

Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Часть II

Самара
2004

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Кафедра общей и теоретической физики

Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Часть II

Учебное пособие

Издательство "Самарский университет"
2004

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета

УДК 530.1

ББК 22.31

А 954

Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В. Теория перенормировок. Часть II: Учебное пособие. Самара: Изд-во "Самарский университет 2004. – 32 с.

Вторая часть учебного пособия "Теория перенормировок" посвящена современным приложениям, однопетлевым квантовым поправкам к массам калибровочных бозонов. Целью пособия является закрепление знаний и навыков по основам теории перенормировок. Предназначено для студентов 4 и 5 курсов физического факультета специализации "Теоретическая физика".

УДК 530.1
ББК 22.31

Рецензент канд. физ.-мат. наук, проф. А.А. Бирюков

© Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В., 2004

© Изд-во "Самарский университет 2004

ВВЕДЕНИЕ

Стандартная модель электрослабых и сильных взаимодействий (Standard Model – SM) – перенормируемая теория неабелевых калибровочных полей, построенная на основе калибровочной группы $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ со спонтанно нарушенной симметрией (основы теории SM изложены во многих учебниках, см., например, [1]). SM является выдающимся достижением теоретической физики, а ее выводы и результаты относительно низкоэнергетических явлений очень хорошо (с точностью до 0.1% на однопетлевом уровне) проверены на эксперименте. В настоящее время нет ни одного экспериментального факта, который не мог бы быть объяснен в рамках SM.

Одной из основных проблем при построении теории электрослабых взаимодействий была задача калибровочно инвариантным образом сгенерировать массы слабых калибровочных W^\pm и Z^0 -бозонов и безмассовое состояние для электромагнитного поля. Для этого калибровочная симметрия, лежащая в основе SM, спонтанно нарушается. В этом случае говорят о механизме Хиггса (см. учебники [1]), следствием которого является введение в теорию (не открытого пока!) хиггсовского бозона с неизвестной (нефиксируемой внутри самой SM) массой, при взаимодействии с которым калибровочные бозоны приобретают массы калибровочно инвариантным образом.

Если просто добавить в лагранжиан SM массовые члены для W^\pm и Z^0 бозонов, то лагранжиан становится неинвариантным относительно калибровочных преобразований, и возникает проблема с перенормируемостью. Для генерации масс бозонов в лагранжиане делают замену обычной производной на ковариантную. Но тогда, по теореме Голдстоуна, в теории возникают голдстоуновские бозоны – ненаблюдаемые части-

цы. П. Хиггс показал, что для теорий со спонтанным нарушением калибровочной симметрии степени свободы, соответствующие голдстоуновским бозонам, превращаются в дополнительные степени свободы W^\pm и Z^0 бозонов так, что слабые калибровочные бозоны становятся массивными.

Что касается бозона Хиггса, то мы не знаем даже, сколько всего существует такого типа скалярных бозонов. В простейшем варианте теории мы вводим одно комплексное изодублетное поле, следовательно, возникает один хиггсовский бозон. Мы не знаем, какова должна быть масса хиггсовского бозона. В настоящее время известны примерные границы: $100 \leq M_H \leq 200$ ГэВ.

Ограничения на массу хиггсовского бозона можно определить, исходя из анализа значений масс W^\pm и Z^0 бозонов, вычисленных с учетом вкладов, обусловленных взаимодействием с бозонами Хиггса. Очень большая точность определения массы Z^0 бозона, достигнутая за счет прецизионной подстройки энергии e^+e^- соударений на точку Z^0 -резонанса на ускорителях LEP (CERN's Large Electron Positron Collider) и SLC (Stanford Linear Collider), изменила методы анализа данных об электрослабых взаимодействиях. Вместо сравнения предсказываемых величин масс m_W и m_Z с экспериментально измеренными значениями в качестве экспериментальных входных данных берутся масса Z^0 бозона, постоянная тонкой структуры $\alpha(m_Z) = (128, 870, 12)^{-1}$, экстраполированная по результатам низкоэнергетических измерений, и константа взаимодействия Ферми $G_F = 1, 16639(2) \times 10^{-5} \text{ГэВ}^{-2}$, измеренная в экспериментах по распаду мюона (с учетом радиационных поправок порядка α). Таким образом, \sin_θ^2 перестает быть независимой величиной; если определять его согласно $m_Z = 76.9 \text{ГэВ} / |\sin_\theta^2|$, получим $\sin_\theta^2 = 0, 23120, 003$. При наличии настолько точно измеренных параметров, электрослабая теория позволяет делать

предсказания величин типа массы m_W с достаточной точностью для того, чтобы необходимо было принимать во внимание электрослабые радиационные поправки. В однопетлевом приближении эти поправки зависят от массы t кварка и скалярного ("хиггсовского") бозона и потому могут быть использованы для оценки масс этих частиц. Например, до открытия t кварка для его массы из анализа радиационных поправок были получены границы 130-300 ГэВ, в согласии с экспериментально измеренным позднее значением. В 1994 году была предсказана масса W^\pm бозона, равная 80,29 ГэВ с неопределенностью $\pm 0,02$ ГэВ, связанной с неточностью известных значений m_Z , G_F и $\alpha(m_Z)$, и неопределенностью $\pm 0,11$ ГэВ, связанной с неизвестными массами m_t и $m_{\text{Хиггс}}$. В одной из работ 1995 года было сделано заключение, что $m_{\text{Хиггс}} < 225$ ГэВ. Точное измерение m_W в экспериментах на LEP-2 в CERN позволяет получить полезную оценку $m_{\text{Хиггс}}$.

Цель настоящей части пособия – рассчитать массы калибровочных W^\pm и Z^0 бозонов в однопетлевом приближении с учетом всех возможных вкладов и, опираясь на полученные данные, указать ограничения на массу хиггсовского бозона. Представляется важным сузить интервал возможных значений массы хиггсовского бозона. Это позволит более рационально планировать экспериментальные исследования в соответствующей области энергий.

1. Перенормировка

Лагранжиан SM содержит конечное число физических параметров: e (или g_2 и g_1 – константы связи групп $SU(2)$ и $U(1)$ соответственно), M_W, M_Z , масса бозона Хиггса M_H , фермионные массы (6 кварков и 6 лептонов) m_f , элементы матрицы Кабаяши-Маскава V_{ij} (или 4 независимых параметра), а также v – величина вакуумного ожидания. Они должны быть определены экспериментально и выбираются так, чтобы на древесном уровне их значения совпадали с экспериментальными величинами (физическими массами, константами взаимодействия). Данная связь нарушается при учете старших порядков теории возмущений. "Голые" параметры лагранжиана отличаются от соответствующих физических величин на УФ расходящиеся слагаемые, например:

$$e = e_0 + \delta e, \quad (1)$$

$$M_W^2 = M_{W0}^2 + \delta M_W^2, \quad (2)$$

$$M_Z^2 = M_{Z0}^2 + \delta M_Z^2. \quad (3)$$

При расчетах в перенормируемых теориях данные расходимости сокращаются, что позволяет получать физически значимые результаты.

Вместо g_2, g_1 и v естественно выбрать параметры, непосредственно связанные с наблюдаемыми величинами. Данные параметры приведены в табл. 1.

Один из способов получать результаты в перенормируемой модели следующий:

- посчитать физические величины в терминах "голых" параметров;
- использовать столько определяющих соотношений, сколько существует "голых" параметров, чтобы выразить их через физические наблюдаемые;

Вводимые параметры

Параметр	Значение	Эксперимент
α	1/137.036	аномальный магнитный момент e^-
G_F	$1.16637 * 10^{-5} \text{ }^{-2}$	распад мюона
M_Z	91.1867	Z^* $e^+e^- \Rightarrow f^+f^-$

-подставить определяющие выражения в оставшиеся соотношения.

Таким образом, можно получить предсказания для физических наблюдаемых в терминах физических величин, которые должны быть определены из эксперимента. Все УФ расходимости в этих предсказаниях сокращаются в каждом порядке теории возмущений. Предсказания, получаемые в случае разных вводимых параметров, отличаются в конечных порядках теории возмущений на вклады от более высоких порядков.

Процедура перенормировки может быть представлена следующим образом:

- выбираем систему независимых параметров;
- разделяем "голые" параметры и поля на перенормируемые параметры и перенормируемые;
- выбираем условия перенормировки для фиксации контрчленов;
- выражаем физические величины в терминах перенормированных параметров;
- выбираем вводимые данные, чтобы фиксировать величины перенормируемых параметров;
- рассчитываем предсказания для наблюдаемых физических величин как функции вводимых данных.

Первые три пункта данного списка конкретизируют схему перенормировки. Если положить контрчлены равными нулю, то перенормированные параметры будут совпадать с голыми. Такая схема, в которой вычитается сингулярная часть, получила название “схема минимальных вычитаний“. Однако можно выбрать контрчлены так, что конечные перенормированные параметры будут равны физическим параметрам во всех порядках теории возмущений. Это так называемая схема перенормировки на массовой поверхности. В SM в качестве перенормируемых параметров используются массы физических частиц M_W, M_Z, M_H, m_f , заряд электрона e и параметры матрицы смешивания кварков V_{ij} . Преимущество схемы на массовой поверхности состоит в том, что параметры имеют ясный физический смысл и могут быть измерены непосредственно в подходящих экспериментах. Однако массы не всех частиц известны экспериментально с хорошей точностью. Поэтому другие схемы иногда обладают некоторыми преимуществами. Перенормировка параметров достаточна для получения конечных элементов S -матрицы, но она оставляет функции Грина расходящимися. Это связано с тем, что радиационные поправки изменяют нормировку поля, делая ее бесконечной. Чтобы получать конечные пропагаторы и вершинные функции, поля тоже нужно перенормировать. Кроме того, радиационные поправки приводят к недиагональным поправкам к массовым матрицам так, что голые поля больше не являются массовыми состояниями.

