

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

О.Л. СТАРИНОВА, М.К. ФАЙН, Р.М. ХАБИБУЛЛИН

ТЕОРИЯ ПОЛЁТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.02 Системы управления движением и навигация

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 629.78(075)
ББК 39.62я7
С771

Рецензент: д-р техн. наук А. В. Н и к о н о р о в,
канд. техн. наук В. О. С о к о л о в

Старинова, Ольга Леонардовна
С771 Теория полёта межпланетных космических аппаратов:
учебное пособие / *О.Л. Старинова, М.К. Файн, Р.М. Хабибуллин.* –
Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 72 с.

ISBN 978-5-7883-1764-9

В учебном пособии рассмотрены основные задачи теории полета космических аппаратов при проектировании межпланетных перелётов, разработаны задания для индивидуальной работы по дисциплине «Основы теории полёта».

Рекомендовано для обучающихся высших учебных заведений, по направлениям подготовки 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.02 Системы управления движением и навигация.

Разработано на кафедре динамики полета и систем управления Самарского университета.

УДК 629.78(075)
ББК 39.62я7

ISBN 978-5-7883-1764-9

© Самарский университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1 Движение в поле одного притягивающего центра. Первая и вторая космические скорости.....	6
2 Движение естественных тел. Законы Кеплера.....	11
3 Расчёт планетоцентрического манёвра межпланетного космического аппарата.....	16
4 Переход Гомана. Биэллиптический переход	24
5 Гравитационный манёвр	38
6 Ограниченная задача трёх тел. Точки либрации	45
7 Возмущающие эффекты, действующие на космический аппарат. Заход космического аппарата в область тени.....	55
Библиографический список	69

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии рассмотрены основные методы исследования как невозмущенного, так и возмущенного движения космических аппаратов (КА).

В каждом разделе предусмотрено индивидуальное задание, обозначены цели и задачи работы, подробно описан порядок выполнения работы.

Первый раздел «Движение в поле одного притягивающего центра. Первая и вторая космические скорости» посвящён изучению модели движения небесных тел в рамках задачи двух тел, расчёту первой и второй космических скоростей.

Второй раздел «Движение естественных тел. Законы Кеплера» посвящён изучению основ небесной механики, траекторий движения небесных тел, расчёта погрешности между теоретическими и фактическими данными.

Третий раздел «Расчёт планетоцентрического манёвра межпланетного космического аппарата» предназначен для углубленного изучения алгоритма вывода КА на отлётную околоземную орбиту.

Четвертый раздел «Переход Гомана» посвящён изучению перехода Гомана – базового межпланетного манёвра с двигателем большой тяги. Также в работе рассмотрены биэллиптические переходы, проведено сравнение эффективности этих двух манёвров.

Пятый раздел «Гравитационный манёвр» посвящён изучению физических основ гравитационных манёвров, сферы действия и сферы притяжения.

Шестой раздел «Ограниченная задача трёх тел. Точки либрации» посвящён изучению движения материальных точек в рамках ограниченной задачи трёх тел, а также такого явления как точки либрации.

Седьмой раздел «Возмущающие эффекты, действующие на КА. Заход КА в область тени» посвящён изучению влияния захода КА в области тени и полутени на движение КА. Также приведён алгоритм расчёта затенения КА то двух небесных тел.

1 ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ОДНОГО ПРИТЯГИВАЮЩЕГО ЦЕНТРА. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Для того, чтобы разобраться в механике межпланетного полёта космических аппаратов, необходимо изучить движение естественных тел и их спутников.

В небесной механике и космонавтике изучение движения тел часто заменяют изучением движения тех материальных точек, которые образовались бы, если бы вся масса каждого из тел была сосредоточена в его центре масс. Такое упрощение вполне оправдано, когда размеры тел много меньше расстояний между ними, и часто позволяет получить удовлетворительное представление о характере их движения. Таким образом, фактически мы будем рассматривать задачу не N тел, а N материальных точек. В задаче N тел учитывают только силы взаимного тяготения и пренебрегают силами другой природы, а также силами воздействия на тела системы со стороны других тел.

Начнем изучение механики космического полета с подробного обсуждения задачи N тел в случае $N = 2$. Это так называемая задача двух тел. Важность ее обусловлена двумя обстоятельствами:

- задача двух тел является единственной задачей (если не считать некоторых специальных случаев задачи трех тел) для которой получено общее аналитическое решение;

- многие задачи орбитального движения, с которыми приходится сталкиваться на практике, могут приближенно рассматриваться как примеры задачи двух тел, например, орбитальное движение Луны вокруг Земли, а также движение искусственного спутника вокруг Луны или Земли (в первом приближении).

Рассмотрим движение двух притягивающихся по закону Ньютона тел P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 в абсолютной системе координат $S_a X_a Y_a Z_a$ (рисунок 1.1), причём масса m_1 значительно больше массы m_2 .

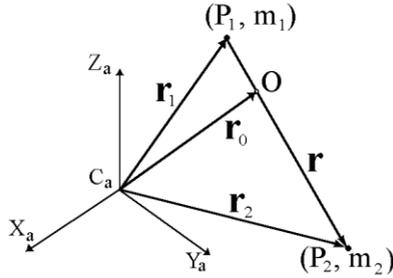


Рисунок 1.1 – Движение двух тел в абсолютной системе координат $C_a X_a Y_a Z_a$

Будем предполагать, что тела взаимодействуют друг с другом как материальные точки. Тогда сила притяжения, с которой тело (материальная точка) P_1 действует на тело (материальную точку) P_2 , имеет вид

$$\mathbf{F}_{12} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.1)$$

Здесь $f = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{с}^2$ – постоянная тяготения, \mathbf{r} – вектор из точки P_1 в точку P_2 , $r = |\mathbf{r}|$.

Согласно третьему закону Ньютона с учетом (1.1):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (1.2)$$

где μ – гравитационный параметр центрального тела. Уравнение (1.2) представляет собой векторное дифференциальное уравнение относительного движения задачи двух тел, т.е. уравнение движения тела P_2 относительно P_1 . При этом тело P_1 естественно называть центральным телом или притягивающим центром.

Последнее уравнение является очень удобным в использовании при построении математической модели движения небесных

тел. Например, если рассматривать движение малого небесного тела относительно большего (например, движение планеты относительно Солнца или движение космического аппарата относительно Земли), то координаты притягивающего центра будут всегда равны $(0; 0; 0)$, а координаты малого тела будут изменяться. Тогда уравнение (1.2) может быть переписано в декартовых координатах следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{r}_x = -\mu \frac{\mathbf{r}_x}{r^3}; \\ \ddot{r}_y = -\mu \frac{\mathbf{r}_y}{r^3}; \\ \ddot{r}_z = -\mu \frac{\mathbf{r}_z}{r^3}, \end{cases} \quad (1.3)$$

или в виде системы уравнений из шести дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{r}_x = v_x; \\ \dot{r}_y = v_y; \\ \dot{r}_z = v_z; \\ \dot{v}_x = -\mu \frac{\mathbf{r}_x}{r^3}; \\ \dot{v}_y = -\mu \frac{\mathbf{r}_y}{r^3}; \\ \dot{v}_z = -\mu \frac{\mathbf{r}_z}{r^3}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Система (1.3) даёт нам понимание значений проекций второй производной перемещения на все три оси координат. Такую систему уже можно решить с помощью стандартных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Но если мы хотим реализовать простейший подход, например, методы Эйлера или метод Рунге-Кутты, то целесообразно использовать систему (1.4).

Такую систему уравнений можно решить вышеупомянутыми методами даже в пакете MS Excel. В рамках данного курса авторы предлагают использовать Python для реализации построенных математических моделей.

То есть, имея 6 начальных условий (будут предложены ниже по вариантам), необходимо в цикле задать изменение всех шести основных параметров ($\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{r}_z, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$) в соответствии, например, с методом Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i'.$$

Здесь y_i – значение параметра на i шаге, y_{i+1} – значение параметра на $i+1$ шаге, h – величина шага, y_i' – значение производной по параметру на i шаге.

Для верификации построенной модели целесообразно численно подобрать значения первой и второй космической скорости, а полученные значения сравнить с теоретическими.

Индивидуальная работа 1

Цель работы: построить модель движения небесных тел в рамках задачи двух тел, рассчитать первую и вторую космические скорости.

Задачи:

- изучить теоретический материал;

- составить математическую модель движения в рамках задачи двух тел;

- разработать программу, реализующую моделирование движения небесных тел в рамках построенной математической модели;

- с помощью разработанной программы рассчитать первую и вторую космические скорости, сравнить их с фактическими.

Порядок выполнения работы:

1. Составить математическую модель движения в рамках задачи двух тел.

2. В соответствии с вариантом выбрать начальные условия и физические параметры тел. Для упрощения дальнейшей проверки будем считать, что в центре системы координат находится Солнце, а малым телом является планета согласно варианту.

3. Провести ряд сеансов моделирования, изучить полученные траектории. Они должны представлять собой конические сечения (эллипс, параболу, гиперболу, окружность), либо спиралеподобную кривую.

4. Выполнить подбор начального приближения по скорости так, чтобы траектория приняла вид замкнутой окружности. Сравнить полученное начальное приближение с фактической первой космической скоростью данного небесного тела (фактически такая скорость называется орбитальной скоростью планеты).

5. Увеличивать полученную на шаге 4 начальную скорость так, чтобы траектория приняла вид дуги параболы. Придётся увеличить масштаб, т.к. с некоторого момента будет визуально непонятно, получаем ли мы всё ещё эллипс, либо траектория уже приняла вид параболы. Сравнить полученное начальное приближение с фактической второй космической скоростью данного небесного тела.

6. Оформить отчёт.

2 ДВИЖЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ТЕЛ. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

Чтобы перейти к изучению законов Кеплера, необходимо получить первые интегралы движения: интеграл энергии, интеграл площадей и интеграл Лапласа.

Рассматриваемая система консервативна, следовательно, рассмотрим интеграл энергии

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h, \quad (2.1)$$

где h – постоянная (её называют константой энергии). Соотношение (2.1) называется интегралом энергии; его можно переписать следующим образом:

$$\frac{mV^2}{2} + \left(-\frac{m\mu}{r} \right) = \frac{mh}{2}. \quad (2.2)$$

Первое слагаемое в (2.2) это кинетическая энергия, второе слагаемое – потенциальная энергия. Таким образом, соотношение (2.2) показывает, что полная энергия системы двух тел остается постоянной.

Величина $h/2$ представляет собой полную энергию системы на единицу массы. В частности, можно рассмотреть случай ограниченной задачи двух тел, когда $m_2 \gg m_1$.

Здесь ограниченность задачи означает, что центральное тело P_1 , обладая много большей массой, влияет на движение тела P_2 , но само при этом не испытывает влияния со стороны тела P_2 . Иными словами, тело P_1 можно считать «пассивно гравитирующим». Ясно, что при $m_2 \gg m_1$ имеют место приближенные равенства $m \approx m_2$, $\mu \approx fm_1$ и, следовательно, полная энергия принимает вид

$$E = \frac{1}{2} m_2 V^2 - f \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{m_2}{2} \left(V^2 - \frac{2\mu}{r} \right) = \frac{m_2 h}{2}.$$

Далее рассмотрим интеграл площадей, существование которого является следствием того, что сила притяжения центральна. В векторном виде интеграл площадей записывается следующим образом:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{c}.$$

Вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ называется векторной константой площадей.

