

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Л. М. САВЕЛЬЕВ

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение

Самара

Издательство Самарского университета

2021

ISBN 978-5-7883-1711-3

© Самарский университет, 2021

УДК 624.04(075)

ББК 38.112я7

C128

Рецензенты: начальник отдела АО «РКЦ «Прогресс» В. К. Д у п л и х и н;  
канд. техн. наук, доц. В. К. Ш а д р и н

*Савельев, Леонид Макарович*

**C128 Теория упругости** : учебное пособие / Л. М. Савельев; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Самарский университет. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 1 CD-ROM (7,62 Мб). – Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.

**ISBN 978-5-7883-1711-3**

Предназначено для подготовки к традиционным занятиям и самостоятельного освоения курса «Теория упругости», обучающимися по направлению подготовки бакалавров 15.03.01 Машиностроение по профилю «Прочность в машиностроении».

Подготовлено на кафедре космического машиностроения имени Генерального конструктора Д.И. Козлова.

УДК 624.04(075)

ББК 38.112я7

**Минимальные системные требования:**

PC, процессор Pentium, 160 МГц;

Microsoft Windows XP; мышь;

дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Подписано для тиражирования 29.12.2021.

Объем издания 7,62 Мб.

Количество носителей 1 диск.

Тираж 10 дисков.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.

443086, Самара, Московское шоссе, 34.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
1 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ.....	10
1.1 Вектор напряжения.....	10
1.2 Напряжённое состояние в точке тела. Статические условия на поверхности.....	12
1.3 Поверхность напряжений Коши. Главные напряжения.....	16
1.4 Главные оси тензора напряжений.....	18
1.5 Свойства главных напряжений.....	21
1.6 Круговая диаграмма Мора.....	22
1.7 Дифференциальные уравнения равновесия.....	25
2 ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ.....	28
2.1 Перемещения точек тела.....	28
2.2 Линейный тензор деформации. Тензор малых поворотов.....	30
2.3 Нелинейный тензор деформации.....	33
2.4 Геометрический смысл нелинейного тензора деформации.....	35
2.5 Тензор малой деформации.....	38
2.6 Уравнения совместности деформаций Сен-Венана.....	39
2.7 Определение перемещений по компонентам тензора деформации.....	41
2.8 Пример нахождения перемещений по заданным компонентам тензора деформации.....	44
2.9 Поверхность деформации. Главные деформации.....	46
2.10 Объёмная деформация.....	48
3 ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ (ЗАКОН ГУКА).....	50
3.1 Формулы Грина.....	50
3.2 Обобщённый закон Гука для анизотропного тела.....	53
3.3 Закон Гука для изотропного тела.....	58
4 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	63
4.1 Схемы решения задач теории упругости.....	63
4.2 Теорема единственности.....	65
4.3 Решение задачи теории упругости в перемещениях.....	67
4.4 Решение задачи теории упругости в напряжениях.....	68
4.5 Простейшие задачи теории упругости.....	71
4.5.1 Растяжение призматического бруса.....	71
4.5.2 Чистый изгиб бруса постоянного сечения.....	74
5 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ.....	79
5.1 Плоская деформация и обобщённое плоское напряжённое состояние.....	79
5.2 Основные соотношения плоской задачи теории упругости.....	82
5.3 Функция напряжений Эри.....	85

5.4	Решение плоской задачи теории упругости в полиномах .....	88
5.5	Изгиб консольной балки силой на конце.....	90
5.6	Изгиб двухопорной балки узкого прямоугольного сечения под действием равномерной нагрузки .....	98
<b>6 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.....</b>		<b>102</b>
6.1	Формулы дифференцирования в полярных координатах .....	102
6.2	Основные соотношения плоской задачи в полярных координатах.....	104
6.3	Периодические решения бигармонического уравнения .....	108
6.4	Непериодические решения бигармонического уравнения .....	109
6.5	Осесимметричное напряжённое состояние. Задача Ламе .....	112
6.6	Чистый изгиб кривого бруса (задача Головина).....	117
6.7	Расчёт вращающихся круглых дисков .....	121
6.8	Концентрация напряжений возле круглого отверстия в пластине при растяжении (задача Кирша) .....	125
6.9	Действие сосредоточенной силы на полубесконечную пластину (задача Фламана) .....	129
6.10	Расчёт круглого диска на действие двух диаметрально противоположных сил .....	135
6.11	Определение перемещений в задаче Фламана.....	137
<b>7 КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ .....</b>		<b>143</b>
7.1	Постановка задачи о кручении .....	143
7.2	Напряжения в стержне при кручении .....	144
7.3	Перемещения при кручении стержня .....	146
7.4	Решение задачи о кручении в перемещениях .....	150
7.5	Решение задачи о кручении в напряжениях.....	152
7.6	Определение функции депланации по известным напряжениям ..	156
7.7	Теорема Бредта о циркуляции касательного напряжения .....	158
7.8	Мембранная аналогия .....	159
7.9	Кручение стержня эллиптического сечения.....	164
7.10	Кручение стержня с сечением в форме равностороннего треугольника .....	167
7.11	Кручение стержня круглого сечения с продольной полукруглой канавкой.....	170
7.12	Кручение стержня прямоугольного сечения.....	174
7.13	Кручение стержня с сечением в форме узкого прямоугольника.	
Тонкостенные стержни открытого профиля .....		180
7.14	Кручение тонкостенных труб .....	184
<b>8 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....</b>		<b>187</b>
8.1	Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации.....	187
8.2	Принцип возможных перемещений для упругого тела .....	192
8.3	Вариационный принцип Лагранжа.....	194
8.4	Метод Ритца.....	197

8.5 Пример расчёта балки на изгиб методом Ритца .....	199
8.6 Вариационное уравнение Лагранжа для кручения призматических стержней .....	204
8.7 Приложение метода Ритца к расчёту стержня на кручение в перемещениях .....	207
8.8 Примеры расчёта стержней на кручение в перемещениях методом Ритца .....	210
8.8.1 Стержень квадратного сечения.....	210
8.8.2 Стержень прямоугольного сечения.....	212
8.8.3 Стержень полукруглого сечения .....	215
8.9 Метод Бубнова-Галёркина .....	218
8.10 Пример расчёта балки на изгиб методом Бубнова-Галёркина .....	221
8.11 Дополнительная работа и дополнительная энергия деформации .....	224
8.12 Принцип дополнительных виртуальных работ.....	226
8.13 Вариационный принцип Кастильяно .....	228
8.14 Вариационное уравнение Тимошенко для кручения призматических стержней .....	230
8.15 Приложение метода Ритца к расчёту стержней на кручение в напряжениях.....	233
8.16 Примеры расчёта стержней на кручение в напряжениях методом Ритца .....	236
8.16.1 Стержень прямоугольного сечения.....	236
8.16.2 Стержень полукруглого сечения .....	238
9.1 Дискретизация тела.....	239
9.2 Перемещения, деформации и напряжения конечного элемента....	240
9.3 Матрица жёсткости конечного элемента.....	243
9.4 Объединение конечных элементов и определение узловых перемещений.....	246
9.5 Приведение распределённых внешних нагрузок к эквивалентным узловым силам .....	250
9.6 Плоский треугольный конечный элемент .....	252
9.7 Плоский прямоугольный конечный элемент с билинейным полем перемещений.....	256
9.8 Плоский прямоугольный конечный элемент с заданным полем напряжений .....	261
9.9 Совместность конечных элементов.....	263
9.10 Внутренние узлы и подконструкции.....	265
9.11 Сирендипова интерполяция на квадрате функции двух переменных .....	268
9.12 Лагранжева интерполяция на квадрате функции двух переменных .....	274
9.13 Плоские четырёхсторонние изопараметрические конечные элементы.....	276

9.14 Матрица жёсткости изопараметрического конечного элемента..	280
9.15 Численное интегрирование и вычисление напряжений	
в изопараметрических конечных элементах.....	283
9.16 Трёхмерные конечные элементы.....	286
9.17 Вопросы сходимости метода конечных элементов.....	291
10 ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	
К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	296
10.1 Комплексные величины.....	296
10.2 Аналитические функции .....	298
10.3 Представление решения бигармонического уравнения через	
гармонические и комплексные функции .....	301
10.4 Определение перемещений через функцию напряжений.....	303
10.5 Выражение напряжений и перемещений через комплексные	
потенциалы.....	306
10.6 Напряжённое состояние около трещины.....	309
10.7 Криволинейные координаты .....	314
10.8 Компоненты напряжений и перемещений в криволинейных	
координатах.....	319
10.9 Результирующие напряжений, действующих вдоль некоторой	
кривой .....	322
10.10 Примеры выбора комплексных потенциалов .....	325
10.10.1 Осесимметричное нагружение толстостенного цилиндра ..	325
10.10.2 Чистый изгиб кривого бруса.....	326
10.10.3 Одноосное растяжение пластины с круглым отверстием ...	328
10.10.4 Действие сосредоточенной силы на полуплоскость .....	331
10.11 Растяжение пластины с эллиптическим отверстием .....	333
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	339

## ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости является основополагающей дисциплиной для студентов, специализирующихся в области прочности машин. Предметом изучения здесь являются идеально упругие твёрдые тела, то есть тела, которые после удаления внешних воздействий, вызывающих их деформацию, полностью восстанавливают исходную форму. Целью рассмотрения является определение перемещений, деформаций и напряжений, возникающих в телах под действием внешних воздействий. Такая же задача в сопротивлении материалов или строительной механике решается для тел относительно простой формы (бруса, пластины, оболочки) путём введения тех или иных предположений, касающихся характера изменения перемещений или напряжений и пригодных именно для таких тел. В теории упругости выводятся наиболее общие соотношения, справедливые для произвольных тел при произвольном нагружении. Эти соотношения используются затем для решения частных задач. Такой подход позволяет получить решения многих важных задач, недоступных в сопротивлении материалов или строительной механике. Появляется также возможность оценить погрешности, вносимые в прикладных дисциплинах использованием соответствующих гипотез.

Несмотря на стремление к максимальной общности, полностью обойтись без привлечения каких бы то ни было гипотез не удаётся и в теории упругости. Отметим здесь следующие фундаментальные гипотезы.

1 Гипотеза сплошности, в соответствии с которой тело рассматривается как сплошная среда, непрерывным образом заполняющая отведённый ей объём. Это даёт возможность привлечь к рассмотрению аппарат дифференциального исчисления. В действительности тела имеют молекулярное строение, но возможность применения гипотезы сплошности подтверждается многочисленными экспериментами.

2 Гипотеза о естественном ненапряжённом состоянии тела. Считается, что при отсутствии внешних воздействий напряжения во всех точках тела отсутствуют. На самом деле в результате предшествующей истории изготовления (например, послековки или прокатки) в некоторых деталях могут возникать остаточные напряжения. Их отыскание является самостоятельной задачей, решаемой специальными методами. В любом случае напряжения и деформации, определяемые в теории упругости, следует понимать как дополнительные величины, накладываемые на уже имеющееся начальное состояние.



3 Тело наделяется свойством идеальной упругости. После снятия нагрузок все точки тела возвращаются в своё первоначальное положение. Никаких остаточных деформаций не возникает.

Помимо этих основных гипотез в тех или иных вариантах теории упругости могут использоваться и другие предпосылки. В линейной теории упругости предполагается, в частности, линейная зависимость между напряжениями и деформациями, а также малость перемещений и углов поворота (достаточно жёсткие тела). Именно этот вариант изучается в основном в данном курсе. Упомянем ещё принцип Сен-Венана о локальности действия системы самоуравновешенных сил. Согласно ему самоуравновешенная система сил, приложенных к небольшому участку тела, создаёт напряжения лишь в непосредственной близости от места её приложения.

Накладываемые перечисленными гипотезами ограничения не позволяют решать важные для практики задачи устойчивости или пластического деформирования тел. Поэтому в соответствующих дисциплинах используются более общие подходы. Но основные уравнения и методы теории упругости составляют фундамент и таких дисциплин как устойчивость деформируемых систем или теория пластичности.

Основы теории упругости были заложены в первой половине 19 века трудами Коши (1822), Навье (1821) и Пуассона (1829), а также Грина, Ламе, Клапейрона и других учёных. В 20 веке основные достижения теории упругости связаны с именами отечественных учёных С.П. Тимошенко, И.Г. Бубнова, Б.Г. Галёркина, П.Ф. Папковича, Г.В. Колосова, Н.И. Мусхелишвили.

Данное учебное пособие предназначается студентам, обучающимся по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика по профилю «Основы прочности машиностроительных конструкций». Оно может использоваться студентами других специальностей для самостоятельного изучения отдельных разделов теории упругости, а также работниками проектных организаций.

# 1 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

## 1.1 Вектор напряжения

Рассмотрим тело, отнесённое к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , которое нагружено произвольным образом. В качестве нагрузок могут выступать силы поверхностные и объёмные. Первые распределены по поверхности тела; они рассчитываются на единицу площади поверхности и имеют размерность  $\text{Н/м}^2$ . Вектор поверхностных сил в некоторой точке поверхности обозначим через  $\vec{p}$ , а его компоненты – через  $p_1, p_2, p_3$ . Примерами могут служить нормальное давление, силы трения и т.п.

Объёмные силы распределены по объёму тела. Они рассчитываются на единицу объёма и имеют размерность  $\text{Н/м}^3$ . Примером служит сила тяжести. Вектор объёмных сил обозначим через  $\vec{R}$ , а его компоненты – через  $R_1, R_2, R_3$ .

Возьмём произвольную точку  $M$  тела и проведём через неё поверхность, которая делит тело на две части (рисунок 1.1). Отбросив мысленно часть II, рассмотрим её действие на оставшуюся часть I (рисунок 1.2).

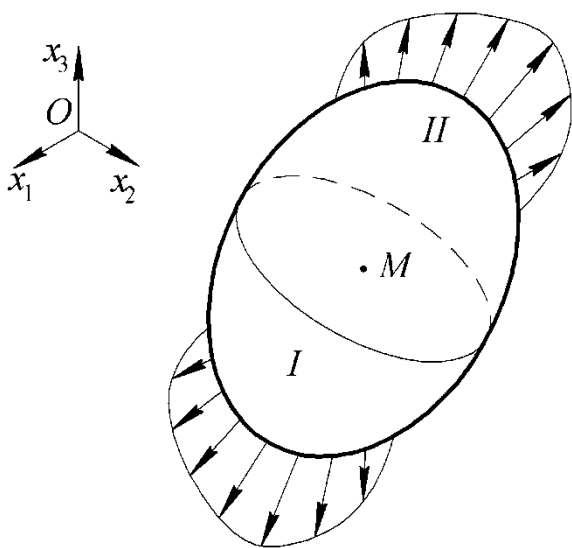


Рисунок 1.1 – Нагруженное тело

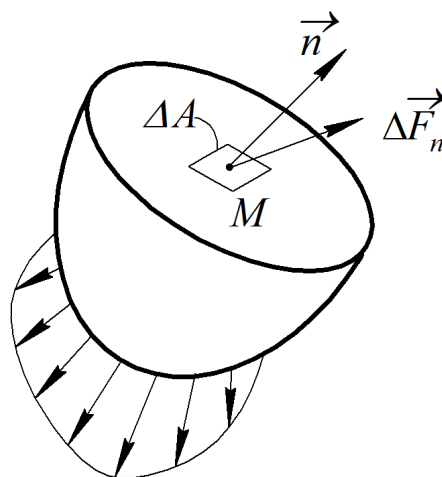


Рисунок 1.2 – К понятию напряжения

Выделим в окрестности точки  $M$  малую площадку  $\Delta A$ , касательную к секущей поверхности. Через  $\vec{n}$  обозначим вектор единичной нормали к секущей поверхности в точке  $M$ , который определяет, таким образом, ориентацию площадки  $\Delta A$ . Вектор силы, действующей на площадку со стороны отброшенной части тела, обозначим через  $\Delta \vec{F}_n$ . Нижний индекс  $n$  подчёркивает, что сила

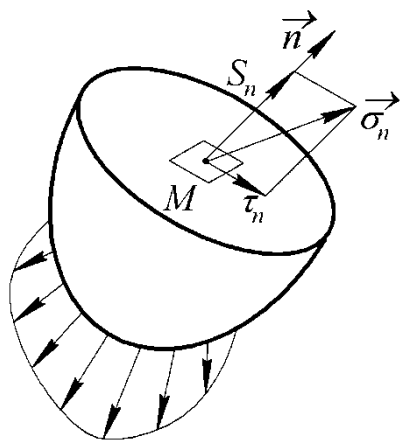
зависит от ориентации площадки, выделенной в данной точке. Отношение  $\Delta\vec{F}_n/\Delta A$  называется средним напряжением в площадке, а предел отношения – вектором напряжения  $\vec{\sigma}_n$  в данной точке в площадке с нормалью  $\vec{n}$ :

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}_n}{\Delta A}.$$

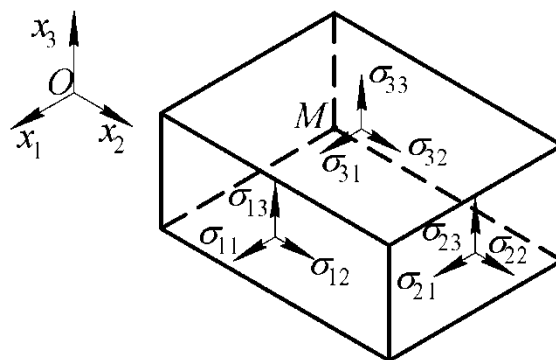
В той же точке  $M$ , но на отброшенной части  $\Pi$  тела в соответствии с принципом равенства действия и противодействия будет действовать вектор напряжения, равный  $-\vec{\sigma}_n$ . Если под  $\vec{n}$  всегда понимать вектор *внешней* нормали (то есть единичной нормали, выходящей из тела), то можно записать равенство

$$\vec{\sigma}_{-n} = -\vec{\sigma}_n. \quad (1.1)$$

Вектор  $\vec{\sigma}_n$  можно разложить на две составляющие (рисунок 1.3), одна из которых есть его проекция на нормаль к площадке (нормальное напряжение  $S_n$ ), а другая – проекция на плоскость площадки (касательное напряжение  $\tau_n$ ). Если площадка параллельна одной из координатных плоскостей, то касательное напряжение в ней можно в свою очередь разложить на составляющие по осям, образующим эту плоскость. В трёх взаимно-перпендикулярных площадках, выделенных в окрестности точки  $M$  и параллельных координатным плоскостям, будем иметь девять компонент  $\sigma_{ij}$  трёх векторов напряжений, как показано на рисунке 1.4.



**Рисунок 1.3 – Нормальная и касательная составляющие вектора напряжения**



**Рисунок 1.4 – Составляющие напряжений в декартовых координатах**

В обозначениях  $\sigma_{ij}$  первый индекс указывает ориентацию площадки (то есть координатную ось, которой параллельна нормаль к площадке), а второй индекс обозначает ось, на которую проектируется вектор напряжений в этой

площадке. Показанные на рисунке 1.4 направления напряжений будем считать положительными. При этом в противоположных гранях бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, выделенного в точке  $M$ , положительные напряжения имеют противоположные направления, как вытекает из равенства (1.1). Таким образом, будем руководствоваться следующим правилом знаков. *Если внешняя нормаль к площадке направлена в положительную сторону координатной оси, то положительные напряжения в этой площадке действуют также в положительных направлениях соответствующих осей. Если же направление внешней нормали к площадке противоположно положительному направлению координатной оси, то и положительные напряжения в такой площадке направлены против положительных направлений соответствующих осей.* В соответствии с этим правилом, в частности, положительным считается растягивающее нормальное напряжение.

## **1.2 Напряжённое состояние в точке тела. Статические условия на поверхности**

Зная  $\sigma_{ij}$ , можно найти напряжения в площадке с произвольной ориентацией. Иначе говоря, девять величин  $\sigma_{ij}$  полностью характеризуют напряжённое состояние в данной точке тела. Для доказательства представим себе наклонную площадку  $ABC$ , расположенную на бесконечно близком расстоянии  $dh$  от точки  $M$  (рисунок 1.5,а). Ориентация площадки характеризуется нормальным к ней вектором  $\vec{n}$  единичной длины с компонентами  $n_1, n_2, n_3$ , которые представляют собой косинусы углов между вектором нормали и положительными направлениями координатных осей. В площадке действует вектор напряжения  $\vec{\sigma}_n$  с компонентами  $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$ .

Точки  $A, B, C$  и  $M$  являются вершинами бесконечно малого тетраэдра, три грани которого параллельны координатным плоскостям, причём направления нормалей к ним противоположны направлениям координатных осей. Напряжения в этих гранях, показанные на рисунке 1.5,б, считаем известными. Для вычисления  $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}$  и  $\sigma_{n3}$  воспользуемся условиями равновесия тетраэдра.

Пусть площадь наклонной грани равна  $dA$ . Площади граней с нормальными, параллельными осям  $x_1, x_2, x_3$ , по теореме о площади проекции плоской фигуры будут равны соответственно

$$dA_1 = n_1 dA; \quad dA_2 = n_2 dA; \quad dA_3 = n_3 dA. \quad (1.2)$$

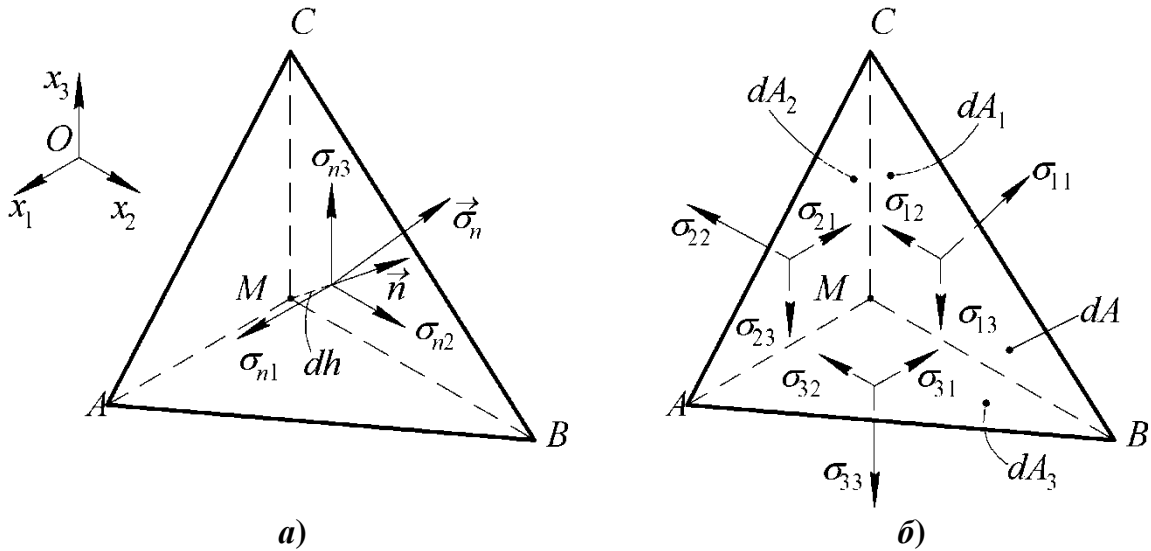


Рисунок 1.5 – К определению напряжений в наклонной площадке

Пусть помимо указанных напряжений действует также объёмная сила с компонентами  $R_1, R_2, R_3$ . Условие равновесия тетраэдра в направлении оси  $x_1$  запишется так:

$$\sigma_{n1}dA - \sigma_{11}dA_1 - \sigma_{21}dA_2 - \sigma_{31}dA_3 + R_1d\tau = 0,$$

где

$$d\tau = \frac{1}{3}dh dA$$

– объём тетраэдра.

В левой части данного равенства четыре первых слагаемых содержат множителями площади соответствующих граней и имеют, следовательно, второй порядок малости. Последнее же слагаемое является бесконечно малой величиной третьего порядка, и его следует отбросить. Учитывая соотношения (1.2), после деления на  $dA$  приходим к выражению для  $\sigma_{n1}$ . Добавляя аналогичные выражения для  $\sigma_{n2}$  и  $\sigma_{n3}$ , будем иметь три равенства

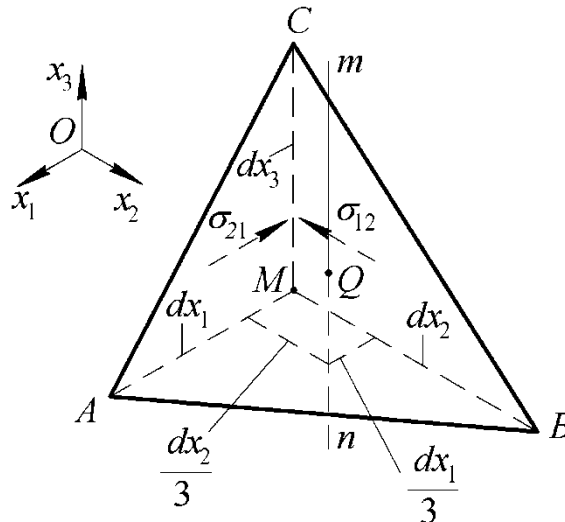
$$\begin{aligned} \sigma_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3; \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3; \\ \sigma_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Используя тензорное правило суммирования по повторяющемуся индексу, полученные равенства можно записать в краткой форме

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji}n_j. \quad (1.4)$$

Обратимся далее к условиям равновесия моментов сил, действующих на тетраэдр. Удобнее всего взять моменты относительно прямых, проходящих через центр тяжести  $Q$  наклонной площадки параллельно координатным осям.

На рисунке 1.6 показана одна из таких прямых  $mn$ , параллельная оси  $x_3$ . Проекции точки  $Q$  на вертикальные и горизонтальную грани будут совпадать с центрами тяжести этих граней. Поэтому момент относительно прямой  $mn$  дадут лишь напряжения  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{21}$ , указанные на рисунке 1.6. Остальные напряжения либо проходят через выбранную прямую, либо параллельны ей.



**Рисунок 1.6 – К составлению условий равновесия моментов для элементарного тетраэдра**

Условие равновесия моментов относительно прямой  $mn$  запишется так:

$$\sigma_{21} dA_2 \frac{dx_2}{3} - \sigma_{12} dA_1 \frac{dx_1}{3} = 0.$$

Поскольку

$$dA_1 = \frac{1}{2} dx_2 dx_3; \quad dA_2 = \frac{1}{2} dx_1 dx_3,$$

отсюда вытекает первое из следующих трёх равенств (остальные два выводятся аналогично):

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}; \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}. \quad (1.5)$$

Эти равенства известны как *закон парности касательных напряжений*.

Величины  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$ ,  $\sigma_{n3}$  и  $n_j$ , фигурирующие в соотношении (1.4), являются компонентами векторов, то есть тензоров первого ранга. На основании обратного тензорного признака заключаем, что девять величин  $\sigma_{ij}$  образуют тензор второго ранга, называемый *тензором напряжений*. Тензор напряжений симметричен, как это видно из соотношений (1.5).

Зная компоненты вектора  $\vec{\sigma}_n$ , можно найти и величину полного напряжения в наклонной площадке:

$$\sigma_n = |\vec{\sigma}_n| = \sqrt{\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2}. \quad (1.6)$$

Нормальное напряжение  $S_n$  в наклонной площадке получим, если спроектируем компоненты вектора  $\vec{\sigma}_n$  на направление нормали, умножив их на  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ :

$$S_n = \sigma_{n1}n_1 + \sigma_{n2}n_2 + \sigma_{n3}n_3 = \sigma_{nj}n_j.$$

Подставив сюда равенство (1.4), приходим к выражению

$$S_n = \sigma_{ij}n_i n_j. \quad (1.7)$$

Учитывая, что  $\sigma_n^2 = S_n^2 + \tau_n^2$ , касательное напряжение  $\tau_n$  в наклонной площадке можно вычислить по формуле

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_n^2 - S_n^2}. \quad (1.8)$$

Соотношение (1.4) можно приложить к тому случаю, когда точка  $M$  находится у поверхности  $\omega$ , ограничивающей тело, а наклонная площадка принадлежит этой поверхности. Тогда в формуле (1.4) следует заменить  $\sigma_{ni}$  компонентами  $p_i$  поверхностной нагрузки, что приводит к равенству

$$\sigma_{ji}n_j = p_i, \quad (1.9)$$

где  $n_j$  – направляющие косинусы нормали к поверхности  $\omega$  в рассматриваемой точке.

Последнее равенство устанавливает связь между внутренними напряжениями и поверхностными силами, называемую *статическими условиями на поверхности тела*. В развёрнутом виде эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= p_1; \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 &= p_2; \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= p_3; \end{aligned} \quad (1.10)$$

они должны выполняться в каждой точке поверхности  $\omega$ .

Отметим, что напряжённое состояние в точке тела может быть представлено в виде суммы двух составляющих. Первая их них есть равномерное всестороннее растяжение или сжатие и выражается так называемым шаровым тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

есть среднее нормальное напряжение в данной точке.

Вторая составляющая характеризует отклонение напряжённого состояния от этого всестороннего растяжения или сжатия. Соответствующий тензор называется девиатором напряжений:

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Разложение тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие имеет особое значение в теории пластичности и при исследовании разрушения материалов, поскольку опыт показывает, что материалы по-разному реагируют на всестороннее растяжение и напряжения сдвига.

### 1.3 Поверхность напряжений Коши. Главные напряжения

Совместим начало координат с точкой  $M$  тела. Пусть  $\vec{n}$  – единичный вектор, нормальный к некоторой наклонной площадке в этой точке (рисунок 1.7). По направлению нормали отложим отрезок  $MN$  длиной

$$r = \frac{c}{\sqrt{|S_n|}}, \quad (1.11)$$

где  $c$  – постоянная;  $S_n$  – нормальное напряжение в площадке с нормалью  $\vec{n}$ .

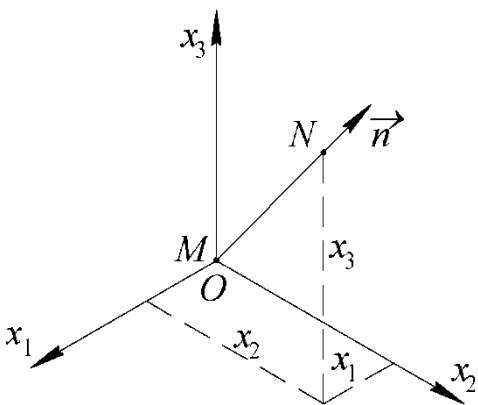


Рисунок 1.7 – К определению поверхности напряжений

Если изменить ориентацию площадки, то длина и направление отрезка  $MN$  также изменятся. Поверхность, по которой перемещается точка  $N$  при всевозможных положениях наклонной площадки, называется *поверхностью напряжений Коши*. Найдём уравнение этой поверхности.

Из (1.11) следует равенство

$$S_n r^2 = \pm c^2,$$

где знак плюс или минус должен быть выбран в зависимости от знака  $S_n$ . В соответствии с (1.7) подставим сюда вместо  $S_n$  выражение  $\sigma_{ij}n_i n_j$ :



$$\sigma_{ij}n_i n_j r^2 = \pm c^2.$$

Поскольку

$$n_i r = x_i; \quad n_j r = x_j,$$

мы получаем уравнение

$$\sigma_{ij}x_i x_j = \pm c^2,$$

которое в развёрнутой форме выглядит так:

$$\sigma_{11}x_1^2 + \sigma_{22}x_2^2 + \sigma_{33}x_3^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + 2\sigma_{13}x_1x_3 + 2\sigma_{23}x_2x_3 = \pm c^2.$$

Следовательно, поверхность напряжений Коши представляет собой поверхность второго порядка. Но, как известно, всякая поверхность второго порядка имеет так называемые *главные оси*  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , в которых уравнение поверхности не содержит слагаемых с произведениями разноимённых координат:

$$\sigma_1\xi_1^2 + \sigma_2\xi_2^2 + \sigma_3\xi_3^2 = \pm C^2.$$

Поскольку коэффициентами в слагаемых, содержащих произведения  $x_i x_j$ , являются компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , приходим к заключению, что в площадках, нормальных к главным осям, отсутствуют касательные напряжения. Эти площадки называются *главными*, а действующие в них нормальные напряжения – *главными напряжениями*.

Пусть  $\sigma$  – главное напряжение, а ориентация площадки, в которой оно действует, характеризуется компонентами  $n_1, n_2, n_3$  вектора единичной нормали. Поскольку главное напряжение является нормальным к площадке, его проекции на координатные оси равны  $\sigma n_1, \sigma n_2$  и  $\sigma n_3$ . Если подставить эти значения вместо  $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}$  и  $\sigma_{n3}$  в равенства (1.3), то придём к системе однородных алгебраических уравнений относительно  $n_1, n_2, n_3$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= 0; \\ \sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{32}n_3 &= 0; \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Эта система имеет тривиальное решение  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ , но оно лишено смысла, поскольку должно выполняться очевидное равенство  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ .

Как известно, однородная система имеет и нетривиальное решение, если её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение относительно  $\sigma$ , которое запишем в виде

$$\sigma^3 - I_1(\sigma)\sigma^2 + I_2(\sigma)\sigma - I_3(\sigma) = 0. \quad (1.13)$$

Коэффициенты уравнения имеют следующие выражения:

$$I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} I_2(\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2); \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$I_3(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Величина главного напряжения  $\sigma$  не зависит от выбора исходной системы координат. Следовательно, коэффициенты уравнения (1.13) должны быть одинаковыми в любой системе координат, то есть они должны быть инвариантными по отношению к системе координат. Величины  $I_1(\sigma)$ ,  $I_2(\sigma)$  и  $I_3(\sigma)$  называют соответственно *первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений*.

Кубическое уравнение имеет три корня, из которых один всегда вещественный, а два других могут быть либо также вещественными, либо комплексно сопряжёнными. Благодаря симметрии тензора напряжений все три корня уравнения (1.13) будут всегда вещественными. Решив уравнение (1.13), найдём три главных напряжения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

## 1.4 Главные оси тензора напряжений

Установим ориентацию площадок, в которых действуют главные напряжения. Для определения направляющих косинусов нормали к площадке с напряжением, скажем,  $\sigma_1$  подставим  $\sigma_1$  в равенства (1.12). Получаемая при этом система линейных алгебраических уравнений относительно  $n_1, n_2, n_3$  является линейно зависимой, поскольку её определитель равен нулю. Отбросив одно из уравнений (например, третье), будем иметь два равенства

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma_1)n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 &= 0; \\ \sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma_1)n_2 + \sigma_{32}n_3 &= 0.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Если добавить к ним соотношение

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,\tag{1.18}$$

получим три уравнения относительно искомых величин. Их решение можно выполнить следующим образом. Разделим уравнения (1.17) на  $n_3$ , а (1.18) – на  $n_3^2$ . Вводя обозначения

$$a_1 = \frac{n_1}{n_3}, \quad a_2 = \frac{n_2}{n_3},\tag{1.19}$$

приведём эти уравнения к виду

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma_1)a_1 + \sigma_{21}a_2 &= -\sigma_{31}; \\ \sigma_{12}a_1 + (\sigma_{22} - \sigma_1)a_2 &= -\sigma_{32};\end{aligned}\tag{1.20}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + 1 = \frac{1}{n_3^2}.\tag{1.21}$$

Решение системы (1.20) даёт значения  $a_1$  и  $a_2$ . Из равенства (1.21) получим затем

$$n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2}},\tag{1.22}$$

а на основании (1.19) будем иметь также

$$n_1 = a_1 n_3; \quad n_2 = a_2 n_3.\tag{1.23}$$

Выбор знака в соотношении (1.22) безразличен, так как его изменение приведёт лишь к смене направления вектора нормали на противоположное.

Покажем, что если все три главных напряжения различны, то главные площадки будут взаимно ортогональны. Пусть, например,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Направляющие косинусы нормалей к площадкам с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  обозначим соответственно через  $n_1, n_2, n_3$  и  $l_1, l_2, l_3$ . Подставим в равенства (1.12) главное напряжение  $\sigma_1$  и запишем их в тензорной форме:

$$\sigma_{ji}n_j - \sigma_1 n_i = 0.$$

Умножив последнее соотношение на  $l_i$ , получим

$$\sigma_{ji}n_j l_i - \sigma_1 n_i l_i = 0.\tag{1.24}$$

Точно так же подставим в систему (1.12) главное напряжение  $\sigma_2$ , сменив при этом обозначение  $n_i$  на  $l_i$ :

$$\sigma_{ji}l_j - \sigma_2l_i = 0.$$

Умножение этого равенства на  $n_i$  даёт

$$\sigma_{ji}l_jn_i - \sigma_2l_in_i = 0.$$

Выполним далее замену немых индексов в первом слагаемом последнего равенства: вместо  $i$  возьмём  $j$ , а вместо  $j - i$ . Учитывая, что  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ , перепишем результат в виде

$$\sigma_{ji}n_jl_i - \sigma_2n_il_i = 0.$$

Если теперь вычтём последнее равенство из (1.24), то получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)n_il_i = 0.$$

Так как по условию  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , отсюда следует, что

$$n_il_i = 0$$

или, подробнее,

$$n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 = 0. \quad (1.25)$$

Последнее равенство есть условие ортогональности нормальных векторов к площадкам с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , что и доказывает утверждение.

Если два главных напряжения равны между собой (скажем,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ), а третье отлично от них, то будем иметь бесконечное множество площадок, в которых действует напряжение  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Все они перпендикулярны к площадке с напряжением  $\sigma_1$  и все являются главными. В случае, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , любая площадка в данной точке тела является главной. Этот случай соответствует всестороннему растяжению или сжатию с напряжением  $\sigma$ .

Заметим попутно, что с помощью равенства (1.25) нетрудно убедиться, что все главные напряжения должны быть вещественными величинами. Предположим, например, что корень  $\sigma_3$  уравнения (1.13) является вещественным, а корни  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – комплексно сопряжёнными, то есть  $\sigma_2 = \bar{\sigma}_1$ . Тогда соответствующие им величины  $n_i$  и  $l_i$ , получаемые из решения уравнений (1.12), также должны быть комплексно сопряжёнными:

$$l_i = \bar{n}_i.$$

Но произведение двух комплексно сопряжённых чисел всегда положительно:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Поэтому в левой части равенства (1.25) все три слагаемых окажутся положительными, что невозможно. Следовательно, все корни  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  уравнения (1.13) должны быть вещественными.

Направления нормалей к главным площадкам называются *главными направлениями тензора напряжений*, а координатные оси, направления которых совпадают с главными направлениями – *главными осями тензора напряжений*. Отметим, что в главных осях выражения для инвариантов тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (1.26)$$

## 1.5 Свойства главных напряжений

Совместив координатные оси с главными осями тензора напряжений, запишем выражение для нормального напряжения  $S_n$  в произвольной наклонной площадке. Формула (1.7) в этом случае приводит к соотношению

$$S_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \quad (1.27)$$

где  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  – направляющие косинусы нормали к площадке.

Из равенства  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  выразим  $n_1^2$ :

$$n_1^2 = 1 - n_2^2 - n_3^2.$$

Тогда формулу (1.27) можно преобразовать следующим образом:

$$S_n = \sigma_1(1 - n_2^2 - n_3^2) + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)n_2^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)n_3^2.$$

Поскольку  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  и  $\sigma_1 \geq \sigma_3$ , отсюда вытекает, что  $S_n \leq \sigma_1$ . С другой стороны, подставив выражение

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$$

в формулу (1.27), представим её в виде

$$S_n = (\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3.$$

Отсюда следует неравенство  $S_n \geq \sigma_3$ .

Таким образом, мы устанавливаем первое свойство главных напряжений:

$$\sigma_1 \geq S_n \geq \sigma_3, \quad (1.28)$$

то есть из всех нормальных напряжений, действующих на различных площадках в данной точке тела, наибольшим и наименьшим являются главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Далее, формулы (1.3) для  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$ ,  $\sigma_{n3}$  дают в этом случае

$$\sigma_{n1} = \sigma_1 n_1; \quad \sigma_{n2} = \sigma_2 n_2; \quad \sigma_{n3} = \sigma_3 n_3.$$

Следовательно, для квадрата полного напряжения в наклонной площадке будем иметь

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \quad (1.29)$$

Используя снова соотношение  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  и повторяя вышеприведённые рассуждения, выводим отсюда второе свойство главных напряжений. Если пронумеровать главные напряжения в соответствии с неравенствами

$$|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_3|,$$

то получим, что

$$|\sigma_1| \geq |\sigma_n| \geq |\sigma_3|, \quad (1.30)$$

то есть из всех полных напряжений, действующих на различных площадках в данной точке тела, наибольшим и наименьшим по модулю являются наибольшее и наименьшее по модулю главные напряжения.

## 1.6 Круговая диаграмма Мора

Найдём далее направляющие косинусы нормали к площадке с заданными значениями  $S_n$  и  $\tau_n$ . Подставив  $\sigma_n^2 = S_n^2 + \tau_n^2$  в равенство (1.29) и добавив соотношения (1.27) и (1.18), получим для отыскания неизвестных  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  систему трёх уравнений

$$\begin{cases} \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = S_n^2 + \tau_n^2; \\ \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = S_n; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \end{cases}$$

Исключим из системы неизвестную  $n_3$ , для чего умножим второе уравнение на  $\sigma_3$ , а третье на  $\sigma_3^2$ . Вычитая поочерёдно получаемые равенства из первого уравнения, будем иметь два уравнения, не содержащих  $n_3$ :

$$\begin{cases} \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + \sigma_2(\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 = S_n^2 - S_n\sigma_3 + \tau_n^2; \\ (\sigma_1 + \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 = S_n^2 - \sigma_3^2 + \tau_n^2. \end{cases}$$

Затем исключим из данных уравнений неизвестную  $n_2$ . Для этого умножим первое уравнение на  $(\sigma_2 + \sigma_3)$  и вычтем из него второе, умноженное на  $\sigma_2$ . В итоге придём к уравнению относительно  $n_1^2$ . Выполнив очевидные алгебраические преобразования, после сокращения на  $\sigma_3$  будем иметь равенство

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 = (S_n - \sigma_2)(S_n - \sigma_3) + \tau_n^2,$$

из которого вытекает искомое выражение для  $n_1$ . Поскольку все неизвестные входят в исходную систему уравнений в равноправном виде, выражения для  $n_2$  и  $n_3$  могут быть записаны с помощью круговой замены индексов. Таким образом получаем требуемые выражения

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(S_n - \sigma_2)(S_n - \sigma_3) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}; \\ n_2^2 &= \frac{(S_n - \sigma_3)(S_n - \sigma_1) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}; \\ n_3^2 &= \frac{(S_n - \sigma_1)(S_n - \sigma_2) + \tau_n^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

При заданных значениях  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  величины  $S_n$  и  $\tau_n$  не могут быть произвольными. Установим ограничения, которым они должны удовлетворять. Будем считать, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , так что знаменатели формул для  $n_1^2$  и  $n_3^2$  неотрицательны, а знаменатель формулы для  $n_2^2$  положителен. Поскольку левые части равенств (1.31) неотрицательны, нормальные и касательные напряжения на любых площадках должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} (S_n - \sigma_2)(S_n - \sigma_3) + \tau_n^2 &\geq 0; \\ (S_n - \sigma_3)(S_n - \sigma_1) + \tau_n^2 &\leq 0; \\ (S_n - \sigma_1)(S_n - \sigma_2) + \tau_n^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left( S_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &\geq \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2; \\ \left( S_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &\leq \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2; \\ \left( S_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 &\geq \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Эти соотношения допускают простую геометрическую интерпретацию. Равенство вида  $(x_1 - a)^2 + x_2^2 = r^2$  есть уравнение окружности в плоскости координат  $x_1x_2$ ; при этом радиус окружности равен  $r$ , а центр смещён от начала координат в положительную сторону оси  $x_1$  на величину  $a$ . Неравенством  $(x_1 - a)^2 + x_2^2 \geq r^2$  задаётся совокупность точек, лежащих вне окружности, а неравенство  $(x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq r^2$  определяет все точки, лежащие внутри неё (включая в обоих случаях точки самой окружности).

Неравенства (1.32) показывают, что допустимые сочетания  $S_n$  и  $\tau_n$  лежат на части плоскости  $S_n - \tau_n$ , которая заштрихована на рисунке 1.8. Данная область ограничена тремя окружностями, имеющими центры на оси  $S_n$  и проходящими через точки  $(\sigma_1, 0)$ ;  $(\sigma_2, 0)$ ;  $(\sigma_3, 0)$ . Эта область называется *круговой диаграммой напряжённого состояния* или *кругами Мора*. Координаты точек круговой диаграммы определяют нормальные  $S_n$  и касательные  $\tau_n$  напряжения на всём многообразии площадок, проходящих через данную точку тела.

Полученные результаты позволяют сформулировать ещё одно свойство главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (1.33)$$

то есть *наибольшее касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений*.

Как видно из рисунка 1.8, в площадке с напряжением  $\tau_{\max}$  действует нормальное напряжение

$$S_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (1.34)$$

Чтобы определить ориентацию площадки с максимальным касательным напряжением, подставим значения

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad S_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

в формулы (1.31). Это приводит к следующим значениям  $n_i$ :

$$n_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n_2 = 0; \quad n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



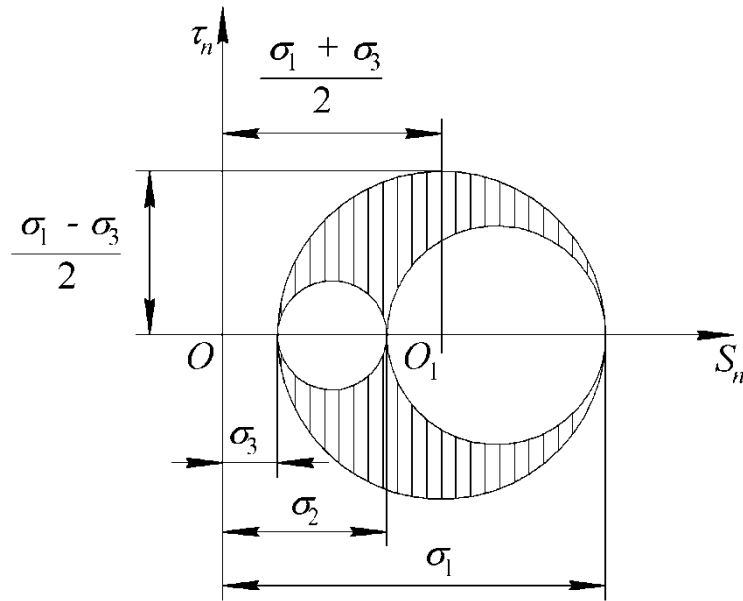


Рисунок 1.8 – Круги Мора

Таким образом, искомым площадок две, они перпендикулярны главной площадке с напряжением  $\sigma_2$  и наклонены под углом  $45^\circ$  к главным площадкам  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

## 1.7 Дифференциальные уравнения равновесия

В окрестности некоторой точки  $M$  тела выделим бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$  (рисунок 1.9). На гранях элемента действуют напряжения, положительные направления и величины которых указаны на рисунке. В гранях, отстоящих от точки  $M$  на расстояниях  $dx_1$ ,  $dx_2$  или  $dx_3$ , значения напряжений отличаются от соответствующих величин в противоположных гранях на бесконечно малые приращения. При их записи следует руководствоваться формулой Тейлора

$$\begin{aligned}
 f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) &= \\
 &= f(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots, \quad (1.35)
 \end{aligned}$$

где многоточие означает бесконечно малые величины более высоких порядков. В качестве  $f(x_1, x_2, x_3)$  может выступать любая из функций  $\sigma_{ij}$ .

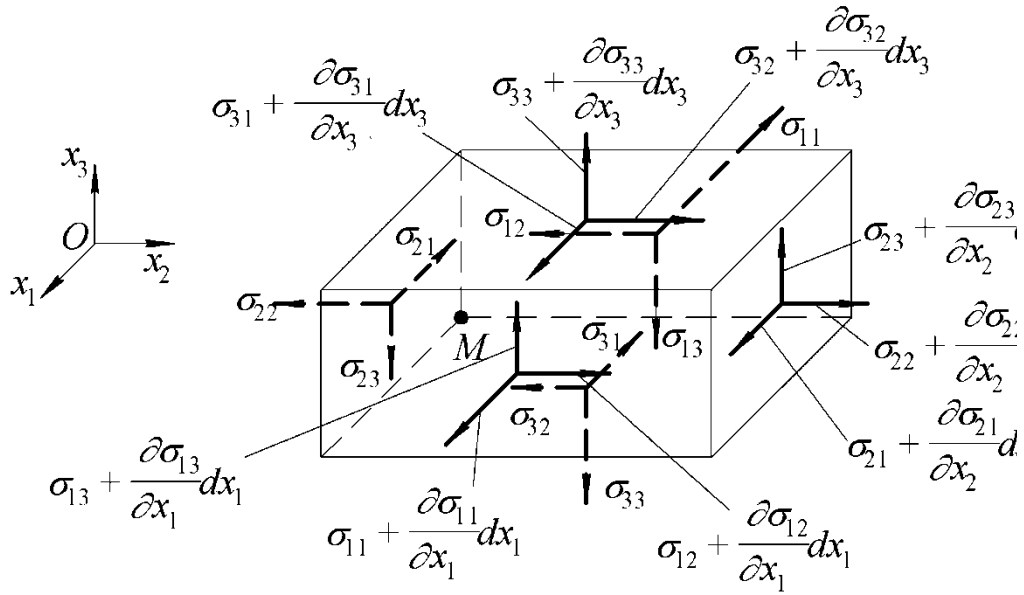


Рисунок 1.9 – Элементарный прямоугольный параллелепипед

Запишем условия равновесия выделенного элемента в проекции на координатные оси, учитывая при этом и действие объёмных сил  $R_1, R_2, R_3$ .

Суммируя силы, действующие параллельно оси  $x_1$ , будем иметь

$$\left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 -$$

$$- \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + R_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

После приведения подобных членов и сокращения на  $dx_1 dx_2 dx_3$ , получим первое из уравнений равновесия. Аналогично получаются и два других, так что в итоге приходим к трём равенствам

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + R_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + R_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + R_3 = 0. \quad (1.36)$$

В тензорной форме эти равенства можно записать так:

$$\sigma_{ji,j} + R_i = 0. \quad (1.37)$$

Здесь индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате, например,

$$\sigma_{ji,1} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_1}.$$

Для равновесия элементарного параллелепипеда должны удовлетворяться также три уравнения моментов. Эти уравнения, однако, приводят к уже установленным ранее соотношениям парности касательных напряжений (1.5).

## 2 ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ

### 2.1 Перемещения точек тела

Отнесём тело к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Положение произвольной точки  $M$  до деформации определим радиусом-вектором  $\vec{r}$  (рисунок 2.1). После деформации точка  $M$  попадёт в положение  $M'$  с радиусом-вектором  $\vec{r}'$ . Вектор  $\overline{MM'}$ , который обозначим через  $\vec{u}$ , представляет собой вектор перемещения этой точки:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}.$$

Его компоненты

$$u_i = x'_i - x_i$$

называют перемещениями точки  $M$  в направлении соответствующих координатных осей. Подчеркнём, что мы считаем перемещения весьма малыми по сравнению с линейными размерами тела, так что деформирование тела на рисунке 2.1 показано в сильно преувеличенном масштабе.

В соседней точке  $N$ , расстояние которой от точки  $M$  определяется элементарным вектором  $d\vec{r}$  (рисунок 2.2), вектор перемещения будет иметь значение  $\vec{u} + d\vec{u}$ . Из рисунка 2.2 видно, что  $d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}$ , то есть

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}.$$

В соответствии с формулой Тейлора (1.35) приращение функции  $f(x_1, x_2, x_3)$  при переходе в соседнюю точку с координатами  $x_1 + dx_1$ ,  $x_2 + dx_2$ ,  $x_3 + dx_3$  с точностью до малых высшего порядка равно

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = f_{,j} dx_j.$$

Следовательно, можно записать

$$d\vec{u} = \vec{u}_{,j} dx_j.$$

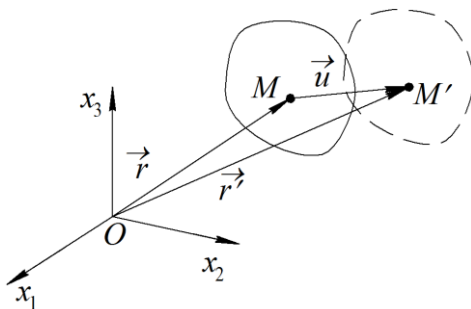


Рисунок 2.1 – Вектор перемещения

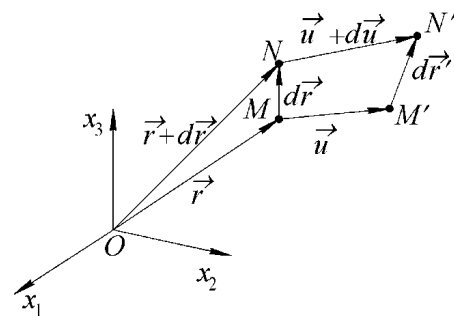


Рисунок 2.2 – Деформирование элементарного отрезка

Для компонент  $du_i$  вектора  $d\vec{u}$  будем иметь

$$du_i = u_{i,j} dx_j. \quad (2.1)$$

Изменение перемещений при переходе от одной точки тела к другой связано с его деформированием. Девять величин  $u_{i,j}$  полностью определяют характер деформирования в малой окрестности точки  $M$ . Так как  $du_i$  и  $dx_j$  являются компонентами вектора, величины  $u_{i,j}$  на основании обратного тензорного признака образуют тензор второго ранга, в общем случае несимметричный. Представим его в виде суммы

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (2.2)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – симметричный, а  $\omega_{ij}$  – кососимметричный тензоры, то есть

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}; \quad \omega_{ji} = -\omega_{ij}.$$

Поменяем в (2.2) индексы  $i$  и  $j$  местами:

$$u_{j,i} = \varepsilon_{ji} + \omega_{ji} = \varepsilon_{ij} - \omega_{ij}.$$

Складывая и вычитая полученное равенство и равенство (2.2), прийдём к соотношениям

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (2.3)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (2.4)$$

В развёрнутой записи формулы (2.3) имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right);$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right);$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \quad (2.6)$$

Компоненты тензора  $\omega_{ij}$  определяются так:

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0;$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right);$$

$$\begin{aligned}\omega_{23} = -\omega_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \\ \omega_{31} = -\omega_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Тензор  $\omega_{ij}$  имеет всего три независимые компоненты, и их можно рассматривать как компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  некоторого вектора  $\vec{\omega}$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 = -\omega_{23} = \omega_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right); \\ \omega_2 = -\omega_{31} = \omega_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \\ \omega_3 = -\omega_{12} = \omega_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).\end{aligned}\quad (2.8)$$

## 2.2 Линейный тензор деформации. Тензор малых поворотов

Выясним физический смысл тензоров  $\varepsilon_{ij}$  и  $\omega_{ij}$ , предположив, что относительные деформации и углы поворота бесконечно малых отрезков в окрестности рассматриваемой точки весьма малы.

На рисунке 2.3 показаны два отрезка  $MA$  и  $MB$ , которые до деформации ориентированы параллельно координатным осям  $x_1, x_2$  и имеют размеры  $dx_1, dx_2$ . При деформировании тела точки  $M, A$  и  $B$  попадают в положения, которые в проекции на плоскость  $x_1x_2$  отмечены буквами  $M', A'$  и  $B'$ .

Если точка  $M$  имеет в плоскости  $x_1x_2$  перемещения  $u_1$  и  $u_2$ , то перемещения точки  $A$ , расположенной на расстоянии  $dx_1$  от неё, будут  $u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$  и

$u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1$ , как это вытекает из формулы Тейлора (1.35). Относительное удли-

нение отрезка  $MA$  равно по определению  $\varepsilon^* = (M'A' - MA)/MA$ , где  $MA = dx_1$ .

Длину отрезка  $M'A'$  можно определить так:

$$M'A' = \frac{M'A''}{\cos \alpha_1} \approx M'A'' = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1.$$

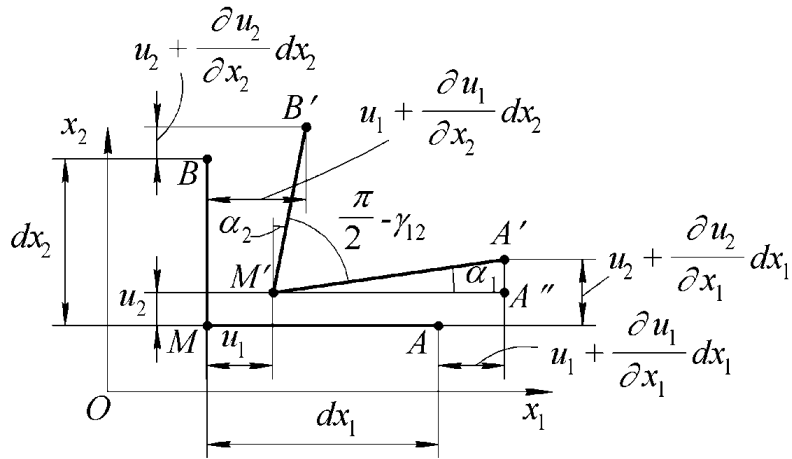


Рисунок 2.3 – К определению деформаций

Здесь принято  $\cos \alpha_1 \approx 1$ , поскольку угол поворота отрезка  $MA$  считается весьма малым. Подставив выражение для  $M'A'$  в формулу для относительного удлинения отрезка  $MA$ , получаем выражение

$$\varepsilon^* = \frac{\left( dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

которое совпадает с выражением (2.5) для  $\varepsilon_{11}$ . Следует отметить, что вследствие перемещения  $u_3$  отрезок  $MA$  после деформации будет в общем случае составлять некоторый угол с плоскостью  $x_1x_2$ . Но косинус этого угла в силу его малости можно считать равным единице, что позволяет не делать различия между длиной деформированного отрезка и его проекцией  $M'A'$  на плоскость  $x_1x_2$ . Аналогично можно показать, что  $\varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{33}$  есть относительные удлинения отрезков, параллельных соответственно осям  $x_2$  и  $x_3$ .

Далее, деформация сдвига  $\gamma_{12}$  в плоскости  $x_1x_2$  определяется как изменение прямого угла между отрезками  $dx_1$  и  $dx_2$ . Будем считать её положительной, когда угол уменьшается. Тогда

$$\gamma_{12} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Но

$$\alpha_1 \approx \sin \alpha_1 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{M'A'} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{(1 + \varepsilon_{11}) dx_1}.$$

Учитывая, что  $\varepsilon_{11} \ll 1$ , можно записать приближённое выражение

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Отсюда следует равенство

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}.$$

Таким образом, деформации сдвига равны удвоенным соответствующим компонентам (*сдвиговым компонентам*) тензора  $\varepsilon_{ij}$ . Тензор  $\varepsilon_{ij}$  называется *линейным тензором деформации*, а формулы (2.5) и (2.6) называются *формулами Коши*.

Задание одних только компонент  $\varepsilon_{ij}$  не определяет однозначно характера деформирования в данной точке тела. На рисунке 2.4 показаны два варианта деформирования в плоскости  $x_1x_2$ . В обоих вариантах деформация сдвига  $\gamma_{12} = \alpha$ , но они различаются жёстким поворотом бесконечно малого объёма тела в окрестности точки  $M$ .

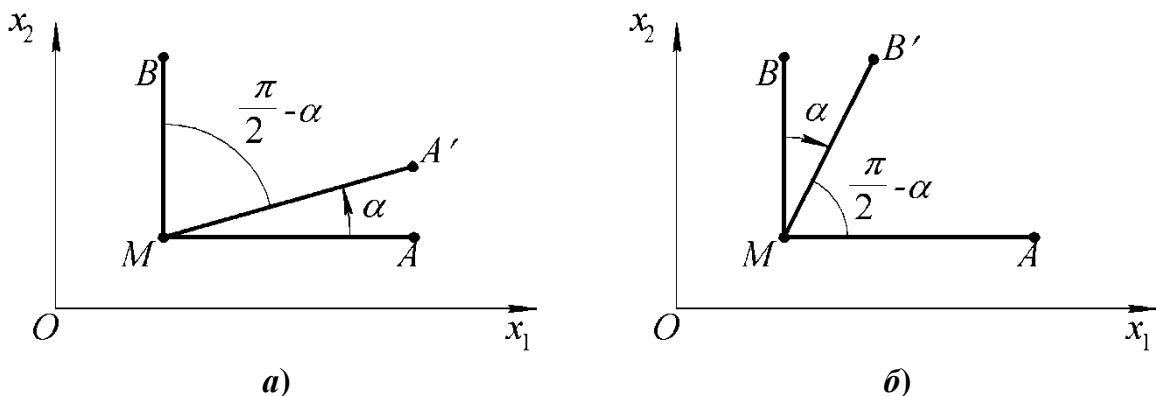


Рисунок 2.4 – Два варианта деформации сдвига в плоскости  $x_1x_2$

На рисунке 2.5,а показан общий случай, когда поворачиваются оба отрезка  $MA$  и  $MB$ . Такое деформирование можно представить как деформацию сдвига  $\gamma_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$  с одинаковыми углами поворота отрезков, равными  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ , плюс жёсткий поворот малого объёма тела относительно оси  $x_3$  на угол  $(\alpha_1 - \alpha_2)/2$ , как показано на рисунке 2.5,б. Но

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

так что этот поворот равен  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \omega_3$ .



