промежутке между импульсами применим метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае решение представим в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой $x = A \exp(i\varphi_0 t) + A^* \exp(-i\varphi_0 t)$, где A, A^* - медленно меняющиеся функции времени. В промежутке между импульсами для амплитуды справедливо укороченное уравнение, которое в исходных обозначениях имеет вид

$$A = -\gamma A - (3i\beta / 2\omega_0) |A|^2 A = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = -\gamma a, \quad \dot{\varphi} = (3\beta / 8\omega_0) a^2 \quad (4.3.2)$$

Решая уравнения (4.3.2), найдем зависимости амплитуды и фазы от времени в промежутке между n -м и $n+1$ -м импульсами

$$a(t) = a_n \exp(-2\gamma t), \quad \varphi(t) = \gamma^{-1} (3\beta a_n^2 / 16\omega_0) (1 - \exp(-2\gamma t)) + \varphi_n, \quad (4.3.3)$$

где a_n и φ_n - начальная амплитуда и фаза сразу после n -го импульса. Если подставить выражения (4.3.3) в соотношения

$$x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad v(t) = -a(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

то мы найдем зависимости x и v от времени на рассматриваемом промежутке. К моменту начала $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду T .

Поэтому координата осциллятора и скорость равны $x(T)$ и $v(T)$. В силу δ -образного характера воздействия сразу после этого импульса координата не изменится, а скорость получит добавку C . Поэтому для координаты и скорости после $(n+1)$ -го импульса получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_n e^{-\gamma T} \cos(\omega_0 T + \gamma^{-1} (3\beta a_n^2 / 16\omega_0) (1 - \exp(-2\gamma T)) + \varphi_n), \\ v_{n+1} &= -\omega_0 a_n e^{-\gamma T} \sin(\omega_0 T + \gamma^{-1} (3\beta a_n^2 / 16\omega_0) (1 - \exp(-2\gamma T)) + \varphi_n) + C. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Удобно записать их в комплексной форме, введя переменную $z = (ix + v/\omega_0) \left(\gamma^{-1} (3\beta/16\omega_0) (1 - e^{-2\gamma t}) \right)^{1/2}$. Тогда из (4.3.4) получаем $z_{n+1} = A + Bz_n \exp\left[\left(|z_n|^2 + \omega_0 T \right) \right]$, где $A = C(\omega_0 \gamma)^{-1} \left((3\beta a_n^2/16\omega_0) (1 - e^{-2\gamma}) \right)^{1/2}$, $B = e^{-\gamma T}$.

4.3.2 Осциллятор Дуффинга. Нелинейный резонанс

Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x}$ и проанализируем его методом ван дер Поля. Полагая $\omega_0 = \Omega - \xi$, где $\xi \ll 1$ — расстройка частоты, перепишем уравнение в виде [1.14]

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Omega^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t + (\Omega - \omega_0)(\Omega + \omega_0)x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \frac{dx}{dt},$$

или, окончательно, $\ddot{x} + \Omega^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \xi(2\Omega - \xi)x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x}$, имея в виду исследование резонансных явлений, характеризующихся не собственной частотой, а частотой внешней силы. Решение также будем искать в виде $x = A(t) \cos(\Omega t + \varphi(t))$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \dot{A} \cos(\Omega t + \varphi) - 2\dot{A}\Omega \sin(\Omega t + \varphi) - 2\dot{A}\dot{\varphi} \sin(\Omega t + \varphi) - \underline{A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi)} - 2A\Omega\dot{\varphi} \cos(\Omega t + \varphi) - \\ & - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\Omega t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi}^2 \cos(\Omega t + \varphi)} + \underline{A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi)} = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \xi(2\Omega - \xi)A \cos(\Omega t + \varphi) - \\ & - 2\gamma \left[\dot{A} \cos(\Omega t + \varphi) - (A\Omega + A\dot{\varphi}) \sin(\Omega t + \varphi) \right] - \alpha A^2 \cos^2(\Omega t + \varphi) - \beta A^3 \cos^3(\Omega t + \varphi). \end{aligned}$$



Рис. 4.3.1

Для поиска уравнения для \dot{A} и $\dot{\varphi}$ умножим это равенство последовательно на $\sin(\Omega t + \varphi)$ и $\cos(\Omega t + \varphi)$ и проинтегрируем уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\Omega$. Учитывая справедливость соотношений

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \cos \Omega t \sin(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin \varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t + \varphi) dt = \pi \Omega^{-1} \sin \varphi,$$

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \cos \Omega t \cos(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \cos \varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \cos(2\Omega t + \varphi) dt = \pi \Omega^{-1} \cos \varphi,$$

получаем $\dot{A} = -\gamma A - \pi \Omega^{-1} \varepsilon_0 \sin \varphi$, $A\dot{\varphi} = -\xi A - \pi \Omega^{-1} \varepsilon_0 \cos \varphi + (3\beta/8\Omega) A^3$. Резонансная кривая следует из условий равновесия этой системы

$\gamma A_0 = -\pi\Omega^{-1}\epsilon_0 \sin \varphi$, $\xi A_0 - (3\beta/8\Omega)A_0^3 = -\pi\Omega^{-1}\epsilon_0 \cos \varphi$, откуда получим $(\xi A_0 - (3\beta/8\Omega)A_0^3)^2 + \gamma^2 A_0^2 = (\pi\Omega^{-1}\epsilon_0)^2$ и $\xi = (3\beta/8\Omega)A_0^2 \pm \sqrt{(\pi\epsilon_0/\Omega A_0)^2 - \gamma^2}$.

В диапазоне $0 \leq A_0 < \sqrt{8\Omega\gamma/3\beta}$ резонансная кривая, как и в линейном случае, однозначна, вне этого диапазона – нет (рис.4.3.1).

4.3.3 Хаотические колебания. Система Лоренца

Наиболее известной автономной системой, описывающей динамический хаос, является модель Лоренца.

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \dot{y} = \tau x - y - xz; \dot{z} = xy - bz, \quad (4.3.5)$$

где $\tau > 0$. Изменение фазового объема системы отрицательно:

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{dx dy dz} \left(\frac{dx}{dt} dy dz + \frac{dy}{dt} dx dz + \frac{dz}{dt} dx dy \right) = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = -\sigma - 1 - b < 0, \text{ то}$$

есть система (4.3.5) диссипативна. Особые точки системы (4.3.5) $(0,0,0)$,

$(\sqrt{b(\tau-1)}, \sqrt{b(\tau-1)}, \tau-1)$, $(-\sqrt{b(\tau-1)}, -\sqrt{b(\tau-1)}, \tau-1)$ определяются уравнениями

$$\begin{cases} -\sigma x_{i0} + \sigma y_{i0}, \\ \tau x_{i0} - y_{i0} - x_{i0} z_{i0} = 0, \\ x_{i0} y_{i0} - b z_{i0} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ \tau x_{i0} - x_{i0} - x_{i0}^2/b = 0, \\ z_{i0} = x_{i0}^2/b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ x_{i0} (\tau - 1 - x_{i0}^2/b) = 0, \\ z_{i0} = x_{i0}^2/b \end{cases}$$

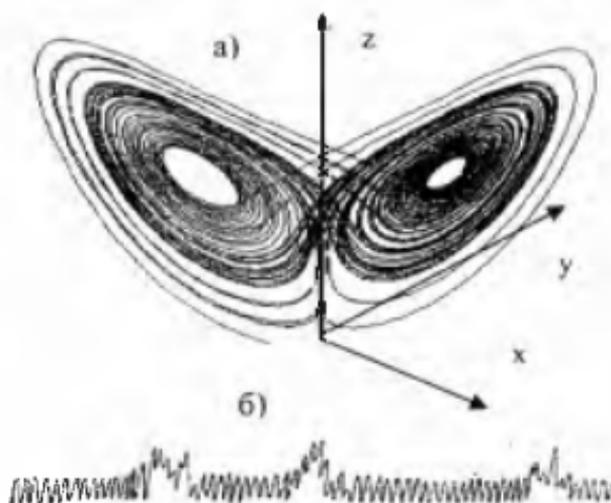


Рис.4.3.2. Странный аттрактор и соответствующий ему режим случайных автоколебаний

причем две последние возникают только при $\gamma > 1$. Характеристическое уравнение для первой точки имеет вид: $(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \gamma)] = 0$, а его корни равны:

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\gamma - 1)}}{2}, \lambda_3 = \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\gamma - 1)}}{2}.$$

Видно, что в области $0 < \gamma < 1$ все три корня действительны и отрицательны – точка $(0, 0, 0)$ является *устойчивым узлом*. При $\gamma > 1$ все корни действительны, но один становится положительным $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ – $(0, 0, 0)$ является *седлом* с размерностью неустойчивого многообразия, равной 1. Характеристическое уравнение для второй и третьей точек

$$\lambda^3 + (\sigma + b - 1)\lambda^2 + (\sigma - \gamma)b\lambda + 2\sigma\gamma(\gamma - 1) = 0. \quad (4.3.6)$$

Из корней уравнения (4.3.6) один действительный и отрицательный при любых значениях γ и σ , а оставшиеся два – комплексно сопряженные, причем в области $1 < \gamma < \gamma_c$ действительные части этих корней отрицательны (*устойчивый фокус*), при $\gamma < \gamma_c$ равны нулю, а при $\gamma > \gamma_c$ положительны (*седло – фокус*). Здесь $\gamma_c = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$. Численный анализ показывает, что при $\gamma > \gamma_c$ фазовые траектории системы (4.3.6) лежат на так называемом *странном аттракторе*, рис.4.3.2.,а, которому соответствует режим *динамического хаоса*, рис.4.3.2,б.

5 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

5.1 Линейные системы с двумя степенями свободы

• *Силовая (емкостная) связь. Консервативные системы.* Рассмотрим пару математических маятников, связанных пружиной жесткостью k , пренебрегая потерями энергии (рис. 5.1.1). Положим $x_{1,2} = \varphi_{1,2}$,

$$\ddot{x}_1 + (\omega_{01}^2 + k/m_1)x_1 = kx_2/m_1,$$

$$\ddot{x}_2 + (\omega_{02}^2 + k/m_2)x_2 = kx_1/m_2. \quad (5.1.1)$$

Соответствующая электрическая схема приведена ниже. Частоты, при которых один осциллятор не влияет на другой, называют *парциальными*. Здесь

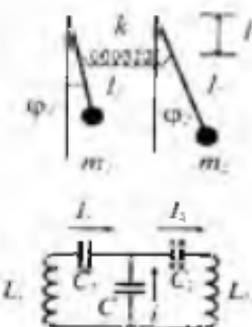


Рис. 5.1.1

они равны $\Omega_{1,2}^2 = \omega_{01,2}^2 + k/m_{1,2}$. С их использованием (5.1.1) можно переписать в виде

$$\ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = kx_2/m_1, \quad \ddot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = kx_1/m_2.$$

Однако реальные движения происходят с *нормальными* или *собственными* частотами, являющимися решениями характеристического уравнения, которое найдем, полагая $x_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\omega t)$. Тогда

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \Omega_1^2)X_1 - \frac{k}{m_1}X_2 = 0 \\ -\frac{k}{m_2}X_1 + (-\omega^2 + \Omega_2^2)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_1^2 & -\frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\omega^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 - \frac{k^2}{m_1m_2} = 0, \text{ откуда } \omega_{1,2}^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \mp \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \frac{4k^2}{m_1m_2}}}{2}.$$

Относительные вклады одного из осцилляторов в нормальные моды другого или *коэффициенты распределения* равны:

$$\tau_{12} = \frac{X_{21}}{X_{12}} = \frac{\Omega_2^2 - \omega_{12}^2}{k/m_{1,2}} = \sqrt{\frac{m_{2,1}}{m_{2,1}}} = \sqrt{\frac{m_{2,1}}{m_{2,1}}} \left(\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \frac{4k^2}{m_1m_2}} - (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \right) \sqrt{\frac{m_1m_2}{2k}}. \quad (5.1.2)$$

Эти коэффициенты имеют разные знаки. Общее решение (5.1.1) имеет вид *суперпозиции колебаний на нормальных модах*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_1 \end{pmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 e^{i\omega_2 t}, \text{ где константы } A_i \text{ комплексны. Нормальные}$$

моды получаются стандартным способом путем замен

$$a_1 = (x_1 - \tau_1 x_2) / \sqrt{1 - \tau_1^2},$$

$$a_2 = (-\tau_2 x_1 + x_2) / \sqrt{1 - \tau_2^2}. \text{ В этих переменных}$$

$$(5.1.1) \text{ сводится к виду } \ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = 0,$$

$$\ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = 0.$$

• Инерционная (индуктивная) связь

а. Консервативные системы. Рассмотрим

пару LC-контуров с катушками, имеющими ко-

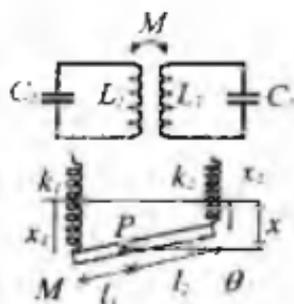


Рис. 5.1.2

эффицент взаимной индукции M , отличный от нуля. Применяя к каждому контуру второе правило Кирхгофа $\epsilon_{C_{M1,2}} + U_{C_{1,2}} + \epsilon_{B_{31,2}} = 0$, получим

$$L_1 \ddot{q}_1 + q_1 / C_1 + M \ddot{q}_2 = 0, \quad L_2 \ddot{q}_2 + q_2 / C_2 + M \ddot{q}_1 = 0. \quad (5.1.3)$$

Соответствующая механическая схема приведена ниже. Парциальные частоты здесь равны $\Omega_{1,2}^2 = \omega_{01,2}^2 = 1/L_{1,2}C_{1,2}$. С их использованием (5.1.3)

можно переписать в виде $\ddot{q}_1 + \Omega_{01}^2 q_1 = -ML_1^{-1} \ddot{q}_2$, $\ddot{q}_2 + \Omega_{02}^2 q_2 = -ML_2^{-1} \ddot{q}_1$. Нормальные частоты здесь определяются соотношениями

$$(-\omega^2 + \Omega_1^2)Q_1 - ML_1^{-1} \omega^2 Q_2 = 0, \quad -ML_2^{-1} \omega^2 Q_1 + (-\omega^2 + \Omega_2^2)Q_2 = 0, \quad \text{которые}$$

найлены при $q_{1,2} = Q_{1,2} \exp(i\omega t)$, откуда $\begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_1^2 & -ML_1^{-1} \omega^2 \\ -ML_2^{-1} \omega^2 & -\omega^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1 - M^2 / L_1 L_2) \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \mp \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\Omega_1^2 \Omega_2^2 M^2 / L_1 L_2} \right) \left(2(1 - M^2 / L_1 L_2) \right)^{-1}.$$

Коэффициенты распределения можно получить, находя их из каждого из уравнений по отдельности:

$$\Gamma_{1,2} = \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = \frac{\omega_{1,2}^2 - \Omega_{1,2}^2}{M / L_{1,2}},$$

общее решение (5.1.3) имеет вид суперпозиции колебаний на нормальных модах.

б. Диссипативные системы. Система, описывающая колебания в индуктивно связанных контурах (рис. 5.1.2), следует из закона Кирхгофа для первой и второй цепи $q_1 / C_1 + I_1 = -\dot{\Phi}_1$. С учётом того, что $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$, $I_1 = \dot{q}_1$, $I_2 = \dot{q}_2$, имеем:

$$L_1 \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + C_1^{-1} I_1 + M \dot{I}_2 = 0, \quad M \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 + C_2^{-1} I_2 + L_2 \ddot{I}_2 = 0. \quad (5.1.4)$$

Ищем её решение в виде: $I_1 = A \exp(\omega t)$, $I_2 = B \exp(\omega t)$. Подставляя это соотношение в (5.1.4), получаем систему, определитель которой должен быть равен нулю:

$$(\omega^2 L_1 + \omega R_1 + C_1^{-1})A + \omega^2 M B = 0, \quad \omega^2 M A + (\omega^2 L_2 + \omega R_2 + C_2^{-1})B = 0.$$

После преобразований приходим к уравнению четвертой степени

$$(L_1 L_2 - M^2) \omega^4 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \omega^3 + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1 R_2 \omega^2 \right) \omega^2 + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) \omega + \frac{1}{C_1 C_2} = 0 \quad (5.1.5)$$

с вещественными коэффициентами. По основной теореме алгебры оно имеет четыре комплексных корня и их можно разбить на две пары комплексно сопряжённых. Вещественные части определяют коэффициенты затухания, а мнимые – нормальные частоты (по два). Определить их трудно. Нужно в это уравнение подставить решение в виде $\omega = -\gamma + i\omega_n$ и отделить мнимую часть от действительной. Получается громоздкая система из двух уравнений, которую решить в общем виде трудно. Зато парциальные частоты определяются легко. Для этого достаточно в уравнениях (5.1.5) поочерёдно положить $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, откуда: $L_1 \bar{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + C_1^{-1} I_1 = 0$, $L_2 \bar{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + C_2^{-1} I_2 = 0$.

Колебания на этих частотах $\omega_{p1}^2 = \left(\frac{1}{L_1 C_1} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{2L_1} \right)^2$, $\omega_{p2}^2 = \left(\frac{1}{L_2 C_2} \right)^2 - \left(\frac{R_2}{2L_2} \right)^2$

будут затухающими: $\gamma_{p1} = -\frac{R_1}{2L_1}$, $\gamma_{p2} = -\frac{R_2}{2L_2}$.

5.2 Нелинейные системы с двумя степенями свободы.

Двухконтурный автогенератор

Колебательный процесс в этой системе описывается парой уравнений, которые записываются по аналогии с разделом 1.1 [1.2]:

$$\begin{aligned} L_1 C_1 \ddot{U}_1 + [R_1 C_1 - M_1 S_0 + M_1 S_2 U_1^2] \dot{U}_1 + U_1 + M_2 C_2 \ddot{U}_2 = 0, \\ L_2 C_2 \ddot{U}_2 + R_2 C_2 \dot{U}_2 + U_2 + M_2 C_1 \ddot{U}_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Парциальные частоты равны $\Omega_{1,2}^2 = L_{1,2}^{-1} C_{1,2}^{-1}$, отношение нормальных обозначим $\zeta = n_2^2 / n_1^2$, коэффициент связи контуров $\alpha = M_2^2 / L_1 L_2 < 1$, степень возбуждения генератора $\mu = \Omega_1 (M_1 S_0 - R_1 C_1)$, отношение коэффициентов

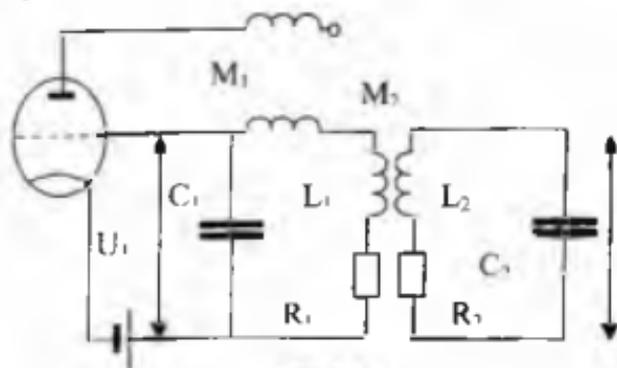


Рис. 5.2.1

диссипации $\delta = (R_2 L_1 C_1 / L_2)(M_1 S_0 - R_1 C_1)^{-1}$. Введем безразмерные переменные $x_1 = U_1 \sqrt{M_1 S_2 / (M_1 S_0 - R_1 C_1)}$, $x_2 = U_2 (L_2 C_2 / M_1 C_1) \sqrt{M_1 S_2 / (M_1 S_0 - R_1 C_1)}$, $t = t \Omega_1$. Тогда уравнение (5.2.1) примет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \alpha \ddot{x}_2 = \mu |1 - x_1^2| x_1, \quad \ddot{x}_2 + \zeta x_2 + \bar{x}_1 = \mu \delta \dot{x}_2. \quad (5.2.2)$$

При $\mu = 0$ в этой системе наблюдаются колебания с нормальными частотами $\omega_{1,2}$, получающиеся подстановкой при $\mu = 0$ в систему (5.2.2) решений вида $x_{1,2} = \exp(i\omega t)$, что приводит к уравнению $(1 - \alpha)\omega^4 \Omega_1^{-4} - (1 + \zeta)\omega^2 \Omega_1^{-2} + \zeta = 0$, имеющему корни

$$\frac{\omega_{1,2}^2}{\Omega_1^2} = \frac{1 + \zeta \pm \sqrt{(1 + \zeta)^2 - 4(1 - \alpha)\zeta}}{2(1 - \alpha)} = \frac{1 + \zeta \pm \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\alpha\zeta}}{2(1 - \alpha)}$$

Решения системы (5.2.2) при $\mu = 0$ имеет вид

$x_1 = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} + c.c.$, $x_2 = a_1 \Psi_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 \Psi_2 e^{i\omega_2 t} + c.c.$ Подстановка их в (5.2.2) приводит к системе

$$\begin{cases} (1 - \omega_1^2 - \alpha \Psi_1 \omega_1^2) a_1 + (1 - \omega_2^2 - \alpha \Psi_2 \omega_2^2) a_2 = 0, \\ (\zeta - \omega_1^2 - \Psi_1 \omega_1^2) a_1 + (\zeta - \omega_2^2 - \Psi_2 \omega_2^2) a_2 = 0. \end{cases} \quad \text{Условие существования ее нетривиального решения}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega_1^2 - \alpha \Psi_1 \omega_1^2 & 1 - \omega_2^2 - \alpha \Psi_2 \omega_2^2 \\ \zeta - \omega_1^2 - \Psi_1 \omega_1^2 & \zeta - \omega_2^2 - \Psi_2 \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

приводит к выражениям для $\Psi_{1,2}$: $(\alpha \omega_{1,2}^2 \Omega_1^{-2})^{-1} = (\omega_{1,2}^2 \Omega_1^{-2})^{-1} (\zeta - \omega_{1,2}^2 \Omega_1^{-2})^{-1}$. Если $\mu \ll 1$, $\delta < 1$, работает метод ван дер Поля и решения ищем в виде

$x_1 = a_1(t) e^{i\omega_1 t} + a_2(t) e^{i\omega_2 t} + c.c.$, $x_2 = a_1(t) \Psi_1 e^{i\omega_1 t} + a_2(t) \Psi_2 e^{i\omega_2 t} + c.c.$ Подставляя эти соотношения в (5.2.2), получим

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + \underline{a_1} e^{i\omega_1 t} + \alpha \Psi_1 \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + c.c. + \\ & + \left(\ddot{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} + \underline{a_2} e^{i\omega_2 t} + \alpha \Psi_2 \left(\ddot{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} + c.c. = \\ & = \mu \left\{ -\left(a_1^2 e^{2i\omega_1 t} + 2a_1 a_2 e^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} + a_2^2 e^{2i\omega_2 t} + c.c. \right) - 2 \left(|a_1|^2 + a_1 a_2^* e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 t} + a_2 a_1^* e^{-i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} + |a_2|^2 \right) \right\} \times \\ & \times \left(\left(\underline{a_1} + i\omega_1 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + \left(\underline{a_2} + i\omega_2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} + \left(\underline{a_1}^* - i\omega_1 a_1^* \right) e^{-i\omega_1 t} + \left(\underline{a_2}^* - i\omega_2 a_2^* \right) e^{-i\omega_2 t} \right), \\ & \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + \underline{\zeta a_1} e^{i\omega_1 t} + \Psi_1 \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + c.c. + \end{aligned}$$

$$+ \left(\bar{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} + \underline{\zeta a_2} e^{i\omega_2 t} + \Psi_2 \left(\bar{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.} = \\ = \mu \delta \left(\Psi_1 (\dot{a}_1 + i\omega_1 a_1) e^{i\omega_1 t} + \Psi_2 (\dot{a}_2 + i\omega_2 a_2) e^{i\omega_2 t} \right) + \text{с.с.}$$

Для получения уравнения для $a_{1,2}$ умножим уравнения на $\exp(-i\omega_{1,2}t)$ соответственно и оставим слагаемые, перед которыми не стоит экспоненциальный множитель – все они при усреднении исчезают. В результате

$$(1 + \alpha \Psi_1) 2i\omega_1 \dot{a}_1 = \mu \left[i\omega_1 a_1 - 2i\omega_1 (|a_1|^2 + |a_2|^2) a_1 - 2i\omega_2 a_2 a_1 a_2^* \right],$$

$$(1 + \alpha \Psi_2) 2i\omega_2 \dot{a}_2 = \mu \left[i\omega_2 a_2 - 2i\omega_2 (|a_1|^2 + |a_2|^2) a_2 - 2i\omega_1 a_1 a_2 a_1^* \right],$$

$$(1 + \Psi_1) 2i\omega_1 \dot{a}_1 = \mu \delta \Psi_1 i\omega_1 a_1, \quad (1 + \Psi_2) 2i\omega_2 \dot{a}_2 = \mu \delta \Psi_2 i\omega_2 a_2,$$

откуда после приведения и перехода к действительным амплитудам и фазам по формулам $a_{1,2} = A_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, после сокращения на $\exp(i\varphi_{1,2})$ имеем

$$\begin{cases} (1 - \alpha) \Psi_1 (\dot{A}_1 + iA_1 \dot{\varphi}_1) = \mu \left[\frac{A_1}{2} - (|A_1|^2 + |A_2|^2) A_1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} |A_2|^2 A_1 \right] - \frac{\mu \delta \Psi_1}{2} A_1, \\ (1 - \alpha) \Psi_2 (\dot{A}_2 + iA_2 \dot{\varphi}_2) = \mu \left[\frac{A_2}{2} - (|A_1|^2 + |A_2|^2) A_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} |A_1|^2 A_2 \right] - \frac{\mu \delta \Psi_2}{2} A_2. \end{cases}$$

После простых преобразований окончательно имеем

$$\dot{A}_1 = \mu \eta_1 \left[1 - (A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2) \right] A_1 / 2; \quad \dot{A}_2 = \mu \eta_2 \left[1 - (A_2^2 + \alpha_{21} A_1^2) \right] A_2 / 2; \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \text{где}$$

$$\eta_{1,2} = \sigma_{1,2} \lambda_{1,2}, \quad \sigma_{1,2} = \pm \frac{\omega_{2,1}^2 - \omega_{1,2}^2}{4 \omega_{2,1}^2 - \omega_{1,2}^2}, \quad \lambda_{1,2} = \left(1 - \frac{\delta \Psi_{1,2}}{\zeta \Psi_{2,1}} \right), \quad \alpha_{12,21} = \frac{2\lambda_{21}}{\lambda_{1,2}} - \text{коэф-}$$

фициенты нелинейной связи мод.