Интеграла Лапласа запишем следующим образом:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{f} (= const).$$

Итак, мы записали один скалярный интеграл (энергии) и два векторных интеграла (площадей и Лапласа). Приведём основные следствия из них:

- если $h < 0$, то движение происходит в ограниченной части плоскости. Если $h \geq 0$, то \mathbf{r} может принимать бесконечно большие значения;

- из интеграла площадей следует, что $\mathbf{r} \perp \mathbf{c}$, т.е. движение центра масс тела P_2 происходит в плоскости, проходящей через центр масс тела P_1 и перпендикулярной вектору \mathbf{c} ;

- из интеграла площадей легко получить второй закон Кеплера, который подробнее рассмотрим ниже;

- при помощи интегралов площадей и Лапласа можно получить уравнение орбиты.

Уравнение орбиты и законы Кеплера

Первый закон Кеплера: движение тела P_2 относительно притягивающего центра P_1 всегда совершается по коническому сечению с фокусом в P_1 .

При помощи интегралов площадей и Лапласа можно получить уравнение орбиты:

$$r = \frac{c^2 / \mu}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta}, \quad (2.3)$$

где

$$p = c^2 / \mu, \quad e = f / \mu,$$

тогда уравнение орбиты (2.3) принимает окончательный вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (2.3)$$

где p – фокальный параметр, e – эксцентриситет орбиты.

Величина фокального параметра p определяет размер орбиты. Эксцентриситет e определяет форму орбиты. При $0 \leq e < 1$ орбита представляет собой эллипс, при $e = 1$ – параболу, при $e > 1$ – гиперболу.

Второй закон Кеплера: тело P_2 движется в плоскости, проходящей через центр P_1 , причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади.

Третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения двух материальных точек вокруг массивного тела относятся, как кубы больших полуосей орбит.

Если массы тел m_1 и m_2 равны или если $m_1 \ll M$ и $m_2 \ll M$, то третий закон Кеплера записывается в следующем виде

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Индивидуальная работа 2

Цель работы: изучение основ небесной механики, траекторий движения небесных тел, расчёт погрешности между теоретическими и фактическими данными.

Задачи:

- изучить теоретический материал;
- научиться выгружать данные фактического движения естественных и искусственных тел, строить соответствующие траектории и их проекции;
- научиться строить расчётные эллипсы движения тел, в частности планет Солнечной системы;
- научиться вычислять степень достоверности полученных расчётных данных на примере относительной погрешности между траекториями движения.

Порядок выполнения работы

1. По ссылке <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> получить данные движения небесного тела согласно своему варианту.
2. По полученным данным изобразить трёхмерную траекторию движения, а также её проекцию на плоскость эклиптики.
3. Согласно известным данным (перигелий и афелий) рассчитать теоретический эллипс орбиты движения выбранного небесного тела.
4. Совместить проекцию реальной траектории на плоскость эклиптики и расчётный эллипс движения. Визуально оценить степень близости траекторий.

5. Рассчитать степень достоверность расчётной траектории (рассчитать погрешность между координатами в каждой точке, данные усреднить по всем точкам).

6. Сделать выводы, объяснить аномалии, если таковые имеются.

7. Оформить отчёт.

3 РАСЧЁТ ПЛАНЕТОЦЕНТРИЧЕСКОГО МАНЁВРА МЕЖПЛАНЕТНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

После изучения основ небесной механики движения естественных и искусственных небесных тел, целесообразно приступить к моделированию самих межпланетных перелётов. Как известно, любой межпланетный перелёт начинается с вывода космического аппарата ракетой-носителем на отлётную околоземную орбиту. Целью такого манёвра является, как правило, придание космическому аппарату второй космической скорости или сразу придание необходимого импульса для совершения межпланетного перелёта (в зависимости от состава миссии и возможностей двигательной установки самого космического аппарата).

Расчетные формулы для вычисления траектории, а также длительности и расхода рабочего тела набора параболической скорости в поле тяготения планет зависят от типа двигательной установки, используемой на КА.

В случае использования двигателя большой тяги, используем импульсную постановку задачи для определения характеристической скорости, формулу Циолковского для определения расхода рабочего тела и формулу для времени движения по параболической орбите для определения времени маневра.

Далее рассмотрим движение тела переменной массы, в частности, рассмотрим основное уравнение реактивного движения и формулу Циолковского.

Сначала рассмотрим движение ракеты в вакууме в отсутствие гравитационных полей. Пусть масса ракеты в момент времени t равна m , а ее тяга постоянна (и по величине, и по направлению). Движение ракеты (рисунок 3.1) обусловлено выбросом части ее массы с большой скоростью, что и называют большой тягой.

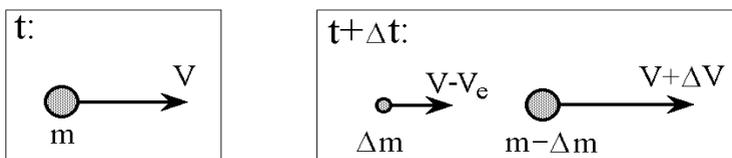


Рисунок 3.1 – Схематичное изображение движения ракеты

Предположим также, что масса, выбрасываемая в секунду, и скорость истечения V_e (измеряемая относительно аппарата) также постоянны. Тогда, в силу закона сохранения количества движения, имеем

$$mV = (m - \Delta m)(V + \Delta V) + \Delta m(V - V_e),$$

откуда, пренебрегая произведением малых величин $\Delta m \cdot \Delta V$, получаем

$$m\Delta V - \Delta m V_e = 0.$$

Если $\Delta t \rightarrow dt$, то получаем соотношение

$$mdV + V_e dm = 0. \tag{3.1}$$

Интегрируя (3.1), получаем

$$V = V_0 + V_e \ln \frac{m_0}{m}. \tag{3.2}$$

Здесь V_0 и m_0 – начальные скорость и масса ракеты, а m – оставшаяся масса ракеты в момент достижения скорости V . Величина m_0/m называется отношением масс. Уравнение (3.2) является фундаментальным соотношением теории полета ракеты и называется формулой Циолковского (или первой формулой Циолковского). Величина $\Delta V = V - V_0$, на которую изменяется скорость ракеты, называется характеристической скоростью и непосредственно связана с массой израсходованного топлива $\Delta m = m_0 - m$

$$\Delta V = V_e \ln \frac{m_0}{m_0 - \Delta m},$$

откуда и получаем формулу Циолковского

$$\Delta m = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{V_e}} \right).$$

Конечная скорость ракеты уменьшается при увеличении времени активного полета. Этот факт является следствием так называемых гравитационных потерь.

Рассмотрим алгоритм расчёта планетоцентрического движения верхней ступени ракетносителя (используется двигатель большой тяги). Нам потребуются следующие начальные параметры, актуальные для всех вариантов:

- $r_1 = 925000$ км (радиус сферы действия Земли);
- $\mu = 398600$ км³ / с² (гравитационный параметр Земли);
- $m_{КА} = 1000$ кг (масса выводимого КА).

Также понадобятся такие параметры как удельный импульс двигателя большой тяги j , начальная масса разгонного блока $m_{pб}$ и радиус опорной орбиты r_0 , которые необходимо будет взять согласно варианта.

Время движения до выхода из сферы действия, сек:

$$t = \frac{1}{3\sqrt{\mu}}(r_0 + r_1)\sqrt{2r_1 - r_0} .$$

Полученное время (в секундах) целесообразно перевести в сутки для удобства восприятия.

Угловая дальность геоцентрического движения, радиан:

$$\theta = 2\arctg\left(2\frac{r_1}{r_0} - 1\right) .$$

Параболическая скорость на опорной орбите, км/с:

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} .$$

Круговая скорость на опорной орбите, км/с:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} .$$

Характеристическая скорость манёвра, км/с:

$$v_{char} = v_{par} - v_0.$$

Избыток скорости на границе сферы действия, км/с:

$$v_{out} = v_{par} \cdot \frac{r_0}{r_1}.$$

Общая начальная масса аппарата, кг:

$$m_0 = m_{КА} + m_{пб}.$$

Относительный расход рабочего тела на перелёт:

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{\frac{v_0 - v_{par}}{9.81 \cdot 10^{-3} \cdot j}}.$$

Траектория планетоцентрического движения с двигателем большой тяги:

$$i = 0..100;$$

$$\varphi_{b_i} = i \cdot \frac{\theta}{100};$$

$$r_{b_i} = \frac{2}{1 + \cos(\varphi_{b_i})}.$$

На рисунке 3.2 изображен начальный участок набора параболической скорости КА с двигателем большой тяги.

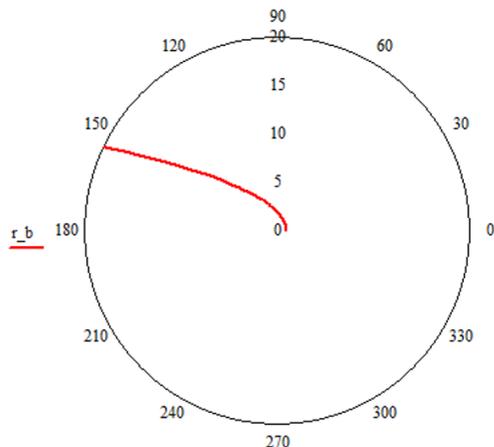


Рисунок 3.2 – Фрагмент программы в MathCad, отображающий начальный участок траектории набора параболической скорости КА с двигателем большой тяги

На рисунке 3.3 изображен начальный участок набора параболической скорости КА с двигателем большой тяги в масштабе, соотносимом с размерами Земли.

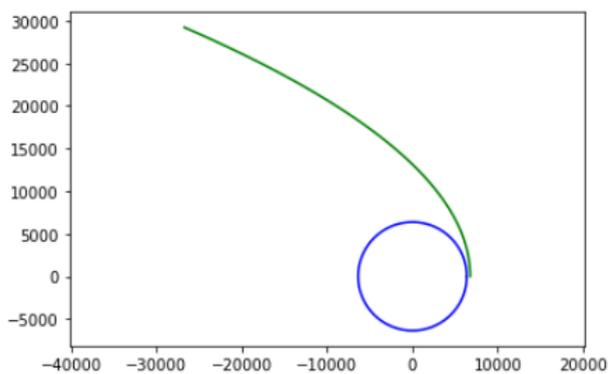


Рисунок 3.3 – Фрагмент программы в Python, отображающий начальный участок траектории (75 из 100 шагов) набора параболической скорости КА с двигателем большой тяги

На рисунке 3.4 изображен начальный участок набора параболической скорости КА с двигателем большой тяги в масштабе, соотносимом с размерами Земли (пространственная реализация).

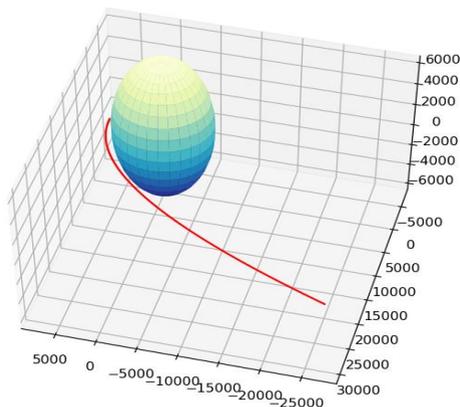


Рисунок 3.4 – Фрагмент программы в Python, отображающий начальный участок пространственной траектории (75 из 100 шагов) набора параболической скорости КА с двигателем большой тяги

Индивидуальная работа 3

Цель работы: изучение алгоритма вывода космического аппарата на отлётную околоземную орбиту.

Задачи:

- изучить теоретический материал;
- научиться выгружать данные фактического движения естественных и искусственных тел, строить соответствующие траектории и их проекции;
- научиться строить расчётные эллипсы движения тел, в частности планет Солнечной системы;
- научиться вычислять степень достоверности полученных расчётных данных на примере относительной погрешности между траекториями движения.