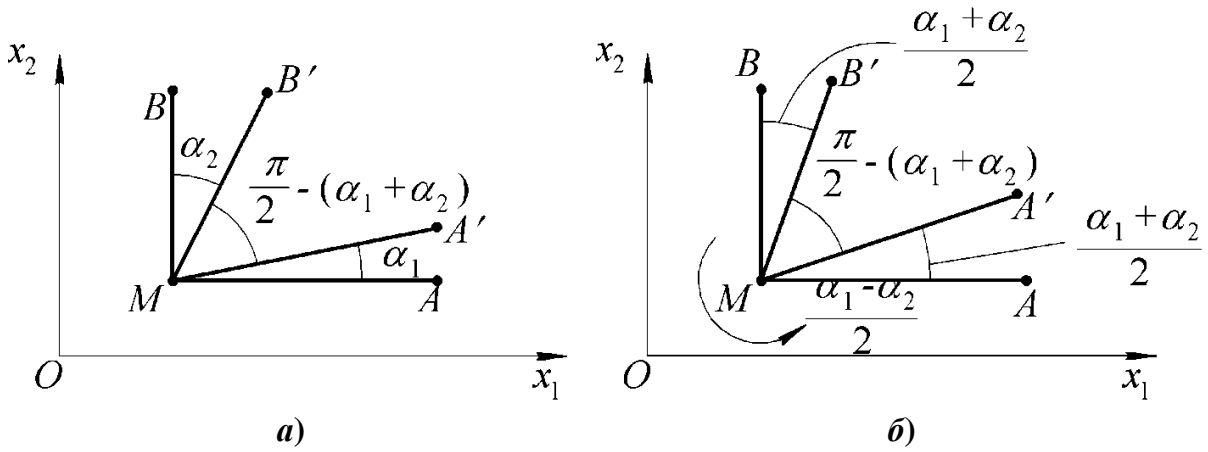


Рисунок 2.5 – Жёсткий поворот малого объёма относительно оси  $x_3$

Аналогично можно показать, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  есть жёсткие повороты бесконечно малого объёма в точке  $M$  относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Поворот  $\omega_i$  положителен, если при взгляде с положительного направления оси  $x_i$  он видится происходящим против часовой стрелки. Этим определяется выбор знаков в формулах (2.8). Тензор  $\omega_{ij}$  называется тензором малых поворотов, а вектор  $\vec{\omega}$  – вектором малых поворотов.

### 2.3 Нелинейный тензор деформации

Откажемся теперь от предположения о малости деформаций и углов поворота отрезков. Пусть  $ds$  – длина произвольно ориентированного бесконечно малого отрезка с компонентами  $dx_i$ . Квадрат его длины равен

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i dx_i. \quad (2.9)$$

Деформированный отрезок  $ds'$  имеет проекции  $dx'_i = dx_i + du_i$ , а квадрат его длины

$$ds'^2 = dx'_i dx'_i = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i) = dx_i dx_i + 2dx_i du_i + du_i du_i.$$

Так как согласно (2.1)  $du_i = u_{i,j} dx_j$ , с учётом (2.9) получим

$$ds'^2 = ds^2 + 2u_{i,j} dx_i dx_j + u_{i,j} dx_j \cdot u_{i,k} dx_k.$$

Заменим в последнем слагаемом немые индексы так, чтобы в нём содержалось произведение дифференциалов  $dx_i dx_j$  (индекс  $k$  заменяем на  $i$ , а  $i$  на  $k$ ), и найдём разность  $ds'^2 - ds^2$ :

$$ds'^2 - ds^2 = 2u_{i,j} dx_i dx_j + u_{k,i} u_{k,j} dx_i dx_j.$$

Первое слагаемое в правой части равенства преобразуем с учётом соотношения  $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ :

$$u_{i,j} dx_i dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_i dx_j = \varepsilon_{ij} dx_i dx_j + \omega_{ij} dx_i dx_j.$$

Второе слагаемое равно здесь нулю. В самом деле, обозначим его буквой  $A$  и выполним замену индексов ( $i$  на  $j$ , а  $j$  на  $i$ ). Учитывая, что  $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ , получим

$$A = \omega_{ij} dx_i dx_j = \omega_{ji} dx_j dx_i = -\omega_{ij} dx_i dx_j = -A.$$

Отсюда следует равенство  $2A = 0$ , что и доказывает утверждение.

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$ds'^2 - ds^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j + u_{k,i} u_{k,j} dx_i dx_j = 2 \left( \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \right) dx_i dx_j$$

или

$$ds'^2 - ds^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j. \quad (2.10)$$

Здесь через

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (2.11)$$

обозначен симметричный тензор второго ранга, называемый *нелинейным тензором деформации*.

С учётом формул (2.3) можно записать

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2.12)$$

или, в развёрнутом виде,

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]; \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]; \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right]; \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
e_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right); \\
e_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

## 2.4 Геометрический смысл нелинейного тензора деформации

Предположим, что ориентация отрезка  $ds$  в пространстве определяется единичным вектором  $\vec{n}$  с компонентами  $n_i$ . Последние являются, таким образом, направляющими косинусами отрезка, то есть

$$n_i = \frac{dx_i}{ds}, \tag{2.15}$$

где  $dx_i$  – проекции отрезка  $ds$  на координатные оси.

Обозначим через

$$\varepsilon^* = \frac{ds' - ds}{ds}$$

относительное удлинение отрезка  $ds$ , где  $ds'$  – его длина после деформации. Тогда

$$ds' = (1 + \varepsilon^*) ds,$$

откуда

$$ds'^2 = (1 + 2\varepsilon^* + \varepsilon^{*2}) ds^2.$$

Следовательно

$$ds'^2 - ds^2 = (2\varepsilon^* + \varepsilon^{*2}) ds^2.$$

С другой стороны,

$$ds'^2 - ds^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j,$$

так что имеем равенство

$$(2\varepsilon^* + \varepsilon^{*2}) ds^2 = 2e_{ij} dx_i dx_j.$$

Разделив его на  $ds^2$  и учитывая соотношение (2.15), получим

$$2\varepsilon^* + \varepsilon^{*2} = 2e_{ij} n_i n_j. \tag{2.16}$$

Пусть, в частности, отрезок  $ds$  параллелен оси  $x_1$ . Тогда  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = n_3 = 0$ , и из выражения (2.16) следует уравнение для определения деформации  $\varepsilon^*$

$$\varepsilon^{*2} + 2\varepsilon^* - 2e_{11} = 0, \tag{2.17}$$

корни которого

$$\varepsilon^* = -1 \pm \sqrt{1 + 2e_{11}}.$$

Отбрасывая корень, не имеющий физического смысла, находим

$$\varepsilon^* = \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1.$$

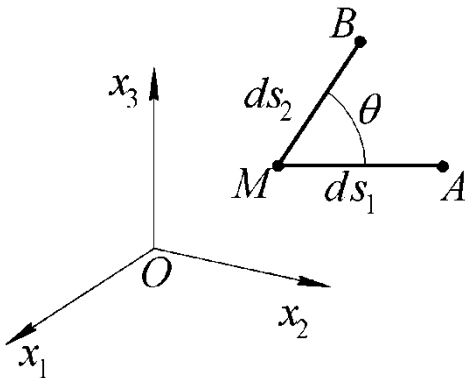
Таким образом, компонента  $e_{11}$  нелинейного тензора деформации характеризует относительную деформацию отрезка, ориентированного вдоль оси  $x_1$ .

В технических задачах мы имеем дело с малыми деформациями, тем более когда речь идёт о деформациях в пределах упругости. В этом случае  $\varepsilon^* \ll 1$  и  $\varepsilon^{*2} \ll \varepsilon^*$ . Вместо (2.17) можно тогда писать

$$2\varepsilon^* - 2e_{11} = 0,$$

то есть  $\varepsilon^* = e_{11}$ . Таким образом, можно считать, что  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  и  $e_{33}$  просто совпадают с относительными деформациями соответствующих отрезков, но в отличие от  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{33}$  здесь нет ограничений на углы поворота. Заметим, что если  $\varepsilon^* \ll 1$ , соотношение (2.16) принимает более простой вид

$$\varepsilon^* = e_{ij}n_i n_j. \quad (2.18)$$



**Рисунок 2.6 – Произвольно ориентированные отрезки в точке тела**

Рассмотрим далее в точке  $M$  два отрезка  $ds_1$  и  $ds_2$ , произвольно ориентированных в пространстве (рисунок 2.6). Направляющие косинусы отрезка  $ds_1$  обозначим через  $n_i$ , а отрезка  $ds_2$  – через  $l_i$ :

$$n_i = \frac{dx_i^{(1)}}{ds_1}; \quad l_i = \frac{dx_i^{(2)}}{ds_2},$$

где  $dx_i^{(1)}$  и  $dx_i^{(2)}$  – проекции на координатные оси отрезков  $ds_1$  и  $ds_2$  соответственно.

Косинус угла  $\theta$  между отрезками равен

$$\cos \theta = n_i l_i.$$

После деформации направления отрезков изменятся. Так,

$$n'_i = \frac{dx_i^{(1)'}}{ds'_1} = \frac{dx_i^{(1)} + du_i^{(1)}}{ds'_1}.$$

Обозначив через  $\varepsilon^{*(1)}$  и  $\varepsilon^{*(2)}$  относительные удлинения отрезков  $ds_1$  и  $ds_2$  и учитывая, что  $du_i = u_{i,j} dx_j$ , будем иметь

$$n'_i = \frac{dx_i^{(1)} + u_{i,j} dx_j^{(1)}}{(1 + \varepsilon^{*(1)}) ds_1} = \frac{n_i + u_{i,j} n_j}{1 + \varepsilon^{*(1)}}.$$

Аналогично, направляющие косинусы второго отрезка после деформации будут

$$l'_i = \frac{l_i + u_{i,j} l_j}{1 + \varepsilon^{*(2)}} = \frac{l_i + u_{i,k} l_k}{1 + \varepsilon^{*(2)}}.$$

Косинус угла  $\theta'$  между отрезками после деформации будет

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= n'_i l'_i = \frac{(n_i + u_{i,j} n_j)(l_i + u_{i,k} l_k)}{(1 + \varepsilon^{*(1)})(1 + \varepsilon^{*(2)})} = \\ &= \frac{n_i l_i + u_{i,k} n_i l_k + u_{i,j} n_j l_i + u_{i,j} u_{i,k} n_j l_k}{(1 + \varepsilon^{*(1)})(1 + \varepsilon^{*(2)})}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в числителе есть  $\cos \theta$ . Во втором и четвёртом слагаемых заменим немые индексы таким образом, чтобы в них, так же как и в третьем слагаемом, содержалось произведение  $n_j l_i$ . Это даёт

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + (u_{j,i} + u_{i,j} + u_{k,i} u_{k,j}) n_j l_i}{(1 + \varepsilon^{*(1)})(1 + \varepsilon^{*(2)})}$$

или

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + 2e_{ij} n_j l_i}{(1 + \varepsilon^{*(1)})(1 + \varepsilon^{*(2)})}.$$

Полученная формула позволяет в заданной точке тела определять углы между произвольными отрезками в деформированном состоянии по известным компонентам тензора  $e_{ij}$ .

Если, в частности, отрезок  $ds_1$  ориентирован вдоль оси  $x_1$ , а  $ds_2$  – вдоль  $x_2$ , то  $n_1 = 1$ ;  $l_2 = 1$ , а  $n_2 = n_3 = 0$ ;  $l_1 = l_3 = 0$ ;  $\cos \theta = 0$ . Тогда

$$\cos \theta' = \frac{2e_{12}}{(1 + \varepsilon^{*(1)})(1 + \varepsilon^{*(2)})}.$$

Но в этом случае  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$ , где  $\gamma_{12}$  – угол сдвига в плоскости  $x_1 x_2$ . Поэтому

$$\cos \theta' = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{12} \right) = \sin \gamma_{12}.$$

Следовательно

$$\gamma_{12} = \arcsin \frac{2e_{12}}{(1 + \varepsilon^{*(1)})(1 + \varepsilon^{*(2)})}.$$

Таким образом, величина  $e_{12}$  определяет деформацию сдвига в плоскости  $x_1x_2$ . Аналогичный смысл имеют  $e_{23}$  и  $e_{31}$ .

Итак, компоненты нелинейного тензора деформации  $e_{ij}$  имеют тот же смысл, что и компоненты линейного тензора  $\varepsilon_{ij}$ , но выражения (2.13) и (2.14) позволяют найти деформации при произвольных углах поворота бесконечно малых отрезков. Эти выражения используются в нелинейной теории упругости.

## 2.5 Тензор малой деформации

Воспользовавшись равенствами

$$u_{k,i} = \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}; \quad u_{k,j} = \varepsilon_{kj} + \omega_{kj},$$

формулу (2.11) для  $e_{ij}$  можно представить в следующем виде:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}).$$

Последнее равенство выражает компоненты нелинейного тензора деформации через компоненты линейного тензора деформации и тензора малых поворотов.

В случае весьма малых перемещений деформации и углы поворота являются малыми величинами одного порядка, и это позволяет пренебречь квадратами и произведениями компонент тензора деформации и тензора поворотов по сравнению с самими деформациями. Тогда имеем

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij}.$$

Именно этот случай играет основную роль при исследовании массивных тел, все размеры которых имеют одинаковый порядок. Но возможны ситуации, когда деформации малы, а углы поворота нельзя считать малыми того же порядка. Это может иметь место в случае гибких тел – стержней, пластин, оболочек (рисунок 2.7). В этом случае упрощённое соотношение для компонент  $e_{ij}$  записывается так:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\omega_{ki}\omega_{kj}. \quad (2.19)$$



**Рисунок 2.7 – Схема деформирования гибких тел**

Определяемый выражением (2.19) тензор называют *тензором малой деформации*. Соотношения (2.19) используются при расчёте гибких тел, а также в теории устойчивости упругих систем.

Мы в дальнейшем ограничимся случаем малых деформаций и малых углов поворота и в качестве тензора деформации будем использовать тензор  $\varepsilon_{ij}$ .

## 2.6 Уравнения совместности деформаций Сен-Венана

Формулы Коши (2.5) и (2.6) позволяют вычислить компоненты тензора деформации по известным перемещениям. Если же, наоборот, компоненты тензора деформации заданы как функции координат  $x_i$ , эти соотношения можно использовать в качестве уравнений для определения перемещений. Но тогда для нахождения трёх функций  $u_i$  будем иметь шесть соотношений Коши, и система уравнений может оказаться несовместной. Она будет совместной (то есть непротиворечивой) лишь тогда, когда шесть компонент  $\varepsilon_{ij}$  не являются независимыми функциями координат, а связаны между собой определёнными зависимостями. Чтобы установить эти зависимости, следует исключить перемещения из соотношений Коши.

Продифференцируем выражение для  $\varepsilon_{11}$  дважды по  $x_2$ , а  $\varepsilon_{22}$  – дважды по  $x_1$  и сложим результаты:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

Замечая, что в соответствии с первым равенством (2.6)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{12},$$

приходим к одному из искомым соотношений:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

С помощью круговой замены индексов можно записать ещё два подобных равенства.

Ещё три равенства установим, если, наоборот, исключим перемещения из соотношений (2.6) с помощью формул (2.5). Продифференцируем  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{23}$  и  $\varepsilon_{31}$

по координате с недостающим третьим индексом, после чего два из полученных результатов сложим, а третий вычтем. Например,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

После приведения подобных членов в правой части остаётся производная от перемещения  $u_1$  по координатам  $x_2$  и  $x_3$ . Если продифференцировать равенство по  $x_1$  и воспользоваться выражением для  $\varepsilon_{11}$ , то придём к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

С помощью круговой замены индексов можно записать ещё два подобных равенства.

Таким образом, мы получаем шесть уравнений, связывающих между собой компоненты тензора деформации и называемых уравнениями совместности деформаций Сен-Венана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Соотношения (2.20) являются следствием формул Коши. Подстановка последних в равенства (2.20) приводит к тождествам. Например, первое из уравнений (2.20) при подстановке в него формул Коши превращается в тождество вида



$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

Следовательно, при использовании формул Коши равенства (2.20) можно не принимать во внимание, поскольку они удовлетворяются в этом случае автоматически. Но если при решении какой-либо задачи вначале отыскиваются деформации, а по ним – перемещения, то деформации должны быть подчинены условиям (2.20), иначе определение перемещений станет невозможным.

Соотношениям (2.20) можно придать простой механический смысл. Если задать шесть независимых функций координат  $\varepsilon_{ij}$  и деформировать каждый из элементарных объёмов тела (рисунок 2.8,а) в соответствии с этими функциями, то из деформированных элементов невозможно будет, вообще говоря, составить сплошное непрерывное тело: элементы будут перекрывать друг друга, между ними образуются разрывы и т.д. (рисунок 2.8,б). И лишь в том случае, когда компоненты тензора деформации удовлетворяют соотношениям (2.20), деформированные элементы, плотно прилегая друг к другу, составят сплошное деформированное тело (рисунок 2.8,в). По этой причине равенства (2.20) называют также *уравнениями сплошности* или *уравнениями неразрывности*.

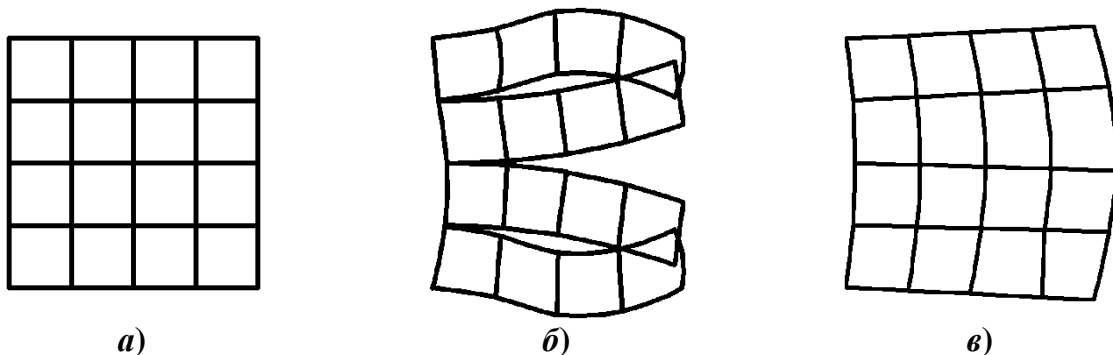


Рисунок 2.8 – Деформирование тела, разбитого на элементарные объёмы

## 2.7 Определение перемещений по компонентам тензора деформации

Предположим, что компоненты тензора деформации заданы как функции координат  $x_k$ . Пусть также известны перемещения и повороты в некоторой точке  $M$  тела. Требуется найти перемещения  $u_i$  произвольной точки  $N$ .

Соединим точки  $M$  и  $N$  какой-либо кривой, целиком лежащей внутри тела. На бесконечно малом участке кривой функция  $u_i$  получает приращение

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3$$

или

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = u_{i,k} dx_k, \quad (2.21)$$

где  $dx_k$  – приращение координат.

Интегрируя это равенство по выбранному пути от точки  $M$  до точки  $N$ , можно найти  $u_i$ . Но для этого нужно иметь значения компонент тензора  $u_{i,k}$ . Задача заключается в том, чтобы выразить  $u_{i,k}$  через  $\varepsilon_{ij}$ .

Проще всего обстоит дело с диагональными компонентами, поскольку

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11}; \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22}; \quad u_{3,3} = \varepsilon_{33}. \quad (2.22)$$

Остальные компоненты связаны с  $\varepsilon_{ij}$  соотношениями

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}, \quad (2.23)$$

в которые входят компоненты тензора поворотов  $\omega_{ij}$ . Однако производные  $\omega_{ij}$  по координатам могут быть представлены через компоненты  $\varepsilon_{ij}$ . В самом деле, учитывая, что

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}),$$

запишем выражение для производной от этого выражения по какой-либо координате  $x_k$ :

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}).$$

Добавим и вычтем в правой части величину  $\frac{1}{2}u_{k,ij}$ . Сгруппировав соответствующим образом слагаемые, получим

$$\omega_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{k,ij}) - \frac{1}{2}(u_{j,ik} + u_{k,ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})_{,j} - \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j})_{,i}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}); \quad \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}),$$

представим результат в искомом виде

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}.$$

Если теперь продифференцировать (2.23) по  $x_k$ , то с учётом полученного равенства будем иметь

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}.$$

Для нахождения  $u_{i,j}$  интегрируем далее это выражение:

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_M^N (\varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) dx_k. \quad (2.24)$$

Здесь  $u_{i,j}^0$  – значение  $u_{i,j}$  в точке  $M$ , которое мы считаем известным.

Теперь можно проинтегрировать (2.21):

$$u_i = u_i^0 + \int_M^N u_{i,k} dx_k. \quad (2.25)$$

В формулах (2.24) и (2.25) символ  $\int_M^N$  означает криволинейный интеграл,

вычисленный вдоль кривой, соединяющей точки  $M$  и  $N$ . В качестве кривой можно взять, в частности, ломаную линию, составленную из отрезков, параллельных координатным осям, и целиком лежащую внутри тела.

Перемещения не должны зависеть от пути интегрирования. Но криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования лишь в том случае, когда подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал. Именно это имеет место в формуле (2.25), поскольку  $u_{i,k} dx_k$  есть  $du_i$ . Однако с формулой (2.24) ситуация сложнее.

Полный дифференциал функции  $f(x_1, x_2, x_3)$  определяется равенством

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3.$$

Следовательно, выражение

$$F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = F_k dx_k$$

будет полным дифференциалом, если

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}; \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}; \quad F_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

где  $f$  – некоторая функция координат. Но тогда должны быть справедливы равенства

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}$$

или, короче,

$$F_{k,l} = F_{l,k}. \quad (2.26)$$

Данные равенства вытекают из требования, чтобы результат дифференцирования функции  $f$  по двум независимым переменным не зависел от порядка дифференцирования. Например,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Итак, если соотношение (2.26) удовлетворяется, то выражение  $F_k dx_k$  будет полным дифференциалом. Возвращаясь к формуле (2.24), где

$$F_k = \varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j},$$

закключаем, что интеграл не будет зависеть от пути интегрирования, если, в согласии с (2.26), выполняется условие

$$\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{jk,il} + \varepsilon_{ki,jl} = \varepsilon_{ij,lk} - \varepsilon_{jl,ik} + \varepsilon_{li,jk}$$

или

$$\varepsilon_{ki,jl} - \varepsilon_{jk,il} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{li,jk} = 0.$$

Формально здесь содержится 81 равенство, но независимых среди них оказывается всего шесть, и эти шесть равенств представляют собой не что иное как уравнения совместности деформаций Сен-Венана (2.20). Таким образом, мы снова убеждаемся, что выполнение уравнений совместности есть необходимое условие отыскания перемещений.

## 2.8 Пример нахождения перемещений по заданным компонентам тензора деформации

Рассмотрим призматический брус, отнесённый к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , причём ось  $x_3$  параллельна образующей. Начало координат поместим на торце и будем считать, что в точке  $M$ , которую мы совместим с началом координат, перемещения и повороты отсутствуют. Требуется найти перемещения произвольной точки  $N$ , если компоненты тензора деформации равны

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -bx_3; \quad \varepsilon_{33} = ax_3; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0,$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые постоянные.

Заданные компоненты  $\varepsilon_{ij}$  удовлетворяют уравнениям совместности деформаций (2.20), поэтому перемещения могут быть найдены.

Определим прежде всего компоненты тензора  $u_{i,j}$ . Три из них уже известны:

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11} = -bx_3; \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22} = -bx_3; \quad u_{3,3} = \varepsilon_{33} = ax_3.$$

Для нахождения остальных воспользуемся формулой (2.14)

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_M^N (\varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) dx_k .$$

В качестве пути интегрирования примем ломаную, звенья которой параллельны координатным осям (рисунок 2.8). Тогда

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_0^{x_1} (\varepsilon_{ij,1} - \varepsilon_{j1,i} + \varepsilon_{1i,j}) \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \\ + \int_0^{x_2} (\varepsilon_{ij,2} - \varepsilon_{j2,i} + \varepsilon_{2i,j}) \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} (\varepsilon_{ij,3} - \varepsilon_{j3,i} + \varepsilon_{3i,j}) dx_3 .$$

В частности,

$$u_{1,2} = u_{1,2}^0 + \int_0^{x_1} (\varepsilon_{12,1} - \varepsilon_{21,1} + \varepsilon_{11,2}) \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \\ + \int_0^{x_2} (\varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1} + \varepsilon_{21,2}) \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} (\varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2}) dx_3 = u_{1,2}^0 .$$

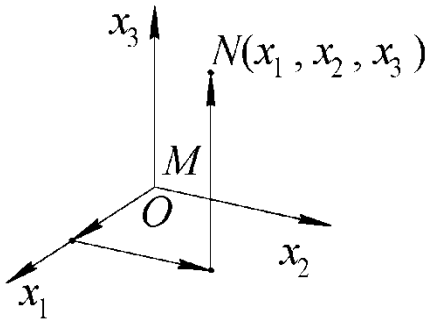


Рисунок 2.9 – Путь интегрирования

Полагая  $u_{1,2}^0 = 0$ , получим  $u_{1,2} = 0$ . Далее,

$$u_{1,3} = u_{1,3}^0 + \int_0^{x_1} (\varepsilon_{13,1} - \varepsilon_{31,1} + \varepsilon_{11,3}) \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \\ + \int_0^{x_2} (\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{32,1} + \varepsilon_{21,3}) \Big|_{x_3=0} dx_2 + \\ + \int_0^{x_3} (\varepsilon_{13,3} - \varepsilon_{33,1} + \varepsilon_{31,3}) dx_3 = u_{1,3}^0 - bx_1 .$$

Принимая  $u_{1,3}^0 = 0$ , будем иметь  $u_{1,3} = -bx_1$ .

Аналогично

$$u_{2,3} = u_{2,3}^0 + \int_0^{x_1} (\varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{12,3}) \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \\ + \int_0^{x_2} (\varepsilon_{23,2} - \varepsilon_{32,2} + \varepsilon_{22,3}) \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} (\varepsilon_{23,3} - \varepsilon_{33,2} + \varepsilon_{32,3}) dx_3 = u_{2,3}^0 - bx_2 .$$

Учитывая что  $u_{2,3}^0 = 0$ , находим отсюда  $u_{2,3} = -bx_2$ .

Три оставшиеся компоненты  $u_{i,j}$  можно установить, воспользовавшись формулами Коши

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).$$

Поскольку  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$ , имеем

$$u_{2,1} = -u_{1,2} = 0; \quad u_{3,2} = -u_{2,3} = bx_2; \quad u_{3,1} = -u_{1,3} = -bx_1.$$

Далее находим перемещения по формуле (2.25)

$$u_i = u_i^0 + \int_M^N u_{i,k} dx_k.$$

Учитывая, что  $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$  и используя тот же путь интегрирования, запишем

$$u_i = \int_0^{x_1} u_{i,1} \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \int_0^{x_{12}} u_{i,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{i,3} dx_3.$$

Тогда

$$u_1 = \int_0^{x_1} u_{1,1} \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \int_0^{x_{12}} u_{1,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{1,3} dx_3 = -bx_1 x_3;$$

$$u_2 = \int_0^{x_1} u_{2,1} \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \int_0^{x_{12}} u_{2,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{2,3} dx_3 = -bx_2 x_3;$$

$$u_3 = \int_0^{x_1} u_{3,1} \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \int_0^{x_{12}} u_{3,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{3,3} dx_3 = \frac{b}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{a}{2} x_3^2.$$

## 2.9 Поверхность деформации.

### Главные деформации

Пусть в некоторой точке  $M$  тела, отнесённого к декартовой системе координат  $x_k$ , известны компоненты  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформации. Выберем в этой точке произвольное направление, характеризуемое единичным вектором  $\vec{n}$  с компонентами  $n_i$ . Относительная деформация  $\varepsilon^*$  в данном направлении определяется формулой (2.18)

$$\varepsilon^* = e_{ij} n_i n_j,$$

справедливой при больших поворотах. Ограничиваясь случаем малых поворотов, заменим нелинейный тензор деформации  $e_{ij}$  линейным  $\varepsilon_{ij}$ . Тогда получим соотношение

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{ij} n_i n_j. \quad (2.27)$$

Совместив далее начало координат с точкой  $M$ , отложим по направлению вектора  $\vec{n}$  отрезок  $MN$  длиной

$$r = \frac{c}{\sqrt{|\varepsilon^*|}}, \quad (2.28)$$

где  $c$  – некоторая константа.

При вращении вектора  $\vec{n}$  точка  $N$  будет перемещаться по некоторой поверхности, называемой поверхностью деформации. Из (2.28) вытекает равенство

$$\varepsilon^* r^2 = \pm c^2,$$

где знак в правой части должен быть взят совпадающим со знаком  $\varepsilon^*$ . Подставив сюда выражение (2.27), получим

$$\varepsilon_{ij} n_i n_j r^2 = \pm c^2.$$

Поскольку

$$n_i r = x_i; \quad n_j r = x_j,$$

приходим к следующему равенству:

$$\varepsilon_{ij} x_i x_j = \pm c^2. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.29) представляет поверхность второго порядка. Коэффициентами уравнения являются компоненты тензора деформации:

$$\varepsilon_{11} x_1^2 + \varepsilon_{22} x_2^2 + \varepsilon_{33} x_3^2 + 2\varepsilon_{12} x_1 x_2 + 2\varepsilon_{23} x_2 x_3 + 2\varepsilon_{13} x_1 x_3 = \pm c^2.$$

Эта поверхность имеет главные оси  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , при записи в которых её уравнение не содержит слагаемых с произведениями координат:

$$\varepsilon_1 \xi_1^2 + \varepsilon_2 \xi_2^2 + \varepsilon_3 \xi_3^2 = \pm c^2.$$

Это означает, что в главных осях отсутствуют деформации сдвига. Следовательно, любую деформацию в данной точке тела можно представить как совокупность относительных удлинений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  в направлении главных осей, без искажения прямых углов между этими направлениями. Деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  называются *главными*, а соответствующие направления – *главными направлениями тензора деформации*.

Отыскание главных значений и главных направлений тензора деформации выполняется так же, как для тензора напряжений. Главные деформации являются корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + I_2(\varepsilon)\varepsilon - I_3(\varepsilon) = 0, \quad (2.30)$$

коэффициенты которого

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33};$$

$$I_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

называются соответственно *первым, вторым и третьим инвариантами тензора деформации*. Уравнение (2.30) имеет три вещественных корня  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Ориентация главных направлений тензора деформации находится так же, как и ориентация главных направлений тензора напряжений.

Заметим, что в главных осях выражения для инвариантов тензора деформации принимают вид

$$I_1(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

$$I_2(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1;$$

$$I_3(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (2.32)$$

## 2.10 Объёмная деформация

В окрестности некоторой точки  $M$  тела рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед, рёбра которого ориентированы вдоль главных направлений тензора деформации и имеют размеры  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ . Его объём до деформации

$$d\tau = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

а после деформации

$$d\tau' = d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = (1 + \varepsilon_1) d\xi_1 (1 + \varepsilon_2) d\xi_2 (1 + \varepsilon_3) d\xi_3 =$$

$$= (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Считая деформации малыми, отбросим слагаемые, содержащие их произведения. Тогда можно записать

$$d\tau' = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) d\tau.$$

Относительное изменение объёма, называемое *объёмной деформацией*, определим как изменение объёма, отнесённое к его первоначальному значению:

$$\theta = \frac{d\tau' - d\tau}{d\tau}.$$



Подставив сюда выражение для  $d\tau'$ , получим

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_1(\varepsilon_{ij}).$$

Как видим, первый инвариант тензора деформации есть не что иное как объёмная деформация. Исходя из выражения (2.31) для  $I_1(\varepsilon_{ij})$  можно записать

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}. \quad (2.33)$$

Поскольку

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3},$$

имеем также равенство

$$\theta = u_{i,i}. \quad (2.34)$$

## 3 ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ (ЗАКОН ГУКА)

### 3.1 Формулы Грина

При деформировании тела внешние силы совершают работу. Она частично расходуется на нагрев тела, а частично переходит в потенциальную энергию деформации. Количество тепла, входящее в энергетический баланс, для упругого тела ничтожно мало. Поэтому можно принять, что накапливаемая телом потенциальная энергия равна работе, затраченной на деформирование тела. При снятии внешней нагрузки совершается за счёт накопленной потенциальной энергии деформации отрицательная работа, в результате чего тело полностью восстанавливает первоначальную форму.

Обозначим через  $W$  удельную потенциальную энергию деформации, то есть потенциальную энергию, приходящуюся на единицу объёма. Потенциальная энергия деформации всего тела, которую мы обозначим через  $U$ , будет выражаться интегралом

$$U = \int_{\tau} W d\tau, \quad (3.1)$$

где  $\tau$  – объём тела.

Пусть под действием объёмных  $R_i$  и поверхностных  $p_i$  сил точки тела получают перемещения  $u_i$ , а в теле возникают деформации, характеризуемые компонентами тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ , и напряжения  $\sigma_{ij}$ . Подсчитаем приращение  $dU$  потенциальной энергии деформации при возрастании сил на бесконечно малую величину.

При возрастании внешних сил перемещения получают приращения  $du_i$ . На этих перемещениях объёмные силы совершают работу

$$\int_{\tau} (R_1 du_1 + R_2 du_2 + R_3 du_3) d\tau = \int_{\tau} R_i du_i d\tau,$$

а поверхностные силы – работу

$$\int_{\omega} (p_1 du_1 + p_2 du_2 + p_3 du_3) d\omega = \int_{\omega} p_i du_i d\omega,$$

где  $\omega$  – поверхность, ограничивающая объём  $\tau$ .

Сумма данных величин равна приращению потенциальной энергии деформации:

$$dU = \int_{\tau} R_i du_i d\tau + \int_{\omega} p_i du_i d\omega. \quad (3.2)$$

Введём обозначение

$$J = \int_{\omega} p_i du_i d\omega$$

и преобразуем данный интеграл следующим образом. На поверхности тела справедливы соотношения (1.9)

$$p_i = \sigma_{ji} n_j,$$

так что

$$J = \int_{\omega} \sigma_{ji} du_i n_j d\omega.$$

Воспользуемся далее формулой Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\omega} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) d\omega = \int_{\tau} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) d\tau$$

или

$$\int_{\omega} f_j n_j d\omega = \int_{\tau} f_{j,j} d\tau,$$

где  $f_j$  – произвольные дифференцируемые функции координат. Тогда

$$J = \int_{\tau} (\sigma_{ji} du_i)_{,j} d\tau = \int_{\tau} (\sigma_{ji,j} du_i + \sigma_{ji} du_{i,j}) d\tau.$$

Но

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

а

$$du_{i,j} = d\varepsilon_{ij} + d\omega_{ij},$$

где  $d\varepsilon_{ij}$  и  $d\omega_{ij}$  – приращения компонент тензора деформации и тензора поворотов при возрастании нагрузки.

Учитывая, что  $\sigma_{ji}$  – симметричный, а  $\omega_{ij}$  – кососимметричный тензоры и что, следовательно,

$$\sigma_{ji} d\omega_{ij} = 0,$$

будем иметь

$$J = \int_{\tau} [\sigma_{ji,j} du_i + \sigma_{ji} (d\varepsilon_{ij} + d\omega_{ij})] d\tau = \int_{\tau} (\sigma_{ji,j} du_i + \sigma_{ji} d\varepsilon_{ij}) d\tau.$$

Если подставить этот результат в равенство (3.2), получим

$$dU = \int_{\tau} (\sigma_{ji,j} + R_i) du_i d\tau + \int_{\tau} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau.$$

Приняв во внимание дифференциальные уравнения равновесия (1.37)

$$\sigma_{ji,j} + R_i = 0,$$

приходим к соотношению

$$dU = \int_{\tau} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau. \quad (3.3)$$

Так как  $dU = \int_{\tau} dW d\tau$ , где  $dW$  – приращение удельной энергии деформации, имеем равенство

$$\int_{\tau} dW d\tau = \int_{\tau} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\tau. \quad (3.4)$$

Его можно можно применить к любому объёму, выделенному из тела, откуда следует, что

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.5)$$

Таким образом, удельная энергия деформации определится как интеграл

$$W = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.6)$$

Работа, затрачиваемая на деформирование упругого тела, не зависит от порядка приложения сил, а определяется только их конечными значениями. Следовательно, величина  $W$  не должна зависеть от пути интегрирования, и подынтегральное выражение в (3.6) есть полный дифференциал. Поскольку равенство (3.5) выражает полный дифференциал,  $W$  можно рассматривать как функцию компонент тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Но тогда можно записать

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}. \quad (3.7)$$

Сопоставляя (3.5) и (3.7), приходим к соотношениям

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (3.8)$$

которые называются *формулами Грина*. Согласно (3.8) компоненты тензора напряжений равны частным производным от удельной потенциальной энергии деформаций по соответствующим компонентам тензора деформаций.

Выражение (3.6) имеет простой механический смысл, который удобно пояснить в случае одноосного деформирования. На рисунке 3.1 показана зависимость  $\sigma$  от  $\varepsilon$  в процессе нагружения тела, причём эта зависимость для общности принята нелинейной. Заштрихованная вертикально площадь под кривой выражается как интеграл

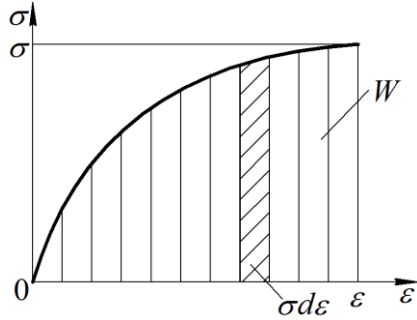


Рисунок 3.1 – Зависимость  $\sigma$  от  $\epsilon$

$$W = \int_{\epsilon=0}^{\epsilon} \sigma d\epsilon$$

и представляет работу напряжения  $\sigma$  на деформации  $\epsilon$ , производимую в единице объёма.

Подчеркнём, что при выводе формул Грина не предполагалось линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Они справедливы и для нелинейно-упругого тела.

### 3.2 Обобщённый закон Гука для анизотропного тела

Будем считать, что тело однородно в отношении упругих свойств, то есть его упругие характеристики не зависят от координат. Закон Гука устанавливает линейную зависимость между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора деформации. В самом общем виде зависимость может быть выражена так:

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (3.9)$$

Здесь  $\kappa_{ijkl}$  – некоторые упругие постоянные, число которых равно 81. Согласно обратному тензорному признаку постоянные  $\kappa_{ijkl}$  образуют тензор четвёртого ранга.

Упругие постоянные подчиняются определённым соотношениям симметрии, так что число независимых постоянных значительно меньше, чем 81. В самом деле, заменим в равенстве (3.9) индекс  $l$  на  $k$ , а  $k$  на  $l$  и учтём, что  $\epsilon_{lk} = \epsilon_{kl}$ :

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ijlk} \epsilon_{lk} = \kappa_{ijlk} \epsilon_{kl}.$$

Сопоставление полученного выражения с (3.9) показывает, что имеет место равенство

$$\kappa_{ijlk} = \kappa_{ijkl}. \quad (3.10)$$

Так как  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , то аналогичным образом устанавливаем справедливость соотношения

$$\kappa_{ijkl} = \kappa_{jikl}. \quad (3.11)$$

Далее, на основании (3.9) имеем равенство

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \kappa_{ijkl}.$$

Но согласно формулам Грина

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

так что

$$\kappa_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}.$$

Точно так же

$$\kappa_{klij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}.$$

Так как смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования, приходим к соотношению

$$\kappa_{ijkl} = \kappa_{klij}. \quad (3.12)$$

Для записи закона Гука наряду с (3.9) удобно использовать матричные обозначения. Введём матрицы-столбцы напряжений и деформаций:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}.$$

Из выражения (3.9) получаем с учётом (3.10)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \kappa_{ij11} \varepsilon_{11} + \kappa_{ij22} \varepsilon_{22} + \kappa_{ij33} \varepsilon_{33} + (\kappa_{ij12} \varepsilon_{12} + \kappa_{ij21} \varepsilon_{21}) + \\ &+ (\kappa_{ij23} \varepsilon_{23} + \kappa_{ij32} \varepsilon_{32}) + (\kappa_{ij31} \varepsilon_{31} + \kappa_{ij13} \varepsilon_{13}) = \\ &= \kappa_{ij11} \varepsilon_{11} + \kappa_{ij22} \varepsilon_{22} + \kappa_{ij33} \varepsilon_{33} + \kappa_{ij12} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + \kappa_{ij23} (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) + \kappa_{ij31} (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}). \end{aligned}$$

Так как

$$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \gamma_{12}; \quad \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} = \gamma_{23}; \quad \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13} = \gamma_{31},$$

приходим к соотношениям, которые можно свести к одному матричному равенству

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{1111} & \kappa_{1122} & \dots & \kappa_{1131} \\ \kappa_{2211} & \kappa_{2222} & \dots & \kappa_{2231} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{3111} & \kappa_{3122} & \dots & \kappa_{3131} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

В краткой форме его можно записать в виде

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon], \quad (3.14)$$

где  $[\kappa]$  – квадратная матрица упругих постоянных:

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} \kappa_{1111} & \kappa_{1122} & \dots & \kappa_{1131} \\ \kappa_{2211} & \kappa_{2222} & \dots & \kappa_{2231} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa_{3111} & \kappa_{3122} & \dots & \kappa_{3131} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

В силу соотношений (3.11) и (3.12) матрица  $[\kappa]$  симметрична. Поэтому из 36 содержащихся в ней упругих постоянных независимых только 21.

Таким образом, *упругие свойства материала в самом общем случае характеризуются 21 упругой постоянной*, которые должны определяться экспериментальным путём.

Если умножить равенство (3.14) на  $[\kappa]^{-1}$ , то получим связь между  $[\sigma]$  и  $[\varepsilon]$  в обратной форме:

$$[\varepsilon] = [\kappa]^{-1} [\sigma]$$

или

$$[\varepsilon] = [\Phi][\sigma], \quad (3.16)$$

где  $[\Phi]$  – симметричная квадратная матрица, обратная матрице  $[\kappa]$ :

$$[\Phi] = [\kappa]^{-1}.$$

В подробной записи соотношение (3.16) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1111} & & & & & & \\ \Phi_{2211} & \Phi_{2222} & & & & & \\ \Phi_{3311} & \Phi_{3322} & \Phi_{3333} & & & & \\ \Phi_{1211} & \Phi_{1222} & \Phi_{1233} & \Phi_{1212} & & & \\ \Phi_{2311} & \Phi_{2322} & \Phi_{2333} & \Phi_{2312} & \Phi_{2323} & & \\ \Phi_{3111} & \Phi_{3122} & \Phi_{3133} & \Phi_{3112} & \Phi_{3123} & \Phi_{3131} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

симметрично

Как уже говорилось, для линейно-упругих тел работа не зависит от способа нагружения, а определяется лишь конечными значениями нагрузок. Поэтому можно принять, что компоненты  $\varepsilon_{ij}$  в процессе нагружения одновременно возрастают от нуля до своих конечных значений, причём между ними всё время сохраняется неизменное соотношение. Если  $\varepsilon_{ij}$  – окончательные значения компонент, то их текущие значения  $\varepsilon'_{ij}$  могут быть представлены как

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} t,$$

где  $t$  – параметр, характеризующий уровень нагрузки и изменяющийся от 0 до 1. В соответствии с (3.9) для текущих значений компонент тензора напряжений  $\sigma'_{ij}$  будем иметь

$$\sigma'_{ij} = \kappa_{ijkl} \varepsilon'_{kl} = \kappa_{ijkl} \varepsilon_{kl} t = \sigma_{ij} t,$$

где  $\sigma_{ij}$  – окончательные значения компонент. Тогда по формуле (3.6) будем иметь

$$W = \int_{\varepsilon'_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \int_0^1 t dt,$$

откуда получаем

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (3.18)$$

При использовании матричных обозначений данное равенство запишется так:

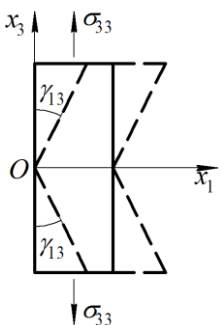
$$W = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon].$$

Упругие тела, для которых справедливы зависимости (3.13) или (3.17), содержащие 21 упругую постоянную, обладают *различными упругими свойствами в различных направлениях*. Так, например, при одноосном растяжении по направлению оси  $x_1$  (когда отлично от нуля только напряжение  $\sigma_{11}$ ) относительное удлинение вдоль оси  $x_1$  будет  $\varepsilon_{11} = \Phi_{1111} \sigma_{11}$ , тогда как при действии только  $\sigma_{22}$  соответствующее относительное удлинение  $\varepsilon_{22} = \Phi_{2222} \sigma_{22}$ . Кроме того, при действии нормальных напряжений в общем случае возникают деформации сдвига, а при действии касательных напряжений – относительные удлинения в осевых направлениях. Такие упругие тела называются *анизотропными*.

Обычно мы имеем дело с телами, которые обладают той или иной симметрией упругих свойств. Рассмотрим, например, тело, имеющее *плоскость упругой симметрии*. Поскольку тело однородно в отношении упругих свойств, каждая плоскость, параллельная ей, также будет плоскостью упругой симметрии.



Пусть плоскость  $x_1x_2$  является плоскостью упругой симметрии. Тогда при действии, скажем, напряжения  $\sigma_{33}$  деформация сдвига  $\gamma_{13}$  должна равняться нулю. В противном случае возникла бы картина деформирования, показанная на рисунке 3.2, что невозможно. Точно так же и деформация  $\gamma_{23}$  будет здесь отсутствовать. Аналогично можно заключить, что деформации  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{23}$  будут равны нулю и в случае действия напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  или  $\sigma_{12}$ , симметричных по отношению к плоскости упругой симметрии. Следовательно, зависимость (3.17) должна иметь вид



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1111} & & & & & & & & \\ & \Phi_{2211} & \Phi_{2222} & & & & & & \\ & \Phi_{3311} & \Phi_{3322} & \Phi_{3333} & & & & & \\ & \Phi_{1211} & \Phi_{1222} & \Phi_{1233} & \Phi_{1212} & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{2323} & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3123} & \Phi_{3131} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}$$

симметрично

**Рисунок 3.2 – Случай тела, имеющего плоскость упругой симметрии**

Как видим, в этом случае упругие свойства тела характеризуются всего 13 упругими постоянными.

В практических приложениях встречаются тела, имеющие три взаимно-ортогональные плоскости упругой симметрии. Такие тела называются *ортогонально-изотропными* или *ортотропными*. Если координатные плоскости совместить с плоскостями упругой симметрии, матрица  $[\Phi]$  будет иметь вид

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{1111} & \Phi_{1122} & \Phi_{1133} & & & & & & \\ \Phi_{2211} & \Phi_{2222} & \Phi_{2233} & & & & & & 0 \\ \Phi_{3311} & \Phi_{3322} & \Phi_{3333} & & & & & & \\ \hline & & & \Phi_{1212} & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & 0 & \Phi_{2323} & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & \Phi_{3131} & & & \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Независимых упругих постоянных в этом случае оказывается только девять. Их можно связать с техническими постоянными, представив зависимости деформаций от напряжений в форме

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\mu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\mu_{13}}{E_3} \sigma_{33};$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= -\frac{\mu_{21}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\mu_{23}}{E_3}\sigma_{33}; \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\mu_{31}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\mu_{32}}{E_2}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33}; \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}; \quad \gamma_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23}; \quad \gamma_{31} = \frac{1}{G_{31}}\sigma_{31},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где  $E_i$  – нормальный модуль упругости в направлении оси  $x_i$ ;  $G_{ij}$  – модуль сдвига в плоскости координат  $x_i x_j$ ;  $\mu_{ij}$  – коэффициент поперечной деформации по оси  $x_i$  при растяжении вдоль оси  $x_j$ . Шесть коэффициентов  $\mu_{ij}$  не являются независимыми величинами. Симметрия матрицы  $[\Phi]$  требует выполнения равенств

$$\frac{\mu_{12}}{E_2} = \frac{\mu_{21}}{E_1}; \quad \frac{\mu_{23}}{E_3} = \frac{\mu_{32}}{E_2}; \quad \frac{\mu_{31}}{E_1} = \frac{\mu_{13}}{E_3}. \tag{3.21}$$

Таким образом, для ортотропного тела матрица  $[\Phi]$  может быть представлена в виде

$$[\Phi] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
\frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{12}}{E_2} & -\frac{\mu_{13}}{E_3} & & & \\
-\frac{\mu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{23}}{E_3} & & & \\
-\frac{\mu_{31}}{E_1} & -\frac{\mu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\
\hline
& & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\
& 0 & & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\
& & & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}}
\end{array} \right]. \tag{3.22}$$

### 3.3 Закон Гука для изотропного тела

Особо остановимся на случае *изотропного тела*, у которого *упругие свойства одинаковы во всех направлениях*. Для него

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_{31} = \mu_{13} = \mu, \quad G_{12} = G_{23} = G_{31} = G,$$

где  $E$  – нормальный модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $G$  – модуль сдвига. При этом из трёх упругих постоянных независимых здесь только две, поскольку справедливо равенство

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.23)$$

Формулы закона Гука для изотропного тела имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22} - \mu\sigma_{33}); \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \mu\sigma_{33}); \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_{11} - \mu\sigma_{22} + \sigma_{33}); \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{G}\sigma_{12} = \frac{2(1 + \mu)}{E}\sigma_{12}; \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{G}\sigma_{23} = \frac{2(1 + \mu)}{E}\sigma_{23}; \\ \gamma_{31} &= \frac{1}{G}\sigma_{31} = \frac{2(1 + \mu)}{E}\sigma_{31}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Следовательно, матрица  $[\Phi]$  в этом случае выглядит так:

$$[\Phi] = \frac{1}{E} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1 & -\mu & & & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & & & \\ \hline & & & 2(1 + \mu) & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 2(1 + \mu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1 + \mu) \end{array} \right]. \quad (3.25)$$

Заметим, что если координатные оси  $x_i$  совместить с главными осями тензора напряжений, будем иметь  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ . Из формул (3.24) следует тогда, что деформации сдвига  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  будут также нулевыми. Это означает, что данные оси являются одновременно главными осями тензора деформации. Таким образом, в случае изотропного тела главные оси тензоров напряжений и деформации совпадают.

Представим соотношения (3.24) в тензорной форме. Преобразуем для этого выражение для  $\varepsilon_{11}$  следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{11} + \mu \sigma_{11} - \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{11} - \frac{\mu}{E} \Sigma,$$

где обозначено

$$\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

Так как  $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ , формулу (3.24) для  $\gamma_{12}$  можно заменить равенством

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{12}.$$

Аналогично выразим и остальные компоненты тензора деформации через  $\sigma_{ij}$ . В итоге придём к следующей *тензорной записи закона Гука для изотропного тела*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{E} \Sigma, \quad (3.26)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Получим далее обратную форму закона Гука, выразив  $\sigma_{ij}$  через  $\varepsilon_{ij}$ . Сложим прежде всего первые три равенства (3.24):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\mu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] = \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma. \end{aligned}$$

Но величина  $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  есть объёмная деформация, так что мы приходим к соотношению

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma. \quad (3.27)$$

Если положить  $\Sigma = 3\sigma_0$ , где  $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$  – среднее напряжение в данной точке тела, то равенство (3.27) может быть представлено в виде

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_0$$

или

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (3.28)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (3.29)$$

Соотношение (3.28), связывающее объёмную деформацию со средним напряжением, называют *законом упругого изменения объёма*, а упругую постоянную  $K$  – *объёмным модулем упругости*.

Возвращаясь к формуле (3.26), подставим в неё вытекающее из (3.27) соотношение  $\Sigma = \frac{E}{1-2\mu}\theta$ . В результате получим равенство

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\theta,$$

из которого и устанавливаем искомую зависимость  $\sigma_{ij}$  от компонент тензора деформации:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\theta.$$

Полученный результат принято записывать в форме

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\theta, \quad (3.30)$$

где введена ещё одна упругая постоянная

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}. \quad (3.31)$$

Равенство (3.30) выражает так называемый *закон Гука в форме Ламе*, а  $G$  и  $\lambda$  называют *упругими постоянными Ламе*. Заметим, что вытекающая из (3.30) матрица  $[\kappa]$  имеет вид

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & | & & \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & | & 0 & \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & | & & \\ \hline & & & | & G & 0 & 0 \\ & & & | & 0 & G & 0 \\ & & & | & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Если подставить (3.30) в формулу (3.13), то придём к выражению для  $W$  в виде явной функции компонент  $\varepsilon_{ij}$ :

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\theta)\varepsilon_{ij} = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}\lambda\theta\varepsilon_{ij}.$$

Но  $\delta_{ij}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii} = \theta$ , так что окончательно получим

$$W = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\theta^2. \quad (3.33)$$

Отсюда видно, что при выполнении закона Гука  $W$  есть величина существенно положительная.

Можно также представить  $W$  как функцию компонент  $\sigma_{ij}$ , внося соотношение (3.26) в (3.13):

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{E} \Sigma \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{ij} \frac{\mu}{E} \Sigma \right).$$

Учитывая, что  $\delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii} = \Sigma$ , будем иметь выражение

$$W = \frac{1}{2E} \left[ (1+\mu) \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \mu \Sigma^2 \right]. \quad (3.34)$$

## 4 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 4.1 Схемы решения задач теории упругости

В общем случае для решения задачи теории упругости необходимо найти шесть компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , шесть компонент тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  и три компоненты вектора перемещений  $u_i$  – всего 15 неизвестных функций координат. Для их отыскания мы располагаем тремя дифференциальными уравнениями равновесия

$$\sigma_{ji,j} + R_i = 0,$$

шестью геометрическими соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

и шестью формулами закона Гука, которые для изотропного тела записываются в виде

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\theta$$

или в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\mu}{E}\Sigma.$$

Итого мы имеем 15 уравнений, так что система уравнений получается замкнутой. Особняком стоят уравнения совместности деформаций. При использовании формул Коши они, как уже говорилось, удовлетворяются автоматически. Их назначение при решении задач теории упругости станет понятным позже.

Искомые функции должны быть подчинены граничным условиям, то есть условиям закрепления и нагружения на поверхности тела. В общем случае поверхность  $\omega$  может быть представлена в виде суммы двух составляющих:

$$\omega = \omega_u + \omega_p.$$

Здесь  $\omega_u$  – та часть поверхности, где тело закреплено или, в более общем случае, где заданы перемещения. Через  $\omega_p$  обозначена остальная часть поверхности, которая свободна от закреплений и на которой, следовательно, заданы поверхностные нагрузки.

Таким образом, на  $\omega_u$  должны быть удовлетворены геометрические (или кинематические) граничные условия

$$u_i = u_i^*,$$

где  $u_i^*$  – заданные перемещения. На  $\omega_p$  должны выполняться статические граничные условия

$$\sigma_{ji}n_j = p_i.$$

Возможны два основных пути решения задач теории упругости – „в перемещениях“ либо „в напряжениях“. В первом случае в качестве основных неизвестных функций выступают перемещения  $u_i$ . Зная их, можно найти  $\varepsilon_{ij}$  по формулам Коши, а затем по закону Гука – напряжения  $\sigma_{ij}$ . Для нахождения функций  $u_i$  мы располагаем тремя дифференциальными уравнениями равновесия, которые следует представить как уравнения относительно перемещений.

В другом варианте за основные неизвестные принимаются напряжения. Для их определения нужно воспользоваться прежде всего уравнениями равновесия. В дополнение к ним должны быть привлечены уравнения совместности деформаций, записанные через напряжения. Отыскание перемещений требует в этом случае интегрирования соотношений Коши, что может быть осуществлено благодаря выполнению уравнений совместности.

Наряду с прямой задачей об отыскании при заданных условиях нагружения функций  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  возможна и обратная постановка о нахождении внешних нагрузок для заданного напряжённого или деформированного состояния тела. Обратная задача решается значительно проще, чем прямая. В некоторых случаях используется так называемый полуобратный метод Сен-Венана. В соответствии с ним частью компонент  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  или  $\sigma_{ij}$  задаются из тех или иных соображений, остальные же неизвестные функции находят так, чтобы удовлетворялись все уравнения теории упругости.

Строго говоря, решение задачи теории упругости требует задания закона изменения поверхностных нагрузок  $p_i$ . Но во многих случаях, связанных с практическими приложениями, точное распределение поверхностных сил установить невозможно, и мы располагаем лишь равнодействующими нагрузок – как, скажем, в случае действия силы на конце консольной балки или в случае действия момента, скручивающего стержень. В этих ситуациях существенное упрощение задачи достигается путём отказа от задания детального распределения локальных нагрузок. Такую возможность даёт *принцип Сен-Венана об упругой равнозначности статически эквивалентных нагрузок*, заключающийся в следующем. Если систему сил, действующих на небольшую часть поверхности, заменить другой статически эквивалентной ей системой, действующей на ту же часть поверхности, то это окажет влияние на напряжённое состояние лишь в



малой области тела возле нагруженного участка поверхности, в остальной же части тела напряжённое состояние почти не изменится. Данный принцип можно сформулировать иначе как *принцип локальности действия самоуравновешенной системы сил*, приложенных к небольшому участку поверхности тела. Такая система сил практически не вызывает напряжений вдали от места её приложения. При использовании принципа Сен-Венана неизвестный характер действительного распределения нагрузок заменяют таким статически эквивалентным, при котором решение получается наиболее простым.

## 4.2 Теорема единственности

Покажем, что если получено решение задачи, удовлетворяющее всем уравнениям теории упругости, то оно единственно.

Пусть имеются два решения некоторой задачи теории упругости. Первое характеризуется компонентами  $u'_i$ ,  $\varepsilon'_{ij}$ ,  $\sigma'_{ij}$ , удовлетворяющими уравнениям равновесия

$$\sigma'_{ji,j} + R_i = 0, \quad (4.1)$$

геометрическим соотношениям

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(u'_{i,j} + u'_{j,i}) \quad (4.2)$$

и закону Гука, а также граничным условиям

$$u'_i = u_i^* \text{ на } \omega_u; \quad (4.3)$$

$$\sigma'_{ji}n_j = p_i \text{ на } \omega_p. \quad (4.4)$$

Второе решение характеризуется компонентами  $u''_i$ ,  $\varepsilon''_{ij}$ ,  $\sigma''_{ij}$ , и для него справедливы равенства

$$\sigma''_{ji,j} + R_i = 0; \quad (4.5)$$

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{1}{2}(u''_{i,j} + u''_{j,i}); \quad (4.6)$$

$$u''_i = u_i^* \text{ на } \omega_u; \quad (4.7)$$

$$\sigma''_{ji}n_j = p_i \text{ на } \omega_p, \quad (4.8)$$

причём  $\varepsilon''_{ij}$  и  $\sigma''_{ij}$  также связаны между собой законом Гука.

Обозначим через  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  разности

$$u_i = u'_i - u''_i; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}; \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}.$$

Для этих величин справедливы равенства, получаемые вычитанием соотношений (4.5)...(4.8) из (4.1)...(4.4). Внутри тела

$$\sigma_{ji,j} = 0; \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (4.10)$$

на поверхности тела

$$u_i = 0 \text{ на } \omega_u; \quad (4.11)$$

$$\sigma_{ji}n_j = 0 \text{ на } \omega_p; \quad (4.12)$$

при этом  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  связаны между собой законом Гука.

Умножим равенство (4.9) на  $u_i$  и проинтегрируем результат по объёму тела:

$$\int_{\tau} \sigma_{ji,j} u_i d\tau = 0. \quad (4.13)$$

Воспользуемся далее тождеством

$$\sigma_{ji,j} u_i = (\sigma_{ji} u_i)_{,j} - \sigma_{ji} u_{i,j}.$$

Тензор  $u_{i,j}$  можно представить как сумму

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}.$$

Учитывая, что  $\sigma_{ij}$  – симметричный, а  $\omega_{ij}$  – кососимметричный тензоры и что, следовательно,

$$\sigma_{ji} \omega_{ij} = 0,$$

равенство (4.13) перепишем в виде

$$\int_{\tau} (\sigma_{ji} u_i)_{,j} d\tau - \int_{\tau} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau = 0. \quad (4.14)$$

Первое слагаемое в левой части полученного равенства заменим поверхностным интегралом по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\tau} (\sigma_{ji} u_i)_{,j} d\tau = \int_{\omega} \sigma_{ji} u_i n_j d\omega = \int_{\omega_u} \sigma_{ji} u_i n_j d\omega + \int_{\omega_p} \sigma_{ji} u_i n_j d\omega.$$

Данное выражение равно нулю в силу условий (4.11) и (4.12) на поверхности тела.