1.1. Условия перенормировки

Вычисление на массовой поверхности собственных энергий удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{Re } \widetilde{\Sigma}^{WW}(M_W^2) = \text{Re } \widetilde{\Sigma}^{ZZ}(M_Z^2) = \text{Re } \widetilde{\Sigma}^f(p = m_f) = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{\Sigma}$ обозначают перенормируемые собственные энергии. Обобщение перенормировки заряда в КЭД представлено следующим соотношением:

$$\tilde{\Gamma}_\mu^{\gamma ee}(k^2 = 0, p = q = m_e) = ie\gamma_\mu. \quad (5)$$

Кроме того, существуют еще условия, которым должны удовлетворять собственные энергии:

$$\tilde{\Sigma}^{\gamma Z}(0) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}^{\gamma\gamma}}{\partial k^2}(0) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{k \rightarrow m_f} \frac{\tilde{\Sigma}^f(k)u_-(k)}{k - m_f} = 0, \quad (8)$$

где u_- – волновая функция фермиона ($I_3 = -\frac{1}{2}$).

1.2. Перенормировка массы

Рассмотрим пропагаторы калибровочных бозонов в калибровке т' Хоофта–Фейнмана, т. е. с поперечными составляющими $\sim g_{\mu\nu}$. В электрослабой теории, в отличие от КЭД, продольные компоненты пропагаторов векторных бозонов $\sim q_\mu q_\nu$ дают ненулевой вклад в физическую матрицу элементов. Но для легких внешних фермионов вклады подавлены за счет $(m_f/M_Z)^2$, и мы можем пренебречь ими. Записывая собственные энергии в виде

$$\Sigma_{\mu\nu}^{W,Z} = g_{\mu\nu}\Sigma^{W,Z} + \dots \quad (9)$$

со скалярной функцией $\Sigma^{W,Z}(q^2)$, мы имеем для пропагаторов в однопетлевом приближении ($V = W, Z$):

$$\frac{-ig^{\mu\sigma}}{k^2 - M_V^{02}}(-i\Sigma_{\sigma\rho}^V(k))\frac{-ig^{\rho\sigma}}{k^2 - M_V^{02}} = \frac{-ig^{\mu\sigma}}{k^2 - M_V^{02}}\left(\frac{-\Sigma^V(k)}{k^2 - M_V^{02}}\right).$$

Графически собственные энергии векторных бозонов представлены как сумма всех диаграмм с виртуальными фермионами, векторными бозонами, хиггсами и духовыми петлями.

Суммируя все собственные энергии как геометрический ряд для пропагаторов, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_V^{02}} \left[1 + \left(\frac{-\Sigma^V}{k^2 - M_V^{02}} \right) + \left(\frac{-\Sigma^V}{k^2 - M_V^{02}} \right)^2 + \dots \right] = \\ = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_V^{02} + \Sigma^V(k^2)} \equiv -ig^{\mu\nu} D_V(k^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку есть смешивание между γ и Z на петлевом (квантовом) уровне, то пропагатор нейтрального бозона должен быть рассмотрен как 2×2 матрица:

$$\begin{pmatrix} k^2 + \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2) & \Sigma^{\gamma Z}(k^2) \\ \Sigma^{\gamma Z}(k^2) & k^2 - M_Z^{02} + \Sigma^{ZZ}(k^2) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Эта матрица дает пропагаторы нейтрального калибровочного бозона в следующем виде:

$$D_\gamma(k^2) = \frac{1}{k^2 + \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2) - (\Sigma^{\gamma Z}(k^2))^2 / (k^2 - M_Z^{02} + \Sigma^{ZZ}(k^2))}, \quad (12)$$

$$D_{\gamma Z}(k^2) = \frac{\Sigma^{\gamma Z}(k^2)}{(k^2 + \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2))(k^2 - M_Z^{02} + \Sigma^{ZZ}(k^2)) - (\Sigma^{\gamma Z}(k^2))^2}, \quad (13)$$

$$D_{ZZ}(k^2) = \frac{1}{k^2 - M_Z^{02} + \Sigma^{ZZ}(k^2) - (\Sigma^{\gamma Z}(k^2))^2 / (k^2 + \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2))}. \quad (14)$$

Последнее слагаемое в знаменателях определителей есть вклад высших порядков, и в однопетлевом приближении его можно не учитывать. Для того чтобы получить физические массы калибровочных бозонов, мы используем соотношения (2)-(3) и определение физической массы, которая совпадает с вещественной частью полюса соответствующих пропагаторов. По условию нормировки (4), массовые контрчлены $\delta M_{W,Z}^2$ фиксируются в виде:

$$\delta M_W^2 = \text{Re } \Sigma^{WW}(M_W^2), \quad (15)$$

$$\delta M_Z^2 = \text{Re} \left(\Sigma^{ZZ}(M_Z^2) - \frac{(\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2))^2}{M_Z^2 + \Sigma^{\gamma\gamma}(M_Z^2)} \right). \quad (16)$$

1.3. Перенормировка заряда

Для перенормировки заряда частицы вводят некий нефизический "затравочный" заряд e_C как параметр, который входит в выражение исходного оператора электромагнитного взаимодействия, фигурирующего в теории возмущений. После этого условие перенормировки формулируются как требование $e_C^2 D(k^2) \rightarrow 4\pi e^2/k^2$ (при $k^2 \rightarrow 0$), где e – истинный, физический заряд частицы. Отсюда находим связь $e_C^2 Z = e^2$, и с ее помощью нефизическая величина e_C исключается из формул, определяющих наблюдаемые эффекты. Потребовав сразу же $Z = 1$, мы тем самым произведем перенормировку как бы "на ходу" и избавимся от необходимости введения фиктивных величин даже в промежуточных выкладках.

Тогда голая γee (электронфотонная) вершина преобразуется в

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i \left[e_0 - \frac{1}{2}e_0\Pi_\gamma(0) + e_0\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right] \gamma^\mu, \quad (17)$$

где мы используем обозначение: $\Pi^\gamma(k^2) = \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2)/k^2$, называемое "вакуумной поляризацией" фотона, и s_W и c_W обозначают соответственно $\sin\theta_W$ и $\cos\theta_W$. Применяя условие перенормировки (5), мы получаем следующие соотношения:

$$\frac{\delta e}{e} = \frac{1}{2}\Pi^\gamma(0) - \frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}. \quad (18)$$

Заметим, что фермионные петлевые вклады в $\Sigma^{\gamma Z}$ исчезают при $q^2 = 0$; только неабелевы бозонные петли $\Sigma^{\gamma Z}(0) \neq 0$.

2. Размерная регуляризация

Петлевые поправки содержат интегралы с УФ расходимостями, так как $p^2 \rightarrow \infty$. Чтобы устранить эту трудность, нам необходима регуляризация. Обычно для калибровочных теорий принимают процедуру размерной регуляризации. Глав-

ная идея состоит в замене пространственно-временной размерности 4 на меньшую размерность d , где интегралы становятся сходящимися:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^4}. \quad (19)$$

Произвольный массовый параметр μ , выполняющий роль константы взаимодействия, является безразмерным. После вычислений физических величин мы берем предел $d \rightarrow 4$ и тогда получаем конечные результаты.

Вспомним некоторые алгебраические соотношения:

- метрика :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \text{Tr}(1) = 2^{d/2}, \quad (20)$$

- алгебра Дирака в d размерности:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, & \{\gamma^\mu, \gamma_5\} &= 0, & \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ \gamma_\mu\gamma^\mu &= d, & \gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho &= (2-d)\gamma_\mu, \\ \gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\rho &= 4g_{\mu\nu} - (4-d)\gamma_\mu\gamma_\nu, \\ \gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma^\rho &= -2\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\mu + (4-d)\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (21)$$

- соотношения для следов:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (22)$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}], \quad (23)$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (24)$$

$$\text{Tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0. \quad (25)$$

В теориях, которые аномально свободны подобно SM, γ_μ :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (26)$$

3. Однопетлевые интегралы с одним и двумя пропагаторами

В однопетлевых вычислениях в различных моделях КТП встречаются следующие интегралы с одним и двумя пропагаторами в подынтегральной функции:

$$\frac{i}{16\pi^2} A_0(m) \equiv \int Dq \frac{1}{[1]} = \frac{i}{16\pi^2} m^2 \left(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi^2} B_0(p, m_1, m_2) &\equiv \int Dq \frac{1}{[1][2]} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (\Delta - I_0(p, m_1, m_2)), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\int Dq \equiv \mu^\varepsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$, $\varepsilon \equiv 4 - d$, $[1] \equiv q^2 - m_1^2$, $[2] \equiv (q+p)^2 - m_2^2$, $\Delta = (\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi)$,