Порядок выполнения работы:

1. Задать начальные данные согласно варианту.
2. Реализовать алгоритм расчёта планетоцентрического движения с помощью формул, описанных в теоретической части лабораторной работы.
3. Получить траекторию движения КА и относительный расход рабочего тела, сравнить данные с реальными.
4. Оформить отчёт.

4 ПЕРЕХОД ГОМАНА. БИЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД

Теперь рассмотрим более сложное движение КА с двигателем большой тяги. Напомним, что если полёт аппарата является пассивным (двигатели выключены), то его орбита представляет собой коническое сечение. При работающем двигателе орбита будет изменяться. Полагая, что мы имеем дело с двигателями, развивающими большую тягу, можно считать, что двигатель работает такое короткое время, за которое создаваемый им импульс мгновенно изменяет вектор количества движения аппарата, а положение аппарата измениться не успевает. При этом нет никаких гравитационных потерь. Обсудим простейший случай перехода с одной орбиты на другую в результате приложения импульса ракетного двигателя.

Гомановская траектория – в небесной механике эллиптическая орбита, используемая для перехода между двумя другими орбитами, обычно находящимися в одной плоскости. В простейшем случае она пересекает эти две орбиты в апоцентре и перигентре. Орбитальный манёвр для перехода включает в себя два импульса работы двигателя на разгон – для входа на гомановскую траекторию и для схода с неё. Названа в честь немецкого учёного Вальтера Гомана.

Гомановская траектория теоретически рассчитывается для двух импульсных (условно мгновенных) приращений скорости. Однако, поскольку время работы двигателя, нужное для набора соответствующего приращения скорости, отличается от нуля, а импульс должен быть как можно более коротким, требуется применять двигатели с большой тягой.

Для гомановской траектории угловая дальность (угол между лучами, проведёнными из точки O в начальную и конечную точки траектории) равна 180 градусам.

Гомановские орбиты являются наиболее экономичными двухимпульсными манёврами по затратам топлива, но при этом не обеспечивают минимального времени перелёта.

Предположим, что аппарат, находящийся на круговой орбите радиуса r_1 вокруг центрального тела S , требуется перевести на круговую орбиту большего радиуса r_2 , расположенную в той же плоскости (рисунок 4.1).

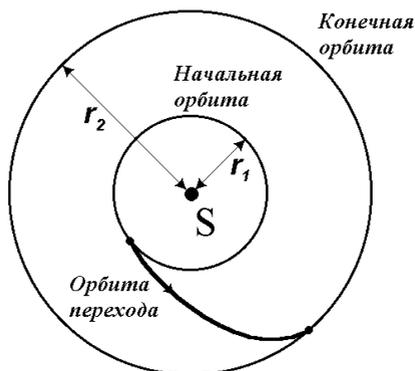


Рисунок 4.1 – Переход между круговыми компланарными орбитами

Для перехода с одной круговой орбиты на другую необходимо, чтобы орбита перехода пересекала или хотя бы касалась обеих круговых орбит. Очевидно, что перицентр орбиты перехода должен лежать внутри или на круговой орбите меньшего радиуса, а апоцентр – вне или на круговой орбите большего радиуса. Это означает, что должны выполняться следующие неравенства:

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e} \leq r_1, \quad r_{\alpha} = \frac{p}{1-e} \leq r_2. \quad (4.1)$$

Неравенства (4.1) определяют допустимую область в плоскости (p, e) , показанную на рисунке 4.2 (заштрихованная область).

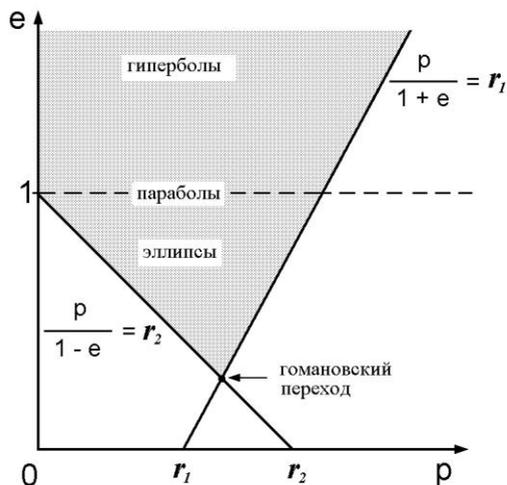


Рисунок 4.2 – Допустимая область при компланарном переходе

Точка, в которой эти границы пересекаются, соответствует гомановскому переходу (полуэллипсу Гомана).

Удобнее всего рассматривать эту задачу как задачу изменения энергии аппарата, движущегося по орбите. Воспользовавшись интегралом энергии, можно записать для двух круговых орбит, начальной и конечной, следующие соотношения:

$$h_1 = V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1} = -\frac{\mu}{r_1}, \quad h_2 = V_2^2 - \frac{2\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{r_2}.$$

Здесь

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

круговые скорости на начальной и конечной (большей) орбитах соответственно. Если переход осуществляется по эллиптической орбите, касающейся обеих круговых орбит (как показано на рисунке 4.3), тогда для такой операции требуется два импульса. Первый (в точке A) переводит аппарат на эллиптическую орбиту, второй (в точке B) переводит аппарат на большую круговую орбиту. Эти импульсы прикладываются по касательной к орбите путём включения двигателя ракеты, направленного в сторону, противоположную движению.

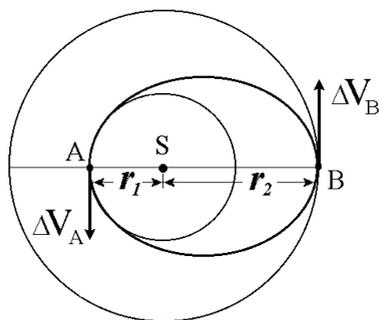


Рисунок 4.3 – Гомановский переход

Поскольку увеличение кинетической энергии определяется выражением $V^2 - V_0^2$, то при заданной величине импульса это изменение кинетической энергии

$$V^2 - V_0^2 = (\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V})^2 - V_0^2 = (\Delta V)^2 + 2\Delta V \cdot V \cos \theta$$

максимально при $\theta = 0$. А значит, для заданного изменения кинетической энергии касательный импульс является самым экономичным с точки зрения расхода топлива.

Определим количество топлива, необходимое для осуществления гомановского перехода. Эллиптической орбите перехода соответствует энергия

$$h = V_A^2 - \frac{2\mu}{r_1} = V_B^2 - \frac{2\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{a},$$

где $a = (r_1 + r_2)/2$ – большая полуось эллипса перехода, V_A и V_B – скорости в точках A и B на орбите перехода. Таким образом, в точке энергии аппарата необходимо увеличить на величину

$$\Delta h_A = h - h_1 = \frac{\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1 + r_2} = \frac{\mu}{r_1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Аналогично в точке B для перехода на конечную круговую орбиту требуется приращение энергии

$$\Delta h_B = h_2 - h = \frac{2\mu}{r_1 + r_2} - \frac{\mu}{r_2} = \frac{\mu}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

С другой стороны, изменения энергии обусловлены только изменениями кинетической энергии, поскольку оба импульса действуют очень короткое время и положение аппарата не успевает измениться. Таким образом, имеем

$$\Delta h_A = (V_1 + \Delta V_A)^2 - V_1^2 = (\Delta V_A)^2 + 2V_1\Delta V_A = \frac{\mu}{r_1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1},$$

$$\Delta h_B = V_2^2 - (V_2 - \Delta V_B)^2 = -(\Delta V_B)^2 + 2V_2\Delta V_B = \frac{\mu}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

откуда находим изменения скорости в точках A и B соответственно:

$$\Delta V_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_1} \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} - 1 \right]}, \quad \Delta V_B = \sqrt{\frac{\mu}{r_2} \left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} \right]}.$$

Заметим, что при решении квадратных уравнений берутся только те корни, которые соответствуют направлению движения по орбите перехода, совпадающему с направлением движения по круговым орбитам.

Теперь, принимая во внимание, что нет потерь на преодоление сопротивления атмосферы и гравитационных потерь, мы можем найти массу топлива, необходимого для выработки импульсов:

$$\Delta V_A = V_e \ln \frac{m_0}{m_A}, \quad \Delta V_B = V_e \ln \frac{m_A}{m_B}.$$

Следовательно, суммарное приращение скорости, необходимое для перехода с одной круговой орбиты на другую по гомановскому полуэллипсу, определяется выражением

$$\Delta V_H = \Delta V_A + \Delta V_B = V_e \ln \frac{m_0}{m_B},$$

откуда находим суммарный расход топлива $\Delta m = m_0 - m_B$

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta V_H}{V_e}},$$

где

$$\Delta V_H = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} - 1 \right] + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} \right].$$

Построим график зависимости безразмерной потребной характеристической скорости $\Delta \tilde{V}_H = \Delta V_H / V_1$, необходимой для осуществления гомановского перехода, от величины отношения конечного и начального радиусов круговых орбит $\tilde{r} = r_2 / r_1$ (рисунок 4.4).

Как видно из рисунка 4.4, если запас характеристической скорости превышает 0,536, то перелет может быть осуществлен на круговую орбиту любого радиуса.

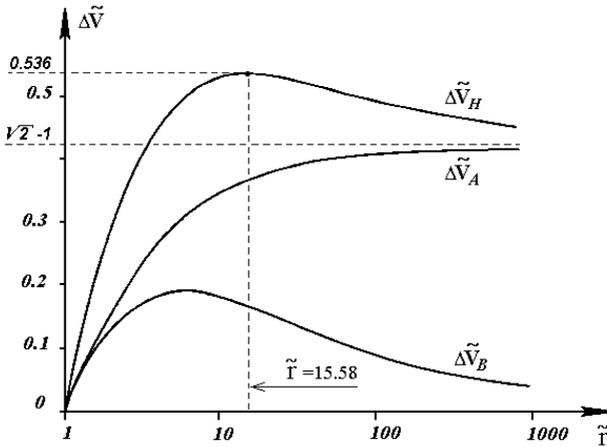


Рисунок 4.4 – График зависимости $\Delta \tilde{V}_H$ от \tilde{r}

Простейший пример гомановского перехода – перелёт между двумя круговыми орбитами. Расчёт необходимых приращений скорости можно произвести двумя путями: задавшись отношением радиусов конечной и исходной орбит или задавшись орбитальными скоростями исходной и конечной орбит. Второй путь проще, если заведомо известны орбитальные скорости орбит.

Случай 1: известно отношение радиусов конечной и исходной орбит $\bar{r} = r_2/r_1$ и орбитальная скорость исходной орбиты V_1 :

$$\Delta V = V_1 \left(\sqrt{\frac{2\bar{r}}{\bar{r}+1}} - 1 \right);$$

$$\Delta V' = V_1 \frac{1}{\sqrt{\bar{r}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\bar{r}+1}} \right).$$

Случай 2: известны орбитальные скорости исходной V_1 и конечной V_2 орбит:

$$\bar{V}_p = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2}{2}};$$

$$\Delta V = V_1 \left(\frac{V_1}{\bar{V}_p} - 1 \right);$$

$$\Delta V' = V_2 \left(1 - \frac{V_2}{\bar{V}_p} \right).$$

Приведённые зависимости справедливы только для круговых исходных и конечных орбит и верны как при переходе с низкой орбиты на высокую, так и при переходе с высокой на низкую. При переходе с высокой на низкую приращения получаются отрицательные, что означает, что КА необходимо затормозить на полученную величину.

