

Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов

# ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

## Часть I

Самара  
2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Кафедра общей и теоретической физики

Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов

## ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Часть I

*Практикум  
для студентов специальности  
"Теоретическая физика"*

Издательство "Самарский университет"  
2003

Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
Самарского государственного университета

УДК 530.1

ББК 22.31

А 954

**Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В.** Теория перенормировок. Часть I: Практикум для студентов специальности "Теоретическая физика". Самара: Изд-во "Самарский университет" 2003. – 116 с.

Практикум содержит более 60 примеров и задач с указаниями и решениями по трем основным разделам спецкурса "Теория перенормировок": функциональные методы, перенормировка и ренормализационная группа. Он является первой частью учебного пособия "Теория перенормировок" вторая часть будет посвящена современным приложениям, третья часть будет содержать конспекты лекций.

Предназначен для студентов 4 и 5 курсов физического факультета специализации "Теоретическая физика".

УДК 530.1  
ББК 22.31

Рецензент      канд. физ.-мат. наук, проф. А.А. Бирюков

С      Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В., 2003

С      Изд-во "Самарский университет" 2003

# ВВЕДЕНИЕ

Во введении проясним качественно основную идею<sup>1</sup> перенормировки в теории квантованных полей (КТП).

## Перенормировка

Рассмотрим модель КТП, чей лагранжиан содержит некоторое количество свободных параметров: массы, заряды и т.д. Назовем их для простоты **константами связи**.

Чтобы получить из теории конечные предсказания, необходимо ввести **обрезание по частоте**, игнорируя поля с частотой выше некоторой фиксированной величины. Делается это после так называемого **поворота Вика** или замены  $t$  на  $i \cdot t$ . В евклидовом пространстве обрезание по частоте можно также понимать как обрезание по расстоянию. Мы хотим пренебречь флуктуациями полей на расстояниях меньше некоторого масштаба  $R$ . Поэтому наша теория содержит еще один параметр: масштаб обрезания  $R$ . Далее будем изменять параметры модели, не меняя их количество.

Константы связи трудно измерить непосредственно. Несмотря на то, что они имеют названия **масса**, **заряд** и т.д., эти параметры не те, что напрямую измеряются в столкновениях частиц в ускорителе. Действительно, если вы попытаетесь измерить, например, заряд электрона, сталкивая два электрона в ускорителе и наблюдая, как сильно они отталкиваются, а затем используете известную формулу для определения заряда, то ответ будет зависеть от импульсов электронов в системе центра масс. Другими словами, заряд будет зависеть от того, насколько "жестко" взаимодействуют электроны. То же самое относится к массе электрона, а также к другим кон-

---

<sup>1</sup>Во введении используется популярное объяснение Дж. Баезом "Перенормировка простыми словами" [12].

стантам связи в лагранжиане нашей теории. Они имеют **голое** значение – значение, которое появляется в лагранжиане, и **физическое** значение – значение, которое измеряется на эксперименте и должно получиться при вычислениях. **Физические** значения зависят от **голых** значений, обрезания по импульсу  $L$  и масштаба импульсов  $p$ .

Конечно, мы могли бы обоснованно использовать формулу для определения голых значений констант связи из эксперимента. Но не будем этого делать – будем использовать формулу, которая пренебрегает квантовыми эффектами, делающими физические значения отличными от голых! Будучи намеренно **наивными** здесь, мы, в действительности, оказались очень находчивыми, убедимся в этом далее.

Теперь мы можем сыграть в разные игры. Простейшая, самая ранняя исторически, игра следующая. Мы можем измерить физические константы связи при некотором масштабе импульсов  $p$  и определить, какие голые константы связи будут давать эти физические значения в предположении учета некоторого обрезания  $L$ . Затем мы можем попробовать перейти к пределу  $L \rightarrow 0$ , регулируя голые константы связи так, чтобы предсказываемые физические константы связи совпали с экспериментально определяемыми значениями. Если существует такой **непрерывный предел**, то теория не содержит масштаба кратчайшего расстояния. Это является очень важным, если мы считаем пространство-время непрерывным!

Эта игра называется **перенормировка**. Иногда вы выигрываете эту игру, иногда проигрываете.

Примечательно, что даже если голые константы связи равны **нулю**, соответствующие физические константы связи могут быть **ненулевыми**. Начинаете, например, с лагранжиана, в котором масса некоторой частицы равна нулю, а физическая масса (измеренная при некотором масштабе импульсов) мо-

жет оказаться ненулевой. В этом случае мы говорим, что частица **приобретает массу посредством взаимодействия с другими частицами**. Такого сорта вещи происходят часто. Это означает, что, для того чтобы удачно приспособить голые константы связи к экспериментально наблюдаемым физическим константам связи, необходимо начать с лагранжиана, содержащего достаточное количество голых констант связи. Таким образом, возможно, прежде чем начать игру в перенормировку, надо учесть некоторые дополнительные члены с голыми константами связи.

Если в игре возникает конечное число дополнительных членов, то теория "перенормируемая". Если необходимо бесконечно много дополнительных членов, то вы поднимаете в отчаянии руки и говорите, что теория "неперенормируема". Неперенормируемый лагранжиан, как монстр с головой гидры, требует добавления большего числа новых членов, чем вы добавляете.

Заметим: когда мы пробуем перейти к непрерывному пределу, то не волнуемся о том, являются ли голые константы бесконечными. Все, о чем мы беспокоимся, – согласуются ли предсказания нашей теории с экспериментальными данными? Если согласуются голые константы связи, говорим, что теория **конечна**. Но, в действительности, реалистичные теории таким прекрасным свойством обычно не обладают.

## **Ренормализационная группа**

Теперь поговорим о ренормализационной группе. Наме- ренно сделаем некоторые упрощения, граничащие с определенными неточностями, но не приводящие к каким-либо **ложным** заключениям.

Напомним, что мы рассматриваем модель КТП, описываемую лагранжианом с букетом констант связи в нем, – назва-

ли их **голыми** константами связи. Можно переписать все эти голые константы связи на листе и думать о них как о векторе – назовем его  $C$ . Но для проведения вычислений в данной теории необходим еще один параметр: мы должны игнорировать эффекты, происходящие на масштабах расстояний, меньших некоторого расстояния  $R$ , называемого **обрезанием**.

Теперь, начиная с заданных значений, мы можем вычислить **физические** константы связи при любом масштабе импульсов. Например, измеренный заряд электрона зависит от импульса, с которым мы сталкиваем два электрона. Иначе говоря, физические константы связи зависят от масштаба расстояний. Например, наблюдаемый заряд электрона зависит от расстояния, на котором он измеряется. Данные два способа представления эквивалентны, так как, используя  $\hbar$  и  $c$ , можно перейти от импульса к обратному расстоянию. Будем работать с расстоянием вместо импульса и введем расстояние  $R'$ , при котором измеряются физические константы связи.

Итак, если мы знаем **голую** константу связи  $C$  и параметр обрезания  $R$ , то мы можем вычислить **физическую** константу связи  $C'$  при любом масштабе расстояния  $R'$ . Коротко:

$$C' = f(C, R, R').$$

Теперь сыграем в игру **ренормализационная группа**. В этой игре мы фиксируем голые константы связи и параметр обрезания и наблюдаем, как физические константы связи  $C'$  изменяются при варьировании масштаба расстояния  $R'$ , при котором мы их измеряем. Забавно представить вращающуюся шкалу для регулировки масштаба расстояния  $R'$  и наблюдения за физическими константами связи  $C'$ , движущимися вокруг, как маленькая точка в  $n$ -мерном пространстве, где  $n$  есть число констант связи. Люди рисуют по этому поводу картинки и говорят про **бегущие константы связи** либо **ренормгрупповой поток**.

Заметим, что играть в эту игру мы можем вне зависимости от перенормируемости нашей теории. Ранее мы говорили о другой игре, называемой **перенормировкой**. Та игра строилась вокруг желания положить параметр обрезания  $R$  равным нулю. Для **перенормируемых** теорий игра идет прекрасно, для **неперенормируемых** теорий возникают путаница и беспорядок. Теперь же мы не будем устремлять  $R$  к нулю.

Что случится, если мы стартуем с неперенормируемой теорией и сыграем в **ренормализационную группу**? Наш лагранжиан будет содержать группы членов: некоторые весьма отвратительные, делающие теорию неперенормируемой, и некоторые хорошие, приводящие к перенормируемой теории, если мы выкинем первые отвратительные. Каждый из этих членов умножается на константу связи.

Теперь посмотрим на соответствующую **физическую** константу связи, если введем масштаб расстояний  $R'$ . При этом физические константы связи перед неприятными неперенормируемыми множителями становятся меньше и меньше, достигая нуля! На больших расстояниях неперенормируемые взаимодействия становятся неуместными!

Это невероятно важный факт, потому что он может объяснить, почему квантовая теория поля для описания нашего мира – стандартная модель (SM) – перенормируемая. Могут существовать неизвестные виды материи, квантовая гравитация на очень малых масштабах расстояний, возможно, пространство-время не является континуумом! Но если при больших масштабах мы предполагаем, что обычная квантовая теория поля над пространством-временем является разумным приближением к тому, что есть, тогда ренормгрупповой подход гарантирует нам, что при **больших** масштабах неперенормируемые взаимодействия выглядят очень слабыми. Это может объяснить почему гравитация так слаба. Если



интерпретировать квантовую гравитацию по теории возмущений как квантовую теорию поля в пространстве-времени, то она оказывается неперенормируемой. Если мы допустим, что гравитационная постоянная обоснованно большая около планковского масштаба, и проследим за ренормгрупповым потоком, то обнаружим, что она очень мала при макроскопических масштабах. На самом деле мы даже получаем правильный порядок величины. Но это не сюрприз: это простое волшебство размерного анализа.

Такого сорта идея восходит к Кеннету Вильсону, получившему Нобелевскую премию по физике в 1982 году за работу, сделанную к 1972 году по ренормализационной группе и исследованию критических точек в статистической механике. Его идеи оказались очень плодотворными не только в статистической механике, но и в КТП.

По крайней мере, в окрестности фиксированной точки с нулевым взаимодействием произвольно сложный лагранжиан вырождается на масштабах обрезания в лагранжиан, имеющий только конечное число перенормируемых взаимодействий [8]. Полезно сравнить этот результат с выводами теории перенормировок. Там мы придерживались точки зрения, что от обрезания  $L$  (по расстоянию  $R$ ) нужно освободиться, как можно быстрее переходя к пределу  $L \rightarrow \infty$  ( $R \rightarrow 0$ ). Этот предел хорошо определен, только если лагранжиан не содержит параметров (констант связи) с отрицательной массовой размерностью. С этой точки зрения кажется чрезвычайно удачным, что квантовая электродинамика (КЭД) не содержит таких параметров, в противном случае эта теория не приводила бы к хорошо определенным предсказаниям.

Вильсоновский анализ основан на противоположной точке зрения, согласно которой любая модель КТП на фундаментальном уровне определена с обрезанием  $L$ , которое име-

ет некоторое физическое значение. В статистической механике этот масштаб импульсов равен обратному межатомному расстоянию. В КЭД и в других квантовых теориях поля, имеющих отношение к физике элементарных частиц, обрезание должно быть связано с фундаментальной зернистостью пространства-времени, возможно, обусловленной квантовыми флуктуациями гравитационного поля. Но чем бы ни был этот масштаб, он лежит далеко от области, достижимой сегодняшними экспериментами. Это обстоятельство **объясняет** перенормируемость КЭД и других теорий взаимодействия элементарных частиц. До тех пор пока константы связи КЭД достаточно малы, при энергиях наших экспериментов она должна описываться перенормируемым эффективным лагранжианом.

## Ультрафиолетовые и инфракрасные фиксированные точки

Мы имеем квантовую теорию поля с лагранжианом, имеющим совокупность слагаемых, умножаемых на числа, называемые **голыми** константами связи – обозначаем их совокупность  $C$ . Мы игнорируем эффекты, происходящие на расстояниях меньше некоторого масштаба  $R$ , называемого **обрезанием**. Теперь мы можем что-нибудь посчитать.

В частности, мы можем посчитать так называемые **физические** константы связи  $C'$ , которые измеряются при любом масштабе расстояний  $R'$ . И мы можем наблюдать, как изменяется  $C'$  при медленном увеличении  $R'$ . Это называют **поток ренормализационной группы**.

Разные случаи могут иметь место. Мы уже говорили об этом немного. Мы говорили о неперенормируемых слагаемых в лагранжиане, физические константы связи уменьшаются с увеличением  $R'$ . В размерном анализе с помощью постоянной

Планка и скорости света можно выразить все единицы измерения через длину. Если голая константа связи  $C$  перед некоторым членом лагранжиана имеет размерность длины степени  $d$ , тогда соответствующая физическая константа связи  $C'$  будет изменяться с расстоянием  $R'$  в степени  $-d$ . Точнее:

$$C'/C \sim (R'/R)^{-d}.$$

Рассматриваемый член будет неперенормируемым, если  $d > 0$ .

Другой путь утверждать это – для неперенормируемых теорий физические константы связи **растут с уменьшением** расстояния  $R'$ . Это другой путь увидеть, что неперенормируемые теории **плохи** – они содержат взаимодействия, которые становятся нелепо сильными на масштабах малых расстояний. Почему это плохо? Конечно, это плохо, если вы собираетесь использовать теорию возмущений и полагаете взаимодействие малым возмущением. Возможно, это не всегда плохо в некотором более глубоком смысле, потому что существуют неперенормируемые теории, которые математически непротиворечивы.

С другой стороны, если  $d < 0$ , то говорим, что данное слагаемое в лагранжиане **суперперенормируемое**. В этом случае физическая константа связи изменяется как  $R'$  в некоторой **положительной** степени. В такой же степени как неперенормируемые теории ужасны, так суперперенормируемые теории суперпрекрасны.

В конечном итоге для **перенормируемых** теорий физические константы связи изменяются примерно как  $R$  к нулевой степени, то есть как константа. Они находятся на грани между ужасным и прекрасным. В действительности, нам необходимо сделать более тщательный анализ, чтобы отличить ужас от красоты. Например, КЭД перенормируема, но она оборачивается ужасной: сначала заряд электрона выглядит практически постоянным при уменьшении расстояния  $R'$ ,

но он возрастает – логарифмически сначала, затем быстрее и быстрее. С другой стороны, множество неабелевых калибровочных теорий прекрасны: константа связи медленно **стремится к нулю** при уменьшении  $R'$ . Мы говорим, что они **асимптотически свободны**.

Теперь, чтобы объяснить, как все это пригодится для фазовых переходов 2-го рода, введем некоторые концепции, которые помогут нам связать все эти идеи вместе. Мы видели, что иногда с уменьшением  $R'$  физические константы связи  $C'$  достигают некоторой определенной величины. Мы уже рассматривали случай, когда они достигают нуля. Но другие случаи тоже важны! Как только это случается, мы говорим, что предельное значение  $C'$  есть **ультрафиолетовая фиксированная точка ренормализационной группы**. Здесь **ультрафиолетовая точка** соответствует наблюдению за масштабами очень малых расстояний.

Также, если  $C'$  достигает некоторого значения, когда  $R'$  возрастает, то мы говорим, что это **инфракрасная фиксированная точка**.

Например: предположим, что мы имеем суперперенормируемую либо асимптотически свободную теорию только с одной константой связи. Тогда с уменьшением расстояния  $R'$  физическая константа связи достигает нуля, так что нуль есть ультрафиолетовая фиксированная точка. Конечно, **нуль** здесь соответствует **свободной** полевой теории вообще без взаимодействия. Так что свободные теории – это ультрафиолетовые (УФ) фиксированные точки суперперенормируемых либо асимптотически свободных теорий. Подобным образом, свободные теории есть инфракрасные (ИК) фиксированные точки неперенормируемых теорий и конечных перенормируемых, но ограниченных теорий, как квантовая электродинамика.

Далее пособие содержит примеры и задачи (более 60) с

указаниями и решениями по трем основным разделам спецкурса "Теория перенормировок": функциональные методы, перенормировка и ренормализационная группа. Целью пособия является закрепление знаний и навыков по основам теории перенормировок<sup>2</sup>.

## 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

### 1.1. Амплитуда перехода и функциональный интеграл

Амплитуду перехода или шредингеровский оператор эволюции в координатном представлении можно записать с помощью интеграла по путям:

$$U(x_a, x_b; T) = \langle x_b | e^{-\frac{i\hat{H}T}{\hbar}} | x_a \rangle = \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{iS[x(t)]}{\hbar}}, \quad (1)$$

где  $\int \mathcal{D}x(t) \equiv \frac{1}{C(\varepsilon)} \int \frac{dx_1}{C(\varepsilon)} \int \frac{dx_2}{C(\varepsilon)} \cdots \int \frac{dx_{n-1}}{C(\varepsilon)} = \frac{1}{C(\varepsilon)} \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{C(\varepsilon)}$ ,  $C(\varepsilon)$  – константа,  $S$  – действие.

**А.** Доказать соотношение (1) в случае одномерного движения частицы в потенциальном поле путем проверки того, что левая и правая его части получаются при интегрировании уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(x_a, x_b; T) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + V(x_b) \right] U(x_a, x_b; T) = \hat{H}U(x_a, x_b; T)$$

с одним и тем же начальным условием:

$$\langle x_b | e^{-\frac{i\hat{H}T}{\hbar}} | x_a \rangle \xrightarrow{T \rightarrow 0} \delta(x_a - x_b),$$

$$\frac{1}{C(\varepsilon)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{m(x_b - x_a)^2}{2\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x_a - x_b).$$

**Б.** Обобщить (1) для более сложных квантовых систем посредством введения полного набора промежуточных состо-

---

<sup>2</sup>Рекомендуемые в спецкурсе и наиболее близкие к данному практикуму книги: [1, 8, 9, 11, 13].

яний:

$$1 = \left( \prod_i \int dq_k^i \right) |q_k\rangle \langle q_k|$$

и предположения, что гамильтониан вейлевски упорядочен.

## 1.2. Функциональное интегрирование скалярных полей

Формулу (1) можно обобщить на случай скалярного поля:

$$\langle \phi_b(\vec{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\vec{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_0^T d^4x \mathcal{L}}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$  – плотность лагранжиана,  $\phi(\vec{x})$  – полевые амплитуды.

Получить правила Фейнмана из функционального интеграла в теории скалярного поля двумя способами: непосредственно вычисляя функциональный интеграл и через производящий функционал.

**Указания.** Чтобы получить правила Фейнмана из функционального интеграла, сначала выражаем функцию Грина через функциональный интеграл:

$$\langle \Omega | T \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}}}. \quad (3)$$

Затем, разлагая в ряд Фурье полевые функции:

$$\phi(x_i) = \frac{1}{V} \sum_n e^{ik_n x_i} \phi(k_n),$$

где  $k_n^\mu = \frac{2\pi n^\mu}{L}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , и учитывая, что лагранжиан невзаимодействующего скалярного поля квадратичен по  $\phi$ :  $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$ , сводим функциональный интеграл к обобщенным бесконечномерным гауссовым интегралам. Чтобы эти интегралы сходились, интегрирование по времени в функциональном интеграле идет вдоль контура, повернутого по часовой стрелке в комплексной плоскости  $t \rightarrow t(1 - i\epsilon)$ . Это значит, что мы должны заменить  $k^0 \rightarrow k^0(1 + i\epsilon)$ .

В итоге получаем выражение для 2-точечной функции Грина

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\mathcal{E}} = \mathcal{D}_F(x_1 - x_2)$$

и для 4-точечной функции

$$\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle = \mathcal{D}_F(x_1 - x_2)\mathcal{D}_F(x_3 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_3)\mathcal{D}_F(x_2 - x_4) + \mathcal{D}_F(x_1 - x_4)\mathcal{D}_F(x_2 - x_3).$$

Метод получения правил Фейнмана через функциональную производную и производящий функционал является более коротким и удобным.

Функциональная производная определяется следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x - y), \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \phi(x).$$

Производящий функционал в скалярной теории поля с взаимодействием выглядит так:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{[i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J(x)\phi(x)]]}, \quad (4)$$

где  $J(x)$  – источник. Тогда любую корреляционную функцию можно получить путем функционального дифференцирования производящего функционала:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle &= \\ &= \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) Z[J] \Big|_{J=0} = \mathcal{D}_F(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $Z_0 = Z[J = 0]$ .

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle &= \\ &= \frac{1}{Z_0} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_3)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_4)}\right) Z[J] \Big|_{J=0} = \\ &= D_{34}D_{12} + D_{24}D_{13} + D_{14}D_{23}. \end{aligned}$$

### 1.3. Квантование электромагнитного поля

Одна из ключевых особенностей КЭД состоит в том, что она инвариантна относительно калибровочного преобразования:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \quad (6)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \quad (7)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (8)$$

Необходимо вывести выражение для фотонного пропагатора методом квантования с помощью функционального интеграла

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]}, \quad \mathcal{D}A = \mathcal{D}A^0\mathcal{D}A^1\mathcal{D}A^2\mathcal{D}A^3, \quad (9)$$

где  $S[A]$  – действие свободного электромагнитного поля.

**А.** Интегрируя по частям и раскладывая поле в интеграл Фурье, записать действие свободного электромагнитного поля как

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \right] = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(k). \quad (11)$$

**Б.** Какова трудность при квантовании электромагнитного поля? Следствием чего она является? Как разрешить данную проблему?

**В.** В чем заключается трюк Фаддеева–Попова?

**Г.** Как определяется фиксирующая калибровку функция?

**Д.** Как получается слагаемое в лагранжиане, связанное с калибровкой?

**Е.** Записать выражение для корреляционной функции калибровочно-инвариантных операторов.

**Ж.** Получить уравнение для фотонного пропагатора в импульсном представлении и его решение.



**З.** Перечислить известные калибровки.

**И.** Почему процедура Фаддеева–Попова гарантирует, что значение любой корреляционной функции калибровочно-инвариантных операторов, вычисленное по фейнмановским диаграммам, не будет зависеть от значения  $\xi$ , использованного при вычислении, до тех пор, пока используется одна и та же величина  $\xi$ ?

**К.** Показать, как элементы  $S$ -матрицы КЭД выводятся из корреляционных функций калибровочно-неинвариантных операторов  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  и  $A_\mu(x)$ .

#### 1.4. Квантовая статистическая механика

Производящий функционал (4) напоминает статистическую сумму из статистической механики. Он обладает той же общей структурой интеграла по всем возможным конфигурациям с экспоненциальным статистическим весом (только с евклидовой формой лагранжиана). Источник  $J$  играет роль внешнего поля.

Основным объектом статистической механики является корреляционная функция, как и в квантовой теории поля. Фактически метод вычисления корреляционных функций (5) дифференцированием по  $J$  производящего функционала (4) похож на часто используемый в статистической механике прием для вычисления корреляционных функций дифференцированием по таким переменным, как, например, давление или магнитное поле.

**А.** Вычислите квантовую статистическую сумму<sup>3</sup>

$$Z = \text{tr} [e^{-\beta H}] \quad (12)$$

где  $\beta = 1/kT$ , определяя матричные элементы  $e^{-iHt}$  через функциональные интегралы. Покажите, что она находится через

---

<sup>3</sup>Задачи А–Д заимствованы из книги [8] (задача 9.2).

функциональный интеграл по функциям, определенным в области размером  $\beta$  и периодически соединенным во временном направлении.

**Б.** Вычислите функциональный интеграл для простого гармонического осциллятора

$$L_E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \quad (13)$$

введя Фурье-разложение для  $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_n x_n \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{2\pi i n t / \beta}. \quad (14)$$

Получить явную зависимость результата от  $\beta$  непросто, поскольку мера интеграла по  $x(t)$  зависит от  $\beta$  при любой дискретизации. Тем не менее зависимость от  $\omega$  должна быть однозначной. Покажите, что с точностью до (возможно, расходящейся и зависящей от  $\beta$ ) константы интеграл точно воспроизводит известное выражение для квантовой статистической суммы осциллятора. Может понадобиться тождество

$$\operatorname{sh} z = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z^2}{(n\pi)^2} \right). \quad (15)$$

**В.** Обобщите эту конструкцию на теорию поля. Покажите, что квантовая статистическая сумма свободного скалярного поля может быть записана через функциональный интеграл. Значение этого интеграла задается выражением

$$[\det(-\partial^2 + m^2)]^{-1/2}, \quad (16)$$

где оператор действует на функции в евклидовом пространстве, которые периодичны по времени с периодом  $\beta$ . Как и раньше, зависимость этого выражения от  $\beta$  трудно вычислить в явном виде. Однако зависимость от  $m^2$  однозначна (в общем случае, обычно, можно вычислить вариацию функционального детерминанта по любому явному параметру в лагранжиане). Покажите, что этот детерминант действительно воспроизводит статистическую сумму релятивистской скалярной частицы.

Г. Пусть  $\psi(t), \bar{\psi}(t)$  – грассмановозначные координаты. Определим фермионный осциллятор, написав лагранжиан:

$$L_E = \bar{\psi}\dot{\psi} + \omega\bar{\psi}\psi. \quad (17)$$

Этот лагранжиан соответствует гамильтониану

$$H = \omega\bar{\psi}\psi \quad \text{с} \quad \{\bar{\psi}, \psi\} = 1; \quad (18)$$

т.е. описывает простую двухуровневую систему. Вычислите функциональный интеграл, допустив, что фермионы подчиняются антипериодическим граничным условиям:  $\psi(t + \beta) = -\psi(t)$  (почему это разумно?). Покажите, что результат воспроизводит статистическую сумму квантово-механической двухуровневой системы, т.е. квантовое состояние, подчиняющееся статистике Ферми.

Д. Определим статистическую сумму фотонного поля как калибровочно-инвариантный функциональный интеграл

$$Z = \int \mathcal{D}A \exp\left(-\int \left[\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2\right]\right) \quad (19)$$

по векторным полям  $A_\mu$ , которые периодичны по времени с периодом  $\beta$ . Примените процедуру фиксации калибровки (работая, например, в фейнмановской калибровке). Вычислите функциональные детерминанты, используя результат части **В**, и покажите, что функциональный интеграл дает правильный квантовый статистический результат (включая правильный учет состояний поляризации).

**Решение А.** Рассмотрим статистическую сумму, аналитически продолженную по температуре  $\mathcal{T} = 1/(iT)$ ,  $\beta = iT$ :

$$\begin{aligned} Z(1/iT) &= Tr \left[ e^{-iT\hat{H}} = \hat{U}(T, 0) \right] = \int dx_0 U(x_0, T; x_0, 0) = \\ &= \int dx_0 \int_{x(0)=x_0}^{x(T)=x_0} \mathcal{D}'[x(t)] e^{iS[x(t)]} = \int_{x(0)=x_0}^{x(T)=x(0)} \mathcal{D}[x(t)] e^{iS[x(t)]}, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $S$  – функционал действия в пространстве Минковского (примем систему единиц  $\hbar = 1, m = 1$ )

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right). \quad (21)$$

Заметим, что граничные условия в интеграле по путям (20) периодические:  $x(T) = x(0)$ , нет выделенных начальных либо конечных условий.