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi^2} B_\mu(p, m_1, m_2) &\equiv \frac{i}{16\pi^2} p_\mu B_1(p, m_1, m_2) \equiv \int Dq \frac{q^\mu}{[1][2]} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{p_\mu}{2p^2} \left(\Delta(-p^2) - m_1^2 \ln \frac{m_1^2}{\mu^2} + m_2^2 \ln \frac{m_2^2}{\mu^2} + m_1^2 - m_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) I_0(p, m_1, m_2) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi^2} B_{\mu\nu} &= \int Dq \frac{q^\mu q^\nu}{[1][2]} \equiv \\ &\equiv \frac{i}{16\pi^2} [p^\mu p^\nu B_{11}(p, m_1, m_2) + g^{\mu\nu} B_{00}(p, m_1, m_2)], \end{aligned} \quad (30)$$

$$B_1 = \frac{1}{2p^2} [A_0(m_1) - A_0(m_2) - (m_1^2 - m_2^2 + p^2) B_0], \quad (31)$$

$$B_{11} = \frac{1}{3p^2} \left[A_0(m_2) - 2(m_1^2 - m_2^2 + p^2) B_1 - m_1^2 B_0 - \frac{m_1^2 + m_2^2 - \frac{p^2}{3}}{2} \right], \quad (32)$$

$$B_{00} = \frac{1}{6} \left[A_0(m_2) + 2m_1^2 B_0 + (m_1^2 - m_2^2 + p^2) B_1 + m_1^2 + m_2^2 - \frac{p^2}{3} \right], \quad (33)$$

$$I_0(p, m_1, m_2) = \int_0^1 dx \ln \left[\frac{x^2 p^2 - x p^2 - x(m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\varepsilon}{\mu^2} \right]. \quad (34)$$

Выведем последовательно вышеприведенные формулы.

Одноточечный интеграл A_0 может быть преобразован в евклидов интеграл путем поворота контура интегрирования на 90^0 , а именно заменой $q^0 = iq_E^0$, $\vec{q} = \vec{q}_E$, $d^d q = id^d q_E$, так что импульс интегрирования q_E имеет определенную метрику: $q^2 = -q_E^2$, $q_E^2 = (q_E^0)^2 + \dots + (q_E^{d-1})^2$. Тогда

$$\frac{i}{16\pi^2} A_0 (m) = -i \frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_E}{q_E^2 + m^2}.$$

Последний интеграл, зависящий только от q_E^2 , легко вычисляется в d -мерной полярной системе координат ($r = \sqrt{q_E^2}$, Ω_{d-1}):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q_E}{q_E^2 + m^2} &= \int d\Omega_{d-1} \int_0^\infty dr r^{d-1} \frac{1}{r^2 + m^2} = \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2)} \cdot \int_0^\infty (m^2)^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{r^2}{m^2}\right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{\frac{m^2}{2} d\left(\frac{r^2}{m^2}\right)}{m^2\left(\frac{r^2}{m^2} + 1\right)} = \\ &= \frac{\pi^{d/2} (m^2)^{\frac{d-2}{2}}}{(d/2)} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{d-2}{2}} dz}{z + 1} = \frac{\pi^{d/2} (m^2)^{\frac{d-2}{2}}}{\Gamma(d/2)} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(1)} = \\ &= \pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} (m^2)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Используя следующие свойства Γ -функции при $x \rightarrow 0$:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x),$$

$$\Gamma(-1 + x) = -\frac{1}{x} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(x),$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi^2} A_0 (m) &= \frac{i}{16\pi^2} (-m^2) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon/2} \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (-m^2) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \left(-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$A_0 (m) = m^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1\right).$$

Формула (27) получена.

Теперь выведем формулу (28). С помощью параметризации Фейнмана

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$$

и сдвига по переменной q двухточечная функция B_0 может быть записана в следующей форме:

$$\frac{i}{16\pi^2} B_0(p, m_1, m_2) = \int_0^1 dx \frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{[q^2 - x^2 p^2 + x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) - m_1^2]^2}.$$

Преимущество параметризации Фейнмана состоит в простоте интегрирования по q , так как подынтегральная функция зависит от $q^2 = (q^0)^2 - \vec{q}^2$.

Меняя порядок интегрирования, преобразуем интеграл по импульсу в пространстве Минковского в евклидов:

$$\frac{i}{16\pi^2} B_0 = i \int_0^1 dx \frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_E}{(q_E^2 + M^2)^2},$$

где $M^2 = x^2 p^2 - x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\varepsilon$ является константой по отношению к q_E -интегрированию. Используя

$$\frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q_E}{(q_E^2 + m^2)^n} = \frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} (m^2)^{-n + \frac{d}{2}} \quad (35)$$

при $n=2$, получаем:

$$\begin{aligned} B_0(p, m_1, m_2) &= \Delta - \int_0^1 dx \ln \left[\frac{x^2 p^2 - x p^2 - x(m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\varepsilon}{\mu^2} \right] = \\ &= \Delta - \ln \frac{m_1 m_2}{\mu^2} + I(p, m_1, m_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Формула (28) получена.

Выведем формулу (29). Умножим (29) на p_μ :

$$\int Dq \frac{pq}{\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right]} = \frac{i}{16\pi^2} p^2 B_1.$$

Представим скалярное произведение pq в терминах множителей знаменателя:

$$pq = \frac{1}{2} [(q+p)^2 - m_2^2 - (q^2 - m_1^2) - p^2 + m_2^2 - m_1^2].$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & \int Dq \frac{pq}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]} = \\ & = \frac{1}{2} \int Dq \frac{1}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right]} - \frac{1}{2} \int Dq \frac{1}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]} + \frac{(m_2^2 - m_1^2 - p^2)}{2} \int Dq \frac{1}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_1 = \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{2} A_0(m_1) - \frac{1}{2} A_0(m_2) + \frac{(m_2^2 - m_1^2 - p^2)}{2} B_0 \right).$$

В итоге для $B_\mu = p_\mu B_1$ получаем

$$B_\mu = \frac{p_\mu}{2p^2} [A_0(m_1) - A_0(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_0]. \quad (37)$$

Используя формулы (27), (28), имеем:

$$\begin{aligned} B_\mu = \frac{p_\mu}{2p^2} & (\Delta(-p^2) - m_1^2 \ln m_1^2 + m_2^2 \ln m_2^2 + m_1^2 - m_2^2 + \\ & + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) I_0(p, m_1, m_2)). \end{aligned} \quad (38)$$

Формула (29) получена.

Используя $q^2 = q^2 - m_1^2 + m_1^2$, получаем

$$\int Dq \frac{q^2}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]} = \int \frac{1}{q^2 - m_2^2} + m_1^2 \int \frac{1}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]}. \quad (39)$$

Выведем формулу (33):

$$\begin{aligned} & \int Dq \frac{qp}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]} = \\ & = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} A_0(m_1) - \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} A_0(m_2) + \frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2} \int Dq \frac{1}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]}. \end{aligned} \quad (40)$$

Используя сдвиг переменной $q + p = q'$, запишем:

$$\begin{aligned} & \int Dq \frac{(qp)^2}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]} = \\ & = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} \int Dq \frac{qp}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 1 \end{array} \right]} + \frac{i}{16\pi^2} \frac{p^2}{2} A_0(m_2) + \frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2} \int Dq \frac{qp}{\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 2 \end{array} \right]}. \end{aligned} \quad (41)$$

Учитывая, что

$$\int Dq \frac{(qp)^2}{[1][2]} = \frac{i}{16\pi^2} (p^2 B_{00} + p^4 B_{11}),$$

$$\int Dq \frac{qp}{[1][2]} = B_1 p^2,$$

можем записать:

$$B_{00} + p^2 B_{11} = \frac{p^2}{2} A_0(m_2) + \frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2} B_1 p^2.$$

Решаем систему уравнений:

$$dB_{00} + p^2 B_{11} = A_0(m_2) + m_1^2 B_0, \quad (42)$$

$$B_{00} + p^2 B_{11} = \frac{1}{2} A_0(m_2) + \frac{1}{2} (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_1, \quad (43)$$

$$d = 4 - \varepsilon,$$

$$B_{00} = B_{00}^{\text{конеч.}} + B_{00}^{\text{расх-ся}},$$

$$dB_{00} = (4 - \varepsilon)(B_{00}^{\text{конеч.}} + B_{00}^{\text{расх-ся}}) = 4B_{00} - \varepsilon B_{00}^{\text{расх-ся}}.$$

Система уравнений:

$$4B_{00} + p^2 B_{11} = A_0(m_2) + m_1^2 B_0 + \varepsilon B_{00}^{\text{расх-ся}}, \quad (44)$$

$$B_{00} + p^2 B_{11} = \frac{1}{2} A_0(m_2) + \frac{1}{2} (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_1, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} B_{00} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} A_0(m_2) + m_1^2 B_0 + \frac{1}{2} (p^2 + m_1^2 - m_2^2) B_1 + \varepsilon B_{00}^{\text{расх-ся}} \right) = \\ &= \frac{1}{6} (A_0(m_2) + 2m_1^2 B_0 - (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_1 + 2\varepsilon B_{00}^{\text{расх-ся}}). \end{aligned}$$

Найдем явный вид для расходящейся части коэффициента B_{00} с помощью параметризации Фейнмана:

$$\begin{aligned} &\int d^d q \frac{q_\mu q_\nu}{[q^2 - m_1^2][(q+p)^2 - m_2^2]} = \\ &= \int d^d q \int_0^1 dx \frac{q_\mu q_\nu}{[(q^2 - m_1^2)(1-x) + (q+p)^2 - m_2^2]^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\int_0^1 dx \frac{q_\mu q_\nu}{[q^2 + 2qpx + p^2 x^2 - p^2 x^2 + x(m_1^2 + p^2 - m_2^2) - m_1^2]^2}. \quad (46)$$