Суммарное приращение, необходимое для перехода с орбиты на орбиту, можно представить в виде

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V + \Delta V'.$$

Эксцентриситет e орбиты перехода (полуэллипса Гомана) равен

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Время t_{AB} , за которое совершается переход, равно половине периода гомановской орбиты, а именно

$$t_{AB} = \frac{T_1}{2} = \pi \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}}.$$

Насколько известно, траекторией перелёта при Гомановском переходе является полуэллипс (рисунок 4.5). Следовательно, необходимо определить параметры эллипса и изобразить его половину. Напомним, что движение происходит против часовой стрелки, именно это позволит определить, какую половину эллипса необходимо оставить.

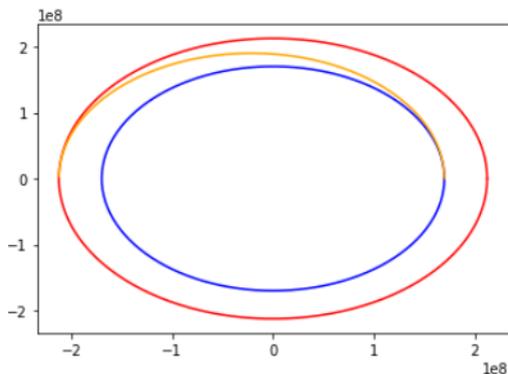


Рисунок 4.5 – Переход Гомана между круговыми орбитами Земли и Марса

Параметры эллипса (e , a , c , b) напрямую зависят от радиусов начальной и конечной орбит. Все необходимые зависимости приведены выше. Сам эллипс (здесь и в дальнейших лабораторных) рекомендуется отрисовывать в параметрических координатах:

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Здесь a и b – большая и малая полуоси, а t – параметр, принимающий значения от 0 до π (либо от $-\pi$ до 0 , в зависимости от того, какая половина эллипса нам нужна). Заметим, что начинать переход Гомана можно из любой точки начальной орбиты, не обязательно от 0 радиан. Главное, что сама траектория имеет угловую дальность, равную π .

Заметим, что гомановский переход, являясь самым выгодным с точки зрения расхода топлива, требует больше времени, чем любой другой переход между теми же круговыми орбитами. Если допустить большее число включений реактивного двигателя в

процессе перехода между компланарными круговыми орбитами, то, вообще говоря, гомановский полуэллипс может оказаться не самым выгодным с точки зрения расхода топлива.

Рассмотрим в качестве примера так называемый биэллиптический переход (рисунок 4.6). Для осуществления такого перехода нужно отработать три импульса в точках A , C и B .

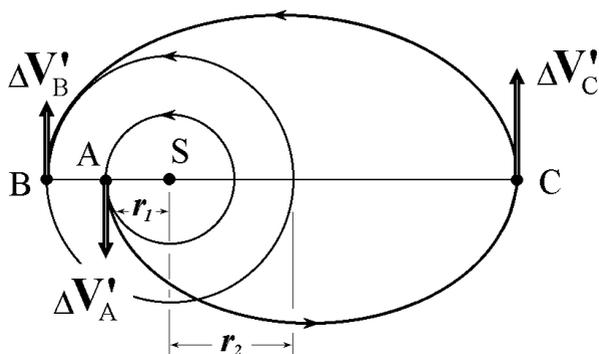


Рисунок 4.6 – Биэллиптический переход

Приращение скорости $\Delta V_A'$ переводит аппарат на эллиптическую орбиту, двигаясь по которой он достигает апоцентра C далеко за пределами орбиты радиуса r_2 . Там дается дополнительное приращение скорости $\Delta V_C'$, увеличивающее энергию настолько, чтобы перевести аппарат на новую эллиптическую орбиту с перигентром в точке B на конечной круговой орбите. Затем в точке B производится третье включение двигателя, в результате которого скорость уменьшается на $\Delta V_B'$ и аппарат переходит на нужную круговую орбиту радиуса r_2 .

Выражение для суммарной характеристической скорости, которая нужна для осуществления биэллиптического маневра, имеет вид:

$$\Delta\tilde{V}_\Sigma = \Delta\tilde{V}_A + \Delta\tilde{V}_C \pm \Delta\tilde{V}_B =$$

$$= \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_a}} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}+\tilde{r}_a}} - 1 \right).$$

Здесь $\tilde{r}_a = r_a / r_1$, случаю $\tilde{r}_a > \tilde{r}$ (рисунок 4.5) отвечает знак «+», случаю $\tilde{r}_a < \tilde{r}$ отвечает знак «-». Заметим, что при $\tilde{r}_a = \tilde{r}$ биэллиптический переход вырождается в гомановский ($\Delta\tilde{V}_B = 0$). Сравнение величины $\Delta\tilde{V}_\Sigma$ с характеристической скоростью гомановского перелета позволяет сделать следующие выводы.

В случае $\tilde{r}_a < \tilde{r}$ для осуществления биэллиптического маневра всегда требуется больший запас характеристической скорости, чем для гомановского перелета. Если же $\tilde{r}_a > \tilde{r}$, трехимпульсная орбита перехода, состоящая из двух полуэллипсов, может оказаться выгоднее, чем гомановский полуэллипс. При этом результат зависит от отношения радиусов начальной и конечной круговых орбит $\tilde{r} = r_2 / r_1$, а также от выбранного радиуса апоцентра переходных эллипсов $\tilde{r}_a = r_a / r_1$. Было показано, что при $\tilde{r} > 11.94$ всегда можно найти такой биэллиптический переход, что расход топлива (характеристической скорости) будет меньше, чем для гомановского перехода. Для этого второй импульс должен прикладываться достаточно далеко за пределами конечной круговой орбиты. Также доказано, что любая биэллиптическая орбита перехода такого вида приводит к некоторой экономии топлива, если $\tilde{r} > 15.582$. Соответствующие области оптимальности гомановского (I) и биэллиптического (II) маневров показаны на рисунке 4.7.

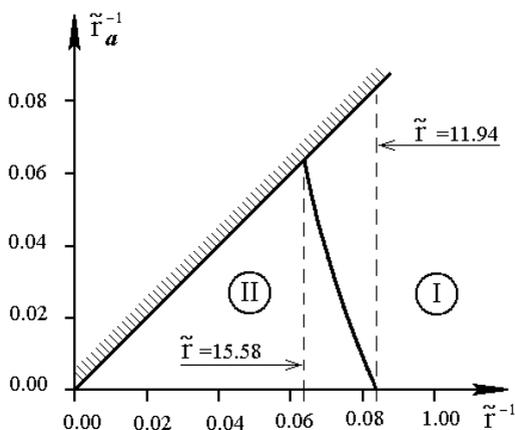


Рисунок 4.7 – Области оптимальности гомановского (I) и биэллиптического (II) маневров

В заключение следует заметить, что уменьшение требуемой характеристической скорости при использовании биэллиптического перелета по сравнению с гомановским полуэллипсом в лучшем случае не превосходит 8%. При этом среди биэллиптических переходов нет оптимального. Чем больше $\tilde{r}_a = r_a / r_1$, тем меньше $\Delta \tilde{V}_\Sigma$.

Расход топлива можно посчитать, умножив относительный расход топлива на начальную массу КА. Необходимые формулы также приведены выше. Значение скорости истечения V_e можно рассчитать по формуле:

$$V_e = 9.81 \cdot 10^{-3} \cdot j,$$

где j – удельная скорость истечения, выбираемая согласно варианту.

Время, затрачиваемое на манёвр, также рассчитывается согласно формулам, приведённым выше.

Индивидуальная работа 4

Цель работы: изучение перехода Гомана – базового межпланетного манёвра с двигателем большой тяги.

Задачи:

- изучить теоретический материал;
- научиться вычислять необходимую массу топлива и время, затрачиваемое на переход Гомана;
- научиться строить траекторию перехода Гомана.

Порядок выполнения работы

1. Реализовать алгоритм расчёта перехода Гомана с помощью формул, описанных в теоретической части лабораторной работы. Считать, что начальная орбита для каждого варианта – круговая орбита Земли.

2. Получить траекторию перелёта, массовый расход топлива и время, затрачиваемое на перелёт.

3. Оформить отчёт.

5 ГРАВИТАЦИОННЫЙ МАНЁВР

Рассмотрим один из важнейших приёмов, используемых в проектировании миссий КА, при котором будут использованы понятия сферы действия. Обсудим так называемый гравитационный или пертурбационный маневр, смысл которого заключается в разгоне (или торможении) КА с использованием гравитационного поля планеты. В результате близкого облета планеты скорость КА может быть изменена вообще без включения ракетного двигателя и, следовательно, без расхода топлива.

Сначала поговорим о таких понятиях как гравитационная сфера, сфера действия и сфера Хилла.

Гравитационная сфера – это область пространства, где гравитация планеты больше, чем гравитация Солнца.

Сфера действия – это область пространства, в которой в качестве центрального тела выбрана планета, а в качестве возмущающего фактора – Солнце.

Сфера Хилла – это область пространства, в которой небесные тела могут оставаться спутниками центрального тела. В таблице 5.1 показаны гравитационная сфера, сфера действия и сфера Хилла планет Солнечной системы.

Рассмотрим использование понятия сферы действия при решении практической задачи. Обсудим так называемый гравитационный или пертурбационный маневр, смысл которого заключается в разгоне (или торможении) КА с использованием гравитационного поля планеты. В результате близкого облета планеты скорость КА может быть изменена без включения ракетного двигателя и, следовательно, без расхода топлива.

Таблица 5.1 – размеры сфер притяжения, действия и Хилла для планет Солнечной системы

Планет	Сфера притяжения		Сфера действия		Сфера Хилла	
	а.е.	млн км	а.е.	млн км	а.е.	млн км
Меркурий	0,00016	0,024	0,00075	0,112	0,00148	0,221
Венера	0,00113	0,069	0,00112	0,616	0,00674	1,008
Земля	0,00174	0,260	0,00620	0,928	0,01001	1,497
Марс	0,00086	0,128	0,00386	0,577	0,00724	1,083
Юпитер	0,16076	24,042	0,32226	39,178	0,34697	51,872
Сатурн	0,16120	24,099	0,36458	54,495	0,42881	64,107
Уран	0,12690	18,972	0,34626	51,666	0,46494	69,509
Нептун	0,21638	32,349	0,58049	86,783	0,77035	115,167

Пусть межпланетная траектория КА проходит через сферу действия некоторой планеты (рисунок 5.1).

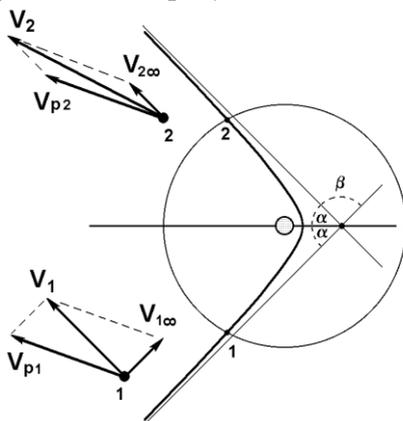


Рисунок 5.1 – Гравитационный манёвр в сфере действия планеты

Гелиоцентрические скорости КА в точках входа в сферу действия (точка 1) и выхода из сферы действия (точка 2) обозначим V_1 и V_2 соответственно. Планетоцентрические скорости КА в этих же точках обозначим $V_{1\infty}$ и $V_{2\infty}$. Очевидно, имеют место соотношения

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{p1} + \mathbf{V}_{1\infty}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{p2} + \mathbf{V}_{2\infty},$$

где V_{p1} и V_{p2} – гелиоцентрические скорости планеты в точках 1 и 2. Сделаем ряд упрощающих предположений: внутри сферы действия планеты КА движется по планетоцентрической гиперболической траектории; вектор $V_{1\infty}$ направлен по входной асимптоте гиперболы, вектор $V_{2\infty}$ направлен по выходной асимптоте, причем $V_{1\infty} = V_{2\infty} = V_\infty$; скорость планеты за время нахождения КА внутри сферы действия не изменяется, т.е. $V_{p1} = V_{p2}$.