Строго говоря, интеграл по путям в пространстве Минковского определяется как аналитическое продолжение в евклидово пространство по  $x(t)$ ,  $t = it$ . Граничные условия тоже должны быть аналитически продолжены, что для интеграла (20) означает  $x(t = iT) = x(t = 0)$ . Иначе аналитическое продолжение *назад* к действительной обратной температуре  $\beta = 1/T$  имеет вид

$$Z(T) = \int_{x(\beta)=x(0)} \mathcal{D}[x(t_E)] e^{-S_E[x(t_E)]}, \quad (22)$$

где евклидово действие

$$S_E[x(t_E)] = \int_0^\beta dt_E \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right). \quad (23)$$

**Решение Б.** Строго говоря, мы должны сначала перейти к дискретному евклидову интегралу по путям и только затем сделать Фурье-преобразование для дискретного евклидового времени. Таким образом,

$$\begin{aligned} t_E &\rightarrow t_n = \frac{n\beta}{N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad t_0 \equiv t_N, \\ x(t_E) &\rightarrow x_n = x(t_n), \quad x_0 \equiv x_N, \end{aligned}$$

интеграл по путям

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} C(N) \int d^N x e^{-S_E(x_1, \dots, x_N)}, \quad \text{где } C(N) = \left( \frac{N}{2\pi\beta} \right)^{N/2} \quad (24)$$

есть евклидов нормировочный множитель, и дискретизированное евклидово действие для гармонического осциллятора

$$S_E(x_1, \dots, x_N) = \frac{N}{2\beta} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2 + \frac{\omega^2 \beta}{2N} \sum_{n=1}^N x_n^2. \quad (25)$$

Действительно, (25) получается из

$$S = \int_0^\beta dt_E L_E, \quad L_E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \quad S_E = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2}\dot{x}_n^2 \Delta t_n + \frac{1}{2}\omega^2 x_n^2 \Delta t_n \right)$$

с учетом подстановки  $\Delta t_n = \beta/N$  и

$$\dot{x}_n^2 = \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\beta/N} \right)^2.$$

Действие (25) квадратично по переменным интегрирования, так что интеграл (24) гауссов и может быть вычислен точно. Определитель квадратичной формы (25) достаточно громоздкий, поэтому сначала диагонализуем действие. Евклидово действие для непрерывного времени диагонализуется с помощью преобразования Фурье

$$x(t_E) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta^{-1/2} e^{-2\pi i k t / \beta} y_k. \quad (26)$$

$$\dot{x}(t_E) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta^{-3/2} (-2\pi i k) e^{-2\pi i k t / \beta} y_k, \quad (27)$$

$$\dot{x}^*(t_E) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta^{-3/2} (2\pi i k) e^{-2\pi i k t / \beta} y_k^*. \quad (28)$$

$$\begin{aligned} S_E[x] &= \sum_k \frac{1}{2} \beta^{-3} (2\pi k)^2 |y_k|^2 \int_0^\beta dt + \sum_k \frac{1}{2} \omega^2 \beta^{-1} |y_k|^2 \beta = \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left( \omega^2 + \frac{(2\pi k)^2}{\beta^2} \right) |y_k|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что частоты здесь дискретны, так как евклидово время периодически; кроме того,  $y_k^* = y_{-k}$ . Однако для дискретизированного действия (25) нам необходимо дискретное преобразование Фурье

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-2\pi i k n / N} y_k, \quad (30)$$

где дискретные частоты  $k$  определяются числом  $N$ ,  $y_0 \equiv y_N$ ,  $y_{-k} \equiv y_{N-k}$ , ... . Моды  $y_k$  комплексны, но полный набор  $y_1, \dots, y_N$

удовлетворяет условию  $y_k^* = y_{-k}$ . Основная формула дискретного преобразования Фурье

$$\sum_n e^{-2\pi i(k-\ell)n/N} = N\delta^{\text{mod } N}(k-\ell). \quad (31)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_n^{\text{mod } N} x_n^2 &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-2\pi i(k-k)n/N] |y_k|^2 = \\ &= \sum_k \frac{1}{N} \sum_n \exp[-2\pi i(k-k)n/N] |y_k|^2 = \sum_k \frac{1}{N} N\delta(k-k) |y_k|^2 = \\ &= \sum_n^{\text{mod } N} x_n^* x_n = \sum_k^{\text{mod } N} y_k^* y_k, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \sum_n^{\text{mod } N} (x_n - x_{n-1})^2 &= \sum_n \frac{1}{N} \sum_k (\exp[-2\pi ikn/N] - \exp[-2\pi ik(n-1)/N]) \times \\ &\quad \times (\exp[2\pi ikn/N] - \exp[2\pi ik(n-1)/N]) |y_k|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_k \exp[-2\pi ikn/N] (1 - \exp[2\pi ik/N]) \times \\ &\quad \times \exp[2\pi ikn/N] (1 - \exp[-2\pi ik/N]) |y_k|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \sum_n \exp[-2\pi i(k-k)n/N] \cdot |1 - \exp[2\pi ik/N]|^2 |y_k|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k N\delta(k-k) |1 - \exp[2\pi ik/N]|^2 |y_k|^2 = \sum_k^{\text{mod } N} |1 - e^{2\pi ik/N}|^2 |y_k|^2, \end{aligned}$$

следует из

$$x_n - x_{n-1} = \sum_k^{\text{mod } N} N^{-1/2} e^{-2\pi ikn/N} (1 - e^{2\pi ik/N}) y_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_E[y_k] &= \frac{N}{2\beta} \sum_k |1 - e^{2\pi ik/N}|^2 |y_k|^2 + \frac{\omega^2 \beta}{2N} \sum_k |y_k|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_k^{\text{mod } N} \left( \frac{4N}{\beta} \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta}{N} \right) |y_k|^2, \end{aligned} \quad (32)$$

ГДЕ ИСПОЛЬЗОВАЛИ

$$1 - \exp[2\pi ik/N] = e^{+\pi ik/N} \left( e^{-\pi ik/N} - e^{\pi ik/N} \right) = e^{+\pi ik/N} (-2i) \sin \frac{\pi k}{N},$$

$$1 - \exp[-2\pi ik/N] = e^{-\pi ik/N} \left( e^{\pi ik/N} - e^{-\pi ik/N} \right) = e^{-\pi ik/N} (2i) \sin \frac{\pi k}{N},$$

$$\left| 1 - e^{2\pi ik/N} \right|^2 = 4 \sin^2 (\pi k/N).$$

И ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{N \rightarrow \infty} C(N) J(N) \int d^N y e^{-S_E^{\text{discr}}(y)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} C(N) J(N) \int d^N y \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_k^{\text{mod } N} \left( \frac{4N}{\beta} \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta}{N} \right) |y_k|^2 \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} C(N) J(N) \prod_k^{\text{mod } N} \int dy_k e^{\left[ -\frac{1}{2} \sum_k^{\text{mod } N} \left( \frac{4N}{\beta} \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta}{N} \right) |y_k|^2 \right]} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} C(N) J(N) \prod_k^{\text{mod } N} \left( \frac{4N}{\beta} \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta}{N} \right)^{-1/2} \sqrt{2\pi}, \quad (33) \end{aligned}$$

где  $J(N)$  – якобиан дискретного преобразования Фурье (30). Чтобы посчитать якобиан, представим преобразование Фурье ДВАЖДЫ:

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_m^{\text{mod } N} N^{-1/2} e^{-2\pi imk/N} z_m, \quad x_n = \sum_k^{\text{mod } N} N^{-1/2} e^{-2\pi ikn/N} y_k = \\ &= \sum_k^{\text{mod } N} N^{-1/2} e^{-2\pi ikn/N} \sum_m^{\text{mod } N} N^{-1/2} e^{-2\pi imk/N} z_m = \\ &= \sum_k N^{-1} \sum_m^{\text{mod } N} e^{-2\pi ik(n+m)/N} z_m = N^{-1} \sum_m^{\text{mod } N} N \delta(n+m) z_m = (-1)^n z_n, \end{aligned}$$

что немедленно приводит к

$$[\det \partial x_n / \partial y_k]^2 = \det \partial x_n / \partial z_m = \pm 1$$

и  $J = |\det(\partial x_n / \partial y_k)| = 1$ . ПОЭТОМУ

$$Z(\beta, \omega, N) = \prod_k^{\text{mod } N} \left( 4 \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta^2}{N^2} \right)^{-1/2}. \quad (34)$$

Действительно,

$$C(N) = \left[ \frac{N}{2\pi\beta} \right]^{N/2}, \quad \prod_k^{\text{mod } N} \pi^{1/2} 2^{1/2} = (2\pi)^{N/2} \implies \left( \frac{N}{\beta} \right)^{N/2},$$

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N}{\beta} \right)^{N/2} \prod_k \left( \frac{4N}{\beta} \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta}{N} \right)^{-1/2} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N}{\beta} \right)^{N/2} \left( \frac{N}{\beta} \right)^{-N/2} \prod_k \left( 4 \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta^2}{N^2} \right)^{-1/2}.$$

Воспользуемся без доказательства математическим соотношением

$$\prod_{k=1}^{N-1} \left( 2 \sin \frac{\pi k}{N} \right) = N, \quad (35)$$

которое позволяет переписать дискретизированную статистическую сумму следующим образом:

$$Z(\beta, \omega, N) = \frac{N}{\omega\beta} \prod_{k=1}^{N-1} \left( 4 \sin^2 \frac{\pi k}{N} + \frac{\omega^2 \beta^2}{N^2} \right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{N}{\omega\beta} \prod_{k=1}^{N-1} \left( 2 \sin \frac{\pi k}{N} \right)^{2 \cdot (-1/2)} \left( 1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{N^2 4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{N}{\omega\beta} \frac{1}{N} \prod_{k=1}^{N-1} \left( 1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{N^2 4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\omega\beta} \times \prod_{k=1}^{N-1} \left( 1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{4N^2 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \right)^{-1/2}. \quad (36)$$

При большом  $N$  (физически соответствует пределу непрерывного времени) полагаем  $4N^2 \sin^2(\pi k/N) \approx (2\pi k)^2$  для  $k \ll N$ , а для  $(N - k) \ll N$   $4N^2 \sin^2(\pi k/N) \approx (2\pi(N - k))^2$ , для оставшихся мод  $\sin^2(\pi k/N) \approx \mathcal{O}(1)$ . Следовательно

$$1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{4N^2 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \approx 1.$$

Поэтому при больших  $N$

$$Z(\beta, \omega, N) \Big|_{N \gg 1} \longrightarrow$$



$$\begin{aligned}
& \rightarrow \frac{1}{\omega\beta} \prod_{1 \leq k \ll N} \left(1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-1/2} \prod_{1 \leq (N-k) \ll N} \left(1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{(2\pi(N-k))^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \text{при } N \rightarrow \infty \quad Z(\beta, \omega, N) \longrightarrow \frac{1}{\omega\beta} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-1}. \quad (37)
\end{aligned}$$

Приведенное вычисление было строгим, но длинным. Выведем (37), используя вместо дискретного непрерывное пространство-время. Это означает, что, диагонализуя евклидово действие с непрерывным временем с помощью преобразования Фурье (29), используя  $\mathcal{D}[x(t_E)] = \mathcal{D}[y_k]$  (якобиан  $J$  может зависеть от временного интервала  $\beta$ , но не от  $\omega$ ), имеем

$$\int \mathcal{D}[y_k] = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \int dy_k = \int dy_0 \prod_{k=1}^{+\infty} \iint d \operatorname{Re} y_k d \operatorname{Im} y_k.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
Z & \propto \int \mathcal{D}[y_k] \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\omega^2 + \frac{(2\pi k)^2}{\beta^2}\right) |y_k|^2\right) = \\
& = \int dy_0 e^{-\frac{1}{2}\omega^2 y_0^2} \prod_{k=1}^{\infty} \int d \operatorname{Re} y_k \int d \operatorname{Im} y_k \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\omega^2 + \frac{(2\pi k)^2}{\beta^2}\right) |y_k|^2\right] = \\
& = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega^2}} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{\omega^2 + \frac{(2\pi k)^2}{\beta^2}}\right) = \\
& = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta^2}{4\pi k^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{(2\pi k)^2}}\right) \propto \frac{1}{\omega} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{(2\pi k)^2}}\right).
\end{aligned}$$

Другими словами, статистическая сумма

$$Z(\beta, \omega) = \frac{A(\beta)}{\omega} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \beta^2}{(2\pi k)^2}}\right)^{-1}, \quad (38)$$

где  $A(\beta)$  – некоторый неизвестный общий коэффициент, возможно, расходящийся и (либо)  $\beta$  зависимый, но он не зависит от частоты гармонического осциллятора  $\omega$ . В действительности, частотная зависимость статистической суммы (38) находится в полном согласии с формулой (37), которую получили

выше, дискретизируя евклидово время. Подход с дискретизацией также привносит общий коэффициент  $A = 1/\beta$ .

Остается вычислить бесконечное произведение в (37). Рассмотрим  $Z(\omega\beta)$  как аналитическую функцию комплексного аргумента. Как только любой фактор с правой стороны имеет ноль в комплексной  $(\omega\beta)$  плоскости,  $Z(\omega\beta)$  имеет ноль, и то же для полюсов. Также произведение сходится, поэтому это единственные полюсы и нули  $Z(\omega\beta)$ , индивидуальные факторы  $1/(\omega\beta)$  и

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega^2\beta^2}{(2\pi k)^2}} = \frac{(2\pi k)^2}{(\omega\beta + 2\pi ki) \times (\omega\beta - 2\pi ki)}$$

для  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, функция  $Z(\omega\beta)$  не имеет нулей и имеет полюса при  $\omega\beta = 2\pi ki$  для всех целых  $k$  (положительных, отрицательных и ноль). Другими словами, она имеет те же полюсы и нули, как и функция  $1/\sinh(\omega\beta/2)$ , и, в действительности, есть хорошо известная формула

$$\sinh(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right)$$

(текст задачи), которая немедленно приводит нас к

$$Z(\omega, \beta) = \frac{1}{\omega\beta} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2\beta^2}{(2\pi k)^2}} = \frac{1}{2 \sinh(\omega\beta/2)} \quad (39)$$

В итоге сравним наш результат (39) с хорошо известной формулой Планка

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \exp(-\beta E_n(\omega)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-\beta\omega(n + \frac{1}{2})) = \\ &= \frac{e^{-\beta\omega/2}}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{e^{-\beta\omega/2}}{e^{-\beta\omega/2} (e^{\beta\omega/2} - e^{-\beta\omega/2})} = \frac{1}{2 \sinh(\beta\omega/2)}, \end{aligned} \quad (40)$$

которая согласуется с формулой (39), основанной на подходе с интегралом по путям, обеспечивающим правильный общий множитель.

**Решение В.** Обобщим (22) от механики частиц к полевой теории. Для действительного скалярного поля  $\phi(x)$  с евклидовым лагранжианом

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi) \quad (41)$$

мы имеем конечно-температурную статистическую сумму

$$Z(\beta) = \int_{\phi(\mathbf{x},\beta)=\phi(\mathbf{x},0)} \mathcal{D}[\phi(\mathbf{x}, x_4)] \exp \left[ - \int d^3\mathbf{x} \int_0^\beta dx_x \left( \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi) \right) \right]. \quad (42)$$

Другими словами, конечная температура переходит в геометрию евклидова 4-мерного пространства-времени: евклидово время  $x_4 = it$  есть аналог  $\beta = 1/\mathcal{T}$ , а на скалярное поле наложено периодическое граничное условие; другие три измерения  $x_1, x_2, x_3$  бесконечны как обычно.

Для свободного скалярного поля евклидово действие является квадратичным функционалом

$$S_E[\phi(x_E)] = \frac{1}{2} \int d^4x_E \phi(m^2 - \partial^2)\phi, \quad (43)$$

который становится диагональным после Фурье-преобразования. Однако из-за периодичности координаты евклидового времени евклидовы “энергии”  $k_4$  имеют дискретный, а не непрерывный спектр

$$\phi(x_E) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1/2} e^{ik_E x_E} \Phi(k_E),$$

где

$$k_4 = \frac{2\pi}{\beta} \text{ (целое число).}$$

Следовательно,

$$S_E = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} (m^2 + k_E^2) |\Phi(k_E)|^2, \quad (44)$$

поэтому

$$Z = [\text{Det}(m^2 - \partial_E^2)_{\text{период.}}]^{-1/2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \mathcal{D}[\Phi] \exp \left[ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} (m^2 + k_E^2) |\Phi(k_E)|^2 \right] = \\
&= \exp \left[ \text{const} - \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \ln(m^2 + k^2) \right] \quad (45)
\end{aligned}$$

(если мера квадратична по  $\Phi(k_E)$ .)

Приведем здесь детали вывода соотношения (44).

$$\Phi^*(x_E) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1/2} e^{-ik_E x_E} \Phi^*(k_E), \quad (46)$$

$$\partial \Phi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1/2} e^{ik_E x_E} (ik_E) \Phi(k_E), \quad (47)$$

$$(\partial \Phi)^* = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1/2} e^{-ik_E x_E} (-ik_E) \Phi(k_E), \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
S_E[\Phi] &= \frac{1}{2} \left( \int d^4 x_E m^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1} e^{-i(k_E - k_E)x_E} |\Phi(k_E)|^2 + \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 x_E m^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1} k_E^2 e^{-i(k_E - k_E)x_E} |\Phi(k_E)|^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} (m^2 + k_E^2) \beta^{-1} \int d^4 x_E e^{-i(k_E - k_E)x_E} |\Phi(k_E)|^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} (m^2 + k_E^2) \beta^{-1} \beta \delta(k_E - k_E) |\Phi(k_E)|^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} (m^2 + k_E^2) |\Phi(k_E)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Часто удобно перевыразить сумму по дискретным компонентам импульса, используя формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \times \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \ell x} \quad (49)$$

или для нашей задачи ( $k_4 = 2\pi n/\beta$ ,  $\sum_n F(n) \rightarrow \sum_{k_4} F(k_4)$ ,  $n = \beta k_4/(2\pi)$ )

$$\sum_{k_4} F(k_4) = \beta \sum_{\ell} \int \frac{dk_4}{2\pi} F(k_4) e^{2\pi i \beta \ell k_4 / (2\pi)} = \beta \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk_4}{2\pi} F(k_4) e^{i\beta \ell k_4}. \quad (50)$$

Тогда свободная энергия Гельмгольца  $\mathcal{F} = -\mathcal{T} \ln Z$  свободного эрмитового скалярного поля может быть переписана так

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (-\tau) \text{const}' + (-\tau) \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \ln(m^2 + k^2) = \\ &= \text{const} + \frac{\tau}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \beta \sum_{\ell} \int \frac{dk_4}{(2\pi)} \ln(m^2 + k^2) e^{i\beta \ell k_4} = \\ &= \text{const} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\ell} \int \frac{dk_4}{(2\pi)} \ln(m^2 + k^2) e^{i\beta \ell k_4} = \\ &= \text{const} + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \sum_{\ell} \ln(k_E^2 + m^2) e^{i\beta \ell k_4} = \\ &= \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i\beta \ell k_4} \ln(k_E^2 + m^2). \end{aligned}$$

В пределе нулевой температуры  $\beta \rightarrow \infty$  сумма  $\sum_{\ell}$  сводится к члену с  $\ell = 0$ , другие члены подавлены быстро изменяющимся фазовым множителем  $e^{i\beta \ell k_4}$ . В общем случае вычитания вклада энергии в нулевой точке мы избавляемся от  $\ell = 0$  члена. Так как все остальные члены входят в симметричных парах  $\pm \ell \neq 0$ , мы приходим к

$$\mathcal{F} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i\beta \ell k_4} \ln(k_E^2 + m^2). \quad (51)$$

Формула (51) имеет прекрасный  $4D$  вид, но для сравнения с обычной статистической механикой проинтегрируем сначала по  $k_4$ , прежде чем интегрировать по 3-импульсу  $\mathbf{k}$ . Для фиксированных  $\mathbf{k}$  и  $\ell$  мы имеем дело с интегралом

$$I = \int \frac{dk_4}{2\pi} e^{i\beta \ell k_4} \ln(k_4^2 + E^2), \quad (52)$$

где  $E^2 = m^2 + \mathbf{k}^2$ . Логарифм здесь имеет разрезы по ветвям (в комплексной  $k_4$  плоскости) от  $+iE$  до  $+i\infty$ , а также от  $-iE$  до  $-i\infty$ , поэтому деформируем контур интегрирования от действительной оси, сделав его вокруг верхнего разреза:

Другими словами,  $k_4 = iE(1 + x + i\epsilon)$  на его пути вниз от  $x = +\infty$  к  $x = 0$  и  $k_4 = iE(1 + x - i\epsilon)$  на пути вверх от  $x = 0$  обратно к  $k = +\infty$ , следует

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{iE}{2\pi} \int_0^{+\infty} dx e^{-\beta\ell E(1+x)} \times \\
 &\times [\ln(E^2(-2x - x^2 + i\epsilon)) - \ln(E^2(-2x - x^2 - i\epsilon))] = \\
 &= 2\pi i] = -E \int_0^{+\infty} dx e^{-\beta\ell E(1+x)} = -\frac{e^{-\beta\ell E}}{\beta\ell}. \quad (53)
 \end{aligned}$$

Далее, мы суммируем этот интеграл по  $\ell$ , что дает

$$\frac{-1}{\beta} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta E})^{\ell}}{\ell} = \mathcal{T} \ln(1 - e^{-\beta E}),$$

и поэтому свободная энергия

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}, m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{T} \ln(1 - e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}). \quad (54)$$

В конечном итоге сравним наш результат (54) с общепринятым в статистической механике тождественных бесспиновых релятивистских бозонов. В статистической механике тождественных бозонов

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}, m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_{\text{осциллятор}}^{\text{гармонич.}}(\mathcal{T}, E_{\mathbf{k}}), \quad (55)$$

где каждая мода осциллятора дает

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{осциллятор}}^{\text{гармонич.}}(\mathcal{T}, E_{\mathbf{k}}) &= -\mathcal{T} \ln Z_{\text{осциллятор}}^{\text{гармонич.}} = \mathcal{T} \ln(2 \sinh(E\beta/2)) = \\
&= \mathcal{T} \ln(e^{E\beta/2} - e^{-E\beta/2}) = \mathcal{T} \ln[e^{E\beta/2} (1 - e^{-E\beta})] = \\
\mathcal{T} \frac{E\beta}{2} + \mathcal{T} \ln(1 - e^{-\beta E}) &= \frac{1}{2}E + \mathcal{T} \ln(1 - e^{-\beta E}) \quad (56)
\end{aligned}$$

Вычитая энергию нулевой точки  $\frac{1}{2}E$  и подставляя в (55), мы получаем в точности выражение (54), которое показывает, что функциональное квантование полевой теории корректно воспроизводит свободную энергию кванта поля.

**Решение Г.** Для  $(0+1)$  мерного ( $0$  – пространство,  $1$  – время) свободного комплексного грассманоного поля  $\psi(t)$  мы имеем квадратичное евклидово действие

$$S_E = \int_0^\beta dt_E \bar{\psi}(\partial + \omega)\psi, \quad (57)$$

и поэтому статсумма

$$Z = \text{Det}[\partial + \omega]. \quad (58)$$

Все физические наблюдаемые данной системы должны быть периодичны по евклидову времени, так что нечетные грассманианы, такие, как фермионные поля, должны быть периодическими либо антипериодическими. Поэтому "импульсные" моды должны квантоваться как целые либо полуцелые числа

$$k = \frac{2\pi}{\beta} n, \quad \text{либо} \quad k = \frac{2\pi}{\beta} (n + \frac{1}{2}),$$

что приводит к двум отдельным выражениям для статсуммы. В периодическом случае мы имеем

$$\begin{aligned}
Z_+ \propto \prod_k (ik + \omega) &= \omega \prod_{n=1}^{\infty} \left( \omega^2 + \left( \frac{2\pi n}{\beta} \right)^2 \right) \propto \beta\omega \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{\beta\omega}{2\pi n} \right)^2 \right) = \\
&= 2 \sinh(\beta\omega/2), \quad (59)
\end{aligned}$$

а для антипериодической статсуммы

$$Z_- \propto \prod_k (ik + \omega) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{n=0}^{\infty} \left( \omega^2 + \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \propto \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{\beta\omega}{\pi(n + \frac{1}{2})} \right)^2 \right) = \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{\beta\omega}{\pi m} \right)^2 \right) / \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \left( \frac{\beta\omega}{2\pi m} \right)^2 \right) = \\
&= \sinh(\beta\omega) / \sinh(\beta\omega/2) = 2 \cosh(\beta\omega/2). \tag{60}
\end{aligned}$$

Другими словами,

$$Z_{\pm}(\beta, \omega) = e^{+\beta\omega/2} (1 \mp e^{-\beta\omega}). \tag{61}$$

Антипериодическая статсумма  $Z_-$  согласуется с двухуровневой статистикой Ферми, причем *при конечной температуре фермионные поля антипериодичны по евклидовому времени.*

Естественно, то же правило применяется для фермионных полей при произвольном числе пространственных измерений. Например, для свободного поля Дирака в  $D = (3 + 1)$  имеем

$$\begin{aligned}
Z &= [\text{Det}(m^2 - \partial_E^2)_{\text{антипериод}}]^{+2} = \\
&= \text{const} \times \exp \left[ +2 \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \ln(k_E^2 + m^2) \right],
\end{aligned}$$

где “энергии”  $k_4$  имеют полуцелый, а не целый спектр. Следовательно, формула суммирования Пуассона

$$\sum_{k_4} F(k_4) = \beta \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk_4}{2\pi} F(k_4) e^{i\beta\ell k_4} (-1)^\ell$$

приводит к свободной энергии

$$\mathcal{F} = \text{const} - 2 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} (-1)^\ell \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i\beta\ell k_4} \ln(k_E^2 + m^2)$$

либо после вычитания энергии в нулевой точке

$$\mathcal{F} = 4 \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{i\beta\ell k_4} \ln(k_E^2 + m^2) \tag{62}$$

Аналогично бозонному случаю, мы можем переписать эту формулу через 3D члены, проинтегрировав по  $k_4$  и суммируя



по  $\ell$ . Интегрирование по  $k_4$  работает, как и в бозонном случае, но сумма  $\sum_\ell$  немного отличается из-за различных знаков:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\beta\ell} e^{-\beta E\ell} = -\mathcal{T} \ln(1 + e^{-\beta E})$$

и, следовательно,

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}, m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (-4\mathcal{T}) \ln(1 + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}) \quad (63)$$

в согласии со статистической механикой Ферми–Дирака.

**Решение Д.** Так же, как и для других бозонных полей, при конечной температуре  $\mathcal{T} = 1/\beta$  электромагнитное поле  $A^\mu(x_E)$  становится периодическим по евклидовому времени

$$A^\mu(\mathbf{x}, x_4 = 0) = A^\mu(\mathbf{x}, x_4 = \beta), \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (64)$$

Его *локальные* свойства тем не менее остаются в точности такими же; в частности, мы также имеем локальные калибровочные преобразования

$$A'^\mu(x_E) = A^\mu(x_E) - \partial^\mu \Lambda(x_E) \quad (65)$$

с учетом условия периодичности

$$\partial^\mu \Lambda(\mathbf{x}, x_4 = 0) = \partial^\mu \Lambda(\mathbf{x}, x_4 = \beta). \quad (66)$$

Поэтому соответствующая конструкция евклидова функционального интеграла по конфигурациям электромагнитного поля требует такой же процедуры фиксации калибровки Фаддеева–Попова, что и для  $\mathcal{T} = 0$  с соответствующими модификациями, отражающими периодичности полей. Так, электромагнитная статсумма

$$Z_{\text{ЭМ}} = C \int_{\text{периодический}} \mathcal{D}[A^\mu(x_E)] \Delta_{\text{ФП}} e^{-S_E[A^\mu(x_E)]}, \quad (67)$$

где евклидово действие

$$S_E[A^\mu(x_E)] = \int d^3\mathbf{x} \int_0^\beta dx_4 \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 \right\} \quad (68)$$

включает член, фиксирующий калибровку, и определитель Фаддеева–Попова

$$\Delta_{\text{ФП}} = \text{Det}(-\partial^2)_{\text{периодич.}}, \quad (69)$$

учитывает периодичность (66) конечнотемпературных калибровочных преобразований. В конечном итоге нормировочный множитель  $C$ , компенсирующий усреднение по калибровочным условиям  $\partial_\mu A^\mu = \omega$ ,

$$C = \left[ \int \mathcal{D}[\omega(x_E)] e^{-\frac{1}{2\xi} \int \omega^2 d^4 x_E} \right]^{-1} \quad (70)$$

будет также включать собственную периодическую  $\omega(x_E)$ .