6 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ С ПОЛОВИНОЙ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

• Осцилляторы с индуктивной связью

Колебательный процесс в показанной на рис. 5.1.2 системе связанных контуров под действием гармонической силы описывается парой уравнений, приведенных ранее с учетом внешних сил, действующих в контурах. Обезразмерим эти уравнения для упрощения описания колебаний в системе и сокращения количества управляющих параметров:

$$\ddot{I}_1 + 2\gamma_1 \dot{I}_1 + \Omega_1^2 I_1 + M L_1^{-1} \dot{I}_2 = F_1 \Rightarrow \frac{\Omega_1^2 d^2 I_1}{d(\Omega_1 t)^2} + \frac{2\gamma_1 \Omega_1 d I_1}{d\Omega_1 t} + \Omega_1^2 I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{\Omega_1^2 d^2 I_2}{d(\Omega_1 t)^2} = F_1,$$

$$\ddot{I}_1 + I_1 + ML_1^{-1} \ddot{I}_2 = -2\gamma_1 \Omega_1^{-1} \dot{I}_1 + \Omega_1^{-2} F_1(t) \quad \begin{matrix} J_{1,2} = L_{1,2} M^{-1} I_{1,2} \approx -2\gamma_1 \Omega_1^{-1} \\ \alpha = ML_1^{-1} L_2^{-1} J_1 < \Omega_1^{-2} F_1 \end{matrix} \quad \ddot{J}_1 + J_1 + \alpha \ddot{J}_2 = -\dot{J}_1 + f_1(t) \text{ и}$$

$$\ddot{I}_2 + 2\gamma_2 \dot{I}_2 + \Omega_2^2 I_2 + ML_2^{-1} \ddot{I}_1 = F_2 \Rightarrow \frac{\Omega_2^2 d^2 I_2}{d(\Omega_1 t)^2} + \frac{2\gamma_2 \Omega_1 d I_1}{d\Omega_1 t} + \Omega_1^2 I_1 + \frac{M}{L_2} \frac{\Omega_1^2 d^2 I_2}{d(\Omega_1 t)^2} = F_2,$$

$$\ddot{I}_2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 I_2 + ML_2^{-1} \ddot{I}_1 = -2\gamma_2 \Omega_1^{-1} \dot{I}_1 + \Omega_1^{-2} F_2(t) \quad \begin{matrix} J_{1,2} = L_{1,2} M^{-1} I_{1,2} \approx -2\gamma_2 \Omega_1^{-1} \\ \zeta = \Omega_1^2 \Omega_2^2 J_2 = L_2 M^{-1} \Omega_1^{-2} F_2 \end{matrix} \quad \ddot{J}_2 + \zeta \ddot{J}_1 = -\mu \dot{J}_1 + f_2(t).$$

Здесь $\Omega_{1,2}^2$ и ζ — парциальные частоты контуров и их отношение, $2\gamma_{1,2} = R_{1,2}/L_{1,2}$ — коэффициенты диссипации, $\alpha < 1$ коэффициент индуктивной связи контуров, δ — отношение декрементов затухания в контурах. Будем полагать, что внешние силы $f_{1,2}(t)$ являются гармоническими и представим их в комплексном виде: $f_{1,2}(t) = \Phi_{1,2}(i\Omega t)$. Будем искать вынужденные решения данной системы в виде $J_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\Omega t)$. Тогда получим следующую систему

$$\begin{aligned} (1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)X_1 - \alpha\Omega^2 X_2 &= \Phi_1, \\ -\Omega^2 X_1 + (\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega)X_2 &= \Phi_2 \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Используя для решения системы (6.1.1) *правило Крамера* [III.19-21], приходим к выражениям для амплитуд колебаний осцилляторов:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega)\Phi_1 + \alpha\Omega^2\Phi_2}{(1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)(\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega) - \alpha\Omega^4}, \\ X_2 &= \frac{\Omega^2\Phi_1 + (1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)\Phi_2}{(1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)(\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega) - \alpha\Omega^4}. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

На рис. 6.1.1, 6.1.2 приведены резонансные кривые $\text{Re}[X_{1,2}]$ при различных силах, действующих на контуры и коэффициентах связи осцилляторов. Резонансные кривые демонстрируют следующее:

1. Если частота внешней силы Ω близка к одной из *нормальных* частот осцилляторов, то наступает резонанс.
2. Если частота внешней силы Ω , действующая на 1-й осциллятор, совпадает с *парциальной* частотой 2-го осциллятора Ω_2 , то 1-й осциллятор не колеблется $\text{Re}[X_1] = 0$. Это явление называется *динамическим демпфированием*.

3. При воздействии на один осциллятор внешней силы, 2-й будет колебаться так же, как 1-й при воздействии внешней силы на 2-й. Это – *теорема взаимности*.

4. Для возникновения резонанса в связанной системе *необходимо, но не достаточно*, чтобы частота внешней силы совпадала с одной из собственных частот.

Кроме того, как показано в [1.2], если в системе присутствует и индуктивная и емкостная связи, то при некотором значении частоты внешней силы один из осцилляторов не колеблется – происходит *компенсация связей* и колебания от одного осциллятора не передаются другому.

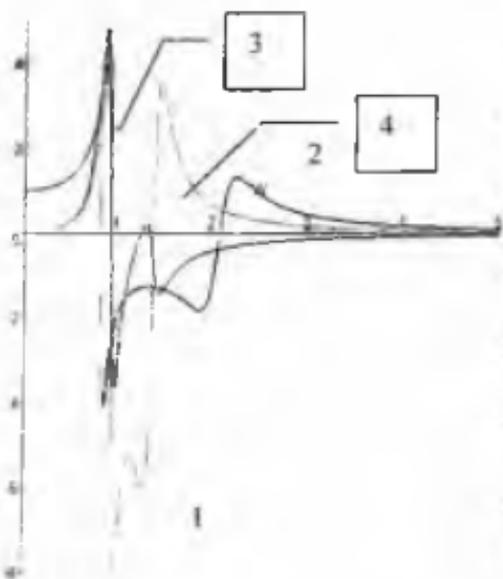


Рис.6.1.1 Резонансные кривые $Re[X_1]$ (1 – при $\alpha_1=0.1$, 2 – $\alpha_2=0.5$, 3 – при $\alpha_1=0.1$, 4 – при $\alpha_2=0.5$) при значениях параметров: $\mu=0.1$, $\delta=1.2$, $\zeta=1.5$ и значениях обобщенных сил: $\Phi_1=1$; $\Phi_{21}=0$, $\Phi_{22}=0.5$

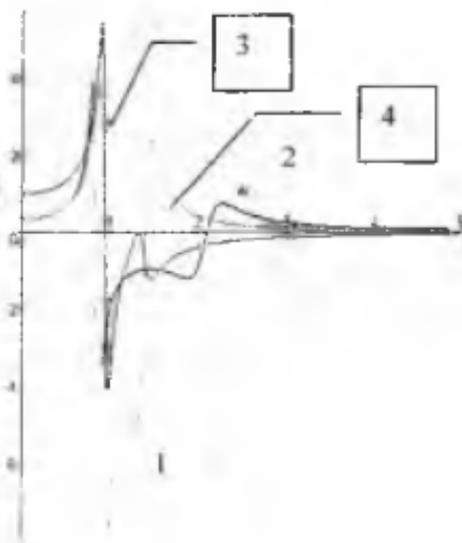


Рис.6.1.2 Резонансные кривые $Re[X_2]$ (1 – при $\alpha_1=0.1$, 2 – $\alpha_2=0.5$, 3 – при $\alpha_1=0.1$, 4 – при $\alpha_2=0.5$) при значениях параметров: $\mu=0.1$, $\delta=1.2$, $\zeta=1.5$ и значениях обобщенных сил: $\Phi_1=1$; $\Phi_{21}=0$, $\Phi_{22}=0.5$

• Осцилляторы с емкостной связью (гармоническая сила)

Рассмотрим поведение осцилляторов с емкостной (инерционной) связью под действием гармонической внешней силы. Колебания с использованием метода комплексификации описываются системой

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \Omega_1^2 x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = \frac{F_1 e^{i\Omega t}}{m_1},$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\gamma_2 \frac{dx_2}{dt} + \Omega_2^2 x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = \frac{F_2 e^{i\Omega t}}{m_2}. \quad (6.1.3)$$

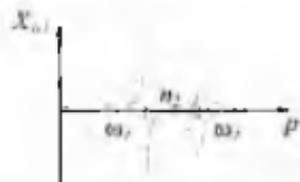


Рис. 6.1.3

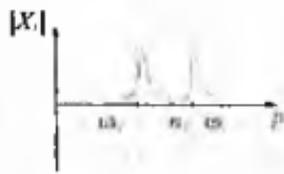


Рис. 6.1.4

Будем интересоваться вынужденным решением системы (6.1.3), разыскивая его в виде $x_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\Omega t)$. В результате получим

$$\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2\right) X_1 - \frac{k}{m_1} X_2 = \frac{F_1}{m_1}; \quad -\frac{k}{m_2} X_1 + \left(-\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2\right) X_2 = \frac{F_2}{m_2}.$$

Используя *правило Крамера* [III.19-21], приходим к выражениям для амплитуд колебаний осцилляторов, приведенным на рис. 6.1.3, 6.1.4 при условии $F_2 = 0$ (пунктир – второй осциллятор, первый график – $\gamma_{1,2} = 0$).

$$X_1 = \frac{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2\right) \frac{F_1}{m_1} + k \frac{F_2}{m_1 m_2}}{\left(\Omega^2 + 2i\gamma_1 - \Omega_1^2\right) \left(\Omega^2 + 2i\gamma_2 - \Omega_2^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2}},$$

$$X_2 = \frac{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2\right) \frac{F_2}{m_2} + k \frac{F_1}{m_1 m_2}}{\left(\Omega^2 + 2i\gamma_1 - \Omega_1^2\right) \left(\Omega^2 + 2i\gamma_2 - \Omega_2^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2}}. \quad (6.1.4)$$

7 ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Определений волны существует великое множество. Здесь будет использоваться следующее определение, связывающее волновые процессы с колебательными.

Волновой процесс – это колебательный процесс в системе, состоящей из большого числа элементов [I.1-3]. В самом деле, в теории колебаний мы имели дело с конечным числом элементов системы, включающих один или несколько осцилляторов. Естественным является вопрос: а как будет вы-

глядеть модель, характеризующая колебательный процесс в дискретной среде с конечным, но большим количеством элементов $N \gg 1$, и в непрерывной среде с бесконечным количеством элементов $N \rightarrow \infty$?

7.1 Колебания в цепочках

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим несколько примеров из различных разделов физики, где мы опишем колебательный процесс в дискретных средах с конечным, но большим количеством элементов $N \gg 1$ (цепочках), а затем совершим предельный переход $N \rightarrow \infty$.

Пример 1. Маятники, связанные пружинами. Рассмотрим цепочку шариков массой m , связанных пружинами жесткостью k (рис. 7.1.1), пренебрегая трением шариков о подложку [1.2]. Тогда, для n -го шарика с координатой $na + \Xi_n$ для упругих деформаций получаем:

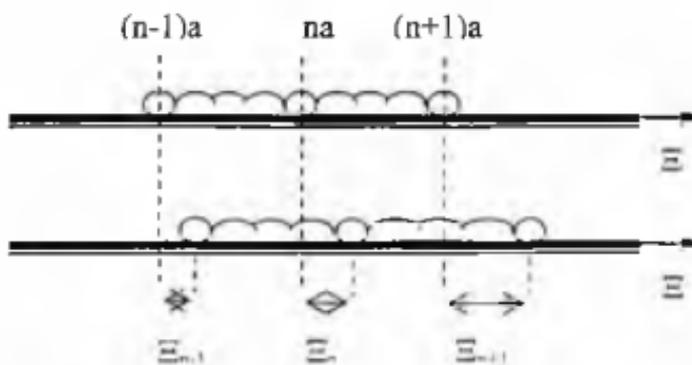


Рис. 7.1.1

$$m \frac{d^2 \Xi_n}{dt^2} = -k(\Xi_n - \Xi_{n+1}) - k(\Xi_{n-1} - \Xi_n) = k(\Xi_{n+1} - 2\Xi_n + \Xi_{n-1}). \quad (7.1.1)$$

Частное решение уравнения (7.1.1) будем искать в виде $\Xi_n = C \exp(i\omega t - iqa na)$.

Подставив это соотношение в уравнение (7.1.1), получим, сокращая на константу C :

$$-m\omega^2 e^{i\omega t - iqa na} = k \left(e^{i\omega t - iqa(n+1)a} - 2e^{i\omega t - iqa na} + e^{i\omega t - iqa(n-1)a} \right).$$

Тогда окончательно имеем соотношение, связывающее частоту колебаний шарика с параметрами среды – расстоянием между шариками a и количеством Λ элементов среды, вовлеченных в процесс связанных колебаний $\Lambda \sim q^{-1}$:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} (2 - (\exp(iqa) + \exp(-iqa))) = 2 \frac{k}{m} (1 - \cos(qa)) = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{qa}{2}.$$

В пределе отсутствия связей

$$q_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{q}{\Lambda} \rightarrow 0,$$

отсюда получается собственная частота колебаний шарика на пружине.

Пример 2 Цепочки связанных RLC - контуров. Емкостная связь

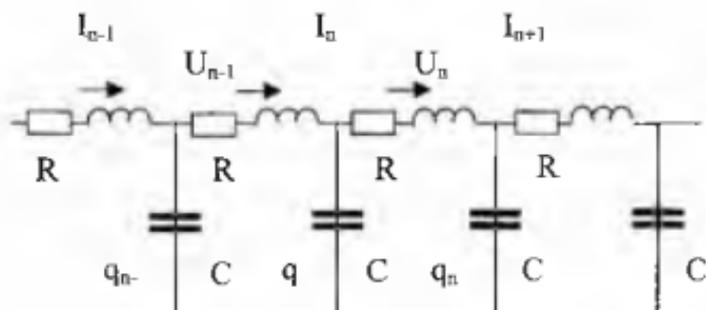


Рис. 7.1.2

Рассмотрим линию, состоящую из большого числа связанных через конденсаторы RLC - контуров [1, II.46] (рис. 7.1.2). Применяя к n -му контуру 2 - е пра-

вило Кирхгофа и первые правила к $n \cdot 1$ -му и n -му узлам, получим

$$I_n R + L \frac{dI_n}{dt} - \frac{q_n}{C} + \frac{q_{n-1}}{C} = 0,$$

$$I_{n-1} = \frac{dq_{n-1}}{dt} + I_n, \quad I_n = \frac{dq_n}{dt} + I_{n+1}.$$

Дифференцируем первое уравнение, используя законы сохранения заряда в узлах. В результате приходим к уравнению

$$R \frac{dI_n}{dt} + L \frac{d^2 I_n}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{dq_n}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq_{n-1}}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 I_n}{dt^2} + R \frac{dI_n}{dt} - \frac{I_n - I_{n+1}}{C} + \frac{I_{n-1} - I_n}{C} = 0.$$

Окончательно, деля на L , имеем

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI_n}{dt} + \frac{I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1}}{LC} = 0. \quad (7.1.2)$$

Уравнение (7.1.2) отличается от (7.1.1) только вторым слагаемым, которое учитывает потери энергии на джоулев нагрев, не принимаемые во внимание при выводе уравнения (7.1.1).

7.2 Предельный переход к волновому процессу

Уравнения (7.1.1), (7.1.2) допускают весьма прозрачный переход к непрерывному пределу. Характерный размер отдельной ячейки равен a . Будем считать количество Λ элементов среды, вовлеченных в процесс связанных колебаний (пространственный масштаб движений) в цепочке много большим a . Тогда можно записать следующие соотношения:

$$I_{n-1}(t) \leftrightarrow I(x-a, t) \approx I(x, t) - \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots,$$

$$I_n(t) \leftrightarrow I(x, t), \quad I_{n+1}(t) \leftrightarrow I(x+a, t) \approx I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots$$

Подставляя эти соотношения в (7.1.2), получим уравнение, приведенное к одной произвольной точке пространства x :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I - \frac{\partial I}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2 - 2I + I + \frac{\partial I}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2}{LC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (7.2.1)$$

Это уравнение при $R \rightarrow 0$ называют уравнением Клейна-Гордона, а при дополнительном условии $a^2 \partial^2 / \partial x^2 \gg 1$ - волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0. \quad (7.2.2)$$

Число параметров системы, позволяющих определить ее состояние, бесконечно, поскольку, чтобы рассчитать изменения параметров приведенных задач, в начальный момент надо задать не две константы, как для простейшей колебательной системы, а две функции - $I(x, 0)$ и $\dot{I}(x, 0)$, определенные для бесконечно большого числа значений x . Таким образом, волновые процессы описываются распределенными системами, то есть дифференциальными уравнениями в частных производных.

7.3 Классификация волновых процессов

Классификация волновых процессов несколько отличается от классификации колебательных процессов. Единым, пожалуй, является деление волн на линейные и нелинейные. Волны называют линейными, если они описыва-

ются линейными уравнениями, и нелинейными, если они описываются нелинейными уравнениями.

Часть отличий в классификации являются формальными, появляющимися в силу переноса центра тяжести при описании волнового процесса с отдельного элемента на саму среду (при предельном переходе, описанном в параграфе 7.2, свойства отдельного элемента нивелируются).



Рис. 7.3.1

В самом деле, волновой процесс может происходить в отсутствие внешних воздействий, а может и в их присутствии. При этом, однако, не принято говорить о волнах свободных и вынужденных. Это, как

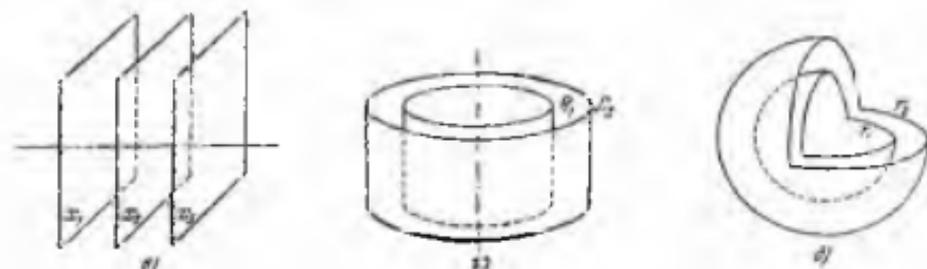


Рис. 7.3.2

мы увидим ниже, прежде всего связано с методами решения уравнений, описывающих соответствующие волновые процессы. Также не говорят о волнах консервативных и диссипативных, а говорят о волнах в консервативных и диссипативных средах.

Следующий критерий, по которому принято классифицировать волновые процессы, также связан со свойствами среды, точнее, с наличием у среды границ (более точно, с характером взаимодействия волны с границей), но не имеет аналога в колебательных системах. Волны в безграничных средах или в ограниченных средах с полностью поглощающими границами называют бегущими, в а ограниченных – стоячими.

Последние два критерия уже специфичны именно для волн.

Если изменения параметров, характеризующих волновой процесс, происходят в направлении движения волны, то такие волны называют про-

дольными, а если в направлении, перпендикулярном направлению движения волны, то поперечными (рис.7.3.1).

Наконец, последний критерий связан с формой поверхности, на которой фаза волны постоянна – фронта волны. Говорят, что волна плоская, если фронт – плоскость, сферическая, если сфера и т.д. (рис. 7.3.2).

Кроме того, у нелинейных волн существует своя специфическая классификация, связанная с характером взаимодействия волн, но она будет рассмотрена ниже, в соответствующем разделе.

7.4. Примеры волновых процессов

Пример 1. Продольные волны в стержнях

Такие волны могут быть возбуждены ударом молотка по одному из торцов упругого стержня [1.1, Ш.26,27]. Возмущение, распространяющееся вдоль стержня, визуально незаметно, однако основные закономерности такого волнового процесса можно смоделировать,

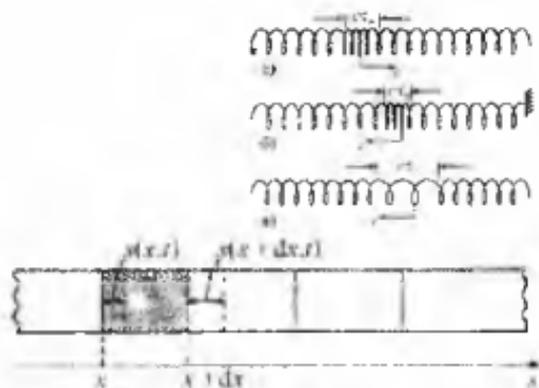


Рис. 7.4.1

если вместо стержня использовать длинную пружину с большим диаметром витков (рис.7.4.1).

Если эту пружину подвесить горизонтально на не-

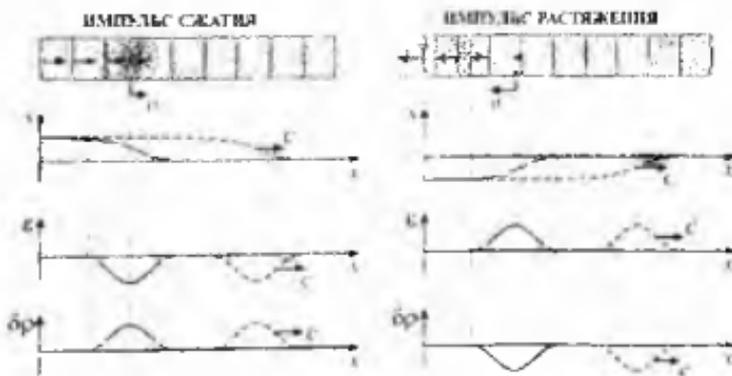


Рис 7.4.2

скольких нитях и резко ударить ладонью по левому торцу, то по ней побегит импульс сжатия с некоторой скоростью. Добежав до правого конца

пружины, он отразится, при этом, если конец закреплен, то отраженный импульс будет также импульсом сжатия.

Рассмотрим теперь распространение импульсов сжатия и растяжения в стержне.

Мысленно разобьем стержень на ряд элементов длиной dx каждый. При распространении продольной волны концы каждого элемента, отмеченные на рис.7.4.2 сплошными линиями, будут смещены в новые положения, отмеченные пунктиром. Пусть левый конец некоторого элемента, имеющий координату x , сместился в данный момент времени t на расстояние $s(x,t)$, а правый конец - на $s(x+dx,t)$. Деформация растяжения (сжатия) определяется относительным удлинением элемента dx : $\varepsilon(x,t) = \frac{s(x+dx,t) - s(x,t)}{dx} = \frac{\partial s}{\partial x}$. В отличие от поперечной волны, при растяжении уменьшается плотность среды ρ . Ее можно представить в виде $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $\delta\rho \ll \rho_0$. С учетом постоянства массы деформируемого элемента dx можем записать

$\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)[dx + s(x+dx,t) - s(x,t)] = (\rho_0 + \delta\rho)(1 + \varepsilon)$.