Угол поворота траектории КА в результате пролета через сферу действия планеты определяется по формуле:

$$\beta = 2 \arcsin \frac{1}{1 + V_\infty^2 r_\pi / \mu}, \quad (5.1)$$

Здесь r_π – перицентрическое расстояние, μ – гравитационный параметр планеты.

Поскольку r не меньше радиуса планеты R , имеет место неравенство

$$\beta \leq 2 \arcsin \frac{1}{1 + V_\infty^2 r_\pi / \mu} = 2 \arcsin \frac{1}{1 + (V_\infty / V_c)^2}, \quad (5.2)$$

Здесь $V_c = \sqrt{\mu/R}$ – круговая скорость на поверхности планеты. Из (5.2) видно, что угол поворота β в зависимости от величины V_∞ может изменяться от 0 до π ($\beta = \pi$ при $V_\infty = 0$, $\beta \rightarrow 0$ при $V_\infty \rightarrow \infty$).

Максимальное приращение скорости за счет гравитационного маневра достигается в случае, когда скорость КА при входе в сферу действия равна круговой скорости V_c^2 . В этом случае треугольник скоростей является равносторонним и угол поворота траектории КА равен $\pi/3$.

Если ввести относительные величины

$$\Delta\tilde{V} = \frac{\Delta V}{V_c}, \quad \Delta\tilde{V}_\infty = \frac{V_\infty}{1 + \tilde{V}_\infty^2},$$

то формулы (5.1) и (5.3) принимают вид

$$\beta = 2 \arcsin \frac{1}{1 + \tilde{V}_\infty^2}, \quad \Delta\tilde{V} = \frac{2\tilde{V}_\infty}{1 + \tilde{V}_\infty^2},$$

соответствующие зависимости которых показаны на рисунке 5.2. Они не связаны с конкретными характеристиками поля притяжения (μ) и траектории (r_π), и поэтому являются универсальными. С их помощью можно оценить величину приращения скорости и угол поворота траектории при гравитационном маневре в поле притяжения любого небесного тела.

Рассмотрим гравитационный маневр в окрестности Земли. Для данной задачи исходные параметры будут следующими: $R_{action_sphere} = 925000 \text{ км}$, $R_{Earth} = 6371 \text{ км}$, $\mu = 398600 \text{ км}^3 / \text{с}^2$.

Возьмем следующие значения для v_∞ и β : $v_\infty = 3 \text{ км/с}$, $\beta = \pi/2$.

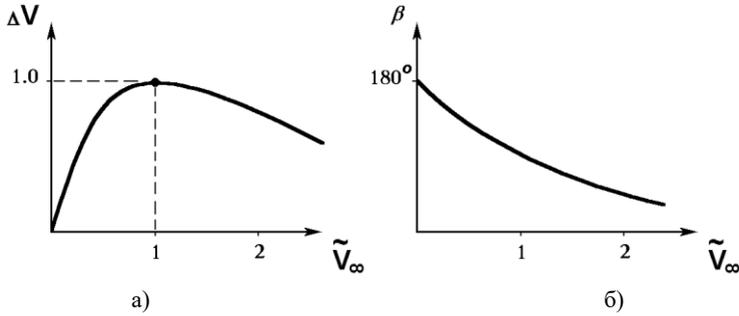


Рисунок 5.2 – Зависимости ΔV (а) и β (б) от \tilde{V}_∞

Теперь мы должны получить угол α параметры траектории (для гиперболической траектории):

$$\alpha = \arccos\left(\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right);$$

$$a = \frac{\mu}{V_\infty^2};$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$e = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Приращение скорости для таких параметров будет следующим:

$$\Delta V = 2V_\infty \sin \frac{\beta}{2}.$$

Наконец, получим пространственную визуализацию траектории гравитационного сопровождения (рисунок 5.3).

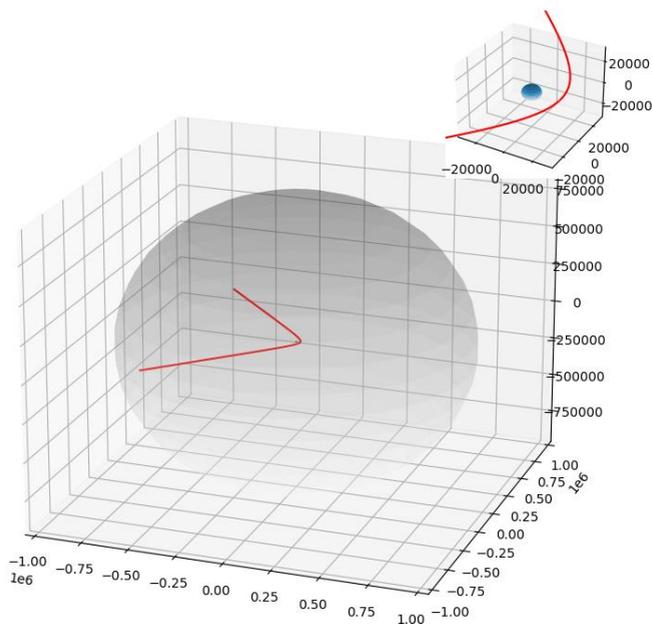


Рисунок 5.3 – Гравитационный маневр около Земли

Серая сфера – это сфера действия Земли (~ 925000 км), синяя сфера в центре – Земля, а красная кривая – траектория КА во время гравитационного маневра. В правом верхнем углу представлено масштабированное изображение.

Чтобы оценить возможности гравитационного маневра, рассмотрим многообразие маневров (рисунок 5.4). Будем менять угол β от 0 до β_{\max} , когда КА коснется поверхности Земли.

Как видно из рисунка 5.4, при $\beta = 0$ КА проходит по касательной к сфере действия (не попадает в сферу действия). С увеличением β траектория приближается к центральному телу. А максимум β соответствует траектории, на которой космический аппарат касается поверхности Земли.

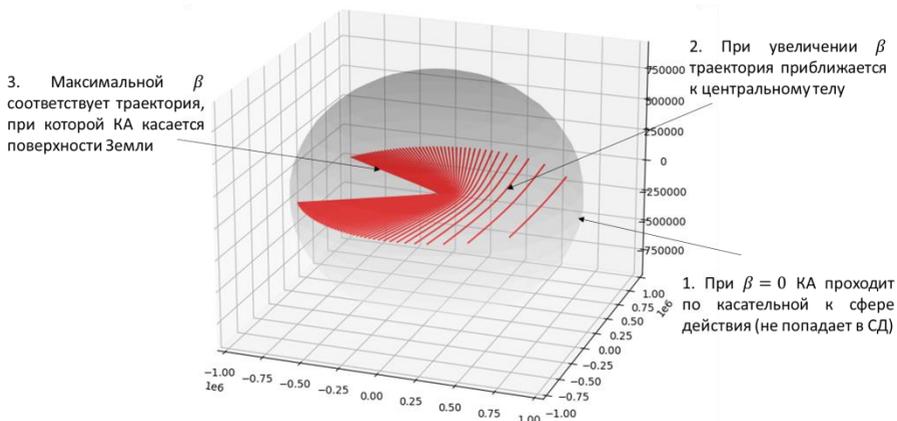


Рисунок 5.4 – Многообразие гравитационных маневров около Земли

Индивидуальная работа 5

Цель работы: изучить физические основы гравитационных манёвров, научить рассчитывать параметры подобных манёвров.

Задачи:

- изучить теоретический материал;
- научиться рассчитывать необходимые параметры для выполнения гравитационного манёвра;
- научиться строить траекторию движения при гравитационном манёвре.

Порядок выполнения работы

1. Реализовать алгоритм расчёта гравитационного манёвра.
2. Получить траектории гравитационного манёвра и получае-мые приращение скорости при двух разных углах входа (согласно варианта).
3. Сделать выводы.
4. Оформить отчёт.

6 ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЁХ ТЕЛ. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

До сих пор мы изучали движение КА под действием тяготения одного небесного тела. Между тем правильнее было бы учитывать притяжение КА и другими небесными телами. Например, при рассмотрении движения КА к Луне целесообразно принимать во внимание тяготение Земли, Солнца и Луны.

Поскольку расстояния между телами обычно велики по сравнению с их размерами, можно считать массу каждого из этих тел сосредоточенной в его центре масс. Таким образом, три тела мы примем за три материальные точки A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3 .

Дифференциальное уравнение движения точки A_1 записывается на основании второго закона Ньютона в виде

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}.$$

В силу закона всемирного тяготения получаем уравнение движения

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = f \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \right].$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию, так называемую силовую функцию задачи. Для системы трёх тел силовая функция (или гравитационный потенциал) U с учётом воздействия Солнца определяется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y, z, t) = G \cdot \left(\frac{M_z}{|r_z|} + \frac{M_l}{|r_l|} + \frac{M_s}{|r_s|} \right), \\ |r_z| = \sqrt{(x + R_z)^2 + y^2 + z^2}, \\ |r_l| = \sqrt{(R_l - x)^2 + y^2 + z^2}, \\ |r_s| = \sqrt{(x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2}. \end{array} \right.$$

На рисунках 6.1-6.3 приведены графики гравитационного потенциала в окрестностях Земли и Луны, а так же всей системы Солнце-Земля-Луна.

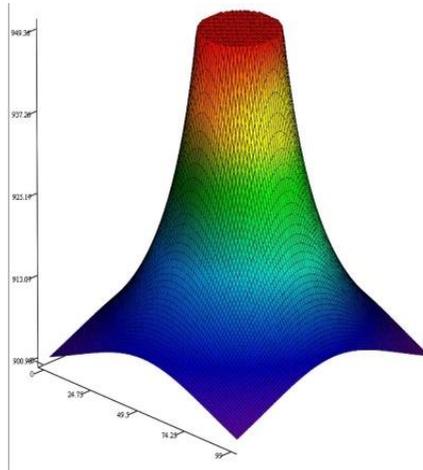


Рисунок 6.1 – Гравитационный потенциал в окрестности Земли

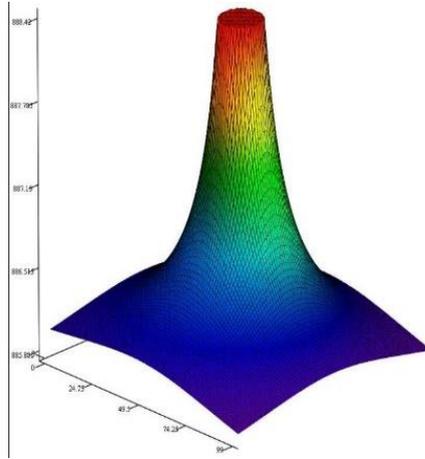


Рисунок 6.2 – Гравитационный потенциал в окрестности Луны

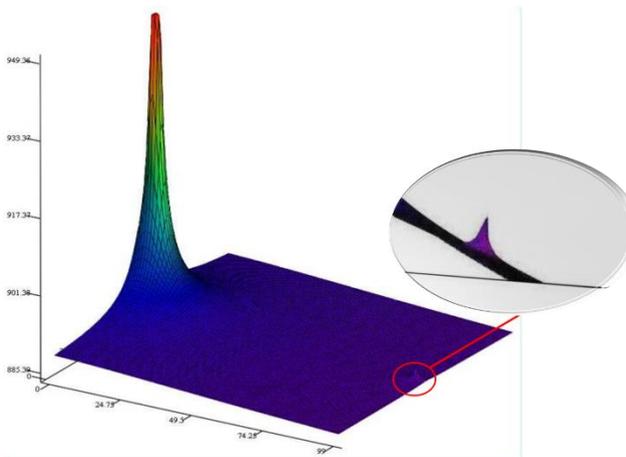


Рисунок 6.3 – Гравитационный потенциал системы Земля-Луна с учётом Солнца

Точки либрации – это точки в системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, на которое не действуют никакие другие силы, кроме гравитационных сил со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относи-

тельно этих тел. Точки либрации представляют собой частный случай при решении ограниченной задачи трёх тел – когда масса одного из них намного меньше массы любого из двух других. Таких точек в системе Земля-Луна пять (как и в любой задаче трёх тел): три из них находятся на вращающейся линии, соединяющей Землю и Луну, их называют коллинеарными точками либрации. Все эти точки показаны на рисунке 6.4.