Для свободного электромагнитного поля евклидов функционал действия (68) квадратичен по полям, и функциональный интеграл (67) просто гауссов. Учитывая определитель Фаддеева–Попова  $\Delta_{\text{ФП}}$ , мы имеем

$$Z_{\text{ЭМ}} = C \text{Det}(-\partial^2) \left[ \text{Det}(-\partial^2 \delta^{\mu\nu} + (1 - \xi^{-1}) \partial^\mu \partial^\nu) \right]^{-1/2}. \quad (71)$$

Далее, в импульсном представлении

$$A(x_E) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \beta^{-1/2} e^{ik_E x_E} A(k_E),$$

$$\begin{aligned} \ln Z_{\text{ЭМ}} &= \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \left\{ \frac{1}{2} \ln(\xi^{-1}) + \ln(k_E^2) - \frac{1}{2} \ln \det(k_E^2 \delta^{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) k_E^\mu k_E^\nu) \right\}, \end{aligned}$$

где  $4 \times 4$  матрица  $(k_E^2 \delta^{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) k_E^\mu k_E^\nu)$  имеет три собственных значения, равных  $k_E^2$  (обратные собственные векторы), и одно собственное значение, равное  $k_E^2/\xi$  (собственный вектор, параллельный  $k_E$ ). Таким образом,

$$\det(k_E^2 \delta^{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) k_E^\mu k_E^\nu) = \xi^{-1} (k_E^2)^4,$$

и поэтому

$$\ln Z_{\text{ЭМ}} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \{-1 \ln(k_E^2)\}. \quad (72)$$

Сравнение с действительным скалярным полем

$$\ln Z_\phi = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{k_4} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(k_E^2 + m^2) \right\},$$

показывает, что электромагнитное поле имеет статистическую функцию *двух типов* для безмассового скаляра или эквивалентно два физических состояния поляризации для собственных безмассовых состояний квантов, фотонов.

## 2. ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИИ $\phi^4$

Эффективный подход к теории поля основан на теории возмущений, что может приводить к расходящимся выражениям. Члены более высоких порядков содержат все большее число внутренних интегралов, и, следовательно, существует возможность возрастания степени расходимости. Очевидно, для того чтобы теория поля вообще имела смысл и была правдоподобной, проблемы, связанные с расходимостями, должны быть удовлетворительным образом разрешены. Общий подход состоит в том, чтобы строить теорию возмущений порядок за порядком (имеется в виду петлевое разложение) и показать, что в каждом порядке величины, представляющие физический интерес (массы, константы связи, функции Грина), могут быть перенормированы к конечным значениям. Для перенормируемых теорий это в принципе возможно во всех порядках.

Рассматривая в данной главе относительно простую теорию  $\phi^4$ , мы сможем понять основные идеи и процедуры теории перенормировок без осложнения спинорными и калибровочными полями.

## 2.1. Однопетлевые расходимости и регуляризация

Лагранжиан теории  $\phi^4$  представляется следующим выражением:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (73)$$

где  $\phi$  – действительное скалярное поле Клейна–Гордона массы  $m$ . Взаимодействию  $\frac{-\lambda}{4!} \phi^4$  в данной теории соответствует вертекс

•

и правило Фейнмана  $-i\lambda$ .

Однопетлевая амплитуда для скалярной 2-точечной функции представляется диаграммой Фейнмана однопетлевого вклада в собственную энергию:

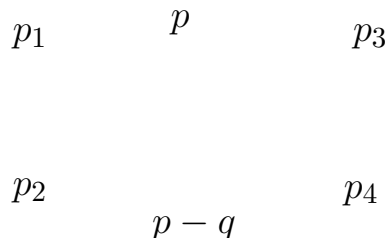


В импульсном пространстве ей соответствует выражение

$$-i\Sigma \equiv \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (74)$$

В знаменателе содержится вторая степень  $q$ , в числителе – четвертая (от интегрирования). Следовательно, интеграл расходится квадратично при больших  $q$  (УФ расходимость). Данная диаграмма имеет порядок  $\lambda$ .

Другая расходящаяся диаграмма – "рыба" порядка  $\lambda^2$ :



Соответствующее ей выражение:

$$\Gamma((p_1 + p_2)^2) \equiv \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{i^2 \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)}{(q_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(q_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \quad (75)$$

Здесь мы имеем четвертую степень  $q$  как в числителе, так и в знаменателе, что приводит к логарифмической расходимости.

Расходимости фейнмановских интегралов можно выделить с помощью регуляризации. Благодаря ей, проблема перенормировки становится более ясной и обозримой. Существует несколько видов регуляризации. Казалось бы, что наиболее естественным является введение параметра обрезания в интегралы по импульсному пространству. Примером может служить модификация свободного фотонного пропагатора в электродинамике

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = - \frac{\Lambda^2}{(k^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}. \quad (76)$$

Другой аналогичный метод – регуляризация Паули–Вилларса, при которой вводится фиктивное поле с массой :

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - M^2 + i\varepsilon}. \quad (77)$$

В обоих случаях переходят к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$  ( $M \rightarrow \infty$ ), причем перенормированные величины не зависят от  $\Lambda$  ( $M$ ). Другая возможность регуляризации – переход к дискретному пространству-времени, то есть к представлению на решетке. Во всех случаях существует максимальная энергия (эквивалентная минимальному расстоянию). Параметры (константы связи, массы, константы перенормировки полей) будут зависеть от параметра обрезания, обычно энергии  $\Lambda$  или расстояния  $a = 1/\Lambda$ .

Применение данных методов становится проблематичным, в частности, для неабелевых калибровочных теорий. Свободным от трудностей является метод размерной регуляризации. Идея этого метода состоит в том, чтобы рассматривать петлевые интегралы (содержащие расходимости) как интегралы по

$D$ -мерным импульсам, а затем перейти к пределу при  $D \rightarrow 4$ . Оказывается, сингулярности однопетлевых интегралов являются простыми полюсами по переменной  $\varepsilon \equiv 4 - D$  (также используют  $2\varepsilon \equiv 4 - D$ ).

Прежде чем применить эту технику к теории  $\phi^4$ , нам необходимо обобщить лагранжиан на случай  $D$  измерений. Константа связи  $\lambda$  безразмерна в четырех измерениях, и для того чтобы она оставалась безразмерной в  $D$  измерениях, ее необходимо умножить на величину  $\mu^{4-D}$ , где  $\mu$  – произвольный параметр с размерностью массы. Таким образом,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\mu^{4-D} \lambda}{4!} \phi^4. \quad (78)$$

**А.** Вывести значение комбинаторного множителя  $\frac{1}{2}$  в (74).

**Б.** Вывести значение комбинаторного множителя  $\frac{1}{2}$  в (75).

**В.** Как определить условную степень расходимости графа в общем случае ( $\mathcal{D} = 4 - E$ ) ?

**Г.** Вычислить однопетлевую поправку ( $-i\Sigma$ ) порядка  $\lambda$  к полному пропагатору:

$$\frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left[ 1 - \gamma_E + \ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (79)$$

**Д.** Вычислить однопетлевую поправку  $\Gamma(q^2)$  порядка  $\lambda^2$  к 4-точечной функции, соответствующую одной диаграмме типа "рыба":

$$\frac{i\lambda^2 \mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} - \frac{i\lambda^2 \mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left[ \gamma_E + \int_0^1 dz \ln \left( \frac{q^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] = \quad (80)$$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 2 + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} \right) \right]. \quad (81)$$

Используя явную форму поправок низшего порядка к 2- и 4-точечной функциям в теории  $\phi^4$ , выпишем соответствующие вершинные функции  $\Gamma^{(2)}(p)$  и  $\Gamma^{(4)}(p_i)$ :

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 \left( 1 - \frac{\lambda}{16\pi^2\varepsilon} \right),$$

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = G^{(2)}(p_1)^{-1} \dots G^{(2)}(p_4)^{-1} G^{(4)}(p_1, \dots, p_4).$$

Функция Грина  $G^{(4)}$  представляет собой сумму членов порядка  $\lambda$ .

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = \quad + \quad + \quad +$$

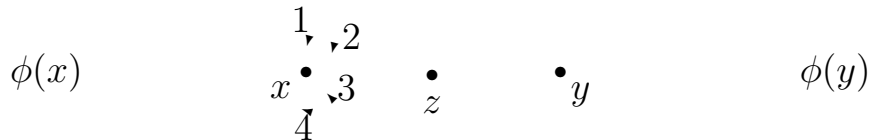
$$\Gamma^{(4)}(p_i) = -ig\mu^\varepsilon \left( 1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2\varepsilon} \right) + \text{к.ч.}$$

Эта величина также является бесконечной. Чтобы вершинные функции  $\Gamma^{(2)}$  и  $\Gamma^{(4)}$  имели физический смысл, они должны быть конечными. Это достигается с помощью перенормировки. Перенормировка – это процедура устранения расходящихся слагаемых, полученных в процессе регуляризации. Попутно заметим, что рассмотренные поправки имеют разный порядок по константе связи  $\lambda$ . Величина  $\Gamma^{(2)}$  – порядка  $\lambda$ , а величина  $\Gamma^{(4)}$  – порядка  $\lambda^2$ . Параметр, который в наших вычислениях величин  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  был одинаковым, – это число петель. В нашем случае оно равно единице.

**Решение А.** В соответствии с определением 2-точечной функции в картине взаимодействия член  $\mathcal{O}(\lambda)$  представляется корреляционной функцией

$$\langle 0 | \hat{T} \phi(x) \phi(y) \int d^4z (-i) \frac{\lambda}{4!} [\phi(z)]^4 | 0 \rangle. \quad (82)$$

Здесь есть 4 способа связать  $\phi(z)$  с  $\phi(x)$ ,



3 способа остается для связи  $\phi(z)$  с  $\phi(y)$ . Остается 2  $\phi(z)$ , которые связываются друг с другом, что приводит к рассматриваемой однопетлевой амплитуде. Таким образом, комбина-

торный фактор:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \times 4 \times 3 = -i \frac{\lambda}{2}.$$

**Решение Б.** Причина появления множителя  $1/2$  та же, что и в (74). Необходимо посчитать 4-точечную корреляционную функцию до  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ :

$$\begin{aligned} &< 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \times \\ &\times \frac{1}{2!} \int d^4 z_1 (-i) \frac{\lambda}{4!} [\phi(z_1)]^4 \int d^4 z_2 (-i) \frac{\lambda}{4!} [\phi(z_2)]^4 | 0 >. \end{aligned} \quad (83)$$

$1/2!$  возникает во втором члене ряда Тейлора для  $\hat{T} \exp[-i \int d^z \mathcal{H}]$ , но не в этом причина для искомой  $1/2$ . Прежде всего, существуют три различных типа сверток Вика: 1)  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_2)$  с одним  $z$ , например,  $\phi(z_1)^2$ , и  $\phi(x_3)$  и  $\phi(x_4)$  с  $\phi(z_2)^2$  ( $s$ -канал), 2)  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_3)$  с одинаковым  $z$  ( $t$ -канал), 3)  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_4)$  с одинаковым  $z$  ( $u$ -канал). Отсюда сумма трех членов. Рассмотрим первый случай:  $\phi(x_1)$  и  $\phi(x_2)$  свертываются с одинаковым  $z$  ( $s$ -канал). Прежде всего, есть 2 способа выбора ( $z_1$  и  $z_2$ ), амплитуды для которых одинаковы и суммируются. Поэтому  $2 \times 1/2!$  – сокращаются. Итак, выбираем  $z_1$  и убираем  $1/2!$ . Теперь 4 способа  $\phi(z_1)$  связать с  $\phi(x_1)$  и еще по 3 –  $\phi(z_1)$  связать с  $\phi(x_2)$ . Получили множитель

$$-i \frac{\lambda}{4!} \cdot 4 \cdot 3 = -i \frac{\lambda}{2}.$$

В точности такая же ситуация со сверткой  $\phi(x_3)$ ,  $\phi(x_4)$  с  $\phi(z_2)^4$ . Далее,  $\phi(z_1)^2$  и  $\phi(z_2)^2$  остаются несвернутыми, есть 2 способа свернуть. Следовательно, общий множитель:

$$\left(-i \frac{\lambda}{2}\right)^2 \cdot 2 = (-i\lambda)^2/2.$$

Можно проверить, что такой же множитель в  $t$ - и  $u$ -канальных амплитудах.

**Решение В.** Каждый пропагатор дает вклад в знаменатель второй степени  $q$ , а каждая вершина дает вклад в числитель четвертой степени  $q$  (за счет интегрирования) и



$\delta$ -функцию, выражающую закон сохранения импульса. Число независимых импульсов (по которым ведется интегрирование) равно числу петель (в случае рассмотренных выше двух диаграмм это число равно 1).

Рассмотрим диаграмму порядка  $n$ , то есть с  $n$  вершинами,  $E$  внешними линиями,  $I$  внутренними линиями и  $L$  петлями. Пусть пространство-время имеет размерность  $D$ . В этом случае вершины дают вклад в числитель степени  $D$  по  $q$ . Нас интересует степень расходимости  $\mathcal{D}$  данной диаграммы. Очевидно, что  $\mathcal{D} = DL - 2I$ . Это условная (**кажущаяся**) степень расходимости. Для рассмотренных выше диаграмм эта формула дает  $\mathcal{D} = 2$  и  $\mathcal{D} = 0$ . Выразим  $\mathcal{D}$  через  $E$  и  $n$ , исключая при этом  $I$  и  $L$ . Имеются  $I$  внутренних импульсов. В каждой вершине (их всего  $n$ ) сохраняется импульс, однако выполняется закон сохранения полного импульса, так что всего имеются  $n - 1$  соотношений между импульсами. Следовательно, число независимых импульсов равно  $I - n + 1$ . Но это число равно  $L$ :  $L = I - n + 1$ . В теории  $\phi^4$  в каждую вершину входят 4 линии, то есть всего имеется  $4n$  линий, часть из которых является внутренними, а часть – внешними. Однако при подсчете числа линий внутренние линии учитываются дважды, поскольку они связывают две вершины. Таким образом,

$$4n = E + 2I. \quad (84)$$

Из предыдущих равенств следует, что

$$\mathcal{D} = D - \left(\frac{D}{2} - 1\right) E + n(D - 4). \quad (85)$$

В случае  $D = 4$  имеем соотношение

$$\mathcal{D} = 4 - E, \quad (86)$$

откуда получаются результаты для диаграмм, рассмотренных выше. Из этого соотношения следует также, что все диаграммы с числом внешних концов, больше четырех сходятся, например, при  $E = 6$  получается  $\mathcal{D} = -2$ .

Согласно теореме Вайнберга, диаграмма Феймана сходится, если ее степень расходимости  $\mathcal{D}$ , а также степени расходимости всех ее подграфов отрицательны.

**Указание** к задачам  $\Gamma$  и  $\Delta$ : воспользоваться для вычисления интегралов формулами приложения.

## 2.2. Константы перенормировки

Рассмотрим самодействующее скалярное поле с константой связи  $\lambda$ :

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - F^2)^2 = k\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2 + const, \quad (87)$$

где  $k \equiv -\frac{1}{2}\lambda F^2$ . Для перенормировки константы связи удобно определить физическую константу связи через процесс рассеяния, в котором она может быть измерена экспериментально. Иначе физические константы связи могут быть определены с помощью обрезанной 1ЧН (одночастично неприводимой)  $n$ -точечной функции с заданными импульсами внешних линий, пропорциональными энергетическому масштабу  $\mu \ll \Lambda$ . Таким образом, определяем физическую 4-точечную константу связи посредством обрезанной 1ЧН 4-точечной функции с импульсами обрезанных внешних линий, пропорциональными  $\mu$  (точный выбор сейчас не важен). Получается функция  $\lambda_{reg}(\lambda, \mu, \Lambda)$ . Зависимость от других констант связи и массовых параметров остается неявной.

Теория считается перенормируемой, если мы можем сдвинуть параметр обрезания, изменяя  $\lambda$  (голая константа связи) таким образом, что при фиксированном значении  $\mu = \mu_0$  перенормированная константа  $\lambda_R$  конечна и принимает заданное (измеряемое) значение. Тогда очевидно, что перенормированная константа связи  $\lambda_R(\mu) \equiv \lambda_{reg}(\lambda(\Lambda), \mu, \Lambda)$  есть функция  $\mu$ , совпадающая при  $\mu_0$  с заданным значением  $\lambda_R$ . Так как

физическая константа связи вычисляется посредством полной 1ЧН 4-точечной функции, то зависимость от энергетического масштаба обусловлена квантовыми поправками. Так как вакуум в полевых теориях не пуст, вычисление не намного отличается от вычисления эффективных взаимодействий в поляризованной среде. В этом случае поляризация обусловлена виртуальными частицами, которые описывают квантовые флуктуации (нулевые) вакуума, называемые поэтому поляризацией вакуума. Энергетически зависимые константы называют бегущими константами. Подчеркнем, что изменение константы есть проявление аномалии (называемой конформной аномалией), которая представляет собой нарушение симметрии лагранжиана квантовыми поправками. В отсутствие массы теория скалярного поля с  $\varphi^4$  взаимодействием на классическом уровне инвариантна относительно масштабных преобразований,  $\varphi(x) \rightarrow k\varphi(x/k)$ , где  $k$  – параметр шкалы. Очевидно, что регуляризованные константы неинвариантны относительно такого изменения масштаба, потому что есть параметр обрезания. Что неочевидно, так это то, что для простых теорий поля, рассматриваемых в размерности 4, зависимость от масштаба не может быть скомпенсирована устранением обрезания ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ).

Когда мы говорим, что вклады от петель расходятся, то подразумеваем, что без изменения голой константы связи их вклады бесконечны в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Вычисления могут быть перестроены так, что нигде не появятся бесконечности и регуляризованные константы будут конечными при стремящемся к бесконечности параметре обрезания, если представим голую константу связи как функцию параметра обрезания  $\Lambda$ . Теория называется перенормируемой, если только конечное число голых констант связи требуется изменить для того, чтобы все 1ЧН  $n$ -точечные функции были конечны. Это эквивалентно

тому, что все 1ЧН  $n$ -точечные функции должны быть полностью определены как функции конечного числа перенормированных констант, называемых одетыми константами. Таким образом, КТП имеет предсказательную силу. Поэтому перенормируемость – необходимое требование к теории, чтобы быть нечувствительной к тому, что происходит при очень высоких энергиях с максимальной степенью предсказательной силы. SM попадает в такой класс теорий.

Теоретические исследования последних лет показали, что собственная константа хиггсовского поля почти исчезает, если мы выбираем  $\Lambda \rightarrow \infty$ , хотя и логарифмическим образом. Вообще говоря, изменение константы таково, что перенормированная константа увеличивается с увеличением энергии. Чтобы избежать того, что перенормированная константа становится бесконечной при некоторой конечной энергии, надо либо положить перенормированную константу равной нулю, либо удерживать параметр обрезания конечным. Насколько параметр обрезания будет велик, зависит от параметров модели, в частности, массы хиггса. Если масса хиггса относительно мала, это может быть планковский масштаб и будут незначительные последствия для теории. Если же масса хиггса будет порядка 1 ТэВ, то параметр обрезания должен быть немного менее 10 ТэВ.

Если мы можем измерить собственную константу хиггсовского поля и соответствующие величины, что нетривиально (это является критическим для спонтанного нарушения симметрии и генерации масс  $W$  и  $Z$  частиц), скалярный сектор SM, оказывается, зависит неявно от того, что происходит при высоких энергиях. Эта чувствительность к высоким энергиям, однако, много слабее чем у перенормируемых теорий, таких как 4-фермионное взаимодействие Ферми.

Закончим обсуждение, отметив, что бегущая константа

может как увеличиваться, так и уменьшаться при увеличении энергии. Хиггсовская собственная константа и электромагнитная константа связи  $e$  – примеры констант, которые увеличиваются при высоких энергиях. Для электрического заряда  $e$  это увеличение незначительно, и параметр обрезания может быть выбран много большим, чем планковская энергия. Аналогия с поляризацией среды: виртуальные частицы в поле заряженной частицы будут экранировать ее заряд на больших расстояниях. Когда мы исследуем заряженную частицу на достаточно малых расстояниях, эффективный заряд становится менее экранирован и увеличивается. Собственные взаимодействия в неабелевой калибровочной теории приводят к эффекту антиэкранировки, то есть эффективный заряд становится больше на больших расстояниях. Это один из путей понимания конфаймента для сильных взаимодействий. Энергия отдельного кварка внутри сферической поверхности будет увеличиваться неограниченно с увеличением радиуса. Свободный кварк имел бы бесконечную энергию. И наоборот, с уменьшением разделенности эффективный заряд становится слабее и слабее, и кварки начинают вести себя как свободные. Это явление асимптотической свободы.

В теории  $\phi^4$  перенормированные и неперенормированные константы связи в схеме с размерной регуляризацией соотносятся следующим образом:

$$\lambda_R(\mu) = \mu^{-\varepsilon} \bar{Z}^{-1}(\mu) \lambda_0, \quad (88)$$

где

$$\bar{Z}^{-1} = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2, \quad (89)$$

$Z_\lambda$  и  $Z_\phi$  определяются соотношениями (2.23), (2.36) и (2.40) из книги [11].

**А.** Покажите, что  $\beta$ -функция может быть записана как

$$\beta(\lambda_R) = -\varepsilon \lambda_R - \frac{\mu}{\bar{Z}} \frac{d\bar{Z}}{d\mu} \lambda_R. \quad (90)$$

**Б.** В однопетлевом приближении

$$Z_\lambda^{-1} = 1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2\varepsilon}, \quad Z_\phi = 1 + O(\lambda^2), \quad (91)$$

покажите, что

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3). \quad (92)$$

**В.** Вычислите  $\beta$ -функцию  $\beta(\lambda) = -M^2 d\lambda/dM^2$ , где  $\lambda$  дифференцируется при фиксированной голой константе  $\lambda_0$ .

**Г.** Проинтегрируйте  $\beta$ -функцию и получите бегущую константу связи  $\lambda(Q^2)$ .

**Решение А.** Точным дифференцированием выражения (88) получаем

$$\beta(\lambda_R) = \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu^{-\varepsilon} \bar{Z}^{-1}(\mu) \lambda_0) = \quad (93)$$

$$= -\varepsilon \mu^{-\varepsilon} \bar{Z}^{-1}(\mu) \lambda_0 - \mu^{-\varepsilon} \frac{\mu}{\bar{Z}^2} \frac{d\bar{Z}}{d\mu} \lambda_0 = -\varepsilon \lambda_R - \frac{\mu}{\bar{Z}} \frac{d\bar{Z}}{d\mu} \lambda_R. \quad (94)$$

**Решение Б.** Учитывая однопетлевой результат (91) в (89), получаем

$$\bar{Z}^{-1} = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \simeq Z_\lambda^{-1} = 1 - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2\varepsilon} \quad (95)$$

или  $\bar{Z} \simeq 1 + (3\lambda_R/16\pi^2\varepsilon)$ . Таким образом,

$$\mu \frac{d\bar{Z}}{d\mu} = \frac{3}{16\pi^2\varepsilon} \mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{3}{16\pi^2\varepsilon} \beta(\lambda_R) \quad (96)$$

и, пренебрегая членами более высокого порядка, получаем

$$\frac{1}{\bar{Z}} \mu \frac{d\bar{Z}}{d\mu} \simeq \frac{3}{16\pi^2\varepsilon} \beta(\lambda_R). \quad (97)$$

В таком подходе соотношение (90) превращается в

$$\beta(\lambda_R) = -\varepsilon \lambda_R - \left( \frac{\mu}{\bar{Z}} \frac{d\bar{Z}}{d\mu} \right) \lambda_R = -\varepsilon \lambda_R - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2\varepsilon} \beta(\lambda_R). \quad (98)$$

Решая для  $\beta(\lambda_R)$ , получаем

$$\beta(\lambda_R) = -\varepsilon \lambda_R \left( 1 + \frac{3\lambda_R}{16\pi^2\varepsilon} \right)^{-1} \simeq -\varepsilon \lambda_R \left( 1 - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2\varepsilon} \right). \quad (99)$$

Рассматривая предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем результат:

$$\beta(\lambda_R) = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2} + O(\lambda_R^3). \quad (100)$$

**Замечание.** Более общий анализ зависимости  $\beta(\lambda)$  от  $\varepsilon$  может быть проведен следующим образом. Сначала запишем (88) как

$$\lambda_0 = \lambda(\mu) \mu^\varepsilon \bar{Z} \quad (101)$$

Из  $\mu \frac{d\lambda_0}{d\mu} = 0$  получаем

$$\mu^\varepsilon \left[ \varepsilon(\lambda \bar{Z}) + \mu \frac{d}{d\mu}(\lambda \bar{Z}) \right] = 0 \quad \text{или} \quad -\varepsilon(\lambda \bar{Z}) = \mu \frac{d}{d\mu}(\lambda \bar{Z}) \quad (102)$$

В  $\overline{MS}$  схеме  $\bar{Z}$  может быть переписано как разложение по степеням  $(\frac{1}{\varepsilon})$ ,

$$\bar{Z} = 1 + \frac{b_1(\lambda)}{\varepsilon} + \frac{b_2(\lambda)}{\varepsilon^2} + \dots, \quad (103)$$

тогда

$$\lambda \bar{Z} = \lambda + \frac{a_1(\lambda)}{\varepsilon} + \frac{a_2(\lambda)}{\varepsilon^2} + \dots, \quad (104)$$

где  $a_i(\lambda) = \lambda b_i(\lambda)$ . Дифференцируя обе части этого уравнения, получаем

$$\mu \frac{d}{d\mu}(\lambda \bar{Z}) = \left[ 1 + \sum_{n=1} \frac{da_n}{d\lambda} \frac{1}{\varepsilon^n} \right] \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \left[ 1 + \sum_{n=1} \frac{da_n}{d\lambda} \frac{1}{\varepsilon^n} \right] \beta(\lambda). \quad (105)$$

Сотношение (102) становится

$$-\varepsilon \left[ \lambda + \frac{a_1(\lambda)}{\varepsilon} + \frac{a_2(\lambda)}{\varepsilon^2} + \dots \right] = \beta(\lambda) \left[ 1 + \frac{da_1}{d\lambda} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{da_2}{d\lambda} \frac{1}{\varepsilon^2} + \dots \right]. \quad (106)$$

Допуская, что  $\beta(\lambda)$  является конечным разложением по  $\varepsilon$ ,

$$\beta(\lambda) = [\beta_0 + \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \dots + \beta_M \varepsilon^M]. \quad (107)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в обеих сторонах равенства (106), видим, что разложение  $\beta(\lambda)$  заканчивается после первой степени  $\varepsilon$  ( $\beta_k = 0$  for  $k > 1$ ):

$$\beta(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon. \quad (108)$$

Тогда из (106) получаем

$$\beta_1 = -\lambda \quad (109)$$

и

$$\beta_0 + \beta_1 \frac{da_1}{d\lambda} = -a_1, \quad \text{или} \quad \beta_0 = -a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda}. \quad (110)$$

Таким образом,  $\beta$ -функция задается

$$\beta(\lambda) = -\lambda\varepsilon - a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} \rightarrow -a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (111)$$

Используя  $a_1 = \lambda b_1$ , получаем

$$\beta(\lambda) = \lambda^2 \left( \frac{db_1}{d\lambda} \right). \quad (112)$$

В действительности, соотношение (106) также связывает различные степени  $(\frac{1}{\varepsilon})$  в разложении  $\bar{Z}$  (или  $\lambda\bar{Z}$ ). Из коэффициента  $(\frac{1}{\varepsilon})^n$  имеем

$$-a_{n+1} = \beta_0 \frac{da_n}{d\lambda} + \beta_1 \frac{da_{n+1}}{d\lambda} = \left( -a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} \right) \frac{da_n}{d\lambda} - \lambda \frac{da_{n+1}}{d\lambda}$$

или

$$-a_{n+1} + \lambda \frac{da_{n+1}}{d\lambda} = \left( -a_1 + \lambda \frac{da_1}{d\lambda} \right) \frac{da_n}{d\lambda}. \quad (113)$$

Так что все коэффициенты  $a_n$  с  $n > 1$  могут быть определены из  $a_1$  повторным использованием (113).

**Указание** к задаче **В**. Вычисленная  $iM$  добавляется к голой константе связи  $-i\lambda_0$  в низшем порядке, и, следовательно,

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{M^2}{m^2}. \quad (114)$$

### 2.3. Однородное РГ уравнение

Рассмотрим теорию  $\phi^4$  в  $D$ -мерном пространстве-времени с лагранжианом (78)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi_R)^2 - \frac{m_R^2}{2} \phi_R^2 - \frac{\lambda_R \mu^\varepsilon}{4!} \phi_R^4 + (\text{контрчлены}), \quad (115)$$

где  $\lambda_R$ ,  $\phi_R$  и  $m_R$  – перенормированные величины.