Замена переменной: $(q + px) = q'$ приводит к соотношению

$$\int_0^1 dx \frac{(q'_\mu - p_\mu x)(q'_\nu - p_\nu x)}{[q'^2 - M^2]^2} = \int_0^1 dx \frac{q_\mu q_\nu + x^2 p_\mu p_\nu - q_\mu p_\nu x - q_\nu p_\mu x}{[q'^2 - M^2]^2},$$

где $M^2 = p^2 x^2 - x(m_1^2 + p^2 - m_2^2) + m_1^2$,

$$q_\mu q_\nu = \frac{1}{4} q^2 g_{\mu\nu},$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{q_\mu q_\nu}{[q'^2 - M^2]^2} &= g_{\mu\nu} \int_0^1 dx \frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{q^2}{[q'^2 - M^2]^2} = \\ &= \frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^d} \int d^d q \frac{q^2}{[q'^2 - M^2]^2} = \frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} i \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} (-M^2)^{-n + \frac{d}{2} + 1}. \end{aligned} \quad (47)$$

Учитывая, что $n=2$:

$$\frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{\frac{4-\varepsilon}{2}}} i \frac{\Gamma(-1 + \frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(2)} (-M^2) = \frac{(4\pi\mu^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(4\pi)^2} i \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 \right) M^2.$$

Используя известное соотношение $a^\varepsilon \rightarrow 1 + \varepsilon \ln a$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем:

$$\frac{i}{16\pi^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln(4\pi\mu^2) \right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 \right) M^2.$$

Выделяем расходящуюся часть, пропорциональную $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$\frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{\varepsilon} M^2.$$

Таким образом, расходящаяся часть коэффициента B_{00} равна

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dx M^2 &= \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dx (p^2 x^2 - x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2) = \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{p^2}{3} - \frac{1}{2}(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 \right) = \frac{1}{2\varepsilon} \left(m_1^2 + m_2^2 - \frac{p^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Формула (33) получена.

Представим формулы (27)-(29) в случаях равных и нулевых масс.

$$\frac{i}{16\pi^2} A_0(0) = 0, \quad (48)$$

$$B_0(p, m, m) = \Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + I(p, m, m), \quad (49)$$

$$B_1(p, m, m) = -\frac{1}{2} B_0(p, m, m), \quad (50)$$

$$B_\mu(p, m, m) = \frac{p_\mu}{2} (I_0(p, m, m) - \Delta), \quad (51)$$

$$B_{\mu\nu}(p, m, m) = [p_\mu p_\nu B_{11}(p, m, m) + g_{\mu\nu} B_{00}(p, m, m)], \quad (52)$$

$$B_{11}(p, m, m) = \frac{1}{3p^2} [A_0(m) - 2p^2 B_1(p, m, m) - m^2 B_0(p, m, m) - m^2 + \frac{p^2}{6}], \quad (53)$$

$$B_{00}(p, m, m) = \frac{1}{6} [A_0(m) + 2m^2 B_0(p, m, m) + p^2 B_1(p, m, m) + 2m^2 - \frac{p^2}{3}], \quad (54)$$

$$I(p, m, m) = -\int_0^1 dx \ln \left[(x^2 - x) \frac{p^2}{m^2} + 1 \right] =$$

$$= \begin{cases} 2 \left[1 - \sqrt{4(m^2/p^2) - 1} \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{4m^2/p^2}} \right) \right], & 4(m^2/p^2) > 1 \\ 2 \left[1 - \sqrt{1 - 4(m^2/p^2)} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4(m^2/p^2)}}{\sqrt{4m^2/p^2}} \right) \right], & 4(m^2/p^2) < 1, \end{cases} \quad (55)$$

$$I(0, m, m) = 0, \quad (56)$$

$$I(p, m, m) = \begin{cases} 2 - \ln \frac{p^2}{m^2} + i\pi & \text{для } p^2 \gg m^2, \\ \frac{1}{6} \left(\frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{1}{60} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^2 & \text{для } p^2 \ll m^2. \end{cases} \quad (57)$$

Заметим, что второй член для $p^2 \ll m^2$ дает вклад в I меньше, чем 3%, когда $p^2 \leq M_Z^2$ и $m = m_t$.

Рассмотрим частные случаи. Теория ϕ^4 . Вычислим поправку порядка g . Петлевой интеграл имеет вид:

$$\frac{1}{2} g \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2}.$$

Используя формулу (27), получим:

$$\frac{1}{2} g \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2} = m^2 \left(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu} + 1 \right).$$

Вычислим теперь 4-точечную функцию в порядке g^2 , используя формулу (28):

$$\frac{1}{2} g^2 (\mu^2)^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{1}{(q-p)^2 - m^2} =$$

$$= \frac{1}{2} g^2 \frac{i}{16\pi^2} B_0(p, m, m) = \frac{1}{2} g^2 \frac{i}{16\pi^2} \left(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + I(p, m, m) \right).$$

4. Однопетлевые собственные энергии калибровочных бозонов

4.1. Фермионный вклад в собственную энергию

Фермионный вклад в собственную энергию калибровочных бозонов представлен на рис.1 , который мы обозначим как **[FL]**:

$$[\mathbf{FL}] = -i\Sigma^{\mu\nu}(k) = -(AB) \int Dq \text{Tr} \left\{ \frac{i(q + m_1)}{[1]} \gamma^\mu (a_B + b_B \gamma^5) \times \right. \\ \left. \times \frac{i(p + q + m_2)}{[2]} \gamma^\nu (a_A + b_A \gamma^5) \right\}, \quad (58)$$

где A, B, a и b , представленные в табл. 2, есть константы взаимодействия, соответствующие каждой вершине в $SU(2)_L \times U(1)$ теории.

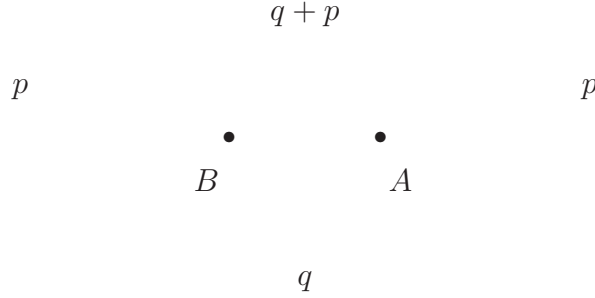


Рис.1. Фермионный вклад в собственную энергию **[FL]**

Таблица 2

Классификация параметров в (58)

Собственная энергия	m_1	m_2	a_A	a_B	b_A	b_B	AB
(γ, γ)	m_f	m_f	1	1	0	0	$-e^2 Q_f^2$
(γ, Z)	m_f	m_f	1	v_f	0	$-a_f$	$e^2 Q_f$
(Z, Z)	m_f	m_f	v_f	v_f	$-a_f$	$-a_f$	$-e^2$
(W, W)	m_1	m_2	1	1	-1	-1	$-e^2/8s_W^2$

Запишем $\Sigma^{\mu\nu}(p)$ в следующей форме:

$$\Sigma^{\mu\nu}(p) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \Sigma_1(p^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} (p^2 \Sigma_2(p^2) + \Sigma_1(p^2)). \quad (59)$$

Заметим, что только поперечная амплитуда $\Sigma_1(p^2)$ дает вклад в элементы S-матрицы, тогда как остальная часть сокращается с вектором поляризации. Используя интегралы из предыдущего параграфа, получим:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(p^2) = & -\frac{(AB)}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{3}(a_A a_B + b_A b_B) \times \right. \\ & \times \left[\left(m_1^2 + m_2^2 - \frac{1}{3}p^2 \right) - (A (m_1) + A (m_2)) - \right. \\ & - \frac{1}{2p^2}(m_1^2 - m_2^2) (A (m_1) - A (m_2)) - \left. \left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - p^2 + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{2p^2} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times B_0(p, m_1, m_2) \right] + (a_A a_B - b_A b_B) m_1 m_2 B_0(p, m_1, m_2) \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Фермионные вклады в собственную энергию калибровочных бозонов $(\gamma\gamma), (\gamma Z), (ZZ)$ и (WW) могут быть получены из (60), используя соответствующие константы A, B, a_i и b_i для каждого случая из табл. 2:

$$\begin{aligned} \Sigma^{\gamma\gamma}(p^2) = & \sum_f \frac{e^2 Q_f^2}{4\pi^2} \frac{N_c^f}{3} \left[2m_f^2 - \frac{1}{3}p^2 - 2A (m_f) + (p^2 + 2m_f^2) \times \right. \\ & \left. \times B_0(p^2, m_f, m_f) \right] = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 p^2 N_c^f [\Delta_f + P_f(p^2)], \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{\gamma Z}(p^2) = & -\sum_f \frac{e^2 Q_f N_c^f}{4\pi^2} v_f \left[2m_f^2 - \frac{1}{3}p^2 - 2A (m_f) + (p^2 + 2m_f^2) \times \right. \\ & \left. \times B_0(p^2, m_f, m_f) \right] = -\frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f v_f N_c^f p^2 [\Delta_f + P_f(p^2)], \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{ZZ}(p^2) = & \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f [(v_f^2 + a_f^2) p^2 (\Delta_f + P_f(p^2)) - \\ & - \frac{3m_f^2}{8s_W^2 c_W^2} (\Delta_f + I(p^2, m_f, m_f))], \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{WW}(p^2) = & \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \frac{1}{3} \sum_{f=(1,2)} N_c^f \left[m_1^2 + m_2^2 - \frac{1}{3}p^2 - (A (m_1) + A (m_2)) + \right. \\ & + \frac{1}{2p^2} (m_1^2 - m_2^2) \times (A (m_1) - A (m_2)) + \\ & \left. + \left(p^2 - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{2p^2} \right) B_0(p^2, m_1, m_2) \right], \end{aligned} \quad (64)$$