Таким образом, равенство (4.14) сводится к соотношению

$$\int_{\tau} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau = 0.$$

Величина

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

есть удельная потенциальная энергия деформации тела, имеющего напряжённо-деформированное состояние с компонентами  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$ . Мы приходим к заключению, что

$$2 \int_{\tau} W d\tau = 0.$$

Так как величина  $W$  существенно положительна, это равенство означает, что  $W = 0$  в каждой точке тела. Но это возможно лишь тогда, когда  $\sigma_{ij} = 0$  и  $\varepsilon_{ij} = 0$ . Следовательно,

$$\sigma''_{ij} = \sigma'_{ij}; \quad \varepsilon''_{ij} = \varepsilon'_{ij},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если тело не закреплено, то перемещения  $u''_i$  и  $u'_i$  могут отличаться друг от друга смещением и поворотом тела как жёсткого целого, что не имеет принципиального значения.

### 4.3 Решение задачи теории упругости в перемещениях

Остановимся подробнее на решении задачи теории упругости в перемещениях. Как уже сказано выше, для отыскания перемещений нужно исходить из дифференциальных уравнений равновесия

$$\sigma_{ji,j} + R_i = 0.$$

Выразим напряжения через перемещения, воспользовавшись законом Гука и формулами Коши:

$$\sigma_{ji} = 2G\varepsilon_{ji} + \delta_{ij}\lambda\theta = 2G\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}\lambda\theta, \quad (4.15)$$

где  $\theta = u_{i,i}$ .

Подстановка этого соотношения в уравнения равновесия даёт

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \delta_{ij}\lambda\theta_{,j} + R_i = 0.$$

Но

$$u_{j,ij} = (u_{j,j})_{,i} = \theta_{,i},$$

а

$$u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} = \nabla^2 u_i,$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Учитывая также, что

$$\delta_{ij}\theta_{,j} = \theta_{,i},$$

приходим к равенству

$$G(\theta_{,i} + \nabla^2 u_i) + \lambda \theta_{,i} + R_i = 0$$

или, окончательно,

$$G\nabla^2 u_i + (G + \lambda)\theta_{,i} + R_i = 0. \quad (4.16)$$

Полученное равенство выражает три уравнения равновесия в перемещениях, называемых *уравнениями Ламе*.

Решение уравнений Ламе должно на  $\omega_u$  удовлетворять кинематическим условиям

$$u_i = u_i^*,$$

а на  $\omega_p$  – статическим условиям

$$\sigma_{ji}n_j = p_i.$$

Последние также следует выразить через перемещения. В соответствии с равенствами (4.15) запишем

$$G(u_{j,i} + u_{i,j})n_j + \delta_{ij}\lambda\theta n_j = p_i.$$

Направляющие косинусы  $n_j$  нормали к поверхности  $\omega$  равны

$$n_j = \frac{\partial x_j}{\partial n}.$$

Поэтому

$$u_{i,j}n_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial n}.$$

Данное выражение есть производная по нормали  $\partial u_i / \partial n$ . С учётом этого статические граничные условия в перемещениях могут быть записаны так:

$$G \frac{\partial u_i}{\partial n} + G u_{j,i} n_j + \lambda \theta n_i = p_i \text{ на } \omega_p.$$

#### 4.4 Решение задачи теории упругости в напряжениях

Для решения задачи теории упругости в напряжениях необходимо к уравнениям равновесия присовокупить уравнения совместности деформаций,

записанные через напряжения. Можно было бы взять за основу уравнения совместности в форме Сен-Венана, но удобнее вывести требуемые соотношения путём исключения перемещений из уравнений Ламе.

Разделим равенство (4.16) на  $G$ . Так как

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad \lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

имеем

$$\frac{G+\lambda}{G} = 1 + \frac{\lambda}{G} = 1 + \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{2(1+\mu)}{E} = \frac{1}{1-2\mu}.$$

Тогда равенство (4.16) может быть записано в виде

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\mu} \theta_{,i} = -\frac{2(1+\mu)}{E} R_i.$$

Продифференцируем его далее по координате  $x_j$ :

$$\nabla^2 u_{i,j} + \frac{1}{1-2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{2(1+\mu)}{E} R_{i,j}. \quad (4.17)$$

Меняя местами индексы  $i$  и  $j$ , можно написать также

$$\nabla^2 u_{j,i} + \frac{1}{1-2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{2(1+\mu)}{E} R_{j,i}.$$

Если сложить два последних равенства, получим соотношение

$$\nabla^2 (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2}{1-2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{2(1+\mu)}{E} (R_{i,j} + R_{j,i}).$$

Учтём, что

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\varepsilon_{ij}.$$

В результате приходим после деления на 2 к равенству

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{1-2\mu} \theta_{,ij} = -\frac{1+\mu}{E} (R_{i,j} + R_{j,i}).$$

Теперь выразим  $\varepsilon_{ij}$  и  $\theta$  через напряжения, пользуясь соотношениями закона Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{E} \Sigma; \quad \theta = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma.$$

Тогда получим

$$\frac{1+\mu}{E} \nabla^2 \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{E} \nabla^2 \Sigma + \frac{1}{1-2\mu} \frac{1-2\mu}{E} \Sigma_{,ij} = -\frac{1+\mu}{E} (R_{i,j} + R_{j,i}).$$

Отсюда вытекает равенство

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu} \Sigma_{,ij} = -(R_{i,j} + R_{j,i}) + \delta_{ij} \frac{\mu}{1+\mu} \nabla^2 \Sigma. \quad (4.18)$$

Полученный результат можно упростить, выразив величину  $\nabla^2 \Sigma$  через объёмные силы. Чтобы этого добиться, положим  $j=i$  в равенстве (4.17):

$$\nabla^2 u_{i,i} + \frac{1}{1-2\mu} \theta_{,ii} = -\frac{2(1+\mu)}{E} R_{i,i}.$$

Так как

$$u_{i,i} = \theta; \quad \theta_{,ii} = \nabla^2 \theta,$$

отсюда следует соотношение

$$\nabla^2 \theta + \frac{1}{1-2\mu} \nabla^2 \theta = -\frac{2(1+\mu)}{E} R_{i,i}$$

или

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \nabla^2 \theta = -\frac{2(1+\mu)}{E} R_{i,i}.$$

Воспользовавшись далее формулой

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma,$$

после сокращения на 2 будем иметь выражение

$$\frac{1-\mu}{E} \nabla^2 \Sigma = -\frac{1+\mu}{E} R_{i,i},$$

то есть

$$\nabla^2 \Sigma = -\frac{1+\mu}{1-\mu} R_{i,i}.$$

Подстановка этого результата в (4.18) приводит окончательно к равенству

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu} \Sigma_{,ij} = -(R_{i,j} + R_{j,i}) - \delta_{ij} \frac{\mu}{1-\mu} R_{k,k}. \quad (4.19)$$

Данное равенство выражает шесть уравнений совместности, называемых *уравнениями Бельтрами-Мичела*. В частном случае, когда объёмные силы постоянны или отсутствуют, будем иметь более простое соотношение

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu} \Sigma_{,ij} = 0. \quad (4.20)$$

В подробной записи это соответствует следующим шести уравнениям:

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1^2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_{22} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_2^2} &= 0; \\
\nabla^2 \sigma_{33} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_3^2} &= 0; \\
\nabla^2 \sigma_{12} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0; \\
\nabla^2 \sigma_{23} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0; \\
\nabla^2 \sigma_{31} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_3 \partial x_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

В таком виде уравнения совместности носят название *уравнений Бельтрами*.

## 4.5 Простейшие задачи теории упругости

Простейшими называют такие задачи теории упругости, в которых компоненты тензоров деформации и напряжений являются линейными функциями координат. Остановимся на двух задачах подобного типа – о растяжении и о чистом изгибе призматического бруса.

### 4.5.1 Растяжение призматического бруса

Брус постоянного сечения отнесён к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой находится в центре тяжести нижнего сечения, а ось  $x_3$  параллельна образующей (рисунок 4.1,а). Брус испытывает действие двух равных и противоположно направленных сил, приложенных к торцевым поверхностям вдоль оси  $x_3$ . Требуется найти напряжения, деформации и перемещения в произвольной точке.

Воспользуемся полуобратным методом, приняв для произвольной точки бруса

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0; \quad \sigma_{33} = a + bx_3, \tag{4.22}$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые постоянные.

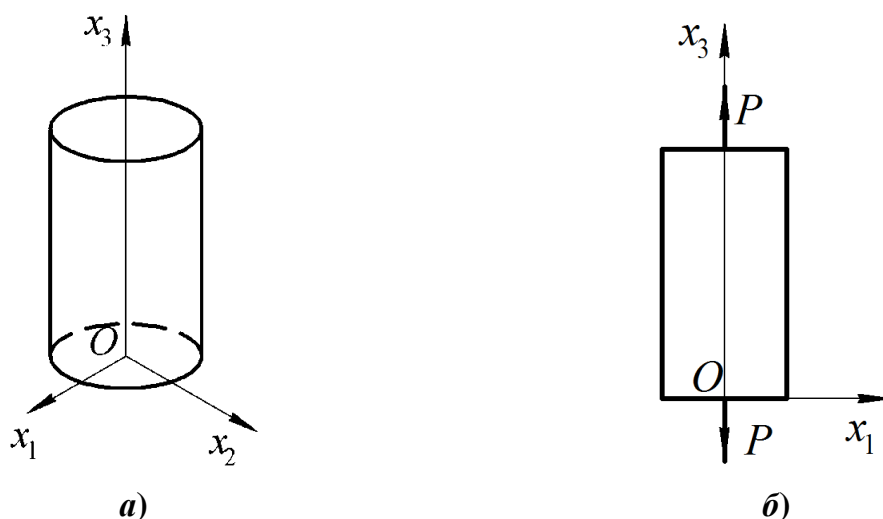


Рисунок 4.1 – Брус постоянного сечения при растяжении

Подставим данные соотношения в дифференциальные уравнения равновесия (1.36). Поскольку объёмные силы отсутствуют, первое уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0$$

и удовлетворяется тождественно. То же самое относится и ко второму уравнению (1.36). Третье уравнение

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

после подстановки в него принятых выражений для  $\sigma_{ij}$  приводит к равенству

$$b = 0.$$

Таким образом, напряжение  $\sigma_{33} = a$ , то есть оно одинаково во всех точках бруса.

Уравнения Бельтрами удовлетворяются в данном случае тождественно, и остаётся проверить выполнение граничных условий. На боковой поверхности, где  $n_3 = 0$  и где нагрузки отсутствуют, статические условия (1.10)

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = p_1;$$

$$\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = p_2;$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = p_3$$

выполняются тождественно. На торцевых поверхностях, где  $n_1 = n_2 = 0$ , а  $n_3 = \pm 1$ , мы имеем  $p_1 = p_2 = 0$ , и первые два условия также удовлетворяются. Третье соотношение приводит к равенствам

$$\sigma_{33} = \pm p_3.$$



Эти равенства будут удовлетворяться, если внешние силы  $P$  приложены в виде равномерной нагрузки  $p_3 = \pm\sigma_{33}$ . Знак плюс относится к верхнему торцу, для которого  $n_3 = 1$ , а минус – к нижнему, где  $n_3 = -1$ . Результирующая распределённой нагрузки должна равняться заданной силе  $P$ :

$$P = \int_A \sigma_{33} dA = \sigma_{33} A,$$

где  $A$  – площадь сечения бруса. Отсюда находим, что  $\sigma_{33} = P/A$ , чем и завершается расчёт напряжений.

Полученное решение, строго говоря, справедливо лишь в случае равномерного распределения сил  $P$  по торцевым поверхностям бруса. Но им можно пользоваться и при ином характере центрального нагружения, поскольку в соответствии с принципом Сен-Венана отличие от данного решение должно затрагивать лишь небольшие участки бруса возле его торцев, имеющие длину порядка наибольшего размера поперечного сечения.

Компоненты тензора деформации находим теперь по закону Гука:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Далее определяем перемещения. Так как компоненты  $\varepsilon_{ij}$  постоянны, все производные  $\varepsilon_{ij,k} = 0$ . Примем, что в начале координат перемещения и повороты отсутствуют:

$$u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0; \quad u_{i,j}^0 = 0 \quad (j \neq i).$$

Совмещая точку  $M$  с началом координат, в произвольной точке  $N$  получим для  $j \neq i$

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_M^N (\varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) dx_k = 0.$$

Отличными от нуля будут лишь следующие компоненты тензора  $u_{i,j}$ :

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{33}; \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{33}; \quad u_{3,3} = \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E}.$$

По формуле

$$u_i = u_i^0 + \int_M^N u_{i,j} dx_j$$

вычисляем компоненты вектора перемещений. В качестве пути интегрирования возьмём ломаную, составленную из прямолинейных отрезков, параллельных координатным осям, как это делалось ранее. В итоге при  $u_i^0 = 0$  получим

$$u_1 = \int_0^{x_1} u_{1,1} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_3=0}} dx_1 = -\frac{\mu\sigma_{33}}{E} x_1;$$

$$u_2 = \int_0^{x_2} u_{2,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 = -\frac{\mu\sigma_{33}}{E} x_2;$$

$$u_3 = \int_0^{x_3} u_{3,3} dx_3 = \frac{\sigma_{33}}{E} x_3.$$

Как видим, поперечные сечения бруса остаются плоскими. Осевое перемещение верхнего торца будет

$$u_3 \Big|_{x_3=l} = \frac{\sigma_{33}}{E} l = \frac{P}{EA} l.$$

Данные результаты, будучи строгим решением задачи теории упругости, совпадают с известным решением, получаемым в сопротивлении материалов на основании гипотезы плоских сечений.

#### 4.5.2 Чистый изгиб бруса постоянного сечения

Брус постоянного сечения нагружается концевыми парами  $M$ , действующими в плоскости  $x_2x_3$ , как показано на рисунке 4.2. Предполагается, что координатные оси  $x_1, x_2$  совпадают с главными центральными осями поперечного сечения.

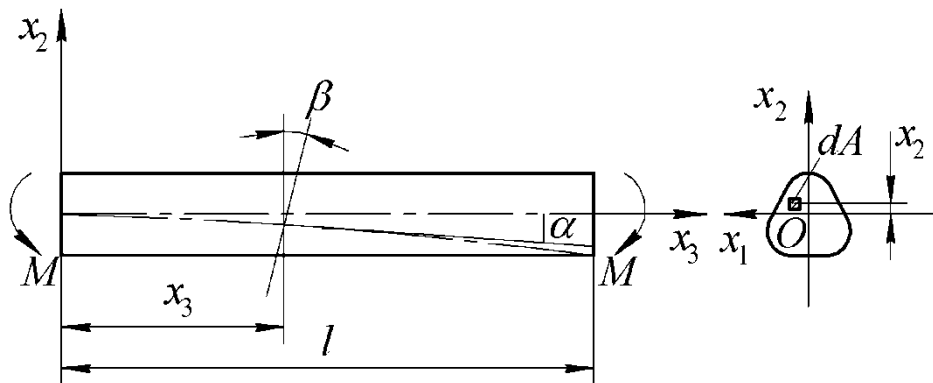


Рисунок 4.2 – Брус при чистом изгибе

В сопротивлении материалов для такого нагружения, называемого чистым изгибом, получено следующее решение:

$$\sigma_{33} = \frac{E}{\rho} x_2; \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\rho$  – радиус кривизны изогнутой оси бруса. Выясним, в какой степени данное решение удовлетворяет соотношениям теории упругости.

Поскольку объёмные силы отсутствуют, первое уравнение равновесия

$$\frac{\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + R_1 = 0$$

удовлетворяется тождественно. То же самое относится и ко второму уравнению. Так как  $\sigma_{33}$  не зависит от координаты  $x_3$ , удовлетворяется и третье уравнение

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + R_3 = 0.$$

В уравнениях совместности Бельтрами фигурируют только вторые производные от напряжений, так что эти уравнения также удовлетворяются тождественно.

Обратимся, наконец, к граничным условиям. Так как составляющие поверхностной нагрузки  $p_1$  и  $p_2$  всюду отсутствуют, а единственным отличным от нуля является напряжение  $\sigma_{33}$ , статические условия на поверхности сводятся к единственному равенству

$$\sigma_{33}n_3 = p_3.$$

На боковой поверхности, где  $n_3 = 0$  и  $p_3 = 0$ , оно удовлетворяется автоматически, а на торцах бруса, где  $n_3 = \pm 1$ , получаем соотношения

$$\pm \sigma_{33} = p_3.$$

Следовательно, исследуемое решение будет строгим, если моменты  $M$  прикладываются в виде нормальной поверхностной нагрузки, действующей на торцевых поверхностях и изменяющейся по закону

$$p_3 = \pm \sigma_{33} = \pm \frac{E}{\rho} x_2.$$

Знак плюс относится здесь к правому, а минус – к левому торцам.

Главный вектор распределённой нагрузки

$$P = \pm \int_A p_3 dA = \frac{E}{\rho} \int_A x_2 dA = 0,$$

так как  $x_1$  – центральная ось поперечного сечения ( $A$  – площадь сечения бруса).

Для изгибающего момента в сечениях бруса находим

$$M = \int_A \sigma_{33} x_2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A x_2^2 dA = \frac{EI_{x_1}}{\rho},$$

где  $I_{x_1}$  – момент инерции сечения относительно оси  $x_1$ . Отсюда вытекает, что кривизна изогнутой оси

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_{x_1}}.$$

Внося это выражение в формулу для  $\sigma_{33}$ , приходим к выражению

$$\sigma_{33} = \frac{M}{I_{x_1}} x_2.$$

Полученный результат совпадает с расчётной формулой сопротивления материалов для нормальных напряжений при изгибе бруса.

Подчеркнём ещё раз, что принятые выражения для напряжений является точным решением лишь при условии, что нагрузки на торцах распределяются по тому же закону, что и нормальное напряжение  $\sigma_{33}$  в поперечном сечении. Если же внешние моменты  $M$  прикладываются как-то иначе, то согласно принципу Сен-Венана данное решение будет также применимо, но только на некотором удалении от концов бруса.

Перейдём далее к нахождению перемещений. По закону Гука имеем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\mu}{\rho} x_2; \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{\rho} x_2;$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Вычисляем производные  $u_{i,j}$ . Во-первых,

$$u_{1,1} = \varepsilon_{11} = -\frac{\mu}{\rho} x_2; \quad u_{2,2} = \varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{\rho} x_2;$$

$$u_{3,3} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{\rho} x_2.$$

Затем находим остальные компоненты по формуле

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_0^{x_1} \left( \varepsilon_{ij,1} - \varepsilon_{j1,i} + \varepsilon_{1i,j} \right) \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 +$$

$$+ \int_0^{x_2} \left( \varepsilon_{ij,2} - \varepsilon_{j2,i} + \varepsilon_{2i,j} \right) \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} \left( \varepsilon_{ij,3} - \varepsilon_{j3,i} + \varepsilon_{3i,j} \right) dx_3,$$

используя те же вычисления, которые выполнялись ранее в примере (см. п.2.8). Считая, что точка  $M$  совпадает с началом координат и полагая, что в этой точке  $u_{i,j}^0 = 0$  для  $j \neq i$ , можно получить следующие значения:

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= -\frac{\mu}{\rho} x_1; & u_{1,3} &= 0; \\
u_{2,1} &= \frac{\mu}{\rho} x_1; & u_{2,3} &= -\frac{1}{\rho} x_3; \\
u_{3,1} &= 0; & u_{3,2} &= \frac{1}{\rho} x_3.
\end{aligned}$$

Компоненты  $u_i$  вычисляем по формуле

$$u_i = u_i^0 + \int_0^{x_1} u_{i,1} \Big|_{x_2=0, x_3=0} dx_1 + \int_0^{x_2} u_{i,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{i,3} dx_3.$$

Считая, что  $u_i^0 = 0$ , придём к выражениям

$$u_1 = -\frac{\mu}{\rho} x_1 x_2; \quad u_2 = \frac{\mu}{2\rho} (x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{2\rho} x_3^2; \quad u_3 = \frac{1}{\rho} x_2 x_3.$$

Для точек оси бруса, то есть при  $x_1 = x_2 = 0$ , имеем отсюда

$$u_1 = u_3 = 0; \quad u_2 = -\frac{x_3^2}{2\rho} = -\frac{M}{2EI_{x_1}} x_3^2.$$

Последнее равенство есть уравнение изогнутой оси бруса. Изогнутая ось составляет с осью  $x_3$  угол  $\alpha$ , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{x_1=x_2=0} = -\frac{M}{EI_{x_1}} x_3.$$

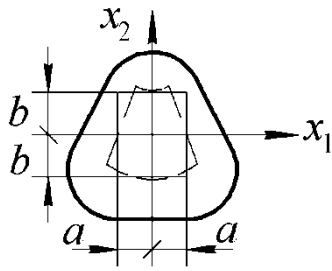
Координата  $x'_3$  произвольной точки поперечного сечения после деформации будет

$$x'_3 = x_3 + u_3 = x_3 + \frac{1}{\rho} x_2 x_3.$$

Это равенство показывает, что сечение остаётся плоским. Тангенс угла его наклона к оси  $x_2$  равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{x_3}{\rho} = \frac{M}{EI_{x_1}} x_3.$$

Как видим,  $|\operatorname{tg} \alpha| = |\operatorname{tg} \beta|$ , то есть сечение остаётся перпендикулярным к деформированной оси бруса, что согласуется с гипотезой плоских сечений, принятой в сопротивлении материалов.



**Рисунок 4.3 – Перемещения в сечении бруса**

Выделим в поперечном сечении площадку прямоугольной формы со сторонами  $2a$  и  $2b$ , как показано на рисунке 4.3. На сторонах  $x_1 = \pm a$  перемещение  $u_1$  будет

$$u_1 = \mp \frac{\mu a}{\rho} x_2,$$

то есть эти стороны повернутся, оставаясь прямыми. Точки, лежащие на сторонах  $x_2 = \pm b$ , получают перемещения в направлении оси  $x_2$

$$u_2 = \frac{\mu}{2\rho} (x_1^2 - b^2) - \frac{1}{2\rho} x_3^2,$$

то есть прямые  $x_2 = \pm b$  превращаются в параболы. Схема деформирования выделенного прямоугольника показана на рисунке 4.3 штриховыми линиями.

## 5 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

### 5.1 Плоская деформация и обобщённое плоское напряжённое состояние

Понятие “плоская задача теории упругости” охватывает широкий круг проблем, имеющих общее математическое описание и включающих два различных по физическому содержанию класса задач – *плоскую деформацию и обобщённое плоское напряжённое состояние*. Их отличительной особенностью является то, что все величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние, зависят лишь от двух координат – скажем,  $x_1$  и  $x_2$ . Благодаря этому общие соотношения теории упругости существенно упрощаются, что позволяет построить решения многих задач, имеющих практическое значение.

Плоской деформацией называется такое деформирование тела, при котором *перемещения всех его точек происходят параллельно плоскости  $x_1x_2$  и не зависят от координаты  $x_3$* :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 = 0. \quad (5.1)$$

В подобных условиях оказывается, например, цилиндрическое тело с образующей, параллельной оси  $x_3$ , торцевые плоскости которого закреплены от перемещений по оси  $x_3$ , в то время как перемещения в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$  в этих плоскостях не стеснены. Если к боковой поверхности тела приложены нагрузки, действующие параллельно плоскости  $x_1x_2$  и постоянные вдоль оси  $x_3$  (рисунок 5.1), то все сечения будут находиться в равных условиях, и перемещения будут подчиняться соотношениям (5.1). Приблизительно так работают прямолинейная плотина, туннель метрополитена и тому подобные сооружения.

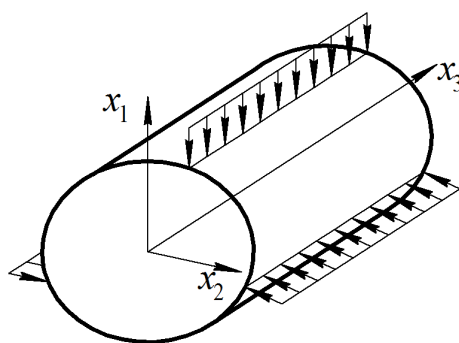


Рисунок 5.1 – К определению плоской деформации

Воспользовавшись формулами Коши, устанавливаем, что в случае плоской деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} = u_{1,1} = \varepsilon_{11}(x_1, x_2); \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2} = \varepsilon_{22}(x_1, x_2); \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \varepsilon_{12}(x_1, x_2),\end{aligned}\quad (5.2)$$

а также

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0; \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) = 0; \quad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}(u_{3,2} + u_{2,3}) = 0. \quad (5.3)$$

Из закона Гука следует, что компоненты тензора напряжений тоже являются функциями координат  $x_1, x_2$ , причём,  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ . Заметим, что из условия  $\varepsilon_{33} = 0$  вытекает, что напряжение  $\sigma_{33} \neq 0$ . В самом деле, так как

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 0,$$

то

$$\sigma_{33} = \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (5.4)$$

Как видим, величина  $\sigma_{33}$  выражается через  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ , то есть она не имеет самостоятельного значения.

Другой вариант плоской задачи относится к случаю, когда *напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$  являются функциями координат  $x_1, x_2$ , а остальные компоненты тензора напряжений отсутствуют:*

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2); \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2); \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2); \quad (5.5)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0. \quad (5.6)$$

Такое напряжённое состояние называется *плоским*. Близкое к нему напряжённое состояние возникает в тонкой пластинке, нагруженной по боковой поверхности постоянными по толщине силами, которые действуют параллельно основаниям (рисунок 5.2).

Основания пластинки, где  $n_1 = n_2 = 0$ ;  $n_3 = \pm 1$ , свободны от нагрузок. Статические условия

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = p_1;$$

$$\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = p_2;$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = p_3$$

дают здесь равенства

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0.$$

Поскольку данные равенства имеют место в каждой точке любого из оснований, то на этих поверхностях справедливы также равенства



$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0.$$

Но тогда из третьего уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + R_3 = 0,$$

в котором необходимо положить  $R_3 = 0$ , следует, что у оснований обращается в нуль не только величина  $\sigma_{33}$ , но и её производная по координате  $x_3$ :

$$\left. \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right|_{x_3 = \pm \frac{h}{2}} = 0.$$

Поэтому напряжение  $\sigma_{33}$  остаётся в случае тонкой пластины весьма малым по всей толщине и можно без большой погрешности принять его равным нулю:

$$\sigma_{33} \approx 0.$$

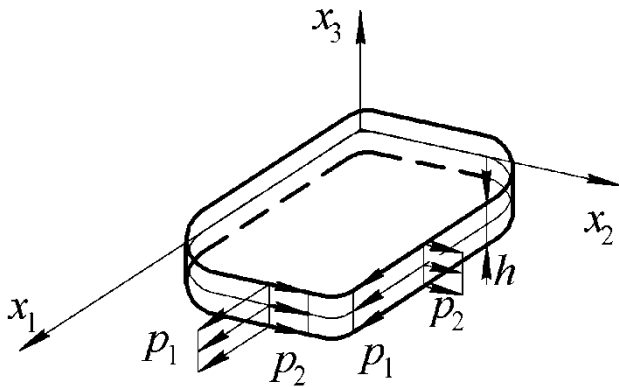
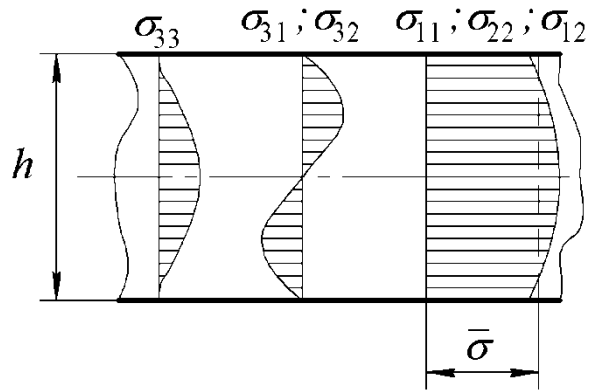


Рисунок 5.2 – Пластина, нагруженная в своей плоскости



5.3 – Распределение напряжений по толщине пластинки

Характер распределения напряжений по толщине пластинки показан на рисунке 5.3. Хотя напряжения изменяются по толщине, но для тонкой пластинки зависимость их от координаты  $x_3$  не слишком существенна и от неё можно избавиться, перейдя к средним по толщине значениям. Отмечая средние напряжения чёрточкой сверху, как показано на рисунке 5.3, запишем

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3; \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3; \quad \bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_3;$$

$$\bar{\sigma}_{31} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_3; \quad \bar{\sigma}_{32} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_3.$$

Здесь  $h$  – толщина пластинки; предполагается, что плоскость  $x_1x_2$  совмещена со срединной плоскостью, которая делит толщину пластины пополам.

Касательные напряжения  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$  по соображениям симметрии должны в срединной плоскости равняться нулю, вследствие чего они будут иметь распределение по толщине, обратносимметричное по отношению к срединной плоскости, как показано на рисунке 5.3. Поэтому их средние по толщине значения равняются нулю, то есть

$$\bar{\sigma}_{31} = \bar{\sigma}_{32} = 0.$$

Таким образом, средние напряжения при условии пренебрежения компонентой  $\sigma_{33}$  удовлетворяют соотношениям (5.5) и (5.6). Такое напряжённое состояние называется *обобщённым плоским*. Применительно к этому случаю будем оперировать в дальнейшем средними напряжениями, а также средними по толщине деформациями и перемещениями, но знак осреднения будем для простоты опускать.

Заметим, что в плоском напряжённом состоянии поперечная нормальная деформация  $\varepsilon_{33}$  отлична от нуля. Действительно, в соответствии с законом Гука имеем

$$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda\theta = 2G\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 0.$$

Учитывая, что

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu},$$

находим отсюда

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2G + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\frac{\mu}{1 - \mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (5.7)$$

Таким образом, деформация  $\varepsilon_{33}$  выражается через  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  и не имеет самостоятельного значения.

## 5.2 Основные соотношения плоской задачи теории упругости

Как плоская деформация, так и обобщённое плоское напряжённое состояние характеризуются напряжениями  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , компонентами тензора деформации  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  и перемещениями  $u_1$ ,  $u_2$ , являющимися функциями координат  $x_1$ ,  $x_2$ . Будем предполагать для общности, что помимо поверхностных

нагрузок на тело действуют объёмные силы  $R_1(x_1, x_2)$  и  $R_2(x_1, x_2)$ , не зависящие от координаты  $x_3$ ; при этом  $R_3 \equiv 0$ .

Из трёх дифференциальных уравнений равновесия одно в случае плоской задачи превращается в нулевое тождество и остаётся два равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + R_1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + R_2 &= 0.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Статические условия на поверхности тела принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 &= p_1; \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= p_2; \\ \sigma_{33}n_3 &= p_3.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Поверхность тела состоит из боковой поверхности и двух оснований. На боковой поверхности, где  $n_3 = 0$ , соотношения (5.9) сводятся к двум равенствам

$$\begin{aligned}\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 &= p_1; \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= p_2,\end{aligned}\quad (5.10)$$

которые должны выполняться на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем поперечное сечение тела;  $n_1$  и  $n_2$  в этих равенствах есть направляющие косинусы нормали к контуру  $\Gamma$ .

На основаниях имеем  $n_1 = n_2 = 0$ , а  $n_3 = \pm 1$ , и здесь первые два соотношения (5.9) приводят к условиям

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 0,$$

которые выражают отсутствие касательных нагрузок в торцевых плоскостях в случае плоской задачи.

Последнее из уравнений (5.9) даёт при  $n_3 = \pm 1$  равенство

$$p_3 = \pm \sigma_{33}.$$

Применительно к обобщённому плоскому напряжённому состоянию, когда  $\sigma_{33} = 0$  и  $p_3 = 0$ , это равенство сводится к нулевому тождеству. В случае же плоской деформации оно устанавливает, что на торцевых площадках будет действовать нагрузка  $p_3$ , равная по абсолютной величине напряжению  $\sigma_{33}$ . Эта нагрузка является реакцией на тело со стороны связей, запрещающих перемещение  $u_3$ . Знаки плюс или минус относятся к торцевым плоскостям, нормали к которым направлены соответственно в положительную или отрицательную сторону оси  $x_3$ .

Таким образом, статические условия на поверхности в плоской задаче должны формулироваться в виде равенств (5.10).

Обратимся далее к геометрическим соотношениям. Компоненты тензора деформации связаны с перемещениями формулами Коши, которых остаётся только три:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (5.11)$$

При этом из шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана остаётся одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5.12)$$

Остальные уравнения совместности в случае плоской деформации обращаются в нулевые тождества, а в случае обобщённого плоского напряжённого состояния они удовлетворяются лишь приближённо.

Наибольшие различия между двумя классами плоской задачи касаются записи закона Гука. Для обобщённого плоского напряжённого состояния закон Гука выражается равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu \sigma_{22}); \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \mu \sigma_{11}); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Чтобы обратить эти соотношения, сложим  $\varepsilon_{11}$  с произведением  $\mu \varepsilon_{22}$ :

$$\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu \sigma_{22} + \mu \sigma_{22} - \mu^2 \sigma_{11}) = \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_{11}.$$

С учётом полученного равенства закон Гука в обратной форме запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11} + \mu \varepsilon_{22}); \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{22} + \mu \varepsilon_{11}); \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

В случае *плоской деформации* имеем для  $\varepsilon_{11}$  выражение

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22} - \mu\sigma_{33}).$$

Согласно (5.4),

$$\sigma_{33} = \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

так что

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \mu\sigma_{22} - \mu^2(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = \frac{1}{E}[(1 - \mu^2)\sigma_{11} - \mu(1 + \mu)\sigma_{22}].$$

Этому равенству можно придать вид первой из формул (5.13):

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E'}(\sigma_{11} - \mu'\sigma_{22}),$$

где обозначено

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1 - \mu}. \quad (5.15)$$

Подобным же образом можно представить и выражение для  $\varepsilon_{22}$ . Заметим также, что имеет место равенство

$$\frac{1 + \mu'}{E'} = \frac{1 - \mu^2}{E} \left(1 + \frac{\mu}{1 - \mu}\right) = \frac{1 + \mu}{E},$$

благодаря чему можно записать

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{12} = \frac{1 + \mu'}{E'} \sigma_{12}.$$

Из сказанного следует, что соотношения закона Гука можно в случае плоской деформации представлять в той же форме (5.13) или (5.14), что и для обобщённого плоского напряжённого состояния, заменив только упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  на величины  $E'$  и  $\mu'$ , определяемые согласно (5.15).

### 5.3 Функция напряжений Эри

Решение плоской задачи теории упругости можно искать в напряжениях, приняв за неизвестные  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$ . Для их нахождения мы располагаем двумя уравнениями равновесия (5.8) и уравнением совместности деформаций (5.12). Выразим последнее через напряжения, воспользовавшись законом Гука. Будем исходить из соотношений (5.13) для обобщённого плоского напряжённого состояния:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}); \quad \varepsilon_{12} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{12}.$$

Внося эти выражения в уравнение совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

получим

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} \right) = \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Умножим это равенство на  $E$  и добавим в его левую и правую части слагаемое

$$(1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right).$$

После приведения подобных членов будем иметь

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = (1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right).$$

В левой части последнего равенства содержится величина

$$\nabla^2 \sigma_{11} + \nabla^2 \sigma_{22} = \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

– двумерный оператор Лапласа.

В правой части напряжения можно исключить с помощью уравнений равновесия. Если продифференцировать первое из них по  $x_1$ , а второе – по  $x_2$  и результаты сложить, то получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} = 0.$$

На основании этого равенства уравнению совместности можно придать вид

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\mu) \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \right). \quad (5.16)$$

Вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + R_1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + R_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

получаем замкнутую систему трёх уравнений относительно искомых функций.

Для плоской деформации в уравнении (5.16) следует заменить  $\mu$  на  $\mu' = \frac{\mu}{1-\mu}$ .

Вместо (5.16) будем иметь тогда уравнение

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1-\mu} \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \right). \quad (5.18)$$

В частном случае, когда объёмные силы постоянны или отсутствуют, уравнение совместности становится однородным:

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (5.19)$$

При этом система уравнений не содержит упругих постоянных.

Полученную систему в случае постоянства объёмных сил можно свести к одному дифференциальному уравнению путём введения так называемой *функции напряжений Эри*  $\varphi(x_1, x_2)$ . Напряжения выражаются через неё по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - x_2 R_1 - x_1 R_2. \quad (5.20)$$

Соотношения (5.20) построены с таким расчётом, чтобы автоматически удовлетворялись уравнения равновесия. В самом деле, подстановка этих соотношений в равенства (5.17) превращает последние в нулевые тождества. Таким образом, при использовании формул (5.20) достаточно позаботиться лишь об удовлетворении уравнения совместности деформаций (5.19). Подстановка в него соотношений (5.20) приводит к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

которому и должна удовлетворять функция  $\varphi$ . В развёрнутом виде это уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0. \quad (5.21)$$

К уравнению (5.21) необходимо присоединить граничные условия на боковой поверхности или, что то же самое, условия на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем поперечное сечение рассматриваемого цилиндрического тела или пластины.

## 5.4 Решение плоской задачи теории упругости в полиномах

Для пластины прямоугольной формы, нагруженной в своей плоскости распределёнными по сторонам силами, решение некоторых задач можно получить в виде комбинации полиномиальных функций от  $x_1, x_2$ . По существу здесь используется обратный путь решения задачи. Задаваясь теми или иными функциями, удовлетворяющими уравнению (5.21), выясняют, каким условиям нагружения они соответствуют. Затем с помощью комбинации таких функций пытаются построить решение для заданной схемы нагружения.

Будем полагать, что объёмные силы отсутствуют; тогда формулы (5.20) запишутся следующим образом:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5.22)$$

Решения дифференциального уравнения (5.21) будем искать в виде полиномов от  $x_1, x_2$  различных степеней:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots,$$

$$\varphi_0 = A_0;$$

$$\varphi_1 = A_1 x_1 + B_1 x_2;$$

$$\varphi_2 = A_2 x_1^2 + B_2 x_1 x_2 + C_2 x_2^2;$$

$$\varphi_3 = A_3 x_1^3 + B_3 x_1^2 x_2 + C_3 x_1 x_2^2 + D_3 x_2^3;$$

$$\varphi_4 = A_4 x_1^4 + B_4 x_1^3 x_2 + C_4 x_1^2 x_2^2 + D_4 x_1 x_2^3 + E_4 x_2^4$$

и так далее. Здесь  $A_i, B_i, \dots$  – некоторые коэффициенты.

Полиномы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  не представляют интереса, так как на основании формул (5.22) соответствующие им напряжения оказываются нулевыми. Полиномы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  удовлетворяют уравнению (5.21) при любых значениях коэффициентов, но полиномы более высоких степеней являются его решениями лишь при определённых ограничениях на коэффициенты. Например, для полинома четвёртой степени имеем

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x_1^4} = 24A_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 4C_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x_2^4} = 24E_4,$$

и равенство (5.21) приводит к соотношению

$$24A_4 + 8C_4 + 24E_4 = 0.$$

Следовательно, между коэффициентами полинома четвёртой степени должна соблюдаться зависимость



$$C_4 = -3(A_4 + E_4).$$

Подобным же образом устанавливаются зависимости между коэффициентами полиномов более высоких степеней. Так, полином пятой степени

$$\varphi_5 = A_5 x_1^5 + B_5 x_1^4 x_2 + C_5 x_1^3 x_2^2 + D_5 x_2^2 x_2^3 + E_5 x_1 x_2^4 + F_5 x_2^5$$

является решением бигармонического уравнения при выполнении двух условий:

$$5A_5 + C_5 + E_5 = 0; \quad B_5 + D_5 + 5F_5 = 0. \quad (5.23)$$

С повышением степени полинома на единицу число подобных соотношений возрастает также на единицу. Полный полином любой степени  $n$  для  $n > 2$  может содержать только четыре независимые постоянные.

Рассмотрим теперь некоторые из полиномиальных функций. Возьмём в частности, в качестве функции напряжений выражение

$$\varphi = A_2 x_1^2.$$

По формулам (5.22) имеем

$$\sigma_{22} = 2A_2; \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0.$$

Такое напряжённое состояние есть равномерное одноосное растяжение пластины в направлении оси  $x_2$  нагрузкой, интенсивность которой численно равна  $2A_2$  (рисунок 5.4,а). Аналогично устанавливаем, что функция напряжений вида

$$\varphi = C_2 x_2^2$$

выражает равномерное растяжение пластины вдоль оси  $x_1$  (рисунок 5.4,б).

Наконец, для функции  $\varphi = B_2 x_1 x_2$  находим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = -B_2.$$

Это соответствует чистому сдвигу пластины нагрузкой интенсивности  $-B_2$  (рисунок 5.4,в).

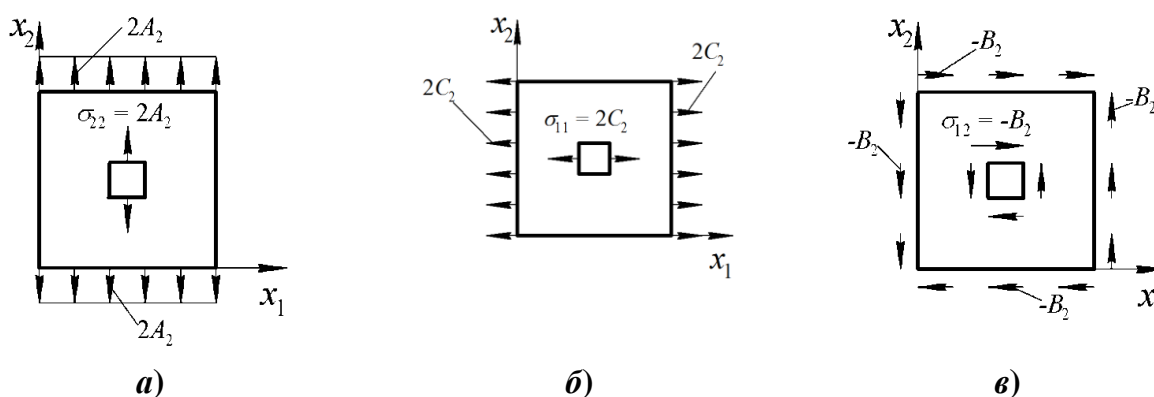


Рисунок 5.4 – Простейшие напряжённые состояния

Таким образом, *полный полином второй степени описывает равномерное растяжение в двух направлениях и чистый сдвиг пластины.*

Пусть, далее,

$$\varphi = A_3 x_1^3.$$

По формулам (5.22) находим

$$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{12} = 0; \quad \sigma_{22} = 6A_3 x_1.$$

Если поместить начало координат в центре прямоугольника, то такое напряжённое состояние будет представлять *чистый изгиб вдоль оси  $x_2$*  (рисунок 5.5,а). Аналогично, функции  $\varphi = D_3 x_2^3$  соответствует чистый изгиб вдоль оси  $x_1$  (рисунок 5.5,б).

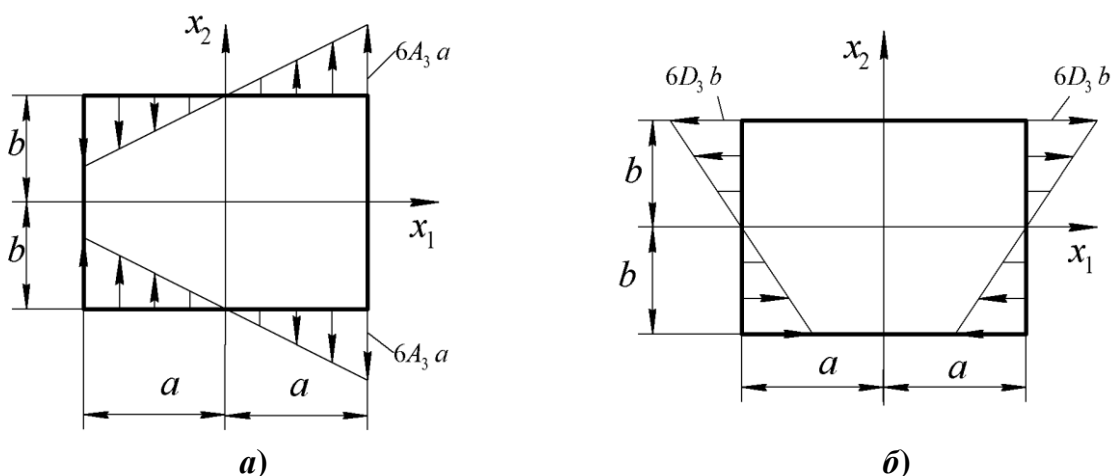


Рисунок 5.5 – Чистый изгиб в двух направлениях

Подобным образом можно проанализировать и другие функции. Использование полиномов проиллюстрируем примерами расчёта балки при изгибе.

### 5.5 Изгиб консольной балки силой на конце

Рассматривается удлинённая прямоугольная пластина единичной толщины, отнесённая к системе координат  $x_1 x_2$ , ось  $x_1$  которой делит высоту  $h$  прямоугольника пополам (рисунок 5.6). Пластина закреплена на стороне  $x_1 = l$ ; сторона  $x_1 = 0$  нагружена касательными усилиями, результирующая которых равна  $P$ . В сопротивлении материалов такая система трактуется как консольная балка прямоугольного поперечного сечения, нагруженная силой  $P$  на конце. Мы же проанализируем её с позиции плоской задачи теории упругости.

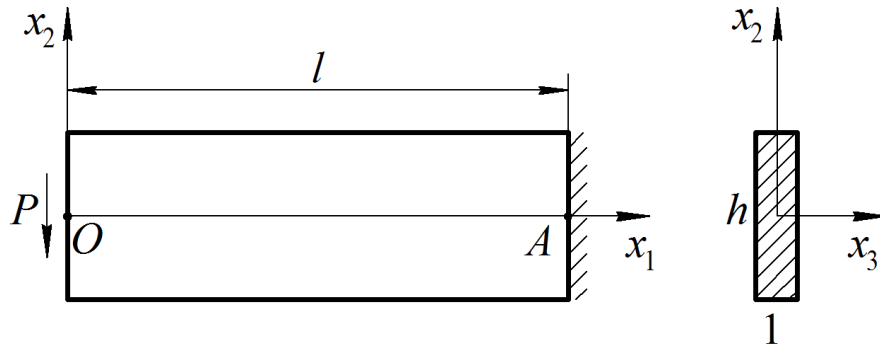


Рисунок 5.6 – Консольная балка при изгибе силой на конце

Функцию напряжений будем искать в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = B_2 x_1 x_2 + D_4 x_1 x_2^3.$$

Ей соответствуют напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 6D_4 x_1 x_2; & \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0; \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -B_2 - 3D_4 x_2^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Постоянные  $B_2$  и  $D_4$  могут быть найдены из граничных условий. На сторонах пластины  $x_2 = \pm \frac{h}{2}$  должны выполняться условия

$$\sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = 0.$$

Первое из них удовлетворяется автоматически, так как  $\sigma_{22} = 0$  всюду. Второе условие приводит к равенству

$$-B_2 - 3D_4 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0,$$

из которого вытекает следующая связь между постоянными:

$$B_2 = -\frac{3}{4} D_4 h^2.$$

Остаётся удовлетворить двум статическим условиям на стороне пластины  $x_1 = 0$ . Одно из них заключается в требовании, чтобы напряжение  $\sigma_{11}$  обращалось здесь в ноль. Это условие выполняется, как это видно из выражения (5.24) для  $\sigma_{11}$ . Другое условие касается напряжения  $\sigma_{12}$ , которое должно принимать заданное на стороне  $x_1 = 0$  значение. Однако детальное распределение касательных усилий, создающих силу  $P$ , не известно; мы располагаем только их равнодействующей. Удовлетворить данному условию можно в смягчённой форме, требуя выполнения интегрального равенства

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \cdot 1 \cdot dx_2 = P.$$

Подставим сюда выражение для  $\sigma_{12}$ :

$$- \int_{-h/2}^{h/2} (B_2 + 3D_4 x_2^2) dx_2 = P.$$

Выполнив интегрирование, приходим к равенству

$$-\left( B_2 h + D_4 \frac{h^3}{4} \right) = P.$$

Если учесть установленную выше связь между  $B_2$  и  $D_4$ , то можно получить

$$D_4 = \frac{2P}{h^3}; \quad B_2 = -\frac{3P}{2h}.$$

Теперь в соответствии с формулами (5.24) приходим к следующему распределению напряжений в пластине:

$$\sigma_{11} = \frac{12P}{h^3} x_1 x_2; \quad \sigma_{12} = \frac{3P}{2h} \left( 1 - \frac{4x_2^2}{h^2} \right); \quad \sigma_{22} = 0. \quad (5.25)$$

Сопоставим эти результаты с теми, которые даются формулами сопротивления материалов. Выражение для нормального напряжения в сечении балки при изгибе имеет вид

$$\sigma = \frac{M}{I} x_2,$$

где  $M$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;  $I$  – момент инерции сечения относительно оси  $x_3$ . Так как на расстоянии  $x_1$  от свободного конца балки  $M = Px_1$ , а момент инерции сечения (см. рисунок 5.6)

$$I = \frac{1 \cdot h^3}{12},$$

после подстановки этих значений в формулу для  $\sigma$  приходим к равенству

$$\sigma = \frac{12P}{h^3} x_1 x_2,$$

что совпадает с найденным выше выражением для  $\sigma_{11}$ .

Касательное напряжение  $\tau$  в сечении балки при изгибе вычисляется по известной формуле Журавского

$$\tau = \frac{QS}{Ib},$$

где  $Q = P$  – поперечная сила в сечении балки;  $b = 1$  – ширина сечения;  $S$  – статический момент отсечённой части площади сечения относительно оси  $x_3$ . На рисунке 5.7 отсечённая часть площади сечения заштрихована; её статический момент

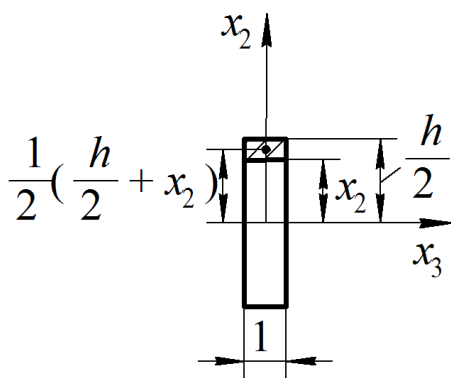


Рисунок 5.7 – Отсечённая часть сечения

$$S = 1 \cdot \left( \frac{h}{2} - x_2 \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + x_2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right).$$

По формуле Журавского находим

$$\tau = \frac{6P}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right),$$

что соответствует выражению (5.25) для  $\sigma_{12}$ .

Заметим, наконец, что в теории изгиба балки принимается гипотеза об отсутствии надавливания волокон друг на друга, и это также согласуется с полученным выше результатом  $\sigma_{22} = 0$ .

Таким образом, можно заключить, что в данной задаче решение для напряжений, полученное в сопротивлении материалов исходя из гипотезы плоских сечений, полностью совпадает с результатами вычислений на основе соотношений теории упругости. Конечно, оба решения, строго говоря, относятся к случаю, когда сила  $P$  приложена в виде касательной нагрузки, изменяющейся вдоль координаты  $x_2$  по тому же квадратичному закону, что и касательное напряжение  $\sigma_{12}$ . При другом способе приложения силы эти результаты также применимы, но на некотором расстоянии от нагруженного края, имеющем порядок высоты сечения балки  $h$ .

Перейдём к определению перемещений. Представим формулы (5.25) для напряжений в виде

$$\sigma_{11} = \frac{P}{I} x_1 x_2; \quad \sigma_{12} = \frac{P}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right); \quad \sigma_{22} = 0$$

и найдём компоненты тензора деформации:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{P}{EI} x_1 x_2; \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{11} = -\frac{\mu P}{EI} x_1 x_2;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{12} = \frac{(1 + \mu) P}{2EI} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right).$$

Для вычисления перемещений воспользуемся следующими выкладками. Согласно формулам Коши имеем равенства

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = \frac{P}{EI} x_1 x_2; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} = -\frac{\mu P}{EI} x_1 x_2.$$

Интегрируя их, получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{P}{2EI} x_1^2 x_2 + f_2(x_2); \\ u_2 &= -\frac{\mu P}{2EI} x_1 x_2^2 + f_1(x_1), \end{aligned} \quad (5.26)$$

где  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$  – произвольные функции своих аргументов. Для их определения подставим выражения (5.26) в соотношение

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{12} = \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right).$$

В итоге получим

$$\frac{P}{2EI} x_1^2 + f_2'(x_2) - \frac{\mu P}{2EI} x_2^2 + f_1'(x_1) = \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right),$$

где штрихом обозначается дифференцирование функции по своему аргументу. Последний результат можно представить в виде равенства

$$\frac{P}{2EI} x_1^2 + f_1'(x_1) = \frac{\mu P}{2EI} x_2^2 + \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) - f_2'(x_2),$$

где в левой части содержится функция координаты  $x_1$ , а в правой части – функция координаты  $x_2$ . Равенство возможно, если каждая из этих функций тождественно равна одной и той же константе. Обозначив её через  $C_1$ , приходим к двум соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{P}{2EI} x_1^2 + f_1'(x_1) &= C_1; \\ \frac{\mu P}{2EI} x_2^2 + \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) - f_2'(x_2) &= C_1. \end{aligned}$$

Интегрируя первое из них по  $x_1$ , а второе по  $x_2$ , находим функции  $f_1(x_1)$  и  $f_2(x_2)$ :

$$f_1(x_1) = -\frac{P}{6EI} x_1^3 + C_1 x_1 + C_2;$$

$$f_2(x_2) = \frac{\mu P}{6EI} x_2^3 + \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) - C_1 x_2 + C_3.$$

Здесь  $C_2$  и  $C_3$  – постоянные интегрирования.

Если подставить эти выражения в соотношения (5.26), придём к следующим формулам для перемещений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{P}{2EI} x_1^2 x_2 + \frac{\mu P}{6EI} x_2^3 + \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right) - C_1 x_2 + C_3; \\ u_2 &= -\frac{P}{6EI} x_1^3 - \frac{\mu P}{2EI} x_1 x_2^2 + C_1 x_1 + C_2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Тот факт, что полученное на основе гипотезы плоских сечений распределение напряжений совпадает с решением плоской задачи теории упругости, во все не означает, что поперечные сечения действительно остаются плоскими. В каждом сечении  $x_1 = \text{const}$  перемещение  $u_1$  изменяется вдоль координаты  $x_2$  по кубическому закону (а не по линейному, как было бы в случае справедливости гипотезы плоских сечений). Кроме того, перемещение  $u_2$  не постоянно по сечению, а изменяется по квадратичному закону, то есть поперечное сечение не сохраняет свою первоначальную форму, как это постулируется в технической теории изгиба балки.

Произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  должны быть подчинены условиям закрепления пластины при  $x_1 = l$ . Располагая тремя постоянными, можно потребовать, чтобы отсутствовали перемещения и угол поворота в точке  $A$ , лежащей на оси  $x_1$  (см рисунок 5.6), но не перемещения по всей стороне  $x_1 = l$ . Равенство нулю перемещений  $u_1$  и  $u_2$  при  $x_1 = l$ ,  $x_2 = 0$  обеспечивается при выполнении равенств

$$C_3 = 0; \quad -\frac{Pl^3}{6EI} + C_1 l + C_2 = 0. \quad (5.28)$$

Что касается отсутствия угла поворота, то его можно выразить либо равенством

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=l \\ x_2=0}} = 0, \quad (5.29)$$

либо равенством

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=l \\ x_2=0}} = 0, \quad (5.30)$$

которые отражают различные варианты закрепления. Первое из них соответствует требованию, чтобы в точке  $A$  отсутствовал угол наклона касательной к осевой линии (рисунок 5.8,а). Второе же равенство предполагает, что наложенные связи запрещают в точке  $A$  поворот отрезка, параллельного оси  $x_2$  (рисунок 5.8,б). С точки зрения сопротивления материалов оба варианта заделки идентичны, так как сечения считаются нормальными к изогнутой оси балки. В действительности это не так, и условия (5.29) и (5.30) приводят к разным результатам.

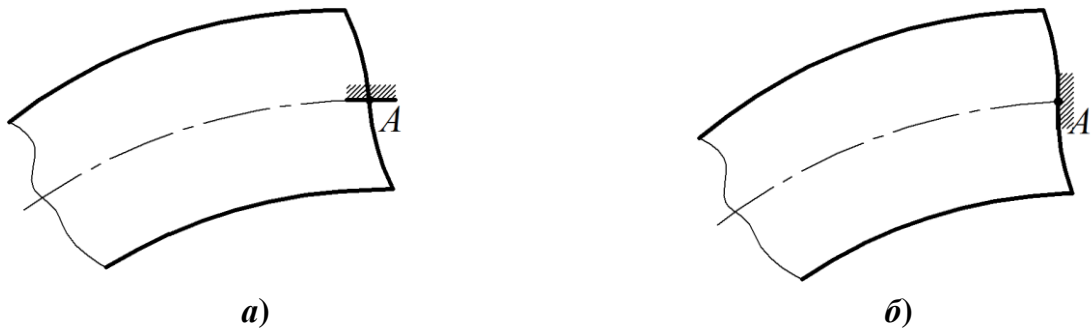


Рисунок 5.8 – Два варианта заделки

Рассмотрим подробнее вариант закрепления (5.30), который в большей степени соответствует исходной постановке задачи (см. рисунок 5.6). Так как согласно (5.27)

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \frac{P}{2EI} x_1^2 + \frac{(1+\mu)Ph^2}{4EI} - C_1,$$

условие (5.30) приводит к соотношению

$$\frac{Pl^2}{2EI} + \frac{(1+\mu)Ph^2}{4EI} - C_1 = 0.$$

Учитывая также (5.28), получаем следующие значения постоянных:

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{(1+\mu)Ph^2}{4EI}; \quad C_2 = -\frac{Pl^3}{3EI} - \frac{(1+\mu)Ph^2l}{4EI}; \quad C_3 = 0.$$

Подстановка их в формулы (5.27) даёт окончательные выражения для перемещений. В частности, вертикальные перемещения точек, лежащих на оси  $x_1$ , определяются зависимостью

$$u_2|_{x_2=0} = -\frac{Pl^3}{3EI} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{x_1}{l} + \frac{1}{2} \frac{x_1^3}{l^3} \right) - \frac{(1+\mu)Ph^2l}{4EI} \left( 1 - \frac{x_1}{l} \right). \quad (5.31)$$

При этом в точке  $O$  будем иметь



$$u_2 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -\frac{Pl^3}{3EI} \left[ 1 + \frac{3(1+\mu)h^2}{4l^2} \right]. \quad (5.32)$$

Если же в качестве условия закрепления принять равенство (5.29), то для вертикального перемещения точки  $O$  получим вместо (5.32) выражение

$$u_2 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -\frac{Pl^3}{3EI}, \quad (5.33)$$

которое совпадает с формулой сопротивления материалов для прогиба консольной балки под действием силы на конце.

Различие между двумя вариантами решения связано с влиянием деформации поперечного сдвига

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{(1+\mu)P}{EI} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right).$$

На осевой линии, где  $x_2 = 0$ , деформация сдвига имеет значение

$$\gamma_{12} \Big|_{x_2=0} = \frac{(1+\mu)Ph^2}{4EI}.$$

Так как

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

угол поворота осевой линии  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_2=0}$  отличается от угла поворота нормального

к ней отрезка  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}$  как раз на величину  $\gamma_{12} \Big|_{x_2=0}$ . Именно поправкой на сдвиг

$\gamma_{12} \Big|_{x_2=0}$  и отличается перемещение (5.32) от (5.33).

Впрочем, величина данной поправки невелика, и для достаточно длинной пластины ею можно пренебречь. Например, при отношении  $l/h = 5$  величина (5.32) отличается от (5.33) менее чем на 4%. Если же  $l/h = 10$ , то различие составит менее 1%.

Отметим в заключение, что в приведённом решении не удовлетворяется условие закрепления вдоль всей стороны  $x_1 = l$ . Для обеспечения данного условия необходимо дополнительно приложить к этой стороне некоторую самоуравновешенную нагрузку. Но в соответствии с принципом Сен-Венана на небольшом удалении от заделки (порядка высоты сечения  $h$ ) более строгое решение будет практически совпадать с полученными результатами.

## 5.6 Изгиб двухопорной балки узкого прямоугольного сечения под действием равномерной нагрузки

Пусть удлиненная прямоугольная пластина единичной толщины с размерами сторон  $h$  и  $2l$  нагружена вдоль длинной стороны равномерной нагрузкой  $q$ , как показано на рисунке 5.9. Нагрузка уравнивается приложенными по коротким сторонам силами величиной  $ql$  каждая. Подобную систему можно трактовать как балку прямоугольного сечения, шарнирно опёртую по концам.