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной второго порядка $\delta\rho \cdot \varepsilon$, находим: $\delta\rho / \rho_0 = -\varepsilon$. Спустя некоторое время после удара по торцу стержня распределение смещений s деформаций ε и возмущений плотности $\delta\rho$ в бегущих импульсах сжатия и растяжения будут иметь вид, показанный на рис.7.4.3. Деформация $\varepsilon = \partial s / \partial x$ и колебательная скорость $v = \partial s / \partial t$ элемента связаны соотношением $\partial s / \partial x = -\varepsilon^{-1} \partial \varepsilon / \partial t$. Рассчитаем скорость распространения продольных волн. На рис.7.4.3 изображен фрагмент стержня и его элемент dx , к концам которого приложены нормальные напряжения σ_n . Уравнение движения элемента с поперечным сечением S имеет вид:

$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\sigma_n(x-dx,t) - \sigma_n(x,t))S$. (7.4.1)

Чтобы (7.4.1) преобразовать к волновому уравнению, необходимо связать напряжения σ_n с деформациями элементов стержня. Наиболее просто

это можно сделать для тонкого стержня. Если стержень тонкий, то деформации и напряжения вдоль координаты x связаны законом Гука:

$$\sigma_0(x, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x; \quad \sigma_0(x + dx, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+dx}, \quad (7.4.2)$$

где E - модуль Юнга. Подставляя (7.4.2) в (7.4.1) и производя деление на $\rho_0 S dx$, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0.$$

Пример 2. Электромагнитные волны. Электромагнитные волны описываются системой уравнений Максвелла [1.15]

$$\begin{cases} \nabla \bar{D} = 4\pi \bar{\rho}, & \nabla \bar{B} = 0, \\ \nabla \times \bar{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}, & \nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}. \end{cases} \quad (7.4.3)$$

Будем рассматривать систему (7.4.3) в среде, где отсутствуют свободные заряды $\rho = 0$ и токи $\bar{j} = 0$.

Продифференцируем, например, четвертое уравнение системы (7.4.3) по времени и учтем третье уравнение этой системы:

$$\nabla \times \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \times (c \nabla \times \bar{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}.$$

Воспользовавшись вторым уравнением системы (7.4.3), имеем окончательно для напряженностей магнитного и электрического поля следующую систему векторных уравнений

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \bar{H} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \bar{E} = 0. \quad (7.4.4)$$

Решение уравнений системы (7.4.4) в виде бегущих волн представлено на рис. 7.4.4.

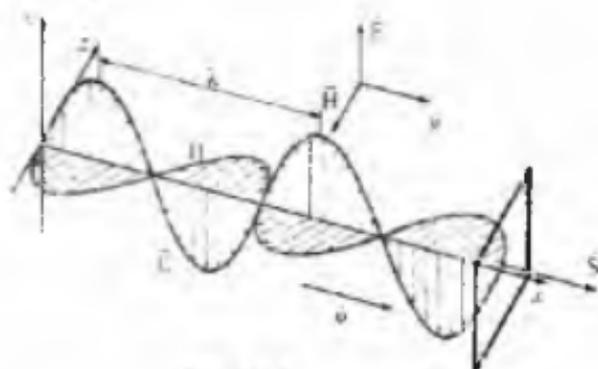


Рис. 7.4.4

Пример 3. Акустические волны

Исходными уравнениями здесь являются уравнения Навье-Стокса [I.16,17; II.44,56]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0, \quad P = \rho T / M \quad (7.4.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \bar{v} + \frac{\eta}{3} \nabla \operatorname{div} \bar{v}, \quad (7.4.6)$$

$$\begin{aligned} C_{V\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T \right) - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \nabla \rho \right) = \\ = \chi \Delta T + \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

Будем полагать коэффициенты вязкости и теплопроводности величинами первого порядка малости и разыскивать решение (7.4.5) – (7.4.7) в виде $\rho = \rho_0 + \rho'$, $T = T_0 + T'$, $P = P_0 + P'$, $\bar{v} = \bar{v}'$, где $\forall A: A' \sim \varepsilon^1 \ll 1$. Оставляя слагаемые первого порядка малости, получим дифференциальные соотношения

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{v}' = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = -\nabla P', \quad P' = \frac{\rho_0 T' + T_0 \rho'}{M}, \quad C_{V\infty} \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0.$$

Из последнего уравнения этой системы следует связь

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{1}{C_{V\infty}} \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{C_{P\infty} - C_{V\infty}}{C_{V\infty}} \frac{\rho'}{\rho_0} = (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим

$$P' = \frac{\gamma_\infty T_0}{M} \rho' = u_{S\infty}^2 \frac{\rho'}{\rho_0},$$

где $u_{S\infty}$ – скорость звука. После подстановки последнего соотношения во второе уравнение, имеем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{v}' = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + \frac{u_{S\infty}^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Применим к первому уравнению оператор $u_{S\infty}^2 \rho_0^{-1} \nabla$, а второе продифференцируем по времени, а затем вычтем первое уравнение из второго. В результате получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial t^2} - u_{S\infty}^2 \nabla^2 \bar{v}' = 0, \quad (7.4.8)$$

Пример 4. Гравитационно-капиллярные волны

Многие из нас наблюдали за поверхностью моря или реки, по которой перекачиваются волны. Они распространяются за счет сил тяжести и поверхностного натяжения. Такие волны называются *гравитационно-капиллярными* [Ц.44,58]. С учетом лапласовского давления и добавки к гидростатическому давлению $\rho g z$, обусловленной волновым движением поверхности, имеем:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla \left(P - \sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right), \nabla \vec{v} = 0. \quad (7.4.9)$$

Считая движение потенциальным, положим $\vec{v} = \nabla \phi$, тогда получаем:

$$\rho \left(\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + (\nabla \phi \nabla) \nabla \phi \right) = -\nabla \left(P - \sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right),$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Здесь z - координату точек поверхности жидкости мы обозначили буквой ζ . Система координат выбрана так, чтобы ось z была направлена вертикально вверх, а плоскость xy совпадала с невозмущенной поверхностью жидкости. Отсюда после интегрирования имеем:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) + \nabla \left(P_0 - \sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right) = 0.$$

Продифференцируем уравнение поверхности по времени, используя правило дифференцирования сложной функции и соотношения между ϕ и x, y, z :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Применяя это соотношение к точкам поверхности, получим окончательно самосогласованную систему уравнений

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (7.4.10)$$

где P_0 — давление на ее поверхности, которую следует дополнить граничным условием у дна $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$. Если амплитуда возмущения мала, систему

(7.4.10) можно линеаризовать. В результате получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Продифференцируем первое уравнение системы по z , второе по t и сложим. В результате возникает уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (7.4.11)$$

Уравнение (7.4.11) описывает волновой процесс, модель которого не сводится ни к волновому уравнению, ни к уравнению Клейна-Гордона. Частицы воды совершают в них движение по круговым и эллиптическим траекториям ("вверх - вниз" и "вперед - назад" одновременно), поэтому такие волны нельзя отнести ни к продольным, ни к поперечным.

8 ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Как следует из приведенных примеров, волновые процессы в основном описываются волновым уравнением или близкими к нему уравнениями, например уравнением Клейна-Гордона.

Вначале рассмотрим простейший и наиболее распространенный случай, когда волновой процесс малой амплитуды описывается волновым уравнением. Волновое уравнение относится к классу гиперболических уравнений в частных производных [III.26-31].

Рассмотрим вначале волновое уравнение с источником

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \bar{v} = f(\bar{r}, t). \quad (8.1.1)$$

С этим уравнением связывают два возможных типа задач¹, которые и будут в дальнейшем анализироваться.

¹ Для целого ряда задач, например поиска дисперсионного соотношения, вообще не нужно решать одну из стандартных задач для уравнений в частных производных (начальную, смешанную или граничную), а достаточно найти общее решение уравнения (8.1.1) в виде $v = \text{Сexp}(-i\omega t + i\mathbf{k}\bar{r})$.

8.1. Неограниченные среды. Задача Коши. Параметры волны

Первым классом возможных задач является начальная задача, или задача Коши. Задача Коши, очевидно, ставится для систем, определенных в *неограниченной области*. При этом уравнение (8.1.1) должно быть дополнено двумя условиями:

$$v|_{t=0} = v_0(\vec{r}), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(\vec{r}). \quad (8.1.2)$$

Задачи этого типа решаются *методом интегральных преобразований* (Фурье или Лапласа для задач, не обладающих симметрией, Фурье-Бесселя для цилиндрически симметричных задач и т. д.). Решение задачи (8.1.1)-(8.1.2) имеет различный вид для пространств разной размерности [III.26-31].

В одномерной среде решение дается *формулой д'Аламбера*

$$v(x, t) = \frac{v_0(x+ct) + v_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^{t-c(x-t)} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (8.1.3)$$

Способ получения соотношения (8.1.3) при $f = 0$ будет продемонстрирован ниже, при решении уравнения Клейна-Гордона, частным случаем которого является уравнение (8.1.1).

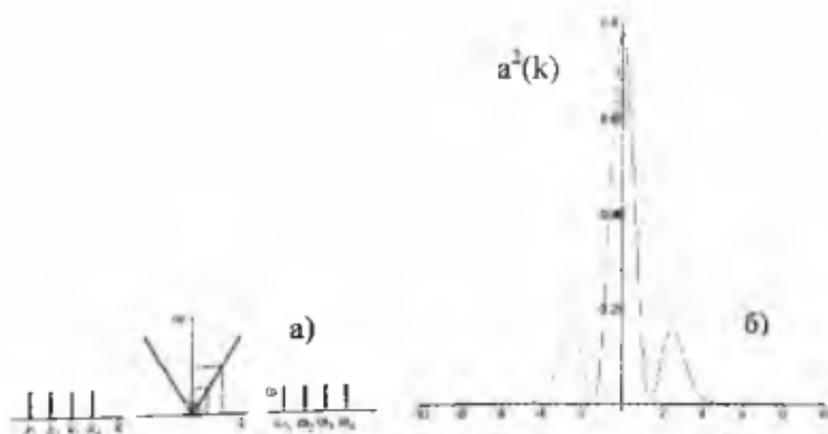


Рис.8.1.1. Спектр волнового пакета, представляющего собой: а – суперпозицию четырех первых гармоник; б – пакета $v(x) = x^2 \exp(-x^2)$.

В двумерной среде решение дается формулой Пуассона

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{|\xi - \bar{r}| < ct} \frac{v_0(\xi) d\xi}{\sqrt{c^2 t^2 - |\xi - \bar{r}|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{|\xi - \bar{r}| < ct} \frac{v_1(\xi) d\xi}{\sqrt{c^2 t^2 - |\xi - \bar{r}|^2}} + \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|\xi - \bar{r}| < c(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{c^2 (t-\tau)^2 - |\xi - \bar{r}|^2}} \quad (8.1.4)$$

В трехмерной среде решение дается формулой Кирхгофа

$$v(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\xi - \bar{r}| = ct} v_0(\xi) dS \right] + \frac{1}{t} \int_{|\xi - \bar{r}| = ct} v_1(\xi) dS + \int_0^t \int_{|\xi - \bar{r}| = c(t-\tau)} \left(\xi t - \frac{|\xi - \bar{r}|}{c} \right) f(\xi, \tau) d\xi \right] \quad (8.1.5)$$

Эти решения ассоциируют с бегущими волнами [1.1-3, 17].

Если волновой процесс представляет собой суперпозицию отдельных гармонических сигналов, для характеристики такого процесса удобно использовать спектр волны. Спектр волн в безграничных средах может быть как дискретным, так и непрерывным. Какой из видов спектра реализуется в линейной задаче, полностью определяется спектральным составом начальных условий и внешнего источника. Если их спектр дискретен, то и спектр волны дискретен (рис. 8.1.1, а), а если непрерывен, то непрерывен и спектр волны. При графическом отображении спектра волны в случае дискретного спектра по оси абсцисс указывают частоты колебаний ω_n или волновые числа или их номера n , а по оси ординат указывают квадраты их Фурье-амплитуд a_n^2 , в случае непрерывного спектра по оси абсцисс указывают частоты колебаний ω или волновые числа k , а по оси ординат указывают квадраты Фурье-образов их амплитуд $a^2(k)$ или $a^2(\omega)$.

8.1.1. Волновое уравнение. Гармоническое начальное возмущение

Большинство параметров волны удобно определить для монохроматических волн, формирующихся при гармонических начальных возмущениях.

Если $v_0(x) = A \cdot \sin kx$, $v_1(x) = B \cdot \sin kx$, тогда решение принимает вид

$$v(x, t) = \frac{A}{2} (\sin k(x + ct) + \sin k(x - ct)) + \frac{B}{2c} (\cos k(x + ct) + \cos k(x - ct)) = a \sin k(x + ct + \varphi) + b \sin k(x - ct + \varphi). \quad (8.1.6)$$

Это решение, очевидно, описывает пару волн, бегущих в противоположных направлениях оси x . Для того чтобы выделить волну, бегущую в одном на-

правлении, например вправо, следует положить $a = 0$. Тогда $v = b \sin k(x - ct + \varphi)$.

Поверхность постоянной фазы волны, здесь

$$x + ct + \varphi = \text{const},$$

называют *фронтом* волны, см. рис. 7.3.2. Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d}{dt}(x - ct + \varphi = \text{const}) \Rightarrow \frac{dx}{dt} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{dx}{dt}. \quad (8.1.7)$$

Скорость движения фронта волны c называют *фазовой скоростью* волны. Минимальное расстояние $\lambda = 2\pi/k$ между точками, колеблющимися в одинаковой фазе, называют *длиной* волны (рис. 8.1.2).

Частота волны равна $\omega = kc$. Частота связана с *периодом* волны стандартным соотношением $T = 2\pi/\omega$. Величину k называют *волновым числом*.

В соответствии с этими определениями уравнение бегущей

волны переписывается в стандартной форме

$$v = b \sin(kx - \omega t + \varphi),$$

а фазовая скорость волны равна

$$v_{\text{фн}} = \frac{\omega}{k}. \quad (8.1.8)$$

Отметим также, что из соотношения (8.1.6) следует, что

связь между частотой и волновым вектором можно получить непосредственно из уравнения (8.1.1), разыскивая его решение при $t = 0$ в виде

$$\bar{v}(\bar{r}, t) = v_0 \exp(i\bar{k}\bar{r} - i\omega t),$$

откуда следует связь частоты и волнового вектора

$$-\omega^2 + c^2 k^2 = 0. \quad (8.1.9)$$

Соотношение между ω и k для волн малой амплитуды называют *дисперсионным соотношением* [1.1-3, 17]. Для волн, описываемых волновым

уравнением, это соотношение имеет вид линейной связи $\omega = \pm ck$, т.е. фазовая скорость таких волн постоянна и равна $\pm c$ для волн бегущих вправо и влево.

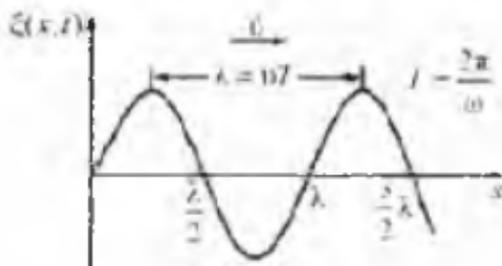


Рис. 8.1.2

8.1.2. Уравнение Клейна-Гордона. Группы волн. Дисперсия

Будем рассматривать волны уравнения Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega_0^2 U = 0. \quad (8.1.10)$$

Дисперсионное соотношение для этого уравнения уже не является линейным, а их фазовая скорость не постоянна, а является функцией волнового числа k : $\omega^2 = \omega^2(k) = \omega_0^2 + c^2 k^2$. Задачу Коши будем решать с условиями

$$U|_{t=0} = U_0(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = U_1(x). \quad (8.1.11)$$

Решать задачу (8.1.10)-(8.1.11) будем методом интегральных преобразований, здесь – используя преобразование Фурье [III.21,27,28]. Решение

$$\text{ищем в виде } U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U(\xi, t) e^{ik(x-\xi)} d\xi.$$

Подставляя его в (8.1.10) и (8.1.11), получим уравнение

$$\frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + (c^2 k^2 - \omega_0^2) U(\xi, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + \Omega^2 U(\xi, t) \quad (8.1.12)$$

$$\text{с начальными условиями } U(\xi, t)|_{t=0} = U_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = U_1(\xi).$$

Его решение, удовлетворяющее этим условиям, получается так:

$$U(\xi, t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \quad \begin{matrix} U(\xi, t)|_{t=0} = U_0(\xi) \\ \Rightarrow \\ B = U_0(\xi) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \left. \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = U_1(\xi) \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A \Omega \cos \Omega t - \Omega U_0(\xi) \sin \Omega t|_{t=0} = U_1(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \Omega = U_1(\xi) \Rightarrow A = \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \Rightarrow U(\xi, t) = \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t + U_0(\xi) \cos \Omega t.$$

Подставим это решение в (8.1.12), тогда получим

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[\frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t + U_0(\xi) \cos \Omega t \right] e^{ik(x-\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U_0(\xi) \cos \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi = U_1(x, t) + U_2(x, t).$$

Для преобразования воспользуемся преобразованием [III.24,31]:

$$\frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(r \sin \varphi \cos \theta) e^{ir \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad \begin{matrix} r \cos \varphi = -ict; r \sin \varphi = i\omega_0 t \\ \Rightarrow \\ r^2 = \Omega^2 t^2; ct \cos \theta = \zeta \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} = \int_0^\pi J_0(i\omega_0 t \sin \theta) e^{-ickt \cos \theta} \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} J_0(i\omega_0 t \sqrt{1 - \cos^2 \theta}) e^{-ickt \cos \theta} d \cos \theta =$$

$$\begin{matrix} \theta=0 \Leftrightarrow \zeta=ct \\ \theta=\pi \Leftrightarrow \zeta=-ct \end{matrix} = - \frac{1}{2} \int_{ct}^{-ct} J_0 \left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2 \cos^2 \theta}{c^2 t^2}} \right) e^{-ickt \cos \theta} \frac{dct \cos \theta}{ct} =$$

переворачивая
интеграл

$$\frac{1}{2} \int_{-ct}^{ct} J_0 \left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{c^2 t^2}} \right) \frac{e^{-ik\zeta}}{ct} d\zeta = \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}} \right) \frac{e^{-ik\zeta}}{t} d\zeta.$$

Таким образом,

$$U_2(x, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) \int_{-ct}^{ct} I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}} \right) e^{ik(x-\xi-\zeta)} d\zeta \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}} \right) (\Theta(\zeta - ct) - \Theta(\zeta + ct)) e^{ik(x-\xi-\zeta)} d\zeta \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_c \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) (\Theta(x-\xi-ct) - \Theta(x-\xi+ct)) \delta(x-\xi) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2c} \left\{ U_1(\xi) I_c \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) (\Theta(x-\xi-ct) - \Theta(x-\xi+ct)) \right\} = \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{d\xi}{2c} \left\{ U_1(\xi) I_c \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\}.$$

Заметим, что

$$U_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U_0(\xi) \cos \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \frac{\sin \Omega t}{\Omega} e^{ik(x-\xi)} \right).$$

Сопоставляя это равенство с выражением для $U_2(x, t)$, получим

$$U_1(x, t) \stackrel{\text{зафФ-м}}{\underset{\text{ф-овно пар-ам}}{=}} \frac{U_0(x-ct) + U_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\} =$$

$$= \frac{U_0(x-ct) + U_0(x+ct)}{2} + \frac{\omega_0 t^{x+ct}}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \left(t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2} \right)^{-1/2} I_1 \left(\omega_0 \left(t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2} \right)^{1/2} \right).$$

Собирая, получаем

$$U(x,t) = \frac{U_0(x-ct) + U_0(x+ct)}{2} + \frac{\omega_0 x}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}} \left[I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) - \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right]. \quad (8.1.13)$$

В частности, при $\omega_0 \rightarrow 0$ отсюда следует формула д'Аламбера т.к. $I_0(0)=1$, $I_1(0)=0$. Это соотношение можно представить в виде

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k \exp[i(kx - \omega(k)t)] = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k e^{i \left[kx - \left(\omega(k_0) + (k-k_0) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} - \frac{(k-k_0)^2}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} + \dots \right) t \right]} \\ &= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \sum_{q=q_1}^{q_2} a_{k_0+q} e^{i \left[q \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t \right) - \frac{q^2}{2!} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} t^2 + \dots \right]} \\ &= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \sum_{q=q_1}^{q_2} a_{k_0+q} e^{i \left[q \left(x - v_{GR} t \right) - \frac{q^2}{2!} \frac{dv_{GR}}{dk} \Big|_{k=k_0} t^2 + \dots \right]}, \text{ где } k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что оно может быть представлено в виде

$$U(x,t) = e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} F(x - v_{GR}t) \text{ при условии}$$

$$t \ll \frac{2\pi}{q^2 \left| \frac{dv_{GR}}{dk} \Big|_{k=k_0}} = \frac{8\pi}{(\Delta k)^2 \left| \frac{dv_{GR}}{dk} \Big|_{k=k_0}},$$

где величину $v_{GR} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0}$ называют выражением для *групповой скорости*

волны [1.1-3,17]. Таким образом, понятие групповой скорости имеет ограниченную область применимости. Легко видеть, что в области применимости этой характеристики между групповой и фазовой скоростью волны существует соотношение $v_{GR} = v_{PH} + \frac{dv_{PH}}{dk} = v_{PH} - \frac{dv_{PH}}{d\lambda}$. Фазовая и групповая скорости совпадают только в средах с линейным законом дисперсии — *недиспергирующих средах*.

8.1.3. Энергия и импульс волн

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона и умножим его на $\frac{\partial U}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega_0^2 U &= 0 \quad \times \frac{\partial U}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) - c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) - c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее волновой пакет (узкополосная группа волн), медленно меняющийся в пространстве и времени $U = a \cos(\Psi + \varphi)$. Тогда получаем [1.1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \Psi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\ + c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \frac{\omega_0^2 a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \\ - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \sin(\Psi + \varphi) \right) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) - \omega a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\ + c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - \left(a \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \right) \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 \cos^2(\Psi + \varphi) \right) + \\ - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \right) \sin(\Psi + \varphi) \right) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \right) \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln a}{\partial \ln t} \ll 1, \quad \frac{\partial \ln a}{\partial \ln x} \ll 1, \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \ln t} \ll 1, \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \ln x} \ll 1; \text{ отбрасывая слагаемые } \sim \epsilon^2 \text{ и выдвигая}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\omega^2 + c^2 k^2) \hbar^2 \sin^2(\Psi + \varphi) + \omega_0^2 a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[c^2 \omega k a^2 \sin^2(\Psi + \varphi) \right] = 0.$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt$$

↓

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\omega^2 + c^2 k^2) \hbar^2 + \omega_0^2 a^2}{4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2 \omega k a^2}{2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2}{\partial} \left[\frac{c^2 k^2 + \omega_0^2}{2} a^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2 \omega k}{2} a^2 \right] = 0.$$

Первое слагаемое в приведенном уравнении представляет собой производную по времени от *плотности энергии* волны, а второе – производную по координате от *плотности потока энергии* волны.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (8.1.14)$$

Это соотношение можно переписать в другом виде. Так как

$$v_{GR} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2}{\omega = \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}} \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2} \cdot c^2 k \omega a^2}{\frac{\omega_0^2 + c^2 k^2}{2} a^2} = \frac{1 \cdot \frac{c^2 k \omega}{2} a^2}{\frac{\omega_0^2 + c^2 k^2}{2} a^2} = \frac{S}{E} \Rightarrow S = v_{GR} E,$$

то (8.1.14) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (v_{GR} E)}{\partial x} = 0. \quad (8.1.15)$$

Это уравнение и его трехмерное обобщение справедливы не только для одномерного уравнения Клейна-Гордона, но и в общем случае [1.2].

8.2. Конечный отрезок. Одномерный случай. Стоячие волны

Основным методом решения задач с постоянными коэффициентами на конечном отрезке является метод Фурье (метод разделения переменных) (не путать с методом преобразований Фурье!!!) [III.26-31]. Здесь будет проиллюстрировано его применение для решения некоторых задач.

Напомним суть метода. Сначала ищутся решения вида $v(x, t) = X(x)T(t)$, например, уравнения (8.2.1) при граничных условиях (8.2.2). После этого решение задачи (8.2.1) – (8.2.2), (8.2.3), ищется в виде суперпозиций полученных решений вида $v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$.