Используем факт, что неперенормированные  $n$ -точечные функции Грина  $\Gamma^{(n)}(p_i, \lambda_0, m_0)$  зависят от голых параметров  $(m_0, \lambda_0)$  и не зависят от массовой шкалы  $\mu$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(n)}(p_i, \lambda_0, m_0) = 0, \quad \text{с фиксированными } m_0, \lambda_0, \quad (116)$$

чтобы вывести ренормгрупповое (РГ) уравнение для данной теории.

**Решение.** Соотношение (3.50) из книги [11] между неперенормированной и перенормированной функциями Грина

$$\Gamma^{(n)}(p_i, \lambda_0, m_0) = Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu). \quad (117)$$

Так что утверждение  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(n)} = 0$  означает

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu) \right] = 0. \quad (118)$$

Заметим, что и  $\lambda_R$ , и  $m_R$  зависят явно от  $\mu$ . Так что имеем

$$\left[ -\frac{n}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\phi + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \mu \frac{\partial m_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_R} \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu) = 0$$

Определяя

$$\gamma(\lambda_R) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\phi, \quad \beta(\lambda_R) = \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu}, \quad \gamma_m(\lambda_R) m_R = \mu \frac{\partial m_R}{\partial \mu}, \quad (119)$$

мы можем записать РГУ как

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda_R) \frac{\partial}{\partial \lambda_R} - n\gamma(\lambda_R) + m_R \gamma_m(\lambda_R) \frac{\partial}{\partial m_R} \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu) = 0. \quad (120)$$

**Замечание 1.** В таком выводе подразумевается, что голые величины  $\lambda_0$  и  $m_0$  зафиксированы.

**Замечание 2.** Данное уравнение является однородным и поэтому более удобным для работы, чем оригинальное уравнение Каллана–Симанчика.

## 2.4. Однопетлевое РГУ в безмассовой теории

При перенормировке безмассовой теории  $\phi^4$  мы можем импульсно вычесть при  $p^2 = -M^2$ , чтобы избежать инфракрасных сингулярностей. В этом случае РГ уравнение принимает форму

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right] \Gamma_R^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (121)$$

Проверьте точно, в однопетлевой результат для 4-точечной функции  $\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$  удовлетворяет этому РГ уравнению.

**Решение.** В однопетлевом приближении 4-точечная функция имеет форму

$$\Gamma_0^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda_0 + \Gamma(s) + \Gamma(t) + \Gamma(u), \quad (122)$$

где  $\Gamma(p^2)$  в схеме размерной регуляризации задается выражением

$$\Gamma(p^2) = \frac{i\lambda_0^2}{32\pi^2} \left\{ \frac{2}{4-D} - \int_0^1 d\alpha \ln \alpha(1-\alpha) - \ln(-p^2) \right\}. \quad (123)$$

Предположим, мы делаем подстановку при некотором пространственно-подобном импульсе  $p^2 = -M^2$ . Тогда мы имеем

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = \Gamma(p^2) - \Gamma(-M^2) = \frac{-i\lambda_0^2}{32\pi^2} \ln \left( \frac{-p^2}{M^2} \right), \quad (124)$$

где зависимость от  $M$  достаточно проста (по сравнению с  $\mu^2$  зависимостью в массивной теории). Перенормируемая функция Грина имеет вид

$$\Gamma_R^{(4)}(s, t, u) = -i\lambda + \tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u), \quad (125)$$

получаем

$$M \frac{\partial}{\partial M} \Gamma_R^{(4)}(s, t, u) = \frac{3i\lambda^2}{16\pi^2} \quad (126)$$

Также имеем

$$\beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma_R^{(4)}(s, t, u) = \left( \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \right) [-i + O(\lambda)], \quad (127)$$

где мы использовали соотношение

$$\beta(\lambda) = \left( \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \right) + O(\lambda^3). \quad (128)$$

Поэтому из (3.48) [11], где  $\gamma(\lambda) \simeq O(\lambda^2)$ , видим, что  $\Gamma_R^{(4)}(s, t, u)$  удовлетворяет РГУ в порядке  $\lambda^2$ .

## 2.5. Двухпетлевая перенормировка поля

Рассмотрим перенормировку поля в теории  $\phi^4$ . Контрчлен  $\frac{1}{2} \delta_Z (\partial_\mu \phi)^2$  не появляется на однопетлевом уровне перенормированной теории возмущений, потому что однопетлевая диаграмма представляет собой импульсно независимую амплитуду. На двухпетлевом уровне появляется импульсно зависящая 1ЧН диаграмма, именно поэтому во втором порядке  $\delta_Z^{(2)} \neq 0$ .

**А.** Проверьте, что однопетлевая скалярная двухточечная функция не генерирует перенормировку волновой функции, а дает квадратично расходящуюся перенормировку массы.

**Б.** Вычислить необходимую двухпетлевую диаграмму и контрчлен<sup>4</sup>  $\delta_Z^{(2)}$ . Обосновать происхождение комбинаторного множителя.

Это трудное кропотливое вычисление. Сначала скомбинируем три пропагатора, используя фейнмановские параметры и сдвигая два независимых петлевых импульса, чтобы переписать петлевой интеграл в следующем виде:

$$\iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \iint \frac{d^4 \ell_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \ell_2}{(2\pi)^4} \frac{2}{[\alpha \ell_1^2 + \beta \ell_2^2 + \gamma p^2 - m^2 + i\varepsilon]^3}$$

для некоторых  $(x, y, z)$ -зависимых коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$ . Далее, поворот Вика для  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в евклидово пространство, размерная регуляризация к  $D < 4$  и вычисление интегралов по импульсам. Третье, для вычисления контрчлена  $\delta_Z$  возьмем

---

<sup>4</sup>Задача взята из книги [8] (10.3).

производную  $d\Sigma/dp^2$  перед интегрированием по фейнмановским параметрам либо переходя к пределу  $D \rightarrow 4$ . Четвертое, возьмем предел  $D \rightarrow 4$  и запишем контрчлен как

$$\delta_Z^{(2)} = \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) F(x, y, z) \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \text{const} + \ln G(x, y, z) \right\}$$

с некоторыми рациональными функциями  $F$  и  $G$  от фейнмановских параметров.

Для упрощения вычисления интеграла заменим переменные  $(x, y, z)$  на  $(w, \xi)$ :  $x = \xi w$ ,  $y = (1 - \xi)w$ ,  $z = 1 - w$ , затем проинтегрируем первый раз по  $w$ , второй раз по  $\xi$ . Полезными могут оказаться следующие соотношения:

$$\iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{xyz}{(xy + xz + yz)^3} = \frac{1}{2}, \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{xyz}{(xy + xz + yz)^3} \ln \frac{(xy + xz + yz)^3}{(xy + xz + yz - xyz)^2} &= \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (130)$$

**Решение Б.** На двухпетлевом уровне есть только одна, зависящая от  $p$ , 1ЧН диаграмма Фейнмана с двумя внешними линиями.

$$\begin{aligned} i\Sigma_{2\text{-петл.}}(p^2) &= \frac{(-i\lambda)^2}{6} \iint \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^8} \times \\ &\times \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(k_1 + k_2 + p)^2 - m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned}$$

С помощью параметров Фейнмана  $x, y$  и  $z$  произведение пропагаторов представим в виде

$$\iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2i^3}{D^3},$$

где

$$\begin{aligned} D &= xk_1^2 + yk_2^2 + z(k_1 + k_2 + p)^2 - m^2 + i\varepsilon = \\ &= \alpha\ell_1^2 + \beta\ell_2^2 + \gamma p^2 - m^2 + i\varepsilon \end{aligned}$$

для

$$\ell_1 = k_1 + \frac{z}{x+z}(k_2 + p), \quad \ell_2 = k_2 + \frac{xz}{xy + xz + yz} p,$$

$$\alpha = x + z, \quad \beta = \frac{xy + xz + yz}{x + z}, \quad \gamma = \frac{xyz}{xy + xz + yz}.$$

Заметим, что якобиан  $d(\ell_1, \ell_2)/(dk_1, dk_2) = 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_{2\text{-петл.}}(p^2) &= \frac{\lambda^2}{6} \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \iint \frac{d^4 \ell_1 d^4 \ell_2}{(2\pi)^8} \times \\ &\quad \times \frac{2}{[\alpha \ell_1^2 + \beta \ell_2^2 + \gamma p^2 - m^2 + i\varepsilon]^3} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{2\text{-петл.}}}{dp^2} &= \frac{\lambda^2}{6} \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \gamma(x, y, z) \iint \frac{d^4 \ell_1 d^4 \ell_2}{(2\pi)^8} \times \\ &\quad \times \frac{-6}{[\alpha \ell_1^2 + \beta \ell_2^2 + \gamma p^2 - m^2 + i\varepsilon]^4}. \end{aligned} \quad (131)$$

Теперь сделаем поворот Вика для петлевых импульсов  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в евклидово пространство и размерную регуляризацию:

$$\begin{aligned} &\iint \frac{d^D \ell_1 d^D \ell_2}{(2\pi)^{(2D)}} \frac{+6 \mu^{2\varepsilon}}{[\alpha(\ell_1^E)^2 + \beta(\ell_2^E)^2 - \gamma p^2 + m^2]^4} = \\ &= \int_0^\infty d\rho \rho^3 \mu^{2\varepsilon} e^{-\rho(m^2 - \gamma p^2)} \iint \frac{d^D \ell_1 d^D \ell_2}{(2\pi)^{(2D)}} e^{-\rho\alpha(\ell_1^E)^2} e^{-\rho\beta(\ell_2^E)^2} = \\ &= \int_0^\infty d\rho \rho^3 \mu^{2\varepsilon} e^{-\rho(m^2 - \gamma p^2)} (4\pi\rho\alpha)^{-D/2} (4\pi\rho\beta)^{-D/2} = \\ &= \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^4} (\alpha\beta)^{\varepsilon/2-2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - \gamma p^2} \right)^\varepsilon \xrightarrow{D \rightarrow 4} \\ &\xrightarrow{D \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{(\alpha\beta)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2 \sqrt{\alpha\beta}}{m^2 - \gamma p^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя этот регуляризованный импульсный интеграл обратно в (131), получаем

$$\begin{aligned} \delta_Z^{(2)} &= - \left. \frac{d\Sigma_{2\text{-петл.}}}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} = - \frac{\lambda^2}{1536\pi^4} \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma}{(\alpha\beta)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + \ln \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{1 - \gamma} \right) = \\ &= - \frac{\lambda^2}{1536\pi^4} \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{xyz}{(xy + xz + yz)^3} \times \end{aligned}$$

$$\times \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(xy + xz + yz)^3}{(xy + xz + yz - xyz)^2} \right).$$

Вычисление оставшегося интеграла по параметрам Фейнмана достаточно длительно. Результат, полученный с помощью программы Mathematica, следующий:

$$\delta_Z^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{3072\pi^4} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \frac{3}{4} \right).$$

### 3. ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИЯХ С ФОТОНАМИ И ФЕРМИОНАМИ

#### 3.1. Расходимости в скалярной теории и в КЭД

**А.** Анализируя степень расходимости, постройте контрчлены и нарисуйте все однопетлевые расходящиеся 1ЧН графы для теории действительного скалярного поля с взаимодействием вида

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_1}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda_2}{4!}\phi^4. \quad (132)$$

**Б.** Анализируя степень расходимости, постройте контрчлены для лагранжиана КЭД

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (133)$$

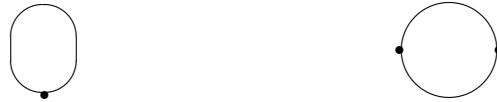
где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

Контрчлены должны быть калибровочно инвариантны.

**Решение А.** Кажущаяся степень расходимости  $\mathcal{D}$  связана с числом внешних бозонных линий  $B$  и числом  $\phi^3$  вертексов  $n_1$  [11] (2.133)

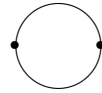
$$\mathcal{D} = 4 - B - n_1. \quad (134)$$

**і** Для однопетлевых расходящихся 1ЧН графов



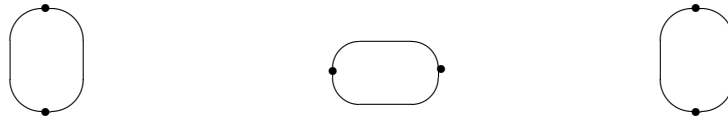
(диаграммы собственной энергии)  $B = 2$ .  $\mathcal{D} = 2 - n_1$ . Так как число внешних линий четно, то  $n_1$  также должно быть четно,  $n_1 = 0$  и  $2$  приводят к квадратично расходящемуся  $\phi^2$  и логарифмически расходящемуся  $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$  контрчленам.

ii Для однопетлевого расходящегося 1ЧН графа



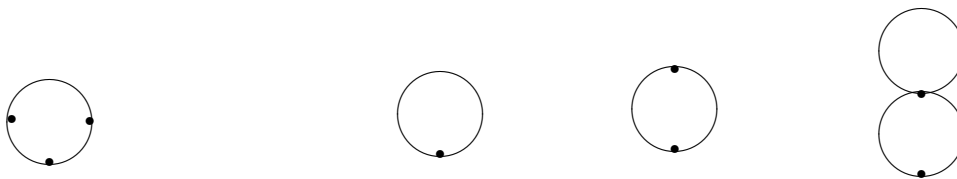
( $\phi^3$ -вертекс диаграмма)  $B = 3$ .  $\mathcal{D} = 1 - n_1 = 0$ , так как  $n_1$  должно быть нечетным (поэтому  $n_1 = 1$ ), приводя к логарифмически расходящемуся  $\phi^3$  контрчлену.

iii Для однопетлевого расходящегося 1ЧН графа



( $\phi^4$ -вертекс диаграмма)  $B = 4$ .  $\mathcal{D} = 0$  приводит к логарифмически расходящемуся  $\phi^4$  контрчлену.

**Замечание.** Можно также рассмотреть диаграммы “tadpole” (“головастик”)



а

б

с  $B = 1$  и  $\mathcal{D} = 3 - n_1$  с нечетным  $n_1 = 1$  и  $3$ . Квадратично расходящиеся показаны на рисунке (б), логарифмически расходящиеся – на (а).

**Решение Б.** Здесь количества внешних бозонных и фермионных линий удовлетворяют

$$\mathcal{D} = 4 - B - \frac{3}{2}F. \quad (135)$$

Перечислим все возможные члены, начиная с меньшего количества возможных внешних фермионных (электронных) и бозонных (фотонных) линий.

**i** Для диаграммы поляризации вакуума



$F = 0$ ,  $B = 2$ . Поэтому условная степень расходимости  $\mathcal{D} = 2$  (квадратичная расходимость). Чтобы получить конечный член, необходимо разложить соответствующий вклад  $\pi_{\mu\nu}(k)$  выше второго порядка по импульсу фотона  $k$ :

$$\pi_{\mu\nu}(k) = \pi_{\mu\nu}(0) + k^2 g_{\mu\nu} \pi_1(0) + k_\mu k_\nu \pi_2(0) + \tilde{\pi}_{\mu\nu}(k). \quad (136)$$

Поэтому требуемые контрчлены:  $(A)^2$  и  $(\partial A)^2$ . Но нет калибровочно инвариантного контрчлена без производной  $(A)^2$ . Однако есть калибровочно инвариантный член  $(\partial A)^2$ , имеющий ту же форму, что и член кинетической энергии фотона  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ :  $(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ .

**ii** Для диаграммы фотон-фотонного рассеяния



$F = 0$ ,  $B = 4$ . Здесь  $\mathcal{D} = 0$  (логарифмическая расходимость). Находим

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) = \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}(0) + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i), \quad (137)$$



где член  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)$  конечен. Требуемый контрчлен имеет форму (A)<sup>4</sup>. Однако невозможно сконструировать такой член, являющийся калибровочно инвариантным. Поэтому мы ожидаем, что  $\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)$  конечный.

**iii** Для диаграммы собственной энергии электрона



$F = 2, B = 0$ . Степень расходимости – единица, она линейно расходится. Имеем

$$\Sigma(p) = \Sigma(0) + \hat{p}\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p), \quad (138)$$

где ожидаем, что  $\Sigma(0)$  линейно (или логарифмически) и  $\Sigma'(0)$  логарифмически расходятся, а  $\tilde{\Sigma}(p)$  сходится. Требуемые контрчлены  $\Sigma(0)\bar{\psi}\psi$  и  $\Sigma'(0)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ , соответственно.

**iv** Для диаграммы электрон-фотонного вертекса



$F = 2, B = 1$ . Имеем логарифмическую расходимость ( $\mathcal{D} = 0$ ). Откуда

$$\Gamma_\mu(p, q) = \Gamma_\mu(0) + \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) \quad (139)$$

с контрчленом формы  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ .

### 3.2. Модель взаимодействующих скалярного и фермионных полей

Вычислить в однопетлевом приближении собственную энергию скалярного поля  $\phi$  с массой  $m$ , взаимодействующего с двумя типами фермионов с массами  $m_1$  и  $m_2$  с юкавскими

константами связи  $g$ . Соответствующий лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{6}\lambda\phi^3 + \\ & + \sum_i \bar{\Psi}_{(i)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_i)\Psi_{(i)} - g\phi(\bar{\Psi}_{(1)}\Psi_{(2)} + \bar{\Psi}_{(2)}\Psi_{(1)}). \end{aligned} \quad (140)$$

**Решение.** Собственная энергия скалярного поля в однопетлевом порядке является суммой вкладов фермионной ( $\Sigma_1$ ) и скалярной петли ( $\Sigma_2$ ) (в этом порядке  $Z \equiv 1$ ):

$$\Sigma_\phi(q) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Аналитические выражения для  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & -\frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\text{Tr}[(\hat{k} + m_1)(\hat{k} + \hat{q} + m_2)]}{(k^2 - m_1^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - m_2^2 + i\varepsilon)}, \\ \Sigma_2 = & \frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Ясно, что данные интегралы расходятся. Заменяя импульс обрезания на  $\Lambda$ , находим  $\Sigma_1 \sim \Lambda^2$  и  $\Sigma_2 \sim \ln \Lambda$  в низшем неисчезающем порядке по  $1/\Lambda$ . Говорят, что  $\Sigma_1$  расходится квадратично,  $\Sigma_2$  – логарифмически.

Используем параметризацию Фейнмана (A.20) для  $\Sigma_1$  с заменой  $a = (k+q)^2 - m_2^2 + i\varepsilon$  и  $b = k^2 - m_1^2 + i\varepsilon$ . Для  $\Sigma_2$  сделаем также, только  $m_1 = m_2 = m$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & -\frac{4ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \times \\ & \times \int_0^1 dx \frac{k^2 + kq + m_1 m_2}{((k + (1-x)q)^2 + x(1-x)q^2 - xm_1^2 - (1-x)m_2^2 + i\varepsilon)^2}, \\ \Sigma_2 = & \frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 dx \frac{1}{((k + (1-x)q)^2 + x(1-x)q^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Сделав сдвиг по переменной интегрирования  $k \rightarrow k - (1-x)q$ , находим

$$\Sigma_1 = -\frac{4ig^2}{(2\pi)^4} \int d_D k \int_0^1 dx \frac{k^2 - (1-2x)kq + m_1 m_2 + x(x-1)q^2}{(k^2 - \hat{M}_{x,q}^2 + i\varepsilon)^2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int d_D k \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - M_{x,q}^2 + i\varepsilon)^2},$$

где

$$\hat{M}_{x,q}^2 = xm_1^2 + (1-x)m_2^2 - x(1-x)q^2 \text{ и } M_{x,q}^2 = m^2 - x(1-x)q^2,$$

что позволяет выразить  $\Sigma_i$  через интегралы  $I_{D,\alpha,\beta}(m)$ :

$$\Sigma_1 = -\frac{4ig^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ I_{D,1,2}(\hat{M}_{x,q}) + (m_1m_2 - x(1-x)q^2) I_{D,0,2}(\hat{M}_{x,q}) \right\},$$

$$\Sigma_2 = \frac{i\lambda^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx I_{D,0,2}(M_{x,q}).$$

Подставляя выражения для  $I_{D,\alpha,\beta}(M)$ , находим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{4g^2\pi^{D/2}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma(2 - D/2) \frac{m_1m_2 - x(1-x)q^2}{(\hat{M}_{x,q}^2 - i\varepsilon)^{2-D/2}\Gamma(2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma(1 + D/2)\Gamma(1 - D/2)}{(\hat{M}_{x,q}^2 - i\varepsilon)^{1-D/2}\Gamma(2)\Gamma(D/2)} \right\}, \\ \Sigma_2 &= -\frac{\lambda^2\pi^{D/2}}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(M_{x,q}^2 - i\varepsilon)^{2-D/2}\Gamma(2)}. \end{aligned}$$

Упростим далее, используя

$$\frac{\Gamma(1 + D/2)\Gamma(1 - D/2)}{\Gamma(2 - D/2)\Gamma(D/2)} = \frac{D}{2 - D}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{4g^2\pi^{D/2}\Gamma(2 - D/2)}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ \frac{m_1m_2 - x(1-x)q^2}{(\hat{M}_{x,q}^2 - i\varepsilon)^{2-D/2}} - \frac{D/(2 - D)}{(\hat{M}_{x,q}^2 - i\varepsilon)^{1-D/2}} \right\}, \\ \Sigma_2 &= -\frac{\lambda^2\pi^{D/2}\Gamma(2 - D/2)}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(M_{x,q}^2 - i\varepsilon)^{2-D/2}}. \end{aligned}$$

Расходящаяся часть теперь полностью содержится в  $\Gamma(2 - D/2)$ , потому что

$$\Gamma(2 - D/2) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}(4 - D))}{\frac{1}{2}(4 - D)} = \frac{2}{4 - D} - \gamma_E + \mathcal{O}(4 - D).$$

### 3.3. Псевдоскалярная теория Юкавы

В данном параграфе проведена перенормировка псевдоскалярной теории Юкавы, в рамках которой рассматривается взаимодействие скалярных и фермионных полей. Определены условно расходящиеся диаграммы. Сформулированы фейнмановские правила для перенормированной теории возмущений с заданным лагранжианом, включены все необходимые контрчленные вершины. Контрчлены вычислены в однопетлевом приближении теории возмущений с использованием физических условий перенормировки и размерной регуляризации<sup>5</sup>.

**А.** Определите условно расходящиеся диаграммы и сформулируйте фейнмановские правила для перенормированной теории возмущений с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - M)\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi, \quad (141)$$

где  $\phi$  – действительное скалярное поле,  $\psi$  – дираковский фермион. Заметим: лагранжиан инвариантен относительно преобразования четности  $\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \gamma^0\psi(t, -\vec{x})$ ,  $\phi(t, \vec{x}) \rightarrow -\phi(t, -\vec{x})$ , если поле  $\phi$  обладает отрицательной четностью. Включите все необходимые контрчленные вершины. Покажите, что теория содержит расходящуюся амплитуду  $4\phi$ . Это означает, что теорию нельзя перенормировать, если не включить скалярное самодействие

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (142)$$

и аналогичный контрчлен. Конечно, можно положить перенормированное значение этой константы связи равным нулю, но это неестественный выбор, так как контрчлен все равно будет отличным от нуля. Требуется ли какие-то другие взаимодействия?

**Б.** Вычислите в однопетлевом приближении теории возмущений **расходящуюся часть** (полюс при  $D \rightarrow 4$ ) каждого

<sup>5</sup>Задача взята из книги [8] (10.2).

контрчлена, наложив необходимое количество условий перенормировки. **Не следует беспокоиться о конечных частях контрчленов.** Поскольку расходящиеся части должны иметь фиксированную зависимость от внешних импульсов, можно упростить вычисления, выбрав эти импульсы простейшим возможным способом.

$$\delta_\lambda^{1\text{-петл.}} = \frac{3\lambda^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \text{к.ч.} \right) - \frac{24g^4\mu^\varepsilon}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (143)$$

$$\delta_g^{1\text{-петл.}} = -\frac{g^3\mu^{\varepsilon/2}}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (144)$$

$$\delta_Z^\psi[1\text{-петл.}] = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (145)$$

$$\delta_M^\psi[1\text{-петл.}] = -\frac{g^2 M}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (146)$$

$$\delta_Z^\phi[1\text{-петл.}] = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (147)$$

$$\delta_m^\phi[1\text{-петл.}] = \left[ \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} + \frac{g^2(M^2 - m^2)}{8\pi^2} \right] \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \text{к.ч.} \quad (148)$$

**В.** Докажите, что для условий перенормировки вне массовой поверхности при некотором масштабе перенормировки  $M \gg M, m$  каждый из логарифмически расходящихся контрчленов  $\delta_Z^\phi$ ,  $\delta_Z^\psi$ ,  $\delta_g$  и  $\delta_\lambda$  имеет вид

$$\delta = C \ln \frac{(\Lambda)^2}{M^2} + \text{к.ч.} \quad (149)$$

либо

$$\delta = C \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \text{к.ч.} \quad (150)$$

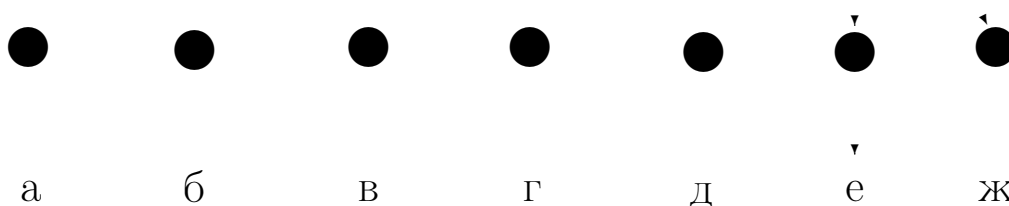
в размерной регуляризации. Коэффициент  $C$  в УФ расходящейся части одинаков во всех схемах перенормировки (на массовой поверхности и вне), а конечные части не зависят от  $M$ .

**Решение А.** Условная степень расходимости диаграммы в теории Юкавы, как и в КЭД, зависит только от числа внешних хвостов каждого типа:

$$\mathcal{D} = 4 - E_\phi - \frac{3}{2}E_\psi. \quad (151)$$

Согласно (151), существуют только семь типов условно расходящихся амплитуд, представленных на рисунке.

$$\mathcal{D} = 4 \quad \mathcal{D} = 3 \quad \mathcal{D} = 2 \quad \mathcal{D} = 1 \quad \mathcal{D} = 0 \quad \mathcal{D} = 1 \quad \mathcal{D} = 0$$



Поправка (а) приводит к ненаблюдаемому сдвигу энергии вакуума и не дает вклада в элементы  $S$ -матрицы, то есть не имеет отношения к процессам рассеяния.

Амплитуды (б) и (г) обращаются в нуль в силу симметрии относительно преобразования четности. Поскольку псевдоскалярное поле  $\phi$  – нечетное, то амплитуды с нечетным числом внешних псевдоскалярных частиц и без фермионов должны иметь нечетную зависимость от импульсов частиц. Но, чтобы создать нечетную лоренц-инвариантную комбинацию лоренцевых векторов  $p_1^\alpha, p_2^\beta, \dots$ , необходим  $\epsilon$ -тензор  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma p_4^\delta$ , требующий, по крайней мере, 4 линейно независимых импульса (в  $D = 4$  пространстве-времени) и, следовательно,  $n \geq 5$  внешних хвостов у диаграммы. Амплитуды (б) и (г) исчезают тождественно, так как включают один либо три псевдоскаляра без фермионов.