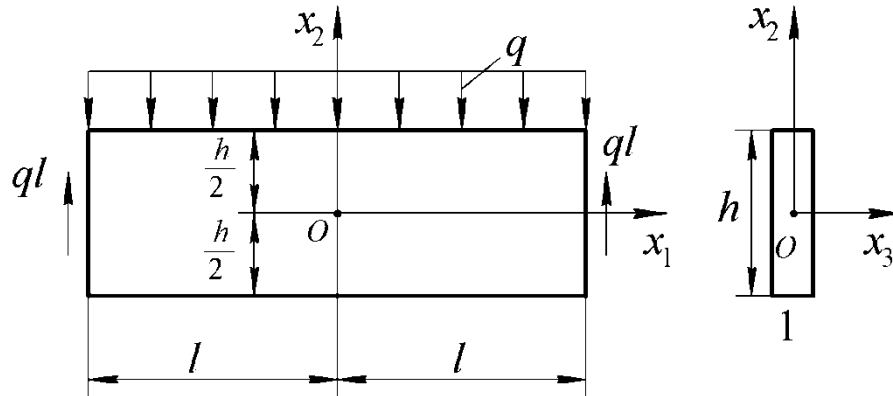


Рисунок 5.9 – Двухопорная балка под равномерной нагрузкой

Поместив начало координат в центр пластины, функцию напряжений будем искать в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = A_2 x_1^2 + B_3 x_1^2 x_2 + D_3 x_2^3 + D_5 \left( x_1^2 x_2^3 - \frac{1}{5} x_2^5 \right). \quad (5.34)$$

Последнее слагаемое здесь записано с учётом условий (5.23), так что функция (5.34) удовлетворяет бигармоническому уравнению.

Для напряжений будем иметь следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 6D_3 x_2 + D_5 (6x_1^2 x_2 - 4x_2^3); \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 2A_2 + 2B_3 x_2 + 2D_5 x_2^3; \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -(2B_3 x_1 + 6D_5 x_1 x_2^2). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Для определения постоянных обратимся к граничным условиям. На длинных сторонах напряжение  $\sigma_{12}$  должно обращаться в нуль:

$$\sigma_{12} \Big|_{x_2 = \pm \frac{h}{2}} = -\left( 2B_3 x_1 + 6D_5 x_1 \frac{h^2}{4} \right) = 0.$$

Отсюда вытекает связь между постоянными  $B_3$  и  $D_5$ :

$$2B_3 + \frac{3}{2}D_5h^2 = 0. \quad (5.36)$$

Для напряжения  $\sigma_{22}$  при  $x_2 = \frac{h}{2}$  и  $x_2 = -\frac{h}{2}$  имеем условия

$$\begin{aligned} \sigma_{22}\Big|_{x_2=\frac{h}{2}} &= 2A_2 + 2B_3\frac{h}{2} + 2D_5\frac{h^3}{8} = -q; \\ \sigma_{22}\Big|_{x_2=-\frac{h}{2}} &= 2A_2 - 2B_3\frac{h}{2} - 2D_5\frac{h^3}{8} = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Вычитая второе равенство (5.37) из первого, получаем соотношение

$$2B_3h + \frac{1}{2}D_5h^3 = -q.$$

Вместе с (5.36) оно образует систему уравнений относительно  $B_3$  и  $D_5$ , решая которую, находим

$$D_5 = \frac{q}{h^3}; \quad B_3 = -\frac{3}{4}\frac{q}{h}.$$

Из второго уравнения (5.37) будем иметь также

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(B_3h + \frac{1}{4}D_5h^3\right) = -\frac{q}{4}.$$

Внося полученные значения постоянных в формулы (5.35), запишем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 6D_3x_2 + \frac{6q}{h^3}\left(x_1^2x_2 - \frac{2}{3}x_2^3\right) = 6D_3x_2 + \frac{q}{2I}\left(x_1^2x_2 - \frac{2}{3}x_2^3\right); \\ \sigma_{22} &= -\frac{q}{2} - \frac{3}{2}\frac{q}{h}x_2 + \frac{2q}{h^3}x_2^3 = -\frac{q}{2}\left(1 + 3\frac{x_2}{h} - 4\frac{x_2^3}{h^3}\right); \\ \sigma_{12} &= -\left(-\frac{3}{2}\frac{q}{h} + \frac{6q}{h^3}x_2\right)x_1 = \frac{6q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right)x_1 = \frac{q}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right)x_1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

где  $I = h^3/12$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $x_3$ .

Обратимся далее к граничным условиям на коротких сторонах. Результирующие касательных напряжений по абсолютной величине должны равняться здесь опорным реакциям:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}\Big|_{x_1=-l} dx_2 = -ql; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}\Big|_{x_1=l} dx_2 = ql.$$

Учитывая соотношение (5.38) можно убедиться, что эти условия выполняются.

Нормальные напряжения  $\sigma_{11}$  на сторонах  $x_1 = \pm l$  должны отсутствовать. Но строго удовлетворить данному требованию не удаётся. Можно лишь потребовать, чтобы результирующие напряжений – продольная сила и момент относительно оси  $x_3$  – равнялись нулю. Первое из этих условий записывается в виде

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}|_{x_1=\pm l} dx_2 = 0$$

и удовлетворяется тождественно, так как  $\sigma_{11}$  является нечётной функцией координаты  $x_2$ . Согласно другому требованию должно выполняться равенство

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}|_{x_1=\pm l} x_2 dx_2 = 0,$$

что обеспечивается, если

$$D_3 = -\frac{q}{12I} \left( l^2 - \frac{h^2}{10} \right).$$

При этом выражению для  $\sigma_{11}$  можно придать окончательно следующий вид:

$$\sigma_{11} = -\frac{q}{2I} (l^2 - x_1^2) x_2 - \frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} x_2^2 - \frac{h^2}{10} \right) x_2. \quad (5.39)$$

Изгибающий момент в сечении балки на расстоянии  $x_1$  от начала координат равен

$$M = ql(l - x_1) - q(l - x_1) \frac{l - x_1}{2} = \frac{q}{2} (l^2 - x_1^2).$$

В соответствии с технической теорией изгиба балки нормальное напряжение должно вычисляться по формуле

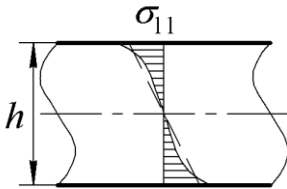
$$\sigma = \frac{M}{I} x_2 = \frac{q}{2I} (l^2 - x_1^2) x_2. \quad (5.40)$$

Как следует из выражения (5.39), нормальное напряжение  $\sigma_{11}$  в полученном решении изменяется в сечении по кубическому закону, в отличие от линейного закона (5.40). Зависимость (5.39) показана на рисунке 5.10 сплошной линией, а (5.40) – штриховой. Поправка к элементарной теории сопротивления материалов невелика. Максимальное напряжение  $\sigma_{11}$ , возникающее в среднем

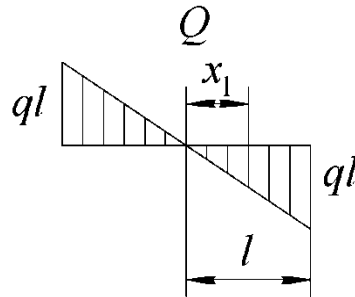
сечении балки при  $x_2 = -\frac{h}{2}$ , равно

$$(\sigma_{11})_{\max} = -\frac{ql^2h}{4I} \left[ 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{h}{2l} \right)^2 \right].$$

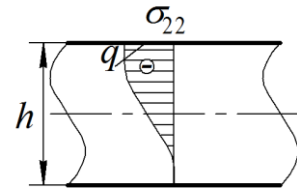
Второе слагаемое в квадратных скобках, отражающее поправку к элементарной теории, весьма мало даже для относительно коротких балок. Например, при  $\frac{h}{2l} = \frac{1}{5}$  оно равно приблизительно 0,01.



**Рисунок 5.10 –  
Распределение  $\sigma_{11}$   
по высоте сечения**



**Рисунок 5.11 –  
Изменение  
перерезывающей силы  
по длине балки**



**Рисунок 5.12 –  
Напряжение  $\sigma_{22}$**

Эпюра перерезывающих сил для рассматриваемой балки показана на рисунке 5.11. На расстоянии  $x_1$  от начала координат имеем  $Q = qx_1$ . По формуле Журавского вычисляем касательное напряжение

$$\tau = \frac{Q}{Ib} S = \frac{qx_1}{I \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right),$$

что совпадает с выражением (5.38) для  $\sigma_{12}$ .

В отличие от сопротивления материалов, где принимается гипотеза о ненадавливании волокон друг на друга, в найденном решении напряжение  $\sigma_{22}$  согласно (5.38) отлично от нуля. Характер изменения  $\sigma_{22}$  по высоте сечения представлен на рисунке 5.12. Но величина  $|\sigma_{22}|_{\max}$  имеет порядок  $(h/2l)^2$  по сравнению с максимальными значениями  $\sigma_{11}$ , так что с практической точки зрения напряжение  $\sigma_{22}$  не играет существенной роли.

## 6 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

### 6.1 Формулы дифференцирования в полярных координатах

В некоторых случаях для решения плоской задачи естественным является использование полярных координат. Переходя к выводу соотношений плоской задачи в полярных координатах, будем полагать, что все величины являются функциями координат  $r$ ,  $\theta$ , где  $r$  – полярный радиус, а  $\theta$  – полярный угол (рисунок 6.1).

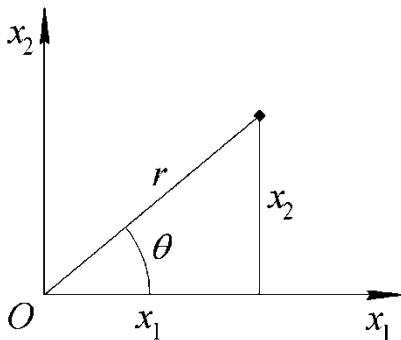


Рисунок 6.1 – Полярные координаты

Выведем прежде всего формулы перехода от производных по координатам  $x_1$ ,  $x_2$  к производным по  $r$ ,  $\theta$ . Связь полярных и декартовых координат даётся равенствами

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta \quad (6.1)$$

или обратными соотношениями

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{x_2}{x_1}. \quad (6.2)$$

На основании (6.2) можно записать

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_2}{r}.$$

Учитывая формулы (6.1), получаем отсюда

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos \theta; \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin \theta. \quad (6.3)$$

Продифференцируем далее второе равенство (6.2) по  $x_1$ :

$$(\operatorname{tg} \theta)' \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{x_1^2},$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу  $\theta$ . Поскольку

$$(\operatorname{tg} \theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

находим отсюда с учётом (6.1):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{x_1^2} \cos^2 \theta = -\frac{\sin \theta}{r}. \quad (6.4)$$

Аналогично устанавливаем равенство

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1} \frac{1}{(\operatorname{tg} \theta)'} = \frac{1}{x_1} \cos^2 \theta = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (6.5)$$

С помощью формул (6.3)...(6.5), можно выразить производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$

через производные  $\frac{\partial f}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ , где  $f$  – произвольная функция координат. По

формуле дифференцирования сложной функции запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Основываясь на данных соотношениях, нетрудно установить формулы дифференцирования и для вторых производных. Например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right).$$

Но, согласно (6.6),

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

так что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

Выполнив дифференцирование, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} + \\ &+ \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Аналогично получаем ещё два равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \\ &- \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{2r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos 2\theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin 2\theta}{2r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (6.9)$$

Двумерный оператор Лапласа имеет в полярных координатах выражение, вытекающее из формул (6.7), (6.8):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (6.10)$$

## 6.2 Основные соотношения плоской задачи в полярных координатах

Обратимся вначале к геометрическим соотношениям. В качестве компонент вектора перемещения произвольной точки  $M$  будем использовать радиальное  $u_r$  и окружное  $u_\theta$  перемещения (рисунок 6.2). Они связаны с компонентами  $u_1, u_2$  равенствами

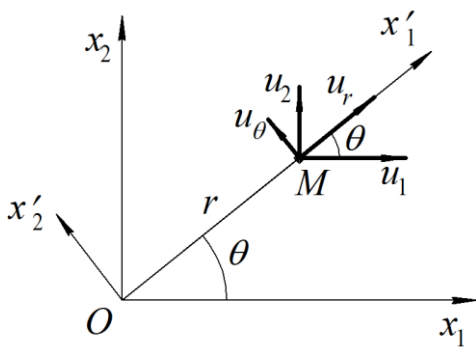


Рисунок 6.2 – К выводу геометрических соотношений в полярных координатах

тами  $u_1, u_2$  равенствами

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta; \\ u_2 &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Компоненты тензора деформации в полярных координатах обозначим через  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$  и  $\varepsilon_{r\theta}$ . Они представляют собой относительные удлинения в радиальном и окружном направлениях, а также половину деформации сдвига для этих направлений. Для установления их связи с перемещениями  $u_r, u_\theta$  введём вспомогательную декартову систему координат  $x'_1 O x'_2$ , в которой ось  $x'_1$  направлена в сторону возрастания  $r$ . В данной системе координат компоненты вектора перемещения и тензора деформации совпадают с соответствующими компонентами в полярной системе:

$$\begin{aligned} u_{1'} &= u_r; \quad u_{2'} = u_\theta; \\ \varepsilon_{1'1'} &= \varepsilon_{rr}; \quad \varepsilon_{2'2'} = \varepsilon_{\theta\theta}; \quad \varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_{r\theta}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Связь компонент тензора деформации  $\varepsilon_{1'1'}$ ,  $\varepsilon_{2'2'}$  и  $\varepsilon_{1'2'}$  с перемещениями  $u_{1'}, u_{2'}$  даётся формулами Коши:



$$\varepsilon_{1'1'} = \frac{\partial u_{1'}}{\partial x_1'}; \quad \varepsilon_{2'2'} = \frac{\partial u_{2'}}{\partial x_2'}; \quad \varepsilon_{1'2'} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{1'}}{\partial x_2'} + \frac{\partial u_{2'}}{\partial x_1'} \right). \quad (6.13)$$

От системы координат  $x_1 O x_2$  система  $x_1' O x_2'$  отличается лишь тем, что полярный угол для неё в точке  $M$  равен нулю. Поэтому выражения для  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  и  $\varepsilon_{r\theta}$ , вытекающие из (6.13) и (6.12) можно записать так:

$$\varepsilon_{rr} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{\theta=0}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{\theta=0}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right|_{\theta=0}.$$

Подставим сюда равенства (6.11) и учтём, что в силу формул (6.6) производные  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  при  $\theta=0$  равны соответственно  $\frac{\partial}{\partial r}$  и  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ . В результате получим

$$\varepsilon_{rr} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \right]_{\theta=0} = \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sin \theta \right) \Big|_{\theta=0},$$

то есть

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (6.14)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \right]_{\theta=0} = \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \sin \theta + u_r \cos \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \cos \theta - u_\theta \sin \theta \right) \Big|_{\theta=0}, \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}. \quad (6.15)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial r} (u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \right]_{\theta=0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \cos \theta - u_r \sin \theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \sin \theta - u_\theta \cos \theta \right) + \frac{\partial u_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta \right]_{\theta=0}, \end{aligned}$$

так что

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \quad (6.16)$$

Равенства (6.14)...(6.16) представляют геометрические соотношения в полярных координатах.

Далее, на рисунке 6.3 показаны компоненты тензора напряжений в полярных координатах, где  $\sigma_{rr}$  – радиальное,  $\sigma_{\theta\theta}$  – окружное,  $\sigma_{r\theta}$  – касательное напряжения. Как говорилось ранее, напряжения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия, если они связаны определёнными соотношениями с функцией напряжений. При отсутствии объёмных сил эти соотношения в декартовых координатах имеют вид

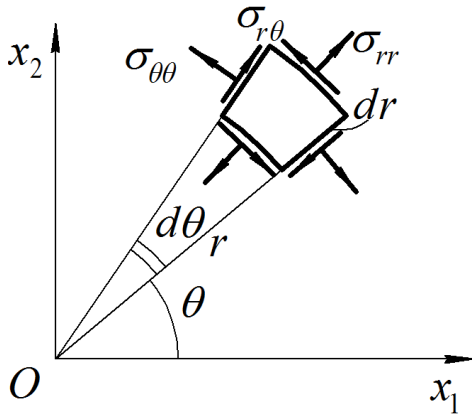


Рисунок 6.3 – Напряжения в полярных координатах

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Чтобы получить подобные соотношения в полярных координатах, обратимся снова к системе координат  $x'_1 O x'_2$ . Следуя той же логике, что и при выводе геометрических соотношений, запишем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{1'1'} = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right|_{\theta=0};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{2'2'} = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right|_{\theta=0}; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{1'2'} = -\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\theta=0}.$$

В соответствии с формулами (6.7)...(6.9) приходим к искомым зависимостям:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \sigma_{r\theta} &= -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

При выполнении данных равенств уравнения равновесия для напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{r\theta}$  будут при отсутствии объёмных сил автоматически удовлетворены.

Уравнение совместности деформаций в плоской задаче при отсутствии объёмных сил было представлено ранее в форме (5.19):

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0.$$

Сумма напряжений  $\sigma_{11} + \sigma_{22}$  есть инвариантная величина. В самом деле, первый инвариант тензора напряжений имеет выражение

$$I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

В случае обобщённого плоского напряжённого состояния, когда  $\sigma_{33} = 0$ ,  $I_1(\sigma)$  как раз и равняется этой сумме. В случае же плоской деформации имеем  $\sigma_{33} = \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ , так что  $I_1(\sigma) = (1 + \mu)(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ . В любом случае, как видим, сумма нормальных напряжений  $\sigma_{11} + \sigma_{22}$  является инвариантом, и её можно заменить суммой  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$ . В итоге приходим к уравнению совместности деформаций в полярных координатах

$$\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad (6.18)$$

где оператор Лапласа имеет выражение (6.10). Подстановка сюда соотношений (6.17) позволяет прийти к разрешающему уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (6.19)$$

Оно выглядит так же, как соответствующее уравнение в декартовых координатах, но здесь функция  $\varphi$  понимается как функция координат  $r, \theta$ , а оператор Лапласа определяется соотношением (6.10).

Отметим в заключение, что закон Гука в полярных координатах записывается так же, как и в декартовых. Для обобщённого плоского напряжённого состояния, в частности, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \mu\sigma_{\theta\theta}); \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \mu\sigma_{rr}); \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1 + \mu}{E}\sigma_{r\theta} \end{aligned} \quad (6.20)$$

или в обратной форме

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_{rr} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \mu\varepsilon_{rr}); \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E}{1 + \mu}\varepsilon_{r\theta}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

В случае плоской деформации эти соотношения остаются в силе, необходимо только постоянные  $E$  и  $\mu$  заменить на  $E'$  и  $\mu'$ , где

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1 + \mu}.$$

### 6.3 Периодические решения бигармонического уравнения

Во многих задачах перемещения и напряжения являются периодическими функциями угла  $\theta$ . Применительно к таким задачам решение уравнения  $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$  естественно искать в виде разложения в тригонометрический ряд по координате  $\theta$ :

$$\varphi(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m(r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{R}_m(r) \sin m\theta. \quad (6.22)$$

Здесь  $R_0(r)$ ,  $R_m(r)$ ,  $\bar{R}_m(r)$  – коэффициенты разложения, являющиеся функциями полярного радиуса. Для установления вида этих функций возьмём одно из частных решений, содержащихся в выражении (6.22):

$$\varphi_m(r, \theta) = R_m(r) \cos m\theta.$$

Подставим данное выражение в уравнение (6.19). Выполнив операцию  $\nabla^2 \varphi_m$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_m &= \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \theta^2} = \\ &= \left( \frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_m \right) \cos m\theta = l_m R_m \cos m\theta, \end{aligned}$$

где через

$$l_m = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \quad (6.23)$$

обозначен обыкновенный дифференциальный оператор. Повторное выполнение операции  $\nabla^2$  приводит на основании (6.19) к равенству

$$l_m l_m R_m = 0. \quad (6.24)$$

Данное равенство есть обыкновенное дифференциальное уравнение типа Эйлера относительно  $R_m$ . Его можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены переменной  $r = e^t$ . Но можно искать его частное решение и непосредственно в виде

$$R_m(r) = r^\alpha,$$

где  $\alpha$  – некоторая постоянная величина. Подставим данное выражение в уравнение (6.24):

$$\begin{aligned} l_m R_m(r) &= \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) r^\alpha = \\ &= \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \frac{\alpha}{r} r^{\alpha-1} - \frac{m^2}{r^2} r^\alpha = (\alpha^2 - m^2)r^{\alpha-2}; \end{aligned}$$

$$l_m l_m R_m(r) = (\alpha^2 - m^2) [(\alpha - 2)^2 - m^2] r^{\alpha-4} = 0.$$

Отсюда вытекает характеристическое уравнение

$$(\alpha^2 - m^2) [(\alpha - 2)^2 - m^2] = 0,$$

корни которого

$$\alpha_{1,2} = \pm m; \quad \alpha_{3,4} = \pm m + 2.$$

В случае  $m \geq 2$  все корни будут различны, и общее решение уравнения (6.24) может быть записано в виде

$$R_m(r) = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}, \quad (6.25)$$

где  $A_m, B_m, C_m, D_m$  – произвольные постоянные.

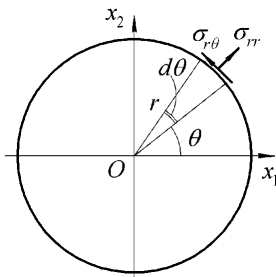
Для  $m = 0$  и  $m = 1$  имеются кратные корни. Если  $m = 0$ , то  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ;  $\alpha_3 = \alpha_4 = 2$ . Если же  $m = 1$ , то  $\alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_2 = -1$ ;  $\alpha_3 = 3$ ;  $\alpha_4 = 1$ . Когда два корня характеристического уравнения равны между собой (скажем,  $\alpha_2 = \alpha_1$ ), то одно из частных решений, соответствующих кратному корню, должно быть взято в виде  $r^{\alpha_1}$ , а другое – в виде  $r^{\alpha_1} \ln r$ . Таким образом, для  $m = 0$  и  $m = 1$  получаем следующие решения:

$$R_0(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r; \quad (6.26)$$

$$R_1(r) = A_1 r + B_1 r^{-1} + C_1 r^3 + D_1 r \ln r. \quad (6.27)$$

Аналогично выглядят функции  $\bar{R}_m(r)$ ; от (6.25), (6.26) и (6.27) они отличаются только тем, что вместо  $A_m, B_m, C_m, D_m$  будут фигурировать другие постоянные  $\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{C}_m, \bar{D}_m$ .

## 6.4 Непериодические решения бигармонического уравнения



**Рисунок 6.4 – К вычислению главного вектора и главного момента напряжений**

Вырежем из пластины (или призматического тела) слой единичной толщины и выделим его центральную часть радиуса  $r$  (рисунок 6.4). Найдём главный вектор и главный момент напряжений, действующих по контуру выделенного диска. Проекции  $P_1, P_2$  главного вектора на оси  $x_1, x_2$  и момент  $M_0$  напряжений относительно точки  $O$  определяются так:

$$P_1 = \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r d\theta;$$

$$P_2 = \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \sin \theta + \sigma_{r\theta} \cos \theta) r d\theta; \quad M_0 = \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta} r^2 d\theta. \quad (6.28)$$

Вычислим  $P_1$ ,  $P_2$  и  $M_0$  для периодических решений вида (6.22). Возьмём одну из функций, представленных в этом наборе, положив

$$\varphi_m(r, \theta) = R_m(r) \cos m\theta.$$

Соответствующие данной функции напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  определяются формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \theta^2} = \left( \frac{1}{r} R'_m - \frac{m^2}{r^2} R_m \right) \cos m\theta;$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} \right) = m \left( \frac{1}{r} R'_m - \frac{1}{r^2} R_m \right) \sin m\theta.$$

Подставим последние выражения в формулы (6.28) и учтём соотношения ортогональности тригонометрических функций

$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}.$$

Из этих соотношений сразу следует, что  $P_2 = 0$  и  $M_0 = 0$  для всех  $m$ , а  $P_1 = 0$  для всех  $m \neq 1$ . Но и в случае  $m = 1$  имеем для  $P_1$

$$P_1 = \left( \frac{1}{r} R'_1 - \frac{1}{r^2} R_1 \right) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta - \left( \frac{1}{r} R'_1 - \frac{1}{r^2} R_1 \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0.$$

Аналогичный результат получается и для функций вида

$$\bar{\varphi}_m(r, \theta) = \bar{R}_m(r) \sin m\theta.$$

Отсюда приходим к заключению, что периодическим решениям, представленным выражением (6.22), соответствуют самоуравновешенные напряжённые состояния. Но тогда и внешние силы, приложенные к выделенному участку тела, должны быть самоуравновешенными. Иными словами, с помощью полученного набора функций невозможно получить решение задачи, в которой внешняя нагрузка на выделенный участок не является самоуравновешенной.

В случае, скажем, действия сил и моментов, приложенных в начале координат, необходимо в дополнение к (6.22) привлечь другие функции, также удовлетворяющие бигармоническому уравнению (6.19). Они должны быть непериодическими функциями угла  $\theta$ , поскольку набор периодических функций исчерпывается выражением (6.22). В то же время напряжения должны оставаться периодическими, давая при этом отличные от нуля значения  $P_1$ ,  $P_2$  или  $M_0$ , не зависящие от  $r$ .

Имеется три функции, удовлетворяющие данным требованиям:

$$\tilde{\varphi}_1(r, \theta) = Ar\theta \sin \theta; \quad \tilde{\varphi}_2(r, \theta) = Br\theta \cos \theta; \quad \tilde{\varphi}_3(r, \theta) = C\theta, \quad (6.29)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – произвольные постоянные.

Для функции  $\tilde{\varphi}_1$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \theta^2} = 2A \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial r^2} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Как видим, напряжения являются периодическими функциями координаты  $\theta$ . Они удовлетворяют уравнению совместности

$$\nabla^2 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0,$$

поскольку  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ , и

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{rr} &= \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} = \\ &= 2A \left( \frac{2 \cos \theta}{r^3} - \frac{1 \cos \theta}{r r^2} - \frac{1 \cos \theta}{r^2 r} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция  $\tilde{\varphi}_1(r, \theta)$ , будучи решением бигармонического уравнения (6.19), может использоваться в качестве функции напряжений. В соответствии с формулами (6.28) находим для неё

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{2\pi} 2A \frac{\cos \theta}{r} \cos \theta r d\theta = 2\pi A; \\ P_2 &= \int_0^{2\pi} 2A \frac{\cos \theta}{r} \sin \theta r d\theta = 0; \quad M_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, главный вектор напряжений, соответствующих данной функции, направлен по оси  $x_1$  и является постоянной величиной, не зависящей от  $r$ .

Точно так же для функции  $\tilde{\varphi}_2(r, \theta)$  находим

$$\sigma_{rr} = -2B \frac{\sin \theta}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0,$$

причём

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\varphi}_2 = 0.$$

Для этой функции

$$P_1 = 0; \quad P_2 = -2\pi B; \quad M_0 = 0,$$

то есть главный вектор напряжений отличен от нуля и имеет направление вдоль оси  $x_2$ .

Наконец, нетрудно убедиться, что и функция  $\tilde{\varphi}_3$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\varphi}_3 = 0.$$

Для неё

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = \frac{C}{r^2};$$

$$P_1 = P_2 = 0; \quad M_0 = 2\pi C,$$

так что функции  $\varphi_3$  соответствует не зависящий от радиуса  $r$  главный момент напряжений  $M_0$ .

## 6.5 Осесимметричное напряжённое состояние. Задача Ламе

Рассмотрим случай, когда круглая пластина или круговой цилиндр испытывает действие осесимметричной нагрузки. Напряжённое состояние тела будет также осесимметричным, и функция напряжений должна зависеть только от полярного радиуса. Исходя из выражений (6.22) и (6.26), запишем

$$\varphi(r) = R_0(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r. \quad (6.30)$$

Напряжения в этом случае связаны с функцией  $\varphi$  соотношениями, вытекающими из формул (6.17):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}; \quad \sigma_{r\theta} = 0. \quad (6.31)$$

Вычислив производную

$$\frac{d\varphi}{dr} = 2B_0 r + \frac{C_0}{r} + D_0 (2r \ln r + r),$$

в соответствии с равенствами (6.31) получаем



$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2B_0 + \frac{C_0}{r^2} + D_0(2\ln r + 1); \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} + D_0(2\ln r + 3).\end{aligned}$$

Выражение деформаций через напряжения запишем применительно к случаю обобщённого плоского напряжённого состояния:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \mu\sigma_{\theta\theta}); \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \mu\sigma_{rr}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 + \frac{1+\mu}{r^2}C_0 + 2(1-\mu)D_0 \ln r + (1-3\mu)D_0 \right]; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 - \frac{1+\mu}{r^2}C_0 + 2(1-\mu)D_0 \ln r + (3-\mu)D_0 \right].\end{aligned}$$

В силу осевой симметрии все точки тела будут перемещаться только в радиальном направлении:  $u_r = u_r(r)$ ;  $u_\theta = 0$ . Перемещение  $u_r$  связано с компонентами тензора деформации соотношениями (6.14)...(6.16), которые в случае осевой симметрии сводятся к двум равенствам

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (6.32)$$

Второе из них приводит к следующему выражению для  $u_r$ :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 r - \frac{1+\mu}{r}C_0 + 2(1-\mu)D_0 r \ln r + (3-\mu)D_0 r \right].$$

Производная от  $u_r$ , равная

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 + \frac{1+\mu}{r^2}C_0 + 2(1-\mu)D_0 \ln r + (5-3\mu)D_0 \right],$$

должна, в силу первого равенства (6.32), совпадать с  $\varepsilon_{rr}$ . Отсюда вытекает требование, чтобы  $D_0 = 0$ . Опуская слагаемые, содержащие  $D_0$ , запишем окончательно расчётные соотношения:

$$\sigma_{rr} = 2B_0 + \frac{C_0}{r^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2B_0 - \frac{C_0}{r^2}; \quad (6.33)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 + \frac{1+\mu}{r^2}C_0 \right]; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 - \frac{1+\mu}{r^2}C_0 \right]; \quad (6.34)$$

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)B_0 r - \frac{1+\mu}{r}C_0 \right]. \quad (6.35)$$

Входящие сюда постоянные  $B_0$  и  $C_0$  должны быть найдены из граничных условий.

В качестве простейшего примера рассмотрим круглую пластину, радиуса  $a$ , нагруженную по контуру равномерной радиальной нагрузкой  $p$  (рисунок 6.5).

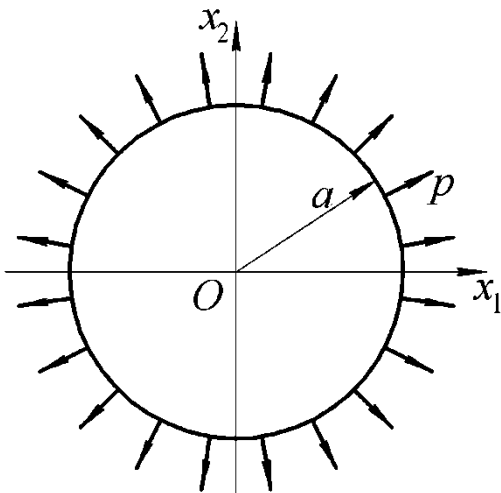
В данном случае необходимо принять  $C_0 = 0$ , поскольку напряжения должны иметь конечные значения при  $r = 0$ . Кроме того, при  $r = a$  должно выполняться статическое условие  $\sigma_{rr} = p$ . Отсюда находим  $2B_0 = p$ , так что для напряжений получаем значения

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p.$$

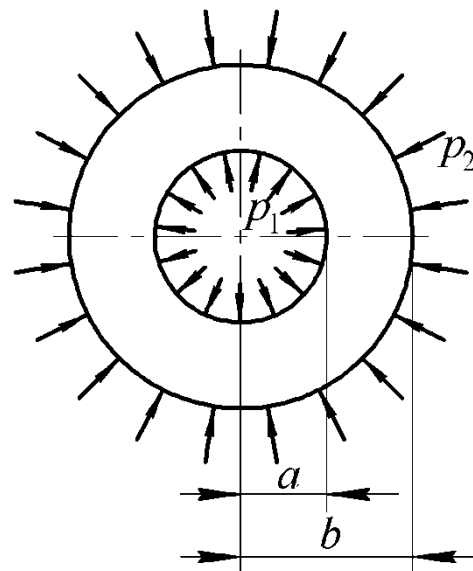
Как видим, в пластине возникает однородное напряжённое состояние в виде равномерного двустороннего растяжения в плоскости  $x_1x_2$ . Радиальное перемещение определяется при этом формулой

$$u_r = \frac{(1 - \mu) pr}{E}.$$

Другим примером использования полученных соотношений служит задача Ламе о расчёте напряжений в толстостенном цилиндре, нагруженном давлением  $p_1$  по внутренней и давлением  $p_2$  по наружной боковым поверхностям (рисунок 6.6).



**Рисунок 6.5 – Круглая пластина под действием равномерной радиальной нагрузки**



**Рисунок 6.6 – Толстостенный цилиндр при осесимметричном нагружении**

Полученные выше соотношения относятся к обобщённому плоскому напряжённому состоянию. Но поперечная деформация пластины  $\varepsilon_{33}$ , определяемая по формуле

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}),$$

в соответствии с выражениями (6.34) будет равна

$$\varepsilon_{33} = -\frac{4\mu B_0}{E}.$$

Она не зависит от  $r$ , а это означает, что основания пластины при осесимметричном деформировании остаются плоскими. Цилиндр можно представить себе как совокупность отдельных дисков, которые при деформации не будут взаимодействовать друг с другом, так что соотношения (6.33)...(6.35) могут быть применены и к расчёту цилиндра.

Для определения произвольных постоянных мы располагаем двумя условиями

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = -p_1; \quad \sigma_{rr}|_{r=b} = -p_2,$$

которые приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} 2B_0 + \frac{C_0}{a^2} &= -p_1; \\ 2B_0 + \frac{C_0}{b^2} &= -p_2. \end{aligned}$$

Решая систему, находим

$$2B_0 = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2}; \quad C_0 = -(p_1 - p_2) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Подстановка данных соотношений в формулы (6.33) приводит к искомым зависимостям напряжений от радиуса:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_1 - p_2}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_1 - p_2}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

В частном случае, когда действует только внутреннее давление ( $p_1 = p$ ,  $p_2 = 0$ ), будем иметь

$$\sigma_{rr} = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p}{r^2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} + \frac{p}{r^2} \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}.$$

Эпюры напряжений показаны на рисунке 6.7,а. Наиболее напряжёнными оказываются точки внутренней поверхности, где

$$\sigma_{rr} = -p; \quad \sigma_{\theta\theta} = p \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2}.$$

Пусть, например, цилиндр имеет размеры  $a = 100$  мм,  $b = 200$  мм. Тогда  $\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = 1,67p$ . Если воспользоваться третьей теорией прочности, то максимальное эквивалентное напряжение составит

$$\sigma_{\text{экр. макс}} = |\sigma_1 - \sigma_3|_{r=a} = |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|_{r=a} = 2,67p.$$

Отметим, что увеличение внешнего диаметра цилиндра не даёт кардинального снижения напряжений. Даже при  $b \rightarrow \infty$  будем иметь  $\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = p$ , а  $\sigma_{\text{экр. макс}} = 2p$ .

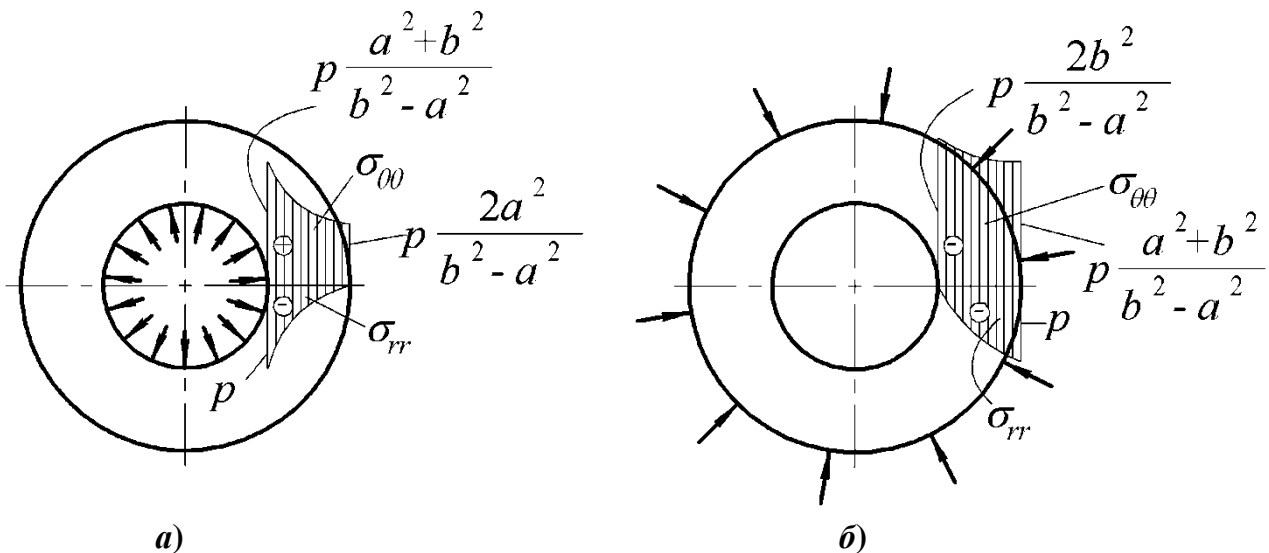


Рисунок 6.7 – Напряжение в толстостенном цилиндре при действии внутреннего (а) и наружного (б) давления

В другом частном случае, когда действует только наружное давление ( $p_1 = 0, p_2 = p$ ), закон распределения напряжений даётся формулами

$$\sigma_{rr} = -p \frac{b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p}{r^2} \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p \frac{b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p}{r^2} \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}.$$

Оба напряжения оказываются сжимающими; соответствующие эпюры показаны на рисунке 6.7,б. Наиболее напряжёнными и здесь оказываются точки внутренней поверхности, где

$$\sigma_{\theta\theta} = -p \frac{2b^2}{b^2 - a^2}.$$

При  $a \ll b$  величина  $|\sigma_{\theta\theta}|_{\max} = 2p$ . Как было показано выше, при отсутствии отверстия всюду  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = p$ . Следовательно, можно говорить о концентрации напряжений около малого отверстия в пластине или цилиндре в условиях всестороннего растяжения или сжатия; коэффициент концентрации оказывается равным 2.

Отметим в заключение, что формулы Ламе (6.36) находят применение при расчёте орудийных стволов, корпусов пирозамков и т.п. конструкций.

## 6.6 Чистый изгиб кривого бруса (задача Головина)

Рассмотрим участок кольцевой пластины, выделенный двумя радиальными сечениями (рисунок 6.8). Радиусы внутренней и внешней окружностей обозначим буквами  $a$  и  $b$ ; толщину пластины примем равной 1. Данное тело можно трактовать как плоский криволинейный брус прямоугольного сечения с круговой осью. Найдём напряжения, которые возникают в нём при действии моментов  $M$ , приложенных по концам бруса.

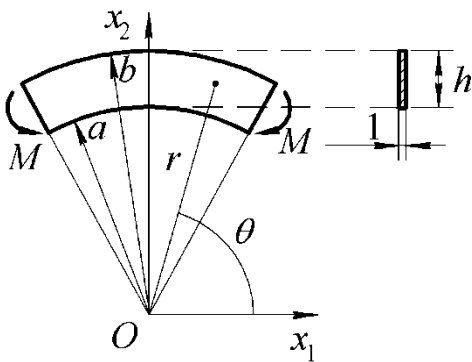


Рисунок 6.8 – Кривой брус при чистом изгибе

Во всех сечениях бруса изгибающий момент имеет одинаковое значение  $M$ . Напряжения также должны быть одинаковы во всех сечениях. Следовательно, функция напряжений не должна зависеть от угла  $\theta$ , то есть её нужно взять в виде (6.30):

$$\varphi(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r.$$

В отличие от случая круглой пластины, здесь помимо радиальных возникают окружные перемещения. Поэтому заключение о равенстве нулю постоянной  $D_0$  теряет силу, и для напряжений следует воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2B_0 + \frac{C_0}{r^2} + D_0(2 \ln r + 1); \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} + D_0(2 \ln r + 3). \end{aligned} \quad (6.37)$$

На криволинейных границах должны выполняться условия

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0; \quad \sigma_{rr}|_{r=b} = 0, \quad (6.38)$$

которые дают два уравнения относительно произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} 2B_0 + \frac{C_0}{a^2} + D_0(2\ln a + 1) &= 0; \\ 2B_0 + \frac{C_0}{b^2} + D_0(2\ln b + 1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Кроме того, результирующая окружных напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  в сечении должна равняться нулю (поскольку в сечениях отсутствует осевая сила), а их момент относительно точки  $O$  должен иметь значение  $M$ :

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta} dr = 0; \quad \int_a^b \sigma_{\theta\theta} r dr = M. \quad (6.40)$$

Первое из данных равенств удовлетворяется тождественно в силу соотношений (6.38). Действительно, так как

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2\varphi}{dr^2},$$

первое равенство (6.40) может быть преобразовано следующим образом:

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta} dr = \int_a^b \frac{d^2\varphi}{dr^2} dr = \frac{d\varphi}{dr} \Big|_a^b = \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=b} - \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=a} = 0.$$

Учитывая, что

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}$$

и принимая во внимание (6.38), убеждаемся в справедливости утверждения.

Левую часть второго равенства (6.40) преобразуем с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b \sigma_{\theta\theta} r dr = \int_a^b \frac{d^2\varphi}{dr^2} r dr = \int_a^b \frac{d}{dr} \left( \frac{d\varphi}{dr} r \right) dr - \int_a^b \frac{d\varphi}{dr} dr = \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) \Big|_a^b - \varphi \Big|_a^b.$$

Первое слагаемое в полученном выражении равно нулю в силу условий (6.38), и мы получаем ещё одно соотношение для отыскания произвольных постоянных в виде

$$-\varphi \Big|_a^b = M.$$

Подстановка сюда выражения для  $\varphi$  даёт равенство

$$B_0(b^2 - a^2) + C_0 \ln \frac{b}{a} + D_0(b^2 \ln b - a^2 \ln a) = -M. \quad (6.41)$$

Решая совместно систему уравнений (6.39) и (6.41), можно получить значения произвольных постоянных:

$$B_0 = -\frac{M}{d} \left[ b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a) \right];$$

$$C_0 = \frac{4M}{d} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a};$$

$$D_0 = \frac{2M}{d} (b^2 - a^2),$$

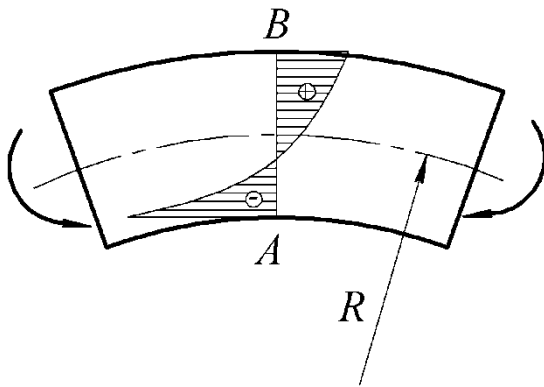
где

$$d = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left( \ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Подстановка полученных выражений в (6.37) позволяет прийти к зависимостям

$$\sigma_{rr} = \frac{4M}{d} \left( \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{4M}{d} \left( -\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right).$$



**Рисунок 6.9 – Распределение напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  по сечению криволинейного бруса**

Характер изменения напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ , по сечению бруса показан на рисунке 6.9. Как видим, это распределение не подчиняется закону плоскости. Максимальные по абсолютной величине напряжения возникают на внутренней поверхности. Нейтральная линия не совпадает со средней окружностью радиуса

$R = (a + b)/2$  – она смещена в сторону центра кривизны бруса.

Принимая  $r = a$  или  $r = b$ , найдём напряжения в крайних точках  $A$  и  $B$ . Если положить

$$a = R - \frac{h}{2} = R \left( 1 - \frac{h}{2R} \right); \quad b = R + \frac{h}{2} = R \left( 1 + \frac{h}{2R} \right),$$

то можно прийти к следующей расчётной формуле:

$$\sigma_{\theta\theta} = \pm K \frac{M h}{I 2}, \quad (6.42)$$

где  $h = b - a$  – высота сечения;  $I = h^3/12$  – его момент инерции. Коэффициент  $K$ , учитывающий кривизну бруса, определяется выражением

$$K = \frac{4c^2}{3} \frac{2c - (1-c)^2 \ln \frac{1+c}{1-c}}{4c^2 - (1-c^2)^2 \left( \ln \frac{1+c}{1-c} \right)^2}, \quad (6.43)$$

в котором

$$c = \pm \frac{h}{2R}. \quad (6.44)$$

Знаки плюс в формулах (6.42) и (6.44) относятся к точке  $B$ , минус – к точке  $A$ .

Что касается радиального напряжения, то его максимальная величина по модулю значительно меньше, чем  $|\sigma_{\theta\theta}|_{\max}$ . Она возникает на окружности, радиус  $r_0$  которой несколько меньше среднего радиуса  $R$  и определяется по формуле

$$r_0 = R(1-c^2) \sqrt{\frac{1}{2c} \ln \frac{1+c}{1-c}},$$

в этом случае выбор знака в формуле (6.44) безразличен.

В сопротивлении материалов задача об изгибе кривого бруса решается на основе гипотезы плоских сечений. Принимается, что сечения остаются плоскими, поворачиваясь вокруг некоторой точки, не совпадающей с центром тяжести поперечного сечения; радиальные напряжения в этом решении игнорируются. Значения нормальных напряжений в крайних точках  $A$  и  $B$  сечения могут быть здесь также представлены в виде (6.42), но для коэффициента  $K$  вместо (6.43) получается выражение

$$K = \frac{c}{3} \left[ \frac{2c^2}{(1+c) \left( \ln \frac{1+c}{1-c} - 2c \right)} + 1 \right], \quad (6.45)$$

где величина  $c$  по-прежнему определяется формулой (6.44).

В таблице 6.1 дано сопоставление величины  $K$ , получаемой по формулам (6.43) и (6.45), для некоторых значений параметра кривизны  $h/(2R)$ .

Как видим, формулы сопротивления материалов дают хорошую точность для не слишком больших параметров кривизны. Заметим, что если определить перемещения, то можно убедиться, что поперечные сечения действительно



остаются плоскими. Погрешность решения в сопротивлении материалов связана исключительно с учётом радиальных напряжений.

Таблица 6.1 – Значения коэффициента  $K$

$\frac{h}{2R}$	Точное решение		Сопротивление материалов	
	Точка $A$	Точка $B$	Точка $A$	Точка $B$
0,05	1,035	0,968	1,034	0,968
0,5	1,528	0,753	1,523	0,730
0,8	2,435	0,667	2,591	0,584

Отметим в заключение, что в случае малой кривизны, когда  $a \geq 5h$ , можно пренебречь её влиянием на напряжённое состояние, вычисляя нормальные напряжения в сечениях так же, как и для прямого бруса (то есть принимая в (6.42) коэффициент  $K = 1$ ).

## 6.7 Расчёт вращающихся круглых дисков

Рассмотрим тонкий круглый диск, вращающийся равномерно вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . На данном примере проиллюстрируем решение плоской задачи в перемещениях.

В соответствии с принципом Даламбера движущееся тело можно рассматривать как находящееся в статическом равновесии, если к числу внешних сил добавить силы инерции. Точки диска имеют при вращении центростремительное ускорение  $\omega^2 r$ , которое направлено к оси вращения. Следовательно, диск можно считать неподвижным, введя в качестве внешней радиальную объёмную силу, направленную от оси вращения.

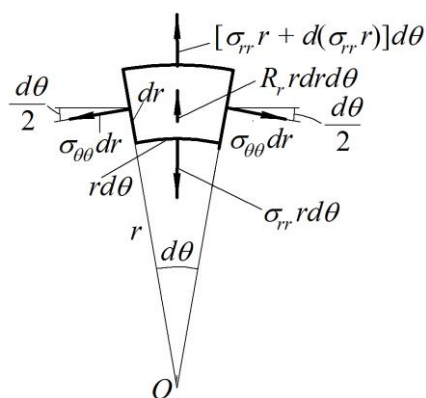


Рисунок 6.10 – К выводу уравнения равновесия для вращающегося диска

Величина силы в расчёте на единицу объёма будет

$$R_r = \rho \omega^2 r, \quad (6.46)$$

где  $\rho$  – плотность материала диска.

На рисунке 6.10 показаны силы, действующие на бесконечно малый элемент диска. Если спроектировать силы на радиальное направление, получим следующее условие равновесия:

$$[\sigma_{rr}r + d(\sigma_{rr}r)]d\theta - \sigma_{rr}rd\theta - 2\sigma_{\theta\theta}dr \frac{d\theta}{2} + R_r r dr d\theta = 0.$$

После очевидных преобразований будем иметь уравнение

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R_r = 0. \quad (6.47)$$

Выразим его через радиальное перемещение  $u_r$ . Из геометрических соотношений имеем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r},$$

а по закону Гука –

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{rr} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{\mu}{r}u_r\right); \quad (6.48)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \mu\varepsilon_{rr}) = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u_r}{r} + \mu\frac{du_r}{dr}\right). \quad (6.49)$$

Подстановка выражений (6.48) и (6.49) в уравнение равновесия (6.47) позволяет привести его к виду

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2}u_r = -\frac{1-\mu^2}{E}R_r.$$

Замечая справедливость равенства

$$\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2}u_r = \frac{d}{dr}\left(\frac{u_r}{r}\right),$$

оператор в левой части полученного уравнения можно записать в следующей форме:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u_r}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left[\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r}\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\right].$$

С учётом соотношения (6.46) приходим к равенству

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\right] = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\omega^2r.$$

Его последовательное интегрирование даёт

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r) = -\frac{1-\mu^2}{2E}\rho\omega^2r^2 + C_1;$$

$$\frac{d}{dr}(ru_r) = -\frac{1-\mu^2}{2E}\rho\omega^2r^3 + C_1r;$$

$$\begin{aligned}
ru_r &= -\frac{1-\mu^2}{8E}\rho\omega^2r^4 + \frac{C_1}{2}r^2 + C_2; \\
u_r &= -\frac{1-\mu^2}{8E}\rho\omega^2r^3 + \frac{C_1}{2}r + \frac{C_2}{r}.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования.

Так как

$$\frac{du_r}{dr} = -\frac{3(1-\mu^2)}{8E}\rho\omega^2r^2 + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2},$$

формулы для напряжений в соответствии с (6.48) и (6.49) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \left( -\frac{3}{8}\rho\omega^2r^2 - \frac{\mu}{8}\rho\omega^2r^2 \right) + \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \mu C_1 + \mu \frac{C_2}{r^2} \right) = \\
&= -\frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2r^2 + E \left[ \frac{C_1}{2(1-\mu)} - \frac{C_2}{(1+\mu)r^2} \right]; \\
\sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2r^2 + E \left[ \frac{C_1}{2(1-\mu)} + \frac{C_2}{(1+\mu)r^2} \right].
\end{aligned}$$

Вводя далее вместо  $C_1$  и  $C_2$  новые постоянные  $A$  и  $B$  по формулам

$$A = \frac{EC_1}{2(1-\mu)}; \quad B = \frac{EC_2}{1+\mu},$$

запишем окончательно

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -\frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2r^2 + A - \frac{B}{r^2}; \\
\sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2r^2 + A + \frac{B}{r^2}.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Постоянные  $A$  и  $B$  должны быть подчинены граничным условиям. Рассмотрим, например, случай диска без отверстия. Тогда постоянную  $B$  следует положить равной нулю, поскольку напряжения должны оставаться конечными при  $r = 0$ . Для определения постоянной  $A$  имеем условие

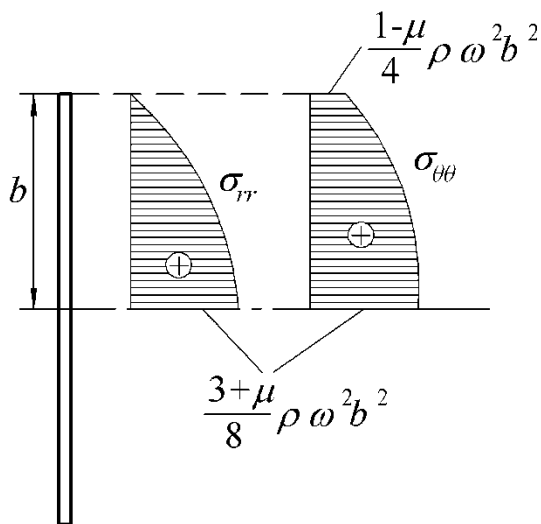
$$\sigma_{rr}|_{r=b} = 0,$$

где  $b$  – радиус диска. Отсюда

$$-\frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2b^2 + A = 0,$$

так что

$$A = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2b^2.$$



**Рисунок 6.11 – Напряжения в диске без отверстия**

Распределение напряжений в этом случае даётся формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \cdot \frac{r^2}{b^2}\right);$$

соответствующие эпюры показаны на рисунке 6.11.

Пусть, например, стальной диск ( $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ;  $\mu = 0,3$ ) радиуса  $b = 0,4 \text{ м}$ , вращается с угловой скоростью  $15000 \text{ об/мин}$ . В этом случае

$$\omega = \frac{15000}{60} \cdot 2\pi = 500\pi \text{ рад/с},$$

и наибольшие напряжения, возникающие при  $r = 0$ , составят

$$\sigma_{rr \text{ max}} = \sigma_{\theta\theta \text{ max}} = 1270 \text{ МПа}.$$

Иная картина распределения напряжений получается, когда диск имеет центральное отверстие. Если  $a$  – радиус отверстия, то граничные условия запишутся так:

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0; \quad \sigma_{rr}|_{r=b} = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений относительно  $A$  и  $B$ :

$$-\frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 a^2 + A - \frac{B}{a^2} = 0;$$

$$-\frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 b^2 + A - \frac{B}{b^2} = 0.$$

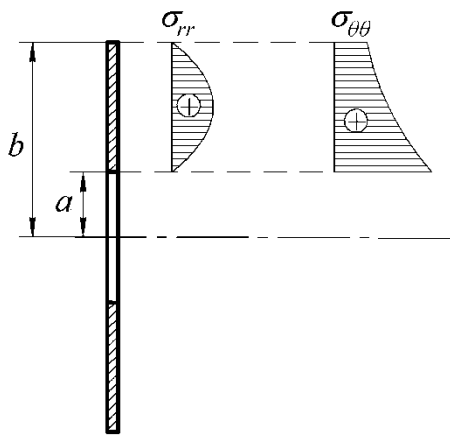
Решение системы:

$$A = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 (a^2 + b^2); \quad B = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2.$$

Подстановка данных выражений в формулы (6.51) приводит к искомым зависимостям

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \cdot \frac{r^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2}\right).$$



**Рисунок 6.12 – Напряжения в диске с отверстием**

Эпюры напряжений показаны на рисунке 6.12. Наибольшие напряжения возникают при  $r = a$ , где

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0,$$

$$\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = \frac{3+\mu}{4} \rho \omega^2 b^2 \left( 1 + \frac{1-\mu}{3+\mu} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right).$$

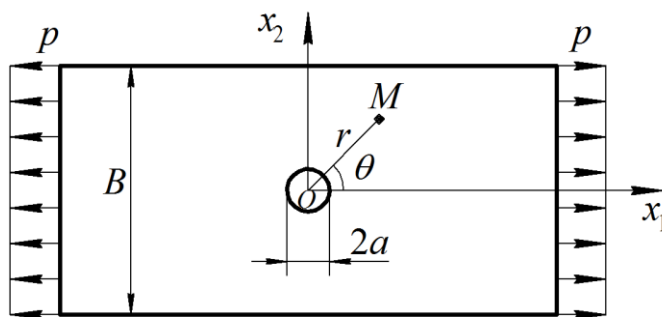
В случае весьма малого отверстия, когда  $a \ll b$ , максимальное окружное напряжение оказывается равным

$$\sigma_{\theta\theta \max} = \frac{3+\mu}{4} \rho \omega^2 b^2,$$

что вдвое превышает максимальное напряжение для диска без отверстия. Таким образом, мы снова имеем здесь дело с концентрацией напряжений возле малого отверстия; коэффициент концентрации равен 2.

### 6.8 Концентрация напряжений возле круглого отверстия в пластине при растяжении (задача Кирша)

Пусть пластина, ослабленная малым круглым отверстием, испытывает одноосное растяжение вдоль оси  $x_1$  (рисунок 6.13). Предполагается, что диаметр отверстия  $2a \ll B$ , где  $B$  – ширина пластины.



**Рисунок 6.13 – Пластина с малым отверстием при одноосном растяжении**

При отсутствии отверстия напряжённое состояние пластины, как было установлено ранее, описывается при растяжении вдоль оси  $x_1$  полиномиальной функцией напряжений

$$\varphi^0 = Cx_2^2.$$

Напряжения в неослабленной пластине

$$\sigma_{11}^0 = \frac{\partial^2 \varphi^0}{\partial x_2^2} = 2C; \quad \sigma_{22}^0 = \sigma_{12}^0 = 0.$$

Из равенства  $\sigma_{11}^0 = p$ , где  $p$  – значение внешней нагрузки, находим  $C = p/2$ , так что можно записать

$$\varphi^0 = \frac{P}{2} x_2^2.$$

Перейдя к полярным координатам, положим здесь  $x_2 = r \sin \theta$ :

$$\varphi^0 = \frac{pr^2}{2} \sin^2 \theta.$$

Воспользовавшись формулой  $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ , придадим выражению для  $\varphi^0$  окончательный вид

$$\varphi^0 = \frac{pr^2}{4} (1 - \cos 2\theta). \quad (6.52)$$

Отверстие вносит возмущение в данное напряжённое состояние из-за появления дополнительной границы. Если размеры отверстия малы, то возмущение носит локальный характер. Вдали от отверстия напряжённое состояние будет практически таким же, как и в пластине без отверстия. Судя по формуле (6.52) функция напряжений вдали от отверстия должна быть представлена разложением в ряд по  $\cos m\theta$ , в котором содержится всего два члена, соответствующих  $m = 0$  и  $m = 2$ . Исходя из этого будем решение поставленной задачи для пластины с отверстием искать в форме

$$\varphi(r, \theta) = R_0(r) + R_2(r) \cos 2\theta,$$

где  $R_0(r)$  и  $R_2(r)$  даются формулами (6.25) и (6.26). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + \\ & + \left( A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + C_2 r^4 + D_2 \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Потребуем, чтобы вдали от отверстия функция напряжений совпадала с выражением (6.52). Преобразуем (6.53), вынеся за скобки множитель  $r^2$ :

$$\varphi(r, \theta) = r^2 \left[ \frac{A_0}{r^2} + B_0 + \frac{C_0}{r^2} \ln r + D_0 \ln r + \left( A_2 + \frac{B_2}{r^4} + C_2 r^2 + \frac{D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right].$$

При удалении от отверстия, то есть при  $r \rightarrow \infty$ , выражение в квадратных скобках должно стремиться к величине

$$\frac{P}{4} (1 - \cos 2\theta).$$

Для выполнения данного требования следует положить, во-первых,

$$D_0 = 0, \quad C_2 = 0,$$

поскольку функции с этими постоянными неограниченно возрастают с ростом  $r$ . Заметим, что функция  $\ln r/r^2$  при  $r \rightarrow \infty$  стремится к нулю, в чём можно убедиться, раскрыв неопределённость по правилу Лопиталья.

Кроме того, необходимо принять

$$B_0 = \frac{p}{4}; \quad A_2 = -\frac{p}{4}.$$

С учётом сказанного приходим к функции напряжений

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + \frac{pr^2}{4} + C_0 \ln r + \left( -\frac{pr^2}{4} + \frac{B_2}{r^2} + D_2 \right) \cos 2\theta. \quad (6.54)$$

Оставшиеся произвольные постоянные должны быть найдены из статических условий на контуре отверстия. Вычислив производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{pr}{2} + \frac{C_0}{r} + \left( -\frac{pr}{2} - \frac{2B_2}{r^3} \right) \cos 2\theta; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\left( -\frac{pr^2}{2} + \frac{2B_2}{r^2} + 2D_2 \right) \sin 2\theta; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -\left( -pr^2 + \frac{4B_2}{r^2} + 4D_2 \right) \cos 2\theta, \end{aligned}$$

составим выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{p}{2} + \frac{C_0}{r^2} + \left( \frac{p}{2} - \frac{6B_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{p}{2} - \frac{C_0}{r^2} + \left( -\frac{p}{2} + \frac{6B_2}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \left( -\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{r^4} - \frac{2D_2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Отметим, что постоянная  $A_0$  в эти формулы не входит, так что её значение безразлично.