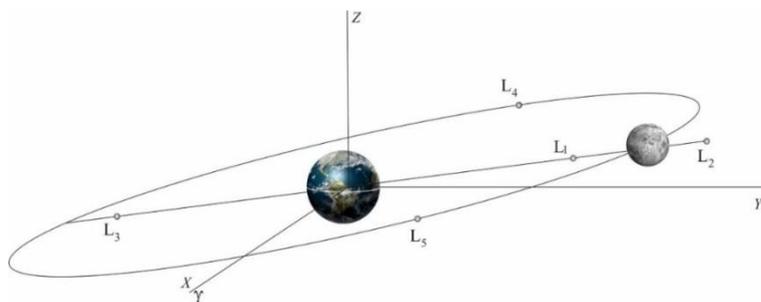


Рисунок 6.4 – Точки либрации системы Земля-Луна

Точка либрации L_1 системы Земля-Луна находится в 58 тыс. км от Луны по направлению к Земле. Точка L_2 противоположна первой, располагаясь в 64 тыс. км позади Луны. Третья коллинеарная точка – L_3 находится с обратной стороны Земли по отношению к Луне. Существуют еще две точки, которые находятся с двух сторон вне этой линии. Их называют треугольными точками либрации.

Исследуем точки либрации в общем случае. Сначала определим их координаты с помощью системы уравнений

$$x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0, \quad (6.1)$$

$$y - \frac{1-\mu}{r_1^3} y - \frac{\mu}{r_2^3} y = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{1-\mu}{r_1^3} z + \frac{\mu}{r_2^3} z = 0. \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что $z = 0$. Из (6.2) следует, что возможны два случая:

$$y = 0, \quad (6.4)$$

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0. \quad (6.5)$$

Очевидно, случай (6.4) отвечает прямолинейным решениям, которые могут быть найдены из уравнения

$$x - \frac{1-\mu}{|x-x_1|^3} (x-x_1) - \frac{\mu}{|x-x_2|^3} (x-x_2) = 0, \quad (6.6)$$

где

$$x_1 = -\mu, \quad x_2 = 1-\mu. \quad (6.7)$$

Треугольные решения находятся из системы (6.1), (6.5). Определим координаты треугольных точек либрации. Умножая (6.5) на $(x-x_1)$ и на $(x-x_2)$, находим

$$x - x_1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} (x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3} (x-x_1) = 0, \quad (6.8)$$

$$x - x_2 - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_2) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0. \quad (6.9)$$

Теперь вычтем (6.8) из (6.1) и (6.9) из (6.1). Тогда получим

$$x_1 + \frac{\mu}{r_2^3}(x_2 - x_1) = 0,$$

$$x_2 - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x_2 - x_1) = 0$$

или, с учетом (6.7),

$$1 - \frac{1}{r_2^3} = 0, \quad 1 - \frac{1}{r_1^3} = 0.$$

Отсюда следует $r_1=r_2=1$, что имеет место в вершинах правильных треугольников, одна из сторон которых совпадает с отрезком A_1A_2 (рисунок 6.5). Таким образом, найдены два треугольных решения – точки либрации $L_4 \left(1/2 - \mu, \sqrt{3}/2, 0\right)$ и $L_5 \left(1/2 - \mu, -\sqrt{3}/2, 0\right)$.

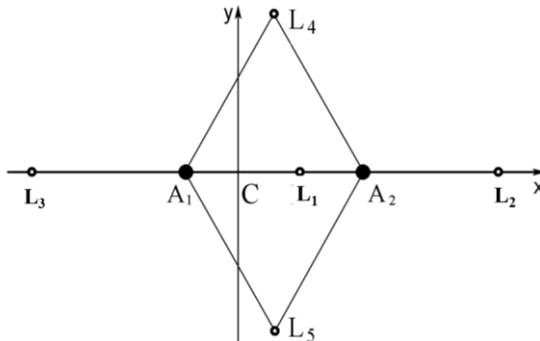


Рисунок 6.5 – Расположение точек либрации в системе двух массивных тел

Обратимся теперь к случаю $y = 0$, соответствующему прямолинейным решениям. Эти решения удовлетворяют уравнению

$$\varphi(x) = x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0, \quad (6.10)$$

$$r_i^2 = (x-x_i)^2, \quad i = 1, 2.$$

Проанализируем характер функции $\varphi(x)$. Из выражения для ее производной

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} + 3\frac{1-\mu}{r_1^5}(x-x_1)^2 + 3\frac{\mu}{r_2^5}(x-x_2)^2 = \\ &= 1 + 2\frac{1-\mu}{r_1^3} + 2\frac{\mu}{r_2^3} > 0 \end{aligned}$$

следует, что на каждом из интервалов непрерывности функции $\varphi(x)$

$$-\infty < x < x_1, \quad x_1 < x < x_2, \quad x_2 < x < +\infty$$

она монотонно возрастает. В точках $x = x_{1,2}$ функция $\varphi(x)$ имеет разрыв второго рода (стремится к $\pm\infty$). Качественный вид $\varphi(x)$ показан на рисунке 6.6.

Ясно, что уравнение (6.10) всегда имеет три решения: точки L_1 , L_2 и L_3 . Точка L_1 расположена левее точки x_1 , где находится тело большей массы $(1-\mu)$. Точка L_3 – правее x_2 , где находится тело меньшей массы (μ) . Точка L_2 – между центром масс системы (началом координат) и телом меньшей массы (x_2) . Действительно, принимая во внимание $\mu < 1/2$, имеем

$$\varphi(0) = -\frac{1-\mu}{\mu^2} + \frac{\mu}{(1-\mu)^2} = \frac{\mu^3 - (1-\mu)^3}{\mu^2(1-\mu)^2} < 0.$$

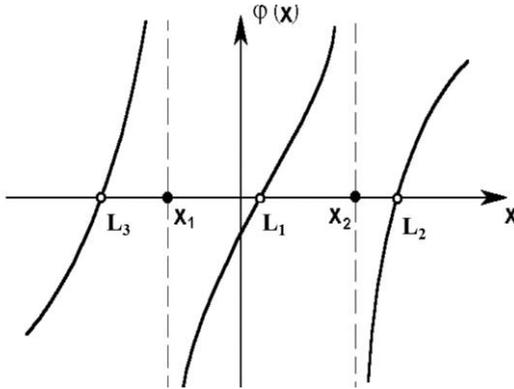


Рисунок 6.6 – Характер функции $\varphi(x)$ вблизи точек разрыва

Заметим, что при $\mu = 1/2$, т.е. когда два массивных тела одинаковы, $\varphi(0) = 0$ и точка L_2 совпадает с началом координат. Результаты численного решения уравнения (6.6) для $\mu \in [0, 1/2]$ показаны на рисунке 6.7.

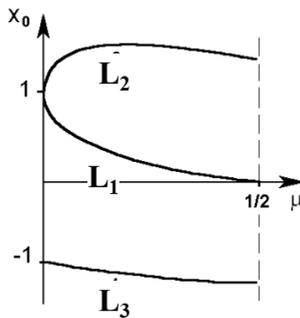


Рисунок 6.7 – Результаты численного решения уравнения (6.6) для $\mu \in [0, 1/2]$

Точки либрации тел Солнечной системы представляют большой практический интерес. Например, их можно использовать для размещения связанных спутников. В устойчивых точках либрации планет могут скапливаться астероиды. Иллюстрацией этого факта служит система Солнце-Юпитер, для которой $\mu \sim 0.001$. Действительно, в окрестности треугольных точек либрации наблюдаются астероиды Троянской группы. Естественно полагать, что и вблизи треугольных точек либрации в системе Земля-Луна также постоянно движутся какие-то космические тела. Это предположение подтвердилось в 1961 году, когда польский астроном Казимир Кордылевский обнаружил два космических «облака» (скопления метеорной пыли) в районе точек L_4 и L_5 системы Земля-Луна.

Индивидуальная работа 6

Цель работы: изучить движение материальных точек в рамках ограниченной задачи трёх тел, изучить такое явление как точки либрации.

Задачи:

- изучить теоретический материал;
- научиться рассчитывать движение материальных точек в рамках ограниченной задачи трёх тел, а также положение точек либрации;
- на основе моделирования манёвров в рамках ограниченной задачи трёх тел сделать вывод об устойчивости и неустойчивости точек либрации.

Порядок выполнения работы

1. Реализовать модель движения трёх материальных точек в рамках ограниченной задачи трёх тел. Актуальной остаётся логика построения модели, описанная в лабораторной работе №1, за исключением того, что теперь каждой из трёх материальных точек потребуется по три дифференциальных уравнения второго порядка

(или по 6 дифференциальных уравнений первого порядка). Пример реализации в среде MathCAD представлен в конце лабораторной работы

2. Рассчитать положение всех пяти точек либрации для системы небесных тел, заданной в варианте.

3. Провести моделирование манёвров поддержания орбиты космическими аппаратами, помещёнными в точки либрации (5 разных манёвров). Численно подбирать начальные данные по скорости так, чтобы КА совершил полный оборот по замкнутой орбите.

4. Сделать выводы по стабильности точек либрации.

5. Оформить отчёт.

7 ВОЗМУЩАЮЩИЕ ЭФФЕКТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА КОСМИЧЕСКИЙ АППАРАТ. ЗАХОД КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОБЛАСТЬ ТЕНИ

Ранее мы говорили преимущественно о приближённых вычислениях при баллистическом проектировании миссии. Очевидно, при таком подходе придётся существенно полагаться на двигатели коррекции, установленные на КА, т.к. отклонение фактической траектории от номинальной (спроектированной заранее) будет значительно. Более того, иногда неучтённые возмущения могут иметь такой характер, что в некоторых случаях даже манёвр коррекции не сможет вернуть КА на требуемую траекторию. Основным возмущающими факторами, действующими на КА во время осуществления перелётов, являются:

- влияние других гравитирующих тел, помимо учтённых в модели;
- нецентральность гравитационных полей небесных тел;
- влияние попадания космического аппарата в области тени.

Остановимся подробнее на влиянии попадания КА в области тени и полутени. В случае установки солнечных батарей на КА встаёт вопрос об использовании и накоплении солнечной энергии. Существуют КА, размер которых не позволяет накапливать существенное количество энергии, тогда приходится проектировать миссию таким образом, чтобы сам КА находился большую часть времени на свету, и не попадал в зоны тени и полутени, создаваемой небесными телами. Для вычисления влияния теневой обстановки на движение КА необходимо использовать коническую модель тени, т.к. существует ряд особенностей:

- КА за один год функционирования проходит через два продолжительных цикла, содержащих теневые участки орбиты от Лу-

ны с возможными наложениями на одном-двух витках теневых участков орбиты от Земли;

- теньевая зона имеет форму сходящего конуса (полная тень) и расходящегося конуса (полутень) с малым углом при вершине;

- полутеньевая и теньевая зоны от Земли в районе Луны имеют существенные различия по размерам и могут быть представлены в виде двух концентрических окружностей с радиусами, зависящими от расстояния между Землей и Луной: 7650-8264 км и 4298-4480 км соответственно;

- для круговых орбит КА с радиус-вектором больше радиуса теньевой зоны от Земли при появлении одновременно теньевых (полутеньевых) зон от Земли (возможно на одном витке) и от Луны суммарное затенение будет частичным (часть витка КА будет освещена Солнцем).