Оказывается, что суперпозиция всегда может быть подобрана так, чтобы удовлетворялись начальные условия (8.2.3). Граничные условия и само волновое уравнение удовлетворяются автоматически, поскольку каждое слагаемое суперпозиции им удовлетворяет. В рамках данного курса мы будем интересоваться уравнениями, допускающими волновые решения. Простейшим из них является волновое уравнение. Задача для волнового уравнения для одномерной среды

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (8.2.1)$$

или уравнения Клейна-Гордона в общем случае ставится при следующих начальных и граничных условиях:

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_1(x); \quad \alpha_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} + \alpha_3 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} + \alpha_4 v|_{x=0} = \Phi(t),$$

$$\beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} + \beta_3 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} + \beta_4 v|_{x=L} = \Psi(t). \quad (8.2.2)$$

1. Вначале рассмотрим задачу (8.1.1) – (8.1.2) в отсутствие источника $f(x,t) = 0$ и при условиях $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0, \Phi = \Psi = 0$:

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_1(x); \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=L} = 0. \quad (8.2.3)$$

Для решения этой задачи и задач данного типа используется *метод Фурье (метод разделения переменных)* [III.26-31]. Решение задачи (8.2.1)–(8.2.3) ищем в виде $v(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя это соотношение в (8.2.1), получаем

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0.$$

Две функции разных переменных могут быть равны друг другу тогда и только тогда, когда они одновременно равны одной и той же константе:

$$\frac{1}{T c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0; \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda T = 0. \quad (8.2.4)$$

Граничные условия, очевидно, преобразуются к виду $T(t)X(x)|_{x=0} = 0, T(t)X(x)|_{x=L} = 0 \Rightarrow X(0) = 0, X(L) = 0$

Таким образом, для пространственной части задачи мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля [III.29]. Общее решение пространственного уравнения системы (8.2.4) имеет вид:

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda}x + \varphi) \stackrel{X(0)=0}{\Rightarrow} a \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi n.$$

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda}x + \pi n) \stackrel{X(L)=0}{\Rightarrow} a \sin(\sqrt{\lambda}L + \pi n) = 0 \Rightarrow a(-1)^n \sin \sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow b \sin \sqrt{\lambda}L = 0.$$

Отсюда $\sqrt{\lambda}L = \pi k \Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2 k^2}{L^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Удобно при решении данной задачи искать нормированное пространственное решение, пользуясь условием

$$\frac{1}{L} \int_0^L X^2(x) dx = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{L} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi k x}{L} dx = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{L} \frac{L}{\pi k} \int_0^{\pi k} \sin^2 \frac{\pi k x}{L} \frac{\pi k x}{L} = 1 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Решение временной части системы (8.2.3) при этом имеет вид:

$$T_k(t) = a_k \sin \sqrt{\lambda_k} ct + b_k \cos c \sqrt{\lambda_k} ct = a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t.$$

Тогда функция

$$v_k(x, t) = \left(a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t \right) \sin \frac{\pi k x}{L} \quad (8.2.5)$$

является решением системы (8.2.1), (8.2.3) при любых a_k, b_k (отметим, что в силу произвольности этих констант нормировочный множитель пространственного решения здесь снят). Очевидно, что общее решение системы (8.2.1), (8.2.3) представляет собой суперпозицию решений (8.2.5):

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t \right) \sin \frac{\pi k x}{L}. \quad (8.2.6)$$

Решение (8.2.6) следует еще удовлетворить начальным условиям. Тогда получаем $v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L}$, $v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi k c}{L} \sin \frac{\pi k x}{L}$. Умножим последние соотношения на $\sin \frac{\pi n x}{L}$ и проинтегрируем полученные соотношения от 0 до L. Отсюда получаем выражения для констант a_n, b_n :

$$\int_0^L v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn}}{2} = \frac{L b_n}{2} \Rightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$

$$\int_0^L v_1(x, t) \sin \frac{\pi m x}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi k c}{L} \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx = \frac{\pi k c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{kn}}{2} = \frac{\pi m c a_n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi m c} \int_0^L v_1(x, t) \sin \frac{\pi m x}{L} dx.$$

Решение (8.2.6) ассоциируют с так называемыми *стоячими волнами*, а отдельные слагаемые в (8.2.6), соответствующие значениям $k = 1, 2, 3, \dots$ называют *модами*. Пусть, например, $v_0(x) = v_0 \sin \frac{\pi m x}{L}$, $v_1(x) = 0$ (эта задача соответствует возбуждению акустической моды с номером m слева между двумя бесконечно высокими плоскими стенками). Тогда

$$a_n = 0, \forall n, b_n = b_m = \frac{v_0}{\pi m}, n = m; b_n = 0, n \neq m \Rightarrow v(x, t) = \frac{v_0}{\pi m} \cos \frac{\pi m c t}{L} \sin \frac{\pi m x}{L}.$$

2. Рассмотрим ту же задачу при граничных условиях [III.27]

$$v|_{t=0} = v_0(x), \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x); \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} + \beta_4 v(L, t) = 0. \quad (8.2.7)$$

Применение метода разделения переменных снова приводит нас к системе (8.2.4), но с граничными условиями вида

$$T(t) \left. \frac{dX(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, T(t) \left(\left. \frac{dX(x)}{dx} + \beta_4 X(x) \right) \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dX(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \left(\left. \frac{dX(x)}{dx} + \beta_4 X(x) \right) \right|_{x=L} = 0. \quad (8.2.8)$$

Снова для пространственной части задачи мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля. Применение условий (8.2.8) дает решение в виде

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x + \varphi) \Rightarrow \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow a \sqrt{\lambda} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x + \pi n) \Rightarrow \left(\left. \frac{dX}{dx} + \beta_4 X \right) \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow a \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} L + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) + \beta_4 a \sin\left(\sqrt{\lambda} L + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0.$$

Отсюда получаем трансцендентное уравнение для определения собствен-

ных значений задачи λ_k : $\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} L - \beta_4 \cos \sqrt{\lambda} L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} L = \beta_4$. От-

сюда имеем $X_k(x) = a \sin\left(\sqrt{\lambda_k} x + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = a \cos(\sqrt{\lambda_k} x)$, а функция

$$v_k(x, t) = \left(a_k \sin(\sqrt{\lambda_k} ct) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} ct) \right) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \quad (8.2.9)$$

является решением системы (8.2.7), (8.2.8) при любых a_k, b_k . Очевидно, что общее решение системы (8.2.7), (8.2.8) представляет собой суперпозицию решений (8.2.9):

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin(\sqrt{\lambda_k} ct) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} ct) \right) \cos(\sqrt{\lambda_k} x). \quad (8.2.10)$$

Решение (2.2.10) следует удовлетворить начальным условиям. Тогда получаем

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x),$$

$$v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x).$$

Умножим последние соотношения на $\cos(\sqrt{\lambda_k} x)$ и проинтегрируем полученные соотношения от 0 до L. Отсюда получаем выражения для a_n, b_n :

$$\int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\sqrt{\lambda_n} x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \frac{L}{2} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{kn} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \frac{L}{2} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{kn} = \frac{L b_n}{2} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{L} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx.$$

$$\int_0^L v_1(x, t) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{Lc\sqrt{\lambda_k}} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx.$$

Определение вида стоячих волн при более сложных граничных условиях производится аналогичными методами.

3. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами в среде без сопротивления, к которой с момента $t = 0$ приложена распределенная сила с плотностью $\Phi(x,t) = \Phi(x)\sin\omega t$ [III.27].

В соответствии с вышесказанным, имеется смешанная задача для функции s

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x)}{\rho} \sin \omega t \quad (8.2.11)$$

$$s(0,t) = 0, \quad s(l,t) = 0, \quad s(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (8.2.12)$$

Известно [III.27,31], что решение неоднородной задачи вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + au + \Phi(x)\Psi(t)$$

надо проводить так:

- функция Ψ разлагается в ряд Фурье $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \exp(i\omega_n t)$ и ищется частное

решение уравнения (8.2.11) в виде $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \exp(i\omega_n t)$, удовлетворяющее

граничным условиям (8.2.12),

- путем подстановки этих рядов в (8.2.11) получается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$-\omega_n^2 u_n = c^2 \frac{d^2 u_n}{dx^2} + b \frac{du_n}{dx} + 2i\gamma\omega_n u_n + au_n + \Phi(x)\Psi_n,$$

для которого решается задача Штурма-Лиувилля и находятся функции u_n .

При решении задачи (8.1.1) – (8.1.2) будем рассматривать два случая:

а. Частота внешней силы не совпадает не с одной из собственных частот однородной задачи $\omega \neq \pi n c / L$.

Будем искать частное решение (8.2.11) – (8.2.12) в виде $s(x,t) = S(x)\sin \omega t$. Подставим это выражение в (8.2.11) и (9.2.12), тогда

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} S(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0}, \quad S(0) = S(L) = 0, \quad (8.2.13)$$

где T_0 – натяжение струны.

Решение (8.2.13) имеет вид [III.27]

$$S(x) = \frac{c}{\omega T_0} \frac{\sin \frac{\omega}{c} x L}{\sin \frac{\omega}{c} L} \left\{ \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (L - \zeta) d\zeta - \frac{c}{\omega T_0} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (x - \zeta) d\zeta \right\},$$

откуда

$$s(x, t) = \frac{c}{\omega T_0} \left[\frac{\sin \frac{\omega}{c} x L}{\sin \frac{\omega}{c} L} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (L - \zeta) d\zeta - \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (x - \zeta) d\zeta \right] \sin \omega t. \quad (8.2.14)$$

б. $\omega = \frac{\pi m c}{L}$. Введем функцию $\varphi(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0} + A_m \sin \frac{\pi m x}{L}$, где

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\Phi(\zeta)}{T_0} \sin \frac{\pi m \zeta}{L} d\zeta, \text{ ортогональную } \sin \frac{\pi m x}{L} \text{ на отрезке } 0 < x < L \text{ и}$$

перепишем (8.2.11) в виде

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\rho} \varphi(x) \sin \omega t + \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \omega t. \quad (8.2.15)$$

В силу линейности задачи можно представить функцию s в виде $s(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ и разделить уравнение (8.2.15) на два

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \omega t, \quad (8.2.16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\rho} \varphi(x) \sin \omega t. \quad (8.2.17)$$

Общее решение уравнения (8.2.17) имеет вид [III.12]

$$w(x, t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \int_0^x \varphi(z) \sin \frac{\omega}{c} (x - z) dz. \text{ Частное решение уравнения (8.2.16)}$$

будем искать в виде $v(x, t) = T(t) \sin \frac{\pi m x}{L}$, удовлетворяющем условиям (8.2.12) при любых $T(t)$. Подставляя это выражение в (8.2.15) и имея в виду, что $\omega = \pi m c / L$, получаем

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \omega t. \quad (8.2.18)$$

Частное решение уравнения (8.2.18) можно искать в виде

$T(t) = t[A \cos \omega t + B \sin \omega t]$, откуда после подстановки имеем: $A = -T_0 A_m / 2\omega\rho$, $B = 0$. В результате

$$T(t) = -\frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \Rightarrow w(x, t) = -\frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{\pi m x}{L}. \quad (8.2.19)$$

Окончательно получаем

$$s(x, t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \int_0^x \varphi(z) \sin \frac{\omega}{c} (x-z) dz - \frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{\pi m x}{L}. \quad (8.2.20)$$

8.3. Многомерные задачи. Волноводы и резонаторы

Задачи о распространении волн в волноводах (прежде всего, электромагнитных и акустических) представляют собой примеры волновых процессов в многомерных ограниченных и частично ограниченных системах

1. Распространение электромагнитных волн E – типа в круглом волноводе с идеально проводящими стенками. [L15, 17].

Волновод представляет собой полость (трубу) неограниченной длины. Вдоль одной из осей (для определенности – z) возможно распространение бегущих волн, в поперечном направлении волна является стоячей, причем в общем случае волны в волноводе не являются поперечными. Волны, у которых $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ называют волнами *электрического типа* (E – волнами), а волны с $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ – волнами *магнитного типа* (H – волнами). Типы волн, которые могут распространяться в волноводе, определяются путем решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon\mu} \nabla^2 \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon\mu} \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (8.3.1)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями.

Будем решать задачу (8.3.1), методом Фурье, положив $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]$. В результате система (8.3.1) сводится к граничной задаче

$$\Delta \vec{E} - \left(\epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0, \quad (8.3.2)$$

$$\Delta \vec{H} + \left(\epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \vec{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = 0. \quad (8.3.3)$$

Положив $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, из (8.3.2), (8.3.3) получим

$$\Delta E_x + \kappa^2 E_x = 0, \quad \Delta E_y + \kappa^2 E_y = 0, \quad \Delta E_z + \kappa^2 E_z = 0, \\ \Delta H_x + \kappa^2 H_x = 0, \quad \Delta H_y + \kappa^2 H_y = 0. \quad (8.3.4)$$

Система (8.3.4) должна быть дополнена граничным условием для тангенциальной составляющей электрического поля на стенке волновода

$$E_z(\mathbf{S}) = 0, \quad (8.3.5)$$

где \mathbf{S} – уравнение поверхности стенки. Нетрудно видеть, что для определения компонент электрического и магнитного поля достаточно одного из уравнений системы (8.3.4)

$$\Delta E_z + \kappa^2 E_z = 0 \quad (8.3.6)$$

Остальные компоненты могут быть выражены через E_z с использованием уравнений Максвелла. В цилиндрической системе координат уравнение (8.3.5) имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 E_z = 0. \quad (8.3.7)$$

Полагая $E_z(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$\Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \Phi \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 R \Phi = 0 \Rightarrow \frac{\Phi^{-1} R^{-1}}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \Rightarrow \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 = m^2, -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (8.3.8)$$

Общее решение уравнения (8.3.8) имеет вид $\Phi(\varphi) = \Phi_0 \sin(m\varphi + \psi_m)$. Это решение в силу условия однозначности должно быть периодическим по φ с периодом 2π , откуда m – целое.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\kappa^2 r^2 - m^2) R = 0. \quad (8.3.9)$$

Общее решение уравнения (8.3.9) имеет вид

$$R(r) = AJ_m(\kappa r) + BK_m(\kappa r). \quad (8.3.10)$$

Из условия конечности функции в (8.3.10) $R(r)$ следует, $B = 0$. Тогда частные решения уравнения (8.3.7), соответствующие числу m , имеют вид

$$E_z(r, \varphi) = J_m(\kappa r) \sin(m\varphi + \psi_m). \quad (8.3.11)$$

Из полной системы уравнений Максвелла получаем

$$\nabla \vec{E} = 4\pi\rho \vec{e}_z \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \xrightarrow{\vec{E}(r, \varphi) = \vec{E}(r, \varphi) \exp[i(k_z z - \omega t)]} \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + ik_z E_z = 0,$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \xrightarrow{B_z = 0} \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) + j \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{i\omega\epsilon}{c} (\vec{E}_x + j\vec{E}_y + \bar{k}E_z),$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + j \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{i\omega}{c} (jH_x + \bar{j}H_y + \bar{k}H_z).$$

Из второго уравнения этой системы, равенства коэффициентов при \bar{k} в третьем уравнении и выражения (8.3.11) следуют выражения для $H_{r\varphi}$:

$$H_r(r, \varphi) = -\frac{i m \omega}{\kappa^2 c r} J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \psi_m),$$

$$H_\varphi(r, \varphi) = -\frac{i \omega}{\kappa c} \frac{dJ_m(\kappa r)}{dr} \sin(m\varphi + \psi_m). \quad (8.3.12)$$

Из первого уравнения этой системы, равенства коэффициентов при \bar{k} во втором и выражения (8.3.11) следуют выражения для $E_{r\varphi}$:

$$E_r(r, \varphi) = \frac{ik_z}{\kappa} \frac{dJ_m(\kappa r)}{dr} \sin(m\varphi + \psi_m), \quad E_\varphi(r, \varphi) = \frac{im\kappa}{\kappa^2 r} J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \psi_m). \quad (8.3.13)$$

Значения параметра κ определяются из граничных условий

$$E_r(a, \varphi) = 0, \quad E_\varphi(a, \varphi) = 0. \quad (8.3.14)$$

Отсюда имеем $\kappa_{m\alpha} a = j_{m\alpha}$, где $j_{m\alpha} - \alpha$ -й корень m -й функции Бесселя.

Фазы ψ_m определяются условиями возбуждения волн.

Видно, что распространение волн возможно, если

$$k_z = \sqrt{\omega^2 c^2 - \kappa^2} \in \text{Re} \Rightarrow \omega^2 > c^2 j_{m\alpha}^2 / a^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что у волноводов существует граничная

частота $\omega_0 > \frac{c j_{m\alpha}}{a}$, ниже которой распространение волн в волноводе не-

возможно.

2. Стоячие акустические волны в прямоугольном резонаторе.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон стенками, называется *резонатором*. Распространение акустических волн в прямоугольном резонаторе с непроницаемыми стенками описывается уравнением [П.56,60]

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - u_{S\infty}^2 \nabla^2 \bar{v} = 0. \quad (8.3.15)$$

Будем снова решать задачу методом Фурье, положив $\bar{v}(\vec{r}, t) = \bar{u}(\vec{r}) \exp[-i\omega t]$.

В результате уравнение (8.3.15) сводится к граничной задаче (скорость частиц на стенке равна нулю):

$$\Delta \bar{v} + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \Delta v_x + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} v_x = 0, \Delta v_y + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} v_y = 0, \Delta v_z + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} v_z = 0, \quad (8.3.16)$$

$$v_x(0) = v_x(l_1) = 0, \quad v_y(0) = v_y(l_2) = 0, \quad v_z(0) = v_z(l_3) = 0. \quad (8.3.17)$$

Решение задачи (8.3.16)-(8.3.17) имеет вид:

$$v_x(x, y, z) = A \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \cos \frac{\pi n_2}{l_2} y \cos \frac{\pi n_3}{l_3} z,$$

$$v_y(x, y, z) = B \cos \frac{\pi n_1}{l_1} x \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y \cos \frac{\pi n_3}{l_3} z,$$

$$v_z(x, y, z) = B \cos \frac{\pi n_1}{l_1} x \cos \frac{\pi n_2}{l_2} y \sin \frac{\pi n_3}{l_3} z. \quad (8.3.18)$$

9. ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Анализ распространения волн в неоднородных средах можно провести аналитически для значительно более узкого класса задач, чем в однородных.

9.1. Пример решаемой задачи

Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в плазме, концентрация которой меняется линейно $n = n_0 z$ при отсутствии поглощения. Процесс описывается системой волна – электрон атома

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0, \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \eta \frac{d\vec{r}}{dt} = e \vec{E}. \quad (9.1.1)$$

В соответствии со сказанным будем искать решение системы (9.1.1) в виде $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$. При этом задачу можно решать последовательно, вначале

находя вынужденное решение второго уравнения этой системы (амплитуда собственных колебаний при условии $\eta \ll \omega$ практически несущественна).

Оно имеет вид

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Дипольный момент единицы объема равен $\vec{P} = \sum e\vec{r}$, а электрическая индукция $\vec{D} = e\vec{E}$. Тогда проницаемости имеют вид

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \frac{4\pi e^2 n}{m} \approx 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \quad \mu = 1.$$

В результате первое уравнение (9.1.1) переписывается в виде

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right) \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n_0 z}{m\omega^2}\right) \vec{E} = 0.$$

Будем считать волну плоской и обозначим $z_1 = \frac{4\pi e^2 n_0 z}{m\omega^2}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) E = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 E}{d(z_1 - z)^2} + \frac{\omega^2}{c^2 z_1} (z_1 - z) E = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2 E}{d(z_1 - z)^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{2/3}} + \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3} (z_1 - z) E = 0 \Rightarrow \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Будем решать уравнение (9.1.2), используя преобразование Фурье, представляя напряженность электрического поля в виде

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk,$$

$$E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Подставляя первое соотношение в (9.1.2), используя правила дифференцирования преобразования Фурье [III.28], получим

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi\right) \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk = 0 \Rightarrow \int_{\xi e^{ik\xi} = d\xi} E(k) (ik)^2 e^{ik\xi} dk + E(k) \frac{\xi}{i\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\xi}}{i} \frac{dE(k)}{dk} dk = 0.$$

Окончательно имеем

$$\frac{dE(k)}{dk} + ik^2 E(k) = 0. \quad (9.1.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$E(k) = C \exp(-ik^3/3).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем с учетом нечетности синуса

$$\begin{aligned} E(\xi) &= A' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right)} dk = A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk \right] = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk = A \cdot \text{Ai}(-\xi). \end{aligned}$$

Асимптотики функции $\text{Ai}(z)$ (функции Эйри) имеют следующий вид [III.18,24]

$$E(\xi) = \begin{cases} \frac{A}{\xi^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & \xi \rightarrow \infty \\ \frac{A}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right), & \xi \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Хорошо видно, что поле экспоненциально затухает внутрь среды.

9.2. Приближенные методы анализа волновых процессов

Решение даже линейных уравнений, описывающих тот или иной волновой процесс, далеко не всегда может быть получено точно, что связано со свойствами сред. В таких случаях для описания волновых процессов надо применять приближенные методы, часть из которых приведена ниже.

9.2.1. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для распределенных систем аналогичен методу итераций для систем с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим этот метод в применении к задаче о формировании стоячих волн в консервативных системах с коэффициентами, зависящими от пространственных координат.

Уравнения, описывающие волны данного типа (их часто называют колебаниями в распределенных системах (более того, и последнее словосочетание часто опускают)) можно представить в форме

$$A(x) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \hat{L} \bar{u} = 0, \quad (9.2.1)$$

где $A(x)$ — квадратная матрица с коэффициентами $a_{ik}(x)$, \hat{L} — операторная матрица, элементы которой являются линейными дифференциальными операторами вида

$$L_{ik} = \frac{\partial^{m_{ik}}}{\partial x^{m_{ik}}} + b_{ik}^{m_{ik}-1}(x) \frac{\partial^{m_{ik}-1}}{\partial x^{m_{ik}-1}} + \dots + b_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + b_{ik}^{(0)}(x).$$

Полагая

$$\bar{u}(x, t) = \bar{y}(x) \exp(i\omega t),$$

где ω — действительное число, для n -й собственной формы $y_n(x)$ получим уравнение

$$\hat{L} \bar{y}_n - A(x) \omega_n^2 y_n = 0 \quad (9.2.2)$$

с граничными условиями

$$U(\bar{y}_n; \omega_n) = \sum_{j=0}^{m_n} \left(A_j \frac{\partial^{(j)} \bar{y}_n}{\partial x^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{\partial^{(j)} \bar{y}_n}{\partial x^j} \Big|_{x=1} \right) = 0. \quad (9.2.3)$$

Наименьшую по величине собственную частоту ω , и соответствующую ей собственную форму $\bar{y}_1(x)$ можно найти следующим образом. Выберем произвольно некоторую вектор-функцию $\bar{f}(x)$. Чтобы метод быстрее сошелся, желательно, чтобы вектор-функция $\bar{f}(x)$ удовлетворяла граничным условиям (9.2.3) и была близка к искомой функции $\bar{y}_1(x)$. Вектор-функция следующего приближения $\bar{f}_1(x)$ находится как решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\hat{L} \bar{f}_1 = A(x) \bar{f}. \quad (9.2.4)$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (9.2.3) можно выразить через матричную функцию Грина $G(x, \xi)$:

$$\bar{f}_1(x) = \int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \bar{f}(\xi) d\xi. \quad (9.2.5)$$

В ряде задач функцию $G(x, \xi)$ удастся найти аналитически. Повторяя ту же операцию над вектор-функцией $\bar{f}_1(x)$ и т.д. получим вектор-функцию m -го приближения

$$\bar{f}_2(x) = \int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \bar{f}_1(\xi) d\xi \stackrel{\text{н.т.д.}}{\Rightarrow} \bar{f}_m(x) = \int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \bar{f}_{m-1}(\xi) d\xi. \quad (9.2.6)$$

Покажем, что для достаточно больших m

$$\bar{f}_m(x) = C_m \bar{y}_1(x), C_m = \text{const}; \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_{m-1}}{C_m} = \omega_1^2. \quad (9.2.7)$$

Пронумеруем все собственные частоты системы в порядке возрастания их величины и разложим функцию $\bar{f}(x)$ в ряд по собственным функциям $\bar{y}_n(x)$:

$$\bar{f}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \bar{y}_j(x). \quad (9.2.8)$$

Подставляя (9.2.8) в выражение (9.2.5) для $\bar{f}_1(x)$ и учитывая, что

$$\int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \bar{y}_j(\xi) d\xi = \frac{\bar{y}_j(x)}{\omega_j^2},$$

получаем

$$\bar{f}_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^2} \bar{y}_j(x) \Rightarrow \bar{f}_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^4} \bar{y}_j(x) \stackrel{\text{н.т.д.}}{\Rightarrow} \bar{f}_m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^{2m}} \bar{y}_j(x). \quad (9.2.9)$$

Выражение (9.2.9) можно переписать иначе:

$$\bar{f}_m(x) = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left[\alpha_1 \bar{y}_1(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{\omega_1}{\omega_j} \right)^{2m} \bar{y}_j(x) \right]. \quad (9.2.10)$$

Из этого выражения следует, что при достаточно большом m и α_1 второй член в квадратных скобках будет мал по сравнению с первым членом, т. е. утверждение (9.2.7) справедливо.