На контуре отверстия должны выполняться условия

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = 0; \quad \sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} + \frac{C_0}{a^2} + \left( \frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} \right) \cos 2\theta &= 0. \\ \left( -\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{2D_2}{a^2} \right) \sin 2\theta &= 0. \end{aligned}$$

Данные равенства должны быть справедливы в каждой точке контура, то есть при любых значениях угла  $\theta$ . Следовательно, должны удовлетворяться соотношения

$$\begin{aligned}\frac{p}{2} + \frac{C_0}{a^2} &= 0; \\ \frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} &= 0; \\ -\frac{p}{2} - \frac{6B_2}{a^4} - \frac{2D_2}{a^2} &= 0.\end{aligned}$$

Первое из них приводит к значению

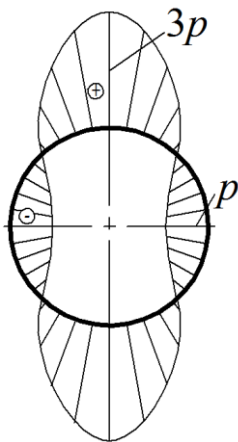
$$C_0 = -\frac{pa^2}{2}.$$

Два других образуют систему уравнений, решая которую, находим

$$6B_2 = -\frac{3pa^4}{2}; \quad 2D_2 = pa^2.$$

По формулам (6.55) приходим теперь к следующим выражениям для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left( 1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{6.56}$$



**Рисунок 6.14 – Распределение окружных напряжений по контуру отверстия**

На контуре отверстия отлично от нуля только напряжение  $\sigma_{\theta\theta}$ , которое изменяется здесь по закону

$$\sigma_{\theta\theta}|_{r=a} = p(1 - 2\cos 2\theta).$$

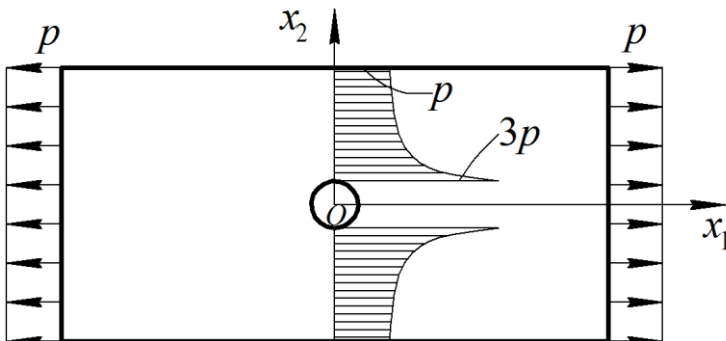
Эта зависимость показана на рисунке 6.14. Максимальное значение  $\sigma_{\theta\theta}$ , равное  $3p$ , получается при  $\theta = \pi/2$ .

Найдём далее распределение напряжений  $\sigma_{11}$  в ослабленном поперечном сечении пластины, проходящем через центр отверстия. В этом сечении  $\sigma_{11}$  совпадает с окружным напряжением



$\sigma_{\theta\theta}$ , взятюм при  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . В соответствии со второй формулой (6.56) получаем

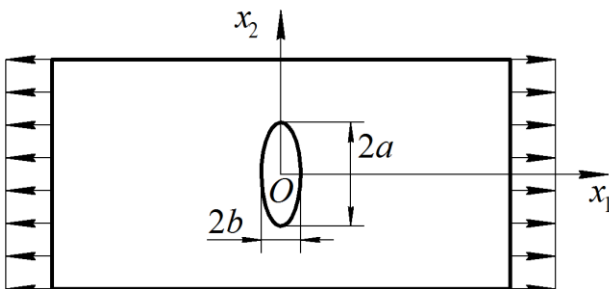
$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{p}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right).$$



**Рисунок 6.15 – Распределение напряжений в ослабленном сечении пластины**

Данная зависимость представлена на рисунке 6.15. Напряжение  $\sigma_{11}$  имеет максимальное значение  $3p$  на контуре отверстия и быстро убывает до номинального значения  $p$  по мере удаления от него. Таким образом, возле малого отверстия возникает концентрация напряжений.

Коэффициент концентрации  $k$ , равный отношению максимального напряжения к номинальному, имеет в данном случае значение  $k = 3$ .



**Рисунок 6.16 – Растяжение пластины с эллиптическим отверстием**

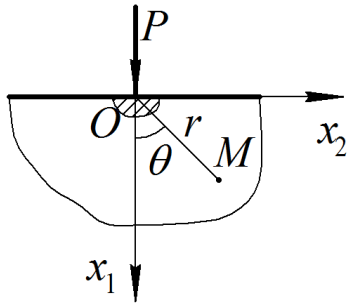
Получены решения и более сложных задач о концентрации напряжений. Например, для малого эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$  (рисунок 6.16) при равномерном одноосном растяжении коэффициент концентрации оказывается равным

$$k = 1 + 2 \frac{a}{b}.$$

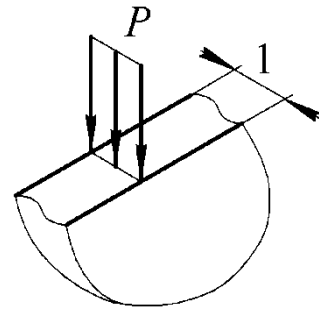
При  $b \rightarrow 0$  величина  $k$  стремится к бесконечности. В действительности вследствие образования зоны пластических деформаций напряжения останутся конечными. Ясно, что в этой зоне соотношения теории упругости теряют силу.

## 6.9 Действие сосредоточенной силы на полубесконечную пластину (задача Фламана)

Рассмотрим действие силы, приложенной на границе полубесконечной пластины единичной толщины, как показано на рисунке 6.17. Считается, что сила  $P$  равномерно распределена по толщине пластины (рисунок 6.18).



**Рисунок 6.17 – Полубесконечная пластина под действием сосредоточенной силы**



**Рисунок 6.18 – Распределение силы по толщине пластины**

Вблизи точки приложения силы напряжения весьма велики, поскольку сила приложена к бесконечно малой площадке. Здесь возникает область пластических деформаций, в которой соотношения теории упругости неприменимы. Поэтому исключим эту область (на рисунке 6.17 она заштрихована) из рассмотрения.

Пластину отнесём к системе координат  $x_1, x_2$ , начало которой совместим с точкой приложения силы, а ось  $x_1$  направим перпендикулярно краю пластины. Для построения решения воспользуемся полярными координатами  $r, \theta$ . Учитывая, что нагрузка не является самоуравновешенной, в качестве функции напряжений возьмём непериодическую функцию из набора (6.29):

$$\varphi(r, \theta) = Ar\theta \sin \theta, \quad (6.57)$$

где  $A$  – постоянная.

Производные от функции  $\varphi$  равны

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = A\theta \sin \theta; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = Ar(\theta \cos \theta + \sin \theta);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = Ar(-\theta \sin \theta + 2 \cos \theta),$$

так что

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 2A \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Данная система напряжений удовлетворяет не только дифференциальным уравнениям равновесия и уравнениям совместности деформаций, но и условиям на границе тела:

$$\sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Значение постоянной  $A$  можно найти из условия равновесия участка пластины, выделенного окружностью произвольного радиуса  $r$  (рисунок 6.19), в направлении оси  $x_1$ :

$$P + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} \cos \theta r d\theta = 0.$$

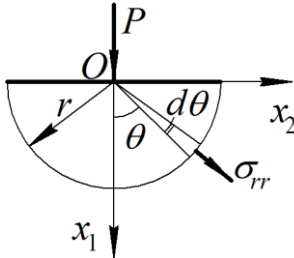


Рисунок 6.19 – Участок пластины радиуса  $r$

Подставив сюда выражение (6.58) для  $\sigma_{rr}$ , будем иметь

$$P + 2A \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 0,$$

откуда получаем

$$A = -\frac{P}{\pi}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи даётся следующими формулами:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (6.59)$$

Подобным же образом решается ряд родственных задач. На рисунке 6.20 показан плоский клин, испытывающий сжатие силой, приложенной в его вершине. Функция напряжений в этом случае снова имеет вид (6.57), а напряжения определяются равенствами (6.58). Но условие для определения постоянной  $A$  запишется здесь так:

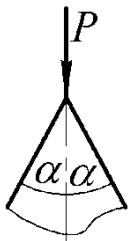


Рисунок 6.20 – Сжатие клина

$$P + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{rr} \cos \theta r d\theta = 0,$$

где  $\alpha$  – угол полураствора клина. В итоге постоянная  $A$  оказывается равной

$$A = -\frac{P}{2\alpha + \sin 2\alpha},$$

и для напряжений получаем выражения

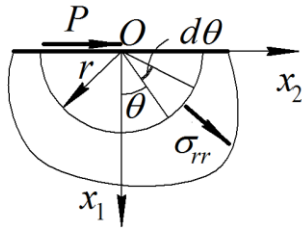
$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

Такой же подход можно использовать в случае, когда на границе полубесконечной пластины приложена сила, действующая вдоль её края (рисунок 6.21). Здесь следует воспользоваться функцией напряжений вида

$$\varphi(r, \theta) = Br\theta \cos \theta,$$

которой соответствуют следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2B}{r} \sin \theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$



**Рисунок 6.21 – Полубесконечная пластина под действием силы, направленной вдоль края**

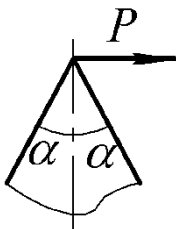
Значение постоянной  $B$  определяется условием равновесия участка пластины, выделенного окружностью радиуса  $r$ , в направлении оси  $x_2$ :

$$P + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} \sin \theta r d\theta = 0.$$

Отсюда находим  $B = \frac{P}{\pi}$ , и для напря-

жений получаем

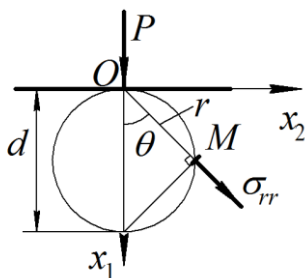
$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$



**Рисунок 6.22 – Изгиб клина силой в вершине**

Аналогично решается задача об изгибе клина силой, приложенной в вершине (рисунок 6.22). Распределение напряжений в данном случае даётся равенствами

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$



**Рисунок 6.23 – Радиальные напряжения в точках окружности**

Вернёмся к случаю действия силы перпендикулярно краю полубесконечной пластины и проанализируем полученное решение. Рассмотрим окружность диаметра  $d$ , касающуюся края пластины в точке приложения силы (рисунок 6.23). Для произвольной точки  $M$ , лежащей на окружности, справедливо равенство

$$r = d \cos \theta,$$

так что можно записать для этой точки

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta = -\frac{2P}{\pi d}. \quad (6.60)$$

Как видим, напряжения  $\sigma_{rr}$  одинаковы во всех точках окружности, то есть указанная окружность является для  $\sigma_{rr}$  линией равного уровня.

Перейдём далее от полярных координат к декартовым. Связь между компонентами напряжений в двух системах координат можно установить, рассматривая равновесие бесконечно малых элементов пластины в форме прямоугольных треугольников, катеты которых ориентированы вдоль радиуса и перпендикулярно ему, а гипотенуза – параллельно оси  $x_1$  или оси  $x_2$  (рисунок 6.24).

Условия равновесия сил, действующих на указанные элементы, в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$  приводят к следующим равенствам:

$$\sigma_{11} = \sigma_{rr} \cos^2 \theta; \quad \sigma_{22} = \sigma_{rr} \sin^2 \theta; \quad \sigma_{12} = \sigma_{rr} \sin \theta \cos \theta.$$

Подставим сюда выражение (6.59) для  $\sigma_{rr}$  и воспользуемся соотношениями

$$\cos \theta = \frac{x_1}{r}, \quad \sin \theta = \frac{x_2}{r}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Тогда получим

$$\sigma_{11} = -\frac{2P \cos^3 \theta}{\pi r} = -\frac{2P x_1^3}{\pi r^4} = -\frac{2P x_1^3}{\pi (x_1^2 + x_2^2)^2}; \quad (6.61)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2P \cos \theta \sin^2 \theta}{\pi r} = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi r^4} = -\frac{2P x_1 x_2^2}{\pi (x_1^2 + x_2^2)^2}; \quad (6.62)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2P \cos^2 \theta \sin \theta}{\pi r} = -\frac{2P x_1^2 x_2}{\pi r^4} = -\frac{2P x_1^2 x_2}{\pi (x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (6.63)$$

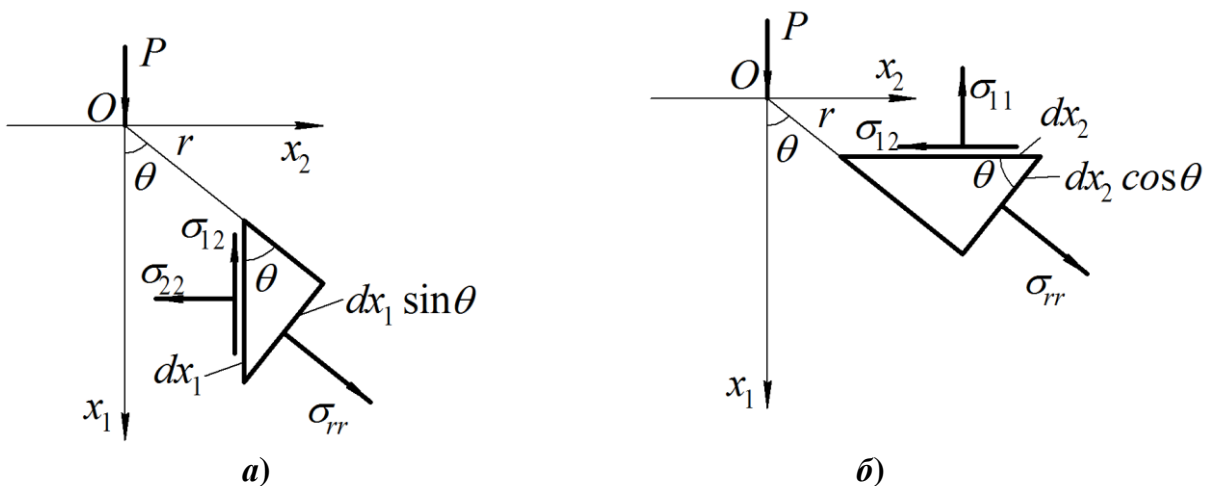
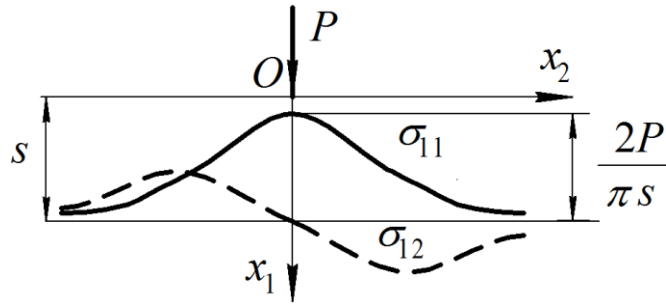


Рисунок 6.24 – К установлению связи между  $\sigma_{rr}$  и напряжениями в декартовых координатах

Характер изменения напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$  вдоль прямой, параллельной краю пластины и отстоящей от неё на расстояние  $s$ , показан на рисунке 6.25.



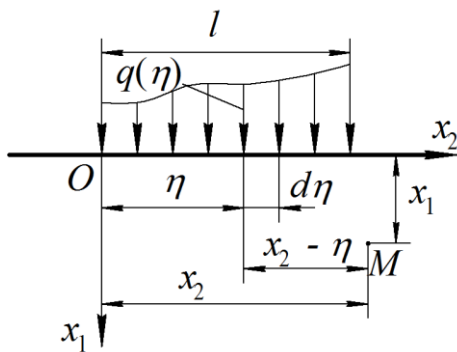
**Рисунок 6.25 – Изменение напряжений вдоль прямой  $x_1 = s$**

Располагая зависимостями (6.61)...(6.63), можно получить распределение напряжений в полубесконечной пластине при действии распределённой нагрузки произвольной интенсивности  $q(x_2)$ , приложенной на участке границы длиной  $l$  (рисунок (6.26)).

Совместив начало координат с началом нагруженного участка, выделим на этом участке бесконечно малый отрезок  $d\eta$ , расположенный на расстоянии  $\eta$  от точки  $O$ . Элементарная сила

$$dP = q(\eta)d\eta,$$

действующая в пределах данного отрезка, создаёт в произвольной точке  $M(x_1, x_2)$  напряжения, которые можно найти, пользуясь соотношениями (6.61)...(6.63), где вместо  $x_2$  следует писать  $x_2 - \eta$ . Интегрирование по  $\eta$  приводит затем к следующим формулам для напряжений:



**Рисунок 6.26 – Полубесконечная пластина под действием, распределённой нагрузки**

$$\sigma_{11} = -\frac{2x_1^3}{\pi} \int_0^l \frac{q(\eta)d\eta}{\left[x_1^2 + (x_2 - \eta)^2\right]^2}; \quad (6.64)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2x_1}{\pi} \int_0^l \frac{q(\eta)(x_2 - \eta)^2 d\eta}{\left[x_1^2 + (x_2 - \eta)^2\right]^2}; \quad (6.65)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2x_1^2}{\pi} \int_0^l \frac{q(\eta)(x_2 - \eta)d\eta}{\left[x_1^2 + (x_2 - \eta)^2\right]^2}. \quad (6.66)$$

## 6.10 Расчёт круглого диска на действие двух диаметрально противоположных сил

На рисунке 6.27 изображён круглый диск единичной толщины, на который по концам вертикального диаметра  $AB$  действуют две равные противоположно направленные силы  $P$ .

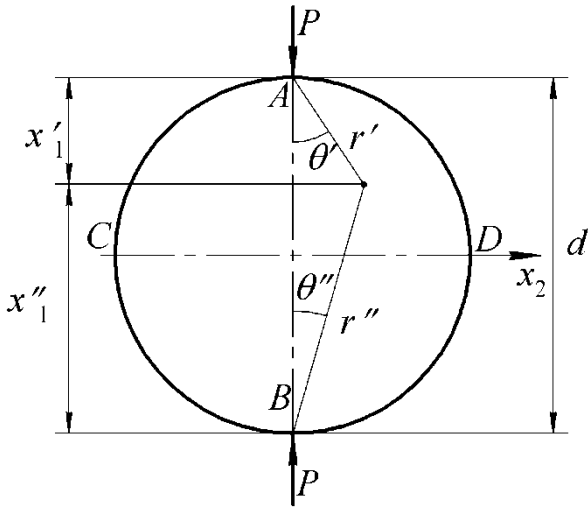


Рисунок 6.27 – Круглый диск под действием двух сил

Предположим вначале, что каждая из сил вызывает в диске такое же напряжённое состояние, что и в полубесконечной пластине. Введём соответственно две системы координат, начала которых поместим в точках  $A$  и  $B$ . Координаты произвольной точки в первой системе координат обозначим через  $r'$ ,  $\theta'$ ,  $x'_1$ , а во второй – через  $r''$ ,  $\theta''$ ,  $x''_1$ .

Если считать, что напряжённое состояние от каждой силы такое же, как и в полубесконечной пластине, то в каж-

дой точке на границе диска будет две взаимно-перпендикулярных площадки, в которых согласно формуле (6.60) действуют нормальные напряжения (рисунок (6.28))

$$\sigma' = \sigma'' = -\frac{2P}{\pi d},$$

где  $d$  – диаметр диска.

Следовательно, при указанном предположении в каждой точке  $M$  на границе имеет место двухосное сжатие с напряжением  $2P/(\pi d)$ . Такое же напряжение, очевидно, будет действовать на границе в площадках с произвольной ориентацией, в том числе в площадках, совпадающих с внешней окружностью. Иными словами, принятое предположение о характере напряжённого состояния действительно выполнялось бы, если бы по границе диска действовала равномерная сжимающая нагрузка интенсивности  $2P/(\pi d)$ . Поскольку на самом деле граница свободна от нагрузок, для установления истинной картины следует устранить данные силы, приложив равномерную растягивающую нагрузку той же интенсивности (рисунок 6.29). При таком нагружении во всех точках диска возникнет, как было показано ранее, состояние равномерного двустороннего растяжения с напряжением  $2P/(\pi d)$ . Таким образом, действительное напря-

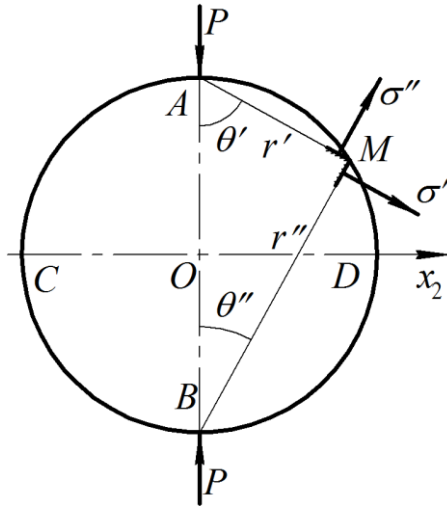


Рисунок 6.28 – Напряжения на границе диска

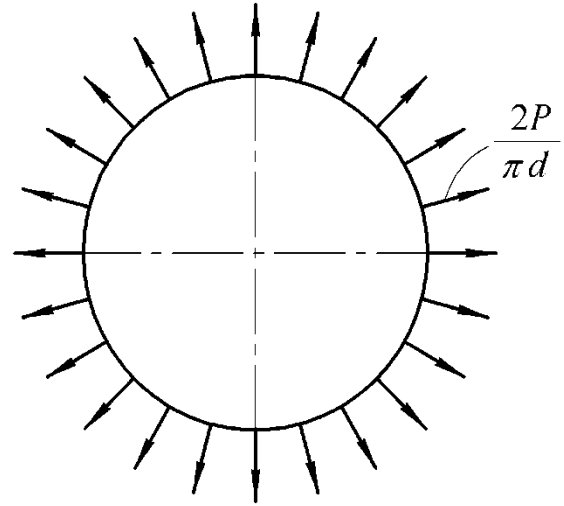


Рисунок 6.29 – Дополнительное напряжённое состояние

жённое состояние диска может быть представлено следующими соотношениями:

$$\sigma_{11} = \sigma'_{11} + \sigma''_{11} + \frac{2P}{\pi d}; \quad \sigma_{22} = \sigma'_{22} + \sigma''_{22} + \frac{2P}{\pi d}; \quad \sigma_{12} = \sigma'_{12} + \sigma''_{12}.$$

Здесь компоненты  $\sigma'_{\alpha\beta}$  должны вычисляться по формулам (6.61)...(6.63) с заменой  $x_1$  на  $x'_1$ , а  $\sigma''_{\alpha\beta}$  – по тем же формулам, но с заменой  $x_1$  на  $x''_1$ , а также  $x_2$  на  $-x_2$ .

Найдём, в частности, распределение нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  вдоль горизонтального диаметра  $CD$ . Здесь  $x'_1 = x''_1 = d/2$ , и мы имеем

$$\sigma'_{11} = \sigma''_{11} = -\frac{2P}{\pi} \frac{(d/2)^3}{\left[(d/2)^2 + x_2^2\right]^2} = -\frac{4P}{\pi} \frac{d^3}{(d^2 + 4x_2^2)^2},$$

так что

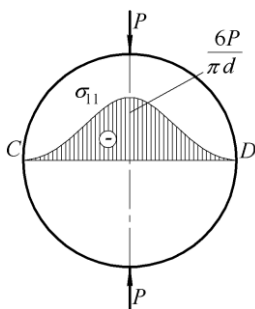


Рисунок 6.30 – Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  вдоль горизонтального диаметра

$$\sigma_{11} = -\frac{8P}{\pi} \frac{d^3}{(d^2 + 4x_2^2)^2} + \frac{2P}{\pi d}$$

или

$$\sigma_{11} = \frac{2P}{\pi d} \left[ 1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x_2^2)^2} \right]. \quad (6.68)$$

Эпюра  $\sigma_{11}$  дана на рисунке 6.30. Наибольшее по модулю напряжение возникает в середине диаметра, где



$$|\sigma_{11}|_{\max} = \frac{6P}{\pi d},$$

что почти в два раза превышает среднее напряжение, вычисляемое формально как отношение

$$|\sigma_{\text{cp}}| = \frac{P}{d}.$$

Отметим также, что  $\sigma_{11} = 0$  в точках  $C$  и  $D$ .

## 6.11 Определение перемещений в задаче Фламана

Приступая к нахождению перемещений, возникающих в полубесконечной пластине под действием силы, нормальной к границе, запишем формулы для напряжений в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{k \cos \theta}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0,$$

где

$$k = \frac{2P}{\pi}. \quad (6.69)$$

По закону Гука вычисляем компоненты тензора деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \mu\sigma_{\theta\theta}) = -\frac{k \cos \theta}{E r}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \mu\sigma_{rr}) = \frac{\mu k \cos \theta}{E r}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{r\theta} = 0. \end{aligned}$$

Перемещения можно получить, интегрируя геометрические соотношения

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).$$

Первое из них приводит к выражению

$$u_r = -\frac{k}{E} \ln r \cos \theta + f_1(\theta), \quad (6.70)$$

где  $f_1(\theta)$  – произвольная функция.

С учётом этого результата второе соотношение даёт равенство

$$\frac{\mu k \cos \theta}{E r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{k \ln r}{E r} \cos \theta + \frac{1}{r} f_1'(\theta)$$

или

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\mu k}{E} \cos \theta + \frac{k}{E} \ln r \cos \theta - f_1(\theta).$$

После его интегрирования получаем

$$u_\theta = \frac{\mu k}{E} \sin \theta + \frac{k}{E} \ln r \sin \theta - \int f_1(\theta) d\theta + f_2(r), \quad (6.71)$$

где  $f_2(r)$  – ещё одна произвольная функция.

Для определения  $f_1(\theta)$  и  $f_2(r)$  подставим выражения (6.70) и (6.71) в формулу для  $\varepsilon_{r\theta}$ . Опустив множитель  $1/2$ , запишем:

$$0 = \frac{1}{r} \left[ \frac{k}{E} \ln r \sin \theta + f_1'(\theta) \right] + \frac{k}{E} \frac{\sin \theta}{r} + f_2'(r) - \frac{1}{r} \left[ \frac{\mu k}{E} \sin \theta + \frac{k}{E} \ln r \sin \theta - \int f_1(\theta) d\theta + f_2(r) \right].$$

Умножим это равенство на  $r$ , приведём подобные члены и перенесём в левую часть функции, зависящие от  $r$ :

$$-rf_2'(r) + f_2(r) = \frac{(1-\mu)k}{E} \sin \theta + f_1'(\theta) + \int f_1(\theta) d\theta.$$

Полученное равенство возможно, если его левая и правая части равны тождественно одной и той же константе. Обозначив её через  $C_1$ , будем иметь два уравнения:

$$-rf_2'(r) + f_2(r) = C_1; \quad (6.72)$$

$$\frac{(1-\mu)k}{E} \sin \theta + f_1'(\theta) + \int f_1(\theta) d\theta = C_1. \quad (6.73)$$

Первое из них можно представить в виде

$$-r^2 \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} f_2(r) \right] = C_1.$$

Отсюда находим последовательно

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} f_2(r) \right] &= -\frac{C_1}{r^2}; \\ \frac{1}{r} f_2(r) &= \frac{C_1}{r} + C_2; \\ f_2(r) &= C_1 + C_2 r, \end{aligned} \quad (6.74)$$

где  $C_2$  – постоянная интегрирования.

Уравнение (6.73) перепишем так:

$$F''(\theta) + F(\theta) = C_1 - \frac{(1-\mu)k}{E} \sin \theta, \quad (6.75)$$

где введено обозначение

$$F(\theta) = \int f_1(\theta) d\theta. \quad (6.76)$$

Решение данного уравнения:

$$F(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta + C_1 + \frac{(1-\mu)k}{2E} \theta \cos \theta, \quad (6.77)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные.

Следовательно,

$$f_1(\theta) = F'(\theta) = A \cos \theta - B \sin \theta + \frac{(1-\mu)k}{2E} (\cos \theta - \theta \sin \theta).$$

В соответствии с равенствами (6.70), (6.71), (6.74) и (6.77) получаем теперь

$$u_r = -\frac{k}{E} \ln r \cos \theta + \frac{(1-\mu)k}{2E} (\cos \theta - \theta \sin \theta) + A \cos \theta - B \sin \theta;$$

$$u_\theta = \frac{\mu k}{E} \sin \theta + \frac{k}{E} \ln r \sin \theta - A \sin \theta - B \cos \theta - \frac{(1-\mu)k}{2E} \theta \cos \theta + C_2 r.$$

Примем, что перемещения симметричны относительно оси  $x_1$ . Тогда  $u_r$  должно быть чётной, а  $u_\theta$  – нечётной функцией угла  $\theta$ . Данные условия будут выполнены, если положить

$$B = 0; \quad C_2 = 0.$$

Кроме того, предположим, что точка, расположенная на оси  $x_1$  на расстоянии  $s$  от границы, не имеет вертикального перемещения, то есть

$$u_r \Big|_{\substack{r=s \\ \theta=0}} = -\frac{k}{E} \ln s + \frac{(1-\mu)k}{2E} + A = 0.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{k}{E} \ln s - \frac{(1-\mu)k}{2E}.$$

В результате получаем следующие выражения для перемещений:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{k}{E} \ln \frac{r}{s} \cos \theta - \frac{(1-\mu)k}{2E} \theta \sin \theta; \\ u_\theta &= \frac{k}{E} \ln \frac{r}{s} \sin \theta - \frac{(1-\mu)k}{2E} \theta \cos \theta + \frac{(1+\mu)k}{2E} \sin \theta. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Перемещения на границе полуплоскости найдём, положив  $\theta = \pm\pi/2$ :

$$u_r|_{\theta=\pm\pi/2} = -\frac{(1-\mu)k\pi}{4E}; \quad (6.79)$$

$$u_\theta|_{\theta=\pm\pi/2} = \pm \left[ \frac{k}{E} \ln \frac{r}{s} + \frac{(1+\mu)k}{2E} \right]. \quad (6.80)$$

Положительное перемещение  $u_r$  происходит в сторону возрастания полярного радиуса. Соотношение (6.79) показывает, что все точки границы имеют одинаковое горизонтальное перемещение, направленное в сторону начала координат и по абсолютной величине равное

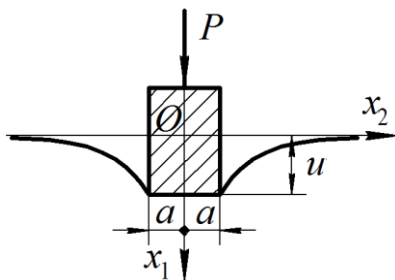
$$|u_2| = \frac{(1-\mu)k\pi}{4E} = \frac{(1-\mu)P}{2E}.$$

Такая картина деформирования может показаться неправдоподобной, но следует помнить, что она относится лишь к той части пластины, которая находится за пределами небольшой зоны возле начала координат. Около точки приложения силы соотношения теории упругости неприменимы. В данной зоне возникнут пластические деформации, и действительные перемещения, разумеется, не будут противоречить физическим представлениям.

Вертикальные перемещения точек границы направлены вниз и определяются согласно (6.80) выражением

$$u_1 = -\frac{k}{E} \ln \frac{r}{s} - \frac{(1+\mu)k}{2E} = -\frac{2P}{\pi E} \ln \frac{r}{s} - \frac{(1+\mu)P}{\pi E}. \quad (6.81)$$

При  $r \rightarrow 0$  перемещение  $u_1$ , судя по этой формуле, неограниченно возрастает. Однако данный результат, как уже неоднократно говорилось, нельзя распространять на малую окрестность точки приложения силы.



**Рисунок 6.31 – Передача силы на полубесконечную пластину через абсолютно жёсткий штамп**

Располагая соотношением (6.81), можно найти вертикальные перемещения на границе при действии заданной распределённой нагрузки, как это делалось при вычислении напряжений. Можно решить и обратную задачу об определении закона изменения интенсивности нормальной нагрузки, вызывающей заданные вертикальные перемещения точек границы. Таким путём, например, уда-

ётся найти характер распределения нагрузки, вызывающей постоянное вертикальное перемещение участка границы длиной  $2a$ , как показано на рисунке 6.31 (задача о штампе); закон изменения нагрузки определяется выражением

$$q = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x_2^2}}.$$

В угловых точках штампа напряжения получаются бесконечно большими. В действительности в этих местах возникают пластические деформации, но размеры пластических областей весьма малы, и они не оказывают существенного влияния на общую картину.

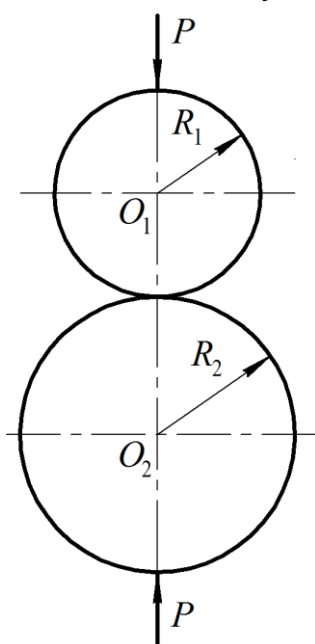


Рисунок 6.32 – Два цилиндра, прижатые друг к другу

Данные результаты используются для решения задачи Герца о контактной деформации двух цилиндров с параллельными осями, равномерно прижатых друг к другу (рисунок 6.32).

В результате деформирования цилиндров образуется продольная полоска контакта шириной  $2a$ . Величина  $a$  весьма мала по сравнению с радиусами цилиндров, поэтому цилиндры можно рассматривать как полупространства. Считая, что цилиндры находятся в условиях плоской деформации, для максимального контактного давления  $p_{\max}$  и величины  $a$  (половины ширины полоски контакта) можно получить выражения

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{P(R_1 + R_2)}{\pi R_1 R_2 \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}};$$

$$a = \sqrt{\frac{4PR_1 R_2}{\pi(R_1 + R_2) \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}}.$$

Здесь  $P$  – сила прижатия, приходящаяся на единицу длины образующей;  $R_1, R_2$  – радиусы цилиндров;  $E_1, E_2$  и  $\mu_1, \mu_2$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов.

Если  $E_1 = E_2 = E$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$ , то формулы могут быть представлены в виде

$$p_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{PE(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}};$$

$$a = 1,52 \sqrt{\frac{PR_1 R_2}{E(R_1 + R_2)}}.$$

Наибольшие сжимающие напряжения, равные  $p_{\max}$ , возникают на средней линии полоски контакта. При оценке прочности цилиндров можно в качестве расчётного брать наибольшее касательное напряжение. Оно возникает на глубине  $\approx 0,78a$  от площадки контакта и составляет величину

$$\tau_{\max} = 0,304 p_{\max}.$$

## 7 КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

### 7.1 Постановка задачи о кручении

Рассматривается стержень постоянного сечения, отнесённый к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой помещено в какой либо точке одного из оснований, а ось  $x_3$  направлена параллельно образующей (рисунок 7.1). Стержень испытывает закручивание относительно своей оси моментами  $M$ , которые действуют в его основаниях и имеют векторы, направленные параллельно оси. Боковая поверхность стержня предполагается свободной от нагрузок; объёмные силы также отсутствуют.

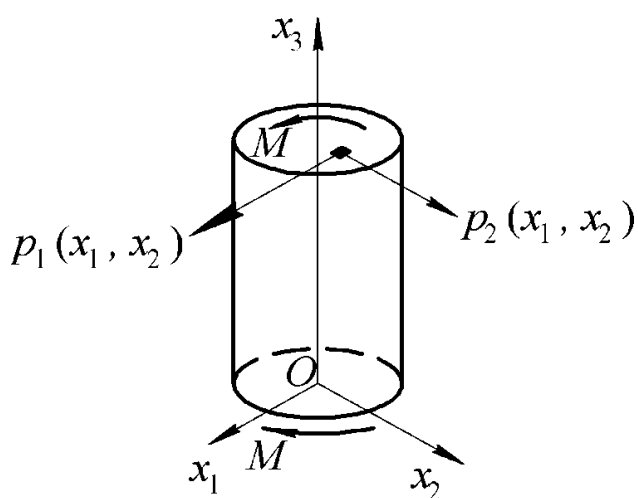


Рисунок 7.1 – Призматический стержень при кручении

Не уменьшая общности, можно принять, что в точке  $O$  на стержень наложены связи, исключаяющие его перемещения в пространстве и повороты относительно осей  $x_1$  и  $x_2$ , то есть что при  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  выполняются условия

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = 0; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Кроме того, будем предполагать, что нижнее основание закреплено также и от поворота относительно оси  $x_3$ , но условия закрепления таковы,

что они не препятствуют перемещениям точек нижнего основания параллельно оси  $x_3$  (кроме точки  $O$ ). Момент  $M$  в нижнем основании следует понимать при этом как момент, создаваемый реакциями соответствующих связей.

В плоскости верхнего основания момент  $M$  создаётся некоторой системой поверхностных сил  $p_1(x_1, x_2)$ ,  $p_2(x_1, x_2)$ , главный вектор которых равен нулю.

Впервые решение задачи о кручении стержня круглого сечения дал Кулон в 1784 году. Он предположил, что поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются вокруг оси стержня без искажения. Попытки распространить этот подход на стержни с иными поперечными сечениями привели к ошибочным результатам. Корректное решение для случая стержня произвольного по-

перечного сечения было получено в 1855 году Сен-Венаном. Он установил, что в общем случае поперечные сечения при кручении не остаются плоскими, а деформируются вследствие перемещения их точек в осевом направлении.

## 7.2 Напряжения в стержне при кручении

Рассмотрим сечение стержня на расстоянии  $x_3$  от нижнего основания (рисунок 7.2). Касательные напряжения  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$ , действующие в плоскости сечения, должны создавать относительно  $x_3$  момент, равный  $M$ . Как видно из рисунка, справедливо равенство

$$M = \int_A (-\sigma_{31}x_2 + \sigma_{32}x_1) dA, \quad (7.2)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения.

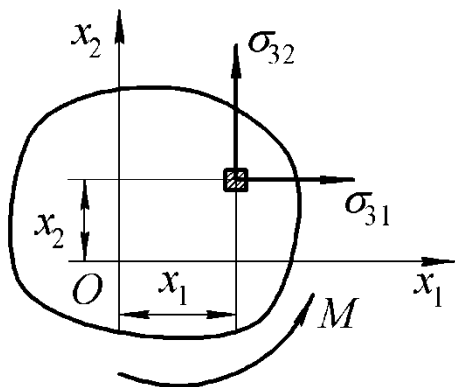


Рисунок 7.2 – Касательные напряжения в сечении стержня при кручении

Будем предполагать, что  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$  – единственные отличные от нуля компоненты тензора напряжений при кручении стержня. Остальные компоненты полагаем равными нулю:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0. \quad (7.3)$$

Покажем, что при этих предположениях могут быть удовлетворены все уравнения теории упругости.

Обратимся прежде всего к дифференциальным уравнениям равновесия

$$\sigma_{ji,j} + R_i = 0.$$

При принятых допущениях они сводятся к следующим трём равенствам:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0; \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0. \quad (7.5)$$

Первые два равенства показывают, что напряжения не зависят от координаты  $x_3$ :

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}(x_1, x_2); \quad \sigma_{32} = \sigma_{32}(x_1, x_2). \quad (7.6)$$

Третье равенство устанавливает дифференциальную связь между ними.



Помимо уравнений равновесия напряжения должны удовлетворять также условиям совместности. При отсутствии объёмных сил их можно взять в форме уравнений Бельтрами

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\mu} \Sigma_{,ij} = 0,$$

где  $\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  – первый инвариант тензора напряжений. Согласно предположениям (7.3) имеем  $\Sigma = 0$ , и из шести уравнений Бельтрами четыре обращаются в нулевые тождества. Остаются два равенства

$$\nabla^2 \sigma_{31} = 0; \quad \nabla^2 \sigma_{32} = 0, \quad (7.7)$$

в которых с учётом (7.6) под  $\nabla^2$  следует понимать двумерный оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Таким образом, функции  $\sigma_{31}(x_1, x_2)$  и  $\sigma_{32}(x_1, x_2)$  должны удовлетворять уравнениям (7.5) и (7.7). Уравнению (7.5) можно тождественно удовлетворить путём введения так называемой *функции напряжений Прандтля*  $\Phi(x_1, x_2)$ , через которую напряжения выражаются по формулам

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \quad (7.8)$$

Подстановка данных соотношений в уравнения (7.7) приводит к равенствам

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \Phi = 0.$$

Они будут выполнены, если выполнено условие

$$\nabla^2 \Phi = C, \quad (7.9)$$

где  $C$  – некоторая константа.

Итак, уравнение равновесия (7.5) и уравнения совместности деформаций (7.7) будут удовлетворены, если напряжения связаны с некоторой функцией  $\Phi(x_1, x_2)$  соотношениями (7.8) и при этом функция  $\Phi(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению (7.9). Значение постоянной в правой части (7.9) будет установлено позже.

На поверхности тела напряжения должны удовлетворять статическим условиям

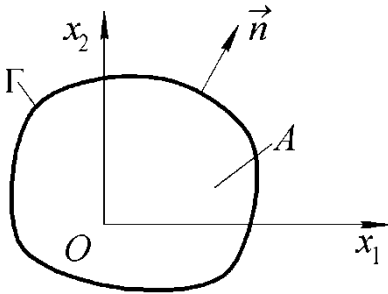
$$\sigma_{ji} n_j = p_i.$$

Учитывая, что  $p_3 = 0$  на всей поверхности стержня, и принимая во внимание допущения (7.3), будем иметь в качестве статических условий равенства

$$\sigma_{31}n_3 = p_1; \quad \sigma_{32}n_3 = p_2; \quad (7.10)$$

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0. \quad (7.11)$$

Боковая поверхность, где  $n_3 = 0$ , свободна от каких-либо нагрузок, и равенства (7.10) удовлетворяются здесь тождественно. Равенство же (7.11) устанавливает условие, которому должны удовлетворять искомые напряжения на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем поперечное сечение стержня (рисунок 7.3).



**Рисунок 7.3 – Поперечное сечение стержня**

В точках верхнего основания, где  $n_1 = n_2 = 0$ ;  $n_3 = 1$ , равенство (7.11) обращается в нулевое тождество, а равенства (7.10) принимают вид

$$\sigma_{31}(x_1, x_2) = p_1; \quad \sigma_{32}(x_1, x_2) = p_2. \quad (7.12)$$

Закон изменения поверхностных сил  $p_1$ ,  $p_2$  зависит от способа приложения нагрузки. Но мы располагаем лишь их равнодействующей (моментом  $M$ ), а не детальным характером распределения

$p_1(x_1, x_2)$ ;  $p_2(x_1, x_2)$ . Заменим поэтому равенства (7.12) более мягким требованием, чтобы выполнялось лишь интегральное условие (7.2). Решение задачи будет при этом точным, если закон приложения поверхностных сил  $p_1$ ,  $p_2$  будет, в соответствии с (7.12), совпадать с найденным распределением напряжений в поперечном сечении стержня. В других случаях напряжённое состояние будет отличаться от полученного теоретического решения. Однако данное отличие, согласно принципу Сен-Венана, касается лишь небольшого участка стержня возле его верхнего конца. В основной же части стержня установится напряжённое состояние, совпадающее с найденным теоретически. То же самое относится и к нижнему концу стержня, где в качестве нагрузок выступают реакции связей, удерживающих нижнее основание от поворота вокруг оси  $x_3$ .

### 7.3 Перемещения при кручении стержня

Для отыскания перемещений найдём вначале компоненты тензора деформации, пользуясь законом Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{E} \Sigma.$$

Здесь  $E$ ,  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Так как  $\Sigma = 0$ , отсюда вытекают равенства

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij},$$

где  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$  – модуль сдвига.

На основании (7.3) заключаем отсюда, что

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации равны

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G} \sigma_{31}; \quad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2G} \sigma_{32}, \quad (7.13)$$

и в соответствии с (7.6) они являются функциями координат  $x_1, x_2$ :

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}(x_1, x_2); \quad \varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}(x_1, x_2). \quad (7.14)$$

По формулам Коши имеем далее равенства

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

из которых следует, что

$$u_1 = u_1(x_2, x_3); \quad u_2 = u_2(x_1, x_3); \quad (7.15)$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_2). \quad (7.16)$$

Кроме того, из условия

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

вытекает с учётом (7.15), что

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \psi(x_3),$$

где  $\psi(x_3)$  – некоторая функция координаты  $x_3$ . Отсюда имеем два равенства

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\psi(x_3); \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \psi(x_3).$$

Проинтегрируем первое из них по  $x_2$ , а второе по  $x_1$ . Учитывая, что согласно (7.15)  $u_1$  не зависит от  $x_1$ , а  $u_2$  не зависит от  $x_2$ , запишем

$$u_1 = -\psi(x_3)x_2 + F_1(x_3); \quad u_2 = \psi(x_3)x_1 + F_2(x_3), \quad (7.17)$$

где  $F_1(x_3)$  и  $F_2(x_3)$  – произвольные функции координаты  $x_3$ .

Подстановка соотношений (7.17) в формулы

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right); \quad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \quad (7.18)$$

приводит к выражениям

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \psi'(x_3)x_2 + F_1'(x_3) \right];$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \psi'(x_3)x_1 + F_2'(x_3) \right].$$

Согласно (7.14)  $\varepsilon_{31}$  и  $\varepsilon_{32}$  не должны зависеть от координаты  $x_3$ . Это будет обеспечено, если

$$\psi'(x_3) = \alpha; \quad F_1'(x_3) = C_1; \quad F_2'(x_3) = C_2,$$

где  $\alpha$ ,  $C_1$  и  $C_2$  – некоторые постоянные. Отсюда вытекают выражения

$$\psi(x_3) = \alpha x_3 + C_0; \quad F_1(x_3) = C_1 x_3 + C_3; \quad F_2(x_3) = C_2 x_3 + C_4,$$

в которых  $C_0$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  – постоянные интегрирования.

На основании (7.17) приходим к соотношениям

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3 - C_0 x_2 + C_1 x_3 + C_3;$$

$$u_2 = \alpha x_1 x_3 + C_0 x_1 + C_2 x_3 + C_4. \quad (7.19)$$

Содержащиеся здесь постоянные  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  могут быть найдены из условий закрепления стержня. Так, постоянные  $C_3$  и  $C_4$  представляют перемещение стержня как жёсткого целого в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$ , и они должны равняться нулю, поскольку такие перемещения невозможны в силу условий (7.1). Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  характеризуют углы поворота стержня как жёсткого целого относительно осей  $x_2$  и  $x_1$  соответственно, и их также следует принять равными нулю.

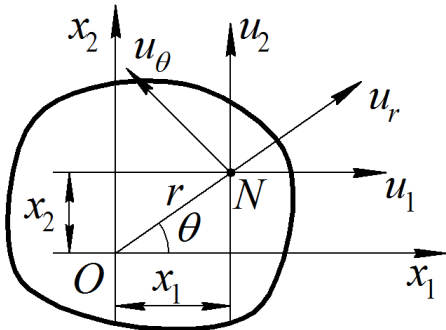


Рисунок 7.4 – К определению перемещений в сечении стержня

Выясним далее физический смысл постоянной  $C_0$ . Возьмём для этого в произвольном поперечном сечении точку  $N$  с координатами  $x_1, x_2$  (рисунок 7.4). Наряду с декартовыми введём полярные координаты  $r, \theta$ , так что

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Предположив, что точки стержня получают перемещения, определяемые выражениями

$$u_1 = -C_0 x_2; \quad u_2 = C_0 x_1,$$

найдем радиальное  $u_r$  и окружное  $u_\theta$  перемещения точки  $N$ . Имеем:

$$\begin{aligned} u_r &= u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta = -C_0 x_2 \cos \theta + C_0 x_1 \sin \theta = \\ &= C_0 r (-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) = 0; \\ u_\theta &= -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta = C_0 x_2 \sin \theta + C_0 x_1 \cos \theta = \\ &= C_0 r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = C_0 r. \end{aligned}$$

Как видим, каждая точка поперечного сечения перемещается на расстояние  $C_0 r$  по касательной к окружности радиуса  $r$ , где  $r$  – расстояние точки от оси. Следовательно, всё сечение поворачивается без искажения вокруг оси  $x_3$ , и константа  $C_0$  есть угол поворота сечения. Поскольку рассматриваемые перемещения не зависят от координаты  $x_3$ , это означает поворот всего стержня как жёсткого тела вокруг своей оси на угол  $C_0$ . Так как нижнее основание закреплено от поворота, необходимо положить  $C_0 = 0$ .

В итоге мы приходим к следующим выражениям для перемещений  $u_1, u_2$ :

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3; \quad u_2 = \alpha x_1 x_3. \quad (7.20)$$

Постоянная  $\alpha$  имеет простой физический смысл, для выяснения которого рассмотрим сечение стержня на расстоянии  $x_3$  от нижнего основания. Положив  $\beta = \alpha x_3$ , согласно (7.20) будем иметь в этом сечении перемещения

$$u_1 = -\beta x_2; \quad u_2 = \beta x_1.$$

Как следует из приведённых выше рассуждений, определяемые этими формулами перемещения соответствуют повороту рассматриваемого сечения вокруг оси  $x_3$  на угол  $\beta$  без искажения своей формы в плане. Таким образом, мы приходим к заключению, что *сечение, расположенное на расстоянии  $x_3$  от нижнего основания, закручивается относительно оси  $x_3$  на угол  $\beta = \alpha x_3$ . Величина  $\alpha$ , получаемая делением  $\beta$  на  $x_3$ , представляет собой угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня и называется погонным (или относительным) углом закручивания.*

Итак, при кручении стержня его сечения поворачиваются на угол  $\alpha x_3$  относительно оси  $x_3$ , причём форма сечений в плане сохраняется неизменной. В то же время сечения, вообще говоря, перестают быть плоскими (как говорят, они «депланируют») вследствие перемещений их точек в осевом направлении. Перемещение  $u_3$  согласно (7.16) не зависит от координаты  $x_3$ , и можно представить его в виде

$$u_3(x_1, x_2) = \alpha f(x_1, x_2). \quad (7.21)$$

Погонный угол закручивания  $\alpha$  при линейной постановке задачи должен быть, так же как и перемещение  $u_3$ , пропорционален внешней нагрузке. Поэтому функция  $f(x_1, x_2)$ , называемая *функцией депланации*, не зависит от внешней нагрузки – она определяется исключительно формой поперечного сечения.

Подстановка соотношений (7.20), (7.21) в формулы Коши (7.18) приводит к выражениям

$$\varepsilon_{31} = \frac{\alpha}{2}(f_{,1} - x_2); \quad \varepsilon_{32} = \frac{\alpha}{2}(f_{,2} + x_1).$$

Воспользовавшись формулами закона Гука

$$\sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31}; \quad \sigma_{32} = 2G\varepsilon_{32},$$

можно установить отсюда следующую связь между напряжениями и функцией депланации:

$$\sigma_{31} = G\alpha(f_{,1} - x_2); \quad \sigma_{32} = G\alpha(f_{,2} + x_1). \quad (7.22)$$

#### 7.4 Решение задачи о кручении в перемещениях

Если в качестве основных неизвестных выбраны перемещения, то в соответствии с формулами (7.20), (7.21) дело сводится к отысканию функции депланации  $f(x_1, x_2)$  и погонного угла закручивания  $\alpha$ . Для нахождения функции  $f(x_1, x_2)$  воспользуемся уравнением равновесия (7.5). Подстановка в него выражений (7.22) приводит к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 f = 0. \quad (7.23)$$

Граничное условие для функции  $f$  вытекает из статического соотношения (7.11). С учётом (7.22) из него следует равенство, которому должна быть подчинена функция  $f$  на контуре  $\Gamma$ :

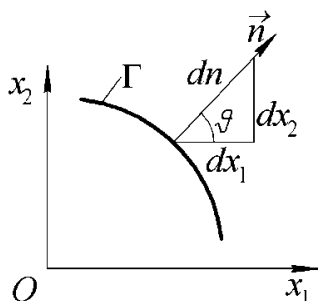
$$(f_{,1} - x_2)n_1 + (f_{,2} + x_1)n_2 = 0.$$

Фигурирующие здесь величины  $n_1, n_2$  представляют собой направляющие косинусы нормали  $\vec{n}$  к контуру  $\Gamma$  (рисунок 7.5):

$$n_1 = \cos \vartheta, \quad n_2 = \sin \vartheta. \quad (7.24)$$

Обозначая через  $dn$  бесконечно малый отрезок нормали, можно записать

$$n_1 = \frac{\partial x_1}{\partial n}; \quad n_2 = \frac{\partial x_2}{\partial n}. \quad (7.25)$$



**Рисунок 7.5 – К формулировке граничного условия для функции депланации**

С учётом этого граничное условие перепишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial n} + x_1 \frac{\partial x_2}{\partial n} = 0$$

или, окончательно,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = x_2 \frac{\partial x_1}{\partial n} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma. \quad (7.26)$$

В математической физике отыскание функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа (7.23) при граничном условии (7.26), носит название задачи Неймана. Её решение может быть получено лишь с точностью до аддитивной постоянной. Для устранения неопределённости можно воспользоваться дополнительным условием, накладываемым на функцию  $f(x_1, x_2)$  в начале координат:

$$f(0,0) = 0. \quad (7.27)$$

Это равенство вытекает из условия закрепления стержня в начале координат в осевом направлении.

Если функция деформации  $f$  найдена, то погонный угол закручивания  $\alpha$  может быть определён из интегрального условия равновесия (7.2). Подставив в него формулы (7.22), получим

$$M = G\alpha \int_A \left[ -(f_{,1} - x_2) x_2 + (f_{,2} + x_1) x_1 \right] dA.$$

Отсюда вытекает связь между  $\alpha$  и моментом  $M$  в виде равенства

$$\alpha = \frac{M}{GI_k}. \quad (7.28)$$

Стоящее здесь в знаменателе произведение  $GI_k$  называется *жёсткостью стержня на кручение*. Величина  $I_k$ , называемая *геометрической характеристикой жёсткости на кручение* (или *константой Сен-Венана*), определяется формулой

$$I_k = \int_A (x_1 f_{,2} - x_2 f_{,1}) dA + I_{x_1} + I_{x_2}. \quad (7.29)$$

Здесь  $I_{x_1}$ ,  $I_{x_2}$  – моменты инерции сечения стержня относительно осей  $x_1$ ,  $x_2$ :

$$I_{x_1} = \int_A x_2^2 dA; \quad I_{x_2} = \int_A x_1^2 dA. \quad (7.30)$$

Таким образом, отыскание  $\alpha$  эквивалентно вычислению  $I_k$ .

Зная функцию  $f(x_1, x_2)$ , по формулам (7.22) можно найти напряжения, завершив тем самым решение задачи. С учётом (7.28) формулам (7.22) можно придать следующий расчётный вид:

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k}(f_{,1} - x_2); \quad \sigma_{32} = \frac{M}{I_k}(f_{,2} + x_1). \quad (7.31)$$

## 7.5 Решение задачи о кручении в напряжениях

Как говорилось ранее, отыскание напряжений при кручении стержня сводится к нахождению функции напряжений  $\Phi(x_1, x_2)$ . Она должна удовлетворять уравнению (7.9), вытекающему из уравнений совместности деформаций. Чтобы установить значение постоянной, фигурирующей в правой части уравнения, исключим функцию депланации из соотношений (7.22). Если продифференцировать первое из них по  $x_2$ , а второе по  $x_1$  и вычесть результаты, получим равенство

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_1} = -2G\alpha.$$

Подставив сюда формулы

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1},$$

придём к уравнению

$$\nabla^2 \Phi = -2G\alpha. \quad (7.32)$$

Данное уравнение есть, по существу, уравнение совместности. Постоянная в правой части имеет здесь конкретное выражение.

Решение уравнения (7.32) будет содержать множителем произведение  $G\alpha$ . Представим функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = G\alpha\varphi(x_1, x_2). \quad (7.33)$$

Очевидно, что функция  $\varphi(x_1, x_2)$  не зависит от внешней нагрузки; она определяется лишь формой поперечного сечения и должна удовлетворять уравнению

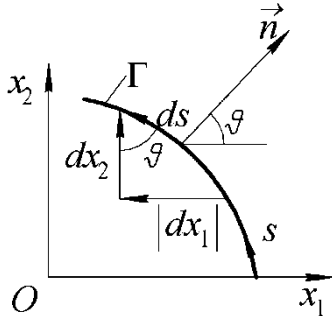
$$\nabla^2 \varphi = -2. \quad (7.34)$$

Напряжения через функцию  $\varphi$  выражаются по формулам, вытекающим из соотношений (7.8), (7.33):



$$\sigma_{31} = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}. \quad (7.35)$$

Граничное условие для функции  $\varphi$  получим, подставив выражения (7.35) в соотношение (7.11):



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} n_2 = 0. \quad (7.36)$$

Примем в качестве положительного такое направление обхода контура  $\Gamma$ , при котором область  $A$ , занимаемая сечением, находится слева от контура. Тогда согласно рисунку 7.6 справедливы равенства

**Рисунок 7.6 – К формулировке граничного условия для функции напряжений**

$$\cos \varphi = \frac{dx_2}{ds}; \quad \sin \varphi = -\frac{dx_1}{ds}.$$

Знак минус во втором из них связан с тем, что при положительных значениях  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  возрастание координаты  $s$  сопровождается убыванием  $x_1$ .

На основании (7.24) можно записать

$$n_1 = \frac{\partial x_2}{\partial s}; \quad n_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial s}. \quad (7.37)$$

Подстановка этих выражений в равенство (7.36) позволяет представить его в форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} = 0,$$

то есть

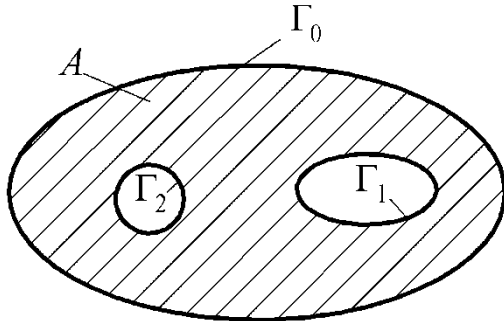
$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \quad (7.38)$$

Отсюда следует, что функция  $\varphi$  должна на контуре  $\Gamma$  иметь постоянное значение:

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{на } \Gamma,$$

где  $\varphi_0$  – некоторая константа. Численное значение  $\varphi_0$  не играет роли, поскольку его изменение повлечёт за собой изменение функции  $\varphi(x_1, x_2)$  на постоянную величину. Так как напряжения согласно (7.35) выражаются через производные от функции  $\varphi$ , их величина изменяться не будет. Поэтому, не уменьшая общности, можно положить  $\varphi_0 = 0$ .

Приведённые рассуждения относятся к случаю, когда поперечное сечение стержня представляет собой односвязную область. В общем случае стержень может иметь продольные цилиндрические полости. При этом его сечение будет многосвязной областью, а контур  $\Gamma$  будет состоять из нескольких замкнутых кривых (рисунок 7.7).



**Рисунок 7.7 – Случай многосвязного сечения**

Обозначим через  $\Gamma_0$  внешний контур, охватывающий поперечное сечение, а через  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  – внутренние контуры, ограничивающие сечения полостей ( $m$  – общее число полостей). Условие (7.38) должно выполняться на любом контуре, так что на каждом из них функция  $\varphi$  должна принимать некоторое постоянное значение  $\varphi_k$ . Одну из этих постоянных – например,  $\varphi_0$  – можно снова взять равной нулю. Граничное условие для  $\varphi$  запишется тогда в следующем виде:

$$\varphi = 0 \text{ на } \Gamma_0; \quad \varphi = \varphi_k \text{ на } \Gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (7.39)$$

Что касается значений постоянных  $\varphi_k$ , то уравнения для их определения будут получены позже.

Для отыскания угла закручивания  $\alpha$  воспользуемся снова условием равновесия (7.2). Подстановка в него формул (7.35) приводит соотношению

$$M = -G\alpha \int_A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1 \right) dA.$$

Отсюда вытекает стандартная связь между  $\alpha$  и  $M$  вида (7.28), в которой геометрическая характеристика жёсткости на кручение определяется формулой

$$I_k = - \int_A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} x_2 \right) dA = - \int_A \varphi_{,\beta} x_\beta dA.$$

Здесь и в дальнейшем при записи тензорных соотношений будем обозначать нижние индексы буквами греческого алфавита, подчёркивая тем самым, что эти индексы могут принимать только значения 1 и 2.

Преобразуем далее выражение для  $I_k$  следующим образом. Используя формулу дифференцирования произведения, запишем

$$I_k = - \int_A \left[ (\varphi x_\beta)_{,\beta} - \varphi x_{\beta,\beta} \right] dA.$$

Но

$$x_{\beta,\beta} \equiv \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 2,$$

так что

$$I_{\kappa} = 2 \int_A \varphi dA - \int_A (\varphi x_{\beta})_{,\beta} dA.$$

Для дальнейшего преобразования этого выражения воспользуемся формулой Грина, которую можно записать в виде

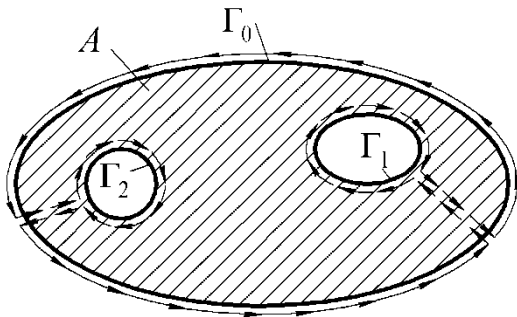
$$\int_A F_{\beta,\beta} dA = \oint_{\Gamma} F_{\beta} n_{\beta} ds. \quad (7.40)$$

Здесь  $F_{\beta}$  ( $\beta = 1, 2$ ) – заданные в области  $A$  дифференцируемые функции координат  $x_1, x_2$ ;  $n_{\beta}$  – направляющие косинусы нормали к контуру  $\Gamma$ , ограничивающему область  $A$ .