Фермионы	$V_f \equiv (2s_W c_W)v_f$	$A_f \equiv (2s_W c_W)a_f$
нейтрино	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e, μ, τ	$-\frac{1}{2} + 2s_W^2$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}s_W^2$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}s_W^2$	$-\frac{1}{2}$

где

$$N_c^f = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{для лептонов} \\ 3 & \text{для кварков} \end{array} \right\},$$

$$\Delta_f = \Delta - \ln \frac{m_f^2}{\mu^2}, \quad v_f = (I_{3L}^f - 2Q_f s_W^2)/2s_W c_W, \quad a_f = I_{3L}^f/2s_W c_W \text{ и}$$

$$\begin{aligned} P_f(p^2) &= \left(1 + \frac{2m_f^2}{p^2}\right) I(p^2, m_f, m_f) - \frac{1}{3} = \\ &= \begin{cases} -\ln \frac{|p^2|}{m_f^2} + \frac{5}{3} + i\pi\theta(p^2) & \text{для } |p^2| \gg m_f^2, \\ \frac{p^2}{5m_f^2} & \text{для } |p^2| \ll m_f^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь обсудим вклады легких и тяжелых фермионов отдельно. В частности, представим собственные энергии при $p^2 = 0$ и $p^2 = M_Z^2$ (или M_W^2).

Для тяжелых фермионов (t,b) из (61)-(64) получим:

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(0) = 0, \quad (65)$$

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{9\pi} M_Z^2 \left[5\Delta_t + \frac{4}{5} \frac{M_Z^2}{m_t^2} - \ln \frac{M_Z^2}{m_t^2} + \frac{5}{3} + i\pi \right], \quad (66)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(0) = 0, \quad (67)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2) = -\frac{\alpha}{\pi} M_Z^2 \left[Q_t v_f \left(\Delta_t + \frac{M_Z^2}{5m_t^2} \right) + Q_b v_b \left(\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right) \right], \quad (68)$$

$$\Sigma^{ZZ}(0) = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{3}{8s_W^2 c_W^2} [m_t^2 \Delta_t + m_b^2 \Delta_b], \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{ZZ}(M_Z^2) &= \frac{\alpha}{\pi} M_Z^2 \left[(v_t^2 + a_t^2) \left(\Delta_t + \frac{M_Z^2}{5m_t^2} \right) + (v_b^2 + a_b^2) \left(\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{8s_W^2 c_W^2} \frac{m_t^2}{M_Z^2} \left(\Delta_t + \frac{M_Z^2}{6m_t^2} + \frac{1}{60} \frac{M_Z^4}{m_t^4} \right) \right], \quad (70) \end{aligned}$$

$$\frac{d\Sigma^{ZZ}}{dk^2}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left[(v_t^2 + a_t^2) \left(\Delta_t + \frac{M_Z^2}{6m_t^2} \right) + (v_b^2 + a_b^2) \left(\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{8s_W^2 c_W^2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30} \frac{M_Z^2}{m_t^2} \right) \right], \quad (71)$$

$$\Sigma^{WW}(0) = -\frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \left[\frac{3}{2} m_t^2 \Delta_t + \frac{3}{4} m_t^2 \right], \quad (72)$$

$$\Sigma^{WW}(M_W^2) = \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \left[\left(M_W^2 - \frac{3}{2} m_t^2 \right) \Delta_t - \frac{3}{4} m_t^2 + \frac{1}{3} M_W^2 \right]. \quad (73)$$

Вклады легких фермионов ($m_f^2 \ll M_Z^2$):

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(0) = 0, \quad (74)$$

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \simeq \sum_{f=light} \frac{N_c^f \alpha}{3\pi} Q_f^2 M_Z^2 \left(\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right), \quad (75)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(0) = 0, \quad (76)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f Q_f v_f M_Z^2 \left(\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right), \quad (77)$$

$$\Sigma^{ZZ}(0) = -\frac{\alpha}{3\pi} \sum_f \frac{3N_c^f}{8c_W^2 s_W^2} m_f^2 \Delta_f, \quad (78)$$

$$\Sigma^{ZZ}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f M_Z^2 \left[(v_f^2 + a_f^2) \left(\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right) - \right. \\ \left. - \frac{3m_f^2}{8c_W^2 s_W^2 M_Z^2} (\Delta_Z + 2 + i\pi) \right], \quad (79)$$

$$\frac{d\Sigma^{ZZ}}{dk^2}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f N_c^f (v_f^2 + a_f^2) \left[\Delta_Z + \frac{5}{3} + i\pi \right], \quad (80)$$

$$\Sigma^{WW}(0) = -\frac{\alpha}{16\pi s_W^2} \sum_{f=(1,2)} N_c^f \left[2(m_1^2 \Delta_1 + m_2^2 \Delta_2) + (m_1^2 + m_2^2) - \right. \\ \left. - \frac{2m_1^2 m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} \right], \quad (81)$$

$$\Sigma^{WW}(M_W^2) = -\frac{\alpha}{12\pi s_W^2} \sum_{f=(1,2)} N_c^f M_W^2 \left[\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + I(M_W^2, m_1, m_2) - \frac{1}{3} \right]. \quad (82)$$

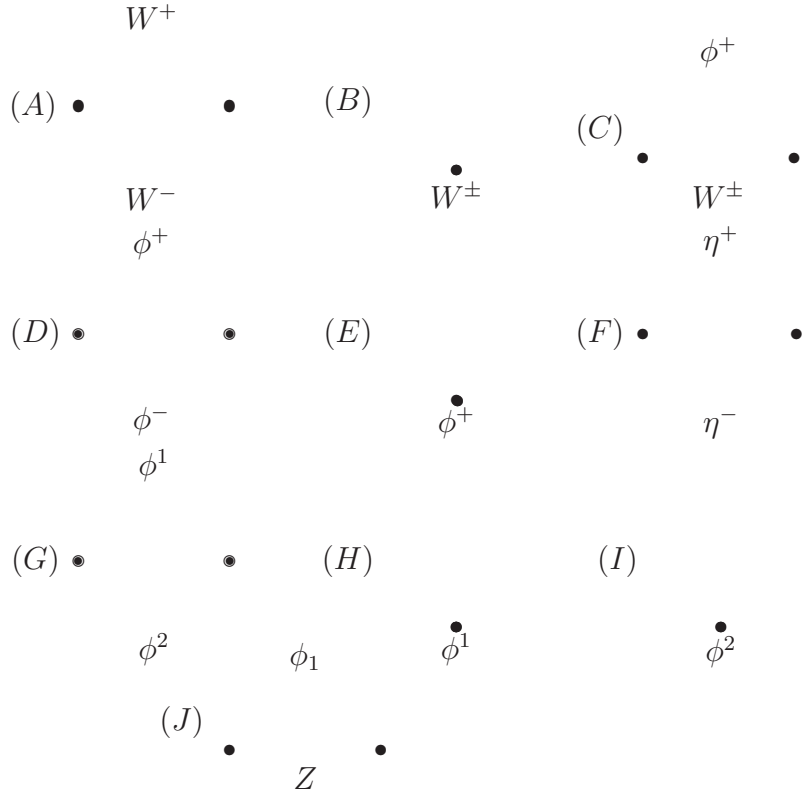


Рис. 2. Вклады векторных и скалярных бозонов в собственные энергии нейтральных калибровочных бозонов

4.2. Вклады векторных и скалярных бозонов

Вклады векторных и скалярных бозонов в собственные энергии фотона и Z бозона представлены диаграммами на рис. 2.