В отличие от КЭД, в теории Юкавы не нужно рассматривать тождества Уорда, поэтому условная расходимость 1ЧН амплитуды совпадает с действительной. Раскладывая 1ЧН амплитуды (в), (д), (е) и (ж) по степеням относительного им-

пульса, определяем расходимости:

$$(в) \quad \Sigma_\phi(p^2) = \mathcal{O}(\Lambda^2) \times \text{const} + \mathcal{O}(\ln \Lambda) \times p^2 + \text{к.ч.};$$

$$(д) \quad \mathcal{M}(s, t, u) = \mathcal{O}(\ln \Lambda) \times \text{const} + \text{к.ч.};$$

$$(е) \quad \Sigma_\psi(\hat{p}) = \mathcal{O}(\Lambda^1) \times \text{const} + \mathcal{O}(\ln \Lambda) \times \hat{p} + \text{к.ч.};$$

$$(ж) \quad \Gamma^5(p', p) = \gamma^5 \times \mathcal{O}(\ln \Lambda) \times \text{const} + \text{к.ч.}$$

Для того чтобы сократить эти расходимости в перенормированной теории возмущений, необходимо 4 контрчленных вертекса, представленные на рисунке. Они получаются из локальных по  $x$  контрчленов перенормированного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{к/чл}} = \frac{1}{2} \delta_Z^\phi (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta_m^\phi \phi^2 - \frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi^4 + i \delta_Z^\psi \bar{\psi} \hat{\partial} \psi - \delta_M^\psi \bar{\psi} \psi - i \delta_g \phi \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (152)$$

$$\text{для (в)} \longrightarrow \bullet = -i \delta_m^\phi + i p^2 \delta_Z^\phi$$

$$\text{для (д)} \longrightarrow \bullet = -i \delta_\lambda$$

$$\text{для (е)} \longrightarrow \blacktriangleright \bullet \blacktriangleright = -i \delta_M^\psi + i \hat{p} \delta_Z^\psi$$

$$\text{для (ж)} \longrightarrow \blacktriangleright \bullet \blacktriangleright = -\delta_g \gamma^5$$

Для того чтобы ввести такие контрчлены, начнем с того, что в голем лагранжиане

$$\mathcal{L}_{\text{гол}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4 + \bar{\psi}_0 (i \hat{\partial} - M_0) \psi_0 - i g_0 \phi_0 \bar{\psi}_0 \gamma^5 \psi_0 \quad (153)$$

перенормируем голые поля  $\phi_0(x) = \sqrt{Z_\phi} \phi_r(x)$ ,  $\psi_0(x) = \sqrt{Z_\psi} \psi_r(x)$ , затем разобьем его

$$\mathcal{L}_{\text{гол}} = \mathcal{L}_{\text{физ}} + \mathcal{L}_{\text{к/чл}},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{физ}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_{\text{физ}}^2 \phi_r^2 - \frac{1}{4!} \lambda_{\text{физ}} \phi_r^4 + \\ & + \bar{\psi}_r (i \hat{\partial} - M_{\text{физ}}) \psi_r - i g_{\text{физ}} \phi_r \bar{\psi}_r \gamma^5 \psi_r, \end{aligned} \quad (154)$$

тогда контрчлены определяются следующими соотношениями ( $\phi \equiv \phi_r$  и  $\psi \equiv \psi_r$ ):

$$\begin{aligned} \delta_Z^\phi &= Z_\phi - 1, & \delta_Z^\psi &= Z_\psi - 1, & \delta_m^\phi &= Z_\phi m_0^2 - m_{\text{физ}}^2, \\ \delta_M^\psi &= Z_\psi M_0 - M_{\text{физ}}, & \delta_\lambda &= Z_\phi^2 \lambda_0 - \lambda_{\text{физ}}, & \delta_g &= Z_\psi Z_\phi^{1/2} g_0 - g_{\text{физ}}. \end{aligned}$$

Видим, что на однопетлевом уровне для заданной теории все контрчлены в (152) определены. В частности, нам необходим  $\delta_\lambda$ , даже если начинаем с  $\lambda_{\text{физ}} = 0$ . Таким образом, с точки зрения голого лагранжиана  $\lambda_{\text{физ}} = 0$  не имеет особого значения:  $\lambda_0 \neq 0$ , и исчезновение частичной амплитуды рассеяния, что мы используем для определения физической  $\lambda$ , будет случайным. Другими словами, мы *точно подстраиваем*  $\lambda_0$  для достижения  $\lambda = 0$ , как раз мы можем подстроить  $\lambda_0$  для достижения любой другой экспериментальной величины физической константы связи, но это не будет иметь какого-либо особого значения собственно для самой теории.

Это пример общего правила: **перенормируемые квантовые теории поля имеют все перенормируемые константы связи в соответствии с симметриями теории (исключая тонкую подстройку параметров-каплингов)**. Для рассматриваемой теории мы имеем поле Дирака  $\psi$ , действительное псевдоскалярное поле  $\phi$  и все члены лагранжиана, включающие эти поля, инвариантные относительно преобразований Лоренца, и четности, имеющие каноническую размерность  $\leq 4$  (для перенормируемости). Существует только конечное число таких членов, и легко видеть, что лагранжиан (154) содержит все такие члены и никакие другие. Следовательно, перенормированная теория не должна иметь дополнительных взаимодействий.

Дополнительная симметрия может наложить запрет на возникновение некоторых каплингов после процедуры перенормировки. Например, рассмотрим лагранжиан (154) для



$g = 0$  (но  $\lambda \neq 0$ ): в отсутствие юкавской константы теория имеет дополнительную симметрию  $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$  (без четности), и эта дополнительная симметрия будет препятствовать процедуре восстановления юкавской константы после проведения перенормировки. С другой стороны, когда  $\lambda = 0$ , но  $g \neq 0$ , теория не имеет какой-либо дополнительной симметрии для  $\lambda \neq 0$ , и поэтому перенормировка приводит к возникновению вершины взаимодействия  $\lambda\phi^4$ , даже если таковой не было изначально.

**Решение Б.** Начнем с  $\delta_\lambda$ . На однопетлевом уровне четырехбозонная амплитуда включает следующие диаграммы Фейнмана:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}^{1\text{-петл.}}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \text{к/чл} \\
 &= \text{•} + \text{•} \\
 &+ \text{•} + \text{•} + 2 \text{ с перест.} \\
 &+ \text{•} + \text{•} + 5 \text{ с перест.}
 \end{aligned}$$

Последняя диаграмма дает

$$\begin{aligned}
 & - \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p}_1 - M + i\varepsilon} (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p}_2 - M + i\varepsilon} \times \right. \\
 & \left. \times (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p}_3 - M + i\varepsilon} (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p}_4 - M + i\varepsilon} \right\}, \quad (155)
 \end{aligned}$$

где

$$p_2 = p_1 + k_1, \quad p_3 = p_2 + k_2, \quad p_4 = p_3 + k_3 \quad \text{и} \quad p_1 = p_4 + k_4;$$

есть еще пять диаграмм, отличающихся перестановкой внешних импульсов  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Для произвольных импульсов ин-

теграл (155) достаточно сложен для вычисления, но его расходимость  $k$ -независима, поэтому может быть вычислен для любого частного выбора  $k_i$ . Ясно, что простейший выбор  $k_i$  – это  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ ; это вне массовой поверхности, но проблем нет. Учитывая (155), получаем

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^{\psi \text{ петл.}}(0, 0, 0, 0) &= - \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p} - M + i\varepsilon} \right)^4 = \\ &= -g^4 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\gamma^5(\hat{p} + M)]^4}{(p^2 - M^2 + i\varepsilon)^4} = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{-4g^4}{(p^2 - M^2 + i\varepsilon)^2}, \end{aligned} \quad (156)$$

где последнее равенство следует из

$$[\gamma^5(\hat{p} + M)]^2 = \gamma^5(\hat{p} + M)\gamma^5(\hat{p} + M) = (-\hat{p} + M)(\hat{p} + M) = -p^2 + M^2,$$

и поэтому  $\text{tr}[\gamma^5(\hat{p} + M)]^4 = 4(p^2 - M^2)^2$ . Вычисляя интеграл в последней строке (156), используя размерную регуляризацию и (A.5), получаем

$$\mathcal{M}^{\psi \text{ петл.}}(0, 0, 0, 0) = \frac{-4g^4\mu^\varepsilon}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right). \quad (157)$$

Заметим, что  $[g\phi\bar{\psi}\psi] = [g] + [\phi] + 2[\psi] = [g] + \frac{D-2}{2} + 2\frac{D-1}{2} = D \implies [g] = \frac{4-D}{2}$ . Остается умножить этот результат на 6 (6 аналогичных диаграмм) и добавить вклады (A.22) других диаграмм в рамках скалярной  $\phi^4$  теории, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(0, 0, 0, 0) &= -\lambda\mu^\varepsilon - \delta_\lambda + \frac{3\lambda^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) - \\ &- \frac{24g^4\mu^\varepsilon}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \mathcal{O}(\lambda^3, \lambda g^4 \text{ или } g^6). \end{aligned} \quad (158)$$

Условие перенормировки для физической константы  $\lambda$  есть  $\mathcal{M} = -\lambda\mu^\varepsilon$ , когда все внешние импульсы на массовой поверхности и на пороге ( $s = 4m^2$ ,  $t = u = 0$ ). При других величинах внешних импульсов мы будем иметь

$$\mathcal{M} = -\lambda\mu^\varepsilon - \frac{\lambda^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \text{к.ч.} - \frac{4g^4\mu^\varepsilon}{16\pi^2} \text{к.ч.} + \text{высшие поправки.} \quad (159)$$

Сравнивая эту формулу с (158), окончательно получаем (143). Как было обещано,  $\delta_\lambda \neq 0$  даже для  $\lambda = 0$  благодаря перенормировке, обусловленной фермионными петлями.

Далее вычислим контрчлен  $\delta_g$ . Для этого рассмотрим поправку к вертексу  $\phi\bar{\psi}\gamma^5\psi$ :

В однопетлевом приближении

$$\Gamma^{(5)}(p', p) = g\gamma^5 + \delta_g\gamma^5 + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p}' + \hat{k} - M + i\varepsilon} (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - M + i\varepsilon} (g\gamma^5) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (160)$$

Как обычно, перепишем подынтегральное выражение в виде

$$-ig^3\mathcal{N}^{(5)}/D,$$

где

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - M^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p'+k)^2 - M^2 + i\varepsilon} = \iiint dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}, \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \ell^2 - \Delta &= z(k^2 - m^2) + x((p+k)^2 - M^2) + y((p'+k)^2 - M^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ell = k + xp + yp', \end{aligned}$$

$$\Delta = zm^2 + (1-z)M^2 - xzp^2 - yzp'^2 - xyq^2 = zm^2 + (1-z)^2M^2 - xyq^2,$$

на массовой поверхности  $p^2 = p'^2 = M^2$ .

Для числителя  $\mathcal{N}^{(5)}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(5)} &= \gamma^5(\hat{p}' + \hat{k} + M)\gamma^5(\hat{p} + \hat{k} + M)\gamma^5 = (M - \hat{k} - \hat{p}')\gamma^5(M - \hat{k} - \hat{p}) = \\ &= (M - \hat{\ell} - z\hat{p}' - x\hat{q})\gamma^5(M - \hat{\ell} - z\hat{p} + y\hat{q}) = \\ &= \{ \text{учитывая } \bar{u}(p')\Gamma^{(5)}u(p) \} = \\ &= (M - \hat{\ell} - zM - x\hat{q})\gamma^5(M - \hat{\ell} - zM + y\hat{q}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma^5((1-z)M + \hat{\ell} + x\hat{q})((1-z)M - \hat{\ell} + y\hat{q}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \gamma^5 [-\ell^2 + (1-z)^2 M^2 + xyq^2 + (1-z)^2 M\hat{q}] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \gamma^5 [-\ell^2 - (1-z)^2 M^2], \tag{162}
\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из

$$\bar{u}(p')\gamma^5\hat{q}u(p) = \bar{u}(p')(-\hat{p}'\gamma^5 - \gamma^5\hat{p})u(p) = -2M\bar{u}(p')\gamma^5u(p).$$

Таким образом, петлевой интеграл представляется в виде

$$2ig^3\gamma^5 \int dz \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2 + (1-z)^2 M^2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3},$$

где мы вычислили интеграл по импульсу, используя виковский поворот и размерную регуляризацию

$$\begin{aligned}
2i \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2 + (1-z)^2 M^2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} &\longrightarrow -2\mu^{4-D} \int \frac{d^D\ell_E}{(2\pi)^D} \frac{\ell_E^2 - (1-z)^2 M^2}{(\ell^2 + \Delta)^3} = \\
&= - \int_0^\infty dt t^2 e^{-t\Delta} (-t - (1-z)^2 M^2) \int \frac{d^D\ell_E}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} e^{-t\ell_E^2} = \\
&= - \frac{(4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2}}{16\pi^2} \int_0^\infty dt t^2 e^{-t\Delta} \left( +\frac{D}{2} t^{-(D/2)-1} - (1-z)^2 M^2 t^{-(D/2)} \right) = \\
&= - \frac{(4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2}}{16\pi^2} \left( \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Delta^{-\varepsilon/2} - (1-z)^2 M^2 \Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Delta^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{4}{\varepsilon} - 1 + 2 \ln \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{(1-z)^2 M^2}{\Delta} \right). \tag{163}
\end{aligned}$$

Остается проинтегрировать по параметрам Фейнмана  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что дает

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{1\text{-петл.}}^{(5)}(p', p) = \\
&= \gamma^5 \times \left[ g + \delta_g + \frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\Delta} + F\left(\frac{m^2}{M^2}, \frac{q^2}{M^2}\right) \right) \right], \tag{164}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&F\left(\frac{m^2}{M^2}, \frac{q^2}{M^2}\right) = \\
&= \iiint dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \left( 2 \ln \frac{M^2}{\Delta(x, y, z)} - 1 - \frac{(1-z)^2 M^2}{\Delta(x, y, z)} \right)
\end{aligned}$$

– достаточно сложная, но конечная функция отношений массы и импульса.

Понятно, что условие перенормировки для юкавской константы  $g$  должно иметь форму  $\Gamma^{(5)} = g\gamma^5$  для фермионов на массовой поверхности и некоторой величины  $q^2$  псевдоскаляра. Например,  $q^2 = 0$  или на массовой поверхности  $q^2 = m^2$  (допустимый для  $m \geq 2M$ ). Следовательно, юкавский контрчлен (144) имеет вид

$$\delta_g^{1\text{-петл.}} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\Delta} + F(\dots) \right) .$$

Наши следующие цели: фермионная масса и контрчлены кинетической энергии  $\delta_M^\psi$  и  $\delta_Z^\psi$ .



На однопетлевом уровне анализа 1ЧН 2-точечная функция Грина поля Дирака есть

$$\begin{aligned} & -i\Sigma_\psi^{1\text{-петл.}}(\hat{p}) = \\ & = -i\delta_M^\psi + i\delta_Z^\psi \hat{p} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - M + i\varepsilon} (g\gamma^5). \end{aligned} \quad (165)$$

Как обычно, мы записываем петлевой интеграл как

$$-g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{N}}{D} \quad (166)$$

где

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - M^2 + i\varepsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2},$$

$$\ell^2 - \Delta = (1-x)[k^2 - m^2] + x[(k+p)^2 - M^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \ell = k + xp, \Delta = (1-x)m^2 + xM^2 - x(1-x)p^2 \},$$

$$\mathcal{N} = \gamma^5(\hat{p} + \hat{k} + M)\gamma^5 = M - \hat{p} - \hat{k} = M - (1-x)\hat{p} - \hat{\ell} \cong M - (1-x)\hat{p}.$$

Поэтому интеграл (166) преобразуется в

$$-g^2 \int_0^1 dx [M - (1-x)\hat{p}] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}, \quad (167)$$

который вычисляем, используя размерную регуляризацию,

$$-i \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx [M - (1-x)\hat{p}] \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Sigma_\psi^{1\text{-петл.}}(\hat{p}) &= \delta_M^\psi - \delta_Z^\psi \hat{p} + \\ &+ \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx [M - (1-x)\hat{p}] \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{(1-x)m^2 + xM^2 - x(1-x)p^2} \right). \end{aligned} \quad (168)$$

Условия перенормировки для поправки к фермионному пропагатору  $\Sigma^\psi(\hat{p})$  следующие:

$$\Sigma_\psi|_{\hat{p}=M} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \Sigma_\psi}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=M} = 0. \quad (169)$$

В соответствии с (168) второе условие (169) становится

$$\begin{aligned} \delta_Z^\psi[1\text{-петл.}] &= \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \int_0^1 dx [M - (1-x)\hat{p}] \times \\ &\times \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{(1-x)m^2 + xM^2 - x(1-x)p^2} \right) \Big|_{\hat{p}=M} = \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[ (x-1) \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{x^2M^2 + (1-x)m^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{2x^2(1-x)M^2}{x^2M^2 + (1-x)m^2} \right] = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \end{aligned} \quad (170)$$

В то же время, первое условие (169) дает

$$\begin{aligned} \delta_M^\psi[1\text{-петл.}] - M\delta_Z^\psi[1\text{-петл.}] &= -\frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx [M - (1-x)\hat{p}] \times \\ &\times \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{(1-x)m^2 + xM^2 - x(1-x)p^2} \right) \Big|_{\hat{p}=M} = \\ &= -\frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx xM \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{x^2M^2 + (1-x)m^2} \right) = \\ &= -\frac{g^2M}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right) \end{aligned}$$

и, следовательно, (146).

Заметим, что аналогично КЭД фермионный массовый контрчлен в юкавской теории пропорционален самой массе и расходится логарифмически, а не линейно в УФ пределе (интеграл (167) при размерной регуляризации). Как в КЭД, такое поведение обусловлено дополнительной симметрией теории Юкавы, возникающей, когда фермионная масса исчезает. А именно для  $M = 0$  мы имеем *дискретную киральную симметрию*

$$\Psi(x) \rightarrow \gamma^5 \Psi(x), \quad \Phi(x) \rightarrow -\Phi(x). \quad (171)$$

В отличие от калибровочной константы в КЭД, псевдоскалярная юкавская константа не удовлетворяет непрерывным киральным преобразованиям  $\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha\gamma^5)\psi(x)$ , но дискретная симметрия достаточна для предотвращения возникающего сдвига массы за счет петлевых поправок в безмассовой юкавской теории.

Теперь рассмотрим контрчлены для бозонной массы и кинетической энергии  $\delta_M^\phi$  и  $\delta_Z^\phi$ .

$$\bullet \quad + \quad \bullet \quad + \quad \bullet \quad \bullet$$

На однопетлевом уровне анализа 1ЧН 2-точечная функция Грина псевдоскалярного поля

$$\begin{aligned} -i\Sigma_\phi^{1\text{-петл.}}(k^2) &= \\ &= -i\delta_m^\phi + i\delta_Z^\phi k^2 + \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) - \\ &- \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{i}{\hat{p} - M + i\varepsilon} (-g\gamma^5) \frac{i}{\hat{p} + \hat{k} - M + i\varepsilon} (-g\gamma^5) \right). \end{aligned} \quad (172)$$

Снова мы записываем петлевой интеграл как

$$+ g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{N}}{D}, \quad (173)$$

где

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - M^2 + i\varepsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2},$$

$$\begin{aligned}
\ell^2 - \Delta &= (1-x)[p^2 - M^2] + x[(p+k)^2 - M^2] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \{ \ell = p + xk, \Delta = M^2 - x(1-x)k^2, \mathcal{N} = \\
&= \text{Tr}[(\hat{p} + M)\gamma^5(\hat{p} + \hat{k} + M)\gamma^5] = \text{Tr}[(M + \hat{p})(M - \hat{p} - \hat{k})] = \\
&= 4M^2 - 4p(p+k) = 4M^2 - 4(\ell - xk)(\ell + k - xk) \cong \\
&\cong 4M^2 - 4\ell^2 + 4x(1-x)k^2 = 8M^2 - 4\Delta - 4\ell^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, интеграл (173) принимает вид

$$4g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{2M^2 - \Delta - \ell^2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2},$$

где мы вычисляем  $\int d^4\ell$ , используя те же приемы, что и для (163):

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{2M^2 - \Delta - \ell^2}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} &\longrightarrow i\mu^{4-D} \int \frac{d^D\ell_E}{(2\pi)^D} \frac{2M^2 - \Delta + \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \\
&= i\mu^{4-D} \int_0^\infty dt t e^{-t\Delta} \left( 2M^2 - \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \int \frac{d^D\ell_E}{(2\pi)^D} e^{-t\ell_E^2} = \\
&= \frac{i\mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty dt t e^{-t\Delta} s \left( (2M^2 - \Delta)t^{-(D/2)} + \frac{D}{2} t^{-(D/2)-1} \right) = \\
&= \frac{i\mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \left( (2M^2 - \Delta)\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Delta^{(D/2)-2} + \frac{D}{2}\Gamma(1 - \frac{D}{2})\Delta^{(D/2)-1} \right) = \\
&= \frac{i}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right)^{\varepsilon/2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left( 2M^2 - \Delta - \frac{4-\varepsilon}{2-\varepsilon}\Delta \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{16\pi^2} \left[ (2M^2 - 3\Delta) \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right) - \Delta \right].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\Sigma_\phi^{1\text{-петл.}}(k^2) &= \delta_m^\phi - \delta_Z^\phi k^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) - \\
&- \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ (2M^2 - 3\Delta) \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right) - \Delta \right]. \quad (174)
\end{aligned}$$

Так же, как при обсуждении выше поправки к фермионному пропагатору  $\Sigma_\psi$ , условия перенормировки для скалярного и псевдоскалярного поля

$$\Sigma_\phi|_{k^2=m^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Sigma_\phi}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m^2} = 0. \quad (175)$$



Поэтому, в соответствии с (174)

$$\begin{aligned}
\delta_Z^\phi[1\text{-петл.}] &= -\frac{g^2}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial k^2} \int_0^1 dx \left[ (3x(1-x)k^2 - 3M^2) \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2 - x(1-x)k^2} \right) - (M^2 - x(1-x)k^2) \right]_{k^2=m^2} = \\
&= -\frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \frac{6}{\varepsilon} + 3 \ln \frac{\mu^2}{M^2 - x(1-x)m^2} + \right. \\
&\left. + \frac{2x(1-x)m^2}{M^2 - x(1-x)m^2} \right] = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right), \quad (176) \\
\delta_m^\phi[1\text{-петл.}] - m^2 \delta_Z^\phi[1\text{-петл.}] &- \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + 1 + \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) = \\
&= -\frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left[ (3x(1-x)k^2 - 3M^2) \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2 - x(1-x)k^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (M^2 - x(1-x)k^2) \right]_{k^2=m^2} = \\
&= -\frac{g^2}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{2}m^2 - M^2 \right) \times \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \text{к.ч.} \right]
\end{aligned}$$

и, следовательно, (148).

**Указание к задаче В.** Рассмотреть обобщенную логарифмически расходящуюся однопетлевую диаграмму.

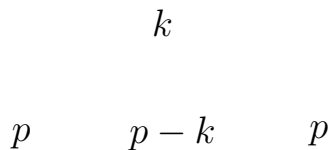
### 3.4. Метод регуляризации-перенормировки в КЭД

#### Собственная энергия электрона

Собственная энергия электрона в КЭД в однопетлевом приближении теории возмущений представляется выражением

$$-i\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{i(k^2 + i\varepsilon)} \gamma^\mu \frac{i(\hat{p} - \hat{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \quad (177)$$

и соответствующей диаграммой Фейнмана



А. Показать, что

$$\Sigma(p) = A + B\hat{p}.$$

$$A = \frac{\alpha}{\pi} m \left( 2 - \ln \frac{m^2}{\mu_2^2} + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \ln \frac{m^2 - p^2}{p^2} \right),$$

$$B = \frac{\alpha}{4\pi} \left( \ln \frac{m^2}{\mu_2^2} - 3 - \frac{m^2 - p^2}{p^2} \left[ 1 + \frac{m^2 + p^2}{p^2} \ln \frac{m^2 - p^2}{p^2} \right] \right).$$

Б. Получить выражение для полного пропагатора электрона:

$$\frac{i}{\hat{p} - m} \rightarrow \frac{i}{\hat{p} - m} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma(p)}{\hat{p} - m}} = \frac{iZ_2}{\hat{p} - m_R},$$

где  $Z_2 = (1 - B)^{-1} \approx 1 + B$ ,  $m_R = \frac{m+A}{1-B} \approx (m + A)(1 + B) \approx m + \delta m$ ,

$$\delta m \approx A + mB.$$

$$\text{При } p^2 = m^2 \quad \delta m = \frac{\alpha m}{4\pi} \left( 5 - 3 \ln \frac{m^2}{\mu_2^2} \right).$$

Если  $m_R = m_{\text{набл}} = m$ , то  $\delta m = 0$ ,  $\ln \frac{m^2}{\mu_2^2} = \frac{5}{3}$ ,  $Z_2 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi}$ .

### Поляризация вакуума

В. Вычислить, используя предложенную схему, собственную энергию фотона (оператор поляризации вакуума)  $\Pi_{\mu\nu}(q)$ .

Г. Рассмотреть рассеяние двух электронов посредством обмена фотона с переданным импульсом  $q \rightarrow 0$  и найти изменение квадрата заряда электрона за счет добавления вклада от оператора  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  к древесной диаграмме.

### Вершинная функция в КЭД

Д. Вычислить изменение константы взаимодействия электрона с внешним электромагнитным полем

$$-e\gamma_\mu \rightarrow -e(\gamma_\mu + \Lambda_\mu(p', p)). \quad (178)$$

Показать, что вершинная функция в КЭД определяется выражением

$$\Lambda_\mu(p', p) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left[ \ln \frac{m^2}{\mu_1^2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2\omega} F(\omega) \right] \gamma_\mu - (4 \ln \eta + 5) \frac{2\omega}{Q^2} F(\omega) m^2 \gamma_\mu - \right.$$

$$- \frac{i2\omega}{Q^2} F(\omega) m q^\nu \sigma_{\mu\nu} - 2 \left( 2 \ln \eta + \frac{7}{4} \right) \omega F(\omega) \gamma_\mu \}, \quad (179)$$

где

$$F(\omega) = \ln \frac{1+\omega}{1-\omega}, \quad \omega = \left( \frac{4m^2}{Q^2} + 1 \right)^{-1/2},$$

а  $Q$  – переданный импульс между заряженными частицами.

### Лэмбовский сдвиг

**Е.** Рассчитать аналитически и численно лэмбовский сдвиг, используя метод регуляризации-перенормировки (RRM) [16].

**Решение А.** Воспользуемся методом регуляризации-перенормировки (RRM) [16].

$$-i \Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N}{D},$$

$$N = g_{\mu\nu} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\nu = -2(\hat{p} - \hat{k}) + 4m.$$

После параметризации Фейнмана

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{k^2[(p-k)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - 2p \cdot kx + (p^2 - m^2)x]^2}$$

и замены (сдвига)  $k \rightarrow K = k - xp$  получаем новое выражение для собственной энергии электрона:

$$-i \Sigma(p) = -e^2 \int_0^1 dx [-2(1-x)\hat{p} + 4m] I,$$

где интеграл  $I = \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{1}{[K^2 - M^2 + i\varepsilon]^2}$  логарифмически расходится. Здесь использовано обозначение  $M^2 = p^2 x^2 + (m^2 - p^2)x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial M^2} &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2 + i\varepsilon]^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{M^2}, \\ 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2 + i\varepsilon]^3} &= \frac{2}{(2\pi)^4} \int \frac{id\vec{k} dk_0}{[-k_0^2 - \vec{k}^2 - M^2 + i\varepsilon]^3} = \\ &= \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{[k^2 + M^2 - i\varepsilon]^3} = -2i \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int r^3 dr \frac{1}{[r^2 + M^2 - i\varepsilon]^3}, \end{aligned}$$

где было использовано, что  $k^2 = k_0^2 + \vec{k}^2$ . Используя (А.7), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial M^2} &= \frac{-2i2\pi^2}{(2\pi)^{4 \cdot 2}} \int_0^\infty \frac{r^2 dr^2}{(r^2 + M^2)^3} = \frac{-2i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{\frac{x}{M^2} \frac{dx}{M^2} M^4}{\left(\frac{x}{M^2} + 1\right)^3 M^6} = \\ &= -i \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{M^2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(1)}{\Gamma(3)} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{M^2}. \\ I &= \frac{-i}{(4\pi)^2} [\ln M^2 + C_1] = \frac{-i}{(4\pi)^2} \ln \frac{M^2}{\mu_2^2},\end{aligned}$$

где произвольная константа  $C_1 = -\ln \mu_2^2$ .

$$\begin{aligned}-i \Sigma(p) &= -e^2 \int_0^1 dx (-2(1-x)\hat{p} + 4m) \ln \frac{M^2}{\mu_2^2} \frac{(-i)}{(4\pi)^2}. \\ \Sigma(p) &= -e^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (-2(1-x)\hat{p} + 4m) \ln \frac{p^2 x^2 + (m^2 - p^2)x}{\mu_2^2} = \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (-2(1-x)\hat{p} + 2m) (\ln(p^2 x^2 + (m^2 - p^2)x) - \ln \mu_2^2).\end{aligned}$$

Предлагается довести вычисления до ответа самостоятельно.