На рисунке 7.1 показаны используемые системы координат.

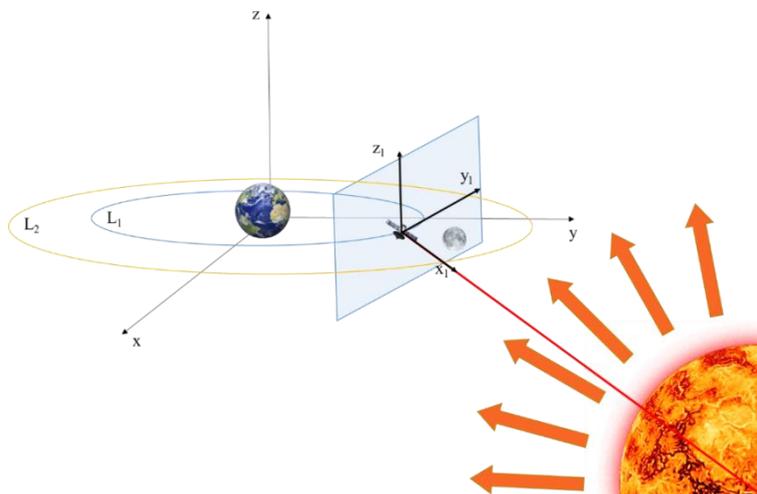


Рисунок 7.1 – Координатные системы, используемые для описания теньевых участков

Система $Oxyz$ является барицентрической декартовой системой координат (БДСК), а система $Ox_1y_1z_1$ является подвижной вращающейся системой координат, связанной с КА. Ось x_1 направлена на Солнце, таким образом, проекция Солнца на плоскость Oy_1z_1 всегда находится в центре, ось z_1 параллельна оси z БДСК, а ось y_1 дополняет систему $Ox_1y_1z_1$ до правой.

Систему $Ox_1y_1z_1$ удобно использовать при изучении теневых зон. Используемая модель тени предполагает сферическую форму небесных тел. В подавляющем большинстве случаев КА можно принять за точку и таким образом не учитывать неравномерное затенение его солнечных батарей. То есть, согласно принятому допущению, КА в любой момент времени либо находится полностью в зоне тени, либо в зоне полутени, либо полностью освещён (рисунок 7.2).

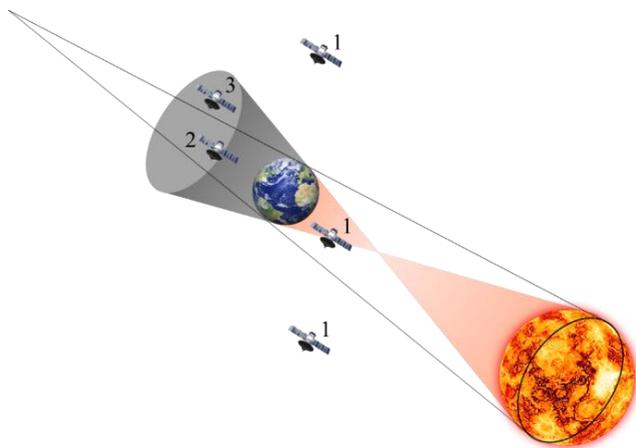


Рисунок 7.2 – Возможные положения КА при исследовании теневых зон

Согласно такой модели тени, существует три возможных взаимных расположения КА по отношению к Солнцу и телу, создающему тень:

- КА не попадает в области затенения (функция освещённости χ равна 1);

- КА попадает в зону полной тени, создаваемой хотя бы одним небесным телом (функция освещённости χ равна 0);

- КА попадает в зону полутени, создаваемой одним или двумя небесными телами (функция освещённости χ рассчитывается как отношение площади незатенённой части солнечного диска к полной его площади).

Так как движение КА рассматривается в рамках ограниченной задачи трёх тел, необходимо рассматривать два тела, создающих тень – в данном случае Земля и Луна. Наиболее сложное для расчёта положение КА продемонстрировано на рисунке 7.3, когда КА попадает в зону полутени и от Земли, и от Луны.

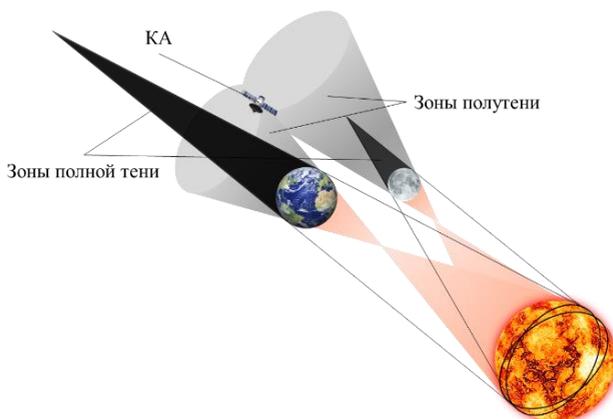


Рисунок 7.3 – Положение КА, попавшего в зоны полутени Земли и Луны

Для расчёта функции освещённости необходимо спроецировать Солнце, Землю и Луну на плоскость Oy_1z_1 . Для этого в каждый момент времени необходимо вычислить четыре коэффициента, задающие плоскость горизонта затмеваемой точки (КА). Известно уравнение плоскости, заданной вектором нормали и точкой, лежащей в данной плоскости:

$$n_1(x - x_{KA}) + n_2(y - y_{KA}) + n_3(z - z_{KA}) = 0, \quad (7.1)$$

где n_1, n_2, n_3 – координаты вектора нормали, x_{KA}, y_{KA}, z_{KA} – текущие координаты КА. Приведём уравнение (7.1) к общему виду, раскрывая скобки:

$$n_1x + n_2y + n_3z - n_1x_{KA} - n_2y_{KA} - n_3z_{KA} = 0.$$

В рассматриваемом случае координаты вектор нормали будут равны:

$$n_1 = x_{sun} - x_{KA};$$

$$n_2 = y_{sun} - y_{KA};$$

$$n_3 = z_{sun} - z_{KA}.$$

Здесь $x_{sun}, y_{sun}, z_{sun}$ – текущие координаты Солнца.

Тогда получаем все четыре коэффициента $A_{hor}, B_{hor}, C_{hor}, D_{hor}$, задающие плоскость горизонта КА в любой момент времени:

$$\begin{aligned}
A_{hor} &= x_{sun} - x_{KA}; \\
B_{hor} &= y_{sun} - y_{KA}; \\
C_{hor} &= z_{sun} - z_{KA}; \\
D_{hor} &= x_{KA} \cdot (x_{KA} - x_{SUN}) + y_{KA} \cdot (y_{KA} - y_{SUN}) + z_{KA} \cdot (z_{KA} - z_{SUN}).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Затем необходимо проверить, по какую сторону плоскости горизонта КА лежат все три рассматриваемых небесных тела. Для этого необходимо подставить текущие координаты Земли, Луны и Солнца в уравнение плоскости (7.2). Если числа одного знака, то они лежат по одну сторону плоскости горизонта, если разного знака, то по разные. Таким образом, если Земля или Луна лежат с Солнцем по одну сторону плоскости горизонта, то их необходимо учитывать при расчёте тени, если же наоборот, то не учитывать.

Проекция центра небесного тела (Земли, Луны или Солнца)

x_{proj} , y_{proj} , z_{proj} определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
x_{proj} &= x_{center} - \frac{A_{hor} (A_{hor} x_{center} + B_{hor} y_{center} + C_{hor} z_{center} + D_{hor})}{A_{hor}^2 + B_{hor}^2 + C_{hor}^2}; \\
y_{proj} &= y_{center} - \frac{B_{hor} (A_{hor} x_{center} + B_{hor} y_{center} + C_{hor} z_{center} + D_{hor})}{A_{hor}^2 + B_{hor}^2 + C_{hor}^2}; \\
z_{proj} &= z_{center} - \frac{C_{hor} (A_{hor} x_{center} + B_{hor} y_{center} + C_{hor} z_{center} + D_{hor})}{A_{hor}^2 + B_{hor}^2 + C_{hor}^2},
\end{aligned}$$

где x_{center} , y_{center} , z_{center} – координаты центра небесного тела.

Теперь в каждый момент времени известно взаимное расположение проекций Земли, Луны и Солнца на плоскость горизонта КА (рисунок 7.4).

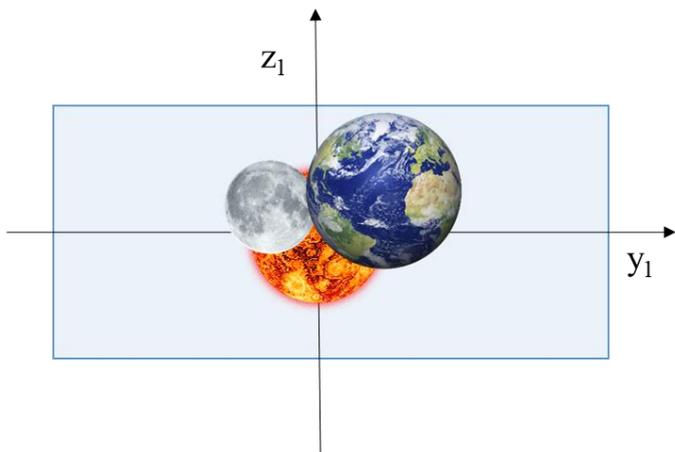


Рисунок 7.4 – Проекция Земли, Луны и Солнца на плоскость Oy_1z_1 при нахождении КА в области двух полутеней

Далее необходимо вычислить радиусы областей тени и полутени, создаваемых Землей и Луной. Данные соотношения для области тени можно получить исходя из геометрических соображений (рисунок 7.5).

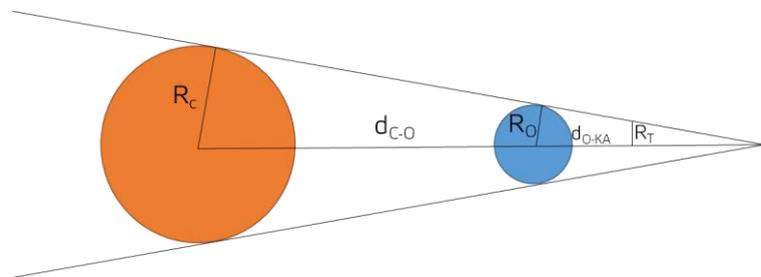


Рисунок 7.5 – Расчёт области тени от небесного тела

На рисунке 7.5 R_C – радиус Солнца, R_O – радиус затмевающего объекта, R_T – радиус области тени на расстоянии $d_{O-КА}$ от затмева-

ющего объекта вдоль линии Солнце-объект, d_{C-O} – расстояние от центра Солнца до центра затмевающего объекта.

Окончательная формула для расчёта области тени будет выглядеть следующим образом:

$$R_T = \frac{R_O \cdot d_{C-O} - R_C \cdot d_{O-KA}}{R_C - R_O} \cdot \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{R_C \cdot (R_C - R_O)}{R_C \cdot d_{C-O} - R_O \cdot d_{O-KA}} \right).$$

Радиус полутени можно найти исходя из следующих геометрических соображений (рисунок 7.6).

На рисунке 7.6 R_{II} – радиус области полутени на расстоянии d_{O-KA} от затмевающего объекта вдоль линии Солнце-объект.