Для определения второй собственной частоты ω_2 и соответствующей ей собственной формы $\bar{y}_2(x)$ необходимо вектор-функцию нулевого приближения $\bar{f}(x)$ и всех последующих приближений ортогонализировать к вектор-функции $\bar{z}_1(x)$, представляющей собой первую собственную форму сопряженной краевой задачи. В каждом конкретном случае функция $\bar{z}_1(x)$ может быть легко выражена через функцию $\bar{y}_1(x)$. Вследствие ортогональности

вектор-функций $\bar{f}_0(x)$ и $\bar{z}_1(x)$ постоянная α_1 , в выражении (9.2.10) будет равна нулю и вектор-функция $\bar{f}_m(x)$ будет стремиться к $C_m \bar{y}_2(x)$. Операцию ортогонализации можно проделать следующим образом. Добавим к некоторой выбранной функции $\bar{f}(x)$ функцию $\bar{y}_1(x)$, умноженную на такой скалярный множитель β , чтобы $\int_0^l (\bar{z}_1(x) [\bar{f}(x) + \beta \bar{y}_1(x)]) dx = 0$. Вектор-

функция первого приближения $\bar{f}_1(x)$ определяется как решение неоднородного уравнения (9.2.4), в правую часть которого вместо функции $\bar{f}(x)$ ставится функция $\bar{f}_0(x) = \bar{f}(x) + \beta \bar{y}_1(x)$.

Хотя можно убедиться, что вектор-функция $\bar{f}_1(x)$

должна быть ортогональна к вектор-функции $\bar{z}_1(x)$, при практических расчетах вследствие различного рода погрешностей ее следует снова ортогонализировать к функции $\bar{z}_1(x)$. Продолжая итерации дальше, можно приближенно найти собственную функцию и частоту $\bar{y}_2(x)$ и ω_2 .

Аналогичным путем в принципе можно искать и более высокие собственные частоты и соответствующие им собственные функции. Однако приемлемая точность вычисления обеспечивается лишь для низших частот. Основная трудность при использовании метода последовательных приближений заключается в вычислении функции Грина. Найдем, например, функцию Грина для поперечных изгибных колебаний неоднородной балки прямоугольного сечения (рис. 9.2.1). Такие колебания описываются уравнением

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (9.2.11)$$

где $u(x,t)$ – смещение каждой точки поперечного сечения с координатой x

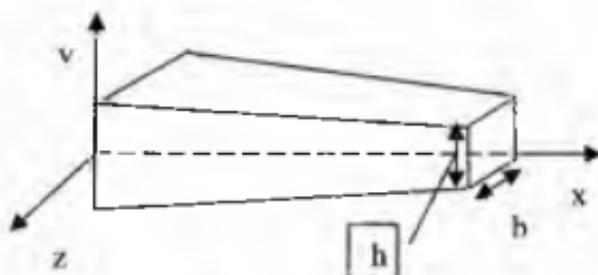


Рис. 9.2.1

от положения равновесия, $\rho(x)$ – погонная масса балки (масса балки на единицу длины), E – модуль Юнга материала балки, $I(x) = b(x) \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} \eta^2 d\eta$ –

момент инерции поперечного сечения с координатой x относительно оси проходящей через центр масс и параллельной оси z . Граничными условиями для консольной балки длины l будут

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0. \quad (9.2.12)$$

Подставляя в (9.2.11) выражение $u(x, t) = y(x) \exp(i\omega t)$, получим следующее уравнение для $y(x)$: $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EI(x)}{EI(0)} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{\rho(x)}{EI(0)} \omega^2 y$. Функция Грина

должна удовлетворять уравнению с граничными условиями

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EI(x)}{EI(0)} \frac{d^2 G}{dx^2} \right) = \delta(x - \xi), \quad G(0, \xi) = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0. \quad (9.2.13)$$

Обозначив $EI(x)/EI(0) = \epsilon(x)$ и интегрируя уравнение (9.2.13) с учетом этих условий, последовательно находим

$$\frac{d}{dx} \left(\epsilon(x) \frac{d^2 G}{dx^2} \right) = \theta(x - \xi) \Rightarrow \epsilon(x) \frac{d^2 G}{dx^2} = \begin{cases} x - \xi, & x < \xi \\ 0, & x > \xi \end{cases} \Rightarrow \frac{dG}{dx} = \begin{cases} \int_0^{x-\xi} \frac{\eta - \xi}{\epsilon(\eta)} d\eta, & x < \xi \\ \int_0^{\xi} \frac{\eta - \xi}{\epsilon(\eta)} d\eta, & x > \xi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} \int_0^{x-\xi} \int_0^{\eta-\xi} \frac{\eta - \xi}{\epsilon(\eta)} d\eta d\xi, & x < \xi \\ \int_0^{\xi} \int_0^{\eta-\xi} \frac{\eta - \xi}{\epsilon(\eta)} d\eta d\xi + (x - \xi) \int_0^{\xi} \frac{\eta - \xi}{\epsilon(\eta)} d\eta, & x > \xi \end{cases}$$

9.2.2. Асимптотический метод

Этот метод используется для получения оценки больших по модулю собственных значений той или иной краевой или смешанной задачи. Этот метод идейно близок методу ВКБ. Рассмотрим граничную задачу

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \hat{L} \bar{u}, \quad (9.2.14)$$

$$U(\bar{u}) = \sum_{j=0}^m \left(A_j \frac{\partial^{(j)} \bar{u}}{\partial x^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{\partial^{(j)} \bar{u}}{\partial x^j} \Big|_{x=1} = 0 \right), \quad (9.2.15)$$

где $L_{\bar{u}} = a_{ik}^{(m)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} + a_{ik}^{(m-1)} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} + \dots + a_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + a_{ik}^{(0)}(x)$.

Применим к системе (9.2.14) – (9.2.15) преобразование Лапласа по времени, умножим получившееся уравнение на $(\hat{A}^{(m)})^{-1}$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \hat{L} \bar{u} \quad \xrightarrow{\bar{u}(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\tau} \bar{u}(x,s) ds} \quad s\bar{y}(x,s) = \hat{L} \bar{y} \quad \xrightarrow{(\hat{A}^{(m)})^{-1}} \\ &\Rightarrow \frac{d^m \bar{y}}{dx^m} + \hat{A}_1(x) \frac{d^{m-1} \bar{y}}{dx^{m-1}} + \dots + \hat{A}_m(x) \bar{y} = s\hat{B}(x) \bar{y} \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

с граничными условиями

$$U(\bar{y}, s) = \sum_{j=0}^m \left(A_j \frac{d^{(j)} \bar{u}}{dx^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{d^{(j)} \bar{u}}{dx^j} \Big|_{x=1} = 0 \right). \quad (9.2.17)$$

Решение системы (9.2.16), (9.2.17) следует искать в виде суперпозиции частных решений уравнения (9.2.17): $\bar{y}_{ij}(x) = \exp \left[\int_0^x \rho_{ij}(\xi) d\xi \right] \sum_{r=0}^m s^{-r} \bar{u}_{ij}^{(r)}(x)$,

где $\rho_{ij}(x) = j$ -ое значение функции $(sb_i(x))^{1/m}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Подставим эти соотношения в уравнения (9.2.16) и приравняем друг другу слагаемые при одинаковых степенях s :

$$\circ s^1 : b_i(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} = \hat{B}(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} \Rightarrow \bar{u}_{ij}^{(0)} \neq 0, \bar{u}_{jk}^{(0)} = 0, k \neq i,$$

$$\circ s^{1-1/m} : b_i(x) \bar{u}_{ij}^{(1)} + (b_i(x))^{(m-1)/m} \left[\dots \frac{d\bar{u}_{ij}^{(0)}}{dx} + \frac{m-1}{2} \frac{d \ln b_i(x)}{dx} \bar{u}_{ij}^{(0)} + \hat{A}_1(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} \right] = \hat{B}(x) \bar{u}_{ij}^{(1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}_{ij}^{(0)}}{dx} + \left[\frac{m-1}{2m} \frac{d \ln b_i(x)}{dx} + \frac{a_{1i}(x)}{m} \right] \bar{u}_{ij}^{(0)} = 0 \Rightarrow \bar{u}_{ij}^{(0)} = C(b_i(x))^{-\frac{m-1}{2m}} \exp \left[-\frac{\int_0^x a_{1i}(\xi) d\xi}{m} \right],$$

$$\stackrel{(6),(7)}{\Rightarrow} \bar{u}_{jk}^{(1)} = -C \frac{a_{1i}(x) (b_i(x))^{(m-1)/2m}}{b_i(x) - b_k(x)} \exp \left[-\frac{1}{m} \int_0^x a_{1i}(\xi) d\xi \right]. \quad (9.2.18)$$

Здесь $a_{ij}(x)$ - компоненты матрицы $\hat{A}_1(x)$. Чтобы получить $\bar{u}_{ij}^{(1)}$, надо приравнять слагаемые при $r^{1-2\alpha}$. При этом также находятся функции $\bar{u}_{ij}^{(2)}$. Продолжая, можно получить решение с любой степенью точности.

Общее решение уравнения (9.2.16) имеет вид

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} \bar{y}_{ij}(x). \quad (9.2.19)$$

Зная $\bar{y}_{ij}(x)$, можно в соответствии с (9.2.15) составить характеристическое уравнение и вычислить собственные значения. Далее определяются константы C_{ij} и соответствующие собственные функции.

• *Случай $m = 2$.* Система (9.2.14) - (9.2.15) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 = sb_1(x)y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 = sb_2(x)y_2, \end{cases} \quad (9.2.20)$$

$\alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0$, $\beta_1 y_1(l) + \beta_2 y_2(l) = 0$. k - частное решение системы

(9.2.20) имеет вид $y_{ij}(x) = \exp\left[s \int_0^x b_k(\xi) d\xi\right] \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} u_{ik}^{(m)}(x)$, $i = 1, 2$. Подставим

это решение в (9.2.20) и сократим получившиеся уравнения на

$$\exp\left[s \int_0^x b_k(\xi) d\xi\right]:$$

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \left[\frac{du_{1k}^{(m)}}{dx} + (s(b_k(x) - b_1(x)) + a_{11}(x))u_{1k}^{(m)} + a_{12}(x)u_{2k}^{(m)} \right] = 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \left[\frac{du_{2k}^{(m)}}{dx} + (s(b_k(x) - b_2(x)) + a_{22}(x))u_{2k}^{(m)} + a_{21}(x)u_{1k}^{(m)} \right] = 0. \end{cases} \quad (9.2.21)$$

Приравняв друг другу слагаемые при одинаковых степенях s , получим цепочку уравнений, из которых последовательно определяются функции

$$u_{ik}^{(m)}(x): \quad u_{ik}^{(0)} = \delta_{ik} \exp\left(-\int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi\right), \quad u_{ik}^{(1)} = \Xi_k(x) \exp\left(-\int_0^x a_{kk}(\xi) d\xi\right),$$

$$u_{ik}^{(1)} = \frac{a_{ik}(x)}{b_i(x) - b_k(x)} \exp\left(-\int_0^x a_{kk}(\xi) d\xi\right), \text{ где}$$

$$\Xi_1(x) = \int_0^x \frac{a_{12}(\xi) a_{21}(\xi) d\xi}{b_1(\xi) - b_2(\xi)}, \quad \Xi_2(x) = -\Xi_1(x).$$

С точностью до слагаемых первого приближения получаем

$$y_i(x) = C_i \left(1 + \frac{\Xi_i(x)}{s} \right) e^{\int_0^x (sb_i(\xi) - a_{ii}(\xi)) d\xi} + \frac{C_j}{s} \frac{a_{ji}(x)}{b_i(x) - b_j(x)} e^{\int_0^x (sb_i(\xi) - a_{ii}(\xi)) d\xi}. \quad (9.2.22)$$

Здесь $i, j = 1, 2$. Решения нулевого приближения y_{11} и y_{22} это две невзаимодействующие волны, распространяющиеся друг напротив друга. В первом приближении возникают встречные отраженные волны y_{12} и y_{21} .

Подставляя (9.2.22) в граничные условия к уравнению (9.2.20), получаем линейную однородную систему для коэффициентов C_1 и C_2 :

$$\alpha_1 \left(C_1 + \frac{C_2}{s} \frac{a_{12}(0)}{b_1(0) - b_2(0)} \right) + \alpha_2 \left(C_2 + \frac{C_1}{s} \frac{a_{21}(0)}{b_2(0) - b_1(0)} \right) = 0,$$

$$\beta_1 \left\{ C_1 \left(1 + \frac{\Xi_1(l)}{s} \right) \exp \left[\int_0^l (sb_1(\xi) - a_{11}(\xi)) d\xi \right] + \frac{C_2}{s} \frac{a_{12}(l)}{b_1(l) - b_2(l)} \exp \left[\int_0^l (sb_2(\xi) - a_{22}(\xi)) d\xi \right] \right\} +$$

$$+ \beta_2 \left\{ C_2 \left(1 + \frac{\Xi_2(l)}{s} \right) \exp \left[\int_0^l (sb_2(\xi) - a_{22}(\xi)) d\xi \right] + \frac{C_1}{s} \frac{a_{21}(l)}{b_2(l) - b_1(l)} \exp \left[\int_0^l (sb_1(\xi) - a_{11}(\xi)) d\xi \right] \right\} = 0.$$

Условие наличия нетривиального решения этой системы:

$$\left\{ \alpha_1 \beta_2 + \frac{\alpha_1}{s} \left[\frac{\beta_1 a_{12}(l)}{b_1(l) - b_2(l)} + \beta_2 \Xi_2(l) \right] + \frac{\alpha_2}{s} \frac{\beta_2 a_{21}(0)}{b_2(0) - b_1(0)} \right\} \exp \left(\int_0^l b_2(\xi) d\xi - \int_0^l a_{22}(\xi) d\xi \right) -$$

$$- \left\{ \alpha_2 \beta_1 + \frac{\alpha_2}{s} \left[\frac{\beta_2 a_{21}(l)}{b_2(l) - b_1(l)} + \beta_1 \Xi_1(l) \right] + \frac{\alpha_1}{s} \frac{\beta_1 a_{12}(0)}{b_1(0) - b_2(0)} \right\} \exp \left(\int_0^l b_1(\xi) d\xi - \int_0^l a_{11}(\xi) d\xi \right) = 0.$$

Это условие позволяет в принципе вычислить собственные значения s , а решение (9.2.22) при этих значениях s и $C_2 = \frac{\alpha_1 [b_2(0) - b_1(0)] + \alpha_2 a_{21}(0)}{\alpha_2 [b_1(0) - b_2(0)] + \alpha_1 a_{12}(0)}$ определяет собственные функции системы.

Пример 1. Собственные колебания неоднородной балки. Продольные колебания неоднородной балки описываются уравнением

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (9.2.23)$$

где $u(x,t)$ – смещение частиц от положения равновесия, $\rho(x)$ и $g(x) = b(x) \int_0^{S(x)} E ds$ – погонные масса и упругость балки, E – модуль Юнга.

Граничными условиями для балки длины l , где один конец свободный, будут $u(0,t) = 0$, $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$. Пусть $u(x,t) = y(x) \exp(i\omega t)$, тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d \ln g}{dx} \frac{dy}{dx} + k^2(x) y = 0, \quad (9.2.24)$$

где $k(x) = \omega \sqrt{\rho(x)/g(x)}$. Частные решения уравнения (9.2.24) ищутся в виде

$$y_{1,2}(x) = \exp\left[\pm i \int_0^x k(\xi) d\xi\right] \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega)^{-m} u_{1,2}^{(m)}(x),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d \ln g}{dx} \frac{dy}{dx} + k^2(x) y = 0 \quad \begin{array}{l} y_{1,2}(x) = \exp\left[\pm i \int_0^x k(\xi) d\xi\right] \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega)^{-m} u_{1,2}^{(m)}(x) \\ \text{при однократных степенях } \omega \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u_{1,2}^{(0)}(x) = [\rho(x)g(x)]^{1/4} \\ u_{1,2}^{(1)}(x) = \pm \Xi(x) u_{1,2}^{(0)}(x) \end{array} \right.$$

где $\Xi(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \omega \left[\frac{1}{k(\xi)} \frac{d^2 k}{d\xi^2} + \frac{1}{g(\xi)} \frac{d^2 g}{d\xi^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g(\xi)} \frac{dg}{d\xi} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k(\xi)} \frac{dk}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi$ и

т.д. Положим $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и подставим в граничные условия, тогда получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{i \int_0^l k(\xi) d\xi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{u_1^{(m)}(l)}{(i\omega)^m} + \frac{1}{k(l)(i\omega)^m} \frac{du_1^{(m)}}{dx} \right]_{x=l} - \\ - C_2 e^{-i \int_0^l k(\xi) d\xi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{u_2^{(m)}(l)}{(i\omega)^m} - \frac{1}{k(l)(i\omega)^m} \frac{du_2^{(m)}}{dx} \right]_{x=l} = 0 \end{cases}$$

В первом приближении получаем характеристическое уравнение

$$e^{\pm i \int_0^l k(x) dx} = -1 - \frac{1}{k(l)} \frac{d \ln(kg)}{dx} \Big|_{x=l} - 2\Xi(l) \Rightarrow \omega = \omega_m = \frac{(2m+1)\pi}{\int_0^l \sqrt{\frac{\rho(x)}{g(x)}} dx} - \frac{1}{k(l)} \frac{d \ln(kg)}{dx} \Big|_{x=l} - 2\Xi(l).$$

где $m = 1, 2, \dots$. Первое слагаемое в выражении для собственной частоты

совпадает с соответствующей собственной частотой однородного стержня, в котором фазовая скорость распространения волны равна

$v = \left[\int_0^x \sqrt{\rho(\xi)/g(\xi)} d\xi \right]^{-1}$, а второе слагаемое определяет поправку к ней за

счет неоднородности сечения. Собственные функции принимают вид

$$y_m(x) = \left(\frac{\rho(x)}{g(x)} \right)^{1/4} \left[\sin \left(\int_0^x k_m(\xi) d\xi \right) - \frac{\Xi(x)}{2\omega_m} \cos \left(\int_0^x k_m(\xi) d\xi \right) \right],$$

где $k_m(x) = \omega_m \sqrt{\rho(x)/g(x)}$.

Пример 2. Электромагнитная волна в среде с плавно меняющейся диэлектрической проницаемостью. Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью, плавно меняющейся вдоль оси x и магнитной проницаемостью, равной единице. В результате получим уравнение [1.2]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon(x)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (9.2.25)$$

с условием $\partial \ln \varepsilon / \partial \ln x \ll 1$. Будем полагать волну монохроматической и интересоваться ее стационарным распространением: $E(x, t) = E(x)e^{i\omega t} + \text{к.с.}$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E(x) = 0 \quad (9.2.26)$$

Сделаем замену $E(x) = \exp \left(\int_0^x u dx \right)$. В результате из (9.2.26)

получим уравнение Риккати $\frac{d}{dx} \left(u \exp \left(\int_0^x u dx \right) \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \exp \left(\int_0^x u dx \right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \exp \left(\int_0^x u dx \right) + u^2 \exp \left(\int_0^x u dx \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \exp \left(\int_0^x u dx \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} + u^2 + k^2 \varepsilon(x) = 0. \quad (9.2.27)$$

В плавно неоднородной среде имеет место условие

$$\frac{\lambda}{\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{k\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll k, \text{ то есть волно-}$$

вое число k является большим параметром. В соответствии с этим будем

искать решение уравнения (9.2.26) в виде ряда по k [1.2] (аналог ВКБ - приближения в квантовой механике [II.42]):

$$u(x) = ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} + \dots \quad (9.2.28)$$

Подставляя (9.2.28) в (9.2.27), получим

$$\frac{d}{dx} \left(ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} \right) + \left(ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} \right)^2 + k^2 \varepsilon(x) = 0. \text{ Тогда}$$

• в порядке k^2 : $k^3 u_0^2(x) + k^2 \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow u_0(x) = \pm i \sqrt{\varepsilon(x)}$;

• в порядке k^1 : $\frac{k du_0(x)}{dx} + 2ku_0(x)u_1(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2u_0(x)} \frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\ln \sqrt{\varepsilon(x)} \right)$$

Знаки в решении u_0 соответствуют прямой и встречной волнам. Возвращаясь к исходным переменным, имеем окончательно

$$E(x) = \frac{A}{\sqrt[3]{\varepsilon(x)}} \exp \left(-ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx \right) + \frac{B}{\sqrt[3]{\varepsilon(x)}} \exp \left(ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx \right). \quad (9.2.29)$$

Отметим, что т.к. в этом приближении $A;B = \text{const}$, то рассеяния волн на неоднородностях и преобразования энергии волн друг в друга не происходит.

9.3. Периодически неоднородные среды

Снова рассмотрим цепочку RLC - контуров с емкостной связью. Применим *правила Кирхгофа* к n - му узлу и к n - му контуру.

Вновь положим характерный размер отдельной ячейки равным l и будем считать пространственный масштаб движений в цепочке много большим l . Считая емкость меняющейся вдоль цепочки, мы можем записать

$$I_n = \frac{dq_n}{dt} + I_{n+1} \quad \begin{matrix} I_{n+1}(t) \leftrightarrow I(x+l, t) \leftrightarrow I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} \\ \Rightarrow \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t) \leftrightarrow I_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{matrix} \quad I(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{l} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad \begin{matrix} q(x, t) = C(x)U(x, t) \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\frac{C(x)}{l} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \end{matrix}$$

$$I_n R - L \frac{dI_n}{dt} - \frac{q_n}{C_n} + \frac{q_{n-1}}{C_{n-1}} = 0 \quad \begin{matrix} q_{n-1}(t) \leftrightarrow q(x-l, t) \leftrightarrow q(x, t) - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \\ \Rightarrow \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t) \leftrightarrow I_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I(x,t)R - l \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} - \frac{q(x,t)}{C(x,t)} + \frac{q(x,t)}{C(x,t)} - \frac{\partial \left(\frac{q(x,t)}{C(x,t)} \right)}{\partial x} l = 0 \quad \Rightarrow \quad U(x,t) = \frac{q(x,t)}{C(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = I(x,t) \frac{R}{l} - \frac{L}{l} \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}.$$

Вводя емкость, индуктивность и сопротивление единицы длины

$$c(x) = \frac{C(x)}{l}, \ell = \frac{L}{l}, r = \frac{R}{l}, \text{ приходим к телеграфным уравнениям}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -c(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = I(x,t)r - \ell \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}, \quad (9.3.1)$$

Дифференцируем второе уравнение системы (9.3.1) по координате и воспользуемся первым, тогда получим волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \ell c(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + rc(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0. \quad (9.3.2)$$

Пренебрежем потерями в линии и введем обозначение $v_0^2 = 1/\ell c_0$. Разложим выражение для емкости в \cos – ряд Фурье

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nKx).$$

Будем искать решение уравнения (9.3.2) в виде

$$U(x,t) = u(x,t)e^{i\omega t}.$$

В результате приходим к уравнению Хилла

$$\frac{d^2 U(x,t)}{dx^2} + \frac{\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nKx)}{v_0^2} U(x,t) = 0. \quad (9.3.3)$$

Если в разложении для $c(x)$ отличны от нуля только коэффициенты c_0 и c_1 , причем $c_1 \ll c_0$, приходим к уравнению Матвея, решения которого анализировались ранее. Однако в этом случае зонам параметрической неустойчивости соответствуют так называемые зоны непротекания – волны с такими параметрами не существует [I.2,8; II.49,57].

10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. ТИПЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Нелинейные волны удобнее всего классифицировать по характеру взаимодействия друг с другом. Можно выделить три класса: *простые волны* (интерферируют), *солитоны* (взаимодействие сводится к асимптотическому сдвигу фаз волн), *автоволны* (полностью или частично аннигилируют).

10.1. Простые волны. Уравнение Римана. Уравнение Бюргерса

10.1.1. Уравнение Римана

Будем полагать, что в линии передачи, рассмотренной в разделе 9.3, емкость конденсаторов нелинейно зависит от напряжения $c = c(U)$, а потери отсутствуют ($\tau \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -c(U) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -l \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}. \quad (10.1.1)$$

Будем искать решение системы (10.1.1) в виде так называемой *простой волны* [I.1,2,16,17; II.56,58] в которой различные переменные изменяются пропорционально друг другу $I = I(U)$. Тогда имеем

$$\frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + c(U) \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad l \frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} \pm u(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (10.1.2)$$

где $u(U) = 1/\sqrt{lc(U)}$. Это *квазилинейное* уравнение (не содержащее нелинейных функций [III.30] относительно производных) называют *уравнением Римана* [I.2]. Знак «+» соответствует волнам, бегущим вправо, знак «-» бегущим влево.