**Указание** к задаче В. При вычислении расходящегося интеграла использовать метод, предложенный ранее, но в отличие от предыдущего примера, где вычислялась производная по  $M^2$ , необходимо дифференцировать по параметру  $\sigma$ , введенному следующим образом  $M^2(\sigma) = M^2 + \sigma$ . В конечных результатах положить  $\sigma \rightarrow 0$ .

**Указание** к задаче Д. При вычислении поправки к константе взаимодействия взять предел  $Q^2 \ll m^2$ .

## 4. РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА

### 4.1. $\beta$ -функция для КЭД

Фотонный пропагатор

$$ie^2 D_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \frac{e_0^2}{1 + \pi(q)} g_{\mu\nu}, \quad (180)$$

где

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \pi(0)} = Z_3 e_0^2, \quad Z_3 = \frac{1}{1 + \pi(0)} \simeq 1 - \pi(0) \quad (181)$$

а

$$\pi(q)(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) = \pi_{\mu\nu}(q) \quad (182)$$

есть тензор поляризация вакуума. Определим бегущий электрический заряд как

$$e^2(q) \equiv \frac{e^2}{1 + \mathcal{R}e\tilde{\pi}(q^2)}, \quad (183)$$

где  $\tilde{\pi}(q^2) = \pi(q^2) - \pi(0)$  конечно. Покажите, что в однопетлевом приближении

$$e^2(-\mu_R'^2) = e^2(-\mu_R^2) + \frac{e_0^4}{12\pi^2} \ln \frac{\mu_R'^2}{\mu_R^2} \quad (184)$$

для случая  $\mu_R^2, \mu_R'^2 \gg m^2$ . Если определим

$$\beta(e) = \mu_R \frac{\partial e}{\partial \mu_R}, \quad (185)$$

тогда будем иметь

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5). \quad (186)$$

**Решение.** Поляризация вакуума в КЭД

$$\pi(q^2) = \frac{e_0^2}{2\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{(4\pi)^{-\varepsilon/2}} \mu^{\varepsilon/2} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)}{[m^2 - q^2\alpha(1-\alpha)]^{\varepsilon/2}} = \quad (187)$$

$$= \frac{e_0^2}{12\pi^2} \left[ \left( \frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) - \quad (188)$$

$$- 6 \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \ln \left[ \frac{m^2 - q^2\alpha(1-\alpha)}{\mu^2} \right] + O(\varepsilon) \right]. \quad (189)$$

Беря  $\mu = m$ , вычитаемая величина становится

$$\tilde{\pi}(q^2) = \pi(q^2) - \pi(0) = \quad (190)$$

$$= -\frac{e_0^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \ln \left[ \frac{m^2 - q^2\alpha(1-\alpha)}{m^2} \right]. \quad (191)$$

Запишем

$$e^2(q^2) = \frac{e^2}{1 + \mathcal{R}e\tilde{\pi}(q^2)} \simeq e^2 [1 - \mathcal{R}e\tilde{\pi}(q^2)]. \quad (192)$$

Для случая  $|q^2| \gg m^2$  имеем

$$\tilde{\pi}(q^2) \simeq -\frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right), \quad (193)$$

$$e^2(q^2) \simeq e^2 \left[ 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \right]. \quad (194)$$

Таким образом, так как  $(-q^2)$  увеличивается,  $e^2(q^2)$  также увеличивается.

**Различные схемы вычитания.** Для поляризации вакуума  $\pi(q^2)$ , задаваемой выражением (188), мы можем проиллюстрировать различие в схемах перенормировки.

- Схема импульсного вычитания. В этой схеме мы делаем вычитание при  $q^2 = -M^2$ , тогда

$$\pi_R(q^2, M) = \frac{-e_0^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha (1 - \alpha) \ln \left[ \frac{m^2 - q^2 \alpha (1 - \alpha)}{m^2 + M^2 \alpha (1 - \alpha)} \right]. \quad (195)$$

Полагаем  $m^2 \gg |q^2|$  и  $M^2$ , тогда

$$\pi_R(q^2, M) \rightarrow \frac{e_0^2}{12\pi^2} O\left(\frac{q^2}{m^2}, \frac{M^2}{m^2}\right) \rightarrow 0. \quad (196)$$

Это означает, что тяжелый фермион отщепляется в поляризации вакуума при энергиях много меньших, чем масса тяжелого фермиона. Это свойство позволит нам игнорировать все неизвестные частицы, которые намного тяжелее, чем существующие энергии.

- $\overline{MS}$  схема. Здесь мы вычитаем полюс при  $\varepsilon = 0$  и некоторые константы

$$\pi_R^{MS}(q^2) = \frac{-e_0^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha (1 - \alpha) \ln \left[ \frac{m^2 - q^2 \alpha (1 - \alpha)}{\mu^2} \right]. \quad (197)$$

В пределе  $m^2 \gg |q^2|$  получаем

$$\pi_R^{MS}(q^2) \rightarrow \frac{-e_0^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right), \quad (198)$$

что не является нулем. Таким образом, в этой схеме тяжелые частицы не отщепляются при низких энергиях. Один способ исключить эффект тяжелых частиц – проинтегрировать тяжелые поля в лагранжиане и работать с эффективным лагранжианом без тяжелых частиц.

## 4.2. РГУ для $\alpha$ в КЭД

Перенормированный заряд

$$e_R = \frac{Z_2}{Z_1} Z_3^{1/2} e,$$

но в соответствии с тождеством Уорда–Такахаша  $Z_1 = Z_2$ , поэтому

$$\alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi}.$$

Вычислить методом R-R [16]  $\beta$ -функцию в КЭД и, решая РГУ для  $\alpha_R$ , получить на масштабе  $m_Z$  перенормируемый заряд. Сравнить найденное значение с экспериментальными данными.

## 4.3. Бегущая константа связи вблизи фиксированной точки

**А.** Для стабильной критической точки  $g = g_0$  покажите, что если  $\beta(g)$  имеет простой нуль:  $\beta(g) = -b(g - a)$  с  $b > 0$ , то стремление  $g(t)$  к  $g_0$  при  $t \rightarrow \infty$  экспоненциально по  $t$ ;

**Б.** Вывести УФ поведение  $\bar{g}(t \equiv \ln t)$  в случае  $\beta$ -функции, заданной

$$\beta(g) = g(a^2 - g^2), \quad (199)$$

с известной постоянной  $a$ .

**В.** Для стабильной критической точки  $g = g_0$  покажите, что если  $\beta(g) = -b(g - a)^n$  имеет нуль второго или более высокого порядка с  $b > 0$  и  $n > 1$ , то  $g(t)$  стремится к  $g_0$  при  $t \rightarrow \infty$  как некоторая обратная степень по  $t$ .

**Решение А.** Простой нуль:  $\beta(g) = -b(g - a)$ . Из РГУ

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g}), \quad \int \frac{d\bar{g}}{\bar{g} - a} = - \int b dt, \quad (200)$$

тогда с начальным условием  $\bar{g} \rightarrow g_0$  при  $t = 0$  имеем

$$\ln \left( \frac{\bar{g} - a}{g_0 - a} \right) = -bt \quad (201)$$

с  $b > 0$ ,

$$\bar{g} = a + (g_0 - a) e^{-bt}. \quad (202)$$

Тогда  $\bar{g} \rightarrow a$  экспоненциально в пределе  $t \rightarrow \infty$ .

**Решение Б.** Чтобы проанализировать асимптотическое поведение, выясним зависимость  $\beta(g)$  от  $g$ .

Начальное условие для бегущей константы связи при  $t = 0$

$$\bar{g}(t) \rightarrow g_0.$$

Из графика ясно, что

$$\bar{g}(t) \rightarrow a, \quad \text{если} \quad g_0 > 0; \quad (203)$$

$$\bar{g}(t) \rightarrow -a, \quad \text{если} \quad g_0 < 0. \quad (204)$$

Это может быть проверено более точным вычислением, как показано ниже.

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \bar{g}(a^2 - \bar{g}^2) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\bar{g}}{(a^2 - \bar{g}^2) \bar{g}} = \int dt. \quad (205)$$

Проводя интегрирование и используя начальное условие, получаем

$$\frac{1}{2a^2} \left[ \ln \left( \frac{\bar{g}^2}{\bar{g}^2 - a^2} \right) - \ln \left( \frac{g_0^2}{g_0^2 - a^2} \right) \right] = t \quad (206)$$

или

$$\frac{g_0^2 (\bar{g}^2 - a^2)}{\bar{g}^2 (g_0^2 - a^2)} = e^{-2a^2 t}, \quad (207)$$



так что

$$\bar{g}^2 = \frac{a^2}{1 - Ae^{-2a^2t}} \quad \text{с} \quad A = \frac{g_0^2 - a^2}{g_0^2} \quad (208)$$

Беря квадратный корень, получаем

$$\bar{g} = \frac{\pm a}{\sqrt{1 - Ae^{-2a^2t}}}. \quad (209)$$

Для выбора знака необходимо вернуться к начальному условию  $\bar{g} = g_0$  при  $t = 0$ . Для случая  $g_0 > 0$  берем знак плюс, чтобы удовлетворить условию

$$\bar{g} = \frac{a}{\sqrt{1 - Ae^{-2a^2t}}} \quad \text{так, что при } t = 0 \quad \bar{g} = \frac{a}{\sqrt{1 - A}} = \frac{a}{\left(\frac{a}{g_0}\right)} = g_0.$$

В этом случае  $\bar{g} \rightarrow a$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для случая  $g_0 < 0$  мы должны выбрать другой знак

$$\bar{g} = \frac{-a}{\sqrt{1 - Ae^{-2a^2t}}}. \quad (210)$$

Мы имеем  $\bar{g} \rightarrow -a$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Решение В.** Двойной нуль или выше:  $\beta(g) = -b(g - a)^n$ ,  $n > 1$ . Вычисление приводит к

$$\int \frac{d\bar{g}}{(\bar{g} - a)^n} = - \int b dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n-1)} \left[ \frac{1}{(\bar{g} - a)^{n-1}} - \frac{1}{(g_0 - a)^{n-1}} \right] = bt$$

или

$$\bar{g} = a + \left\{ \frac{1}{\frac{1}{(g_0 - a)^{n-1}} + (n-1)bt} \right\}^{1/(n-1)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{1}{n-1}}\right). \quad (211)$$

#### 4.4. $\beta$ -функция для юкавской константы

Лагранжиан юкавского взаимодействия

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + f \bar{\psi} \psi \phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2. \quad (212)$$

Рассчитайте  $\beta$ -функцию Каллана–Симанчика для константы связи  $f$ .

Удобно положить все массы равными нулю.

### Поправка вертекс

$$\Gamma = (-if)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{\hat{p} - \hat{k}} \right)^2 \frac{i}{k^2} \quad (213)$$

$$= f^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d\alpha}{(k^2 - a^2)^2} \quad \text{с} \quad a^2 = -\alpha(1 - \alpha)p^2, \quad (214)$$

где мы комбинировали знаменатели, используя параметризацию Фейнмана, и сдвинули переменную интегрирования  $k \rightarrow k + \alpha p$ . Тогда расходящаяся часть

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - a^2)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{a^2} + \dots \right), \quad (215)$$

так что

$$\Gamma = \frac{if^3}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{a^2} + \dots \right). \quad (216)$$

Вертексная перенормированная константа имеет вид

$$Z_f = 1 + \frac{f^2}{16\pi^2} (\ln \Lambda^2 + \dots). \quad (217)$$

Напомним, что  $\beta$ -функция задается

$$\beta_f = -f \frac{\partial}{\partial (\ln \Lambda)} \bar{Z}_f, \quad \text{где} \quad \bar{Z}_f = Z_f^{-1} Z_\phi Z_\psi^2. \quad (218)$$

Здесь  $Z_\phi$  и  $Z_\psi$  – константы перенормировки волновой функции для скалярного и фермионного полей. Таким образом, вклад от  $Z_f$  есть

$$\beta_1 = -f \frac{\partial}{\partial (\ln \Lambda)} Z_f^{-1} = \frac{f^3}{16\pi^2} 2 = \frac{f^3}{8\pi^2} \quad (219)$$

### Фермионная собственная энергия

$$\Sigma_\psi(p) = (-if)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \frac{i(\hat{p} - \hat{k})}{(p - k)^2}. \quad (220)$$

Комбинируем знаменатели обычным образом

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{(p - k)^2} = \int \frac{d\alpha}{A^2} \quad (221)$$

с  $A = (k - \alpha p)^2 - a^2$  и  $a^2 = -\alpha(1 - \alpha)p^2$ . Сдвигаем переменную интегрирования  $k \rightarrow k + \alpha p$ , числитель становится  $(1 - \alpha)\hat{p} - \hat{k}$ . Тогда мы имеем

$$\Sigma_\psi(p) = f^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \frac{[(1 - \alpha)\hat{p} - \hat{k}]}{(k^2 - a^2)} \rightarrow \quad (222)$$

$$\rightarrow f^2 \int_0^1 d\alpha (1 - \alpha) \hat{p} \frac{i}{16\pi^2} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{a^2} + \dots \right) \quad (223)$$

и константы перенормировки волновой функции есть

$$Z_\psi = 1 - \frac{f^2}{32\pi^2} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) + \dots \quad (224)$$

и этот вклад в  $\beta$ -функцию есть

$$\beta_2 = -f \frac{\partial}{\partial (\ln \Lambda)} Z_\psi = \frac{f^3}{16\pi^2}. \quad (225)$$

Так как есть две такие диаграммы в вертексе, это вклад должен умножаться на два.

### Скалярная собственная энергия

$$\Sigma_\phi(p) = (-if)^2 (-) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left( \frac{i}{\hat{k}} \frac{i}{(\hat{p} - \hat{k})} \right) = \quad (226)$$

$$= (-) f^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{Tr [\hat{k} (\hat{p} - \hat{k})]}{k^2 (p - k)^2}, \quad (227)$$

числитель в размерной регуляризации есть

$$N = Tr [\hat{k} (\hat{p} - \hat{k})] = D (p \cdot k - k^2) \quad (228)$$

Знаменатель –

$$\frac{1}{k^2 (p - k)^2} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(k^2 - a^2)^2} \quad \text{с} \quad a^2 = -\alpha(1 - \alpha)p^2, \quad (229)$$

где сдвиг  $k \rightarrow k + \alpha p$  был сделан. Числитель принимает вид

$$N = D [(k + \alpha p)^2 - p(k + \alpha p)] \rightarrow D [k^2 - \alpha(1 - \alpha)p^2] = D (k^2 + a^2). \quad (230)$$

Собственная энергия

$$\Sigma_\phi(p) = -f^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 d\alpha \frac{D}{(k^2 - a^2)^2} (k^2 + a^2). \quad (231)$$

Используя (A.8), (A.9), получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 + a^2)}{(k^2 - a^2)^2} &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{1-\frac{D}{2}} \left[ -\frac{D}{2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) + \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{1-\frac{D}{2}} \left(\frac{1-D}{1-\frac{D}{2}}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right). \end{aligned} \quad (232)$$

Тогда собственная энергия

$$\Sigma_\phi(p) = -f^2 \int_0^1 d\alpha \frac{di}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{1-d}{1-\frac{d}{2}}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{a^2}\right)^{1-\frac{d}{2}}. \quad (233)$$

Расходящаяся часть, нужная для перенормировки волновой функции, с  $D \rightarrow 4$  и  $\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{2}{4-D}\right)$  имеет вид

$$\Sigma_\phi(p)_{div} = \frac{-ip^2 f^2}{16\pi^2} 2 \left(\frac{2}{4-D}\right) \rightarrow \frac{-ip^2 f^2}{16\pi^2} 2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}, \quad (234)$$

где мы использовали соответствие  $\left(\frac{2}{4-D}\right) \rightarrow \ln \Lambda^2$ . Константа перенормировки поля

$$Z_\phi = 1 + \frac{f^2}{16\pi^2} 2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \quad (235)$$

и этот вклад в  $\beta$ -функцию есть

$$\beta_3 = \frac{f^3}{8\pi^2}. \quad (236)$$

Тогда полный вклад в  $\beta$ -функцию

$$\beta = (\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3) = \frac{f^3}{16\pi^2} (2 + 1 + 2) = \frac{5f^3}{16\pi^2}. \quad (237)$$

#### 4.5. $\beta$ -функции в псевдоскалярной теории Юкавы

**A.** Покажите, что голые и перенормированные константы связи теории Юкавы связаны соотношениями

$$\lambda + \delta_\lambda = \lambda_0 Z_\phi^2, \quad g + \delta_g = g_0 Z_\psi \sqrt{Z_\phi}, \quad (238)$$

и, используя данные соотношения, выведите

$$\beta_\lambda = 2(\lambda + \delta_\lambda) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \ln \mathcal{M}} - \frac{\partial \delta_\lambda}{\partial \ln \mathcal{M}}, \quad (239)$$

$$\beta_g = (g + \delta_g) \left( \frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial \ln \mathcal{M}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \ln \mathcal{M}} \right) - \frac{\partial \delta_g}{\partial \ln \mathcal{M}}. \quad (240)$$

В однопетлевом приближении последние формулы упрощаются:

$$\beta_\lambda = 2\lambda \frac{\partial \delta_Z^\phi}{\partial \ln \mathcal{M}} - \frac{\partial \delta_\lambda}{\partial \ln \mathcal{M}}, \quad (241)$$

$$\beta_g = g \left( \frac{\partial \delta_Z^\psi}{\partial \ln \mathcal{M}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_Z^\phi}{\partial \ln \mathcal{M}} \right) - \frac{\partial \delta_g}{\partial \ln \mathcal{M}}. \quad (242)$$

**Б.** В псевдоскалярной теории Юкавы при массах, равных нулю,

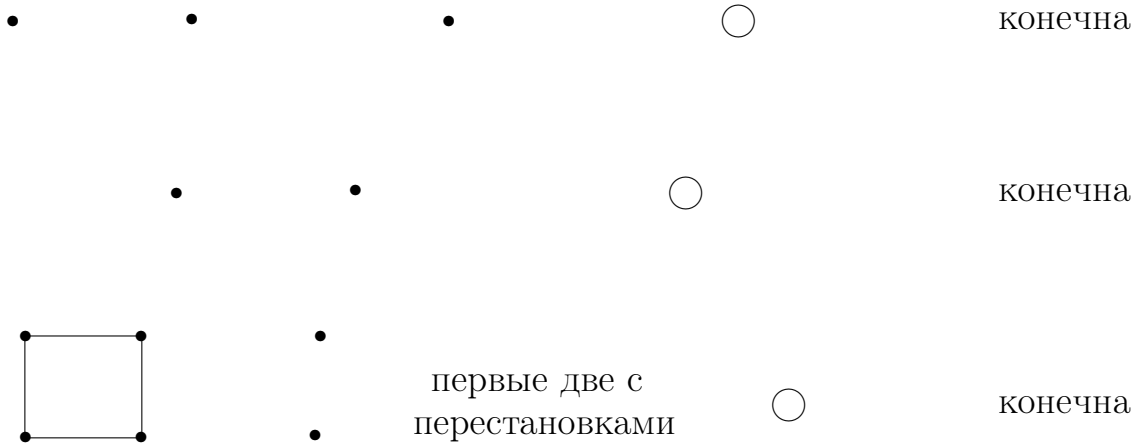
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \bar{\psi}(i\hat{\partial})\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi, \quad (243)$$

вычислите<sup>6</sup> однопетлевые  $\beta$ -функции Каллана–Симанчика для  $\lambda$  и  $g$

$$\frac{\partial \lambda(M)}{\partial \ln M} = \beta_\lambda(\lambda, g), \quad \frac{\partial g(M)}{\partial \ln M} = \beta_g(\lambda, g)$$

в главном порядке по перенормированным константам связи (241), (242), предполагая, что  $\lambda$  и  $g^2$  одинакового порядка. Нарисуйте потоки констант связи на плоскости  $\lambda$ - $g$ .

**Решение.** Начнем с вычисления контрчленов  $\delta_Z^\phi$ ,  $\delta_Z^\psi$ ,  $\delta_\lambda$  и  $\delta_g$ , сокращающих расходимости однопетлевых амплитуд.



<sup>6</sup>Задача взята из книги [8] (12.1).

•

•

•

○

конечна

В одной из предыдущих задач были вычислены бесконечные части всех контрчленов этой теории. Заметим, что для целей задачи нам необходимы только бесконечные части контрчленов:

$$\delta_Z^\phi = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right), \quad (244)$$

$$\delta_Z^\psi = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right), \quad (245)$$

$$\delta_g = -\frac{g^3 \mu^{\varepsilon/2}}{16\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right), \quad (246)$$

$$\delta_\lambda = \frac{(3\lambda^2 - 48g^4)\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right), \quad (247)$$

где  $\mu$ -зависимость расходящегося члена следует из размерного анализа (заметим, что  $p^2$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  порядка  $\mathcal{O}(\mu^2)$ ) в размерности  $D = 4 - \varepsilon$ , а многоточие ‘ $\dots$ ’ соответствует конечным слагаемым, которые становятся  $\mu$ -независимыми в пределе  $D \rightarrow 4$ .

Рассмотрим ренормгрупповой поток констант  $g(\mu)$  и  $\lambda(\mu)$ , которые управляются РГУ (мы предполагаем  $\lambda \sim g^2$ , следовательно,  $\mathcal{O}(\lambda^3) = \mathcal{O}(g^6)$ , ..., ...). В лидирующем порядке первое уравнение независимо от  $\lambda$ , так что мы можем решить его точно:

$$\ln \mu + \text{const} = \int \frac{dg}{\beta_g} \approx \frac{-8\pi^2}{g^2}$$

и, следовательно,

$$g^2(\mu) = \frac{8\pi^2}{\ln \frac{\Lambda_{\text{Landau}}}{\mu}},$$

где размерная трансмутация обращает постоянную интегрирования для безразмерной юкавской константы в размерный параметр  $\Lambda_{\text{Landau}}$ . Заметим, что в УФ конце энергетического

спектра юкавская константа  $g(\mu)$  становится сильнее; в конечном итоге для  $\mu = \mathcal{O}(\Lambda_{\text{Landau}})$   $g(\mu) = \mathcal{O}(1)$ , и теория возмущений нарушается. С другой стороны, в ИК пределе юкавская константа становится слабой и, обеспечивая в точности безмассовость скаляра и фермиона,  $g(\mu)$  стремится к нулю в ИК пределе  $\mu \rightarrow 0$ .

Перенормировка скалярной константы  $\lambda(\mu)$  более сложна из-за зависимости  $\beta$ -функции от юкавской константы. Сконцентрируемся на отношении констант  $x \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/g^2$  и изучим его перенормировку:

$$\frac{dx}{d \ln \mu} = \frac{\beta_\lambda(\lambda, g)}{g^2} - \frac{2\lambda\beta_g(\lambda, g)}{g^3} = \frac{(3x^2 + 6x - 48)g^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^4).$$

В лидирующем порядке

$$\frac{dx}{(3x^2 + 6x - 48)} \approx \frac{g^2}{16\pi^2} d \ln \mu \approx \frac{dg(\mu)}{g}$$

и, следовательно,

$$\ln \frac{x + 1 - \sqrt{17}}{x + 1 + \sqrt{17}} = 6\sqrt{17} \ln g(\mu) + \text{const.}$$

Иначе

$$\lambda(\mu) = g^2(\mu) \left[ \sqrt{17} \frac{C - g^{6\sqrt{17}}(\mu)}{C + g^{6\sqrt{17}}(\mu)} - 1 \right] \quad (248)$$

для некоторой константы интегрирования  $C$ .

Нарисуйте графики траекторий ренормгруппового потока на плоскости констант связи  $(\lambda, g)$ .

Обсудим некоторые свойства ренормгруппового потока. В ИК пределе существует стабильная фиксированная точка  $x^* = \sqrt{17} - 1$ , то есть ИК предельная линия  $\lambda = (\sqrt{17} - 1)g^2$  на плоскости  $(\lambda, g)$ . В УФ пределе существуют три возможности.

1.  $x = x^* \pm \mathcal{O}(g^{6\sqrt{17}})$  и  $\lambda(\mu) \approx x^*g^2(\mu)$  для любых  $\mu \ll \Lambda_{\text{Landau}}$ , то есть всегда, когда константы достаточно малы для обоснованного применения теории возмущений.

2.  $x > x^* + \mathcal{O}(g^{6\sqrt{17}})$  и  $x(\mu)$  увеличивается УФ, пока скалярная константа  $\lambda(\mu)$  становится сильной, в то время как юкавская константа слаба.

3.  $x < x^* - \mathcal{O}(g^{6\sqrt{17}})$  и  $x(\mu)$  УФ уменьшается до нуля при конечном  $\mu \ll \Lambda$ , скалярная константа связи  $\lambda(\mu)$  становится отрицательной, пока юкавская константа связи пертурбативно мала. Заметим, что из-за уменьшения  $\lambda(\mu)$ , а не увеличения с  $\mu$ , эффективный потенциал Коулмена–Вайнберга

$$V_{\text{eff}}(\phi) \approx Z_\phi^2 \lambda(\bar{\mu} = \mathcal{O}(\phi)) \frac{\phi^4}{24}$$

имеет неправильный знак и не имеет нижнего ограничения для  $\varphi \rightarrow \infty$ . Физически это делает неоднозначным УФ обрезание ниже точки где  $\lambda(\mu)$  станет отрицательной.

#### 4.6. Решение Коулмена РГУ

Рассмотрим в размерности один поток со скоростью  $v(x)$  и в потоке бактерию [8]. Положим  $\rho(t, x)$  – плотность бактерии и  $g(x)$  – рост бактерии.

**А.** Покажите, что плотность бактерии  $\rho(t, x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - g(x) \right] \rho(t, x) = 0. \quad (249)$$

**Б.** Позиция элемента жидкости описывается  $\bar{x} = \bar{x}(t, x)$  с начальным условием  $\bar{x}(0, x) = x$ . Именно элемент жидкости, который был в  $x$  при  $t = 0$ , теперь в  $\bar{x}$  в момент времени  $t$ . Ясно, что  $\bar{x}(t, x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t, x) = v(\bar{x}). \quad (250)$$

Покажите, что если  $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ , тогда при временах позже  $\rho(t, x)$  задается

$$\rho(t, x) = \rho_0(\bar{x}(t, x)) \exp\left(\int_0^t dt' g(\bar{x}(t', x))\right). \quad (251)$$



**Решение А.** Член, обусловленный ростом  $g(x)$ , очевиден. Сконцентрируемся на втором члене, обусловленном движением жидкости.

Рассмотрим элемент жидкости  $f$  с длиной  $dx$  в  $x$ . Бактерия в этом элементе жидкости  $\rho(t, x) dx$ . В дальнейшее время  $t + \Delta t$  этот элемент жидкости заменяется тем, который располагался в  $(x - v\Delta t)$  в момент времени  $t$ . Таким образом, изменение в плотности бактерии в  $f$  есть

$$\frac{[\rho(t, x) - \rho(t, x - v\Delta t)]}{\Delta t} \simeq v \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (252)$$

где мы сделали приближение  $\rho(t, x - v\Delta t) \simeq \rho(t, x) - v \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta t$ . Это дает второй член в дифференциальном уравнении.

**Решение Б.** Интегрируя соотношение (250) для  $\bar{x}$ , получаем

$$\int_x^{\bar{x}} \frac{dy}{v(y)} = \int_0^t dt' \quad (253)$$

Мы можем дифференцировать это уравнение по  $x$ , чтобы получить

$$\frac{1}{v(\bar{x})} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - \frac{1}{v(x)} = 0. \quad (254)$$

Тогда для любой функции  $f(x)$  мы можем показать, что

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x}(t, x)) = f'(\bar{x}) \frac{d\bar{x}}{dt} = f'(\bar{x}) v(\bar{x}), \quad (255)$$

$$v(x) \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}(t, x)) = v(x) f'(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = f'(\bar{x}) v(\bar{x}). \quad (256)$$

Комбинируя, получаем

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - v(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] f(\bar{x}(t, x)) = 0. \quad (257)$$

Либо, изменяя  $t \rightarrow -t$ , получаем

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} \right] f(\bar{x}(-t, x)) = 0. \quad (258)$$

Далее остается проверить, что решение имеет форму

$$\rho(t, x) = \rho_0(\bar{x}(t, x)) \exp\left(\int_0^t dt' g(\bar{x}(t', x))\right). \quad (259)$$

**Замечание.** Обобщение на большую размерность очевидно:  
но:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} - g(x_1, \dots, x_n) \right] \rho(t, x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (260)$$

Определим

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_i(t, x_1, \dots, x_n) = v_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad \text{с} \quad \bar{x}_i(0, x_1, \dots, x_n) = x_i. \quad (261)$$

Тогда решение

$$\rho(t, x_1, \dots, x_n) = \rho_0(\bar{x}_i(t, x_1, \dots, x_n)) \exp\left(\int_0^t dt' g(\bar{x}_i(t', x_1, \dots, x_n))\right). \quad (262)$$

#### 4.7. Аномальные размерности для составных операторов

В теории  $\phi^4$  рассчитайте аномальные размерности для составных операторов  $\phi^2$  и  $\phi^6$  в однопетлевом приближении.