На основании формулы Грина получаем

$$I_{\kappa} = 2 \int_A \varphi dA - \oint_{\Gamma} \varphi x_{\beta} n_{\beta} ds.$$

Интегрирование по замкнутому контуру  $\Gamma$  можно распространить на случай многосвязной области, выбирая путь интегрирования так, как показано на рисунке 7.8. Тогда можно записать



**Рисунок 7.8 – Путь интегрирования в случае многосвязной области**

$$I_{\kappa} = 2 \int_A \varphi dA - \oint_{\Gamma_0} \varphi x_{\beta} n_{\beta} ds - \sum_{k=1}^m \oint_{\Gamma_k} \varphi x_{\beta} n_{\beta} ds.$$

Учитывая условия (7.39), будем иметь отсюда

$$I_{\kappa} = 2 \int_A \varphi dA - \sum_{k=1}^m \varphi_k \oint_{\Gamma_k} x_{\beta} n_{\beta} ds.$$

Снова воспользуемся формулой Грина (7.40) и перейдем от интегрирования по замкнутым контурам  $\Gamma_k$  к интегрированию по областям  $A_k$ , охватываемым этими контурами:

$$-\oint_{\Gamma_k} x_{\beta} n_{\beta} ds = \int_{A_k} x_{\beta,\beta} dA = 2A_k.$$

Знак минус в левой части этого равенства поставлен потому, что путь интегрирования, показанный на рисунке 7.8, даёт для внутренних контуров отрицательные направления по отношению к сечениям соответствующих полостей.

Подставив последний результат в формулу для  $I_k$ , выводим следующее окончательное выражение для геометрической характеристики жёсткости на кручение:

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA + 2 \sum_{k=1}^m \varphi_k A_k. \quad (7.41)$$

Заметим, что, имея  $I_k$ , напряжения  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  можно вычислить по следующим расчётным формулам, вытекающим из (7.35) и (7.28):

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}. \quad (7.42)$$

## 7.6 Определение функции депланации по известным напряжениям

Перейдём теперь к нахождению перемещения  $u_3$ . Так как  $u_3 = \alpha f$ , это эквивалентно определению функции депланации  $f(x_1, x_2)$ . Функцию  $\varphi(x_1, x_2)$  и, следовательно, напряжения  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  считаем известными.

Пусть  $f_0$  – значение функции депланации в некоторой точке  $N_0$ . Для определения величины  $f$  в произвольной точке  $N$  соединим  $N_0$  и  $N$  произвольной кривой  $l$ , целиком лежащей внутри рассматриваемого сечения (рисунок 7.9), и найдём приращение функции  $f$  при перемещении по этой кривой от  $N_0$  к  $N$ .

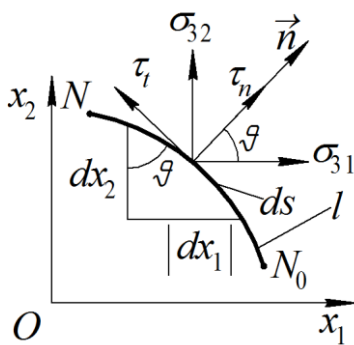


Рисунок 7.9 – К определению функции депланации

На бесконечно малом участке  $ds$  кривой функция  $f$  получает приращение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2,$$

где приращения координат

$$dx_1 = -ds \sin \vartheta; \quad dx_2 = ds \cos \vartheta. \quad (7.43)$$

Здесь  $\vartheta$  – угол между вектором нормали  $\vec{n}$  к кривой, который условимся направлять вправо при движении от  $N_0$  к  $N$ , и осью  $x_1$ .

Выразим  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  через напряжения, пользуясь формулами (7.22)

$$\sigma_{31} = G\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \right); \quad \sigma_{32} = G\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1 \right).$$

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{G\alpha} \sigma_{31} + x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{G\alpha} \sigma_{32} - x_1.$$

Тогда для  $df$  получим соотношение

$$\begin{aligned} df &= \left( \frac{1}{G\alpha} \sigma_{31} + x_2 \right) dx_1 + \left( \frac{1}{G\alpha} \sigma_{32} - x_1 \right) dx_2 = \\ &= \frac{1}{G\alpha} (\sigma_{31} dx_1 + \sigma_{32} dx_2) + x_2 dx_1 - x_1 dx_2. \end{aligned}$$

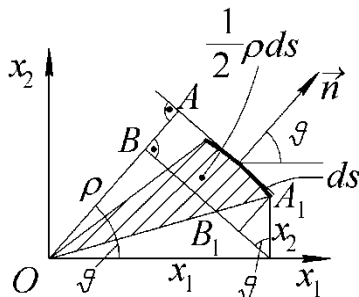
Подставим сюда равенства (7.43):

$$df = \frac{1}{G\alpha} (-\sigma_{31} \sin \vartheta + \sigma_{32} \cos \vartheta) ds - (x_2 \sin \vartheta + x_1 \cos \vartheta) ds. \quad (7.44)$$

Выражение в скобках в первом слагаемом есть проекция  $\tau_t$  касательных напряжений на направление касательной к линии  $l$  (см. рисунок 7.9):

$$\tau_t = -\sigma_{31} \sin \vartheta + \sigma_{32} \cos \vartheta. \quad (7.45)$$

Величина, содержащаяся в скобках во втором слагаемом, равна длине  $\rho$  перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к линии  $l$ . В самом деле, как видно из рисунка 7.10,



$$\rho = OB + BA.$$

Но

$$OB = x_1 \cos \vartheta,$$

а

$$BA = B_1 A_1 = x_2 \sin \vartheta,$$

откуда и следует, что

$$\rho = x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta. \quad (7.46)$$

Рисунок 7.10 – К вычислению  $\rho$

Если внести (7.45) и (7.46) в (7.44), то

выражение для  $df$  будет представлено в виде

$$df = \frac{1}{G\alpha} \tau_t ds - \rho ds.$$

Произведение

$$d\omega = \rho ds$$

представляет собой удвоенную площадь треугольника, имеющего основание  $ds$  и высоту  $\rho$  и отмеченного штриховкой на рисунке 7.10. Выполняя теперь интегрирование вдоль линии  $l$ , приходим к следующему выражению для вычисления функции депланации в точке  $N$ :

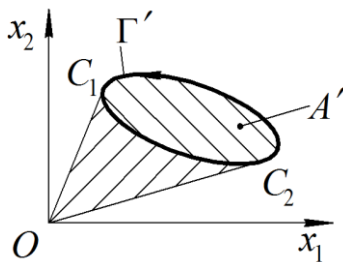
$$f = f_0 + \frac{1}{G\alpha} \int_{N_0}^N \tau_t ds - \omega. \quad (7.47)$$

Здесь через  $\omega$  обозначена удвоенная площадь фигуры, ометаемой радиусом-вектором, начало которого находится в точке  $O$ , а конец скользит вдоль кривой  $l$  от точки  $N_0$  до точки  $N$ . Величину  $\omega$  будем считать положительной при вращении радиуса-вектора против часовой стрелки.

### 7.7 Теорема Бредта о циркуляции касательного напряжения

Рассмотрим далее случай, когда точка  $N$  совпадает с точкой  $N_0$ , то есть когда  $l$  представляет собой замкнутую кривую, которую будем обозначать через  $\Gamma'$  (рисунок 7.11). При движении конца радиуса-вектора по кривой  $\Gamma'$  площадь сектора  $C_1OC_2$  будет пройдена дважды: один раз в положительном направлении, а другой раз – в отрицательном. В итоге будем иметь  $\omega = 2A'$ , где  $A'$  – площадь фигуры, охватываемой кривой  $\Gamma'$ . Так как в этом случае в точке  $N$  будет  $f = f_0$ , на основании формулы (7.47) приходим к равенству

$$\oint_{\Gamma'} \tau_t ds = 2G\alpha A', \quad (7.48)$$



которое выражает *теорему Бредта о циркуляции касательного напряжения*. Интеграл

$$\oint_{\Gamma'} \tau_t ds$$

**Рисунок 7.11 – Случай замкнутой кривой  $l$**

носит название *циркуляции касательного напряжения по замкнутому контуру  $\Gamma'$* , и согласно теореме Бредта

она равна умноженной на  $2G\alpha$  площади, ограниченной этим контуром. Отметим, что в случае многосвязного сечения контур  $\Gamma'$  может охватывать один или несколько вырезов или не охватывать ни одного из них. Важно лишь, чтобы он не пересекал границ вырезов.

Циркуляцию касательного напряжения можно выразить через функцию напряжений  $\varphi(x_1, x_2)$ . Учитывая, что

$$\cos \vartheta = n_1, \quad \sin \vartheta = n_2,$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – направляющие косинусы вектора нормали, формулу (7.45) перепишем так:

$$\tau_t = -\sigma_{31}n_2 + \sigma_{32}n_1.$$

Далее подставим сюда выражения

$$n_1 = \frac{\partial x_1}{\partial n}, \quad n_2 = \frac{\partial x_2}{\partial n},$$

а также соотношения (7.35). Тогда получим

$$\tau_t = -G\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} \right) = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (7.49)$$

В итоге равенство (7.48) можно привести к виду

$$\oint_{\Gamma'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -2A'. \quad (7.50)$$

В случае многосвязного сечения это равенство можно использовать для определения констант  $\varphi_k$ , фигурирующих в условиях (7.39). Принимая в качестве  $\Gamma'$  контуры, ограничивающие вырезы, придём к соотношениям

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -2A_k \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7.51)$$

В соответствии с (7.39) функция  $\varphi(x_1, x_2)$  будет содержать  $m$  констант  $\varphi_k$ , и равенства (7.51) дают  $m$  уравнений для их определения.

В случае односвязной области равенство (7.50) выполняется автоматически для любого контура  $\Gamma'$ . В самом деле, так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} n_2 = \varphi_{,\beta} n_\beta,$$

имеем

$$\int_{\Gamma'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int_{\Gamma'} \varphi_{,\beta} n_\beta ds = \int_A \varphi_{,\beta\beta} dA.$$

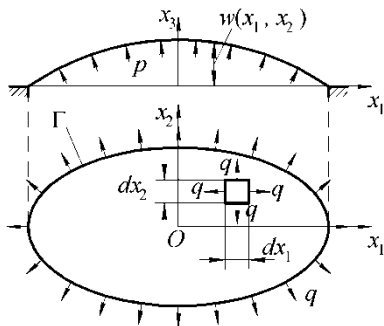
Но поскольку  $\varphi_{,\beta\beta} \equiv \nabla^2 \varphi = -2$ , равенство (7.50) превращается в тождество.

## 7.8 Мембранная аналогия

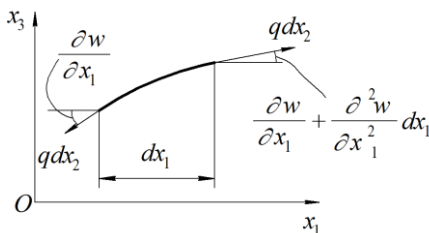
Мембраной называют весьма гибкую пластинку (или плёнку), которая не обладает жёсткостью на изгиб и может воспринимать только растягивающие усилия. Предварительно растянутая мембрана способна воспринимать и поперечную нагрузку. Оказывается, что прогиб мембраны  $w(x_1, x_2)$  под действием равномерной поперечной нагрузки описывается теми же соотношениями, что и функция  $\varphi(x_1, x_2)$  в задаче о кручении стержня. В этом и состоит так называемая мембранная аналогия. Разберём данный вопрос подробнее.

Пусть на жёсткую плоскую рамку натянута мембрана. Примем, что сила натяжения направлена по нормали к рамке и имеет постоянную интенсивность. Значение силы, приходящейся на единицу длины контура (то есть погонную силу), обозначим через  $q$ . Тогда в каждой точке мембраны возникает состояние однородного всестороннего растяжения в плоскости мембраны с интенсивностью  $q$ .

Предположим далее, что к мембране прикладывается равномерное поперечное давление  $p$ , под действием которого она прогибается, принимая форму некоторой поверхности (рисунок 7.12). Величину давления примем такой, чтобы прогибы  $w$  мембраны были малы по сравнению с её размерами, так что углы наклона, которые касательные к поверхности изогнутой мембраны составят с плоскостью рамки, будут также малы. В этом случае погонные силы в сечениях изогнутой мембраны плоскостями  $x_1 = \text{const}$  или  $x_2 = \text{const}$  можно считать такими же, что и до приложения поперечной нагрузки, то есть равными  $q$ .



**Рисунок 7.12 – Мембрана под действием давления**



**Рисунок 7.13 – Силы в сечениях  $x_1 = \text{const}$**

Запишем условие равновесия бесконечно малого элемента мембраны с размерами  $dx_1$ ,  $dx_2$ . На рисунке 7.13 показаны силы, действующие на элемент в сечениях  $x_1 = \text{const}$ , то есть в площадках с размером  $dx_2$ . Их результирующая в проекции на ось  $x_3$  равна

$$q dx_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} dx_1 \right) - q dx_2 \frac{\partial w}{\partial x_1} = q \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2.$$

Аналогично, силы в площадках с размером  $dx_1$  дают проекцию на ось  $x_3$ , равную

$$q \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2.$$

Учитывая также результирующую давления, равную  $p dx_1 dx_2$ , условие равновесия элемента запишем в виде

$$\left[ q \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + p \right] dx_1 dx_2 = 0.$$

После сокращения на  $dx_1 dx_2$ , получаем отсюда дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $w$ :

$$q \nabla^2 w + p = 0$$



или

$$\nabla^2 w = -\frac{P}{q}. \quad (7.52)$$

При этом должно, очевидно, удовлетворяться граничное условие

$$w = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (7.53)$$

Вспоминая, что расчёт стержня на кручение в напряжениях сводится в случае односвязного сечения к решению уравнения

$$\nabla^2 \varphi = -2$$

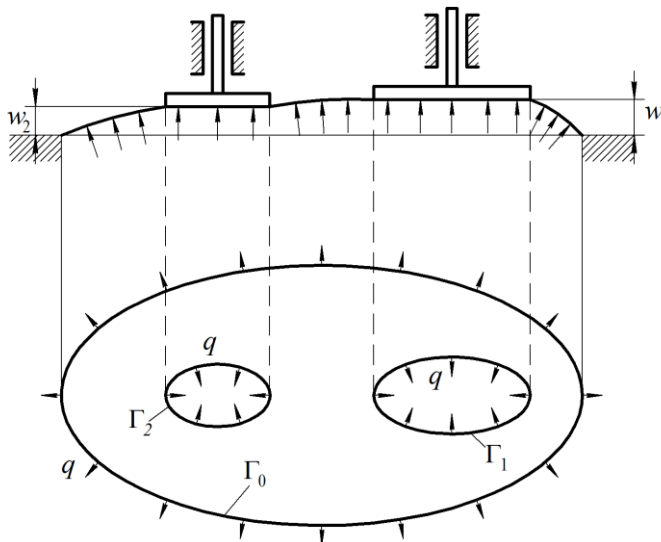
при граничном условии

$$\varphi = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

можно видеть, что функции  $w$  и  $\varphi$  будут тождественно совпадать, если  $p$  и  $q$  подобраны так, чтобы их отношение численно равнялось 2, а конфигурация рамки повторяет форму контура  $\Gamma$  поперечного сечения стержня. В таком случае можно отождествить функцию  $w$ , описывающую закон изгиба мембраны, с функцией  $\varphi$ , характеризующей напряжённое состояние стержня при кручении.

Мембранную аналогию можно распространить и на многосвязные сечения. Мембрану натянем на рамку, по форме совпадающей с  $\Gamma_0$ , и на жёсткие невесомые диски, конфигурация которых совпадает с конфигурацией вырезов, с одинаковым натяжением  $q$ . Диски при изгибе мембраны должны иметь возможность перемещаться только поступательно перпендикулярно плоскости мембраны (рисунок 7.14). Тогда прогиб мембраны будет определяться уравнением

$$\nabla^2 w = -\frac{P}{q}$$



**Рисунок 7.14 – Мембранная аналогия для многосвязной области**

при выполнении условий  $w = 0$  на  $\Gamma_0$ ;  $w = w_k$  на  $\Gamma_k$ , где  $w_k$  – перемещения жёстких дисков. Данные соотношения при  $p/q = 2$  совпадают с равенством (7.34) и условиями (7.39).

Применительно к изгибу мембраны можно равенству (7.50), вытекающему из теоремы Бредта о циркуляции касательного напряжения, придать простой физической смысл.

Заменим в нём  $\varphi$  на  $w$  и вместо множителя 2 в правой части возьмём отношение  $p/q$ :

$$\oint_{\Gamma'} \frac{\partial w}{\partial n} ds = -\frac{p}{q} A'.$$

Запишем далее это равенство в форме

$$\oint_{\Gamma'} q \frac{\partial w}{\partial n} ds + pA' = 0. \quad (7.54)$$

Произведение  $pA'$  есть проекция на ось  $x_3$  результирующей давления для участка мембраны с площадью  $A'$ . Производная  $\frac{\partial w}{\partial n}$  в подынтегральном выражении представляет собой наклон мембраны в направлении, нормальном к контуру. Величина же  $qds \frac{\partial w}{\partial n}$  – это проекция на ось  $x_3$  силы натяжения, действующей в пределах бесконечно малого участка  $ds$  кривой  $\Gamma'$ . Таким образом, равенство (7.54) выражает условие равновесия участка мембраны, заключённого внутри замкнутой кривой  $\Gamma'$ . Если в качестве  $\Gamma'$  взять кривую  $\Gamma_k$ , совпадающую с контуром  $k$ -го диска, то равенство (7.54) будет представлять собой условие равновесия этого диска. Отсюда видно, в частности, что в случае стержня с многозамкнутым сечением для осуществления мембранной аналогии необходимо прикладывать давление как к самой мембране, так и к жёстким дискам.

Мембранная аналогия позволяет благодаря своей наглядности лучше понять картину напряжённого состояния при кручении стержня. Кроме того, появляется возможность определения интересующих нас величин экспериментальным путём – посредством изучения прогибов соответствующей мембраны. В частности, для вычисления константы Сен-Венана мы имеем формулу (7.41)

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA + 2 \sum_{k=1}^m \varphi_k A_k.$$

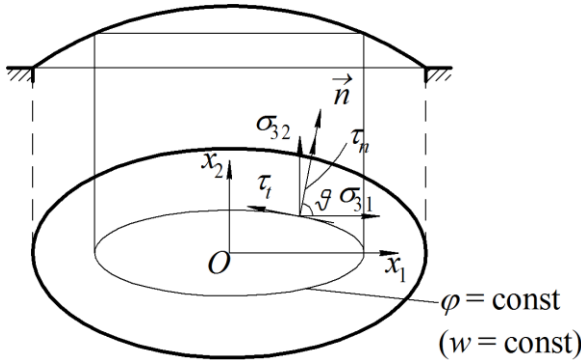
Если  $\varphi = w$ , то

$$I_k = 2 \int_A w dA + 2 \sum_{k=1}^m w_k A_k.$$

Интеграл  $\int_A w dA$  есть объём, заключённый между изогнутой мембраной и плоскостью рамки, а  $w_k A_k$  – объёмы цилиндров под жёсткими дисками. Следовательно, величина  $I_k$  численно равна удвоенному объёму тела, образованного изогнутой мембраной с дисками и плоскостью рамки (так называемого «бугра напряжений»).

Рассмотрим далее линию равного уровня  $\varphi = \text{const}$ . Для мембраны это будет линия равного прогиба  $w = \text{const}$ , называемая горизонталью (рисунок 7.15).

Найдём проекции  $\tau_n$  и  $\tau_t$  полного касательного напряжения на нормаль и касательную к данной линии. Нормальная составляющая



**Рисунок 7.15 – Линия равного уровня**

нормальная составляющая

$$\tau_n = \sigma_{31} \cos \vartheta + \sigma_{32} \sin \vartheta.$$

Внесём сюда соотношения (7.35)

$$\sigma_{31} = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

а также формулы (см. рисунок 7.9)

$$\cos \vartheta = \frac{\partial x_2}{\partial s}; \quad \sin \vartheta = -\frac{\partial x_1}{\partial s}. \quad (7.55)$$

Тогда получим

$$\tau_n = G\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} \right) = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad (7.56)$$

Но на линии равного уровня  $\partial \varphi / \partial s = 0$ , так что

$$\tau_n = 0.$$

Отсюда следует вывод: *полное касательное напряжение  $\tau$  направлено по касательной к линии равного уровня, то есть  $\tau = \tau_t$ . Иначе говоря, линии равного уровня являются траекториями касательных напряжений.* В частности, контур сечения является линией равного уровня, так что полное касательное напряжение направлено по касательной к контуру. На основании формулы (7.49) имеем

$$\tau = \tau_t = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (7.57)$$

Если в соответствии с мембранной аналогией отождествить  $\varphi$  с  $w$ , то получим

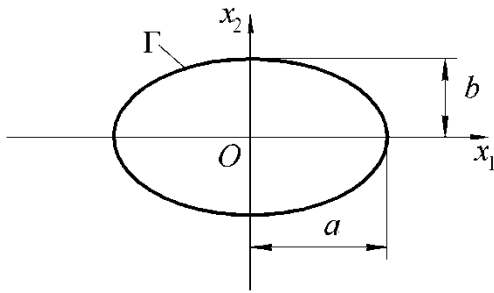
$$\tau = -G\alpha \frac{\partial w}{\partial n}.$$

Это равенство показывает, что полное напряжение определяется наклоном мембраны в направлении нормали к линии равного прогиба. Наибольшее касательное напряжение будет там, где мембрана имеет наибольший уклон (где более всего сгущаются линии равного уровня).

Можно доказать, что максимальное касательное напряжение при кручении стержня всегда возникает в некоторой точке на контуре, но не во внутренней точке сечения.

### 7.9 Кручение стержня эллиптического сечения

Пусть сечение стержня имеет форму эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ ; для определённости примем  $a \geq b$  (рисунок 7.16). Функцию напряжений будем искать для такого сечения в виде



где  $m$  – константа.

$$\varphi(x_1, x_2) = m \left( \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right), \quad (7.58)$$

где  $m$  – константа.

На контуре  $\Gamma$ , где  $x_1$  и  $x_2$  связаны равенством

равенством

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

Рисунок 7.16 – Эллиптическое сечение

функция  $\varphi$ , как и требуется, принимает нулевое значение. Подставим далее в уравнение

$$\nabla^2 \varphi = -2$$

вторые производные от функции (7.58)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 2m \frac{1}{a^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 2m \frac{1}{b^2}.$$

Это приводит к равенству

$$2m \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2,$$

которое удовлетворяется при

$$m = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (7.59)$$

Таким образом, функция

$$\varphi(x_1, x_2) = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right)$$

даёт решение данной задачи.

Геометрическую характеристику жёсткости на кручение найдём по формуле (7.41), которая в случае односвязного сечения имеет вид

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA.$$

Подставив сюда выражение (7.58), получаем

$$I_k = 2m \left( \frac{1}{a^2} \int_A x_1^2 dA + \frac{1}{b^2} \int_A x_2^2 dA - \int_A dA \right).$$

Первые два интеграла в этом выражении есть моменты инерции  $I_{x_2}$ ,  $I_{x_1}$  поперечного сечения относительно осей  $x_2$  и  $x_1$ , а третий интеграл есть площадь  $A$  сечения. Для эллиптического сечения

$$A = \pi ab; \quad I_{x_1} = \frac{\pi ab^3}{4}; \quad I_{x_2} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Если внести эти значения в формулу для  $I_k$ , будем иметь

$$I_k = -\pi abm.$$

С учётом выражения (7.59) находим окончательно

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (7.60)$$

Отметим, что в частном случае круглого сечения, когда  $a = b = d/2$  ( $d$  – диаметр сечения), величина  $I_k$  оказывается равной

$$I_k = \frac{\pi d^4}{32} = I_p,$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции сечения. Для сечения, отличного от круглого, всегда  $I_k < I_p$ .

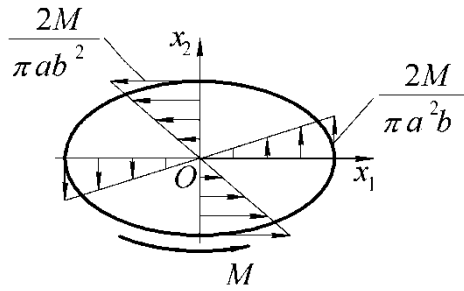
Касательные напряжения вычисляем по формулам

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{M}{I_k} m \frac{2x_2}{b^2}; \quad \sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{M}{I_k} m \frac{2x_1}{a^2}.$$

Подставив сюда соотношения (7.59) и (7.60), придём к следующим выражениям:

$$\sigma_{31} = -\frac{2M}{\pi ab^3} x_2; \quad \sigma_{32} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x_1. \quad (7.61)$$

Характер изменения напряжений вдоль осей показан на рисунке 7.17. Максимальные касательные напряжения возникают по концам малой оси. Абсолютная величина  $\tau_{\max}$  имеет значение



**Рисунок 7.17 – Распределение напряжений в эллиптическом сечении**

$$\tau_{\max} = \left| \sigma_{31} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=\pm b}} = \frac{2M}{\pi ab^2}. \quad (7.62)$$

Этот результат можно представить в форме

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_k},$$

где  $W_k$  – момент сопротивления кручению. Для эллиптического сечения

$$W_k = \frac{\pi ab^2}{2}.$$

В частном случае круглого сечения

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16},$$

что совпадает с известной формулой сопротивления материалов.

Установим, наконец, характер деформации сечения. Для нахождения функции деформации  $f(x_1, x_2)$  обратимся к соотношениям (7.31)

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \right); \quad \sigma_{32} = \frac{M}{I_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1 \right),$$

из которых следуют равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{I_k}{M} \sigma_{31} + x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{I_k}{M} \sigma_{32} - x_1.$$

Подставим в них выражения (7.60) и (7.61):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\pi a^3 b^3}{M(a^2 + b^2)} \cdot \frac{2M}{\pi ab^3} x_2 + x_2 = \left( -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} + 1 \right) x_2 = -\lambda x_2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\pi a^3 b^3}{M(a^2 + b^2)} \cdot \frac{2M}{\pi a^3 b} x_1 - x_1 = \left( \frac{2b^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) x_1 = -\lambda x_1,$$

где обозначено

$$\lambda = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (7.63)$$

Из этих равенств вытекает, что функция  $f(x_1, x_2)$  имеет вид

$$f(x_1, x_2) = -\lambda x_1 x_2 + D,$$

где  $D$  – произвольная постоянная. Последняя должна равняться нулю в силу требования

$$f(0,0) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к соотношению

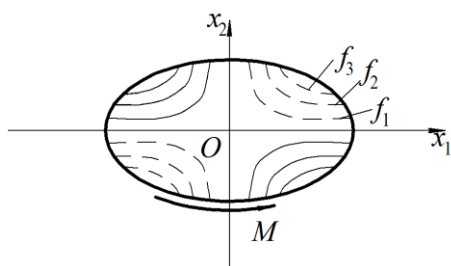
$$f = -\lambda x_1 x_2. \quad (7.64)$$

По формуле

$$u_3 = \alpha f = \frac{M}{GI_k} f = -\frac{M}{GI_k} \lambda x_1 x_2$$

выводим закон изменения перемещения  $u_3$  по сечению стержня. Если подставить сюда значения (7.60) и (7.63), то получим окончательно зависимость

$$u_3 = -\frac{M(a^2 - b^2)}{\pi G a^3 b^3} x_1 x_2.$$



**Рисунок 7.18 – Линии  $f = \text{const}$  ( $f_1 < f_2 < f_3$ )**

Картина депланации сечения показана на рисунке 7.18, где нанесены линии  $f = \text{const}$ . Согласно (7.64) они представляют собой гиперболы. Сплошными линиями отмечены точки сечения, которые перемещаются в положительную сторону оси  $x_3$ , штриховыми – в отрицательную (при указанном на рисунке направлении момента  $M$ ).

В заключение отметим, что поскольку для эллиптического сечения

$$A = \pi ab; \quad I_p = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{4},$$

формула (7.60) для константы Сен-Венана может быть записана следующим образом

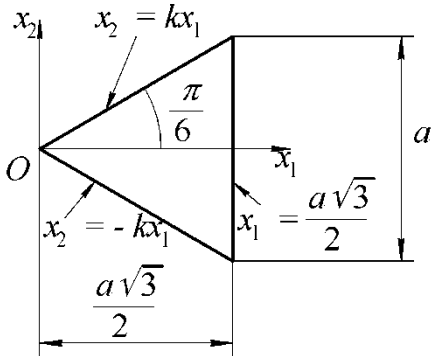
$$I_k = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}. \quad (7.65)$$

Как установил Сен-Венан, формулой (7.65) в качестве приближённой можно пользоваться при оценке геометрической характеристики жёсткости на кручение и для других односвязных поперечных сечений. При этом величина  $I_p$  должна вычисляться относительно центра тяжести поперечного сечения.

## 7.10 Кручение стержня с сечением в форме равностороннего треугольника

На рисунке 7.19 показано сечение стержня в форме равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Выберем систему координат так, как показано на рисун-

ке. Заметим попутно, что выбор начала координат не влияет на результаты расчёта, поэтому точку  $O$  не обязательно совмещать, скажем, с центром тяжести сечения.



**Рисунок 7.19 – Сечение в форме правильного треугольника**

На рисунке указаны уравнения сторон треугольника в выбранной системе координат; через  $k$  обозначен угловой коэффициент:

$$k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (7.66)$$

Запишем уравнения сторон в форме равенств

$$x_1 - \frac{1}{k}x_2 = 0; \quad x_1 + \frac{1}{k}x_2 = 0; \quad x_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$$

и будем искать  $\varphi(x_1, x_2)$  в виде произведения функций, стоящих в левых частях этих равенств:

$$\varphi(x_1, x_2) = m \left( x_1 - \frac{1}{k}x_2 \right) \left( x_1 + \frac{1}{k}x_2 \right) \left( x_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right).$$

Здесь  $m$  – некоторый коэффициент. Данная функция, как и требуется, равна нулю в каждой точке контура. Выясним, удовлетворяет ли она уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -2.$$

Преобразуем для этого выражение для  $\varphi$  следующим образом:

$$\varphi = m \left( x_1^2 - \frac{1}{k^2}x_2^2 \right) \left( x_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = m \left( x_1^2 - 3x_2^2 \right) \left( x_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

или

$$\varphi = m \left( x_1^3 - 3x_1x_2^2 - \frac{a\sqrt{3}}{2}x_1^2 + \frac{3\sqrt{3}a}{2}x_2^2 \right). \quad (7.67)$$

Далее найдём вторые производные

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = m(6x_1 - a\sqrt{3}); \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = m(-6x_1 + 3\sqrt{3}a)$$

и подставим их в дифференциальное уравнение. В итоге получаем равенство

$$m \cdot 2\sqrt{3}a = -2,$$

которое удовлетворяется, если

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}a}. \quad (7.68)$$



Итак, функция (7.67) при условии (7.68) даёт решение данной задачи.

Перейдём к вычислению константы Сен-Венана. Учитывая симметрию сечения, запишем

$$I_{\kappa} = 2 \int_A \varphi dA = 4 \int_0^{a\sqrt{3}/2} \int_0^{kx_1} \varphi dx_2 dx_1.$$

Введём замену переменной, положив  $kx_1 = z$ . Тогда

$$x_1 = \frac{1}{k} z = \sqrt{3}z; \quad dx_1 = \sqrt{3}dz.$$

При  $x_1 = a\sqrt{3}/2$  будет  $z = a/2$ , так что

$$I_{\kappa} = 4\sqrt{3} \int_0^{a/2} \int_0^z \varphi dx_2 dz.$$

Подставим сюда выражение

$$\varphi = m(x_1^2 - 3x_2^2) \left( x_1 - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} m(z^2 - x_2^2)(2z - a).$$

Это даёт

$$\begin{aligned} I_{\kappa} &= 4\sqrt{3} \frac{3\sqrt{3}}{2} m \int_0^{a/2} (2z - a) \int_0^z (z^2 - x_2^2) dx_2 dz = \\ &= 18m \int_0^{a/2} (2z - a) \left( z^3 - \frac{z^3}{3} \right) dz = 12m \int_0^{a/2} (2z^4 - az^3) dz. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$I_{\kappa} = -\frac{3}{80} ma^5$$

или, с учётом (7.68),

$$I_{\kappa} = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4. \quad (7.69)$$

Заметим, что по формуле (7.65) приближённая величина  $I_{\kappa}$  оказывается равной  $9\sqrt{3}a^4/(64\pi^2)$ , что на 14% больше точного значения (7.69).

Перейдём далее к вычислению напряжений. По формулам (7.42), (7.67) и (7.68) имеем

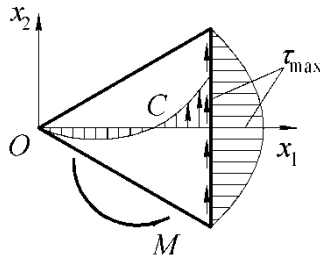
$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_{\kappa}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{80M}{\sqrt{3}a^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}a} (-6x_1x_2 + 3\sqrt{3}ax_2) = \frac{40M}{a^5} \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} - x_1 \right) x_2;$$

$$\sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{80M}{\sqrt{3}a^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}a} (3x_1^2 - 3x_2^2 - a\sqrt{3}x_1) = \frac{80M}{a^5} \left( x_1^2 - x_2^2 - \frac{a\sqrt{3}}{3} x_1 \right).$$

В точках, лежащих на высоте треугольника (при  $x_2 = 0$ ),

$$\sigma_{31} = 0; \quad \sigma_{32} = \frac{40M}{a^5} \left( x_1 - \frac{a\sqrt{3}}{3} \right) x_1.$$

В центре тяжести  $C$  треугольника (при  $x_1 = a\sqrt{3}/3$ )  $\sigma_{32} = 0$ . Наибольшее касательное напряжение возникает в середине стороны треугольника:



$$\tau_{\max} = \sigma_{32} \Big|_{\substack{x_1=a\sqrt{3}/2 \\ x_2=0}} = \frac{20M}{a^3}.$$

Представляя этот результат в форме  $\tau_{\max} = M/W_k$ , будем иметь

$$W_k = \frac{a^3}{20}. \quad (7.70)$$

**Рисунок 7.20 – Напряжения при кручении стержня с сечением в форме равностороннего треугольника**

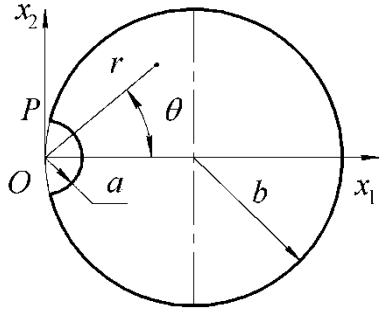
Вдоль стороны треугольника касательные напряжения изменяются по квадратичному закону,

обращаясь в ноль в угловых точках. Характер распределения напряжений в сечении стержня показан на рисунке 7.20.

### 7.11 Кручение стержня круглого сечения с продольной полукруглой канавкой

Предположим, что стержень круглого сечения радиуса  $b$  имеет продольную канавку полукруглой формы радиуса  $a$  (рисунок 7.21). Центр окружности, образующей канавку, находится на пересечении окружности радиуса  $b$  с осью симметрии.

Наряду с декартовой системой координат  $x_1, x_2, x_3$ , начало которой возьмём на линии, проходящей через центр выточки параллельно образующей, введём цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ , совместив ось  $z$  с осью  $x_3$ . Решением задачи должна быть такая функция  $\varphi(r, \theta)$ , которая имеет нулевое значение на контуре  $\Gamma$  и удовлетворяет уравнению



**Рисунок 7.21 – Стержень круглого сечения с полукруглой канавкой**

$$\nabla^2 \varphi = -2,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

– оператор Лапласа в полярных координатах. Покажем, что этим требованиям удовлетворяет функция

$$\varphi(r, \theta) = m \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (r - 2b \cos \theta), \quad (7.71)$$

где  $m$  – некоторый множитель.

На контуре выточки имеем  $r = a$ , а на остальной части контура координаты  $r$  и  $\theta$  связаны в каждой точке равенством

$$r = 2b \cos \theta,$$

так что в любой точке контура  $\Gamma$  выражение (7.71) обращается в ноль.

Раскроем далее скобки в (7.71) и найдём необходимые производные:

$$\varphi = m \left( r^2 - 2br \cos \theta + \frac{2a^2 b}{r} \cos \theta - a^2 \right);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 2m \left( r - b \cos \theta - \frac{a^2 b}{r^2} \cos \theta \right);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 2m \left( 1 + \frac{2a^2 b}{r^3} \cos \theta \right);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 2m \left( br \cos \theta - \frac{a^2 b}{r} \cos \theta \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = 2m & \left[ \left( 1 + \frac{2a^2 b}{r^3} \cos \theta \right) + \frac{1}{r} \left( r - b \cos \theta - \frac{a^2 b}{r^2} \cos \theta \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \left( br \cos \theta - \frac{a^2 b}{r} \cos \theta \right) \right] = 4m. \end{aligned}$$

Как видим, при

$$m = -\frac{1}{2}$$

функция (7.71) даёт решение данной задачи.

Полагая  $dA = r dr d\theta$  и принимая во внимание симметрию сечения относительно оси  $x_1$ , геометрическую характеристику жёсткости на кручение вычислим следующим образом:

$$I_k = 2 \int_A \varphi(r, \theta) dA = 4 \int_0^{\theta_0} \int_a^{2b \cos \theta} \varphi(r, \theta) r dr d\theta.$$

Через  $\theta_0$  обозначено значение полярного угла в точке  $P$  контура  $\Gamma$  (см. рисунок 7.21). В этой точке справедливо равенство

$$a = 2b \cos \theta_0.$$

Обозначая через  $c$  отношение

$$c = \frac{a}{2b}, \quad (7.72)$$

будем иметь

$$\theta_0 = \arccos c, \quad (7.73)$$

а также

$$\cos \theta_0 = c; \quad \cos 2\theta_0 = -1 + 2c^2; \quad \sin \theta_0 = \sqrt{1 - c^2}. \quad (7.74)$$

Подставив  $\varphi(r, \theta)$  в подынтегральное выражение и выполнив интегрирование, можно с учётом соотношений (7.72)...(7.74) прийти к следующей формуле для константы Сен-Венана:

$$I_k = b^4 k_1(c), \quad (7.75)$$

где

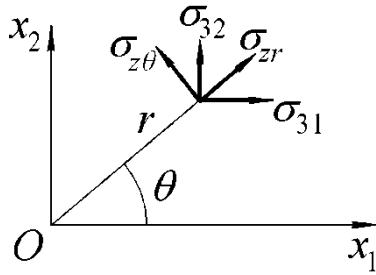
$$k_1(c) = (1 - 8c^2 - 8c^4) \arccos c + c(1 + 14c^2) \sqrt{1 - c^2}. \quad (7.76)$$

Заметим, что для малой канавки, когда  $c \rightarrow 0$ , будем иметь  $\arccos c \rightarrow \pi/2$ , и формулы (7.75), (7.76) приводят в пределе к известному значению  $I_k$  для стержня круглого сечения:

$$I_k = I_p = \frac{\pi b^4}{2}.$$

Касательные напряжения в радиальном и окружном направлениях обозначим через  $\sigma_{zr}$  и  $\sigma_{z\theta}$  (рисунок 7.22) и выразим их через функцию напряжений  $\varphi$ . Ранее было установлено, что проекции полного касательного напряжения на касательную и нормаль к какому-либо контуру определяются формулами (7.49) и (7.56)

$$\tau_t = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \tau_n = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$



**Рисунок 7.22 – Касательные напряжения в полярных координатах**

Если взять в качестве контура дугу окружности радиуса  $r$ , то  $\tau_t$  и  $\tau_n$  будут совпадать с  $\sigma_{z\theta}$  и  $\sigma_{zr}$  соответственно. Полагая  $ds = r d\theta$  и учитывая, что  $G\alpha = M/I_k$ , приходим к соотношениям

$$\sigma_{zr} = \frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}; \quad \sigma_{z\theta} = -\frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (7.77)$$

Отсюда следуют выражения для

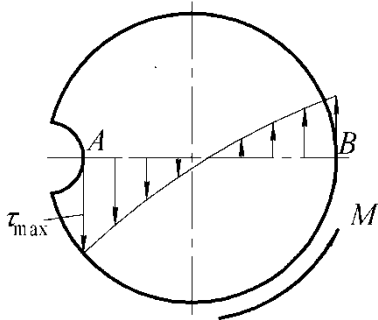
$$\sigma_{zr} = \frac{Mb}{I_k} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta;$$

$$\sigma_{z\theta} = \frac{M}{I_k} \left[ r - b \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \right].$$

При  $\theta = 0$ , в частности, получаем

$$\sigma_{zr}|_{\theta=0} = 0; \quad \sigma_{z\theta}|_{\theta=0} = \frac{Mb}{I_k} \left( \frac{r}{b} - 1 - \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Распределение напряжений  $\sigma_{z\theta}$  при  $\theta = 0$  показано на рисунке 7.23. Максимальное напряжение в сечении возникает в точке  $A$ :



**Рисунок 7.23 – Напряжения  $\sigma_{z\theta}$  при  $\theta = 0$**  где

$$\tau_{\max} = |\sigma_{z\theta}^A| = \frac{Mb}{I_k} \left( 2 - \frac{a}{b} \right).$$

Этот результат можно записать в стандартной форме  $\tau_{\max} = \frac{M}{W_k}$ . Здесь

$$W_k = \frac{I_k}{2b(1-c)} = b^3 k_2(c), \quad (7.78)$$

$$k_2(c) = \frac{k_1(c)}{2(1-c)}. \quad (7.79)$$

При  $c \rightarrow 0$  будем иметь

$$\tau_{\max} = \frac{4M}{\pi b^3},$$

что вдвое превышает номинальное напряжение

$$\tau_{\text{ном}} = \frac{2M}{\pi b^3},$$

возникающее на контуре гладкого круглого сечения. Такая же величина  $\tau_{\text{ном}}$  получается и в точке  $B$  при  $c \rightarrow 0$ . Как видим, возле выточки возникает концентрация напряжений. Коэффициент концентрации при  $a \ll b$  оказывается равным

$$k = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{ном}}} = 2.$$

## 7.12 Кручение стержня прямоугольного сечения

В случае стержня прямоугольного сечения (рисунок 7.24) решение не удаётся найти в замкнутой форме, но можно построить его в форме бесконечного ряда. Обратимся к мембранной аналогии. Мембрана, натянутая на прямоугольную рамку и нагруженная поперечным давлением, изогнётся и примет форму, показанную на рисунке 7.25. Такой же закон изменения должна иметь функция  $\varphi(x_1, x_2)$ . Будем искать её в виде бесконечного ряда

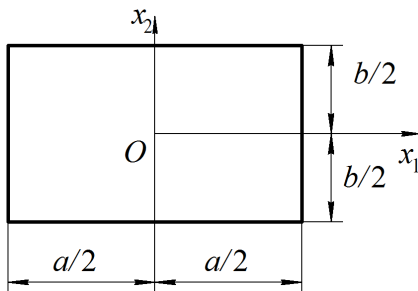


Рисунок 7.24 – Прямоугольное сечение

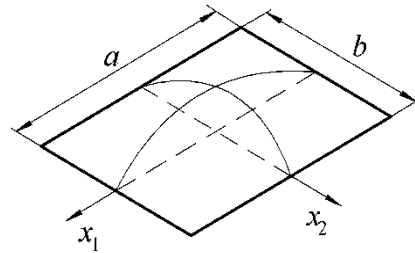


Рисунок 7.25 – Вид изогнутой мембраны

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} f_m(x_1) \cos \frac{m\pi x_2}{b}, \quad (7.80)$$

где  $f_m(x_1)$  – некоторые функции координаты  $x_1$ , подлежащие отысканию.

Функция  $\varphi$  должна равняться нулю при  $x_1 = \pm a/2$  и при  $x_2 = \pm b/2$ . Это будет обеспечено, если каждое из слагаемых

$$f_m(x_1) \cos \frac{m\pi x_2}{b}$$

удовлетворяет данным условиям. Отсюда вытекают требования  $f_m\left(\pm\frac{a}{2}\right) = 0$  и  $\cos\frac{m\pi}{2} = 0$ . Последнее равенство выполняется при нечётных  $m$ , поэтому в (7.80) индекс суммирования принимает только нечётные значения.

Запишем выражения для вторых производных от функции  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} f_m''(x_1) \cos\frac{m\pi x_2}{b}; \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} &= - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} f_m(x_1) \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \cos\frac{m\pi x_2}{b}.\end{aligned}$$

Подстановка их в уравнение  $\nabla^2\varphi = -2$  даёт равенство

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left[ f_m''(x_1) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 f_m(x_1) \right] \cos\frac{m\pi x_2}{b} = -2. \quad (7.81)$$

Чтобы можно было удовлетворить данному равенству, разложим его правую часть в ряд по косинусам. Как известно, функция  $F(x_2)$  на интервале  $(-b/2, b/2)$  может быть представлена рядом

$$F(x_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x_2}{b},$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам Фурье:

$$a_m = \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{b/2} F(x_2) \cos\frac{m\pi x_2}{b} dx_2.$$

Полагая применительно к рассматриваемому случаю  $F(x_2) = 2$ , будем иметь

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{b/2} 2 \cos\frac{m\pi x_2}{b} dx_2 = \frac{4}{b} \frac{b}{m\pi} \sin\frac{m\pi x_2}{b} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \\ &= \frac{8}{m\pi} \sin\frac{m\pi}{2},\end{aligned}$$

то есть

$$a_m = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8}{m\pi} & \text{для нечётных } m \\ 0 & \text{для чётных } m. \end{cases}$$

Таким образом, разложение правой части равенства (7.81) в ряд будет содержать, так же как и левая часть, только слагаемые с нечётными  $m$ . Прирав-

нивая множители при  $\cos(m\pi x_2/b)$  в левой и правой частях, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно  $f_m(x_1)$ :

$$f_m''(x_1) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 f_m(x_1) = -(-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8}{m\pi}. \quad (7.82)$$

Его решение

$$f_m(x_1) = f_m^0(x_1) + f_m^*(x_1),$$

где  $f_m^0(x_1)$  – общее решение однородного уравнения;  $f_m^*(x_1)$  – частное решение неоднородного уравнения. Однородному уравнению

$$f_m^{0''}(x_1) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 f_m^0(x_1) = 0$$

удовлетворяют экспоненциальные функции  $e^{\frac{m\pi x_1}{b}}$  и  $e^{-\frac{m\pi x_1}{b}}$ . Удобнее, однако, использовать гиперболические синус и косинус, являющиеся их полуразностью и полусуммой. Тогда можно записать

$$f_m^0(x_1) = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x_1}{b} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x_1}{b},$$

где  $A_m, B_m$  – произвольные постоянные.

Частное решение уравнения (7.82) в соответствии с видом правой части ищем в виде  $f_m^* = \text{const}$ . Подстановка в уравнение (7.82) даёт равенство

$$-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 f_m^* = -(-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8}{m\pi},$$

из которого устанавливаем, что

$$f_m^* = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8b^2}{m^3 \pi^3}.$$

Таким образом, функция  $f_m(x_1)$  имеет вид

$$f_m(x_1) = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x_1}{b} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x_1}{b} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8b^2}{m^3 \pi^3}.$$

Гиперболический синус является нечётной, а гиперболический косинус – чётной функцией своего аргумента. Как видно из рисунка (7.25), функция  $\varphi$  и, следовательно, каждая из функций  $f_m(x_1)$  должны быть чётными функциями координаты  $x_1$ . На этом основании следует принять  $A_m = 0$ . Постоянная  $B_m$

должна быть подчинена условию  $f_m\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ , что даёт равенство



$$B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8b^2}{m^3 \pi^3} = 0.$$

Обозначим через

$$\gamma = \frac{a}{b}$$

отношение сторон прямоугольника. Выражение для  $B_m$  можно записать тогда в виде

$$B_m = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \cdot \frac{8b^2}{m^3 \pi^3}.$$

Таким образом, приходим к следующему выражению для  $f_m(x_1)$ :

$$f_m(x_1) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8b^2}{m^3 \pi^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi x_1}{b}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right). \quad (7.83)$$

Согласно (7.80) получаем теперь решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi x_1}{b}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right) \cos \frac{m\pi x_2}{b}. \quad (7.84)$$

Далее вычисляем константу Сен-Венана:

$$I_K = 2 \int_A \varphi dA = \frac{16b^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \int_{-a/2}^{a/2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi x_1}{b}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right) dx_1 \int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{m\pi x_2}{b} dx_2.$$

Интегрирование по координате  $x_1$  даёт

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi x_1}{b}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right) dx_1 &= \left( x_1 - \frac{b}{m\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi x_1}{b}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \\ &= a - \frac{2b}{m\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi\gamma}{2}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} = a \left( 1 - \frac{2}{m\pi\gamma} \operatorname{th} \frac{m\pi\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл, который берётся по координате  $x_2$  и который уже фигурировал выше, имеет значение

$$\int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{m\pi x_2}{b} dx_2 = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2b}{m\pi}.$$

С учётом этого получаем

$$I_k = \frac{32ab^3}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left( 1 - \frac{2}{m\pi\gamma} \operatorname{th} \frac{m\pi\gamma}{2} \right).$$

Числовой ряд

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

имеет сумму, равную  $\pi^4/96$ . Поэтому можно записать

$$I_k = \frac{ab^3}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5 \gamma} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi\gamma}{2} \right). \quad (7.85)$$

Данный результат представим в форме

$$I_k = ab^3 \cdot k_1(\gamma),$$

где  $k_1(\gamma)$  имеет выражение

$$k_1(\gamma) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5 \gamma} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi\gamma}{2} \right). \quad (7.87)$$

Будем считать, что  $a \geq b$ , так что  $\gamma = \frac{a}{b} \geq 1$ . Ряд в формуле для  $k_1(\gamma)$  сходится очень быстро. С ростом аргумента гиперболический тангенс стремится к 1, и даже для  $\gamma = 1$  можно брать  $\operatorname{th} \frac{m\pi\gamma}{2} = 1$  в случае  $m \geq 3$ . Поскольку приближённо

$$\sum_{m=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} = 0,0045,$$

формулу для  $k_1(\gamma)$  можно записать в следующем расчётном виде:

$$k_1(\gamma) = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma} \left( 0,6274 \operatorname{th} \frac{\pi\gamma}{2} + 0,0028 \right) \right]. \quad (7.88)$$

Для  $\gamma = 1$ , в частности, константа Сен-Венана оказывается равной

$$I_k = 0,1406a^4.$$

Для вытянутых прямоугольников (когда  $\gamma \geq 3$ ), можно в (7.88) принять  $\text{th} \frac{\pi\gamma}{2} = 1$  и пользоваться формулой

$$k_1(\gamma) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{0,63}{\gamma} \right).$$

Перейдём к вычислению напряжений. Наибольший уклон мембраны, как видно из рисунка 7.25, будет в середине длинной стороны. Следовательно, при  $a \geq b$  максимальные касательные напряжения возникают на сторонах  $x_2 = \pm \frac{b}{2}$  при  $x_1 = 0$ :

$$\tau_{\max} = \left| \sigma_{31} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=\frac{b}{2}}}.$$

По формуле

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

находим

$$\sigma_{31} \Big|_{x_1=0} = -\frac{8Mb}{\pi^2 I_k} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \left( 1 - \frac{1}{\text{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right) \sin \frac{m\pi x_2}{b}.$$

Полагая здесь  $x_2 = b/2$  и опуская знак минус, получим

$$\tau_{\max} = \frac{8Mb}{\pi^2 I_k} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{1}{\text{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right).$$

Имеет место равенство

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

благодаря чему можно записать

$$\tau_{\max} = \frac{Mb}{I_k} \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \text{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} \right).$$

Принимая во внимание выражение (7.86) для  $I_k$ , представим этот результат в обычном виде

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_k},$$

где  $W_k$  – момент сопротивления кручению прямоугольного сечения, равный

$$W_k = ab^2 k_2(\gamma),$$

Безразмерный коэффициент  $k_2(\gamma)$  имеет следующее выражение:

$$k_2(\gamma) = \frac{k_1(\gamma)}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}}}. \quad (7.90)$$

Формула (7.90) пригодна для практических вычислений, поскольку стоящий в её знаменателе ряд сходится очень быстро. В самом неблагоприятном случае  $\gamma = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi\gamma}{2}} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2,509} + \frac{1}{9 \cdot 55,66} + \frac{1}{25 \cdot 1288} + \dots = 0,4006. \end{aligned}$$

Уже третье слагаемое можно здесь отбросить без потери точности. Расчётная формула для  $W_k$  в частном случае квадратного сечения имеет вид

$$W_k = 0,2082a^3.$$

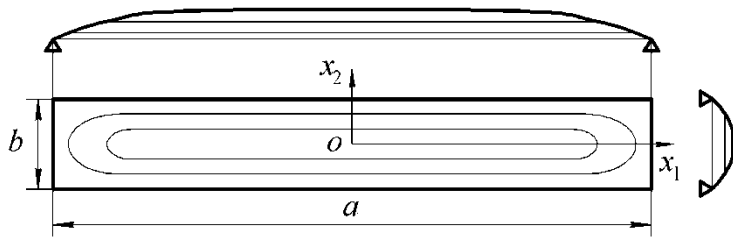
### 7.13 Кручение стержня с сечением в форме узкого прямоугольника. Тонкостенные стержни открытого профиля

Расчёт на кручение стержня прямоугольного сечения существенно упрощается в случае узкого прямоугольника, когда  $b \ll a$  (рисунок 7.26). Опираясь на мембранную аналогию, можно заключить, что за исключением небольших участков, примыкающих к коротким сторонам прямоугольника, функция  $\varphi$  практически не зависит от координаты  $x_1$ :

$$\varphi = \varphi(x_2).$$

Тогда уравнение  $\nabla^2 \varphi = -2$  превращается в равенство

$$\frac{d^2 \varphi}{dx_2^2} = -2.$$



**Рисунок 7.26 – Сечение стержня в форме узкого прямоугольника**

Проинтегрируем его один раз:

$$\frac{d\varphi}{dx_2} = -2x_2 + C_1,$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования. Изогнутая мембрана имеет корытообразную форму, симметричную относительно оси  $x_1$ . Её наклон при  $x_2 = 0$  равен нулю, то есть

$$\left. \frac{d\varphi}{dx_2} \right|_{x_2=0} = 0,$$

откуда следует, что необходимо принять  $C_1 = 0$ . Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx_2} = -2x_2,$$

и повторное интегрирование даёт

$$\varphi = -x_2^2 + C_2,$$

где  $C_2$  – ещё одна постоянная интегрирования. Она должна быть найдена из условия  $\varphi = 0$  при  $x_2 = \pm b/2$ , откуда получаем  $C_2 = b^2/4$ .

Итак, функция напряжений в случае узкого прямоугольника может быть взята в виде

$$\varphi = \frac{b^2}{4} - x_2^2. \quad (7.91)$$

Для константы Сен-Венана получаем далее

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA = 4 \int_0^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi dx_1 dx_2 = 4a \int_0^{b/2} \left( \frac{b^2}{4} - x_2^2 \right) dx_2,$$

откуда выводим

$$I_k = \frac{ab^3}{3}. \quad (7.92)$$

Такое же значение вытекает из формулы (7.88) для произвольного прямоугольника при  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Наибольший уклон мембраны возникает на длинной стороне прямоугольника, как это видно из рисунка 7.26. Поэтому максимальные касательные напряжения будут действовать при  $x_2 = \pm b/2$ . Исходя из (7.91) имеем

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{2M}{I_k} x_2; \quad \sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0. \quad (7.93)$$

Абсолютная величина напряжения  $\sigma_{31}$ , взятая при  $x_2 = \pm b/2$ , даёт  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M}{I_k} b = \frac{3M}{ab^2}. \quad (7.94)$$

Следовательно, величина момента сопротивления кручению для рассматриваемого сечения

$$W_k = \frac{ab^2}{3}.$$

Основываясь на полученных результатах, можно рассмотреть и более общий случай, когда поперечное сечение стержня составлено из узких прямоугольников, средние линии которых образуют незамкнутый профиль. В общем случае профиль может иметь и криволинейную форму (рисунок 7.27).

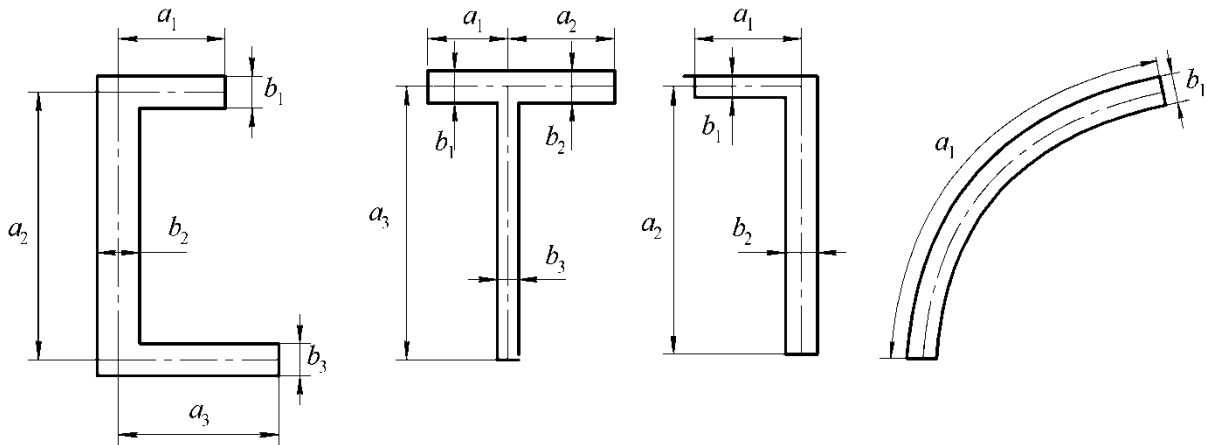


Рисунок 7.27 – Примеры тонкостенных сечений открытого профиля

Обозначим через  $a_i$ ,  $b_i$  длину и толщину стенки на  $i$ -ом участке профиля. Для получения расчётных зависимостей обратимся снова к мембранной аналогии. Если на  $i$ -ом участке  $b_i \ll a_i$ , то изогнутая поверхность мембраны, натянутой на контур, будет, по существу, такой же, как и в случае изолированного прямоугольника со сторонами  $a_i$ ,  $b_i$ . Отличие затронет лишь небольшие участки мембраны возле коротких сторон. Объём тела между изогнутой мембраной и плоскостью рамки будет приближённо равен сумме объёмов для отдельных участков тела. Исходя из формулы (7.92), приходим отсюда к следующему приближённому выражению для  $I_k$ :

$$I_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n a_i b_i^3, \quad (7.95)$$

где  $n$  – число участков. На криволинейном участке с относительно небольшой кривизной форма изогнутой мембраны будет мало отличаться от формы изгиба на прямолинейном участке такой же длины, поэтому формула (7.95) применима и для таких профилей, которые имеют криволинейные участки.

Касательные напряжения в тонкостенном сечении изменяются по толщине стенки по линейному закону, как это следует из формул (7.93). На  $i$ -ом участке профиля величина напряжения  $\tau_i$  в крайних по толщине точках выражается формулой

$$\tau_i = \pm \frac{M}{I_k} b_i. \quad (7.96)$$

Максимальное напряжение возникает на участке с *наибольшей* толщиной  $b_{\max}$ . Его абсолютное значение

$$\tau_{\max} = \frac{M}{I_k} b_{\max}. \quad (7.97)$$

Формула (7.96) даёт правильные значения для напряжений на сторонах тонкостенного сечения. Но для угловых точек, где стыкуются смежные участки, она непригодна. Прежде всего, заметим, что во внешних (выступающих) углах касательные напряжения всегда равны нулю. В самом деле, обратимся к мембранной аналогии. Прогиб мембраны  $w = 0$  на контуре  $\Gamma$ . При переходе от угловой точки 1 к соседним точкам контура 1' или 1'' (рисунок 7.28) значение  $w$  остаётся неизменным. Следовательно, производные  $\partial w / (\partial t_1)$  и  $\partial w / (\partial t_2)$  равны нулю. Но тогда равна нулю в точке 1 производная от функции  $w$  по любому направлению, то есть наклон мембраны к плоскости рамки в точке 1 отсутствует. Отсюда заключаем, что касательное напряжение в точке 1 равно нулю.