Аналогично уравнения, описывающие одномерные нелинейные волны на несжимаемой мелкой воде без учета трения, также могут быть сведены к уравнению Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, & h = h(v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{dh}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, & v \pm gh \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dh}{dv} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v \pm \sqrt{gh} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Переходя здесь к переменной $\xi = x + \sqrt{gh}t$, имеем окончательно

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u(v) \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \quad \text{где } u(v) = v.$$

В качестве третьего примера опишем однорядное движение автомобильного потока в отсутствие светофоров [I.16]. Пусть число автомобилей,

проходящих через данную точку шоссе в единицу времени (поток), равно q , а линейную концентрацию автомобилей (число автомобилей на единицу длины) как p . Если нет источников и стоков (число автомобилей на трассе сохраняется), то концентрация потока должна удовлетворять уравнению непрерывности, в приближении простых волн вновь сводящееся к уравнению Римана

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \xrightarrow[u(n)=dq/dn]{q=q(n)} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u(p) \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (10.1.3)$$

То же уравнение будет получено в следующем разделе при описании слабых ударных волн в газе без учета процессов вязкости и теплопроводности.

Уравнение (10.1.3) удобнее всего решать *методом характеристик* [I.2, III.30]. Введем понятие *характеристики дифференциального уравнения* [III.30]. Для этого рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\sum_{i=1}^N a_i(\bar{x}, p) \frac{\partial p}{\partial x_i} = b(\bar{x}, p), \quad (10.1.4)$$

и пусть функции $a_i(\bar{x}, p)$, $b(\bar{x}, p)$ принадлежат к классу C^1 на некотором открытом множестве G пространства переменных \bar{X}, p , причем на этом множестве $\sum_{i=1}^N a_i^2(\bar{x}, p) \neq 0$. Пусть $p = p(\bar{x})$ - решение уравнения (10.1.4), определенное в некоторой области D пространства переменных \bar{X} , $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ - кривая, лежащая в D . Тогда, рассматривая решение $p = p(\bar{X})$ на этой кривой, получим функцию $\Xi(\tau) = p(\bar{x}(\tau))$. Подберем кривую $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ так, чтобы ее

касательный вектор $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$ в каждой точке был равен $\bar{a}(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau))$. Для этого должны выполняться уравнения $\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau))$, $i = \overline{1 \dots N}$. Дифференцируя функцию $\Xi(\tau)$, получим:

$$\frac{d\Xi}{d\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial p}{\partial x_i}(\bar{x}(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial p}{\partial x_i}(\bar{x}(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} a_i(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau)) \stackrel{p(\bar{x})\text{-решение (4)}}{=} b(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau)).$$

Следовательно, искомая кривая $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ в пространстве \bar{X} должна быть

такой, чтобы уравнения $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$, $n = \Xi(\tau)$ определяли траекторию системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}, n), \quad i = 1 \dots N; \quad \frac{dn_i}{d\tau} = b(\bar{x}, n). \quad (10.1.5)$$

Система уравнений (10.1.5) называется *характеристической системой* уравнения (10.1.4), а ее траектории в пространстве переменных \bar{X} , n - *характеристиками* уравнения (10.1.4). Подчеркнем, что параметр τ на характеристике уравнения (10.1.4) определен лишь с точностью до постоянного слагаемого. Кроме того, согласно нашим предположениям, функции $a_i(\bar{x}, n)$, $b(\bar{x}, n)$ принадлежат классу C^1 на множестве G , поэтому для системы уравнений (10.1.5) выполнены условия *теорем существования и единственности*. Обоснованием корректности метода характеристик служат две теоремы [III.30]:

Теорема 1. Если поверхность $S: n = n(\bar{x})$ класса C^1 в пространстве переменных \bar{x} , n такова что, какова бы ни была точка $(\bar{x}_0, n_0) \in S$, характеристика уравнения (10.1.4), проходящая через (\bar{x}_0, n_0) , касается S в этой точке, то S является интегральной поверхностью уравнения (10.1.4).

Теорема 2. Пусть $n = n(\bar{x})$ - решение уравнения (10.1.4), определенное в некоторой области D , $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$, $n = \Xi(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) - решение системы (10.1.5). Если при этом кривая $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) лежит в D и $\Xi(\tau_0) = n(\bar{x}(\tau_0))$, то $n(\bar{x}(\tau)) = \Xi(\tau_0)$. Теорема 2, таким образом, утверждает, что *любая интегральная поверхность уравнения (10.1.4) образована некоторым семейством характеристик*.

Рассмотрим далее уравнение (10.1.4) и пусть $S: \bar{x} = \bar{x}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ - регулярная $N-1$ -мерная поверхность класса C^1 без самопересечений, параметры $(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ изменяются в некоторой области T , $n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ - функция класса C^1 на T . Будем решать задачу Коши для уравнения (10.1.4) с начальным условием

$$n(\bar{x}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})) = n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}). \quad (10.1.6)$$

Геометрический смысл задачи Коши (10.1.4), (10.1.6) состоит в том, чтобы в пространстве переменных \bar{X} , n через $N-1$ -мерную поверхность Ω :

$\bar{x} = \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$, $n = n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ провести интегральную поверхность $n = n(\bar{x})$ уравнения (10.1.4). В силу теоремы 2 всякая характеристика уравнения (10.1.4), проходящая через любую точку поверхности Ω , лежит на искомой интегральной поверхности $n = n(\bar{x})$. Проведем через каждую точку поверхности Ω характеристику уравнения (10.1.4). Параметр τ на ней выберем так, чтобы при $\tau = 0$ она проходила через точку поверхности Ω . Уравнения этих характеристик можно записать в виде

$$x_i = \varphi_i(\tau, \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}), n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})) \quad n = \Xi(\tau, \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}), n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})). \quad (10.1.7)$$

Здесь $x_i = \varphi_i(\tau, \bar{x}_0, n_0)$, $i = \overline{1..N}$; $n = \Xi(\tau, \bar{x}_0, n_0)$ - непродолжаемые решения характеристической системы $\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}, n)$, $i = \overline{1..N}$, $\frac{dn}{d\tau} = b(\bar{x}, n)$. Завершением формальной части является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть при $\alpha < \tau < \beta$ ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) и при всех $(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}) \in T$ первые из уравнений системы (10.1.7) однозначно разрешимы относительно $\tau, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$, причем полученные функции $\tau = \tau(\bar{x})$, $\tau_i = \tau_i(\bar{x})$, $i = \overline{1..N-1}$ принадлежат классу C^1 .

Тогда функция $n = n(\bar{x}) = \Xi(\tau(\bar{x}), \bar{\xi}(\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_{N-1}(\bar{x})), n_0(\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_{N-1}(\bar{x})))$ является решением задачи Коши для уравнения (10.1.4) с начальным условием (10.1.6).

В приложениях часто встречается задача Коши для уравнения вида

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N a_i(t, \bar{x}, n) \frac{\partial n}{\partial x_i} = b(t, \bar{x}, n) \quad (10.1.8)$$

со следующим начальным условием: $n(0, \bar{x}) = n_0(\bar{x})$ (т.е. начальная функция задается на гиперплоскости $t = 0$ пространства переменных t, \bar{x}, n). Нам известно, что интегральная поверхность $n = n(\bar{x}, t)$, дающая решение задачи Коши (10.1.8), образована характеристиками, проходящими при $\tau = 0$ через поверхность $t = 0$, $x_i = \tau_i$, $n = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N)$, $i = \overline{1..N}$ в пространстве переменных t, \bar{x}, n (в качестве параметров на поверхности выбраны сами x_i). Уравнению (10.1.8) в соответствии с вышесказанным соответствует характеристическая система

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx_i}{d\tau} = a_i(t, \bar{x}, n), \quad \frac{dn}{d\tau} = b(t, \bar{x}, n), \quad i = \overline{1 \dots N}, \quad (10.1.9)$$

которую нужно дополнить начальными условиями

$$t|_{\tau=0} = 0, \quad x_i|_{\tau=0} = \tau_i, \quad n|_{\tau=0} = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), \quad i = \overline{1 \dots N}. \quad (10.1.10)$$

Из первого уравнения системы (10.1.9) и первого начального условия (10.1.10) находим $t = \tau$. Оставшиеся уравнения системы (10.1.9) и условия (10.1.10) можно теперь записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(t, \bar{x}, n), \quad \frac{dn}{dt} = b(t, \bar{x}, n), \quad i = \overline{1 \dots N}, \quad x_i|_{t=0} = \tau_i, \quad n|_{t=0} = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), \quad i = \overline{1 \dots N}.$$

Решив данную задачу Коши, получим

$$x_i = x_i(t, \tau_1, \dots, \tau_N), \quad n = \Xi(t, \tau_1, \dots, \tau_N), \quad i = \overline{1 \dots N}. \quad (10.1.11)$$

Если первые N уравнений (10.1.11) однозначно разрешимы относительно τ_1, \dots, τ_N , то, в силу теоремы 3, формулы (10.1.11) определяют решение задачи Коши (10.1.8). Возвращаясь к решаемой задаче, рассмотрим для

уравнения (10.1.3): $\frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0$ задачу Коши со следующим начальным условием: $n(x, 0) = n_0(x)$, $-\infty < x < \infty$. Здесь $N = 1$, $a_1 = u(n)$, $b = 0$. Тогда соотношения (10.1.9) имеют в данном случае вид

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(t, \bar{x}, n) = u(n), \quad \frac{dn}{dt} = b(t, \bar{x}, n) = 0, \quad x_1|_{t=0} = \xi, \quad n|_{t=0} = n_0(\xi). \quad (10.1.12)$$

Решая задачу Коши (10.1.12), получим

$$\frac{dn}{dt} = 0 \Rightarrow n = c_1 \Rightarrow c_1 = n_0(\xi); \quad \frac{dx_1}{dt} = u(n) \Rightarrow x_1 = \int u(n) dt = u(n_0(\xi))t + c_2 \Rightarrow c_2 = \xi.$$

Соотношения $n = n_0(\xi)$, $x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi$ определяют решение рассматриваемой задачи не для всех значений переменного t . В самом деле, если при некотором $t = t_1$, выражение для x_1 разрешимо относительно ξ не единственным образом, т.е. найдутся такие $\xi_1 \neq \xi_2$, что $u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1 = u(n_0(\xi_2))t_2 + \xi_2$ то эти соотношения не определяют при $t = t_1$ никакой однозначной функции $n = n(x, t)$ и при $t = t_1$ решение задачи Коши не определено. Геометрический смысл равенства $u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1 = u(n_0(\xi_2))t_2 + \xi_2$: при $t = t_1$ проекции на плоскость t, x ха-

рактических, соответствующих значениям ξ_1 и ξ_2 , пересекаются в точке $t = -t_1$, $x = u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1$.

1. Пусть $u(n) = n$, $n_0(x) = \alpha x$ ($\alpha > 0$). Тогда имеем

$$n = n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi \Rightarrow n = \alpha\xi; x = \alpha t\xi + \xi \Rightarrow n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}.$$

Видно, что возможно такое условие, при котором $\frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$, т.е. реше-

ние становится разрывным: $n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty, t = -\frac{1}{\alpha}$,

причем разрыв образуется на переднем фронте волны.

2. Пусть $u(n) = b - an$, $n_0(x) = \alpha x$ ($\alpha > 0$). Тогда имеем

$$n = n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi \Rightarrow n = \alpha\xi; x = t(b - a\alpha\xi) + \xi \Rightarrow n = \frac{\alpha(x - bt)}{1 - \alpha at}.$$

Видно, что возможно такое условие, при котором $\frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$, т.е. решение становится разрывным:

$$n = \frac{\alpha(x - bt)}{1 - \alpha at} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\alpha}{1 - \alpha at} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty \left(t = \frac{1}{\alpha a} \right),$$

причем разрыв образуется на заднем фронте волны. Решение уравнения (10.1.3) по аналогии с

линейными задачами можно также искать в виде [1.2]

$n(x, t) = n[x - u(n)t]$, или, обращая решение, в виде

$$x - u(n)t = \Psi(n). \quad (10.1.13)$$

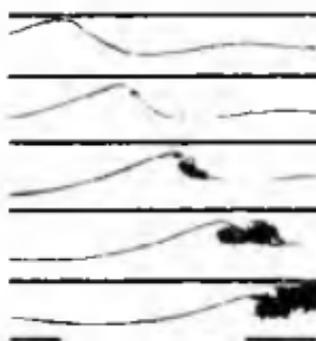


Рис. 10.1.1

Так как функция Ψ от времени не зависит, то

очевидно $\Psi(n) = n^{-1}(x, 0)$. Будем считать, что нам задано начальное условие

для уравнения (10.1.8) в виде $n(x, 0) = \rho(x)$. Продифференцируем уравнение

(10.1.13) по координате, тогда

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} t = \frac{d\Psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \stackrel{t=0}{\Rightarrow} \frac{d\Psi}{dn} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \left(\frac{d\Psi}{dn} + \frac{du}{dn} t \right)^{-1} = \left(\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0} + \frac{du}{dn} t \right)^{-1} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0} \left[1 + \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0} \frac{du}{dn} t \right]^{-1}. \quad (10.1.14)$$

Из соотношения (10.1.14) видно, что возможны такие условия, при которых $\partial n / \partial x \rightarrow \infty$, т.е. решение становится разрывным (при этом, очевидно, еще и $\partial n / \partial t \rightarrow \infty$, $\partial^2 n / \partial x^2 \rightarrow \infty$, $\partial^2 n / \partial t^2 \rightarrow \infty$ то есть образуется и перегиб).

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $t > 0$, $(\partial n / \partial x)_{t=0} > 0$, тогда, так как на разрыве, образуемом в момент времени $t = t_0$, при концентрации $n = n_0$ имеют место соотношения $\partial x / \partial n = 0$, $\partial^2 x / \partial n^2 = 0$, то, дифференцируя соотношение (10.1.14) по x при $t = t_0$, получим (рис. 10.1.1)

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_t = \frac{d\Psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{du}{dn} \Big|_t = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{t=t_0, n=n_0} - \frac{du}{dn} \Big|_{n=n_0} \Big|_{t=t_0} = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{n=n_0}. \quad (10.1.15)$$

Дифференцируя это соотношение по n при тех же условиях, получим

$$-\frac{d^2 u}{dn^2} \Big|_{n=n_0} \Big|_{t_0} = \frac{d^2 \Psi}{dn^2} \Big|_{n=n_0}. \quad (10.1.16)$$

Наконец, добавив сюда соотношение (10.1.13) в точке разрыва

$$x_0 - u(n_0)t_0 = \Psi(n_0), \quad (10.1.17)$$

получаем три уравнения с тремя неизвестными для определения t_0 , x_0 и n_0 . Такая ситуация имеет место, например, для волн на мелкой воде [П.8,23], когда (в сопровождающей системе координат) $u(n) = n$. Будем полагать, что $n(x,0) = \sin \omega x$. Тогда из (10.1.15)-(10.1.18) получим

$$-\frac{du}{dn} \Big|_{n=n_0} \Big|_{t_0} = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{n=n_0} \xrightarrow{\Psi = \omega^{-1} \arcsin n} -1 \cdot t_0 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-n_0^2}}, \quad \frac{d^2 \Psi}{dn^2} \Big|_{n=n_0} = 0,$$

$$x_0 - u(n_0)t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin n_0.$$

Легко видеть, что в этом случае разрыв образуется на переднем фронте волны.

Пусть $t > 0$, $(\partial n / \partial t)_{t=0} < 0$, (такой случай имеет место для автомобильных потоков [I.16]), тогда разрыв образуется на заднем фронте. В случае задачи с граничными условиями параметры разрыва надо находить из соотношений

$$\partial t / \partial n = 0, \quad \partial^2 t / \partial n^2 = 0.$$

10.1.2. Слабые ударные волны. Уравнение Бюргера

Будем вновь исходить из системы уравнений Навье-Стокса, которые рассмотрим в одномерном приближении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (10.1.18)$$

$$C_{v\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad P = \rho T / M,$$

Будем полагать коэффициенты вязкости и теплопроводности величинами первого порядка малости и разыскивать решение этой системы в виде ряда теории возмущений $\rho = \rho_0 + \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$, $T = T_0 + T^{(1)} + T^{(2)}$, $P = P_0 + P^{(1)} + P^{(2)}$, $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$, где $\forall A: A^{(1)} \sim \varepsilon^1 \ll 1$, $A^{(2)} \sim \varepsilon^2$. Оставляя слагаемые первого порядка малости, получим уравнения [II.56]

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x},$$

$$P^{(1)} = \frac{\rho_0 T^{(1)} + T_0 \rho^{(1)}}{M}, \quad C_{v\infty} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим связь между $T^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$:

$$\frac{T^{(1)}}{T_0} = \frac{1}{C_{v\infty}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = \frac{C_{p\infty} - C_{v\infty}}{C_{v\infty}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = (\gamma_{\infty} - 1) \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0}.$$

Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим связь $P^{(1)}$ с

$$\rho^{(1)}. \quad P^{(1)} = \frac{T_0(\gamma_{\infty} - 1)\rho^{(1)} + T_0\rho^{(1)}}{M} = u_{S\infty}^2 \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0}.$$

Подставляя это соотношение во второе уравнение, получим уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -u_{S\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \right).$$

Продифференцируем это уравнение по времени, а первое уравнение по координате и, вычитая одно из другого, получим

$$\frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial t^2} + u_{S\infty}^2 \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} + u_{S\infty}^2 \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = 0. \quad (10.1.19)$$

Таким образом, для возмущений первого порядка справедливы связи

$$\frac{p^{(1)}}{p_0} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = \frac{T^{(1)}}{T_0} = \frac{v^{(1)}}{u_{S\infty}}$$

Будем искать решение системы (10.1.19) с использованием метода медленно меняющихся амплитуд, полагая, что в системе отсчета, движущейся со скоростью звуковой волны бесконечно малой амплитуды, зависимость амплитуды от времени является медленной:

$$p^{(1):(2)} = p^{(1):(2)}(\tau, \xi) = p^{(1):(2)}(\varepsilon t, x - u_{S\infty} t) \text{ и т. д.}$$

Производные при этом преобразуются в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

В результате получим

$$\varepsilon \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\rho_0 \left(\varepsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} \right) - u_{S\infty} \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2},$$

$$C_{V\infty} \left(\varepsilon \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left(\varepsilon \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ (\gamma_\infty - 2) u_{S\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = \chi \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2}.$$

$$p^{(2)} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + T^{(1)} \rho^{(1)}}{M}$$

В слагаемых второго порядка малости можно воспользоваться линейными связями.

Тогда получаем

$$p^{(2)} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + (\gamma_\infty - 1) T_0 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0}}{M} - \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + T^{(1)} \rho^{(1)}}{M} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} \frac{u_{S\infty}^2}{\rho_0} \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0},$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2u_{S\infty} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\rho_0 \left(\varepsilon \frac{u_{S\infty}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{u_{S\infty}^2}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{u_{S\infty}^2}{\rho_0} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{S\infty}^2 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0} \right] + \frac{u_{S\infty}}{\rho_0} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}.$$

$$C_{\text{вк}} \left(\varepsilon \frac{(\gamma_\infty - 1) T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{(\gamma_\infty - 1) T_0 u_{S\infty}}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left(\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{u_{S\infty}^2}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ (\gamma_\infty - 2) u_{S\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \chi (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta u_{S\infty}}{3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}.$$

Упрощая полученную систему (подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются), имеем

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2u_{S\infty} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M u_{S\infty}} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{S\infty} \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0} \right] = \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2},$$

$$C_{\text{вк}} \left(u_{S\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left(u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} \right) + (\gamma_\infty - 2) u_{S\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \chi (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta u_{S\infty}}{3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}.$$

Последнее уравнение может быть один раз проинтегрировано и дает связь $T^{(2)}$ с $\rho^{(2)}$:

$$T^{(2)} \stackrel{\text{вк}}{=} \frac{1}{\gamma_\infty} = (c_{\text{вк}} - c_{\text{вс}}) \frac{1}{\gamma_\infty} = \gamma_\infty - 1 \left[\frac{T_0 \rho^{(2)}}{\rho_0} - (\gamma_\infty - 2) \frac{T_0 \rho^{(1)2}}{2 \rho_0^2} + \left(\chi + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right].$$

Подставим это соотношение во второе уравнение, сложим его с первым, чтобы уничтожились слагаемые $\rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi}$, тогда для безразмерного

возмущения плотности $\rho' = (\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) / \rho_0$ получим уравнение Бюргерса [Ш.44,56]:

$$\frac{\partial p'}{\partial \tau} + \Psi_{\infty} p' \frac{\partial p'}{\partial \xi} = \mu_{\infty} \frac{\partial^2 p'}{\partial \xi^2}, \quad (10.1.20)$$

где $\Psi_{\infty} = \frac{\gamma_{\infty} + 1}{2}$ - коэффициент квадратичной нелинейности,

$$\mu_{\infty} = \frac{1}{2} \left[\zeta + \frac{4\eta}{3} + \left(\frac{1}{c_{V\infty}} - \frac{1}{c_{P\infty}} \right) \right].$$

Добавим к уравнению (10.1.20) начальное условие

$$p'(x, 0) = p_0(x)$$

и решим для него задачу Коши. Для этого вначале умножим уравнение (10.1.20) на Ψ_{∞} и сделаем замену $\bar{p} = \Psi_{\infty} p'$, тогда получим уравнение

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \bar{p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \mu_{\infty} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2}, \quad (10.1.21)$$

Сделаем далее замену Коула-Хопфа [II.56]

$$\bar{p} = -2\mu_{\infty} \frac{\partial \ln \eta}{\partial \xi} = -\frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$$

и преобразуем уравнение (10.1.21):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) - \frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = \mu_{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(-\frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) - \frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = \mu_{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^3 \right) = \mu_{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \right),$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} - \frac{2\mu_{\infty}}{\eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^3 \right) = \mu_{\infty} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\eta^3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{2}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right).$$

Подчеркнутые одинаковым образом слагаемые взаимно сокращаются, в результате имеем

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} = \mu_{\infty} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)}{\partial \xi} = \mu_{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right).$$

Интегрируя последнее уравнение по ξ и умножая на \mathfrak{R} , имеем линейное параболическое уравнение теплопроводности [III.26-31]

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} = \mu_{\infty} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2}.$$

При этом начальное условие преобразуется к виду

$$\mathfrak{R}(x, 0) = \exp \left[-\frac{1}{2\mu_{\infty}} \int_0^{\xi} \tilde{\rho}_0(\zeta) d\zeta \right].$$

Решение задачи Коши имеет вид, определяемый формулой Пуассона:

$$\mathfrak{R}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_{\infty} \pi \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(\zeta, 0) \exp \left[-\frac{|\xi - \zeta|^2}{4\mu_{\infty} \tau} \right] d\zeta. \quad (10.1.22)$$

Другие типы решения уравнения Бюргера приведены в [II.56].

10.2. Автоволны

10.2.1 Волна эпидемии. Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова. Фазовая автоволна переключения

Рассмотрим динамику эпидемии, которая распространяется по принципу диффузии и передается при контактах с учетом того, что скорость выздоровления пропорциональна числу больных.

Пусть n — плотность больных, $N = \text{const}$ — плотность населения. Тогда для изменения числа больных в одномерном случае при условии того, что радиус индивидуальной активности субъекта R много меньше характерного размера системы L , имеем уравнение [II.45,55]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \rho n(N - n) - \frac{n}{\tau}, \quad (10.2.1)$$

где ρ — константа скорости передачи инфекции при контакте больной — здоровый, τ — время выздоровления, $D \sim R^2/\tau$ — коэффициент подвижности субъектов при случайном перемещении. Здесь τ — продолжительность шага при случайном перемещении. Введем безразмерную переменную $\eta = n/N$:

$$\frac{N \partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \rho N \eta \left(N - N \frac{\eta}{N} \right) - \frac{N \eta}{\tau},$$

откуда имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + pN\eta(1 - \eta) - \frac{\eta}{\tau}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta(\eta_0 - \eta), \quad (10.2.2)$$

где $\eta_0 = pN - \tau^{-1}$. Довольно часто нелинейные волновые процессы являются автомодельными. Условия существования автомодельных решений обсуждаются, например, в [III.8]. Частным случаем автомодельного решения является решение вида бегущей волны $f = f(x-ut)$. Будем разыскивать решение (10.2.2) в виде $\eta = \eta(\xi) = \eta(x-ut)$. При этом производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тогда получаем в переменной ξ обыкновенное! дифференциальное уравнение

$$D \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + u \frac{d\eta}{d\xi} + \eta(\eta_0 - \eta) = 0$$

Это уравнение легко может быть проанализировано на фазовой плоскости. Для этого представим его в виде пары уравнений первого порядка:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = -\frac{u}{D} \vartheta - \frac{\eta(\eta_0 - \eta)}{D}. \quad (10.2.3)$$

Затем находим стационарные решения системы (10.2.3): $\vartheta_{10} = 0$, $\eta_{10} = 0$ и $\vartheta_{20} = 0$, $\eta_{20} = \eta_0$. Линеаризуем систему (10.2.3) относительно стационарных решений, разыскивая решение в виде $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'$, $\eta = \eta_0 + \eta'$ и оставляя в уравнениях слагаемые только первой степени по ϑ' , η' .