**Аномальная размерность  $\phi^2$ .** Только однопетлевой расходящийся граф, включающий  $\phi^2$ , содержится в 2-точечной функции  $\Gamma_{\phi^2}^{(2)}$  [11, 8] и имеет форму 4-точечной функции  $\Gamma(p^2)$

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, p_2) = \left(\frac{-i\lambda}{2}\right) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i}{l^2 - \mu^2} \right] \left[ \frac{i}{(l-p)^2 - \mu^2} \right]. \quad (263)$$

Используя результат, получаем

$$\Gamma_{\phi^2}^{(2)}(p; p_1, p_2) = \frac{-\lambda}{32\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \int_0^1 d\alpha \ln [\mu^2 - \alpha(1-\alpha)p^2] + \dots \right\} \quad (264)$$

и

$$Z_{\phi^2} = 1 + \Gamma_{\phi^2}^{(2)}(0, 0, 0) \simeq 1 - \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \quad (265)$$

Аномальная размерность тогда

$$\gamma_{\phi^2} = -\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \ln Z_{\phi^2} = \frac{\lambda}{16\pi^2}. \quad (266)$$

**Аномальная размерность  $\phi^6$ .** Соответствующая (усеченная) 1ЧН функция Грина снова может быть выражена в терминах  $\Gamma(p^2)$ . Учитывая комбинаторику, получаем

$$Z_{\phi^6} = 1 + \Gamma_{\phi^2}^{(2)}(0, 0, 0) \simeq 1 - \frac{15\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \quad (267)$$

Тогда anomальная размерность

$$\gamma_{\phi^6} = \frac{15\lambda}{16\pi^2}. \quad (268)$$

#### 4.8. Однопетлевая перенормировка калибровочных теорий

Обсудим кратко однопетлевую перенормировку калибровочных теорий с размерной регуляризацией. Голый лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu)^2 - \frac{1}{2}\alpha_B(\partial_\mu A_B^\mu)^2 + \\ & + \bar{\Psi}_B(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B)\Psi_B + e_B A_B^\mu \bar{\Psi}_B \gamma_\mu \Psi_B, \end{aligned} \quad (269)$$

где  $\alpha$  – параметр, фиксирующий калибровку.

Действие в  $D$ -мерном пространстве безразмерно ( $\hbar = 1$ ), следовательно, безразмерна комбинация  $\mathcal{L}/\mu^D$ . Тогда размерности полей и параметров в  $D$ -мерном пространстве следующие:

$$\begin{aligned} [A_B^\mu] = \mu^{\frac{D-2}{2}}, \quad [\Psi_B] = [\bar{\Psi}_B] = \mu^{\frac{D-1}{2}}, \\ [\alpha_B] = 1, \quad [m_B] = \mu, \quad [e_B] = \mu^{\frac{4-D}{2}}. \end{aligned} \quad (270)$$

В однопетлевом приближении:

$$\begin{aligned} A_B^\mu \equiv \mu^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \sqrt{Z_A} A^\mu = \mu^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left( 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} A^\mu, \\ \Psi_B \equiv \mu^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \sqrt{Z_\Psi} \Psi = \mu^{-\frac{1}{2}\varepsilon} \left( 1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \Psi, \\ m_B \equiv Z_m m = \left( 1 - \frac{3e^2}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \right) m, \end{aligned} \quad (271)$$

$$\alpha_B \equiv Z_\alpha \alpha = \left( 1 + \frac{e^2}{6\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \right) \alpha, \quad e_B \equiv \mu^{\frac{1}{2}\varepsilon} Z_e e = \mu^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left( 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \right) e.$$

Заметим, что в однопетлевом приближении выражения  $A^\mu \equiv e_B A_B^\mu$  и  $\alpha \equiv \alpha_B/e_B^2$  конечны в пределе  $D \rightarrow 4$ . Это согласуется с тождеством Уорда, являющимся следствием калибровочной

симметрии (и БРС инвариантности), связывающим множители  $Z$  соотношением

$$Z_e^2 = Z_\alpha = 1/Z_A. \quad (272)$$

Поэтому иногда удобнее использовать

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e_B^2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 - \frac{\alpha}{2e_B^2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\Psi}_B(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m_B)\Psi_B, \quad (273)$$

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - iA^\mu.$$

Во всех порядках петлевого разложения поле  $A^\mu$  и параметр калибровки  $\alpha$  остаются свободными от перенормировки. Это же относится и к неабелевым калибровочным теориям. Подставляя заряд  $q$  (называемый константой связи  $g \equiv q$ ) в калибровочное поле, можно записать лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g_B^2}Tr(F_{\mu\nu}^2) + \frac{\alpha}{2g_B^2}Tr(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\Psi}_B(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m_B)\Psi_B, \quad (274)$$

где калибровочное поле и параметр калибровки уже являются перенормированными. Тензор напряженности и ковариантная производная:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu. \quad (275)$$

Если калибровочная группа  $SU(N)$ , число ароматов фермионов  $n_f$ , значение оператора Казимира группы  $N$ , то перенормировка константы связи такова:

$$g_B \equiv \mu^{\frac{1}{2}\varepsilon} Z_g g = \mu^{\frac{1}{2}\varepsilon} \left( 1 - \frac{(11N - 2n_f)g^2}{48\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \dots \right) e. \quad (276)$$

Пока  $n_f < 11N/2$ , однопетлевая поправка к голой константе связи отличается знаком от поправки в абелевой теории. Это самодействие неабелевых калибровочных полей ответственно за асимптотическую свободу бегущей константы связи. Зависимость константы связи выражается через так называемую  $\beta$ -функцию:

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{\partial g(g_B(\varepsilon), \mu, \varepsilon)}{\partial \mu}, \quad (277)$$

где производная берется при фиксированном  $\varepsilon$  и  $g_B$  ( $g \equiv g_R$ ). Для неабелевых калибровочных теорий ( $\mu_0$  – постоянная интегрирования):

$$\beta(g) = -\frac{(11N - 2n_f)g^3}{48\pi^2} + \mathcal{O}(g^5),$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{(11N - 2n_f)}{24\pi^2} \ln(\mu/\mu_0) + \mathcal{O}(g^2(\mu)). \quad (278)$$

В КЭД ( $n_f$  ароматов фермионов):

$$\beta(e) = \frac{n_f e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5), \quad \frac{1}{e^2(\mu)} = -\frac{n_f}{6\pi^2} \ln(\mu/\mu_0) + \mathcal{O}(e^2(\mu)). \quad (279)$$

Для других регуляризаций вычисление бегущей константы связи аналогично, только заменяется  $\varepsilon$  на  $1/\ln(\Lambda)$ .  $\beta$ -функция не зависит от схемы регуляризации.

Следующими уравнениями определяются эффективные, или "бегущие" параметры, необходимые для решения уравнения Каллана–Симанчика в КХД:

$$\frac{d\bar{g}(\lambda)}{d \ln \lambda} = \bar{g}(\lambda)\beta(\bar{g}(\lambda)), \quad \frac{d\bar{m}(\lambda)}{d \ln \lambda} = \bar{m}(\lambda)\gamma_{m_q}, \quad \frac{d\bar{a}(\lambda)^{-1}}{d \ln \lambda} = \bar{a}^{-1}\delta. \quad (280)$$

Граничные условия для них:

$$|\bar{g}|_{\lambda=1} = g(\nu), \quad |\bar{m}|_{\lambda=1} = m(\nu), \quad |\bar{a}|_{\lambda=1} = a(\nu). \quad (281)$$

## А Скалярные интегралы

Аналитическое вычисление скалярных интегралов – одна из наиболее трудоемких и длительных математических процедур. Поэтому необходимо иметь эффективный алгоритм аналитического и численного их вычисления. Скалярные интегралы  $T_0^N$  ( $N$  – количество пропагаторов)

$$T_0^N(k_1, \dots, k_{N-1}, m_1^2, \dots, m_N^2) \equiv \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_N}, \quad (\text{A.1})$$

где  $d_j \equiv (q + k_{j-1})^2 - m_j^2 + i\varepsilon$ ,  $j = 2, \dots, N$ ,  $k_0 \equiv 0$ , с помощью фейнмановской параметризации следующей формы:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N} = (N-1)! \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_N}{\left(\sum_{1 \leq l \leq N} a_l x_l\right)^N} \delta\left(1 - \sum_l x_l\right) \equiv \Gamma(N) \times \quad (\text{A.2})$$

$$\times \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dx_2 \dots \int_0^{x_{N-1}} dx_{N-2} \frac{1}{[a_1(1-x_1) + a_2(x_1-x_2) + \dots + a_N x_{N-1}]^N},$$

где  $a_l = (q + k_l)^2 - m_l^2 + i\varepsilon$ , и перехода к евклидову  $D$ -мерному пространству и  $q_E$  можно свести к кратному интегралу:

$$T_0^N = (-1)^N i \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \int \frac{d^D q_E}{(q_E^2 + L_N)^N}, \quad (\text{A.3})$$

где  $L_N$  является функцией  $x_1, \dots, x_{N-1}, k_1, \dots, k_{N-1}, m_1, \dots, m_N$ . Так, при  $N=1$ :  $L_1 = m_1^2 - i\varepsilon$ ; при  $N=2$ :  $L_2 = x^2 k_1^2 - x(k_1^2 + m_2^2 - m_1^2) - m_2^2 - i\varepsilon$ ;

$$L_N = [x_1(-k_{N-1}) + x_2(k_1 - k_{N-1}) + \dots + x_{N-1}(k_{N-2} - k_{N-1})]^2 - i\varepsilon. \quad (\text{A.4})$$

Кроме того, обобщим фейнмановскую параметризацию на произвольное количество пропагаторов с разными степенями:

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i^{n_i}\right)^{-1} = \frac{\Gamma(\sum_i n_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(n_i)} \prod_{i=1}^k \left(\int_0^1 x_i^{n_i-1} dx_i\right) \delta\left(\sum_{i=1}^k x_i - 1\right) \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right)^{-\sum_i n_i},$$

которое доказывается по индукции. Здесь  $\Gamma(z)$  – гамма-функция со свойствами:  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$  и  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

Используя формулу

$$\int \frac{d^D p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}}, \quad (\text{A.5})$$

получаем

$$T_0^N = (-1)^N \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(N - D/2)}{\Gamma(N)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} L_N^{-N+D/2}. \quad (\text{A.6})$$

Выведем более общую, чем (A.5), формулу для интегрирования по импульсу в  $D$ -мерном пространстве-времени Минковского при использовании размерной регуляризации:

$$I_{D,\alpha,\beta} \equiv \int d^D k \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 - M^2 + i\varepsilon)^\beta}.$$

Мы можем вычислить данный интеграл, используя так называемый поворот Вика, когда мы заменяем интеграл по  $\text{Re}k_0$  на интеграл по  $\text{Im}k_0$ . Интеграл по двум четвертям исчезает при радиусе, стремящемся к бесконечности. Так как нет полюсов внутри контура интегрирования,

$$I_{D,\alpha,\beta} = i(-1)^{\alpha-\beta} \int d^D k \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + M^2 - i\varepsilon)^\beta}, \quad k^2 = K_0^2 + \vec{k}^2.$$

Заметим, что интеграл сферический. Поэтому, зная площадь сферы в  $D$ -мерном пространстве ( $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ , в частности,  $S_2 = 2\pi$ ,  $S_3 = 4\pi$ ,  $S_4 = 2\pi^2$ , ...), получим

$$\begin{aligned} I_{D,\alpha,\beta} &= i(-1)^{\alpha-\beta} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int r^{D-1} dr \frac{r^{2\alpha}}{(r^2 + M^2 - i\varepsilon)^\beta} = \\ &= \frac{i(-1)^{\alpha-\beta} \pi^{D/2} \Gamma(\alpha + D/2) \Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{(M^2 - i\varepsilon)^{\beta-\alpha-D/2} \Gamma(\beta) \Gamma(D/2)}. \end{aligned}$$

Мы использовали интегральное представление для бета-функции:

$$B(n-1, k) \equiv \frac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)} = \int_0^\infty dz \frac{z^{n-1}}{(z+1)^{k+n}}. \quad (\text{A.7})$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - a^2)^n} = \frac{i(-1)^n \Gamma(n - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{n - \frac{D}{2}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 - a^2)^n} = \frac{i(-1)^{n-1} \Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{n - \frac{D}{2} - 1}. \quad (\text{A.9})$$

## Интеграл $\mathcal{A}_0$

Аналитическое выражение для 1-точечного скалярного интеграла представляется следующим образом:

$$\mathcal{A}_0(m^2) \equiv \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \quad (\text{A.10})$$

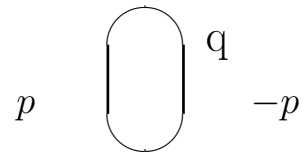
$$= \lim_{D \rightarrow 4-0} \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \quad (\text{A.11})$$

$$= \lim_{D \rightarrow 4-0} m^2 \left( \Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right), \quad (\text{A.12})$$

где расходящаяся часть (полюсное слагаемое  $\sim \frac{1}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{4-D}$ )

$$\Delta \equiv \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \ln 4\pi, \quad \gamma_E \approx 0,5772156649.$$

Соответствующая диаграмма Фейнмана:



Представим краткий вывод ответа для интеграла  $\mathcal{A}_0$ . Применяя (A.5), получаем для интеграла (A.11):

$$-m^2 \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2 - \frac{D}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (\text{A.13})$$

Гамма-функция имеет полюсы в нуле и в отрицательных целых числах, и мы видим, что расходимость интеграла проявляется как простой полюс при  $D \rightarrow 4$ . Используем свойства



гамма-функции:

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \psi_1(n + 1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \quad (\text{A.14})$$

где

$$\psi_1(n + 1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_E, \quad (\text{A.15})$$

причем  $\gamma_E = -\psi_1(1) \approx 0,577$  (постоянная Эйлера–Маскерони).

Полагая  $\varepsilon = 4 - D$ , получаем

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (\text{A.16})$$

В результате разложение выражения (A.13) около точки  $D = 4$  дает (здесь используем разложение  $a^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln a + \dots$ )

$$\begin{aligned} & -m^2 \left[ -\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] = \\ & = \frac{2m^2}{\varepsilon} + m^2 \left[ 1 - \gamma_E + \ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) = \frac{2m^2}{\varepsilon} + \text{к.ч.} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Заметим, что конечная часть поправки к пропагатору (к.ч.) зависит от произвольной массы  $\mu$ .

## Интеграл $\mathcal{B}_0$

Аналитическое выражение для скалярного 2-точечного интеграла представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(k^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{[q^2 - m_1^2 + i\varepsilon][(q+k)^2 - m_2^2 + i\varepsilon]} = \\ &= \Delta + \ln \frac{k^2}{\mu^2} - 2 + \ln[(x_1 - 1)(x_2 - 1)] + x_1 \ln \frac{x_1}{x_1 - 1} + x_2 \ln \frac{x_2}{x_2 - 1}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

где

$$\begin{aligned} x_{1,2}(p, m_1, m_2) &= \frac{1}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \lambda^{1/2}(p^2, m_1^2, m_2^2), \\ \lambda(x, y, z) &= [x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2][x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Представим вывод результата для интеграла  $\mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2)$ . Знаменатели в подынтегральном выражении объединяются с помощью формулы параметризации Фейнмана

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}. \quad (\text{A.20})$$

Легко заметить, что

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x^2},$$

где положить  $x = az + b(1-z)$ , причем  $a$  и  $b$  следует считать комплексными числами, чтобы исключить сингулярность  $a = b$ .

Рассмотрим случай  $m_1 = m_2 = m$ . Имеем

$$\frac{1}{(p^2 - m^2)} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[p^2 - m^2 - 2pq(1-z) + q^2(1-z)]^2}.$$

Совершая замену переменных по формуле  $p' = p - q(1-z)$ , видим, что знаменатель в подынтегральном выражении является квадратом выражения  $p'^2 - m^2 + q^2z(1-z)$ , причем  $d^D p' = d^D p$ . Поэтому после изменения обозначений  $p' \rightarrow p$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{1}{[p^2 - m^2 + q^2z(1-z)]^2} = \\ &= i \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} (\pi)^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz [q^2z(1-z) - m^2]^{\frac{D}{2}-2} = \\ &= \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int_0^1 dz \left[ \frac{q^2z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right]^{\frac{D}{2}-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

В пределе при  $D \rightarrow 4$  равенство (A.14) дает

$$\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Выражение (A.21) принимает вид

$$\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dz \ln \left[ \frac{q^2z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon} - \left( \gamma + \int_0^1 dz \ln \left[ \frac{q^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right] \right).$$

Полагая

$$F(s, m, \mu) \equiv \int_0^1 dz \ln \left[ \frac{q^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right],$$

получаем

$$\mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) = \frac{2}{\varepsilon} - [\gamma + F(s, m, \mu)] = \frac{2}{\varepsilon} + \text{к.ч.} \quad (\text{A.22})$$

**Интеграл**  $\mathcal{C}_0(k_1^2, k_2^2, (k_2 - k_1)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2)$

3-точечный скалярный интеграл  $\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0(k_1^2, k_2^2, (k_2 - k_1)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4q}{[q^2 - m_1^2 + i\varepsilon][(q + k_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon][(q + k_2)^2 - m_3^2 + i\varepsilon]} = \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f} = \\ &= - \frac{1}{c + 2\alpha b} \sum_{i=1}^3 \sum_{\sigma=\pm} (-1)^{1+i} \left[ Li_2\left(\frac{y_i}{y_i - y_i^\sigma}\right) - Li_2\left(\frac{y_i - 1}{y_i - y_i^\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$y_0 = -\frac{d + e\alpha}{c + 2b\alpha}, \quad y_1 = y_0 + \alpha, \quad y_2 = \frac{y_0}{1 - \alpha}, \quad y_3 = -\frac{y_0}{\alpha},$$

$$\begin{aligned} a &= (k_2 - k_1)^2, \quad b = k_1^2, \quad c = k_2^2 - k_1^2 - (k_2 - k_1)^2, \quad f = m_3^2 - i\varepsilon, \\ d &= m_2^2 - m_3^2 - (k_2 - k_1)^2, \quad e = m_1^2 - m_2^2 + (k_2 - k_1)^2 - k_2^2. \end{aligned}$$

Ответ в общем случае выражается через спецфункцию (дигарифм)

$$Li_2(z) = - \int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t} dt = - \int_0^z \frac{\ln(1-v)}{v} dv = - \int_0^{-z} \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} d\lambda,$$

$y_i^\pm$  являются корнями уравнений

$$-k_1^2 y_1^2 + (m_2^2 - m_1^2 + k_1^2) y_1 - m_2^2 + i\varepsilon = 0$$

$$\begin{aligned}
& \{-by_1^2 + (-e - c)y_1 + (-d - f - a) = 0\}, \\
& k_2^2 y_2^2 + (m_1^2 - m_3^2 - k_2^2)y_2 + m_3^2 - i\varepsilon = 0 \\
& \{(c + b + a)y_2^2 + (e + d)y_2 + f) = 0\}, \\
& (k_2 - k_1)^2 y_3^2 + (m_2^2 - m_3^2 - (k_2 - k_1)^2)y_3 + m_3^2 - i\varepsilon = 0 \\
& \{ay_3^2 + dy_3 + f = 0\},
\end{aligned}$$

а  $\alpha$  – корнем уравнения

$$b\alpha^2 + c\alpha + a = 0.$$

Проведем вычисление интеграла в несколько этапов.

1. Параметризация Фейнмана (1948г.). Ввести дополнительное интегрирование, позволяющее сначала легко вычислять интегралы по импульсному пространству.

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1 a_2 a_3} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y]^{-3} = \\
&= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [a_1(1 - x - y) + a_2x + a_3y]^{-3}.
\end{aligned}$$

Замечание: формула содержит произвол (симметрична) по отношению к перестановке  $a_1, a_2$  и  $a_3$ .

Проверка:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y]^{-3} = \\
&= \frac{2}{(a_3 - a_2)^3} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( y + \frac{a_1 + (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_2} \right)^{-3} = \\
&= \frac{1}{(a_2 - a_3)^3} \int_0^1 dx \left\{ \left( x + \frac{a_1 + (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_2} \right)^{-2} - \left( \frac{a_1 + (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_2} \right)^{-2} \right\} = \\
&= \frac{1}{a_2 - a_3} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dx (a_1 + (a_3 - a_1)x)^{-2}}_{I_1=(a_1 a_3)^{-1}} - \underbrace{\int_0^1 dx (a_1 + (a_2 - a_1)x)^{-2}}_{I_2=(a_1 a_2)^{-1}} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a_2 - a_3} \left( \frac{1}{a_1 a_3} - \frac{1}{a_1 a_2} \right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{(a_2 - a_3)} \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) = \frac{1}{a_1 a_2 a_3},$$

где интегралы  $I_1$  и  $I_2$  вычисляются так:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(a_3 - a_1)^2} \int_0^1 dx \left( \frac{a_1}{a_3 - a_1} + x \right)^{-2} = \frac{-1}{(a_3 - a_1)^2} \left( \frac{1}{\frac{a_1}{a_3 - a_1} + 1} - \frac{1}{\frac{a_1}{a_3 - a_1}} \right) = \\ &= \frac{-1}{(a_3 - a_1)^2} \left( \frac{a_3 - a_1}{a_3} - \frac{a_3 - a_1}{a_1} \right) = \frac{-1}{a_3 - a_1} \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} \right) = \frac{1}{a_1 a_3}, \\ I_2 &= I_1(a_3 \rightarrow a_2) = \frac{1}{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Применим теперь доказанную формулу параметризации Фейнмана для интеграла  $\mathcal{C}_0$  с тремя множителями в знаменателе, введя следующие обозначения (смотри замечание выше):

$$a_1 \equiv q^2 - m_1^2 + i\varepsilon, \quad a_2 \equiv (q + k_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon, \quad a_3 \equiv (q + k_2)^2 - m_3^2 + i\varepsilon.$$

Тогда, выделяя полный квадрат, получим

$$\begin{aligned} &[a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y] = \\ &= q^2 - m_1^2 + (k_1^2 + 2k_1q + m_1^2 - m_2^2)x + y(k_2^2 - k_1^2 + 2(k_2 - k_1)q + m_2^2 - m_3^2) = \\ &= q^2 + 2q(k_1x + (k_2 - k_1)y) \pm \\ &\quad \pm (k_1^2x^2 + (k_2 - k_1)^2y^2 + 2k_1(k_2 - k_1)xy) + \\ &\quad + (k_1^2 + m_1^2 - m_2^2)x + y(k_2^2 - k_1^2 + m_2^2 - m_3^2) - m_1^2 = \\ &= q'^2 - M^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M^2 &\equiv k_1^2x^2 + (k_2 - k_1)^2y^2 + 2k_1(k_2 - k_1)xy - \\ &- (k_1^2 + m_1^2 - m_2^2)x - (k_2^2 - k_1^2 + m_2^2 - m_3^2)y + m_1^2. \end{aligned}$$

После параметризации Фейнмана  $\mathcal{C}_0$  принимает вид:

$$\mathcal{C}_0 = \frac{2}{i\pi^2} \int d^4q' \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{(q'^2 - M^2)^3}.$$

2. Интегрирование по импульсному пространству. Проинтегрируем по 4-импульсу, воспользовавшись формулой

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - M^2)^l} = (-1)^l i \frac{\pi^{4/2}}{(2\pi)^4} \frac{(l - \frac{4}{2})}{(l)} (M^2)^{\frac{4}{2} - l},$$

для  $l = 3$

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3} = -i \frac{\pi^2}{16\pi^4} \frac{(3 - 2)}{(3)} (M^2)^{-1} = -\frac{i}{2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{M^2}.$$

Тогда интеграл  $\mathcal{C}_0$  примет следующий вид:

$$\mathcal{C}_0 = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f},$$

где

$$a = k_1^2, \quad b = (k_2 - k_1)^2, \quad c = 2k_1(k_2 - k_1), \\ d = -(k_1^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad e = -(k_2^2 - k_1^2 + m_2^2 - m_3^2), \quad f = m_1^2.$$

Чтобы последние обозначения совпали с результатом, необходимо в определении интеграла  $\mathcal{C}_0$  сделать сдвиг переменной интегрирования  $q \rightarrow q - k_2$  и в соответствии с замечанием, сделанным выше, произвести иной выбор  $a_1, a_2, a_3$ :

$$a_1 = q^2 - m_3^2 + i\varepsilon, \quad a_2 = (q - k_2 + k_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon, \quad a_3 = (q - k_2)^2 - m_1^2 + i\varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y] = \\ & = q^2 - m_3^2 + (k_2^2 + k_1^2 + 2(k_1 - k_2)q - 2k_1k_2 - m_2^2 + m_3^2)x + \\ & + y(-k_1^2 - 2k_1q + 2k_2k_1 - m_1^2 + m_2^2) = q^2 + 2q((k_1 - k_2)x - k_1y) \pm \\ & \pm ((k_1 - k_2)^2 x^2 + k_1^2 y^2 + 2k_1(k_2 - k_1)xy) + \\ & + (k_2^2 + k_1^2 - 2k_1k_2 - m_2^2 + m_3^2)x + y(-k_1^2 + 2k_2k_1 - m_1^2 + m_2^2) - m_3^2 = \\ & = q'^2 - M^2, \end{aligned}$$

где

$$M^2 \equiv \underbrace{(k_1 - k_2)^2}_{a} x^2 + \underbrace{k_1^2}_{b} y^2 + \underbrace{2k_1(k_2 - k_1)}_c xy -$$

$$\underbrace{-(k_2^2 + k_1^2 - 2k_1k_2 - m_2^2 + m_3^2)}_d x - \underbrace{(-k_1^2 + 2k_2k_1 - m_1^2 + m_2^2)}_e y + \underbrace{m_3^2}_f.$$

Примечание: в частных случаях, например, при  $b = 0$ , интеграл по параметрам Фейнмана легко считается вручную или на компьютере, и выбор  $a_1, a_2, a_3$  позволяет иногда привести вид интеграла  $\mathcal{C}_0$  к одному из этих случаев. Здесь рассмотрены два варианта выбора для параметризации Фейнмана.

Теперь остается рассмотреть в общем случае вычисление двойного интеграла по параметрам Фейнмана  $y$  и  $x$ .

3. Замена для переменной внутреннего интегрирования  $y$ , приводящая к отсутствию в интеграле слагаемого с  $x^2$ . Тогда с учетом смены порядка интегрирования внутренний интеграл элементарно берется, получаются логарифмы, интегралы от которых сводятся к комбинации дилогарифмов. Таков общий метод, предложенный Пассарино и Велтманом в 1979 году.

Сделаем в  $\mathcal{C}_0$  подстановку

$$y = y' + \alpha x \rightarrow y' = y - \alpha x : \quad y|_0^x \rightarrow y'|_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x},$$

тогда  $by^2 = b(y' + \alpha x)^2 = by'^2 + b2\alpha xy' + b\alpha^2 x^2$ . Подберем  $\alpha$  такое, чтобы слагаемые с  $x^2$  в подынтегральном выражении взаимно сокращались:

$$ax^2 + c\alpha x^2 + b\alpha^2 x^2 \equiv 0.$$

$\alpha$  должно быть корнем уравнения  $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + \dots} = \\ &= - \int_0^1 dx \int_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x} dy \frac{1}{by^2 + (c + 2\alpha b)xy + \dots}. \end{aligned}$$

4. Смена порядка интегрирования, так как теперь легче посчитать интеграл по  $x$  (нет слагаемого с  $x^2$ ).

$$\int_0^1 dx \int_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x} dy = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\alpha)x} dy - \int_0^1 dx \int_0^{-\alpha x} dy = \int_0^{1-\alpha} dy \int_{\frac{y}{1-\alpha}}^1 dx - \int_0^{-\alpha} dy \int_{-\frac{y}{\alpha}}^1 dx.$$

Замечание. В области  $-\alpha x \leq y \leq (1 - \alpha)x$  в комплексной плоскости  $y$   $\alpha$  должно быть действительным.