Определим интегралы, относящиеся к рис. 2, следующими формулами:

$$(\mathbf{A}) = -i \int Dq \frac{E_{\mu\nu}}{[1][2]} \equiv -i(p_\mu p_\nu A(m_1^V) - g_{\mu\nu} A_{V_2}), \quad (83)$$

$$(\mathbf{B}) = \int Dq \frac{H_{\mu\nu}}{[1]} \equiv (6 - 2\varepsilon) A(m_1^V), \quad (84)$$

$$(\mathbf{C}) = i \int Dq \frac{g_{\mu\nu}}{[1][2]} \equiv i g_{\mu\nu} B_0, \quad (85)$$

$$(\mathbf{D}) = -i \int Dq \frac{(2q+p)^\mu (2q+p)^\nu}{[1][2]} \equiv -i(p_\mu p_\nu A(m_1^\phi) - g_{\mu\nu} A_{\phi_2}), \quad (86)$$

$$(\mathbf{E}) = - \int Dq \frac{g_{\mu\nu}}{[1]} \equiv -g_{\mu\nu} A(m_1^\phi), \quad (87)$$

$$(\mathbf{F}) = i \int Dq \frac{q^\mu(q+p)^\nu}{[1][2]} \equiv -i(p_\mu p_\nu A(m_1^\eta) - g_{\mu\nu} A_{\eta^2}), \quad (88)$$

где константы взаимодействия, соответствующие каждой вершине, опущены, но лоренцевские факторы:

$$E_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu (d-6) + (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu)(2d-3) + q_\mu q_\nu (4d-6) + \\ + g_{\mu\nu} [(2p+q)^2 + (p-q)^2], \quad (89)$$

$$H_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} [2g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu}] = (6-2\varepsilon) g_{\mu\nu} \quad (90)$$

и

$$A_{V_2} = 10 B_{00} - [A(m_1) + A(m_2) + (m_1^2 + m_2^2 + 4q^2) I_0] - 4\varepsilon B_{00}, \quad (91)$$

$$A_{\phi_2} = 4 B_{00}, \quad (92)$$

$$A_{\eta^2} = -B_{00}. \quad (93)$$

Заметим, что три диаграммы (\mathbf{E}) , (\mathbf{H}) и (\mathbf{I}) имеют такую же интегральную форму, что и (87), аналогично диаграммы (\mathbf{C}) и (\mathbf{J}) имеют интегральную форму (85), и диаграммы (\mathbf{D}) и (\mathbf{G}) соответственно интегральную форму (86). Можем выразить бозонные вклады в собственную энергию калибровочных бозонов через вышеприведенные интегралы.

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(q^2) = \frac{i}{16\pi^2} [(-e^2)(\mathbf{A}) + (-ie^2)(\mathbf{B}) + (-2e^2 c_W^2 M_Z^2)(\mathbf{C}) + \\ + (-e^2)(\mathbf{D}) + (2ie^2)(\mathbf{E}) + (-2e^2)(\mathbf{F})], \quad (94)$$

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(0) = 0, \quad (95)$$

$$\Sigma^{\gamma\gamma}(M_Z^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} M_Z^2 [3\Delta_W + (3 + 4c_W^2)I(M_Z^2, M_W, M_W)], \quad (96)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(q^2) = \left(\frac{c_W}{s_W}\right) \Sigma^{\gamma\gamma}(q^2) + \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{c_W s_W}\right) \left[2M_W^2(\mathbf{C}) + \frac{1}{2}(\mathbf{D}) + (-i)(\mathbf{E})\right], \quad (97)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(0) = \frac{\alpha c_W}{2\pi s_W} M_Z^2 \Delta_W, \quad (98)$$

$$\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{4\pi s_W c_W} M_Z^2 \times \left[\left(5c_W^2 + \frac{1}{6}\right) \Delta_W + \left(\frac{1}{6} + \frac{13}{3}c_W^2 + 4c_W^4\right) I(M_Z^2, M_W, M_W) + \frac{1}{9} \right], \quad (99)$$

$$\Sigma^{ZZ}(q^2) = \left(\frac{c_W^2}{s_W^2}\right) \Sigma^{\gamma\gamma}(q^2) + \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{s_W^2}\right) \times \left[(4c_W^2 - 2)M_Z^2(\mathbf{C}) + \left(1 - \frac{1}{4c_W^2}\right)(\mathbf{D}) + i\left(\frac{1}{2c_W^2} - 2\right)(\mathbf{E}) - \left(\frac{1}{4c_W^2}\right)(\mathbf{G}) + \left(\frac{i}{4c_W^2}\right)[(\mathbf{H}) + (\mathbf{I})] + \left(-\frac{M_Z^2}{c_W^2}\right)(\mathbf{J}) \right], \quad (100)$$

$$\Sigma^{ZZ}(0) = \frac{\alpha}{4\pi} M_Z^2 \left[\left(4 + \frac{1}{c_W^2} - \frac{1}{s_W^2}\right) \Delta_W + \frac{1}{12c_W^2 s_W^2} \times \left(\frac{21}{2} - \frac{3}{2}h - \frac{9h}{h-1} \ln h + 12 \ln c_W^2\right) \right], \quad (101)$$

$$\Sigma^{ZZ}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left(7 + \frac{7}{6c_W^2} - \frac{25}{6s_W^2}\right) M_Z^2 \Delta_W + \left(\frac{\alpha}{48\pi c_W^2 s_W^2} M_Z^2\right) \left\{ [-c_W^4(40 + 80c_W^2) + (c_W^2 - s_W^2)^2(8c_W^2 + 1) + 12c_W^2] \times I(M_Z^2, M_W, M_W) + (12 - 4h + h^2)I(M_Z^2, M_H, M_Z) - (h-1)^2 + \frac{4}{3}(1 - 2c_W^2) + (-6 - h + \frac{h^2}{2}) \ln h + 13 \ln c_W^2 \right\}, \quad (102)$$

$$\frac{d\Sigma^{ZZ}}{dk^2}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \left(3 - \frac{19}{6s_W^2} + \frac{1}{6c_W^2}\right) \Delta_W + \frac{\alpha}{48\pi c_W^2 s_W^2} \times \left\{ [-40c_W^4 + (c_W^2 - s_W^2)^2] I(M_Z^2, M_W, M_W) + [-c_W^4(40 + 80c_W^2) + (c_W^2 - s_W^2)^2(8c_W^2 + 1) + 12c_W^2] \tilde{I}(M_Z^2, M_W, M_W) + (2h - h^2) I(M_Z^2, M_H, M_Z) + [12 - 4h + h^2] \tilde{I}(M_Z^2, M_H, M_Z) + \left(1 - \frac{h+1}{2(h-1)} \ln h - \frac{1}{2} \ln \frac{h}{c_W^4}\right) + \frac{4}{3}(1 - 2c_W^2) \right\}, \quad (103)$$

где $\tilde{I}(p^2, m_1, m_2) = dI/dp^2$ и $h = M_H^2/M_Z^2$.

Для Σ^{WW} из диаграмм на рис. 3 получаются следующие вклады векторных и скалярных бозонов:

$$\Sigma^{WW}(q) = \frac{i}{16\pi^2} \left[(-g^2 c_W^2)(\mathbf{K}) + (-e^2)(\mathbf{L}) + \frac{1}{2} i g^2 [2g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - \right.$$