Линеаризация системы (10.2.3) относительно первого стационарного состояния дает:

$$\begin{cases} \frac{d(\eta_{10} + \eta')}{d\xi} = \vartheta_{10} + \vartheta' \Rightarrow \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d(\vartheta_{10} + \vartheta')}{d\xi} = -\frac{u}{D} (\vartheta_{10} + \vartheta') - \frac{(\eta_{10} + \eta')(\eta_0 - (\eta_{10} + \eta'))}{D} \Rightarrow \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D} \vartheta' - \frac{\eta_0 \eta'}{D} \end{cases}$$

Далее найдем характеристическое уравнение полученной системы. Для этого его решение будем искать в виде $\vartheta' = Ae^{\lambda\xi}$, $\eta' = Be^{\lambda\xi}$.

$$\begin{cases} \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' - \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ae^{\lambda\xi} + \lambda Be^{\lambda\xi} = 0 \\ \lambda Ae^{\lambda\xi} + \frac{u}{D}Ae^{\lambda\xi} + \frac{\eta_0 B}{D}e^{\lambda\xi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda + \frac{u}{D} & \frac{\eta_0}{D} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lambda^2 + 2\frac{u}{D}\lambda + \frac{\eta_0}{D} = 0. \text{ Корни этого уравнения } \lambda_{1,2} = \frac{u}{D} \pm \sqrt{\frac{u^2}{D^2} - \frac{\eta_0}{D}} \text{ при усло-}$$

вии $u^2 \geq \eta_0 D$ всегда действительны и положительны — особая точка $(0,0)$ является неустойчивым узлом. Обратное условие приводит к бессмысленным решениям, соответствующим отрицательному числу больших.

Линеаризация системы (10.2.3) относительно второго стационарного состояния дает:

$$\begin{cases} \frac{d(\eta_{20} + \eta')}{d\xi} = \vartheta_{20} + \vartheta' \Rightarrow \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d(\vartheta_{20} + \vartheta')}{d\xi} = -\frac{u}{D}(\vartheta_{20} + \vartheta') - \frac{(\eta_{20} + \eta')(\eta_0 - (\eta_{20} + \eta'))}{D} \Rightarrow \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' + \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases}$$

Снова найдем характеристическое уравнение полученной системы. Решение будем искать в виде $\vartheta' = Ae^{\lambda\xi}$, $\eta' = Be^{\lambda\xi}$. Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' + \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ae^{\lambda\xi} + \lambda Be^{\lambda\xi} = 0 \\ \lambda Ae^{\lambda\xi} - \frac{u}{D}Ae^{\lambda\xi} - \frac{\eta_0 B}{D}e^{\lambda\xi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda - \frac{u}{D} & -\frac{\eta_0}{D} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Отсюда имеем } \lambda^2 + 2\frac{u}{D}\lambda - \frac{\eta_0}{D} = 0.$$

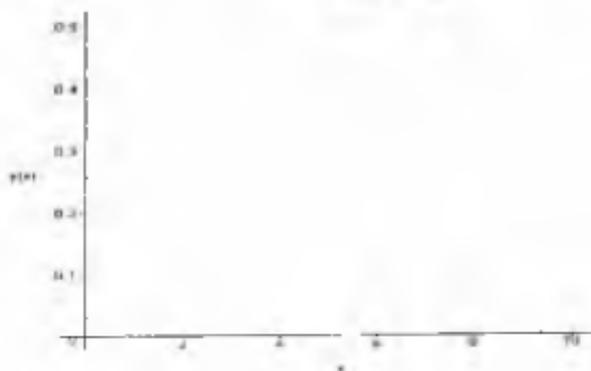


Рис. 10.2.1

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{u}{D} \pm \sqrt{\frac{u^2}{D^2} + \frac{\eta_0}{D}}$$

всегда действительны и имеют разные знаки – особая точка $(0, \eta_0)$ является седлом. Фазовый портрет системы приведен на рис.10.2.1.

10.2.2. Триггерная автоволна переключения

Покажем, что в неравновесной (температура электронов T_e много больше температуры ионов T_i) полностью ионизованной плазме, находящейся во внешнем ВЧ-электрическом поле с учетом джоулева тепловыделения, потерь энергии электронами при соударениях с ионами и электронной теплопроводности существует автоволна перехода из одного стационарного состояния в другое. Уравнение движения электрона во внешнем поле имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - m\nu_{ei}(\vec{v}_e - \vec{v}_i) \stackrel{m \ll M}{\approx} -e\vec{E} - m\nu_{ei}\vec{v}_e, \quad \Rightarrow v_e \gg v_i$$

Его решение в переменном поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ после выделения вещественной части дается выражением

$$\vec{v}_e = -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}(v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Баланс энергии в плазме с учетом джоулева тепловыделения, потерь энергии электронами при соударениях с ионами с коэффициентом δ и электронной теплопроводности можно записать в виде

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3} e\vec{v}_e \vec{E} - \delta \nu_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e. \quad (10.2.4)$$

Подставим в (10.2.4) выражение для скорости

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3} e \left[-\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}(v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] \vec{E}_0 \cos \omega t - \delta \nu_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e$$

и усредним полученное уравнение по периоду колебаний

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3} e \left[-\frac{e\vec{E}_0(v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)} \right] \vec{E}_0 \cos \omega t - \delta \nu_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e \right] dt.$$

Так как $2\omega > \delta v_{ei}$, то температура за это время не может существенно измениться, тогда получаем окончательно

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 \bar{E}_0^2}{3m(\omega^2 + v_{ei}^2)} - \delta v_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e \quad (10.2.5)$$

Введем безразмерные переменные вида $\theta = T_e/T_i$, $b = \omega/v_{ei}$, $E = E_0/E_p$, $r = (\delta v_{ei}/\chi_e)x$, $\tau = \delta v_{ei}t$, где $E_p^2 = (3T_i m/e^2) \delta(\omega^2 + v_{ei}^2)$ - плазменное поле, тогда получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \theta^{-3/2} \frac{E_0^2 \theta^3}{b^2 \theta^3 + 1} - (\theta - 1) + \Delta \theta. \quad (10.2.6)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $\theta = \theta(r-ct)$, тогда приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-c \frac{d\theta}{dt} = \theta^{-3/2} \frac{E_0^2 \theta^3}{b^2 \theta^3 + 1} - (\theta - 1) + \frac{d^2 \theta}{dx^2} = f(\theta) + \frac{d^2 \theta}{dx^2}, \quad (10.2.7)$$

у которого на фазовой плоскости есть три особых точки: $(\theta_1, 0)$ и $(\theta_3, 0)$ - седла, а $(\theta_2, 0)$ - неустойчивый узел или фокус: $p^2 - cp + f(\theta_i) = 0$, $i = 1; 2; 3$. $f(\theta_1) < 0$, $f(\theta_2) > 0$, $f(\theta_3) < 0$. Ясно, что при определенных условиях существует фазовая траектория, идущая из седла в седло, которой соответствует волна перехода из одного стационарного состояния в другое. Пренебрегая в зоне интенсивного тепловыделения нестационарными

слагаемыми, получим $\frac{d^2 \theta}{dx^2} + f(\theta) = 0$. откуда после интегрирования

$$\text{имеем: } \frac{d\theta}{dx} \Big|_u + \left[2 \int f(\theta) d\theta \right]^{-1/2} = \frac{d\theta}{dx} \Big|_d, \text{ где } (\theta) = (\theta_d, \theta_u), \text{ индексы } u \text{ и } d$$

обозначают нижнюю и верхнюю границы зоны интенсивного тепловыделения. Основной поток тепла идет на нагрев плазмы перед этой зоной, поэтому $(\theta_r)_d > (\theta_r)_u$. В области перед фронтом $f(\theta)$ мало и

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dx^2},$$

откуда в системе отсчета, движущейся со скоростью c , получаем:

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_d = c(\theta_d - \theta_1).$$

Таким образом,

$$c = \left(2 \int f(\theta) d\theta \right)^{1/2} / (\theta_d - \theta_1).$$

Нетрудно видеть, что структура фазовой плоскости зависит от величины электрического поля: при $E = E^*$, где E^* следует из условия $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta = 0$,

скорость автоволны равна нулю (в силу того, что вне зоны тепловыделения $f(\theta) \sim 0$, θ_d и θ_0 заменены на θ_1 и θ_2). При меньших полях автоволна является волной гашения, при больших – зажигания. Состояние θ_1 при $E > E^*$ очевидно метастабильно и неустойчиво по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри нее возник достаточно крупный зародыш фазы θ_2 , то он начнет расти и в результате вся плазма перейдет в наиболее устойчивое состояние благодаря распространению *триггерной автоволны перехода* [Л.19]. Заметим, что уравнение, описывающее тепловую динамику плазмы, может быть переписано в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\delta F[\Phi(\theta_1)]}{\delta \theta(r, t)},$$

где

$$F[\Phi(\theta)] = \int \left(\Phi(\theta(r)) + \frac{(\nabla\theta)^2}{2} \right) dr, \quad \Phi(\theta) = - \int_1^{\theta} f(z) dz.$$

Поэтому критический зародыш – абсолютно неустойчивое образование, сколь угодно малое возмущение формы которого приводит к его росту или гибели, описывается уравнением $d\Phi[\theta]/d\theta(r, t) = 0$ или в явном виде: $f(\theta(r)) + \Delta\theta = 0$. Полагая, с учетом симметрии задачи, его сферическим, получаем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} + f(\theta) = 0$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \theta_1.$$

В большом критическом зародыше падение температуры происходит в

узом слое, ширина которого много меньше критического радиуса, поэтому он удовлетворяет уравнению $\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r_c} \frac{d\theta}{dr} + f(\theta) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\theta(r) \rightarrow \theta_1$ при $r \rightarrow \infty$. Из сравнения этой системы с уравнением автоволны перехода

получаем: $r_c = 2/c$. Оценка интеграла $\int_{\theta_1}^{\theta_0} f(\theta) d\theta$ с учетом определения E^* и

явного вида функции f дает $\int_{\theta_1}^{\theta_0} f(\theta) d\theta = (E^2 + E^{*2}) \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{\theta^{3/2} d\theta}{b^2 \theta^3 + 1}$, откуда

скорость c и радиус критического зародыша равны $c = \frac{(E^2 - E^{*2})^{1/2}}{b^{1/6}}$,

$$r_c = 2b^{1/6} (E^2 - E^{*2})^{1/2}.$$

10.3. Солитоны

• Уравнение Кортевега – де Вриза

Рассмотрим уравнения, описывающие так называемую ионно-звуковую волну, бегущую в плазме по тяжелой (ионной) компоненте, полагая, что концентрация ионов равна концентрации электронов $n_e = n_i$. Они включают в себя уравнения непрерывности и движения для ионов и уравнение Пуассона для потенциала электрического поля [II.58]. Мы полагаем, что электроны движутся настолько быстро, что успевают отслеживать движение ионов, находясь с ними в равновесии, так что концентрацию электронов можно описать распределением Больцмана в электрическом поле с потенциальной энергией $U = -e\phi$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = eE - \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} & \begin{matrix} E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \Pi_i = n_i k_B T_i \end{matrix} & - \frac{e}{M} \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_B T_i \frac{\partial n_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0, & (10.3.1) \\ \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi(-e)(n_e - n_i) & \begin{matrix} E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \end{matrix} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e \left[n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) - n_i \right] \end{cases}$$

Стационарные решения этой системы $\phi = \phi_0 = 0$, $n_i = n_0$, $v_i = 0$. Линеаризуем

систему (10.3.1) относительно этих значений, разыскивая решения в виде $n_i = n_0 + n_i'$, $v_i = v_i'$, $\phi = \phi'$, где штрихованные величины первого порядка малости. Тогда получим дисперсионное соотношение

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \phi'}{\partial x} - k_B T_i \frac{\partial n_i'}{\partial x}, \quad \frac{\partial n_i'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_i'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} = 4\pi e \left[n_0 \frac{e\phi'}{k_B T_e} - n_i' \right] \exp(i\omega t + ikx) \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k_B (T_e + T_i)}{M}}.$$

Так как обычно температура ионов много меньше температуры электронов $T_i \ll T_e$, то последним слагаемым в первом уравнении системы (10.3.1) можно пренебречь. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{x}{r_D} = x \sqrt{\frac{4\pi en_0}{k_B T_e}}, \quad t = \omega_p t = t \sqrt{\frac{4\pi en_0}{M}}, \quad \phi = \frac{e\phi}{k_B T_e}, \quad n_i = \frac{n_i}{n_0}, \quad v_i = \frac{v_i}{v_{Te}} = v_i' \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}},$$

тогда после приведения имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i' \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^{\phi} - n. \quad (10.3.2)$$

Будем искать решение системы (10.3.2), разыскивая его в виде разложения по малому параметру:

$$v_i = \varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)} + \dots,$$

$$n_i = 1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)} + \dots,$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots$$

и вводя переменные

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Подставляя эти разложения в (10.3.2), получаем

$$\begin{cases} \varepsilon^{3/2} \left[-\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \varepsilon^{5/2} \left[\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{e}{M} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} \right] = 0, \\ \varepsilon^{3/2} \left[-\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \varepsilon^{5/2} \left[\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_i^{(2)} + n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} \right] = 0, \\ \varepsilon^1 (n_i^{(1)} - \phi^{(1)}) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + n_i^{(2)} - \phi^{(2)} \right) = 0. \end{cases}$$

Выражения в каждой из этих скобок по отдельности должны обращаться в ноль, поскольку представляют собой различные функции переменных ξ и τ . Поэтому получаем

$$\epsilon^1 : n_1^{(1)} = \phi^{(1)},$$

$$\epsilon^{3/2} : \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi}; \frac{\partial n_1^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial n_1^{(1)}}{\partial \xi} \xrightarrow{v_1^{(1)}|_{\xi \rightarrow 0} = 0} v_1^{(1)} = n_1^{(1)} = \phi^{(1)}.$$

$$\epsilon^{5/2} : \frac{\partial n_1^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_1^{(2)} + n_1^{(1)} v_1^{(1)})}{\partial \xi} - \frac{\partial n_1^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} + v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi}$$

$$n_1^{(2)} = \phi^{(2)} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n_1^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi^{(1)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} + v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (n_1^{(1)} v_1^{(1)})}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow$$

$$v_1^{(1)} = n_1^{(1)} = \phi^{(1)} \Rightarrow \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 v_1^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^{(1)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} + v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (v_1^{(1)} v_1^{(1)})}{\partial \xi} = 0.$$

Собирая слагаемые, приходим к уравнению Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \tau} + v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 v_1^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0. \quad (10.3.3)$$

• **Решение вида бегущей волны $z = x - wt$**

Обоснование предположения о том, что уравнение (10.3.2) имеет решение подобного вида достаточно прозрачно. С одной стороны, нелинейное слагаемое в (10.3.3) отвечает за опрокидывание волны. Однако

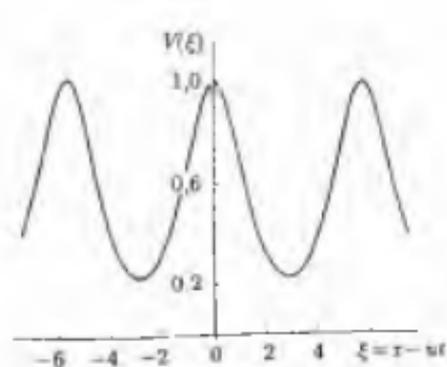


Рис 10.3.1

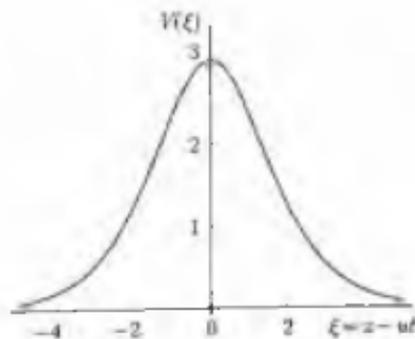


Рис 10.3.2

этот процесс сопровождается накоплением на фронте высоких гармоник. С другой стороны, дисперсионное соотношение для уравнения (10.3.2) (в исходной СК) имеет вид $\omega = u_{S1}k - \beta k^3$. Из этого соотношения видно, что и фазовая и групповая скорости высших гармоник, начиная с некоторых критических значений, уменьшаются с ростом k . В силу этого нелинейное укручение фронта может компенсироваться дисперсионным расплыванием волны. В результате имеем уравнение, которое может быть один раз проинтегрировано [1.2, II.23,25]:

$$\beta \frac{d^3 v_i'}{dz^3} + v_i' \frac{dv_i'}{dz} - w \frac{dv_i'}{dz} = 0 \Rightarrow \beta \frac{d^2 v_i'}{dz^2} + \frac{v_i'^2}{2} - w v_i' = C_1.$$

Умножим это уравнение на $\frac{dv_i'}{dz}$ и проинтегрируем еще раз:

$$\beta \frac{dv_i'}{dz} \frac{d^2 v_i'}{dz^2} + \frac{dv_i'}{dz} \frac{v_i'^2}{2} - w \frac{dv_i'}{dz} v_i' = C_1 \frac{dv_i'}{dz} \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{dv_i'^3}{dz} - \frac{w}{2} \frac{dv_i'^2}{dz} - C_1 \frac{dv_i'}{dz} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{2} \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 + \frac{v_i'^3}{6} - \frac{w v_i'^2}{2} - C_1 v_i' = C_2 \Rightarrow 3\beta \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 = -v_i'^3 + 3w v_i'^2 + 6C_1 v_i' + 3C_2 \quad \text{[1], с. 138}$$

$$\stackrel{\text{[1], с. 138}}{\Rightarrow} \stackrel{\text{1 способ}}{\Rightarrow} 3\beta \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 = (m_1 - v_i')(m_2 - v_i')(m_3 - v_i') = \Phi(v_i').$$

Правая часть последнего уравнения положительна, а следовательно, и левая. Таким образом, из ограниченности решения при $\beta > 0$ для колебаний

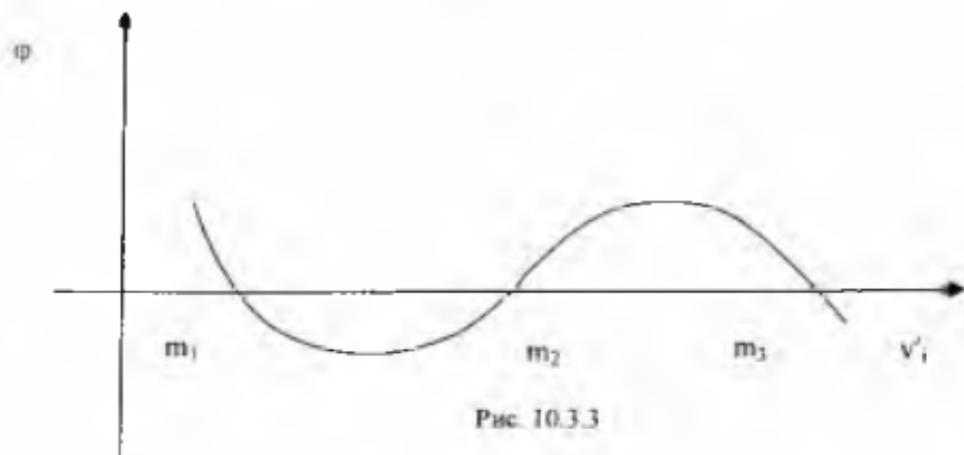


Рис. 10.3.3

конечной амплитуды v_i' должна быть ограничена областью $m_2 \leq v_i' \leq m_3$, т.е. должно быть по крайней мере два действительных корня, и, значит, три, так как все коэффициенты функции $\Phi(v_i')$ действительны ([III.19]) (график $\Phi(v_i')$ приведен на рис. 10.3.3). Связь w и констант m_i имеет вид ([III.19], с. 139): $w = (m_1 + m_2 + m_3)/3$.

Пусть $m_1 > m_2 \geq m_3$, причем $m_1 \geq w \geq m_2$.

1. Если $m_2 = m_3$, тогда получаем

$$\begin{aligned} 3\Phi\left(\frac{dv_i'}{dz}\right)^2 &= (m_1 - v_i')^2 (m_2 - v_i')^2 \Rightarrow \frac{dv_i'}{v_i' \sqrt{m_1 - m_2 - v_i'}} = \frac{dz}{\sqrt{3\beta}} \stackrel{[2], [192.11]}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{[2], [192.11]}{\Rightarrow} -\frac{2}{\sqrt{m_1 - m_2}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{m_1 - m_2 - v_i'}}{\sqrt{m_1 - m_2}} = \frac{z}{\sqrt{3\beta}} \Rightarrow v_i' = \frac{m_1 - m_2}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{12\beta}} z\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_i' = m_2 + (m_1 - m_2) \operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{12\beta}} z\right). \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

Скорость этого возмущения, называемого *солитоном* (рис. 10.3.2), [I.1,2; II.19,23] (solitary – уединенный) равна

$$w = \frac{m_1 - m_3}{3} + m_2.$$

2. Если $m_2 > m_3$, тогда получаем решение в виде так называемых *кноидальных волн*, рис. 10.3.1. Процедура его получения такова:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv_i'}{dz}\right)^2 &= -\frac{1}{3\beta} (v_i' - m_1)(v_i' - m_2)(v_i' - m_3) \stackrel{-w, v_i' - m_1}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{-w, v_i' - m_3}{\Rightarrow} \frac{z}{\sqrt{3\beta}} \left(\frac{dw_i'}{d\zeta}\right)^2 = w_i' (m_3 - m_2 - w_i')(m_3 - m_1 - w_i') \stackrel{w_i' = (m_1 - m_2)h^2}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{w_i' = (m_3 - m_1)h^2}{\Rightarrow} \frac{z}{\sqrt{3\beta}} \left(\frac{dv_i'}{d\zeta}\right)^2 = (m_3 - m_1)(1 - v^2)(1 - k^2 v^2). \end{aligned}$$

Последнее уравнение – это уравнение для эллиптических функций Якоби [III.18,24]. Поэтому

$$v = \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{m_3 - m_1} \zeta, \sqrt{\frac{m_2 - m_2}{m_3 - m_1}} \right] \Rightarrow v_1' = m_3 - (m_3 - m_2) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{m_3 - m_1} \frac{z}{\sqrt{3\beta}}, \sqrt{\frac{m_3 - m_2}{m_3 - m_1}} \right]. \quad (10.3.5)$$

Период и скорость этой волны определяются соотношениями [II.23]

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{12\beta}{m_1 - m_2}} \sigma K(\sigma), \quad w = m_3 + \frac{2(m_1 - m_2)}{3} \frac{2 - \sigma^2}{\sigma^2}, \quad \text{а } K(\sigma) - \text{ полный}$$

эллиптический интеграл первого рода [III.18,24].

11. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

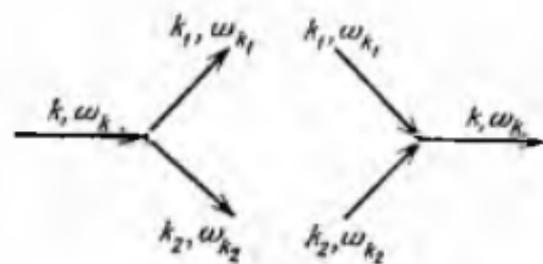


Рис. 11.1.1

Пусть в среде с дисперсией и нелинейностью распространяются волны с $\omega = \omega_j$ и $k_j = k(\omega_j)$. В результате взаимодействия из-за нелинейности в среде возникает волна с частотой $\omega_3 = \sum_{j=1}^2 \omega_j$ и волновым

вектором $\vec{k}_3 = \sum_{j=1}^2 \vec{k}_j$. Амплитуда этой волны останется малой, если ω_1 и

\vec{k}_1 не удовлетворяют дисперсионному соотношению $\omega_1 \neq \omega(k_1)$, и нарастает, если $\omega_1 = \omega(k_1)$ (взаимодействие – резонансное). Для наиболее важного случая трех волн условие резонансного взаимодействия (условия синхронизма) [1.2] (рис. 11.1.1) приобретают вид

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3. \quad (11.1.1)$$

Рассмотрим общую схему анализа взаимодействия волн, считая волны одномерными. Пусть некоторое поле в слабонелинейной среде описывается системой уравнений вида

$$\hat{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \hat{C} \vec{u} = \varepsilon f \left(\vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right), \quad (11.1.2)$$

где \vec{u} – 3-мерный вектор, $\varepsilon \ll 1$. При $\varepsilon = 0$ поле в среде является суперпозицией гармонических волн

$$\vec{u} = a \vec{\psi} e^{i\omega t - ik(\omega)x} + \text{к.с.}, \quad (11.1.3)$$

где a - комплексная амплитуда, зависящая от начальных и граничных условий, $\vec{\psi}$ - поляризационный вектор, определяемый системой

$$(\omega \hat{A} - ik \hat{B} + \hat{C}) \vec{\psi} = 0, \quad (11.1.4)$$

а ω и k связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = \det[\omega \hat{A} - k \hat{B} - i \hat{C}] = 0 \quad (11.1.5)$$

Одну из компонент вектора $\vec{\psi}$ всегда можно положить равной единице, тогда остальные находятся из системы (11.1.5). Будем рассматривать взаимодействие конечного числа волн вида (11.1.3), для которых выполнены условия синхронизма (то, что условия синхронизма выполнены лишь для конечного числа волн, означает, что система обладает дисперсией).