5. Смена порядка интегрирования в  $\mathcal{C}_0$  и вычисление внутреннего интеграла по  $x$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f} = \\
&= - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \int_{\frac{y}{1-\alpha}}^1 dx \frac{1}{by^2 + (c + 2\alpha b)xy + dx + e(y + \alpha x) + f} - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{-\alpha} dy \int_{-\frac{y}{\alpha}}^1 dx \frac{1}{x(cy + 2\alpha by + d + e\alpha) + by^2 + ey + f} \right\} = \\
&= - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \ln \frac{1 + \frac{by^2 + ey + f}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha}}{\frac{y}{1-\alpha} + \frac{by^2 + ey + f}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha}} - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \ln \frac{1 + \frac{by^2 + ey + f}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha}}{-\frac{y}{\alpha} + \frac{by^2 + ey + f}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha}} \right\}.
\end{aligned}$$

6. Представление последнего интеграла в виде комбинации дилогарифмов.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \times \right. \\
&\quad \times \ln \frac{(1 - \alpha)[by^2 + (c + 2\alpha b + e)y + d + e\alpha + f]}{[b(1 - \alpha) + (c + 2\alpha b)]y^2 + (e + d)y + (1 - \alpha)f} - \\
&\quad \left. - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \times \right. \\
&\quad \left. \times \ln \frac{\alpha\{by^2 + [(c + 2\alpha b) + e]y + (d + e\alpha) + f\}}{[b\alpha - (c + 2\alpha b)]y^2 - dy + \alpha f} \right\}.
\end{aligned}$$

Для удобства анализа проведем замены в обоих интегралах, чтобы пределы интегрирования стали одинаковыми от 0 до 1. В первом интеграле

$$y \rightarrow y'' \equiv \frac{y}{1 - \alpha} \quad \Longrightarrow \quad y|_0^{1-\alpha} \rightarrow y''|_0^1,$$



Во втором интеграле

$$y \rightarrow y''' \equiv -\frac{y}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad y|_0^{-\alpha} \rightarrow y''|_0^1.$$

Тогда  $\mathcal{C}_0$  примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 = & - \int_0^1 dy \frac{1-\alpha}{(c+2\alpha b)(1-\alpha)y+d+e\alpha} \times \\ & \times \ln \frac{b(1-\alpha)^2 y^2 + (1-\alpha)(c+2\alpha b+e)y+d+e\alpha+f}{[b(1-\alpha)^2 + (c+2\alpha b)(1-\alpha)]y^2 + (e+d+e\alpha-ey)y+f} - \\ & - \int_0^1 dy \frac{\alpha}{-(c+2\alpha b)\alpha y+d+e\alpha} \times \\ & \times \ln \frac{b\alpha^2 y^2 - \alpha(c+2\alpha b+e)y+d+e\alpha+f}{[b\alpha^2 - (c+2\alpha b)\alpha]y^2 + (d+e\alpha-ey)y+f}. \end{aligned}$$

Если провести замены в первом интеграле  $y = \frac{y'}{1-\alpha}$  и во втором интеграле  $y = -\frac{y'}{\alpha}$ , то: 1) числители под логарифмами станут одинаковыми, 2) знаменатели в множителях перед логарифмами тоже станут одинаковыми.

Перепишем  $\mathcal{C}_0$ , введя следующие обозначения

$$N(y) \equiv (c+2\alpha b)y+d+e\alpha, \quad y_0 = -\frac{d+e\alpha}{c+2\alpha b}$$

и учтя предложенные замены:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 = & - \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + N + f}{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N} + \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + N + f}{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N} = \\ = & - \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + N + f\} - \int_{-\alpha}^0 dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + N + f\} + \\ + & \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N\} - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N\} = \\ = & - \int_{-\alpha}^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + N + f\} + \\ + & \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N\} - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\alpha}^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + N(y) + f}{by_0^2 + ey_0 + N(y_0) + f} + \\
&\quad + \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N(y)}{by_0^2 + ey_0 + N(y_0) + f} + \\
&\quad + \int_{-\alpha}^0 dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N(y)}{by_0^2 + ey_0 + N(y_0) + f} \equiv -[1] + [2] + [3].
\end{aligned}$$

Дополнительные логарифмы при интегрировании сокращаются,  $y_0$  выбрано так, что  $N(y_0) = 0$ , следовательно, вычет в полюсе из-за наличия  $\frac{1}{N}$  равен 0.

В первом интеграле [1] сделаем замену  $y' = y + \alpha$ ,  $y|_{-\alpha}^{1-\alpha} \rightarrow y'|_0^1$ :

$$\begin{aligned}
[1] &= \int_0^1 dy \frac{1}{N(y-\alpha)} (\ln\{b(y-\alpha)^2 + e(y-\alpha) + N(y-\alpha) + f\} - \\
&\quad - \ln\{by_0^2 + ey_0 + f\}) = \\
&= \frac{1}{c+2ab} \int_0^1 dy \frac{1}{y-y_1} \times \\
&\quad \times (\ln\{by^2 + (c+e)y + b\alpha^2 + f + d - c\alpha - 2b\alpha^2 - a + a\} - \\
&\quad - \ln\{b(y_1-\alpha)^2 + e(y_1-\alpha) + f + N(y_0 = y_1-\alpha)\}).
\end{aligned}$$

В последнем преобразовании использовали  $y_0 = y_1 - \alpha$  и

$$\begin{aligned}
&by_1^2 - 2b\alpha y_1 + b\alpha^2 + ey_1 - e\alpha + f + (c+2ab)(y_1-\alpha) + d + e\alpha = \\
&= by_1^2 + y_1(-2b\alpha + e + c + 2ab) + b\alpha^2 - e\alpha - c\alpha - 2\alpha^2 b + d + e\alpha + f = \\
&= by_1^2 + y_1(c+e) + f + d - b\alpha^2 - c\alpha = by_1^2 + y_1(c+e) + f + d + a.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[1] &= \frac{1}{c+2ab} \int_0^1 dy \frac{1}{y-y_1} (\ln\{by^2 + (c+e)y + f + d + a\} - \\
&\quad - \ln\{by_1^2 + (c+e)y_1 + f + d + a\}) = \\
&= \frac{1}{(c+2ab)} \int_0^1 \frac{dy}{y-y_1} \ln \frac{(y-y_1^+)(y-y_1^-)}{(y_1-y_1^+)(y_1-y_1^-)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(c + 2\alpha b)} \left( \int_0^{1-y_1} \frac{du}{u} \ln \frac{(u + y_1 - y_1^+)(u + y_1 - y_1^-)}{(y_1 - y_1^+)(y_1 - y_1^-)} - \int_0^{-y_1} \frac{du}{u} \ln \frac{(u + y_1 - y_1^+)(u + y_1 - y_1^-)}{(y_1 - y_1^+)(y_1 - y_1^-)} \right) \equiv I_1 + I_2.$$

Воспользуемся спецфункцией (дилогарифм)

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t} dt = - \int_0^z \frac{\ln(1-v)}{v} dv = - \int_0^{-z} \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} d\lambda.$$

Предлагается завершить вывод самостоятельно.

Далее приведем результаты для частных случаев:

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ),  $m_2 = m_3, (m_1/m_3)^2 \equiv R \neq 1; 0; \infty$ :

$$\mathcal{C}_0 \approx \frac{1}{m_3^2} \left[ \frac{1}{R-1} - \frac{R \ln R}{(R-1)^2} \right].$$

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ),  $m_2 = m_1, (m_1/m_3)^2 \equiv R \neq 1; 0; \infty$ :

$$\mathcal{C}_0 \approx \frac{1}{m_3^2} \left[ -\frac{1}{R-1} + \frac{\ln R}{(R-1)^2} \right].$$

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ),  $m_2 = m_3, m_1 \approx m_3$  ( $R \approx 1$ ):

$$\mathcal{C}_0 \approx -\frac{1}{2m_3^2} + \frac{R-1}{6m_3^2}.$$

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ),  $m_2 = m_1, m_1 \approx m_3$  ( $R \approx 1$ ):

$$\mathcal{C}_0 \approx -\frac{1}{2m_3^2} - \frac{R-1}{6m_3^2}.$$

$m_2 = m_3, m_1^2 \ll k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \ll m_3^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ) в том числе  $m_1 = 0$  ( $R = 0$ ):

$$\mathcal{C}_0 \approx -\frac{1}{m_3^2}.$$

$m_2 = m_1, m_1^2 \ll k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \ll m_3^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ) в том числе  $m_1 = 0$  ( $R = 0$ ):

$$\mathcal{C}_0 \approx -\frac{1}{m_3^2} [\ln(-m_3^2/m_Z^2) + 1].$$

$m_2 = m_3$ ,  $m_3^2 \ll k_j^2$ ,  $(k_2 - k_1)^2 \ll m_1^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ) В ТОМ ЧИСЛЕ  $m_3 = 0$  ( $R = \infty$ ):

$$\mathcal{C}_0 \approx -\frac{1}{m_1^2} [\ln(-m_1^2/m_Z^2) + 1].$$

$m_2 = m_1$ ,  $m_3^2 \ll k_j^2$ ,  $(k_2 - k_1)^2 \ll m_1^2$  ( $k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$ ) В ТОМ ЧИСЛЕ  $m_3 = 0$  ( $R = \infty$ ):

$$\mathcal{C}_0 \approx -\frac{1}{m_1^2}.$$

**Интеграл  $\mathcal{C}_0(m_i^2, s, m_j^2; m^2, m^2, m^2)$**

3-точечный скалярный интеграл  $\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_0(k_1^2, k_2^2, (k_2 - k_1)^2, m^2, m^2, m^2) = \\ &= \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4q}{[q^2 - m^2 + i\varepsilon][(q + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon][(q + k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \\ &= -\int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \\ & \quad a = (k_1 - k_2)^2 = m_j^2, \quad b = k_1^2 = m_i^2, \\ & \quad c = 2k_1(k_2 - k_1) = s - m_i^2 - m_j^2, \quad d = -(k_2^2 + k_1^2 - 2k_1k_2) = -m_j^2, \\ & \quad e = -(-k_1^2 + 2k_2k_1) = m_j^2 - s, \quad f = m^2 - i\varepsilon. \end{aligned}$$

Подстановка:

$$y = y' + \alpha x \rightarrow y' = y - \alpha x : \quad y|_0^x \rightarrow y'|_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x},$$

где  $\alpha$  – корень уравнения  $ba^2 + c\alpha + a = 0$ ,

$$m_i^2 \alpha^2 + (s - m_i^2 - m_j^2) \alpha + m_j^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} D &= (s - m_i^2 - m_j^2)^2 - 4m_i^2 m_j^2 = \\ &= s^2 + m_i^4 + m_j^4 - 2sm_i^2 - 2sm_j^2 - 2m_i^2 m_j^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_0(m_i^2, s, m_j^2; m^2, m^2, m^2) = \\ &= -\frac{1}{c + 2\alpha b} \sum_{i=1}^3 \sum_{\sigma=\pm} (-1)^{1+i} \left[ Li_2\left(\frac{y_i}{y_i - y_i^\sigma}\right) - Li_2\left(\frac{y_i - 1}{y_i - y_i^\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

где  $y_1^\pm, y_2^\pm, y_3^\pm$  – корни следующих уравнений:

$$\begin{aligned} m_i^2 y_1^2 - m_i^2 y_1 + m^2 &= 0, & D &= m_i^4 - 4m_i^2 m^2, \\ s y_2^2 - s y_2 + m &= 0, & D &= s^2 - 4s m^2, \\ m_j^2 y_3^2 - m_j^2 y_3 + m^2 &= 0, & D &= m_j^4 - 4m_j^2 m^2, \\ y_0 &= -\frac{d + e\alpha}{c + 2b\alpha}, & y_1 &= y_0 + \alpha, & y_2 &= \frac{y_0}{1 - \alpha}, & y_3 &= -\frac{y_0}{\alpha}, \end{aligned}$$

## Интеграл $\mathcal{D}_0$

Кинематика:

$$\begin{array}{ccc} & p_2 & p_3 \\ & q + k_2 & \\ q + k_1 & \square & q + k_3 \\ p_1 & q & p_4 \end{array}$$

Петля типа box приводит к 4-точечному скалярному интегралу

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi^2} \mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4) &\equiv \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \frac{1}{(q^2 - m_1^2)((q + k_1)^2 - m_2^2)((q + k_2)^2 - m_3^2)((q + k_3)^2 - m_4^2)}. \end{aligned}$$

Причем  $k_1 = p_1, k_2 = p_1 + p_2, k_3 = p_1 + p_2 + p_3$  и  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ .

Для одинаковых массовых параметров

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(k_1^2, k_2^2, k_3^2, (k_1 - k_2)^2, (k_2 - k_3)^2, m, m, m, m) &= \\ = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4 q \frac{1}{[q^2 - m^2][(q + k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2][(q + k_3)^2 - m^2]} &= \\ (\text{этот интеграл представим в виде } \frac{1}{i\pi^2} \int d^4 q \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4}, \text{ и для него} & \\ \text{применяется формула параметризации Фейнмана.)} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{i\pi^2} \int d^4 q \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{[d_1(1-x-y-z) + d_2 x + d_3 y + d_4 z]^4} = \\ &= \frac{6}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int d^4 q [q^2 + 2q(k_1 x + k_2 y + k_3 z) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k_1x + k_2y + k_3z)^2 - (k_1x + k_2y + k_3z)^2 + \\
& + m^2(x + y + z) - m^2(x + y + z) - m^2 + k_1^2x + k_2^2y + k_3^2z]^{-4} = \\
& = \frac{6}{i\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \int \frac{dx dy dz d^4q}{[q^2 - (k_1x + k_2y + k_3z)^2 + k_1x + k_2y + k_3z - m^2]^4} = \\
& = \frac{6}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{i(-1)^{-4}\pi^{\frac{4}{2}}}{[(k_1x + k_2y + k_3z)^2 - k_1x - k_2y - k_3z + m^2]^{4-2}} \times \\
& \times \frac{\Gamma(2)\Gamma(4-2)}{\Gamma(2)\Gamma(4)} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{[(k_1x + k_2y + k_3z)^2 - k_1x - k_2y - k_3z + m^2]^2}.
\end{aligned}$$

Сделаем замену  $x = 1 - x'$ ,  $y = x' - y'$ ,  $z = z'$  и перейдем от штрихованных переменных к нештрихованным:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [k_1^2(1-2x+x^2) + k_2^2(x^2-2xy+y^2) + k_3^2z^2 + 2k_1k_2(1-x)(x-y) + \\
& + 2k_1k_3(1-x)z + 2k_2k_3(x-y)z - k_1^2(1-x) - k_2^2(x-y) - k_3^2z + m^2]^{-2} = \\
& = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [x^2(k_1 - k_2)^2 + y^2k_2^2 + z^2k_3^2 + xy(-(k_1 - k_2)^2 + k_1^2 - k_2^2) + \\
& + xz((k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 - k_1^2 + k_2^2) + yz((k_2 - k_3)^2 - k_2^2 - k_3^2) - x(k_1 - k_2)^2 + \\
& + y((k_1 - k_2)^2 - k_1^2) + z(-(k_1 - k_3)^2 + k_1^2) + m^2]^{-2}
\end{aligned}$$

Скалярная 4-точечная функция для различных массовых параметров  $\mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4)$  может быть представлена через комбинацию 16 дилогарифмов [15]. Общий случай в зависимости от значения параметров распадается на два частных решения.

1. При  $r_{02} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4 a(x_1 - x_2)} \times \\
& \times \left\{ \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} [Li_2(1 + s_j x_{kj}) + \eta(-x_{kj}, s_j) \ln(1 + s_j x_{kj}) + \right. \\
& \left. + Li_2(1 + \frac{x_{kj}}{s_j}) + \eta(-x_{kj}, \frac{1}{s_j}) \ln(1 + \frac{x_{kj}}{s_j}) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[ \tilde{\eta}(-x_k, \tilde{r}_{02}) \left[ \ln(r_{02}x_k) + \ln\left(Q\left(\frac{1}{x_k^{(0)}}, 0, 0, 1\right) - i\varepsilon\right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{\bar{Q}(0, 0, 1, r_{02}x_k^{(0)})}{d} + i\varepsilon\gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(r_{02}Im\tilde{r}_{13})\right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \tilde{\eta}\left(-x_k, \frac{1}{\tilde{r}_{13}}\right) \left[ \ln\left(\frac{x_k}{r_{13}}\right) + \ln\left(Q\left(\frac{r_{13}}{x_k^{(0)}}, 1, 0, 0\right) - i\varepsilon\right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{\bar{Q}(1, 0, 0, x_k^{(0)})}{d} + i\varepsilon\gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(Im\tilde{r}_{13})\right) \right] - \right. \\
& - \left[ \tilde{\eta}\left(-x_k, \frac{\tilde{r}_{02}}{\tilde{r}_{13}}\right) + \eta\left(\frac{\tilde{r}_{02}}{\tilde{r}_{13}}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}}\right) \right] \left[ \ln\left(\frac{r_{02}x_k}{r_{13}}\right) + \ln\left(Q\left(\frac{r_{13}}{x_k^{(0)}}, 1, 0, 0\right) - i\varepsilon\right) + \right. \\
& \quad \left. + \ln\left(\frac{\bar{Q}(0, 0, 1, r_{02}x_k^{(0)})}{d} + i\varepsilon\gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(r_{02}Im\tilde{r}_{13})\right) \right] + \\
& \quad \left. \left. + \eta\left(\frac{\tilde{r}_{02}}{\tilde{r}_{13}}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}}\right) \tilde{\eta}\left(-x_k, -\frac{\tilde{r}_{02}}{\tilde{r}_{13}}\right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

2. При  $|r_{ij}| = 1$  для всех  $r_{ij}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4) & = \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4 a(x_1 - x_2)} \times \\
& \times \left\{ \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} [Li_2(1 + s_j x_{kj}) + \eta(-x_{kj}, s_j) \ln(1 + s_j x_{kj}) + \right. \\
& \quad \left. + Li_2\left(1 + \frac{x_{kj}}{s_j}\right) + \eta\left(-x_{kj}, \frac{1}{s_j}\right) \ln\left(1 + \frac{x_{kj}}{s_j}\right)] + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \times \right. \\
& \times \left[ \eta\left(-x_k, \frac{1}{r_{13}}\right) \left[ \ln\left(\frac{r_{13}}{x_k^{(0)}} P\left(1, \frac{x_k^{(0)}}{r_{13}}, 0, 0\right) - \frac{x_k^{(0)}}{r_{13}} \varepsilon b \gamma_{k,3-k}\right) + \ln\left(\frac{x_k^{(0)}}{r_{13}}\right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \eta(-x_k, r_{02}) \times \right. \\
& \times \left[ \ln\left(\frac{1}{r_{02}x_k^{(0)}} P(0, 0, 1, r_{02}x_k^{(0)}) - r_{02}x_k^{(0)} \varepsilon b \gamma_{k,3-k}\right) + \ln(r_{02}x_k^{(0)}) \right] - \\
& \quad \left. - \left[ \eta\left(-x_k, \frac{r_{02}}{r_{13}}\right) + \eta\left(r_{02}, \frac{1}{r_{13}}\right) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[ \ln\left(\frac{r_{13}}{r_{02}x_k^{(0)}} P\left(0, 1, \frac{r_{02}x_k^{(0)}}{r_{13}}, 0\right) - \frac{r_{02}x_k^{(0)}}{r_{13}} \varepsilon b \gamma_{k,3-k}\right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \ln \left( \frac{r_{02} x_k^{(0)}}{r_{13}} \right) \left] + \left( 1 - \gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(b) \right) \eta \left( -x_k, -\frac{r_{02}}{r_{13}} \right) \eta \left( r_{02}, \frac{1}{r_{13}} \right) \right] \Bigg\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:  $r_{ij}$  и  $\tilde{r}_{ij}$  определяются как корни квадратных трехчленов

$$x^2 + k_{ij}x + 1 = (x + r_{ij})(x + 1/r_{ij}),$$

$$x^2 + (k_{ij} - i\varepsilon)x + 1 = (x + \tilde{r}_{ij})(x + 1/\tilde{r}_{ij}).$$

$$k_{ij} \equiv \frac{m_{i+1}^2 + m_{j+1}^2 - (k_i - k_j)^2}{m_{i+1}m_{j+1}}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (k_0 \equiv 0).$$

Для  $k_{ij} \in R$   $r_{ij}$  лежат на вещественной оси или внутри единичной окружности на комплексной плоскости.

$$P(y_0, y_1, y_2, y_3) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq 3} k_{ij} y_i y_j + \sum_{j=0}^3 y_j^2,$$

$$Q(y_0, y_1, 0, y_3) = (1/r_{02} - r_{02})y_0 + (k_{12} - r_{02}k_{01})y_1 + (k_{23} - r_{02}k_{03})y_3,$$

$$\bar{Q}(y_0, 0, y_2, y_3) = (1/r_{13} - r_{13})y_3 + (k_{12} - r_{13}k_{23})y_2 + (k_{01} - r_{13}k_{03})y_0,$$

$x_{1,2}$  определяются условием

$$\begin{aligned} & \frac{r_{02}r_{13}}{x} \left\{ \left[ P\left(1, \frac{x}{r_{13}}, 0, 0\right) - i\varepsilon \right] \left[ P\left(0, 0, \frac{1}{r_{02}}, x\right) - i\varepsilon \right] - \right. \\ & \left. - \left[ P\left(0, \frac{x}{r_{13}}, \frac{1}{r_{02}}, 0\right) - i\varepsilon \right] \left[ P\left(1, 0, 0, x\right) - i\varepsilon \right] \right\} = \\ & = ax^2 + bx + c + i\varepsilon d = a(x - x_1)(x - x_2), \end{aligned}$$

где

$$a = k_{23}/r_{13} + r_{02}k_{01} - k_{03}r_{02}/r_{13} - k_{12},$$

$$b = (r_{13} - 1/r_{13})(r_{02} - 1/r_{02}) + k_{01}k_{23} - k_{03}k_{12},$$

$$c = k_{01}/r_{02} + r_{13}k_{23} - k_{03}r_{13}/r_{02} - k_{12},$$

$$d = k_{12} - r_{02}k_{01} - r_{13}k_{23} + r_{02}r_{13}k_{03}.$$

$$\gamma_{kl} = \operatorname{sgn} \operatorname{Re}[a(x_k - x_l)], \quad k, l = 1, 2,$$

$$x_{k0} = x_k, \quad x_{k1} = x_k/r_{13}, \quad x_{k2} = x_k r_{02}/r_{13}, \quad x_{k3} = x_k r_{02},$$

$$s_0 = \tilde{r}_{03}, \quad s_1 = \tilde{r}_{01}, \quad s_2 = \tilde{r}_{12}, \quad s_3 = \tilde{r}_{23}.$$



$$x_{kj}^{(0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{kj}, \quad r_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{r}_{ij}.$$

$$\tilde{\eta}(a, \tilde{b}) = \begin{cases} \eta(a, b) & \text{для } b \notin R, \\ 2\pi i [\theta(-Im a)\theta(-Im \tilde{b}) - \theta(Im a)\theta(Im \tilde{b})] & \text{для } b < 0, \\ 0 & \text{для } b > 0, \end{cases}$$

$$b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{b},$$

где  $\varepsilon$  – бесконечно малая величина.

## Библиографический список

- [1] Вайнберг С. Квантовая теория полей. М.: Фазис, 2002.
- [2] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [3] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантованные поля. М., 1990.
- [4] Ициксон К, Зюбер Ж.Б. Квантовая теория поля. Тома 1, 2. М.: Мир, 1984.
- [5] Коллинз Дж. Перенормировка. М.: Мир, 1988.
- [6] Нелипа Н.Ф. Физика элементарных частиц. Калибровочные поля. М.: Высшая школа, 1985.
- [7] Основы размерной регуляризации и тензорной редукции / Сост. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Гуслярова О.А., Смирнов И.А. Самара, 2000.
- [8] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. М.; Ижевск, 2001.
- [9] Райдер Л. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.
- [10] Тезаурус тензорной редукции / Сост. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Гуслярова О.А., Смирнов И.А. Самара, 2000.
- [11] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.
- [12] Baez J. Renormalization Made Easy. (см. на сайте <http://www.nsu.ru/materials/ssl/text/encyclopedia/qft.html>)
- [13] Cheng T.-P., Li L.-F. Gauge theory of elementary particle physics. Problems and solutions. Clarendon Press, Oxford, 2000.

- [14] Collins J. The problem of scales: renormalization and all that, Eprint hep-ph/9510276, Lectures at TASI 95. 1995. 52p.
- [15] Denner A., Nierste U., Scharf R. A compact expression for the scalar one loop four point function // Nucl. Phys. 1991. B367. P.637-656; Denner A. Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200 // Fortsch. Phys. 1993. 41. P.307-420.
- [16] Ni G., Wang H. New regularization-renormalization method in quantum electrodynamics and qualitative calculation on Lamb shift. E-preprint hep-ph/9708457. 1997. 9p.; Ni G., Yang G., Fu R., Wang H. Running coupling constants of fermions with masses in quantum electro dynamics and quantum chromo dynamics. E-preprint hep-ph/9906364. 1999. 22p.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ</b>	<b>12</b>
1.1. Амплитуда перехода и функциональный интеграл	12
1.2. Функциональное интегрирование скалярных полей . . . . .	13
1.3. Квантование электромагнитного поля . . . . .	15
1.4. Квантовая статистическая механика . . . . .	16
<b>2. ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИИ <math>\phi^4</math></b>	<b>34</b>
2.1. Однопетлевые расходимости и регуляризация .	35
2.2. Константы перенормировки . . . . .	41
2.3. Однородное РГ уравнение . . . . .	47
2.4. Однопетлевое РГУ в безмассовой теории . . . . .	49
2.5. Двухпетлевая перенормировка поля . . . . .	50
<b>3. ПЕРЕНОРМИРОВКА В ТЕОРИЯХ С ФОТОНАМИ И ФЕРМИОНАМИ</b>	<b>53</b>
3.1. Расходимости в скалярной теории и в КЭД . .	53
3.2. Модель взаимодействующих скалярного и фермионных полей . . . . .	56
3.3. Псевдоскалярная теория Юкавы . . . . .	59
3.4. Метод регуляризации-перенормировки в КЭД .	72
<b>4. РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА</b>	<b>75</b>
4.1. $\beta$ -функция для КЭД . . . . .	75
4.2. РГУ для $\alpha$ в КЭД . . . . .	78
4.3. Бегущая константа связи вблизи фиксированной точки . . . . .	78
4.4. $\beta$ -функция для юкавской константы . . . . .	80
4.5. $\beta$ -функции в псевдоскалярной теории Юкавы .	83
4.6. Решение Коулмена РГУ . . . . .	87
4.7. Аномальные размерности для составных операторов . . . . .	89
4.8. Однопетлевая перенормировка калибровочных теорий . . . . .	90
<b>А Скалярные интегралы</b>	<b>93</b>
<b>Библиографический список</b>	<b>113</b>

Ахметзянова Эльза Нуровна  
Долгополов Михаил Вячеславович

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК  
Часть I

*Практикум  
для студентов специальности  
"Теоретическая физика"*

Редактор Т.И. Кузнецова  
Компьютерная верстка, макет Э.Н. Ахметзяновой

Лицензия ИД N 06/78 от 01.11.2001г. Подписано в печать 18.12.03. Формат 60x84/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 6,74; уч.-изд.л. 7,25.  
Тираж 100 экз. Заказ N  
Издательство "Самарский университет". 443011, ул. Акад. Павлова, 1.  
УОП СамГУ, ПЛД N<sup>0</sup> 67-43 от 19.02.1998.