Напротив, у входящих углов наблюдается значительная концентрация напряжений, величина которой зависит от радиуса скругления. Пусть два участка сечения с толщинами  $b_1$  и  $b_2$  сопрягаются под прямым углом с радиусом скругления  $r_0$  (рисунок 7.29). Примем, что  $b_2 \geq b_1$ . Максимальное напряжение в месте сопряжения может быть найдено по приближённой формуле

$$\tau = c \frac{M}{I_k} b_1,$$

где

$$c = 1,74 \sqrt[3]{\frac{b_2}{r_0}}.$$

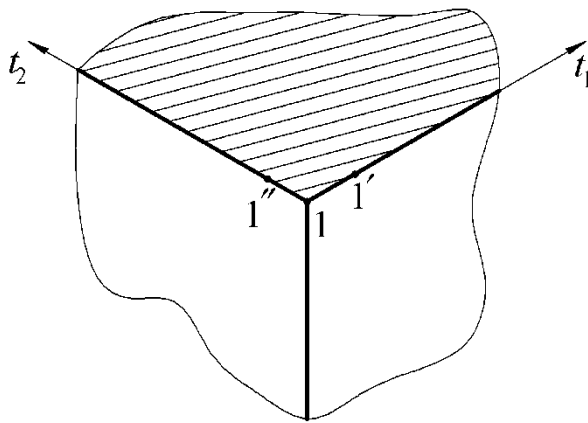


Рисунок 7.28 – Выступающий угол

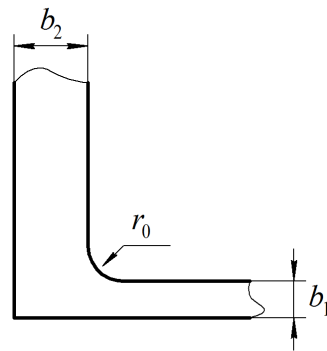


Рисунок 7.29 – Входящий угол

При  $r_0 \rightarrow 0$  напряжения становятся теоретически бесконечно большими. В действительности в месте сопряжения возникают в этом случае пластические деформации, и соотношения теории упругости теряют свою силу.

### 7.14 Кручение тонкостенных труб

Пусть сечение тонкостенной трубы имеет произвольную форму и в общем случае переменную толщину  $\delta$ . Рассматривая кручение трубы, воспользу-

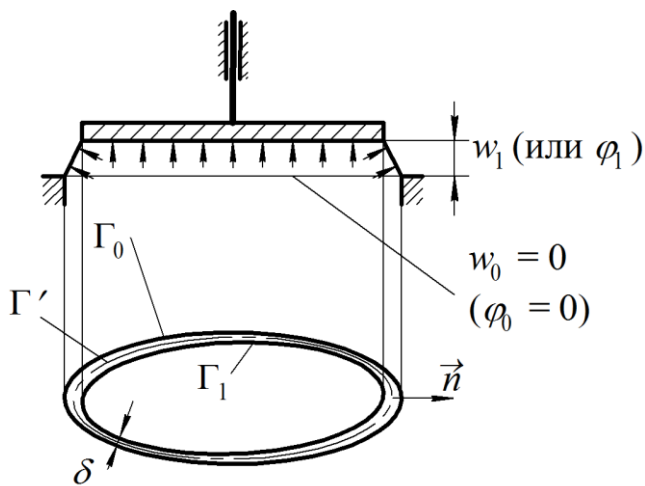


Рисунок 7.30 – Мембранная аналогия для тонкостенной трубы

емся вновь мембранной аналогией. Форма изогнутой мембраны для рассматриваемого сечения показана на рисунке 7.30, где через  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  обозначены наружный и внутренний контуры, через  $\Gamma'$  – средний контур, который делит толщину пополам, а через  $w_1$  – перемещение жёсткого невесомого диска, имеющего форму  $\Gamma_1$ . Поскольку  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  являются линиями равного уровня, линией равного уровня можно считать и контур  $\Gamma'$ . Из-за

малости толщины стенки  $\delta$  наклон мембраны можно принять постоянным по

толщине, полагая  $\frac{\partial w}{\partial n} \approx -\frac{w_1}{\delta}$ , где знак минус поставлен потому, что в положи-

тельном направлении нормали  $\vec{n}$  прогиб убывает.



Соответственно, и для функции напряжений  $\varphi$  можно записать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \approx -\frac{\varphi_1}{\delta},$$

где  $\varphi_1$  – значение функции  $\varphi$  на контуре  $\Gamma_1$ . Для отыскания  $\varphi_1$  обратимся к теореме Бредта о циркуляции касательного напряжения в форме равенства (7.50):

$$\oint_{\Gamma'} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -2A',$$

где  $A'$  – площадь фигуры, заключённой внутри контура  $\Gamma'$ . В дальнейшем вместо  $A'$  будем использовать обозначение

$$\Omega = 2A'.$$

Подставив в подынтегральное выражение  $\partial \varphi / \partial n$ , придём к соотношению

$$\varphi_1 \oint \frac{ds}{\delta} = \Omega,$$

из которого и находим постоянную  $\varphi_1$ :

$$\varphi_1 = \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

Здесь и в дальнейшем символ  $\oint$  означает интегрирование по контуру  $\Gamma'$ , но обозначение  $\Gamma'$  будем опускать.

Геометрическую характеристику жёсткости на кручение вычисляем по формуле (7.41):

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA + 2 \sum_{k=1}^m \varphi_k A_k = 2 \int_A \varphi dA + 2\varphi_1 A_1.$$

В терминах мембранной аналогии эта величина есть удвоенный объём пространства, заключённого между плоскостью рамки и изогнутой мембраной с жёстким диском (рисунок 7.31). Можно приближённо заменить данный объём объёмом цилиндра высотой  $w_1$  и с основанием, образованным средним контуром  $\Gamma'$ . Тогда для  $I_k$  получим выражение  $I_k = \Omega w_1$  или

$$I_k = \Omega \varphi_1. \quad (7.99)$$

С учётом формулы для  $\varphi_1$  выведем окончательно

$$I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}. \quad (7.100)$$

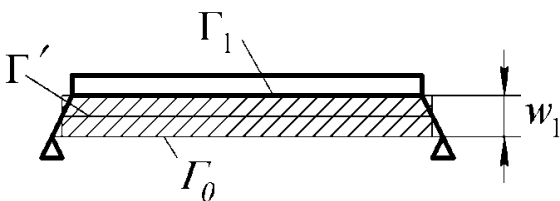


Рисунок 7.31 – К вычислению объёма «бугра напряжений»

Касательное напряжение  $\tau$  действует по касательной к  $\Gamma'$  и вычисляется по формуле (7.57):

$$\tau = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Заменяя  $G\alpha$  на  $M/I_k$  и принимая во внимание соотношение (7.98), получаем

$$\tau = \frac{M}{I_k} \frac{\varphi_1}{\delta}.$$

Произведение  $T = \tau\delta$  оказывается одинаковой величиной во всех точках контура  $\Gamma'$ . Эта величина представляет собой погонную касательную силу, то есть касательную силу, приходящуюся на единицу длины контура  $\Gamma'$  и направленную по касательной к нему. Учитывая соотношение (7.99), приходим к расчётной формуле

$$T = \frac{M}{\Omega}, \quad (7.101)$$

называемой формулой Бредта.

Зная касательную силу, напряжение  $\tau$  можно найти по формуле

$$\tau = \frac{T}{\delta}. \quad (7.102)$$

Наибольшее касательное напряжение возникает там, где толщина стенки *минимальна*.

Если профиль трубы составлен из прямолинейных участков, то во внутренних углах возникает концентрация напряжений. Пусть  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – толщины смежных участков, причём  $\delta_1 \geq \delta_2$ , а  $r_0$  – радиус сопряжения участков. Тогда касательное напряжение в сочленении можно приближённо найти по формуле

$$\tau = c\tau_1,$$

где  $\tau_1 = T/\delta_1$ , а

$$c = \frac{\delta_2}{r_0} \cdot \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{\delta_2}{r_0}\right)}.$$

## 8 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Большинство задач теории упругости не имеет точного решения. Поэтому приходится прибегать к тем или иным приближенным методам. В данном разделе рассматриваются вариационные методы. При вариационной постановке задачи мы имеем дело не с дифференциальными уравнениями, а с интегральными величинами – функционалами, зависящими от искомых функций. Требуемое решение достигается в том случае, когда функционал принимает стационарное значение (обычно это минимум).

### 8.1 Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации

Предположим, что тело нагружается статически прикладываемой в точке  $M$  сосредоточенной силой  $P$  (рисунок 8.1). Пусть  $M'$  – положение точки  $M$  в деформированном состоянии, так что отрезок  $MM'$  характеризует полное перемещение точки приложения силы. Его проекцию на направление действия силы обозначим буквой  $v$  и будем называть *перемещением силы*  $P$ .

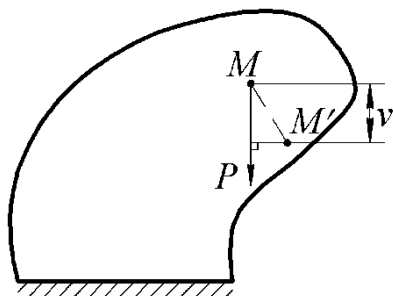


Рисунок 8.1 – Нагружение тела сосредоточенной силой

Тело, деформируясь, оказывает сопротивление внешнему воздействию. Чем больше перемещение  $v$ , тем большая сила  $P$  необходима для удержания тела в статическом равновесии. Связь между  $P$  и  $v$  будем представлять соответственно как зависимость вида  $P = P(v)$ . На рисунке 8.2 показана подобная зависимость для общего случая нелинейно-деформируемого тела.

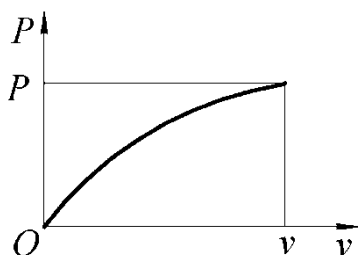


Рисунок 8.2 – Диаграмма  $P$ - $v$  для нелинейно-деформируемого тела

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом линейно-деформируемые системы, для которых эта зависимость изображается прямой линией (рисунок 8.3).

Площадь под кривой  $P(v)$  представляет собой работу, производимую силой  $P$ , то есть *работу, затраченную на деформирование тела*:

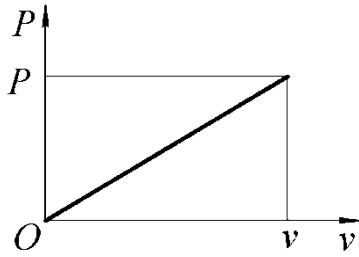


Рисунок 8.3 – Диаграмма  $P$ - $v$  для линейно-деформируемого тела

$$A(v) = \int_0^v P(v)dv. \quad (8.1)$$

В случае линейно-деформируемой системы, очевидно,

$$A = \frac{1}{2} vP. \quad (8.2)$$

Последнее равенство выражает известную теорему Клапейрона, согласно которой работа, производимая при нагружении линейно-деформируемого тела, равна половине произведения окончательного значения перемещения на окончательное значение силы.

Наряду с работой  $A$  введём в рассмотрение так называемый *потенциал внешних сил*. В случае действия сосредоточенной силы он определяется равенством

$$\Pi(v) = -vP \quad (8.3)$$

и представляет собой ту работу, которую совершила бы сила  $P$ , если бы точка её приложения вернулась в исходное положение, которое она занимала до деформации; величина силы считается при этом неизменной и равной своему окончательному значению.

При возрастании перемещения на бесконечно малую величину  $\delta v$  сила также получит бесконечно малое приращение  $\delta P$ . Приращение  $\Delta A$  работы численно равно площади, заштрихованной на рисунке 8.4 наклонными линиями, и определяется выражением

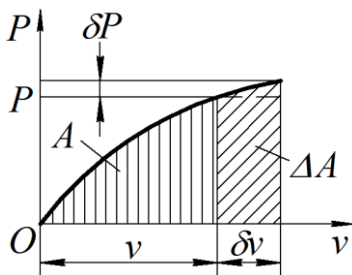


Рисунок 8.4 – Приращение работы

$$\Delta A = \delta v \cdot P + \frac{1}{2} \delta v \cdot \delta P + \dots, \quad (8.4)$$

где многоточием отмечены слагаемые более высокого порядка малости. Слагаемое  $\delta v \cdot P$  в выражении для  $\Delta A$  имеет первый порядок малости и является главной частью приращения, называемой *вариацией работы*. Обозначая её через  $\delta A$ , запишем

$$\delta A = \delta v \cdot P. \quad (8.5)$$

Правая часть равенства (8.5) есть работа силы  $P$  на перемещении  $\delta v$ . Приращение силы  $\delta P$  в равенстве (8.5) отсутствует, и величину  $\delta v$  можно трактовать как *возможное (виртуальное) перемещение* точки  $M$  в направлении силы  $P$ .

Приращение потенциала силы  $P$  при возрастании перемещения от  $v$  до  $v + \delta v$  будет согласно (8.3) равно

$$\Delta\Pi = \Pi(v + \delta v) - \Pi(v) = -(v + \delta v)P + vP = -\delta v \cdot P,$$

то есть  $\Delta\Pi = \delta\Pi$ , где

$$\delta\Pi = -\delta v \cdot P. \quad (8.6)$$

Вариация работы (8.5) и вариация потенциала силы (8.6) относятся к разным по определению величинам, но различаются формально лишь знаком. Равенство

$$\delta\Pi = -\delta A \quad (8.7)$$

можно взять за основу для определения потенциала внешних сил в более общем случае нагружения тела системой распределённых и сосредоточенных сил. Согласно такому определению *под потенциалом  $\Pi$  внешних сил понимается функция (точнее, функционал) перемещений точек тела, вариация которой равна вариации работы, взятой с обратным знаком; сами силы считаются при этом заданными и не зависящими от перемещений.*

Предположим, в частности, что тело нагружено распределёнными силами – объёмными с компонентами  $R_i$  и поверхностными с компонентами  $p_i$ . Для линейно-упругих систем процесс деформирования является обратимым, и работа, совершаемая силами, не зависит от порядка их приложения, а зависит лишь от окончательных значений сил. При вычислении работы можно принять, что все силы возрастают одновременно от нуля до своих конечных значений, причём в процессе нагружения между ними сохраняется неизменное соотношение. На элемент объёма  $d\tau$ , выделенный в окрестности некоторой точки, действуют в направлении координатных осей  $x_i$  силы  $R_i d\tau$ . Нарастая от нуля до своих конечных значений, они производят работу на перемещениях  $u_i$ , которая в случае линейно-деформируемого тела равна

$$\frac{1}{2}(u_1 R_1 + u_2 R_2 + u_3 R_3) d\tau = \frac{1}{2} u_i R_i.$$

Интегрирование по объёму позволяет найти суммарную работу объёмных сил. Подобным же образом можно получить работу, совершаемую поверхностными силами. В общем случае нагружения линейно-упругого тела будем иметь

$$A = \frac{1}{2} \left( \int_{\tau} u_i R_i d\tau + \int_{\omega} u_i p_i d\omega \right), \quad (8.8)$$

где  $\tau$  и  $\omega$  – объём и поверхность тела.

Если внешние силы получают произвольные бесконечно малые приращения, то перемещения точек тела также получат бесконечно малые приращения  $\delta u_i$ . Вариация работы определится выражением

$$\delta A = \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau + \int_{\omega} \delta u_i p_i d\omega. \quad (8.9)$$

Приращения нагрузок в данное выражение не входят. Это позволяет трактовать  $\delta u_i$  как *возможные (или виртуальные) перемещения*, под которыми понимаются *произвольные бесконечно малые перемещения, непрерывные внутри тела и допускаемые условиями закрепления тела*. Любые возможные перемещения можно создать, прикладывая к телу, закреплённому заданным образом, некоторую систему бесконечно малых нагрузок, но нет необходимости связывать их с действительными приращениями внешних сил.

Если тело закреплено, его поверхность может быть представлена как сумма двух составляющих:

$$\omega = \omega_p + \omega_u.$$

Здесь  $\omega_p$  – часть поверхности, свободная от закреплений; на этой части, следовательно, заданы поверхностные силы  $p_i$ . Слагаемое  $\omega_u$  представляет ту часть поверхности, на которой осуществляется закрепление тела или, в более общем случае, на которой заданы перемещения  $u_i$ . Поверхностные силы  $p_i$  на  $\omega_u$  представляют собой реакции на тело со стороны наложенных на него связей. Возможные перемещения должны на  $\omega_u$  равняться нулю, т.к. перемещения здесь заданы и не изменяются в результате приложения к телу каких бы то ни было нагрузок.

Перепишем равенство (8.9) в виде

$$\delta A = \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega + \int_{\omega_u} \delta u_i p_i d\omega$$

и опустим последнее слагаемое, поскольку

$$\delta u_i = 0 \text{ на } \omega_u.$$

В итоге получим

$$\delta A = \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega. \quad (8.10)$$

На основании равенства  $\delta \Pi = -\delta A$  будем иметь для вариации потенциала внешних сил равенство

$$\delta\Pi = -\left( \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega \right), \quad (8.11)$$

откуда по определению вытекает следующее выражение для  $\Pi$ :

$$\Pi = -\left( \int_{\tau} u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} u_i p_i d\omega \right). \quad (8.12)$$

Работа, затраченная на деформирование упругого тела, переходит в потенциальную энергию деформации тела. Последняя выражается формулой

$$U = \int_{\tau} W d\tau,$$

где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации, определяемая соотношением

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}.$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформации и напряжений.

Для вариации потенциальной энергии деформации имеем

$$\delta U = \int_{\tau} \delta W d\tau,$$

где  $\delta W$  – вариация удельной потенциальной энергии деформации. Вариация функции  $W(\varepsilon_{ij})$  равна

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Но согласно формулам Грина (3.8)

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij},$$

так что

$$\delta W = \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}. \quad (8.13)$$

Компоненты  $\delta \varepsilon_{ij}$  связаны с возможными перемещениями формулами

Коши:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}). \quad (8.14)$$

## 8.2 Принцип возможных перемещений для упругого тела

Пусть тело нагружено объёмными  $R_i$  и поверхностными  $p_i$  силами. Обозначим через  $u_i$  перемещения точек тела, представляющие собой непрерывные функции координат и принимающие заданные значения на  $\omega_u$ . Любые такие перемещения (не обязательно вызванные заданными силами) будем называть *кинематически допустимыми*. Перемещениям  $u_i$  соответствуют компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ , связанные с ними формулами Коши, и напряжения  $\sigma_{ij}$ , выражающиеся через  $\varepsilon_{ij}$  по закону Гука. Действительные перемещения отличаются от всех других, также кинематически допустимых, тем, что они удовлетворяют соотношениям статики – дифференциальным уравнениям равновесия и статическим условиям на  $\omega_p$ . Выясним, в чём с энергетической точки зрения состоит отличие действительных перемещений от всех других кинематически допустимых.

Придадим точкам тела дополнительные возможные перемещения  $\delta u_i$ . Им соответствуют возможные компоненты тензора деформации  $\delta\varepsilon_{ij}$ . Внешние силы на перемещениях  $\delta u_i$  произведут работу

$$\delta A = \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega, \quad (8.15)$$

а вариация потенциальной энергии деформации будет равна

$$\delta U = \int_{\tau} \delta\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\tau.$$

Преобразуем выражение для  $\delta U$  следующим образом. Исходя из соотношения

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

где  $\omega_{ij}$  – компоненты тензора малых поворотов, запишем

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta u_{i,j} - \delta\omega_{ij}.$$

Тогда

$$\delta U = \int_{\tau} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\tau - \int_{\tau} \delta\omega_{ij} \sigma_{ij} d\tau.$$

Так как  $\sigma_{ij}$  – симметричный, а  $\omega_{ij}$  – кососимметричный тензоры, скалярное произведение

$$\delta\omega_{ij} \sigma_{ij} = 0.$$



Воспользуемся также очевидным равенством, вытекающим из формулы дифференцирования произведения функций,

$$\delta u_{i,j} \sigma_{ij} = (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} - \delta u_i \sigma_{ij,j}.$$

Тогда

$$\delta U = \int_{\tau} (\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} d\tau - \int_{\tau} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\tau.$$

Если заменить первый интеграл поверхностным по формуле Остроградского-Гаусса, то получим

$$\delta U = \int_{\omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\omega - \int_{\tau} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\tau,$$

где  $n_j$  – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $\omega$ .

Учитывая, что  $\delta u_i = 0$  на  $\omega_u$ , можно переписать последнее равенство в виде

$$\delta U = \int_{\omega_p} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\omega - \int_{\tau} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\tau, \quad (8.16)$$

где поверхностный интеграл берётся лишь по части  $\omega_p$  поверхности  $\omega$ .

Пока мы не требовали, чтобы напряжения удовлетворяли соотношениям статики, так как до сих пор под функциями  $u_i$  понимались произвольные кинематически допустимые перемещения. Если же  $u_i$  – истинные перемещения, то есть если удовлетворяются дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия, будут справедливы равенства

$$\sigma_{ij,j} = -R_i \quad \text{в } \tau; \quad (8.17)$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i \quad \text{на } \omega_p. \quad (8.18)$$

В этом случае имеем согласно (8.16)

$$\delta U = \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega + \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau.$$

В правой части полученного соотношения оказалась вариация работы внешних сил  $\delta A$ , и мы приходим к равенству

$$\delta U = \delta A. \quad (8.19)$$

Это уравнение выражает *принцип возможных перемещений (или принцип виртуальных работ)* применительно к упругому телу, согласно которому для тела, находящегося в равновесии, работа внешних сил на любых возможных перемещениях равна вариации потенциальной энергии деформации.

Равенство (8.19) получено как *необходимое условие равновесия* тела. Оно же является и *достаточным условием равновесия*. В самом деле, если соотно-

шение (8.19) выполняется для *любых* возможных перемещений, то в силу равенств (8.15) и (8.16) будут выполняться дифференциальные уравнения равновесия (8.17) и статические граничные условия (8.18).

### 8.3 Вариационный принцип Лагранжа

Полагая  $\delta\Pi = -\delta A$  в соответствии с определением (8.7), приведём равенство (8.19) к виду

$$\delta(U + \Pi) = 0.$$

Величина

$$V = U + \Pi \quad (8.20)$$

называется *полной потенциальной энергией системы*, а равенство

$$\delta V = 0 \quad (8.21)$$

называется *вариационным уравнением Лагранжа*.

Как следует из (8.21), для *тела, находящегося в равновесии, вариация полной потенциальной энергии системы на любых возможных перемещениях равна нулю*. Это означает, что в *равновесном состоянии величина  $V$  имеет стационарное значение*.

Заметим, что при выводе уравнений (8.19) и (8.21) закон Гука не использовался. Данные уравнения применимы также и для нелинейно-упругого тела. Если же материал тела подчиняется закону Гука, то в этом случае *стационарное значение  $V$  есть минимум*.

Чтобы доказать это, найдём приращение

$$\Delta V = \Delta U + \Delta \Pi$$

полной потенциальной энергии системы при малых отклонениях тела от положения равновесия, которые характеризуются перемещениями  $\delta u_i$ . Функционал  $V$  имеет минимальное значение, если приращение  $\Delta V$  будет положительным при любых отклонениях. Но

$$\Delta V = \delta V + \delta^2 V + \dots,$$

и так как в положении равновесия  $\delta V = 0$ , знак  $\Delta V$  определяется знаком второй вариации

$$\delta^2 V = \delta^2 U + \delta^2 \Pi.$$

Начнём со второго слагаемого в правой части последнего выражения. Так как

$$\Pi = -\int_{\tau} u_i R_i d\tau - \int_{\omega_p} u_i p_i d\omega,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta\Pi &= \Pi(u_i + \delta u_i) - \Pi(u_i) = \\
 &= -\int_{\tau} (u_i + \delta u_i) R_i d\tau - \int_{\omega_p} (u_i + \delta u_i) p_i d\omega + \\
 &\quad + \int_{\tau} u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} u_i p_i d\omega = \\
 &= -\int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau - \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega = \delta\Pi,
 \end{aligned}$$

то есть

$$\delta^2\Pi = 0.$$

Далее,  $\Delta U = \int_{\tau} \Delta W d\tau$ , где  $\Delta W$  – приращение удельной потенциальной энергии деформации. Рассматривая  $W$  как функцию компонент тензора деформации, запишем

$$\Delta W = W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij}),$$

где  $\delta\varepsilon_{ij}$  – приращения компонент  $\varepsilon_{ij}$ , связанные с  $\delta u_i$  формулами Коши (8.14).

Используя разложение в ряд Тейлора, находим

$$W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) = W(\varepsilon_{ij}) + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} + \dots,$$

так что

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} + \dots,$$

где многоточием отмечены малые более высоких порядков. Но в случае справедливости закона Гука величина  $W$  представляет собой квадратичную функцию  $\varepsilon_{ij}$ . Поэтому производные от  $W$  по  $\varepsilon_{ij}$  выше второго порядка будут равны нулю. Следовательно, выражение для  $\Delta W$  будет содержать лишь первую и вторую вариации, то есть

$$\Delta W = \delta W + \delta^2 W,$$

где, с учётом формул Грина (3.8),

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij};$$

$$\delta^2 W = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl}.$$

Если выполняется закон Гука, то компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформации линейной зависимостью

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \kappa_{ijkl},$$

и поскольку  $\kappa_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} = \delta \sigma_{ij}$ , для  $\delta^2 W$  получаем

$$\delta^2 W = \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Сопоставив данное равенство с выражением

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

можем написать

$$\delta^2 W = W(\delta \varepsilon_{ij}).$$

Итак мы имеем,

$$\delta^2 V = \delta^2 U = \int_{\tau} \delta^2 W d\tau.$$

Как говорилось ранее,  $W(\varepsilon_{ij})$  при выполнении закона Гука есть величина существенно положительная. Следовательно,

$$\delta^2 W > 0$$

для любых возможных перемещений.

Таким образом, мы приходим к заключению, что

$$\Delta V > 0,$$

что и доказывает утверждение.

Подводя итог сказанному, можно сформулировать следующий *вариационный принцип Лагранжа для линейно-упругого тела. Среди всех кинематически допустимых перемещений в действительности имеют место такие, для которых полная потенциальная энергия системы минимальна.*

Соотношения статики являются следствием условия  $V = \min$ . Если найдены такие функции  $u_i(x_k)$ , которые минимизируют функционал  $V$ , то уравнения статики (8.17) и (8.19) будут автоматически удовлетворены. Если же, с другой стороны, найдены перемещения, удовлетворяющие уравнениям статики, то полная потенциальная энергия системы для них окажется минимальной.

## 8.4 Метод Ритца

Как мы видели, нахождение перемещений точек тела можно свести к задаче минимизации полной потенциальной энергии системы. Если воспользоваться необходимыми условиями минимума функционала в форме известных уравнений Эйлера-Остроградского вариационной задачи, то мы прийдём к дифференциальным уравнениям равновесия, то есть вернёмся к обычной постановке задачи. Метод Ритца даёт возможность приближённо выполнить *прямую минимизацию функционала*, не прибегая к использованию дифференциальных уравнений. Согласно методу Ритца перемещения отыскиваются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) &= u_{10}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^N a_k f_{1k}(x_1, x_2, x_3); \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3) &= u_{20}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^N b_k f_{2k}(x_1, x_2, x_3); \\ \tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3) &= u_{30}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^N c_k f_{3k}(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}\quad (8.22)$$

Здесь  $a_k, b_k, c_k$  – некоторые постоянные, подлежащие отысканию; остальные величины представляют собой *выбранные заранее подходящие функции координат*.

Выбор функций производится на основании следующих соображений. Перемещения должны быть кинематически допустимыми при любых параметрах  $a_k, b_k, c_k$ . Это будет обеспечено, если на части  $\omega_u$  поверхности тела функции  $u_{10}, u_{20}, u_{30}$  будут принимать заданные здесь значения перемещений  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$ , а функции  $f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}$ , называемые *базисными функциями метода Ритца*, обращаются в ноль. При простом закреплении тела (когда заданные на  $\omega_u$  перемещения равны нулю) слагаемые  $u_{10}, u_{20}, u_{30}$  в выражениях (8.22) должны быть опущены. Постоянные определяются так, чтобы при выбранных базисных функциях полная потенциальная энергия системы была минимальна.

Так как

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

величину  $W(\varepsilon_{ij})$  можно рассматривать как функцию перемещений.

Приближённым перемещениям  $\tilde{u}_i$  соответствуют приближённые выражения для компонент тензора деформации

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}).$$

Если подставить  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  в формулу для  $W$ , удельная потенциальная энергия деформации будет представлена как функция, зависящая от координат и неизвестных коэффициентов:

$$W = W(x_1, x_2, x_3, a_k, b_k, c_k).$$

Проинтегрировав  $W$  по объёму тела, получим выражение для потенциальной энергии деформации как функции неизвестных параметров:

$$U = \int_{\tau} W d\tau = U(a_k, b_k, c_k). \quad (8.23)$$

Аналогично вычисляем приближённое выражение для потенциала внешних сил:

$$\Pi = - \int_{\tau} \tilde{u}_i R_i d\tau - \int_{\omega_p} \tilde{u}_i p_i d\omega = \Pi(a_k, b_k, c_k). \quad (8.24)$$

Таким образом, мы приходим к представлению полной потенциальной энергии системы в виде функции неизвестных параметров:

$$V = U + \Pi = V(a_k, b_k, c_k).$$

Необходимые условия минимума функции нескольких переменных заключаются в требовании равенства нулю частных производных от функции по каждой из них:

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial b_k} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial c_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, N).$$

Отсюда вытекает система  $3N$  уравнений относительно искомым постоянных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} &= 0; \\ \frac{\partial U}{\partial b_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_k} &= 0; \\ \frac{\partial U}{\partial c_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_k} &= 0. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Как видно из соотношений для  $W$  и  $U$ , потенциальная энергия деформации представляет собой квадратичную функцию постоянных; зависимость же  $\Pi$  от  $a_k, b_k, c_k$  согласно (8.24) является линейной. Таким образом, система уравнений (8.25) будет линейной. Можно показать, что она всегда симметрична.

Решив систему уравнений (8.25), получим согласно (8.22) приближённые выражения для перемещений. По формулам Коши можно далее найти компоненты  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ , а затем по закону Гука – и напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij}$ .

## 8.5 Пример расчёта балки на изгиб методом Ритца

Для иллюстрации метода Ритца выполним с его помощью расчёт балки на изгиб. Задача имеет простое аналитическое решение, что позволяет оценить качество приближённого расчёта.

Выпишем вначале необходимые соотношения, вытекающие из технической теории изгиба бруса. Пусть балка длиной  $l$  испытывает изгиб в плоскости  $xu$  под действием поперечной нагрузки  $q_y$  (рисунок 8.5). Предполагается, что ось  $y$  совпадает с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения. Прогиб балки на расстоянии  $x$  от начала координат обозначим через  $u_y(x)$ .

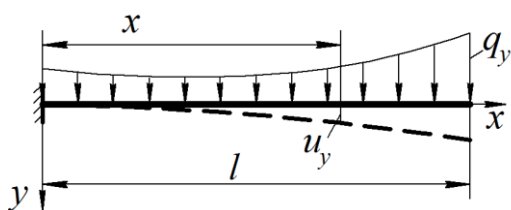


Рисунок 8.5– Балка под действием поперечной нагрузки

Изгибающий момент в сечении балки связан с  $u_y$  известным соотношением

$$M_z = EI_z u_y'', \quad (8.26)$$

где  $E$  – модуль упругости материала,  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси  $z$ ; штрих сверху означает дифференцирование по координате  $x$ .

Потенциальная энергия изгиба балки, как известно, определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{EI_z} dx.$$

С помощью соотношения (8.26) представим  $U$  как функционал, зависящий от искомого перемещения  $u_y$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z u_y''^2 dx.$$

Потенциал внешних сил применительно к рассматриваемому случаю запишется так:

$$\Pi = - \int_0^l q_y u_y dx.$$

В соответствии с методом Ритца перемещение  $u_y$  будем искать в виде

$$\tilde{u}_y(x) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x), \quad (8.27)$$

где базисные функции  $f_k(x)$  должны удовлетворять условиям закрепления балки, а коэффициенты  $a_k$  отыскиваются из условия минимума полной потенциальной энергии. Выведем уравнения для нахождения  $a_k$ .

Подставив  $\tilde{u}_y$  в форме (8.27) в выражение для полной потенциальной энергии системы, будем иметь

$$V = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z \left( \sum_{k=1}^N a_k f_k'' \right)^2 dx - \int_0^l q_y \sum_{k=1}^N a_k f_k dx.$$

Необходимые условия минимума

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = 0$$

приводят к равенствам

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z \cdot 2 \sum_{k=1}^N a_k f_k'' f_j'' dx - \int_0^l q_y f_j dx = 0.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, представим результат следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N B_{kj} a_k - c_j = 0,$$

где

$$B_{kj} = \int_0^l EI_z f_k'' f_j'' dx; \quad c_j = \int_0^l q_y f_j dx. \quad (8.28)$$

Записанные для  $j = 1, \dots, N$ , данные равенства образуют симметричную систему уравнений относительно  $a_k$  вида

$$[B][a] = [c]. \quad (8.29)$$

Здесь

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}; \quad [a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}.$$



Применим эти результаты к расчёту консольной балки постоянной жёсткости, испытывающей действие равномерной нагрузки  $q_y = q$  (рисунок 8.6).

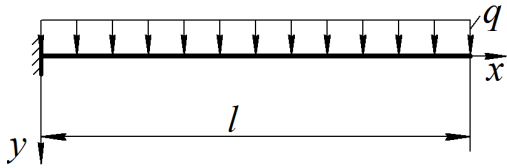
На левом конце балки имеем кинематические граничные условия

$$u_y|_{x=0} = 0; \quad u'_y|_{x=0} = 0,$$

а на правом – статические условия

$$M_z|_{x=l} = 0; \quad Q_y|_{x=l} = 0,$$

где  $Q_y$  – перерезывающая сила.



**Рисунок 8.6– Консольная балка под действием равномерной нагрузки**

Выберем далее базисные функции  $f_k(x)$  в выражении (8.27). Каждая из функций должна удовлетворять кинематическим условиям, то есть условиям

$$f_k(0) = 0; \quad f'_k(0) = 0.$$

Простейший выбор заключается в

использовании степенных функций

$$f_k(x) = x^{k+1} \quad (k = 1, \dots, N),$$

удовлетворяющих этим требованиям. Заметим, что статические условия при  $x=l$  будут удовлетворяться автоматически (строго или приближённо) как следствие минимизации полной потенциальной энергии.

Поскольку в данном случае  $EI_z = \text{const}$  и  $q_y = q = \text{const}$ , формулы (8.28) принимают вид

$$B_{kj} = EI_z \int_0^l f_k'' f_j'' dx; \quad c_j = q \int_0^l f_j dx. \quad (8.30)$$

Выполним вначале одночленное приближение, полагая в (8.27)  $N = 1$ :

$$\tilde{u}_y(x) = a_1 f_1(x); \quad f_1(x) = x^2.$$

Так как  $f_1'' = 2$ , согласно (8.30) получаем

$$B_{11} = EI_z \int_0^l f_1''^2 dx = EI_z \int_0^l 2^2 dx = 4lEI_z;$$

$$c_1 = q \int_0^l x^2 dx = \frac{ql^3}{3}.$$

Система уравнений (8.29) сводится здесь к единственному равенству

$$B_{11} a_1 = c_1,$$

из которого вытекает следующее значение  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{c_1}{B_{11}} = \frac{ql^2}{12EI_z}.$$

Таким образом, мы приходим к приближённому решению

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{ql^2}{12EI_z} x^2.$$

На свободном конце балки (при  $x=l$ ) прогиб оказывается в этом решении равным

$$\tilde{u}_y(l) = \frac{ql^4}{12EI_z}.$$

Данное значение существенно отличается от известной точной величины

$$u_y(l) = \frac{ql^4}{8EI_z}.$$

Для улучшения результата выполним двучленное приближение, полагая  $N=2$ :

$$\tilde{u}_y(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x); \quad f_1(x) = x^2; \quad f_2(x) = x^3.$$

Имеем в этом случае  $f_1'' = 2$ ;  $f_2'' = 6x$ , так что

$$B_{11} = EI_z \int_0^l f_1''^2 dx = EI_z \int_0^l 4 dx = 4lEI_z;$$

$$B_{12} = B_{21} = EI_z \int_0^l f_1'' f_2'' dx = EI_z \int_0^l 12x dx = 6l^2 EI_z;$$

$$B_{22} = EI_z \int_0^l f_2''^2 dx = EI_z \int_0^l 36x^2 dx = 12l^3 EI_z;$$

$$c_1 = q \int_0^l f_1 dx = q \int_0^l x^2 dx = \frac{ql^3}{3};$$

$$c_2 = q \int_0^l f_2 dx = q \int_0^l x^3 dx = \frac{ql^4}{4}.$$

Относительно  $a_1$  и  $a_2$  получается система уравнений

$$4lEI_z a_1 + 6l^2 EI_z a_2 = \frac{ql^3}{3};$$

$$6l^2 EI_z a_1 + 12l^3 EI_z a_2 = \frac{ql^4}{4},$$

решение которой даёт

$$a_1 = \frac{5ql^2}{24EI_z}; \quad a_2 = -\frac{ql}{12EI_z}.$$

Приближённое выражение для  $u_y$  будет теперь иметь вид

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{ql^4}{24EI_z} \left( 5\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \right).$$

При  $x=l$  получаем отсюда  $\tilde{u}_y(l) = ql^4/(8EI_z)$ , что совпадает с точным значением. Однако изгибающие моменты в найденном решении

$$\tilde{M}_z = EI_z \tilde{u}_y'' = \frac{ql^2}{12} \left( 5 - 6\frac{x}{l} \right)$$

заметно отличаются от точных результатов. Например, при  $x=0$  имеем  $\tilde{M}_z = 5ql^2/12$ , тогда как в действительности изгибающий момент в заделке равен  $ql^2/2$ .

Если выражение для  $\tilde{u}_y(x)$  взять в виде

$$\tilde{u}_y(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x); \quad f_1(x) = x^2; \quad f_2(x) = x^3; \quad f_3(x) = x^4,$$

то вычисления приводят к следующим значениям постоянных:

$$a_1 = \frac{ql^2}{4EI_z}; \quad a_2 = -\frac{ql}{6EI_z}; \quad a_3 = \frac{q}{24EI_z}.$$

Приближённое решение

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{ql^4}{24EI_z} \left( 6\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

совпадает в этом случае с точным уравнением изогнутой оси балки. *Если в число базисных входят функции, из которых может быть составлено точное решение, то метод Рунца всегда приводит именно к точному решению задачи.*

Попытка добавления новых функций типа  $x^5, x^6, \dots$  не изменяет решения: множители при этих функциях оказываются нулевыми. Отметим также, что *погрешность определения напряжений в приближённом решении по методу Рунца в среднем выше, чем для перемещений.* Это связано с тем, что вычисление напряжений требует дифференцирования базисных функций. Даже если сами функции удовлетворительно представляют искомые перемещения, производные от них могут значительно отличаться от точных зависимостей. В рассмотренном примере это видно из сравнения изгибающих моментов  $\tilde{M}$  в двучленном приближении с их точным распределением по длине балки.

## 8.6 Вариационное уравнение Лагранжа для кручения призматических стержней

Рассмотрим призматический стержень, длина  $L$  которого значительно превосходит размеры поперечного сечения. Отнесём его к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой поместим в произвольной точке нижнего основания, а ось  $x_3$ , называемую в дальнейшем осью стержня, направим параллельно образующей (рисунок 8.7). Предположим, что в точке  $O$  на стержень наложены связи, обеспечивающие её неподвижность и отсутствие в начале координат поворотов оси стержня относительно осей  $x_1, x_2$ :

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при } x_1 = x_2 = x_3 = 0. \quad (8.31)$$

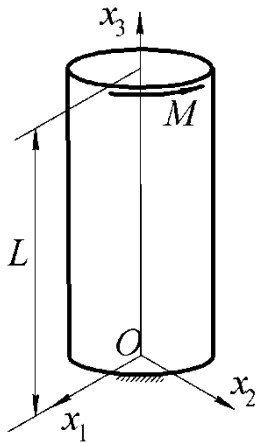


Рисунок 8.7– Стержень при кручении

Кроме того, нижнее сечение предполагается закреплённым от поворота вокруг оси  $x_3$ , что в совокупности с условиями (8.31) обеспечивает неподвижное закрепление стержня в пространстве как жёсткого тела. При этом считаем, что условия закрепления стержня не препятствуют перемещениям точек нижнего основания в направлении оси  $x_3$  (за исключением точки  $O$ ). Стержень нагружается моментом  $M$ , приложенным в плоскости верхнего основания.

Выведем выражение для функционала Лагранжа  $V = U + \Pi$  применительно к данной задаче. Перемещения точек стержня при кручении определяются соотношениями (7.18) и (7.19):

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3; \quad u_3 = \alpha f(x_1, x_2), \quad (8.32)$$

где  $\alpha$  – относительный угол закручивания;  $f(x_1, x_2)$  – функция депланации. Следовательно, решение задачи о кручении в перемещениях сводится к отысканию  $\alpha$  и  $f(x_1, x_2)$ . Через них компоненты тензоров деформации и напряжений выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{31} &= \frac{\alpha}{2}(f_{,1} - x_2); & \varepsilon_{32} &= \frac{\alpha}{2}(f_{,2} + x_1); \\ \sigma_{31} &= G\alpha(f_{,1} - x_2); & \sigma_{32} &= G\alpha(f_{,2} + x_1); \end{aligned} \quad (8.33)$$

остальные компоненты нулевые.

Верхнее сечение поворачивается вокруг оси  $x_3$  на угол  $\alpha L$ , так что потенциал внешних сил равен

$$\Pi = -\alpha LM. \quad (8.34)$$

Потенциальная энергия деформации тела вычисляется по формуле

$$U = \int_{\tau} W d\tau.$$

В рассматриваемом случае

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{13} \sigma_{13} + \varepsilon_{23} \sigma_{23} + \varepsilon_{31} \sigma_{31} + \varepsilon_{32} \sigma_{32}) = \varepsilon_{31} \sigma_{31} + \varepsilon_{32} \sigma_{32}.$$

Подставив сюда формулы (8.33), получим

$$W = \frac{G\alpha^2}{2} \left[ (f_{,1} - x_2)^2 + (f_{,2} + x_1)^2 \right] = W(x_1, x_2).$$

Интегрирование по объёму стержня даёт

$$U = \int_{\tau} W d\tau = \int_0^L dx_3 \int_A W dA = \frac{G\alpha^2 L}{2} J_1, \quad (8.35)$$

где через  $J_1$  обозначен функционал, зависящий от функции депланации:

$$J_1 = \int_A \left[ (f_{,1} - x_2)^2 + (f_{,2} + x_1)^2 \right] dA. \quad (8.36)$$

Здесь интегрирование выполняется по площади  $A$  сечения стержня. Складывая (8.34) и (8.35), получаем искомое выражение для  $V$ :

$$V = \frac{G\alpha^2 L}{2} J_1 - \alpha LM. \quad (8.37)$$

В соответствии с вариационным уравнением Лагранжа должно быть

$$\delta V = 0$$

при любых вариациях перемещений. Исходя из выражения (8.37), где варьируемыми величинами являются  $\alpha$  и  $J_1$ , имеем

$$\delta V = G\alpha L J_1 \delta\alpha + \frac{G\alpha^2 L}{2} \delta J_1 - \delta\alpha LM = 0.$$

После сокращения на  $L$  получаем равенство

$$(G\alpha J_1 - M) \delta\alpha + \frac{G\alpha^2}{2} \delta J_1 = 0.$$

Вариации  $\delta\alpha$  и  $\delta J_1$  независимы, причём,  $\delta\alpha \neq 0$ . Отсюда вытекают два соотношения

$$\delta J_1 = 0; \quad (8.38)$$

$$G\alpha J_1 - M = 0. \quad (8.39)$$

Первое из них называется *вариационным уравнением Лагранжа для кручения призматических стержней*. Оно устанавливает, что действительная функция деформации доставляет стационарное значение функционалу  $J_1$ . Нетрудно показать, что стационарное значение есть минимум. В самом деле, предположим, что функция деформации  $f$  получила произвольное бесконечно малое приращение  $\delta f$ , и найдём соответствующее приращение  $\Delta J_1$  функционала  $J_1$ . Основываясь на выражении (8.36), запишем

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= \int_A \left[ (f_{,1} + \delta f_{,1} - x_2)^2 + (f_{,2} + \delta f_{,2} + x_1)^2 \right] dA - \\ &\quad - \int_A \left[ (f_{,1} - x_2)^2 + (f_{,2} + x_1)^2 \right] dA = \\ &= \int_A \left[ (f_{,1} - x_2)^2 + 2(f_{,1} - x_2)\delta f_{,1} + \delta f_{,1}^2 + \right. \\ &\quad \left. + (f_{,2} + x_1)^2 + 2(f_{,2} + x_1)\delta f_{,2} + \delta f_{,2}^2 \right] dA - \\ &\quad - \int_A \left[ (f_{,1} - x_2)^2 + (f_{,2} + x_1)^2 \right] dA = \\ &= 2 \int_A \left[ (f_{,1} - x_2)\delta f_{,1} + (f_{,2} + x_1)\delta f_{,2} \right] dA + \\ &\quad + \int_A (\delta f_{,1}^2 + \delta f_{,2}^2) dA = \delta J_1 + \delta^2 J_1. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в полученном результате есть первая вариация функционала  $J_1$ , и на основании равенства (8.38) оно равно нулю. Второе слагаемое (вторая вариация функционала) является, как видим, величиной существенно положительной. Следовательно, мы приходим к заключению, что

$$\Delta J_1 > 0,$$

то есть в действительном состоянии функционал  $J_1$  имеет минимальное значение.

Равенство (8.39) позволяет выразить  $\alpha$  через момент  $M$  по формуле

$$\alpha = \frac{M}{GJ_{1\min}}.$$

Стандартное выражение для этой связи имеет вид

$$\alpha = \frac{M}{GI_k},$$

где  $I_k$  – константа Сен-Венана. Сопоставляя две записи, приходим к заключению, что геометрическая характеристика жёсткости стержня на кручение равна минимальному значению функционала  $J_1$ :

$$I_k = J_{1\min}.$$

Однако практическое вычисление  $I_k$  удобнее выполнить иначе. Если осуществлена минимизация функционала  $J_1$  (то есть найдена функция  $f$ , доставляющая функционалу минимум), то как следствие будут удовлетворяться все соотношения статики, в том числе интегральное условие равновесия

$$M = \int_A (-\sigma_{31}x_2 + \sigma_{32}x_1) dA.$$

Если подставить сюда соотношения (8.33), то придём к равенству вида  $M = \alpha G I_k$ , где константа Сен-Венана определяется выражением (7.29):

$$I_k = \int_A (x_1 f_{,2} - x_2 f_{,1}) dA + I_{x_1} + I_{x_2}.$$

Заметим, что вместо формул (8.33) удобнее пользоваться соотношениями (7.31)

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} (f_{,1} - x_2); \quad \sigma_{32} = \frac{M}{I_k} (f_{,2} + x_1).$$

## 8.7 Приложение метода Ритца к расчёту стержня на кручение в перемещениях

Следуя методу Ритца, зададимся функцией деформации в виде суммы

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x_1, x_2). \quad (8.40)$$

Здесь  $f_k(x_1, x_2)$  – выбранные для расчёта базисные функции;  $a_k$  – коэффициенты, определяемые из условия минимума функционала  $J_1$ .

Для вывода уравнений относительно  $a_k$  подставим (8.40) в выражение (8.36):

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_A \left[ (\tilde{f}_{,1} - x_2)^2 + (\tilde{f}_{,2} + x_1)^2 \right] dA = \\ &= \int_A \left[ \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1} - x_2 \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2} + x_1 \right)^2 \right] dA. \end{aligned}$$

Необходимым условием минимума  $J_1$  является равенство нулю производных:

$$\frac{\partial J_1}{\partial a_j} = 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, N.$$

Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{\partial J_1}{\partial a_j} = \int_A \left[ 2 \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1} - x_2 \right) f_{j,1} + 2 \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2} + x_1 \right) f_{j,2} \right] dA = 0.$$

Данное равенство можно представить как

$$\sum_{k=1}^N a_k B_{kj} - c_j = 0, \quad (8.41)$$

где

$$B_{kj} = \int_A (f_{k,1} f_{j,1} + f_{k,2} f_{j,2}) dA; \quad (8.42)$$

$$c_j = \int_A (x_2 f_{j,1} - x_1 f_{j,2}) dA. \quad (8.43)$$

Записанные для  $j = 1, \dots, N$ , равенства (8.41) дают систему уравнений относительно  $a_k$  вида

$$[B][a] = [c].$$

Здесь

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix}; \quad [a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}.$$

Найдя  $a_k$ , по формуле (8.40) получаем приближённое решение. Геометрическую характеристику жёсткости на кручение вычисляем затем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_k &= \int_A (x_1 \tilde{f}_{,2} - x_2 \tilde{f}_{,1}) dA + I_{x_1} + I_{x_2} = \\ &= \int_A \left( x_1 \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2} - x_2 \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1} \right) dA + I_{x_1} + I_{x_2} = \\ &= \sum_{k=1}^N a_k \int_A (x_1 f_{k,2} - x_2 f_{k,1}) dA + I_{x_1} + I_{x_2}. \end{aligned}$$



Учитывая соотношение (8.43), будем иметь отсюда

$$\tilde{I}_k = -\sum_{k=1}^N a_k c_k + I_{x_1} + I_{x_2}. \quad (8.44)$$

Напряжения могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{31} &= \frac{M}{I_k} (\tilde{f}_{,1} - x_2) = \frac{M}{I_k} \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1} - x_2 \right); \\ \tilde{\sigma}_{32} &= \frac{M}{I_k} (\tilde{f}_{,2} + x_1) = \frac{M}{I_k} \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2} + x_1 \right). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Остановимся на выборе базисных функций  $f_k(x_1, x_2)$ . Они должны быть согласованы с наложенными на тело связями. На перемещение  $u_3$  связь в соответствии с (8.31) наложена лишь в точке  $O$ , так что функция депланации  $\tilde{f}(x_1, x_2)$  и, следовательно, каждая из базисных функций  $f_k(x_1, x_2)$  должны обращаться в ноль при  $x_1 = x_2 = 0$ . В остальном же выбор этих функций произволен. Для практических вычислений можно использовать в качестве  $f_k$  полиномы относительно  $x_1, x_2$ :

$$f_k(x_1, x_2) = \{x_1; x_2; x_1^2; x_1 x_2; x_2^2; x_1^3; x_1^2 x_2; x_1 x_2^2; x_2^3; \dots\}. \quad (8.46)$$

Если сечение обладает симметрией, то это следует учесть при выборе  $f_k(x_1, x_2)$ . Можно показать, что функция депланации всегда обратносимметрична по отношению к любой оси симметрии. Если, скажем, ось  $x_1$  является осью симметрии, то  $f(x_1, x_2)$  будет нечётной функцией координаты  $x_2$ , и в наборе (8.46) следует опустить функции, содержащие  $x_2$  в чётных (или нулевой) степенях. Таким образом, в этом случае в качестве базисных должны быть взяты функции

$$f_k(x_1, x_2) = \{x_2; x_1 x_2; x_1^2 x_2; x_2^3; \dots\}. \quad (8.47)$$

Аналогично, если сечение имеет две оси симметрии и с ними совмещены координатные оси, то среди полиномиальных функций (8.46) следует оставить лишь те, которые содержат каждую из координат в нечётной степени:

$$f_k(x_1, x_2) = \{x_1 x_2; x_1^3 x_2; x_1 x_2^3; \dots\}. \quad (8.48)$$

Заметим, что если не принимать во внимание имеющуюся симметрию и использовать полный набор полиномиальных функций (8.46), то коэффициенты  $a_k$  при «лишних» базисных функциях всё равно окажутся нулевыми.

Число  $N$  базисных функций, используемых в (8.40), зависит от желаемой точности расчёта. На практике можно выполнять решения с постепенным увеличением  $N$ , наблюдая за соответствующим изменением какой-либо характерной величины. В качестве таковой естественно взять константу Сен-Венана  $I_k$ . При решении задачи в перемещениях методом Ритца мы по существу переходим от системы с бесконечным к системе с конечным числом степеней свободы, роль которых выполняют коэффициенты  $a_k$ . Это равносильно наложению на систему некоторых связей, что делает её более жёсткой. Поэтому получаемая здесь величина геометрической характеристики жёсткости на кручение *всегда оказывается завышенной по сравнению с точным значением*. По мере увеличения числа базисных функций константа Сен-Венана должна уменьшаться, стремясь в пределе к точному значению. Однако *существенное повышение точности с увеличением  $N$  происходит лишь в том случае, когда возрастает наибольшая степень полных полиномов, удерживаемых в базисных функциях*. Если, скажем, в качестве начального приближения выполнен расчёт с двумя базисными функциями  $f_1 = x_1$  и  $f_2 = x_2$ , то для получения более точного результата следует добавить к ним все полиномиальные функции второй степени:  $x_1^2$ ;  $x_1x_2$ ;  $x_2^2$ . Добавление лишь одной из них (или двух любых) к улучшению решения не приведёт. Следующим шагом в уточнении результата должно стать добавление ещё четырёх функций, составляющих полный полином третьей степени, и т.д.

## 8.8 Примеры расчёта стержней на кручение в перемещениях методом Ритца

### 8.8.1 Стержень квадратного сечения

Квадратное сечение (рисунок 8.8) обладает четырьмя осями симметрии. Уравнения осей симметрии можно представить следующими равенствами:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_1 - x_2 = 0; \quad x_1 + x_2 = 0.$$

На осях симметрии функция деформации обращается в нуль. Будем искать её по методу Ритца, ограничившись при этом простейшим выражением

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = a_1 f_1(x_1, x_2),$$

где базисная функция  $f_1(x_1, x_2)$  строится как произведение левых частей записанных выше равенств:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2).$$

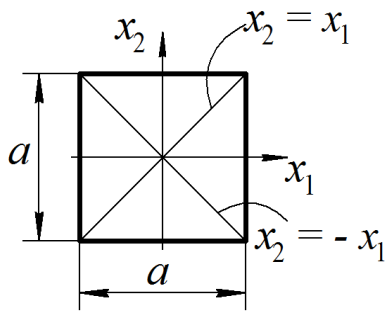


Рисунок 8.8 – Квадратное сечение

Представив  $f_1$  в виде

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3,$$

найдем частные производные:

$$f_{1,1} = 3x_1^2 x_2 - x_2^3; \quad f_{1,2} = x_1^3 - 3x_1 x_2^2.$$

По формуле (8.42) имеем

$$B_{11} = \int_A (f_{1,1}^2 + f_{1,2}^2) dA =$$

$$= 4 \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \left[ (3x_1^2 x_2 - x_2^3)^2 + (x_1^3 - 3x_1 x_2^2)^2 \right] dx_1 dx_2 =$$

$$= 4 \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} (x_1^6 + 3x_1^4 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + x_2^6) dx_1 dx_2.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$B_{11} = \frac{3}{280} a^8.$$

Согласно (8.43) вычисляем далее

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_A (x_2 f_{1,1} - x_1 f_{1,2}) dA = \\ &= 4 \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \left[ x_2 (3x_1^2 x_2 - x_2^3) - x_1 (x_1^3 - 3x_1 x_2^2) \right] dx_1 dx_2 = \\ &= 4 \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} (6x_1^2 x_2^2 - x_1^4 - x_2^4) dx_1 dx_2 = \frac{a^6}{60}. \end{aligned}$$

Из равенства

$$B_{11} a_1 = c_1$$

находим

$$a_1 = \frac{c_1}{B_{11}} = \frac{a^6}{60} \cdot \frac{280}{3a^8} = \frac{14}{9a^2}.$$

Для квадратного сечения

$$I_{x_1} = I_{x_2} = \frac{a^4}{12},$$

и по формуле (8.44) получаем

$$\tilde{I}_k = -a_1 c_1 + I_{x_1} + I_{x_2} = -\frac{14}{9a^2} \cdot \frac{a^6}{60} + 2 \frac{a^4}{12} = \frac{19}{135} a^4 = 0,1407 a^4.$$

Этот результат почти не отличается от точного значения  $I_k = 0,1406 a^4$ .

Максимальное касательное напряжение возникает в середине стороны квадрата:

$$\tilde{\tau}_{\max} = \tilde{\sigma}_{32} \Big|_{\substack{x_1=a/2 \\ x_2=0}}.$$

В соответствии с (8.45) имеем

$$\tilde{\tau}_{\max} = \frac{M}{\tilde{I}_k} (a_1 f_{1,2} + x_1) \Big|_{\substack{x_1=a/2 \\ x_2=0}} = \frac{M}{\tilde{I}_k} \left[ a_1 (x_1^3 - 3x_1 x_2^2) + x_1 \right] \Big|_{\substack{x_1=a/2 \\ x_2=0}} = \frac{M}{\tilde{I}_k} \left( \frac{a^3 a_1}{8} + \frac{a}{2} \right).$$

Поставим сюда выражения для  $\tilde{I}_k$  и  $a_1$ :

$$\tilde{\tau}_{\max} = \frac{135M}{19a^4} \left( \frac{a^3}{8} \cdot \frac{14}{9a^2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{3375 M}{684 a^3}.$$

Данный результат можно записать в форме

$$\tilde{\tau}_{\max} = \frac{M}{\tilde{W}_k},$$

где момент сопротивления кручению

$$\tilde{W}_k = \frac{684}{3375} a^3 = 0,2027 a^3.$$

Этот результат на 2,7% меньше точного значения  $0,2082 a^3$ .

### 8.8.2 Стержень прямоугольного сечения

В случае прямоугольного сечения (рисунок 8.9) выражение для функции депланации примем в виде

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3,$$

где в соответствии с набором (8.48) в качестве базисных выбираем функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2; \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^3 x_2; \quad f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2^3.$$

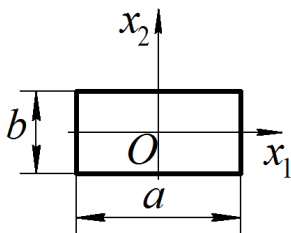


Рисунок 8.9 – Прямоугольное сечение

Записав выражения для производных

$$f_{1,1} = x_2; \quad f_{1,2} = x_1; \quad f_{2,1} = 3x_1^2 x_2; \quad f_{2,2} = x_1^3; \\ f_{3,1} = x_2^3; \quad f_{3,2} = 3x_1 x_2^2,$$

вычислим  $B_{ki}$  и  $c_i$ . Если обозначить

$$\gamma = \frac{a}{b},$$

где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника, то будем иметь

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \int_A (f_{1,1}^2 + f_{1,2}^2) dA = 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (x_2^2 + x_1^2) dx_1 dx_2 = \\
&= \frac{ab^3}{12} + \frac{a^3b}{12} = \frac{ab^3}{12} (1 + \gamma^2); \\
B_{12} &= B_{21} = \int_A (f_{1,1}f_{2,1} + f_{1,2}f_{2,2}) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (3x_1^2x_2^2 + x_1^4) dx_1 dx_2 = \frac{a^3b^3}{48} + \frac{a^5b}{80} = \frac{a^3b^3}{240} (5 + 3\gamma^2); \\
B_{13} &= B_{31} = \int_A (f_{1,1}f_{3,1} + f_{1,2}f_{3,2}) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (x_2^4 + 3x_1^2x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{ab^5}{80} + \frac{a^3b^3}{48} = \frac{ab^5}{240} (3 + 5\gamma^2); \\
B_{22} &= \int_A (f_{2,1}^2 + f_{2,2}^2) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (9x_1^4x_2^2 + x_1^6) dx_1 dx_2 = \frac{3a^5b^3}{320} + \frac{a^7b}{448} = \frac{a^5b^3}{2240} (21 + 5\gamma^2); \\
B_{23} &= B_{32} = \int_A (f_{2,1}f_{3,1} + f_{2,2}f_{3,2}) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (3x_1^2x_2^4 + 3x_1^4x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{a^3b^5}{320} + \frac{a^5b^3}{320} = \frac{a^3b^5}{320} (1 + \gamma^2); \\
B_{33} &= \int_A (f_{3,1}^2 + f_{3,2}^2) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (x_2^6 + 9x_1^2x_2^4) dx_1 dx_2 = \frac{ab^7}{448} + \frac{3a^3b^5}{320} = \frac{ab^7}{2240} (5 + 21\gamma^2); \\
c_1 &= \int_A (x_2f_{1,1} - x_1f_{1,2}) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (x_2^2 - x_1^2) dx_1 dx_2 = \frac{ab^3}{12} - \frac{a^3b}{12} = \frac{ab^3}{12} (1 - \gamma^2); \\
c_2 &= \int_A (x_2f_{2,1} - x_1f_{2,2}) dA = \\
&= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (3x_1^2x_2^2 - x_1^4) dx_1 dx_2 = \frac{a^3b^3}{48} - \frac{a^5b}{80} = \frac{a^3b^3}{240} (5 - 3\gamma^2);
\end{aligned}$$

$$c_3 = \int_A (x_2 f_{3,1} - x_1 f_{3,2}) dA =$$

$$= 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{ab^5}{80} - \frac{a^3 b^3}{48} = \frac{ab^5}{240} (3 - 5\gamma^2).$$

Уравнения относительно  $a_k$  после их сокращения на общие множители могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} 20(1 + \gamma^2)a_1 + (5 + 3\gamma^2)a^2 a_2 + (3 + 5\gamma^2)b^2 a_3 = 20(1 - \gamma^2); \\ \frac{5 + 3\gamma^2}{3}a_1 + \frac{21 + 5\gamma^2}{28}a^2 a_2 + \frac{1 + \gamma^2}{4}b^2 a_3 = \frac{5 - 3\gamma^2}{3}; \\ \frac{3 + 5\gamma^2}{3}a_1 + \frac{1 + \gamma^2}{4}a^2 a_2 + \frac{5 + 21\gamma^2}{28}b^2 a_3 = \frac{3 - 5\gamma^2}{3}. \end{cases}$$

Решая систему, можно прийти к следующим выражениям для искомым коэффициентов:

$$a_1 = \frac{42\gamma^2(1 - \gamma^2)}{z} + \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2};$$

$$a^2 a_2 = \frac{28(3 + 35\gamma^2)\gamma^2}{3z}; \quad b^2 a_3 = -\frac{28(35 + 3\gamma^2)\gamma^2}{3z},$$

где

$$z = 7 + 107\gamma^2 + 107\gamma^4 + 7\gamma^6.$$

По формуле

$$\tilde{I}_k = -\sum_{i=1}^3 a_i c_i + I_{x_1} + I_{x_2}$$

находим приближённое выражение для константы Сен-Венана. Учитывая, что в данном случае

$$I_{x_1} = \frac{ab^3}{12}; \quad I_{x_2} = \frac{a^3 b}{12},$$

можно получить

$$\tilde{I}_k = ab^3 k(\gamma),$$

где

$$k(\gamma) = \frac{1}{3} \left( \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} - \frac{266\gamma^4}{15z} \right).$$

При  $\gamma = 1$  этот результат совпадает с тем, который был получен в предыдущем примере. Для  $\gamma = 2$  величина  $k(\gamma)$  оказывается равной 0,230, что всего

на 0,7% превышает точное значение 0,229. С ростом  $\gamma$  погрешность приближённого решения растёт. Так, для  $\gamma=3$  она составляет 17%, а для  $\gamma=5$  – уже 31%.