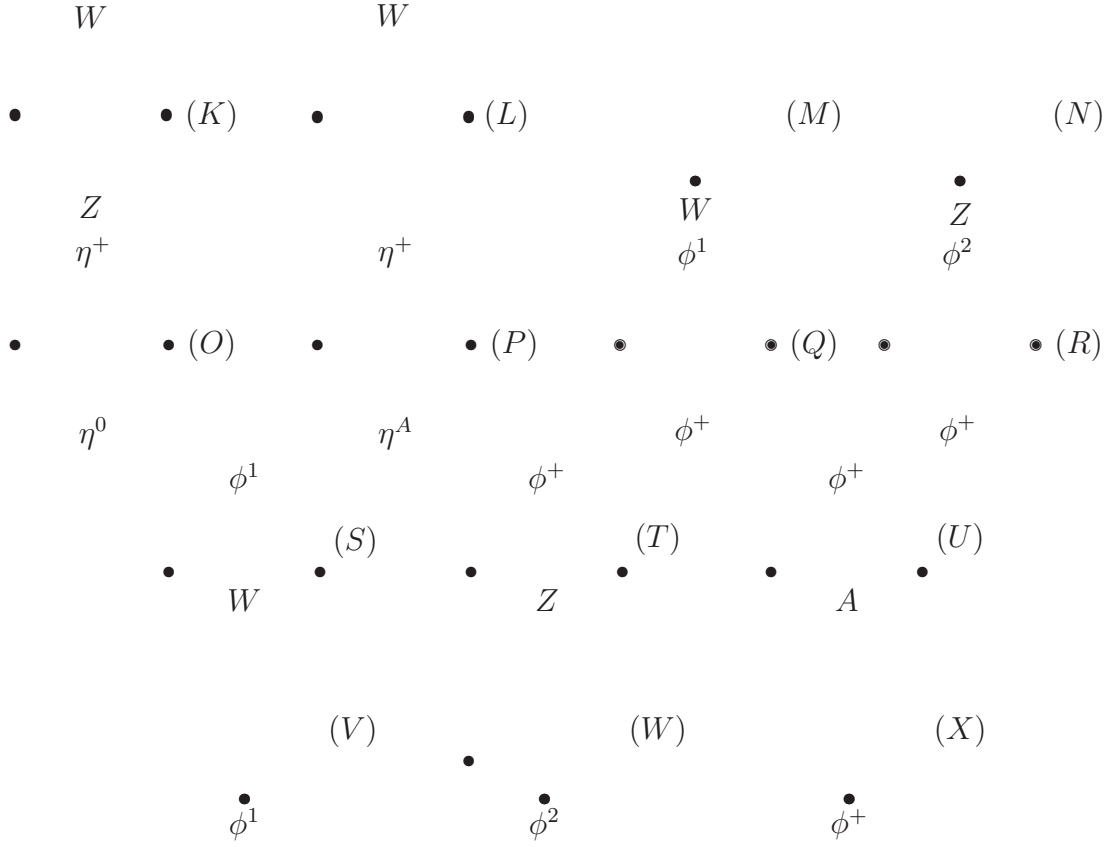


Рис. 3. Вклады векторных и скалярных бозонов в собственную энергию W бозона

$$\begin{aligned}
& -g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}](\mathbf{M}) + \frac{1}{2}ig^2c_W^2(\mathbf{N}) + (-2g^2c_W^2)(\mathbf{O}) + (-2e^2)(\mathbf{P}) + \\
& + \left(-\frac{g^2}{4}\right)(\mathbf{Q}) + \left(-\frac{g^2}{4}\right)(\mathbf{R}) + (-g^2M_W^2)(\mathbf{S}) + (-g^2M_Z^2s_W^4)(\mathbf{T}) + \\
& + (-e^2M_W^2)(\mathbf{U}) + \left(\frac{ig^2}{4}\right)(\mathbf{V}) + \left(\frac{ig^2}{4}\right)(\mathbf{W}) + \left(\frac{ig^2}{2}\right)(\mathbf{X}) \Big], \quad (104)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{WW}(0) = & \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} M_W^2 \left[\left(\frac{s_W^2}{c_W^2} - 1 \right) \Delta_W + \frac{3}{4(1 - c_W^2/h)} \ln \frac{c_W^2}{h} - \frac{h}{8c_W^2} + \right. \\
& \left. + \left(s_W^2 + \frac{s_W^4}{c_W^2} - \frac{1}{8c_W^2} - \frac{39}{12} + \left(\frac{s_W^2}{c_W^2} + 3 - \frac{17}{4s_W^2} \right) \ln c_W^2 \right) \right], \quad (105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{WW}(M_W^2) = & \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{s_W^2} M_W^2 \left[- \left(\frac{25}{6} - \frac{s_W^2}{c_W^2} \right) \Delta_W + \left(\frac{1}{12c_W^4} + \frac{4}{3c_W^2} - \frac{17}{3} - 4c_W^2 \right) \times \right. \\
& \times (I(M_W^2, M_Z, M_W) - \ln c_W) + \left(1 - \frac{h}{3c_W^2} + \frac{1}{12} \frac{h^2}{c_W^4} \right) \times \\
& \times \left(I(M_W^2, M_H, M_W) - \frac{1}{2} \ln \frac{c_W^2}{h} \right) - \frac{h}{h - c_W^2} \ln \frac{h}{c_W^2} \left(\frac{7}{4} - \frac{h}{3c_W^2} + \frac{h^2}{12c_W^4} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{1}{12c_W^4} + \frac{7}{3c_W^2} - \frac{107}{12} - 10c_W^2 \right] \frac{1}{1-c_W^2} \ln c_W^2 + \\
& + \left[\frac{1}{12c_W^4} + \frac{13}{6c_W^2} - \frac{233}{18} - \frac{h}{2c_W^2} + \frac{h^2}{12c_W^4} - 4c_W^2 \right]. \tag{106}
\end{aligned}$$

5. Однопетлевые поправки к массам W^\pm и Z^0 бозонов

Поправки к вводимым параметрам:

$$\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha, \tag{107}$$

$$M_Z^2 = M_{Z0}^2 + \delta M_Z^2, \tag{108}$$

$$G_F = G_{F0} + \delta G_F, \tag{109}$$

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = -\Sigma_{\gamma\gamma}(0) - 2\frac{s_W}{c_W} \frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}, \tag{110}$$

$$\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} = -\frac{\Sigma_{ZZ}(M_Z^2)}{M_Z^2}, \tag{111}$$

$$\frac{\delta G_F}{G_F} = \frac{\Sigma_{WW}(0)}{M_W^2} + \frac{\delta G_{(B,V)}}{G_F}. \tag{112}$$

На древесном уровне:

$$M_{W0}^2 = c_W^2 M_Z^2. \tag{113}$$

Выражая c_W^2 через вводимые параметры,

$$c_W^2 = (1 - s_W^2) = \left[1 - \left(\frac{4\pi\alpha}{g^2} \right) \right] = \left[1 - \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F M_Z^2 c_W^2} \right],$$

$$M_{W0}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F M_Z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] M_Z^2, \tag{114}$$

получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_W^2}{\partial \alpha} &= \frac{s_W^2 c_W^2}{s_W^2 - c_W^2} \frac{M_Z^2}{\alpha}, \\
\frac{\partial M_W^2}{\partial G_F} &= -\frac{s_W^2 c_W^2}{s_W^2 - c_W^2} \frac{M_Z^2}{G_F}, \tag{115}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_W^2}{\partial M_Z^2} = -\frac{c_W^4}{s_W^2 - c_W^2}.$$

Раскладывая M_W^2 в ряд Тейлора по вводимым параметрам (107)-(109):

$$\begin{aligned} M_W^2 &= M_{W0}^2(T^i) - \Sigma \frac{\partial M_{W0}^2}{\partial T^i} \delta T^i + \delta M_W^2(T^i) = \\ &= c_W^2 M_Z^2 - \frac{c_W^2 M_Z^2}{s_W^2 - c_W^2} \left(s_W^2 \frac{\delta \alpha}{\alpha} - s_W^2 \frac{\delta G_F}{G_F} - c_W^2 \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \right) + \delta M_W^2(T^i), \end{aligned} \quad (116)$$

где $T^i \rightarrow G_F, \alpha, M_Z^2$ и $\delta M_W^2(T^i) = -\Sigma_{WW}(M_W^2)$.

$$\begin{aligned} M_{W0}^2 &= c_W^2 M_Z^2 - \frac{c_W^2 M_Z^2}{s_W^2 - c_W^2} \left(-s_W^2 \Sigma_{\gamma\gamma}(0) - 2 \frac{s_W^3}{c_W} \frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - s_W^2 \frac{\Sigma_{WW}(0)}{M_W^2} - \right. \\ &\quad \left. - s_W^2 \frac{\delta G_{(B,V)}}{G_F} + c_W^2 \frac{\Sigma_{ZZ}(M_Z^2)}{M_Z^2} \right) - \Sigma_{WW}(M_W^2). \end{aligned} \quad (117)$$

Пользуясь результатами предыдущего параграфа, можно переписать M_W^2 в следующем виде:

$$M_W^2 = c_W^2 M_Z^2 + \frac{c_W^2 M_Z^2}{s_W^2 - c_W^2} \left(s_W^2 \frac{\Sigma_{WW}(0)}{M_{W0}^2} - c_W^2 \frac{\Sigma_{ZZ}(M_Z^2)}{M_Z^2} \right) - \Sigma_{WW}(M_{W0}^2). \quad (118)$$

На данном этапе вычислений мы опускаем поправки порядка Δ в выражении для перенормируемых собственных энергий, а также поправку к G_F .

Так как M_Z на древесном уровне есть вводимый параметр, то соответствующие вычисления значительно проще. Поэтому

$$M_Z^2 = M_{Z0}^2 + \delta M_Z^2, \quad (119)$$

где $\delta M_Z^2 = -\Sigma_{ZZ}(M_Z^2)$.

6. Вопросы и задачи к зачету

Вопросы к зачету (по части I)

1. Понятие перенормировки.
2. Понятие одночастично-неприводимой диаграммы.
3. Расходящиеся диаграммы в теории ϕ^4 , КЭД, КХД.
4. Понятие логарифмической и квадратичной расходимости.
5. Перенормировка в теории ϕ^4 :
 - 5.1. Перенормировка массы.
 - 5.2. Перенормировка волновой функции.
 - 5.3. Перенормировка константы связи.
6. Связь голых и перенормированных величин в теории ϕ^4 (масса, волновая функция, константа связи, функция Грина).
7. Редукционный формализм (цели, методы, результаты).
8. Схема БПХ перенормировки. Вид контрчленов.
9. Голый и контрчленный лагранжианы теории ϕ^4 , КЭД, КХД.
10. Условная степень расходимости ϕ^4 , КЭД, КХД.
11. Неперенормируемая и суперперенормируемая теории.
12. Схемы регуляризации.
13. Параметризация Фейнмана.
14. Поворот Вика.
15. Схемы вычитания.
16. Метод ренормгруппы.
17. Ренормгрупповая эволюция массы и константы связи в теории ϕ^4 .
18. Ренормгрупповые уравнения для теории ϕ^4 .
19. Ультрафиолетовые и инфракрасные фиксированные точки.

Задачи к зачету (по части I и II)

Теория ϕ^4

1. Вывести значение комбинаторного множителя $\frac{1}{2}$ в

$$-i\Sigma \equiv \frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (120)$$

2. Вывести значение комбинаторного множителя $\frac{1}{2}$ в

$$\begin{aligned} \Gamma((p_1 + p_2)^2) &\equiv \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{i^2 \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)}{(q_1^2 - m^2 + i\varepsilon)(q_2^2 - m^2 + i\varepsilon)} = \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \end{aligned} \quad (121)$$

3. Вычислить однопетлевую поправку $(-i\Sigma)$ порядка λ к полному пропагатору:

$$\frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left[1 - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (122)$$

4. Вычислить однопетлевую поправку $\Gamma(q^2)$ порядка λ^2 к 4-точечной функции, соответствующую одной диаграмме типа "рыба":

$$\frac{i\lambda^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} - \frac{i\lambda^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left[\gamma_E + \int_0^1 dz \ln \left(\frac{q^2 z(1-z) - m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] = \quad (123)$$

$$= \frac{i\lambda^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 2 + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1} \right) \right]. \quad (124)$$

5. Показать, что β -функция может быть записана как

$$\beta(\lambda_R) = -\varepsilon\lambda_R - \frac{\mu}{\bar{Z}} \frac{d\bar{Z}}{d\mu} \lambda_R. \quad (125)$$

6. Показать, что в однопетлевом приближении

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (126)$$

7. Проинтегрируйте β -функцию и получите бегущую константу связи $\lambda(Q^2)$.