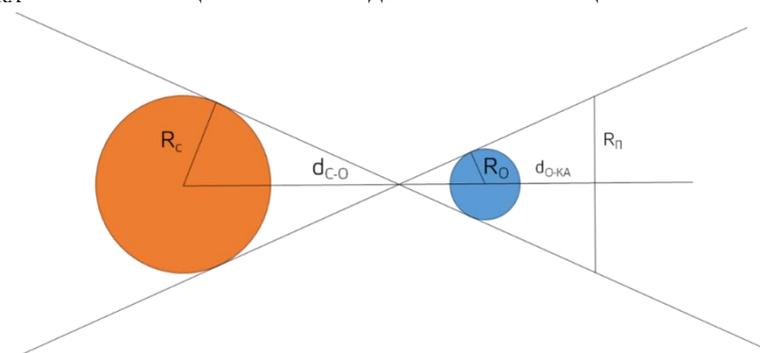


Рисунок 7.6 – Расчёт области полутени от небесного тела

Окончательная формула для расчёта области полутени будет выглядеть следующим образом:

$$R_{II} = \frac{R_O \cdot d_{C-O} + R_C \cdot d_{O-KA} + R_O \cdot d_{O-KA}}{R_C + R_O} \cdot \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{R_C \cdot (R_C + R_O)}{R_O \cdot d_{C-O}} \right).$$

Так как проекция Солнца всегда находится в центре, плоскость Oy_1z_1 будет выглядеть как наложение областей круглой формы, соответствующих Солнцу, Земле и Луне.

В аналитическом виде невозможно посчитать площадь пересечения трёх окружностей. Поэтому для вычисления площади пересечения трёх окружностей генерируется сетка (рисунок 7.7) с заданным размером ячейки, зависящем от точности вычисления самой задачи, а затем проверяется попадание каждого узла сетки условие попадания внутрь требуемой фигуры (также можно решить методом Монте-Карло).

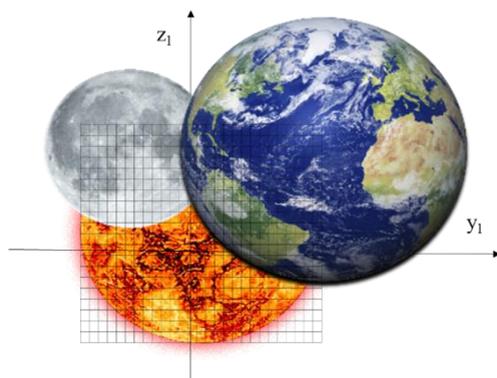


Рисунок 7.7 – Создание сетки на плоскости горизонта КА

Алгоритм расчета площади любой фигуры методом Монте-Карло и методом координатной сетки сводится к следующему:

- фигура вписывается в прямоугольник. Координаты сторон прямоугольника известны, значит, известна его площадь;
- псевдослучайным образом (для метода Монте-Карло) или детерминированным образом в узлах сетки (для метода координатной сетки) внутри прямоугольника генерируется большое количество точек. Для каждой точки определяется, попала ли точка внутрь исходной фигуры или нет;
- в результате площадь исходной фигуры вычисляется исходя из обычной пропорции: отношение количества точек, попавших в

фигуру, к общему количеству сгенерированных точек равно отношению площади фигуры к площади ограничивающего ее прямоугольника.

Последняя проблема, которую надо решить, заключается в том, что каким-то образом необходимо определять, попала ли точка внутрь исходной фигуры. В рассматриваемом случае задача решается достаточно просто, поскольку фигура состоит из окружностей, координаты центров и радиусы которых известны. Последним действием в рамках данного алгоритма становится нахождение площади фигуры, соответствующей незатенённой части Солнца. На данном этапе проверяется условие попадания каждого узла решётки в незатенённую зону согласно следующим логическим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} (x_{shadow_point} - x_{Earth_proj})^2 + (y_{shadow_point} - y_{Earth_proj})^2 &\leq R_{Earth_proj}^2; \\ (x_{shadow_point} - x_{Sun_proj})^2 + (y_{shadow_point} - y_{Sun_proj})^2 &\leq R_{Sun_proj}^2; \\ (x_{shadow_point} - x_{Moon_proj})^2 + (y_{shadow_point} - y_{Moon_proj})^2 &\leq R_{Moon_proj}^2; \\ (x_{shadow_point} - x_{Sun_proj})^2 + (y_{shadow_point} - y_{Sun_proj})^2 &\leq R_{Sun_proj}^2, \end{aligned} \right\}$$

где x_{shadow_point} , y_{shadow_point} – координаты исследуемого узла сетки; x_{Earth_proj} , y_{Earth_proj} – координаты центра проекции Земли на плоскость горизонта КА; x_{Moon_proj} , y_{Moon_proj} – координаты центра проекции Луны на плоскость горизонта КА; x_{Sun_proj} , y_{Sun_proj} – координаты центра проекции Солнца на плоскость горизонта КА; R_{Earth_proj} , R_{Moon_proj} , R_{Sun_proj} – радиусы проекций Земли, Луны и Солнца соответственно на плоскость горизонта КА.

Таким образом, данная совокупность условий позволяет определить, сколько таких точек, т.е. узлов сетки, попало в затенённую

зону. Теперь для вычисления площади незатенённой фигуры необходимо вычесть из единицы отношение количества найденных точек N_{shadow_points} к общему количеству узлов сетки N_{points} , расположенных внутри проекции Солнца на плоскость горизонта КА. Получаем следующую зависимость:

$$\chi = 1 - \frac{N_{shadow_points}}{N_{points}}.$$

Полученная площадь фигуры используется для определения функции освещённости χ . Она равна отношению незатенённой площади проекции Солнца к полной площади проекции Солнца на плоскость Oy_1z_1 . Таким образом, функция χ будет равна 0 при отсутствии тени или полутени на КА, и равна 1 при нахождении КА в зоне полной тени. В случае нахождения КА в зоне полутени функция освещённости будет лежать в интервале от 0 до 1.

Как говорилось ранее, изначальный неучёт возмущающих факторов иногда приводят к тому, что КА отклоняется от номинальной траектории настолько, что решить задачу в исходной постановке становится невозможным. Приведём пример. На рисунках 7.8-7.9 красным показаны проекции траекторий КА на плоскость xOy при нахождении КА вне тени, а оранжевой линией – проекции траекторий при захождении КА в зоны тени в различные даты. На рисунке 7.9 показан перелёт, в конце которого КА входит в зону притяжения Луны, и последующая реализация миссии становится невозможной в изначальной постановке.

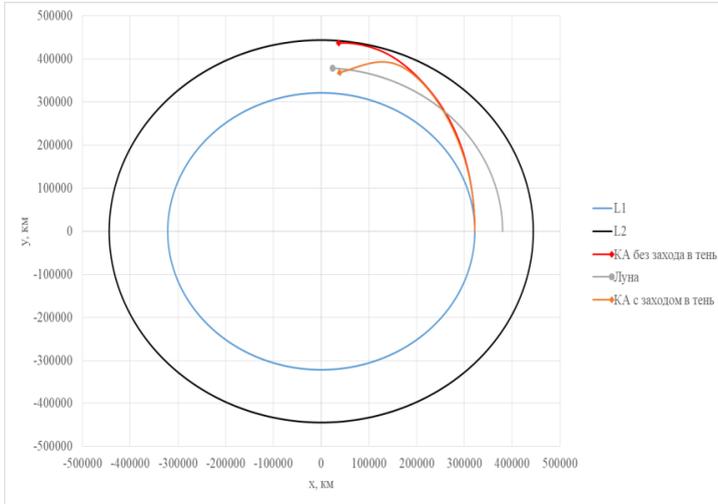


Рисунок 7.8 – Проекция траектории движения КА на плоскость xOy при нахождении КА в зоне тени без возможности продолжить миссию

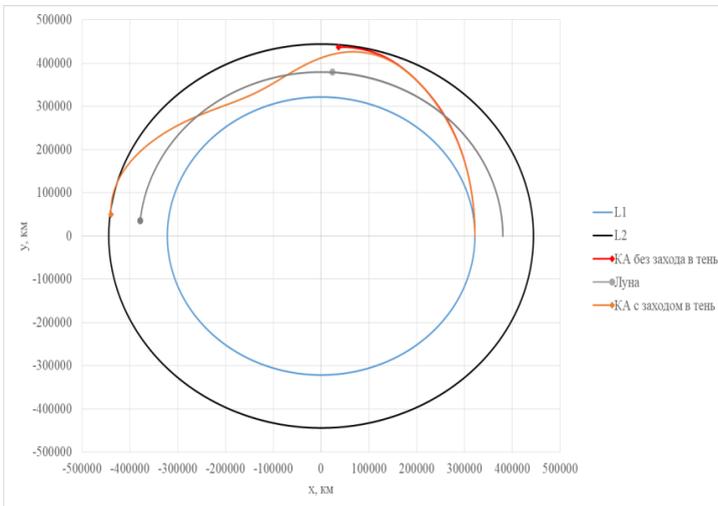


Рисунок 7.9 – Проекция траектории движения КА на плоскость xOy при нахождении КА в зоне тени с увеличением длительности миссии

Индивидуальная работа 7

Цель работы: изучить влияние захода КА в области тени и полутени на движение КА, разработать алгоритм расчёта затенения КА.

Задачи:

- изучить теоретический материал;
- научиться рассчитывать затенение КА от двух небесных тел.

Порядок выполнения работы

1. Моделирование движение КА в рамках задачи трёх тел с учётом захода аппарата в области тени и полутени – непростая задача. Поэтому, в рамках лабораторной работы, составим алгоритм расчёта функции затенённости χ , описанной в теоретической части лабораторной работы. Как ясно из материала, задача сводится к решению задачи поиска площади пересечения трёх окружностей (проекций Солнца и двух затеняющих небесных тел). Задачу предлагается решить двумя методами – методом Монте-Карло и методом разбиения на координатную сетку – и сравнить результаты.

2. Взять исходные данные: радиусы и координаты центров трёх окружностей (Солнце, Земля, Луна).

3. Разработать программный комплекс на языке Python, реализующий метод Монте Карло для решения задачи вычисления затенённости КА в системе Земля-Луна.

4. Доработать программный комплекс с целью вычисления незатенённой площади Солнца. Доработка заключается в том, что необходимо посчитать количество точек, попавших на незатенённые участки Солнца, и общее количество точек, попавших на Солнце. Затем необходимо посчитать отношения первого ко второму.

5. Получить результаты выполнения программы 1 – относительную площадь затенения Солнца (в % от всей площади окружности, соответствующей Солнцу) и время выполнения программы.

6. Разработать программный комплекс на языке Python, реализующий метод разбиения области на координатную сетку для решения задачи вычисления затенённости КА в системе Земля-Луна.

7. Доработать программный комплекс, аналогично шагу 3.

8. Получить результаты выполнения программы 2 – относительную площадь затенения Солнца (в % от всей площади окружности, соответствующей Солнцу) и время выполнения программы.

9. Оформить отчёт.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 *Балакин В.Л.* Баллистика и навигация ракет: электрон. учеб. пособие. Самара: Изд-во СГАУ, 2013.

2 *Лысенко Л.Н.* Наведение и навигация баллистических ракет: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ, 2007. 670 с.

3 *Мирер С.А.* Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007.

4 *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.

5 *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, 1982. 352 с.

Учебное издание

*Старинова Ольга Леонардовна,
Файн Максим Кириллович,
Хабибуллин Роман Маратович*

**ТЕОРИЯ ПОЛЁТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 04.07.2022. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ . Арт. – 23(Р1У)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.