При $\epsilon \neq 0$ решение (11.1.2) будем искать в виде

$$\vec{u}(x, t) = \sum_j a_j(\epsilon x, \epsilon t) \vec{\psi}(\omega_j, k_j) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с.} + \epsilon \vec{w}(x, t) \quad (11.1.6)$$

заранее предполагая, что амплитуда медленно меняется в пространстве и во времени. Для того, чтобы решение (11.1.6) было справедливым, надо, чтобы поправка $\vec{w}(x, t)$ не нарастала со временем. Подставляя решение в (11.1.2), получим уравнение для w :

$$\hat{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \hat{C} \vec{w} = \vec{g}(x, t), \quad (11.1.7)$$

где

$$\vec{g}(x, t) = \sum_j e^{i\omega_j t - ik_j x} \left[\hat{A} \vec{u}(\omega_j, k_j) \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial t} + \hat{B} \vec{u}(\omega_j, k_j) \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial x} \right] + \text{к.с.} + \epsilon \left(\sum_j a_j \vec{\psi}(\omega_j, k_j) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с.} \right).$$

Чтобы функция $\vec{w}(x, t)$ при любых x, t оставалась ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы в правой части системы (11.1.7) отсутствовали резонансные члены, т. е. правая часть должна быть ортогональна собственным функциям линейной задачи. Так как нелинейность полиномиальна, правые части (11.1.7) являются периодическими по x и t и их можно представить в виде ряда Фурье:

$$\vec{g}(x, t) = \sum_{r=1}^N \vec{F}_r e^{i\omega_r t - ik_r x} + \text{к.с.}, \quad \vec{F}_r = \frac{\omega_r k_r}{4\pi^2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k_r}} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_r}} \vec{g}(x, t) e^{-i\omega_r t + ik_r x} dx dt. \quad (11.1.8)$$

Функции $\vec{w}(x, t)$ также представляются в виде

$$\bar{w}(x, t) = \sum_{r=1}^N \bar{W}_r e^{i\omega_r t - ik_r x} + \text{к.с.} \quad (11.1.9)$$

После подстановки (11.1.8) и (11.1.9) в (11.1.7) получим, приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, неоднородную систему алгебраических уравнений для определения \bar{W} :

$(i\omega_r \hat{A} - ik_r \hat{B} + \hat{C}) \bar{W}_r = \bar{F}_r$, откуда 1-компонента вектора \bar{W} записывается в

виде $W_l(\omega_r, k_r) = -\frac{i}{D(\omega_r, k_r)} \sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r)$, где D_{jl} - алгебраические дополнения матрицы D . Если конец вектора (ω_r, k_r) не лежит на дисперсионной

кривой, т. е. это не собственная волна системы, то $\dot{D}(\omega_r, k_r) \neq 0$ и добавок ограничен. В противном случае \bar{W} будет секулярно нарастать. Чтобы этого не было, надо изъять из уравнения для добавка резонансный член. Математически это сводится к выполнению равенства $\sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r) = 0$. Так как

$D_{jl} = \gamma \bar{\zeta}_j^* \bar{\psi}_l D_{jl}$, где $\bar{\zeta}_j^*$ - собственные функции сопряженной с (11.1.4) системы, последнее условие можно записать в виде $\sum_{j=1}^N \bar{\zeta}_j^* F_j(\omega_r, k_r) = 0$. Это и

есть условие ортогональности. Отсюда с учетом (11.1.8) и (11.1.7) для комплексных амплитуд a_j получим

$$\left(\bar{\zeta}_j, \hat{A} \bar{\psi} \right) \frac{\partial a_j}{\partial t} + \left(\bar{\zeta}_j, \hat{B} \bar{\psi} \right) \frac{\partial a_j}{\partial x} = \left(\bar{\zeta}_j, \langle \bar{f}(\omega_j, k_j) \rangle \right),$$

где

$$\langle \bar{f}(\omega_j, k_j) \rangle = \frac{\omega k}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega_j, k_j) e^{-i\omega t + ikx} dx dt.$$

Используя соотношения

$$\frac{\left(\bar{\zeta}_j, \hat{B} \bar{\psi} \right)}{\left(\bar{\zeta}_j, \hat{A} \bar{\psi} \right)} = -\frac{\partial D}{\partial k} = \frac{d\omega}{dk} = v_G, \quad \frac{\zeta_l}{\left(\bar{\zeta}_j, \hat{A} \bar{\psi} \right)} = \frac{D_{jl}}{\psi_k \frac{\partial D}{\partial \omega}}$$

запишем последнее выражение в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_G(\omega_j, k_j) \frac{\partial a_j}{\partial x} = -\frac{1}{\psi_j} \frac{\partial D}{\partial \omega} \sum_l D_l \langle f_l \rangle \quad (11.1.10)$$

Это и есть искомые уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих квазигармонических волн.

1. Взаимодействие электромагнитных волн в среде с нелинейной намагниченностью.

Уравнения Максвелла с учетом связи $D = E + 4\pi P$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial x} &= -\mu j(E), \\ \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial B(H)}{\partial t}, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \chi E = 0. \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

Дисперсионное соотношение для (11.1.11), получаемое путем отбрасывания нелинейных слагаемых и поиска решения в виде $\sim e^{i\omega t - ikx}$, имеет вид:

$$D(\omega, k) = \begin{vmatrix} \omega & -ck & 4\pi\omega & 0 \\ -ck & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2 \chi & 0 & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} = \omega^2(\omega^2 - \epsilon\omega_0^2) - c^2 k^2(\omega^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Положим, в соответствии с приведенной выше теорией, $\psi_E = 1$. Тогда

$$\psi_H = \frac{1}{D_{11}} \begin{vmatrix} ck & 0 & \omega \\ 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2 \chi & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} = \frac{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)ck}{D_{11}}, \quad \psi_P = \frac{\omega_0^2 \chi}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \psi_R = \frac{i\omega\omega_0^2 \chi}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Будем искать решение в виде суммы трех волн

$$E, H, P, R = \sum_j a_j(\epsilon x, \epsilon t) \psi_{E,H,P,R}(\omega_j, k_j) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с.} + \epsilon \bar{w}(x, t),$$

где частоты взаимодействующих волн и волновые числа удовлетворяют условию (11.1.1) (рис. 11.3.2). Уравнения для амплитуд имеют вид

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial a_j}{\partial x} = \left(\psi_E \frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \sum_l D_l \langle f_l \rangle = f_j, \quad (11.1.12)$$

где

$$f_j = -D_{11} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \bigg|_{\omega_j, k_1} \left\langle \left\langle \sum_{j=1}^3 a_j e^{i\omega_j t - ik_j x} + \kappa c \right\rangle e^{-i\omega_j t + ik_j x} \right\rangle -$$

$$- D_{21} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \bigg|_{\omega_j, k_2} \left\langle \frac{\partial B}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^3 \psi(\omega_k, k_k) a_k e^{i\omega_k t - ik_k x} + \kappa c \right) e^{-i\omega_j t + ik_j x} \right\rangle,$$

$$D_{21} = -ck(\omega^2 - \omega_0^2), \quad \frac{\partial D}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\pi\chi\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Отметим, что если условие (11.1.1) не выполняется, то правая часть уравнения (11.1.12) является быстроосциллирующей и в среднем за доста-

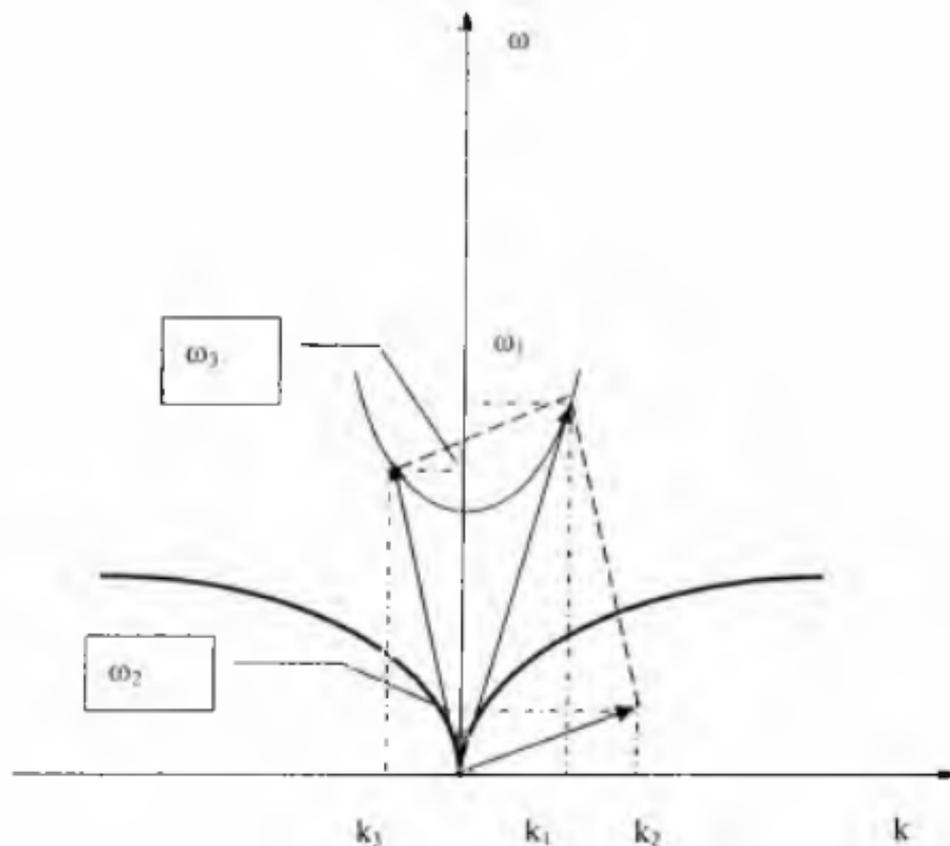


Рис. 11.3.2

точно большой промежуток времени дает вклад в уравнение следующего порядка малости. С учетом конкретного вида нелинейных зависимостей $j(E) = -(gE + GE^3)$ и $V(H) = \kappa H^2$ и наличия расстройек частоты и волнового числа $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega$, $k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k$ из (11.1.12) следуют уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = g_1 a_1 + \sigma_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = g_2 a_2 + \sigma_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = g_3 a_3 + \sigma_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} + i\zeta_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} \end{cases}$$

где $g_j = \frac{D_{11}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} \Big|_{\omega_j, k_j}$, $g, \sigma_j = \frac{D_{11}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} \Big|_{\omega_j, k_j}$, $G, \zeta_j = \frac{D_{21}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} \Big|_{\omega_j, k_j}$, κ .

$$\begin{aligned} & C_{v\omega\tau_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{S\omega}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{S\omega}^2 \Psi_\infty \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \mu_\infty \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) + \\ & + C_{v_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_{S_0}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{S_0}^2 \Psi_0 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

12. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто встречаются в различных приложениях. Существование этих решений обычно связано с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и растяжения сжатия.

• *Бегущие волны.* Решениями типа бегущей волны называются решения вида $u(x, t) = u(z) = u(kx - \omega t)$. Поиск решения этого типа проводится его прямой подстановкой в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} & F \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots \right) = 0, \quad \begin{matrix} u = u(kx - \omega t) \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\omega \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow k \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \\ & \Rightarrow F \left(u, -\omega \frac{du}{dz}, k \frac{du}{dz}, \omega^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, k^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, -k\omega \frac{d^2 u}{dz^2}, \dots \right) = 0. \end{aligned}$$

Мы, в частности, видели, что к рассмотренному здесь типу относятся уравнения, анализировавшиеся выше.

• Автомодельные волны

1. *Автомодельные решения.* Автомодельными называют решения вида $u(x, t) = t^\alpha U(\xi) = t^\alpha U(xt^\beta)$. Существование этих решений связано с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований растяжения сжатия (подобия) [III.8]. Автомодельные решения существуют, если растяжение переменных по правилу $t = C\tau$, $x = C^k\xi$, $u = C^m w$, где $C > 0$ – произвольная константа при соответствующем выборе k и m эквивалентно тождественному преобразованию:

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F\left(\xi, \tau, w, \frac{\partial w}{\partial \tau}, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi}, \dots\right) = 0. \quad (12.1.1)$$

В этом случае, если функция $u = \Phi(x, t)$ является решением первого из уравнений (12.1.1), то функция $w = \Psi(\xi, \tau)$ является решением второго из уравнений (12.1.1). Свяжем α и β с k и m

$$w = \Psi(\xi, \tau) \stackrel{u(x,t) = t^\alpha U(\xi)}{=} t^\alpha U(\xi \tau^\beta) \stackrel{t=C\tau, x=C^k\xi, u=C^m w}{\Rightarrow} u(x, t) = C^{m-\alpha} t^\alpha U(C^{-k-\beta} x t^\beta). \quad (12.1.2)$$

Последнее выражение удовлетворяет первому из уравнений (12.1.1). Требуя, чтобы (12.1.2) совпадало с исходным $\forall C$, получаем $\alpha = m$, $\beta = -k$. После этого подстановка автомодельного решения (12.1.1) в первое из уравнений (12.1.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для $U(\xi)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu u^\sigma. \quad (12.1.4)$$

Исходное преобразование приводит нас к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \kappa \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^\gamma \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \mu w^\sigma \stackrel{t=C\tau, x=C^k\xi, u=C^m w}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow C^{m-1} \frac{\partial(C^{-m}u)}{\partial(tC^{-1})} = \kappa C^{m-2k+m\gamma} \frac{\partial}{\partial(xC^{-k})} \left((C^{-m}u)^\gamma \frac{\partial(C^{-m}u)}{\partial(xC^{-k})} \right) + \mu C^{m\sigma} (C^{-m}u).$$

Приравнивание степеней C (чтобы получившееся уравнение совпало с исходным), дает уравнения $m-1 = m(\gamma+1) - 2k = m\sigma$, имеющие единственное решение $k = (1-\sigma)^{-1}$; $m = (\sigma - \gamma - 1)2^{-1}(1-\sigma)^{-1}$. Далее находим вид авторекуррентного решения $u = t^m U(xt^k)$ и подставляем в уравнение для u :

$$\kappa \frac{d}{d\zeta} \left(w^\gamma \frac{dw}{d\zeta} \right) + \mu w \frac{dw}{d\zeta} + \frac{\zeta}{2} \frac{dw}{d\zeta} + \frac{w}{2} = 0, \quad (12.1.5)$$

которое может быть решено стандартными методами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основная литература

1. Карлов, Н. В. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. – М.: Физматлит, 2001. – 496 с.
2. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
3. Трубецков, Д. И. Линейные колебания и волны / Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнёв. – М.: Физматлит, 2001. – 416 с.
4. Кузнецов, А. П. Линейные колебания и волны: Сб. задач. / А. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнёв. – М.: Физматлит, 2001. – 128 с.
5. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 586 с.
6. Алешкевич, В. А. Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики) / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваяев. – М.: Физический факультет МГУ. 2001. – 144 с.
7. Бутенин, Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
8. Ланда, П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П. С. Ланда. – М.: Наука, 1980. – 245 с.
9. Ланда, П. С. Нелинейные колебания и волны / П. С. Ланда. – М.: Физматлит, 1997. – 496 с.
10. Льюиселл, У. Связанные и параметрические колебания в электронике / У. Льюиселл. – М.: ИЛ, 1963. – 352 с.
11. Неймарк, Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Ю. И. Неймарк. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
12. Неймарк, Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
13. Ланда, П. С. Автоколебания в распределенных системах / П. С. Ланда. – М.: Наука, 1983. – 413 с.
14. Кузнецов А. П. Нелинейные колебания: учеб. пособие для вузов / А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. – М.: Физматлит, 2005. – 346 с.
15. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 675 с.
16. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 378 с.
17. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М.: Наука, 1979. – 378 с.
18. Васильев, В. А. Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. – М.: Наука, 1987 – 287 с.

19. Исакович, М. А. Общая акустика / М. А. Исакович. - М.: Наука, 1973. - 496 с.

II. Дополнительная литература

1. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. - М.: Наука, 1964. - 437 с.
2. Ден-Гартог, А. Теория колебаний / А. Ден-Гартог. - М.: Гостехиздат, 1942. - 429 с.
3. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, - М.: Наука, 1974. - 504 с.
4. Заславский, Г. М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. - М.: Наука, 1988. - 368 с.
5. Горелик, Г. С. Колебания и волны / Г. С. Горелик. - Физматгиз, 1959. 549 с
6. Конторович, М. И. Нелинейные колебания в радиотехнике / М. И. Конторович. - М.: Советское радио, 1973. 320 с.
7. Мандельштам, Л. И. Лекции по колебаниям / Л. И. Мандельштам. - М.: изд-во АН СССР, 1955. - 124 с.
8. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е.А. Леонтович. - М.: Наука, 1976. - 496 с.
9. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем / О. Блэкьер. - М.: Мир, 1969. - 400 с.
10. Блекман, И. И. Синхронизация в природе и технике / И. И. Блекман. М.: Наука, 1981. - 351 с.
11. Заславский, Г. М. Стохастичность динамических систем / Г. М. Заславский. - М.: Наука, 1984. - 271 с.
12. Каплан, А. Е. Параметрические генераторы и делители частоты / А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов. - М.: Сов. Радио, 1966. - 334 с.
13. Лихтенберг, А. Либерман. Регулярная и хаотическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. - М.: Мир, 1984 - 324 с
14. Найфэ, А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. - М.: Мир, 1984. - 535 с.
15. Журавлев, В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. - М.: Наука, 1988. - 328 с.
16. Анищенко, В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. - М.: Наука, 1990. - 315 с.
17. Капранов, М. В. Теория колебаний в радиотехнике / М. В. Капранов, В. Н. Кулешев, Г. М. Уткин. - М.: Наука, 1984. - 319 с.
18. Владимиров, С. Н. Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем / С. Н. Владимиров, А. С. Майдановский, С. С. Новиков. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1993. - 203 с.

19. Мун, Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Ф. Мун. - М.: Мир, 1990. - 312 с
20. Кузнецов, С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. - М.: Физматлит, 2001. - 296 с.
21. Бетчов, Р. Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. - М.: Мир, 1971. - 547 с.
22. Неймарк, Ю. И. Динамические модели теории управления / Ю. И. Неймарк, Н. Я. Коган, В. П. Савельев. - М.: Наука, 1985. - 378 с.
23. Вайнштейн, Л. А. Разделение частот в теории колебаний и волн / Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман. - М.: Наука, 1983. - 288 с.
24. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. - М.: Наука, 1979. - 278 с.
25. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. - М.: Наука, 1970. - 376 с.
26. Хединг, Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) / Дж. Хединг. - М.: Мир, 1965. - 291 с.
27. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. - М.: Наука, 1975. - 301 с.
28. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. - М.: Наука, 1980. - 347 с.
29. Сборник задач по теории колебаний. учеб. пособие / Под ред. Л.В. Постникова и В.И. Королева. - М.: Наука, 1978. - 198 с.
30. Гиппард, А. Физика колебаний / А. Гиппард. - М.: Высшая школа, 1985. - 367 с.
31. Эроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Д. Эроусмит, К. Плейс. - М.: Мир, 1986. - 234 с.
32. Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. - М.: Наука, 1990. - 102 с.
33. Качественная теория динамических систем второго порядка / [А. А. Андронов и др.] - М.: Наука, 1966. - 734 с.
34. Хаяси, Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси. - М.: Мир, 1968. - 213 с.
35. Смит, Дж. М. Модели в экологии / Дж. М. Смит. - М.: Мир, 1976. - 336 с.
36. Бломберген, Н. Нелинейная оптика / Н. Бломберген. - М.: Мир, 1966. - 501 с.
37. Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / В. И. Кляцкин. - М.: Наука, 2000. - 437 с.
38. Гаузе, Г. Ф. Борьба за существование / Г. Ф. Гаузе. - Москва-Ижевск: Изд. РХД, 2000. - 240 с.
39. Тода, М. Теория нелинейных решеток / М. Тода. - М.: Мир, 1986. - 247 с.

40. Вольтера, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтера. - М.: Мир. 1976. - 277 с.
41. Пригожин, И. От существующего к возникающему / И. Пригожин. - М.: Наука, 1985. - 278 с.
42. Ландау, Л. Д. Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - М.: Наука, 2001. - 649 с.
43. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - М.: Наука, 2001. - 243 с.
44. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - М.: Наука, 2001. - 732 с.
45. Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. - М.: Советское радио, 1977. - 324 с.
46. Крауфорд, Ф. Волны. / Ф. Крауфорд. - М.: Наука, 1974. - 411 с.
47. Бхатнагар, П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах / П. Бхатнагар. - М.: Мир, 1983. 136 с.
48. Лайтхилл, Дж. Волны в жидкостях / Дж. Лайтхилл - М.: Мир, 1981. - 403 с.
49. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. - М.: Наука, 1973. - 279 с.
50. Блохинцев, Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д. И. Блохинцев. - М. Наука, 1981. - 197 с.
51. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. М.: Мир, 1984. - 335 с.
52. Гинзбург, В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме / В. Л. Гинзбург. - М.: Наука. 1967. - 375 с.
53. Кринский, В. И. Автоволны / В. И. Кринский, А. С. Михайлов. - М.: Знание, 1984. - 256 с.
54. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. - М.: Мир, 1987. 347 с.
55. Свирижев, Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю. М. Свирижев. - М.: Наука, 1987. - 359 с.
56. Руденко, О. В. Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Солуян. - М.: Наука, 1975. - 234 с.
57. Бриллюэн, Л. Распространение волн в периодических структурах / Л. Бриллюэн, М. Пароди. - М.: ИЛ, 1959. - 409 с.
58. Карпман, В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В. И. Карпман. - М.: Наука, 1973. - 241 с.
59. Лэм, Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. М.: Мир, 1984. - 295 с.

III. Справочная литература

1. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
2. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. - М.: Наука, 1966. 278 с.
3. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. - 478 с.
4. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. 505 с.
5. Зайцев, В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2002. - 457 с.
6. Полянин, А. Д. Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. - М.: Физматлит, 2003. 376 с.
7. Зайцев, В. Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. - 416 с.
8. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, В. Ф. Журов. - М.: Физматлит, 2005. - 256 с.
9. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-ode.htm>.
10. Бабич, В. М. Линейные уравнения математической физики / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин. - М.: Наука, 1964. - 368 с.
11. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. - М.: Наука, 1977. 254 с.
12. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. - М.: Высшая школа, 1967. - 567 с.
13. Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. - Минск: Высшая школа, 1970. - 360 с.
14. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. - М.: Наука, 1970. - 512 с.
15. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
16. Олвер, Ф. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Ф. Олвер. - М.: Наука, 1989. - 639 с.
17. Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. - М.: Наука, 1983. - 352 с.
18. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

19. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. - М.: Наука, 1984. - 546 с.
20. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. С. Рыжик. - М.: Наука, 1975. - 1108 с.
21. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников, инженеров и учащихся втузов / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1984. - 832 с.
22. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. - М.: Наука, 1981. - 799 с.
23. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. - М.: Наука, 1981. - 767 с.
24. Янке, Е., Эмде, Ф., Леш, Ф. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. - М.: Наука, 1968. - 344 с.
25. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. - М.: Наука, 1973. - 228 с.
26. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. - М.: Наука, 1972. - 736 с.
27. Будаг, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будаг, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. - М.: Наука, 1980. - 688 с.
28. Владимиров, В. М. Уравнения математической физики / В. М. Владимиров. - М.: Наука, 2003. - 432 с.
29. Владимиров, В. М. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. М. Владимиров. - М.: Наука, 1982. - 256 с.
30. Карташев, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. - М.: Наука, 1980. - 288 с.
31. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. - М.: Наука, 1974. - 299 с.