8. Вывести ренормгрупповое (РГ) уравнение для теории ϕ^4 в D -мерном пространстве-времени.

9. При перенормировке безмассовой теории ϕ^4 мы можем импульсно вычесть при $p^2 = -M^2$, чтобы избежать инфракрасных сингулярностей. В этом случае РГ уравнение принимает форму

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) \right] \Gamma_R^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (127)$$

Проверить, что однопетлевой результат для 4-точечной функции $\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$ удовлетворяет этому РГ уравнению.

10. Проверить, что однопетлевая скалярная двухточечная функция не генерирует перенормировку волновой функции, а дает квадратично расходящуюся перенормировку массы. Вычислить необходимую двухпетлевую диаграмму и контрчлен $\delta_Z^{(2)}$. Обосновать происхождение комбинаторного множителя.

Теория с фотонами и фермионами

11. Анализируя степень расходимости, построить контрчлены и нарисовать все однопетлевые расходящиеся 1ЧН графы для теории действительного скалярного поля с взаимодействием вида

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_1}{3!} \phi^3 - \frac{\lambda_2}{4!} \phi^4. \quad (128)$$

12. Анализируя степень расходимости, построить контрчлены для лагранжиана КЭД

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (129)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

13. Вычислить в однопетлевом приближении собственную энергию скалярного поля ϕ с массой m , взаимодействующего с двумя типами фермионов с массами m_1 и m_2 с юкавскими константами связи g . Соответствующий лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{6} \lambda \phi^3 +$$

$$+ \sum_i \bar{\Psi}_{(i)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \Psi_{(i)} - g\phi (\bar{\Psi}_{(1)} \Psi_{(2)} + \bar{\Psi}_{(2)} \Psi_{(1)}). \quad (130)$$

14(a). Определить условно расходящиеся диаграммы и сформулировать фейнмановские правила для перенормированной теории возмущений с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - M)\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi, \quad (131)$$

где ϕ – действительное скалярное поле, ψ – дираковский фермион;

(б) вычислить в однопетлевом приближении теории возмущений расходящуюся часть (полюс при $D \rightarrow 4$) каждого контрчлена, наложив необходимое количество условий перенормировки.

$$\delta_\lambda^{1\text{-петл.}} = \frac{3\lambda^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \text{к.ч.} \right) - \frac{24g^4\mu^\varepsilon}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (132)$$

$$\delta_g^{1\text{-петл.}} = -\frac{g^3\mu^{\varepsilon/2}}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (133)$$

$$\delta_Z^\psi[1\text{-петл.}] = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (134)$$

$$\delta_M^\psi[1\text{-петл.}] = -\frac{g^2 M}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (135)$$

$$\delta_Z^\phi[1\text{-петл.}] = -\frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} + \text{к.ч.} \right). \quad (136)$$

$$\delta_m^\phi[1\text{-петл.}] = \left[\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} + \frac{g^2(M^2 - m^2)}{8\pi^2} \right] \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \text{к.ч.}; \quad (137)$$

(в) доказать, что для условий перенормировки вне массовой поверхности при некотором масштабе перенормировки $\mathcal{M} \gg M, m$ каждый из логарифмически расходящихся контрчленов δ_Z^ϕ , δ_Z^ψ , δ_g и δ_λ имеет вид

$$\delta = C \ln \frac{(\Lambda)^2}{\mathcal{M}^2} + \text{к.ч.} \quad (138)$$

либо

$$\delta = C \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\mathcal{M}^2} \right) + \text{к.ч.} \quad (139)$$

в размерной регуляризации. Коэффициент C в УФ расходящейся части одинаков во всех схемах перенормировки (на массовой поверхности и вне), а конечные части не зависят от \mathcal{M} .

Ренормализационная группа

15. Для стабильной критической точки $g = g_0$ показать, что если $\beta(g)$ имеет простой нуль: $\beta(g) = -b(g - a)$ с $b > 0$, то стремление $g(t)$ к g_0 при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально по t .

16. Вывести УФ поведение $\bar{g}(t \equiv \ln t)$ в случае β -функции, заданной

$$\beta(g) = g(a^2 - g^2), \quad (140)$$

с известной постоянной a .

17. Для стабильной критической точки $g = g_0$ показать, что если $\beta(g) = -b(g - a)^n$ имеет нуль второго или более высокого порядка с $b > 0$ и $n > 1$, то $g(t)$ стремится к g_0 при $t \rightarrow \infty$ как некоторая обратная степень по t .

18. Лагранжиан юкавского взаимодействия

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + f \bar{\psi} \psi \phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2. \quad (141)$$

Рассчитать β -функцию Каллана–Симанчика для константы связи f .

19. Показать, что голые и перенормированные константы связи теории Юкавы связаны соотношениями

$$\lambda + \delta_\lambda = \lambda_0 Z_\phi^2, \quad g + \delta_g = g_0 Z_\psi \sqrt{Z_\phi}, \quad (142)$$

и, используя данные соотношения, вывести

$$\beta_\lambda = 2(\lambda + \delta_\lambda) \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \ln \mathcal{M}} - \frac{\partial \delta_\lambda}{\partial \ln \mathcal{M}}, \quad (143)$$

$$\beta_g = (g + \delta_g) \left(\frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial \ln \mathcal{M}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \ln \mathcal{M}} \right) - \frac{\partial \delta_g}{\partial \ln \mathcal{M}}. \quad (144)$$

20. В псевдоскалярной теории Юкавы при массах, равных нулю,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \bar{\psi}(i\hat{\partial})\psi - ig\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi, \quad (145)$$

вычислить однопетлевые β -функции Каллана–Симанчика для λ и g

$$\frac{\partial\lambda(M)}{\partial\ln M} = \beta_\lambda(\lambda, g), \quad \frac{\partial g(M)}{\partial\ln M} = \beta_g(\lambda, g)$$

в главном порядке по перенормированным константам связи (24), (25), предполагая, что λ и g^2 одинакового порядка. Нарисовать потоки констант связи на плоскости λ - g .

21. Рассмотрим в размерности один поток со скоростью $v(x)$ и в потоке бактерию. Положим $\rho(t, x)$ – плотность бактерии и $g(x)$ – рост бактерии. Показать, что плотность бактерии $\rho(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} - g(x) \right] \rho(t, x) = 0. \quad (146)$$

22. Показать, что

$$\begin{aligned} B_0(0, 0, m) &= \left(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right), \\ B_0(m^2, 0, m) &= \left(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 2 \right), \\ B_0(p^2, 0, 0) &= \left(\Delta - \ln \frac{-p^2 - i\epsilon}{\mu^2} + 2 \right). \end{aligned}$$

23. Выразить $A_0(m)$, $B_0(0, 0, m)$ и $B_0(m^2, 0, m)$ через $B_0(0, m, m)$.

24. Построить графики зависимости масс калибровочных бозонов W^\pm и Z^0 от массы бозона Хиггса M_H в однопетлевом приближении. С помощью полученных графиков и известных экспериментальных значений $M_W = 80.419 \pm 0.038$ ГэВ, $M_Z = 91.1867 \pm 0.0021$ ГэВ дать оценку массы бозона Хиггса. При вычислениях использовать константы, представленные в табл. 3.

Параметры

Параметр	Значение
α	1/137.036
G_F	$1.16637 * 10^{-5} \text{ (ГэВ)}^{-2}$
$\sin^2\theta_W$	0.23149
M_Z	91.1867 ГэВ
m_u	0.005 ГэВ
m_d	0.009 ГэВ
m_c	1.5 ГэВ
m_s	0.175 ГэВ
m_b	4.5 ГэВ
m_t	175 ГэВ

Библиографический список

- [1] Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1 и 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [2] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. М.; Ижевск, 2001;
- [3] Райдер Л. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987;
- [4] Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.
- [5] Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В. Теория перенормировок. Часть I: Практикум для студентов специальности "Теоретическая физика". Самара: Изд-во "Самарский университет 2003. – 116 с.
- [6] Основы размерной регуляризации и тензорной редукции / Сост. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Гусярова О.А., Смирнов И.А. Самара, 2000.
- [7] Тезаурус тензорной редукции / Сост. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Гусярова О.А., Смирнов И.А. Самара, 2000.

Оглавление

Введение	3
1. Перенормировка	6
1.1. Условия перенормировки	8
1.2. Перенормировка массы	9
1.3. Перенормировка заряда	11
2. Размерная регуляризация	11
3. Однопетлевые интегралы с одним и двумя пропагаторами	13
4. Однопетлевые собственные энергии калибровочных бозонов	20
4.1. Фермионный вклад в собственную энергию . .	20
4.2. Вклады векторных и скалярных бозонов	24
5. Однопетлевые поправки к массам W^\pm и Z^0 бозонов	28
6. Вопросы и задачи к зачету	30
Библиографический список	37

Ахметзянова Эльза Нуровна
Долгополов Михаил Вячеславович

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК
Часть II

Учебное пособие

Редактор Т.И. Кузнецова
Компьютерная верстка, макет Э.Н. Ахметзяновой

Подписано в печать 29.12.04. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 2,3; уч.-изд.л. 2,5.
Тираж 100 экз. Заказ №
Издательство "Самарский университет". 443011, ул. Акад. Павлова, 1.
Отпечатано на УОП СамГУ.