### 8.8.3 Стержень полукруглого сечения (рисунок 8.10)

Выражением для функции депланации зададимся в виде

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4,$$

где

$$f_1 = x_1; \quad f_2 = x_1 x_2;$$

$$f_3 = x_1 x_2^2; \quad f_4 = x_1^3.$$

Данные базисные функции содержат только нечётные степени координаты  $x_1$ , как того требует симметрия сечения, и включают полиномиальные функции третьей степени.

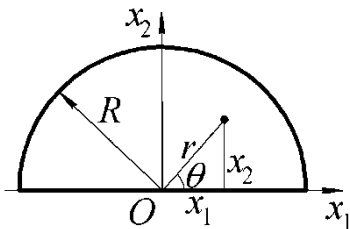


Рисунок 8.10 – Полукруглое сечение

Для вычисления интегралов по площади сечения используем полярные координаты  $r, \theta$ , полагая

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Встречающиеся при этом интегралы от тригонометрических функций имеют следующие значения:

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi} = 2;$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\int_0^{\pi} \cos^2 \theta d \cos \theta = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3};$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = -\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \left( -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3};$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{8};$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{(1 + \cos 2\theta)^2}{4} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3\pi}{8}; \\
\int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta &= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Согласно (8.42) находим коэффициенты системы уравнений:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \int_A (f_{1,1}^2 + f_{1,2}^2) dA = \int_A dA = \int_0^\pi \int_0^R r dr d\theta = \frac{\pi R^2}{2}; \\
B_{12} &= \int_A (f_{1,1} f_{2,1} + f_{1,2} f_{2,2}) dA = \int_A x_2 dA = \int_0^\pi \int_0^R r \sin \theta r dr d\theta = \frac{2R^3}{3}; \\
B_{13} &= \int_A (f_{1,1} f_{3,1} + f_{1,2} f_{3,2}) dA = \int_A x_2^2 dA = \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{8}; \\
B_{14} &= \int_A (f_{1,1} f_{4,1} + f_{1,2} f_{4,2}) dA = \int_A 3x_1^2 dA = 3 \int_0^\pi \int_0^R r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = \frac{3\pi R^4}{8}; \\
B_{22} &= \int_A (f_{2,1}^2 + f_{2,2}^2) dA = \int_A (x_2^2 + x_1^2) dA = \int_0^\pi \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{4}; \\
B_{23} &= \int_A (f_{2,1} f_{3,1} + f_{2,2} f_{3,2}) dA = \\
&= \int_A (x_2^3 + 2x_1^2 x_2) dA = \int_0^\pi \int_0^R r^3 (\sin^3 \theta + 2\cos^2 \theta \sin \theta) r dr d\theta = \frac{8R^5}{15}; \\
B_{24} &= \int_A (f_{2,1} f_{4,1} + f_{2,2} f_{4,2}) dA = \int_A 3x_1^2 x_2 dA = \\
&= 3 \int_0^\pi \int_0^R r^3 \cos^2 \theta \sin \theta r dr d\theta = \frac{2R^5}{5}; \\
B_{33} &= \int_A (f_{3,1}^2 + f_{3,2}^2) dA = \int_A (x_2^4 + 4x_1^2 x_2^2) dA = \\
&= \int_0^\pi \int_0^R r^4 (\sin^4 \theta + 4\cos^2 \theta \sin^2 \theta) r dr d\theta = \frac{7\pi R^6}{48};
\end{aligned}$$



$$B_{34} = \int_A (f_{3,1}f_{4,1} + f_{3,2}f_{4,2}) dA = \int_A 3x_1^2 x_2^2 dA = \\ = 3 \int_0^R \int_0^\pi r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi R^6}{16};$$

$$B_{44} = \int_A (f_{4,1}^2 + f_{4,2}^2) dA = \int_A 9x_1^4 dA = 9 \int_0^R \int_0^\pi r^4 \sin^4 \theta r dr d\theta = \frac{9\pi R^6}{16}.$$

По формуле (8.43) вычисляем правые части уравнений:

$$c_1 = \int_A (x_2 f_{1,1} - x_1 f_{1,2}) dA = \int_A x_2 dA = \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta r dr d\theta = \frac{2R^3}{3};$$

$$c_2 = \int_A (x_2 f_{2,1} - x_1 f_{2,2}) dA = \int_A (x_2^2 - x_1^2) dA = \int_0^R \int_0^\pi r^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) r dr d\theta = 0;$$

$$c_3 = \int_A (x_2 f_{3,1} - x_1 f_{3,2}) dA = \int_A (x_2^3 - 2x_1^2 x_2) dA = \\ = \int_0^R \int_0^\pi r^3 (\sin^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta) r dr d\theta = 0;$$

$$c_4 = \int_A (x_2 f_{4,1} - x_1 f_{4,2}) dA = \int_A 3x_1^2 x_2 dA = 3 \int_0^R \int_0^\pi r^3 \cos^2 \theta \sin \theta r dr d\theta = \frac{2R^5}{5}.$$

Относительно коэффициентов  $a_1 \dots a_4$  получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\pi R^2}{2} a_1 + \frac{2R^3}{3} a_2 + \frac{\pi R^4}{8} a_3 + \frac{3\pi R^4}{8} a_4 = \frac{2R^3}{3}; \\ \frac{2R^3}{3} a_1 + \frac{\pi R^4}{4} a_2 + \frac{8R^5}{15} a_3 + \frac{2R^5}{5} a_4 = 0; \\ \frac{\pi R^4}{8} a_1 + \frac{8R^5}{15} a_2 + \frac{7\pi R^6}{48} a_3 + \frac{\pi R^6}{16} a_4 = 0; \\ \frac{3\pi R^4}{8} a_1 + \frac{2R^5}{5} a_2 + \frac{\pi R^6}{16} a_3 + \frac{9\pi R^6}{16} a_4 = \frac{2R^5}{5}. \end{cases}$$

Решение системы даёт такие значения коэффициентов:

$$a_1 = 0,8280R; \quad a_2 = -0,8775; \quad a_3 = 0,3845 \frac{1}{R}; \quad a_4 = -0,1698 \frac{1}{R}.$$

Учитывая, что для данного сечения  $I_{x_1} = I_{x_2} = \pi R^4/8$ , по формуле (8.44) находим константу Сен-Венана:

$$\tilde{I}_k = -\sum_{i=1}^4 a_i c_i + I_{x_1} + I_{x_2} = 0,301R^4.$$

Полученный результат всего на 0,7% превышает точное значение  $I_k = 0,299R^4$ .

Если бы мы ограничились одночленным приближением, полагая  $\tilde{f}(x_1, x_2) = a_1 f_1$ , то получили бы  $\tilde{I}_k = 0,503R^4$ , что выше точного значения на 68%. При двучленном представлении вида

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = a_1 f_1 + a_2 f_2$$

будем иметь  $\tilde{I}_k = 0,343R^4$ , и погрешность снижается до 15%. Добавив ещё одно слагаемое, то есть используя выражение

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3,$$

мы получили бы значение  $\tilde{I}_k = 0,326R^4$  с погрешностью 11%. Как видим, здесь относительная погрешность имеет тот же порядок, что и при двучленном приближении. Этого и следовало ожидать, поскольку в обоих случаях степень полных полиномов, представленных в базисных функциях, равна двум.

## 8.9 Метод Бубнова-Галёркина

В методе Бубнова-Галёркина, так же как и в методе Ритца, исходным является вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta V = \delta U + \delta \Pi = 0.$$

Воспользуемся для  $\delta U$  и  $\delta \Pi$  выражениями (8.16) и (8.11):

$$\delta U = \int_{\omega_p} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\omega - \int_{\tau} \delta u_i \sigma_{ij,j} d\tau;$$

$$\delta \Pi = - \left( \int_{\tau} \delta u_i R_i d\tau + \int_{\omega_p} \delta u_i p_i d\omega \right).$$

Тогда условие  $\delta V = 0$  может быть представлено в форме

$$\int_{\omega_p} \delta u_i (\sigma_{ij} n_j - p_i) d\omega - \int_{\tau} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + R_i) d\tau = 0. \quad (8.49)$$

Равенство (8.49) и лежит в основе метода Бубнова-Галёркина. Как и в методе Ритца, приближённое решение отыскивается в виде

$$\tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3) = u_{10}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^N a_k f_{1k}(x_1, x_2, x_3);$$

$$\tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3) = u_{20}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^N b_k f_{2k}(x_1, x_2, x_3);$$

$$\tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3) = u_{30}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{k=1}^N c_k f_{3k}(x_1, x_2, x_3). \quad (8.50)$$

Но теперь к функциям  $u_{10}$ ,  $u_{20}$ ,  $u_{30}$ , а также к функциям  $f_{1k}$ ,  $f_{2k}$ ,  $f_{3k}$  предъявляются более жёсткие требования, чем в методе Ритца. Они должны обеспечивать выполнение не только кинематических (как в методе Ритца), но также и статических граничных условий. Это означает, что напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , которые согласно формулам Коши и закону Гука вытекают из представления (8.50), должны удовлетворять статическим условиям на  $\omega_p$  независимо от значений  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ . В таком случае будет выполняться равенство

$$\tilde{\sigma}_{ij} n_j - p_i = 0 \quad \text{на } \omega_p,$$

и поверхностный интеграл в равенстве (8.49) исчезает. Искомые постоянные должны быть подчинены при этом условию, вытекающему из (8.49):

$$\int_{\tau} \delta u_i (\tilde{\sigma}_{ij,j} + R_i) d\tau = 0 \quad (8.51)$$

или, подробнее,

$$\int_{\tau} \left[ \delta u_1 (\tilde{\sigma}_{1j,j} + R_1) + \delta u_2 (\tilde{\sigma}_{2j,j} + R_2) + \delta u_3 (\tilde{\sigma}_{3j,j} + R_3) \right] d\tau = 0.$$

Так как функции  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta u_3$  не связаны друг с другом, отсюда следует три равенства

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \delta u_1 (\tilde{\sigma}_{1j,j} + R_1) d\tau &= 0; \\ \int_{\tau} \delta u_2 (\tilde{\sigma}_{2j,j} + R_2) d\tau &= 0; \\ \int_{\tau} \delta u_3 (\tilde{\sigma}_{3j,j} + R_3) d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Фигурирующие здесь вариации перемещений устанавливаются в методе Бубнова-Галёркина путём варьирования выражений (8.50). Учитывая, что варьированию подлежат только параметры  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \delta u_1 = \delta \tilde{u}_1 &= \sum_{k=1}^N \delta a_k f_{1k}(x_1, x_2, x_3); \\ \delta u_2 = \delta \tilde{u}_2 &= \sum_{k=1}^N \delta b_k f_{2k}(x_1, x_2, x_3); \\ \delta u_3 = \delta \tilde{u}_3 &= \sum_{k=1}^N \delta c_k f_{3k}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Подставим эти выражения в равенства (8.52):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \delta a_k \int_{\tau} (\tilde{\sigma}_{1j,j} + R_1) f_{1k} d\tau &= 0; \\ \sum_{k=1}^N \delta b_k \int_{\tau} (\tilde{\sigma}_{2j,j} + R_2) f_{2k} d\tau &= 0; \\ \sum_{k=1}^N \delta c_k \int_{\tau} (\tilde{\sigma}_{3j,j} + R_3) f_{3k} d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Вариации  $\delta a_k$ ,  $\delta b_k$ ,  $\delta c_k$  произвольны и не связаны между собой. Поэтому отсюда вытекают равенства, которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{13}}{\partial x_3} + R_1 \right) f_{1k} d\tau &= 0; \\ \int_{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{23}}{\partial x_3} + R_2 \right) f_{2k} d\tau &= 0; \\ \int_{\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{33}}{\partial x_3} + R_3 \right) f_{3k} d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Как уже сказано, компоненты  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , входящие в подынтегральные выражения, получаются из (8.50) путём использования формул Коши и соотношений закона Гука. Они содержат коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , так что равенства (8.54), записанные для  $k=1, \dots, N$ , образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов; можно показать, что эта система симметрична. Решив систему, будем иметь в соответствии с (8.50) приближённое распределение перемещений.

Выражения в скобках в подынтегральных выражениях в (8.54) представляют собой левые части дифференциальных уравнений равновесия, в которые подставлены приближённые выражения для напряжений. При такой подстановке получаются некоторые, вообще говоря, отличные от нуля функции координат (так называемые *невязки уравнений*), содержащие постоянные  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ . Процедура Бубнова-Галёркина заключается в последовательном умножении невязок на соответствующие базисные функции и интегрировании получаемых выражений по объёму тела с последующим приравниванием результатов нулю. Заметим, что такая процедура используется и как общий приём приближённого решения уравнений математической физики, вне связи с какими-либо вариационными принципами.

## 8.10 Пример расчёта балки на изгиб методом Бубнова-Галёркина

Для иллюстрации процедуры Бубнова-Галёркина вновь обратимся к поперечному изгибу балки (рисунок 8.11).

На рисунке 8.12 показаны силы, действующие на бесконечно малый элемент балки. Условия равновесия сил и моментов приводят к равенствам

$$Q'_y = q_y; \quad Q_y = M'_z,$$

где штрих означает, как и ранее, дифференцирование по  $x$ .

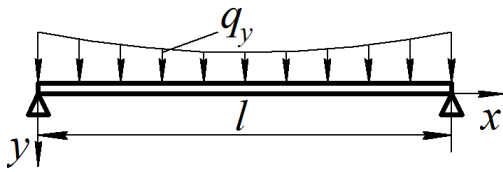


Рисунок 8.11 – Поперечный изгиб балки

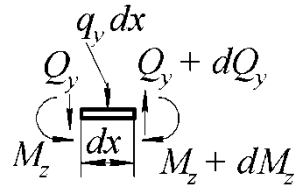


Рисунок 8.12 – Силы и моменты в сечениях балки

Подстановка второго из них в первое приводит к уравнению

$$M''_z = q_y.$$

Если воспользоваться соотношением

$$M_z = EI_z u''_y,$$

где  $u_y$  – прогиб балки, то можно прийти отсюда к уравнению равновесия в перемещениях. В случае постоянной изгибной жёсткости  $EI_z$  будем иметь

$$EI_z u''''_y = q_y.$$

Данное уравнение можно без труда проинтегрировать, но мы будем искать его решение приближённо по методу Бубнова-Галёркина, задаваясь выражением для  $u_y(x)$  в виде

$$\tilde{u}_y(x) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x).$$

Здесь  $f_k$  – базисные функции,  $a_k$  – неизвестные коэффициенты. Для нахождения последних перенесём все члены уравнения в левую часть и применим затем процедуру Бубнова-Галёркина. В рассматриваемом случае одномерной задачи интегрирование по объёму сводится к интегрированию по длине  $l$ , так что получаем совокупность следующих равенств:

$$\int_0^l \left( EI_z \sum_{k=1}^N a_k f_k'''' - q_y \right) f_i dx = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

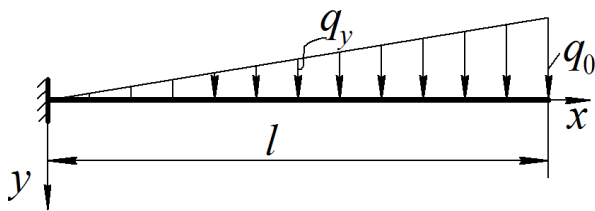
Мы пришли к системе уравнений относительно  $a_k$ , которую можно записать в виде

$$[B][a] = [c],$$

где элементы матрицы коэффициентов и матрицы правых частей вычисляются по формулам

$$B_{ki} = EI_z \int_0^l f_k^{IV} f_i dx; \quad c_i = \int_0^l q_y f_i dx.$$

Пусть, например, консольная балка испытывает действие нагрузки, изменяющейся по линейному закону (рисунок 8.13). Базисные функции должны, как и в методе Ритца, удовлетворять кинематическим условиям



**Рисунок 8.13 – Консольная балка под действием переменной нагрузки**

$$f_k(0) = 0; \quad f_k'(0) = 0.$$

Но, кроме того, они должны теперь удовлетворять также требованиям

$$f_k''(l) = 0; \quad f_k'''(l) = 0,$$

вытекающим из статических условий

$$M_z = 0; \quad Q_y = 0 \text{ при } x = l.$$

Ограничимся одночленным приближением, полагая

$$\tilde{u}_y(x) = a_1 f_1(x).$$

Для функции  $f_1(x)$  можно принять следующее выражение:

$$f_1(x) = x^2 + A_1 x^3 + A_2 x^4,$$

где коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  подберём так, чтобы удовлетворить требованиям при  $x = l$ . Так как

$$f_1''(x) = 2 + 6A_1 x + 12A_2 x^2;$$

$$f_1'''(x) = 6A_1 + 24A_2 x,$$

для отыскания  $A_1$  и  $A_2$  имеем равенства

$$f_1''(l) = 2 + 6A_1 l + 12A_2 l^2 = 0;$$

$$f_1'''(l) = 6A_1 + 24A_2 l = 0,$$

из которых находим

$$A_1 = -\frac{2}{3l}, \quad A_2 = \frac{1}{6l^2}.$$

Следовательно, в качестве базисной может быть взята функция

$$f_1(x) = x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4.$$

Для неё

$$f_1^{IV}(x) = \frac{4}{l^2},$$

так что коэффициент  $B_{11}$  получается равным

$$B_{11} = EI_z \int_0^l f_1^{IV} f_1 dx = EI_z \int_0^l \frac{4}{l^2} \left( x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4 \right) dx = \frac{4lEI_z}{5}.$$

Полагая

$$q_y(x) = q_0 \frac{x}{l},$$

находим также

$$c_1 = \int_0^l q_y f_1(x) dx = \frac{q_0}{l} \int_0^l x \left( x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4 \right) dx = \frac{13}{90} q_0 l^3.$$

Постоянная  $a_1$  оказывается равной

$$a_1 = \frac{c_1}{B_{11}} = \frac{13}{72} \frac{q_0 l^2}{EI_z}.$$

Таким образом, приближённое выражение для  $u_y$  будет

$$\tilde{u}_y(x) = \frac{13}{72} \frac{q_0 l^4}{EI_z} \left( \frac{x^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{6} \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Прогиб на свободном конце балки в этом приближённом решении

$$\tilde{u}_y|_{x=l} = \frac{13}{144} \frac{q_0 l^4}{EI_z} = 0,0903 \frac{q_0 l^4}{EI_z}.$$

В точном решении прогиб на конце балки имеет значение

$$u_y|_{x=l} = \frac{11}{120} \frac{q_0 l^4}{EI_z} = 0,0917 \frac{q_0 l^4}{EI_z},$$

так что погрешность определения перемещения составляет здесь 1,5%.

Изгибающий момент в приближённом решении

$$\tilde{M}_z(x) = EI_z \tilde{u}_y'' = \frac{13}{36} q_0 l^2 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right).$$

В заделке, то есть при  $x = 0$ , получаем

$$\tilde{M}_z(0) = \frac{13}{36} q_0 l^2 = 0,361 q_0 l^2.$$

Эта величина на 8% превышает точное значение

$$M_z(0) = \frac{1}{3} q_0 l^2 = 0,333 q_0 l^2.$$

Заметим, что тот же результат мы получили бы и по методу Ритца, если бы использовали аналогичное представление для  $u_y$ :

$$\tilde{u}_y(x) = a_1 f_1(x); \quad f_1(x) = x^2 - \frac{2}{3l} x^3 + \frac{1}{6l^2} x^4.$$

Это естественно, поскольку в основе обоих методов лежит одно и то же вариационное уравнение Лагранжа.

### 8.11 Дополнительная работа и дополнительная энергия деформации

Обратимся вновь к случаю нагружения тела сосредоточенной силой  $P$ . Её связь с перемещением  $v$  будем считать в общем случае нелинейной, как показано на рисунке 8.14. Площадь слева от кривой  $P-v$ , которая на рисунке 8.14 заштрихована горизонтально, обозначим через  $A^*$  и будем называть дополни-

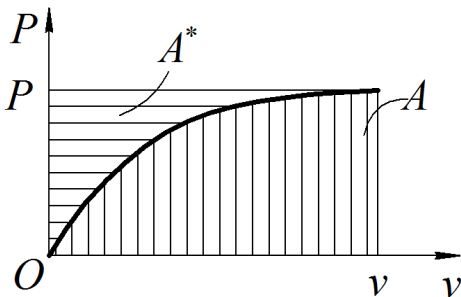


Рисунок 8.14 – К понятию дополнительной работы

тельной работой силы  $P$ . Хотя эта величина не имеет механического смысла, она оказывается полезной для формулирования вариационного принципа, альтернативного принципу Лагранжа. Её название связано с тем, что величина  $A^*$  дополняет работу  $A$  силы  $P$  до прямоугольника:

$$A^* = vP - A. \quad (8.55)$$

Вариацию  $A^*$  при бесконечно малом возрастании силы можно найти путём формального варьирования равенства (8.55):

$$\delta A^* = \delta v \cdot P + v \cdot \delta P - \delta A.$$

Но так как  $\delta A = \delta v \cdot P$ , отсюда следует, что

$$\delta A^* = v \cdot \delta P. \quad (8.56)$$

В случае линейно-деформируемого тела, когда  $P$  и  $v$  связаны линейной зависимостью, величина  $A^*$  численно совпадает с  $A$ . Но определяются  $A$  и  $A^*$  различным образом, что отражается, в частности, в записи формул для  $\delta A^*$  и  $\delta A$ . По существу, дополнительная работа  $A^*$  выступает как функция нагрузки  $P$ , в то время как работа  $A$  рассматривается как функция перемещения  $v$ .

Дополнительным потенциалом силы  $P$  называется величина

$$\Pi^* = -vP, \quad (8.57)$$



которая также рассматривается как функция  $P$ ; перемещение  $v$  здесь считается заданным и неизменным. Отсюда вытекает, что вариация  $\delta\Pi^*$  равна

$$\delta\Pi^* = -v \cdot \delta P,$$

то есть

$$\delta\Pi^* = -\delta A^*. \quad (8.58)$$

Формально  $\delta\Pi^*$  отличается от  $\delta A^*$  лишь знаком, и условие (8.58) можно взять за основу определения  $\Pi^*$  в общем случае произвольного нагружения тела. Необходимо помнить при этом, что при вычислении  $\delta\Pi^*$  перемещения рассматриваются как заданные величины, не подлежащие варьированию.

Обобщая сказанное на случай действия объёмных и поверхностных сил, будем иметь

$$\delta A^* = -\delta\Pi^* = \int_{\tau} u_i \delta R_i d\tau + \int_{\omega} u_i \delta p_i d\omega. \quad (8.59)$$

Подобным же образом вводится понятие *дополнительной энергии деформации*:

$$U^* = \int_{\tau} W^* d\tau,$$

где *удельная дополнительная энергия деформации*  $W^*$  определяется равенством

$$W^* = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} - W. \quad (8.60)$$

Если предположить, что величина  $W^*$  является функцией  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$ , то формальное варьирование (8.60) даёт равенство

$$\delta W^* = \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} + \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} - \delta W.$$

Но так как вариация  $\delta W$  согласно (8.13) равна  $\delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$ , приходим к соотношению

$$\delta W^* = \varepsilon_{ij} \cdot \delta \sigma_{ij}. \quad (8.61)$$

Оно показывает, что  $W^*$  следует трактовать как функцию, зависящую от компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Но тогда можно записать

$$\delta W^* = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij}.$$

Сопоставляя последнее равенство с выражением (8.61), выводим формулы

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (8.62)$$

называемые *формулами Кастильяно*. Будучи обратными к формулам Грина (3.8), они устанавливают, что *компоненты тензора деформации равны частным производным от удельной дополнительной энергии деформации по соответствующим компонентам тензора напряжений*. Как и формулы Грина, они справедливы и для нелинейно-упругого тела.

Заметим, что для линейно-деформируемого тела  $U^* = U$ , но и в этом случае между данными величинами сохраняется различие, поскольку  $U^*$  понимается как функционал, зависящий от компонент тензора напряжений, а  $U$  – как функционал, зависящий от компонент тензора деформации (или от компонент вектора перемещения).

## 8.12 Принцип дополнительных виртуальных работ

Будем рассматривать всевозможные *равновесные* состояния тела под действием внешних нагрузок, то есть такие состояния, для которых удовлетворяются соотношения статики

$$\begin{aligned}\sigma_{ji,j} + R_i &= 0 \quad \text{в } \tau; \\ \sigma_{ji}n_j &= p_i \quad \text{на } \omega.\end{aligned}\tag{8.63}$$

Второе равенство (8.63) на части  $\omega_p$  поверхности  $\omega$  выражает статические граничные условия, а на  $\omega_u$  оно устанавливает связь между напряжениями и реакциями на тело со стороны наложенных связей.

Напряжения, удовлетворяющие равенствам (8.63), будем называть *статически допустимыми*. Действительные напряжения отличаются от всех других статически допустимых тем, что они удовлетворяют ещё и уравнениям совместности деформаций. Выясним, чем действительное напряжённое состояние отличается от других статически допустимых с энергетической точки зрения.

Предположим, что напряжения получили бесконечно малые приращения  $\delta\sigma_{ij}$  такие, что новое напряжённое состояние также является равновесным. Изменение напряжений может сопровождаться соответствующими приращениями внешних нагрузок либо оно может предполагаться происходящим при неизменных нагрузках. Не уменьшая общности, будем считать, что объёмные силы  $R_i$  при варьировании напряжений сохраняют свои значения, поверхностные же силы  $p_i$  получают в общем случае приращения  $\delta p_i$ . Тогда условия равновесия в возмущённом состоянии запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}(\sigma_{ji} + \delta\sigma_{ji})_{,j} + R_i &= 0 \text{ в } \tau; \\ (\sigma_{ji} + \delta\sigma_{ji})n_j &= p_i + \delta p_i \text{ на } \omega.\end{aligned}$$

Вычитая из этих равенств равенства (8.63), получим уравнения, которым должны удовлетворять вариации напряжений:

$$\delta\sigma_{ji,j} = 0 \text{ в } \tau; \quad \delta\sigma_{ji}n_j = \delta p_i \text{ на } \omega. \quad (8.64)$$

В случае изменения поверхностных сил дополнительная работа получит приращение. Её вариация будет

$$\delta A^* = \int_{\omega} u_i \delta p_i d\omega.$$

Вариация же дополнительной энергии деформации определится выражением

$$\delta U^* = \int_{\tau} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\tau.$$

Предположим далее, что в исходном состоянии выполняются не только условия равновесия, но и *геометрические соотношения Коши*. Так как следствием формул Коши являются уравнения совместности деформаций, то это означает, что рассматриваемое напряжённое состояние считается теперь не только равновесным, но и *совместным*, то есть истинным состоянием. В таком случае выражение для  $\delta U^*$  может быть преобразовано аналогично тому, как это делалось для  $\delta U$  при выводе вариационного уравнения Лагранжа.

Пользуясь соотношением

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} - \omega_{ij},$$

запишем

$$\delta U^* = \int_{\tau} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\tau - \int_{\tau} \omega_{ij} \delta\sigma_{ij} d\tau.$$

Но  $\omega_{ij} \delta\sigma_{ij} = 0$ , поскольку  $\delta\sigma_{ij}$  – симметричный, а  $\omega_{ij}$  – кососимметричный тензоры. Воспользовавшись далее формулой дифференцирования произведения функций, будем иметь

$$\begin{aligned}\delta U^* &= \int_{\tau} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\tau = \\ &= \int_{\tau} (u_i \delta\sigma_{ij})_{,j} d\tau - \int_{\tau} u_i \delta\sigma_{ij,j} d\tau.\end{aligned}$$

Если заменить первый интеграл поверхностным с помощью формулы Остроградского-Гаусса, то получим

$$\delta U^* = \int_{\omega} u_i \delta \sigma_{ij} n_j d\omega - \int_{\tau} u_i \delta \sigma_{ij,j} d\tau.$$

Поскольку компоненты  $\delta \sigma_{ij}$  подчиняются равенствам (8.64), интеграл по объёму тела здесь равен нулю, и полученный результат можно представить в форме

$$\delta U^* = \int_{\omega} u_i \delta p_i d\omega.$$

Выражение в правой части есть  $\delta A^*$ , так что мы приходим к равенству

$$\delta U^* = \delta A^*. \quad (8.65)$$

Оно выражает так называемый *принцип дополнительных виртуальных работ*, согласно которому *в действительном напряжённом состоянии вариация дополнительной энергии деформации равна вариации дополнительной работы внешних сил*.

Уравнение (8.65) получено как *необходимое* условие совместности. Можно показать, что оно же является и *достаточным* условием совместности деформаций. При выполнении равенства (8.65) как следствие будут выполняться соотношения Коши, то есть будут удовлетворяться и уравнения совместности деформаций.

### 8.13 Вариационный принцип Кастильяно

Заменяя  $\delta A^*$  на  $-\delta \Pi^*$ , придадим равенству (8.65) вид

$$\delta(U^* + \Pi^*) = 0,$$

где

$$\Pi^* = - \int_{\omega} u_i p_i d\omega. \quad (8.66)$$

Величина

$$V^* = U^* + \Pi^* \quad (8.67)$$

называется *полной дополнительной энергией системы*. Уравнение

$$\delta V^* = 0, \quad (8.68)$$

называемое *вариационным уравнением Кастильяно*, устанавливает, что *в действительном напряжённом состоянии полная дополнительная энергия системы имеет стационарное значение*. Можно показать, что в случае справедливости закона Гука это стационарное значение есть минимум.

Из сказанного вытекает следующий *вариационный принцип Кастильяно для линейно-упругого тела*. *Из всех статически допустимых напряжённых со-*

стояний в действительности имеет место такое, для которого полная дополнительная энергия системы минимальна.

При практическом использовании вариационного принципа Кастильяно во многих случаях возникает задача выбора действительного напряжённого состояния среди множества равновесных состояний, возникающих при одной и той же внешней нагрузке. В таких случаях при варьировании напряжений поверхностные нагрузки на  $\omega_p$  остаются неизменными, то есть  $\delta p_i = 0$  на  $\omega_p$ . Тогда можно записать

$$\delta A^* = \int_{\omega_p} u_i \delta p_i d\omega + \int_{\omega_u} u_i \delta p_i d\omega = \int_{\omega_u} u_i \delta p_i d\omega.$$

Если при этом заданные на  $\omega_u$  перемещения равны нулю ( $u_i = 0$  на  $\omega_u$ ) или если тело вообще не закреплено ( $\omega_u = 0$ ), то  $\delta A^* = 0$ , и мы приходим согласно (8.65) к уравнению

$$\delta U^* = 0.$$

Для линейного-упругого тела, для которого  $U^* = U$ , получаем отсюда

$$\delta U = 0. \quad (8.69)$$

Данное равенство выражает так называемое *начало наименьшей работы* (или начало Кастильяно), справедливое для рассмотренного частного случая: *из всех статически допустимых напряжённых состояний в действительности имеет место такое, для которого потенциальная энергия деформации минимальна:*

$$U = U_{\min}. \quad (8.70)$$

Исходя из принципа дополнительных виртуальных работ (8.65) можно вывести важную для практических приложений теорему. Пусть на тело действуют сосредоточенные силы  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , и пусть им соответствуют перемещения  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Если силы получают приращения  $\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_n$ , то вариация дополнительной работы будет

$$\delta A^* = v_1 \delta P_1 + v_2 \delta P_2 + \dots + v_n \delta P_n. \quad (8.71)$$

Вызванные данными силами напряжения и, следовательно, дополнительная энергия деформации  $U^*$  представляют собой, очевидно, некоторые функции этих сил. Поэтому можно записать

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial U^*}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots + \frac{\partial U^*}{\partial P_n} \delta P_n. \quad (8.72)$$

Приравнивая согласно (8.65) правые части выражений (8.71) и (8.72) друг другу, приходим к равенствам вида

$$v_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для линейно-упругого тела, когда  $U^* = U$ , будем иметь

$$v_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}. \quad (8.73)$$

Соотношение (8.73) выражает так называемую *теорему Кастильяно*, согласно которой *перемещение точки приложения некоторой силы в направлении её действия равно для линейно-упругого тела частной производной от потенциальной энергии деформации по этой силе.*

### 8.14 Вариационное уравнение Тимошенко для кручения призматических стержней

Применим вариационный принцип Кастильяно к задаче о кручении призматических стержней, ограничившись случаем односвязных сечений. Как и ранее, стержень отнесём к системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой находится в нижнем основании, а ось  $x_3$  параллельна образующей (см. рисунок 8.7). Нижнее основание закреплено от поворота относительно оси  $x_3$ , а в плоскости верхнего приложен момент  $M$ .

При кручении стержня возникают касательные напряжения  $\sigma_{31}(x_1, x_2)$  и  $\sigma_{32}(x_1, x_2)$ . Они будут статически допустимыми если удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0,$$

статическому условию на боковой поверхности

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0$$

и интегральному условию равновесия

$$M = \int_A (-\sigma_{31}x_2 + \sigma_{32}x_1) dA,$$

где  $A$  – площадь сечения стержня;  $n_1, n_2$  – косинусы углов между нормалью к боковой поверхности и осями  $x_1, x_2$ .

Как говорилось ранее, дифференциальное уравнение равновесия будет удовлетворено, если напряжения выражаются через функцию напряжений  $\varphi(x_1, x_2)$  по формулам

$$\sigma_{31} = G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad \sigma_{32} = -G\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Условия на боковой поверхности стержня будут при этом также удовлетворены, если  $\varphi = 0$  на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем его поперечное сечение.

Что касается интегрального условия равновесия, то его можно представить в виде

$$M = -G\alpha \int_A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1 \right) dA = -G\alpha \int_A \varphi_{,\beta} x_{\beta} dA.$$

Используя формулу дифференцирования произведения, перепишем последнее равенство в виде

$$M = -G\alpha \left[ \int_A (\varphi x_{\beta})_{,\beta} dA - \int_A \varphi x_{\beta,\beta} dA \right].$$

Первый интеграл заменим интегралом по контуру  $\Gamma$  по формуле Остроградского-Гаусса. Учитывая, что  $x_{\beta,\beta} = 2$ , будем иметь

$$M = -G\alpha \left( \oint_{\Gamma} \varphi x_{\beta} n_{\beta} ds - 2 \int_A \varphi dA \right).$$

Контурный интеграл равен здесь нулю, поскольку  $\varphi = 0$  на контуре. Таким образом, устанавливаем соотношение

$$M = 2G\alpha \int_A \varphi dA, \quad (8.74)$$

выражающее связь функции  $\varphi$  с внешним моментом.

Чтобы напряжённое состояние было истинным, то есть совместным, подчиним функцию  $\varphi(x_1, x_2)$  условию минимума полной дополнительной энергии системы  $V^* = U^* + \Pi^*$ . Представим для этого  $V^*$  как функционал, зависящий от  $\varphi(x_1, x_2)$ . Считая, что материал стержня подчиняется закону Гука, запишем

$$U^* = U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\tau = \int_0^L dx_3 \int_A (\sigma_{31} \varepsilon_{31} + \sigma_{32} \varepsilon_{32}) dA,$$

где  $L$  – длина стержня.

Поскольку

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G} \sigma_{31}; \quad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2G} \sigma_{32},$$

отсюда следует выражение

$$U^* = \frac{L}{2G} \int_A (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2) dA$$

или

$$U^* = \frac{L}{2G} (G\alpha)^2 \int_A \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dA.$$

С использованием тензорных обозначений данный результат представим в следующей краткой записи:

$$U^* = \frac{G\alpha^2 L}{2} \int_A \varphi_{,\beta} \varphi_{,\beta} dA. \quad (8.75)$$

Обобщённым перемещением для момента  $M$  является угол поворота верхнего основания относительно оси  $x_3$ , равный  $\alpha l$ . Поэтому

$$\Pi^* = -\alpha LM.$$

Но момент  $M$  связан с функцией  $\varphi$  соотношением (8.74), и мы получаем

$$\Pi^* = -2G\alpha^2 L \int_A \varphi dA. \quad (8.76)$$

Складывая (8.75) и (8.76), находим

$$V^* = \frac{G\alpha^2 L}{2} \int_A \varphi_{,\beta} \varphi_{,\beta} dA - 2G\alpha^2 L \int_A \varphi dA = \frac{G\alpha^2 L}{2} J_2,$$

где через  $J_2$  обозначен функционал вида

$$J_2 = \int_A (\varphi_{,\beta} \varphi_{,\beta} - 4\varphi) dA. \quad (8.77)$$

Условие минимума

$$\delta V^* = 0$$

приводит к равенству

$$\delta J_2 = 0, \quad (8.78)$$

которое называется *вариационным уравнением Тимошенко для кручения призматических стержней*. Таким образом, действительная функция напряжений  $\varphi$  должна минимизировать функционал  $J_2$ .

Если найдена функция  $\varphi$ , доставляющая минимальное значение функционалу  $J_2$ , то как следствие будет удовлетворяться уравнение совместности деформаций (7.34)

$$\nabla^2 \varphi = -2,$$

или, в тензорных обозначениях,

$$\varphi_{,\beta\beta} = -2. \quad (8.79)$$



Выражение для минимального значения функционала  $J_2$  можно с учётом этого преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 J_{2\min} &= \int_A \varphi_{,\beta} \varphi_{,\beta} dA - 4 \int_A \varphi dA = \\
 &= \int_A (\varphi_{,\beta} \varphi)_{,\beta} dA - \int_A \varphi_{,\beta\beta} \varphi dA - 4 \int_A \varphi dA = \\
 &= \int_A (\varphi_{,\beta} \varphi)_{,\beta} dA + 2 \int_A \varphi dA - 4 \int_A \varphi dA = \\
 &= \int_A (\varphi_{,\beta} \varphi)_{,\beta} dA - 2 \int_A \varphi dA.
 \end{aligned}$$

Первый интеграл заменим далее интегралом по контуру  $\Gamma$ . Это даёт

$$\int_A (\varphi_{,\beta} \varphi)_{,\beta} dA = \oint_{\Gamma} \varphi_{,\beta} \varphi n_{\beta} dA = 0,$$

поскольку  $\varphi = 0$  на  $\Gamma$ . Таким образом, приходим к соотношению

$$J_{2\min} = -2 \int_A \varphi dA. \quad (8.80)$$

Полученное выше равенство (8.74) устанавливает связь между  $M$  и  $\alpha$ , которой можно придать стандартный вид  $M = GI_{\kappa} \alpha$ , где

$$I_{\kappa} = 2 \int_A \varphi dA.$$

Сравнение с (8.80) показывает, что

$$I_{\kappa} = -J_{2\min}. \quad (8.81)$$

### 8.15 Приложение метода Ритца к расчёту стержней на кручение в напряжениях

Следуя методу Ритца, выполним приближённо прямую минимизацию функционала  $J_2$ . Зададимся для этого выражением для функции  $\varphi(x_1, x_2)$  в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x_1, x_2), \quad (8.82)$$

где базисные функции  $f_k(x_1, x_2)$  должны удовлетворять условию

$$f_k = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (8.83)$$

Коэффициенты  $a_k$  находятся из условия минимума  $J_2$ . Подставим (8.82) в выражение (8.77) для  $J_2$ :

$$J_2 = \int_A \left[ \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1} \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2} \right)^2 - 4 \sum_{k=1}^N a_k f_k \right] dA.$$

Необходимым условием минимума  $J_2$  является равенство нулю производных по каждому из коэффициентов:

$$\frac{\partial J_2}{\partial a_i} = \int_A \left( 2 \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1} f_{i,1} + 2 \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2} f_{i,2} - 4 f_i \right) dA = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений в виде

$$\sum_{k=1}^N a_k B_{ki} - c_i = 0 \quad (i = 1, \dots, N),$$

где

$$B_{ki} = \int_A (f_{k,1} f_{i,1} + f_{k,2} f_{i,2}) dA; \quad (8.84)$$

$$c_i = 2 \int_A f_i dA. \quad (8.85)$$

Данную систему можно записать в матричной форме

$$[B][a] = [c], \quad (8.86)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix}; \quad [a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}.$$

Решив систему (8.86), будем иметь согласно (8.82) приближённое решение задачи. Далее находим  $I_k$ :

$$I_k = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_A \sum_{k=1}^N a_k f_k dA = 2 \sum_{k=1}^N a_k \int_A f_k dA.$$

Воспользовавшись соотношением (8.85), придадим последнему результату расчётный вид

$$I_k = \sum_{k=1}^N a_k c_k. \quad (8.87)$$

Отметим, что минимальное значение  $J_{2\min}$  функционала  $J_2$  может быть строго достигнуто лишь в точном решении. Всякий приближённый подход будет давать для  $J_{2\min}$  завышенный результат. На основании равенства (8.81) можно заключить, что приближённая величина  $I_k$  при расчёте стержня на кру-

чение в напряжениях методом Ритца всегда будет *заниженной по сравнению с точным значением*. Отсюда вытекает, что решение одной и той же задачи методом Ритца в перемещениях и в напряжениях позволяет установитьвилку, в которой находится точное решение.

Заменяв  $G\alpha$  на отношение  $M/I_k$ , для вычисления напряжений будем иметь расчётные формулы

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &= \frac{M}{I_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{M}{I_k} \sum_{k=1}^N a_k f_{k,2}; \\ \sigma_{32} &= -\frac{M}{I_k} \sum_{k=1}^N a_k f_{k,1}.\end{aligned}\quad (8.88)$$

Как уже сказано, базисные функции  $f_k$  должны обращаться в ноль на контуре  $\Gamma$ . В общем случае контур может состоять из нескольких гладких участков. Пусть  $j$ -й участок образован кривой, имеющей уравнение

$$\omega_j(x_1, x_2) = 0. \quad (8.89)$$

Составим функцию  $\Omega$  как произведение левых частей уравнений (8.89):

$$\Omega(x_1, x_2) = \prod_{j=1}^n \omega_j(x_1, x_2) = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_n, \quad (8.90)$$

где  $n$  – число участков, составляющих контур  $\Gamma$ .

В качестве базисных могут быть взяты функции

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \{\Omega; \Omega x_1; \Omega x_2; \Omega x_1^2; \Omega x_1 x_2; \Omega x_2^2; \dots\}. \quad (8.91)$$

Каждая из них удовлетворяет условию (8.83), а вместе они образуют систематический набор функций, позволяющий получить решение с необходимой точностью. Как и в случае решения в перемещениях, существенное улучшение результатов с увеличением числа базисных функций происходит лишь при увеличении максимальной степени полных полиномов, фигурирующих в качестве множителей функции  $\Omega$ .

Наличие симметрии сечения позволяет упростить решение, поскольку функция напряжений симметрична по отношению к любой оси симметрии. Если, например, ось  $x_1$  является осью симметрии, то функция  $\varphi(x_1, x_2)$  должна быть чётной функцией координаты  $x_2$ . Учитывая, что в этом случае функция  $\Omega$  будет чётной относительно  $x_2$ , из набора базисных функций (8.91) следует отбросить те, которые содержат  $x_2$  в нечётных степенях.

## 8.16 Примеры расчёта стержней на кручение в напряжениях методом Ритца

### 8.16.1 Стержень прямоугольного сечения

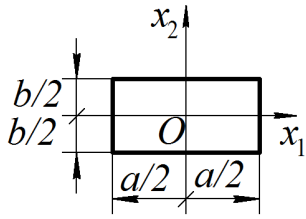


Рисунок 8.15 – Прямоугольное сечение

Сечение имеет две оси симметрии. Если начало координат поместить в центре прямоугольника (рисунок 8.15), то уравнения сторон можно записать в виде

$$x_1 \pm \frac{a}{2} = 0; \quad x_2 \pm \frac{b}{2} = 0,$$

где  $a$  и  $b$  – размеры сторон. Составив функцию  $\Omega$  согласно (8.90), будем иметь

$$\Omega(x_1, x_2) = \left( x_1^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left( x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Зададимся функцией напряжений в простейшем виде

$$\varphi(x_1, x_2) = a_1 f_1(x_1, x_2),$$

где

$$f_1(x_1, x_2) = \Omega(x_1, x_2) = \left( x_1^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left( x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right).$$

Найдя производные

$$f_{1,1} = 2x_1 \left( x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right); \quad f_{1,2} = \left( x_1^2 - \frac{a^2}{4} \right) 2x_2,$$

по формуле (8.84) вычисляем

$$\begin{aligned} B_{11} &= \int_A (f_{1,1}^2 + f_{1,2}^2) dA = 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} \left[ 4x_1^2 \left( x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 + 4x_2^2 \left( x_1^2 - \frac{a^2}{4} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 = \\ &= 16 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} \left[ x_1^2 \left( x_2^4 - \frac{x_2^2 b^2}{2} + \frac{b^4}{16} \right) + x_2^2 \left( x_1^4 - \frac{x_1^2 a^2}{2} + \frac{a^4}{16} \right) \right] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Введя обозначение

$$\gamma = \frac{a}{b},$$

для  $B_{11}$  можно получить выражение

$$B_{11} = \frac{1 + \gamma^2}{90} a^3 b^5.$$

Далее, согласно (8.85) имеем

$$c_1 = 2 \int_A f_1 dA = 2 \cdot 4 \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} \left( x_1^2 - \frac{a^2}{4} \right) \left( x_2^2 - \frac{b^2}{4} \right) dx_1 dx_2.$$

После интегрирования получаем

$$c_1 = \frac{a^3 b^3}{18}.$$

Коэффициент  $a_1$  оказывается равным

$$a_1 = \frac{c_1}{B_{11}} = \frac{5}{(1 + \gamma^2) b^2}.$$

В соответствии с (8.87) вычисляем константу Сен-Венана:

$$I_k = a_1 c_1 = \frac{5\gamma^2}{18(1 + \gamma^2)} ab^3.$$

В частности, для квадратного сечения ( $\gamma = 1$ ) находим

$$I_k = \frac{5}{36} a^4 \approx 0,1389 a^4,$$

что на 1,2% ниже точного значения  $0,1406 a^4$ .

Для сечения, отличного от квадратного, погрешность определения  $I_k$  возрастает. Так, для  $\gamma = 2$  она составляет 3%, а для  $\gamma = 3$  – уже 9%.

Напряжения находим в соответствии с формулами (8.88):

$$\sigma_{31} = \frac{M}{I_k} a_1 f_{1,2}; \quad \sigma_{32} = -\frac{M}{I_k} a_1 f_{1,1}.$$

Максимальное касательное напряжение возникает в середине длинной стороны. Если  $a \geq b$ , то

$$\tau_{\max} = \left| \sigma_{31} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{2}}} = \left| \frac{M}{I_k} a_1 f_{1,2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{2}}}.$$

Подставив сюда соответствующие выражения, представим результат в виде

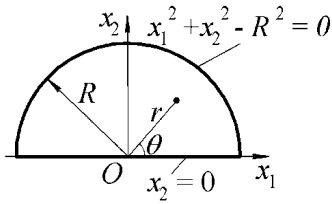
$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_k},$$

где

$$W_k = \frac{2}{9} ab^2 = 0,222 ab^2.$$

Для квадратного сечения этот результат превышает точное значение  $W_k = 0,208a^3$  почти на 7%.

### 8.16.2 Стержень полукруглого сечения



На рисунке 8.16 показана система координат и приведены уравнения полуокружности и прямой, ограничивающих сечение. Функция  $\Omega$  имеет здесь вид

$$\Omega(x_1, x_2) = x_2(x_1^2 + x_2^2 - R^2).$$

Рисунок 8.16 – Полукруглое сечение

Примем для искомой функции  $\varphi$  выражение

$$\varphi(x_1, x_2) = a_1 f_1(x_1, x_2),$$

где

$$f_1(x_1, x_2) = \Omega(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^3 - x_2 R^2.$$

Производные от функции  $f_1$ :

$$f_{1,1} = 2x_1 x_2; \quad f_{1,2} = x_1^2 + 3x_2^2 - R^2.$$

Подставив эти выражения в формулы (8.84), (8.85) и воспользовавшись при интегрировании полярными координатами, можно получить

$$B_{11} = \frac{\pi R^6}{3}; \quad c_1 = -\frac{8R^5}{15}.$$

Коэффициент  $a_1$  получается равным

$$a_1 = -\frac{c_1}{B_{11}} = -\frac{8}{5\pi R}.$$

Согласно (8.87) находим константу Сен-Венана:

$$I_k = a_1 c_1 = \frac{64R^4}{75\pi} = 0,272R^4.$$

Эта величина на 9% меньше точного значения  $0,299R^4$ .

Заметим, что если исходить из двучленного представления функции  $\varphi$  в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = a_1 f_1(x_1, x_2) + a_2 f_2(x_1, x_2),$$

где

$$f_1(x_1, x_2) = \Omega(x_1, x_2); \quad f_2(x_1, x_2) = x_2 \Omega(x_1, x_2),$$

то величина  $I_k$  окажется равной  $0,295R^4$ , то есть погрешность составит всего 1,5%.

## 9 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 9.1 Дискретизация тела

Метод конечных элементов представляет собой приближённый метод решения задач теории упругости и строительной механики. Тело разбивается на небольшие подобласти относительно простой формы, называемые конечными элементами. Взаимодействие конечных элементов между собой по смежным поверхностям заменяется силами в отдельных точках – узлах (рисунок 9.1). Перемещения узлов принимаются в качестве неизвестных. Название метода связано с тем обстоятельством, что подобласти имеют хотя и малые, но всё же конечные размеры – в отличие от бесконечно малых элементов, фигурирующих при выводе дифференциальных уравнений равновесия.

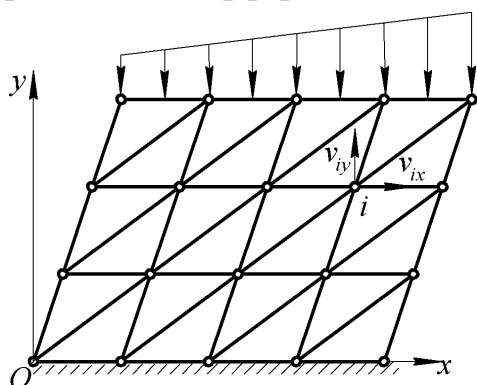


Рисунок 9.1 – Разбиение тела на конечные элементы

Если все нагрузки представить в виде сосредоточенных сил, приложенных в узлах, то связь между узловыми силами и узловыми перемещениями может быть записана в форме равенства типа

$$[P] = [K][v],$$

где  $[P]$ ,  $[v]$  – матрицы-столбцы узловых сил и узловых перемещений;  $[K]$  – матрица жёсткости данной системы. Если матрица жёсткости установлена, то это равенство

может быть использовано для нахождения узловых перемещений. Таким образом, сплошное тело, имеющее бесконечное число степеней свободы, заменяется дискретной системой с конечным числом степеней свободы, каковыми являются узловые перемещения.

Чтобы получить расчётные зависимости, необходимо найти ответы на следующие вопросы:

- как определить перемещения, деформации и напряжения в отдельном конечном элементе, если известны его узловые перемещения;
- как установить матрицы жёсткости каждого из конечных элементов;
- как заменить распределённые поверхностные и объёмные силы сосредоточенными узловыми;
- как объединить разрозненные конечные элементы в общую систему.

Решению этих проблем посвящено дальнейшее рассмотрение.

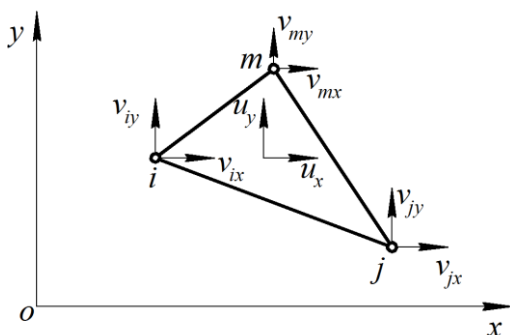
Независимо от типа и формы конечных элементов все этапы решения поддаются единому математическому описанию и имеют общий алгоритм, вследствие чего их можно сравнительно легко реализовать с помощью универсальных программных комплексов. Благодаря этому метод конечных элементов стал мощным средством решения разнообразных задач строительной механики и прочности конструкций, а также других задач математической физики.

## 9.2 Перемещения, деформации и напряжения конечного элемента

Предположим, что все конечные элементы, на которые разбито тело, и все узлы пронумерованы определённым образом. Пусть узлы типового конечного элемента имеют номера  $i, j, \dots, m$ . Обозначим через  $[v_i], [v_j], \dots, [v_m]$  матрицы-столбцы перемещений соответствующих узлов. Количество узлов, принадлежащих конечному элементу, и количество перемещений в каждом узле могут быть различными в разных задачах. На рисунке 9.2 показан, например, треугольный конечный элемент двумерной области с тремя узлами в вершинах. В случае обобщённого плоского напряжённого состояния или в случае плоской деформации каждый узел может перемещаться в плоскости  $xu$ , так что матрицы перемещений узлов будут содержать по две компоненты, например:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}.$$

В случае трёхмерного тела компонентами матриц  $[v_i], [v_j], \dots$  будут перемещения узлов в направлении всех трёх осей  $x, y, z$ ; количество самих узлов зависит от формы и типа элемента.



**Рисунок 9.2 – Треугольный конечный элемент двумерной области**

Все узловые перемещения конечного элемента представим матрицей

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \dots \\ v_j \\ \dots \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее верхним индексом «e» помечаются величины, относящиеся к отдельному типовому элементу. Такие же ве-



личины, но без этого индекса, имеют отношение ко всей конечно-элементной системе в целом. Индекс «e» будем опускать, когда соответствующая величина определена только для конечного элемента, но не для всей системы. Штриховые разделительные линии означают, что данная матрица является блочной, то есть она составлена из подматриц.

Перемещения произвольной точки конечного элемента в направлении координатных осей представим матрицей-столбцом  $[u]$ . В пространственной задаче она будет содержать компоненты  $u_x, u_y, u_z$ , а в плоской задаче (см. рисунок 9.2) – две из них:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

Ясно, что компоненты матрицы  $[u]$  являются функциями координат.

В основе метода конечных элементов лежит предположение о том, что *узловые перемещения  $[v^e]$  однозначно определяют перемещения  $[u]$  в каждой точке конечного элемента.* Зависимость, устанавливающая связь  $[u]$  с  $[v^e]$ , будем представлять стандартным соотношением вида

$$[u] = [\alpha][v^e], \quad (9.1)$$

где  $[\alpha]$  – прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы  $[u]$ , а количество столбцов – числу компонент матрицы  $[v^e]$ . Элементами  $[\alpha]$  являются некоторые функции координат. Для их нахождения необходимо сделать те или иные предположения относительно характера изменения перемещений в пределах конечного элемента. Необходимые подробности для некоторых конечных элементов будут представлены ниже.

Если матрица  $[\alpha]$  установлена, то с помощью формул Коши можно связать деформации с узловыми перемещениями, представив эту связь в следующей стандартной форме:

$$[\varepsilon] = [\beta][v^e]. \quad (9.2)$$

Здесь  $[\varepsilon]$  – матрица-столбец, содержащая список тех деформаций, которые могут возникнуть в данном конечном элементе; компоненты прямоугольной матрицы  $[\beta]$  получаются из элементов матрицы  $[\alpha]$  в соответствии с формулами Коши.

Например, в случае плоской задачи равенство (9.1) может быть представлено в форме

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} [v^e],$$

где  $[\alpha_x]$  и  $[\alpha_y]$  – строки матрицы  $[\alpha]$ . Отсюда вытекают соотношения

$$[u_x] = [\alpha_x][v^e]; \quad [u_y] = [\alpha_y][v^e].$$

Деформации в плоской задаче связаны с  $u_x$  и  $u_y$  формулами

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

на основании которых получаем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial [\alpha_x]}{\partial x} [v^e]; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial [\alpha_y]}{\partial y} [v^e]; \quad \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial [\alpha_x]}{\partial y} + \frac{\partial [\alpha_y]}{\partial x} \right) [v^e].$$

Понимая в этом случае под  $[\varepsilon]$  матрицу-столбец

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

приходим к соотношению вида (9.2), в котором

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

Воспользовавшись далее законом Гука в форме

$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon],$$

получим и зависимость напряжений от узловых перемещений:

$$[\sigma] = [\kappa][\beta][v^e], \quad (9.4)$$

где  $[\sigma]$  – матрица-столбец напряжений, которая имеет тот же размер, что и матрица  $[\varepsilon]$ . Вид матрицы  $[\kappa]$  зависит от типа напряжённо-деформированного состояния. Например, в случае обобщённого плоского напряжённого состояния формулы закона Гука записываются так:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}); \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}); \quad \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

Принимая в этом случае в качестве  $[\sigma]$  матрицу

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix},$$

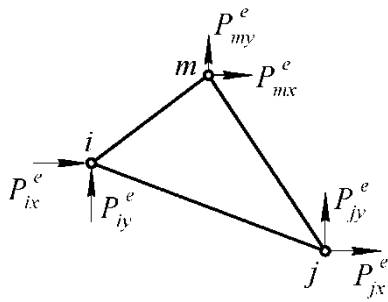
приходим к искомой зависимости  $[\sigma] = [k][\varepsilon]$ , в которой

$$[k] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Как видим, *напряжённо-деформированное состояние конечного элемента однозначно определяется его узловыми перемещениями, если построена подходящая матрица  $[\alpha]$ .*

### 9.3 Матрица жёсткости конечного элемента

Конечный элемент испытывает действие внешних нагрузок, приложенных к телу, а также действие напряжений со стороны смежных конечных элементов. Предположим, что все силы, распределённые по объёму и поверхности конечного элемента, заменены некоторыми статически эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в его узлах в направлении узловых перемещений, как в качестве примера показано на рисунке 9.3 применительно к случаю плоского треугольного конечного элемента. Перечисляя узловые силы в том же порядке, что и перемещения в матрице  $[v^e]$ , составим матрицу-столбец



**Рисунок 9.3 – Узловые силы для плоского треугольного конечного элемента**

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ \dots \\ P_j^e \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ P_m^e \end{bmatrix},$$

где  $[P_i^e]$ ,  $[P_j^e]$ , ...,  $[P_m^e]$  – матрицы сил в узлах конечного элемента.

Основываясь на полученных выше соотношениях, можно установить зависимость между узловыми силами и узловыми перемещениями, которая, по существу, выражает условие равновесия конечного элемента при заданных узловых перемещениях. Выведем данную зависимость, воспользовавшись условием равенства потенциальной энергии деформации  $U^e$  работе узловых сил  $A^e$  конечного элемента.

Потенциальная энергия деформации определяется по формуле

$$U^e = \int_{\tau^e} W d\tau,$$

где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации; интегрирование выполняется по объёму конечного элемента. Для  $W$  ранее было получено соотношение, которое в тензорной записи представлено равенством (3.18). В матричной форме это равенство имеет вид

$$W = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma].$$

Подставив сюда выражения (9.2) и (9.4), запишем

$$W = \frac{1}{2} [v^e]^T [\beta]^T [\kappa] [\beta] [v^e].$$

Интегрирование по объёму конечного элемента приводит к соотношению

$$U^e = \frac{1}{2} [v^e]^T [K^e] [v^e], \quad (9.6)$$

где  $[K^e]$  – квадратная симметричная матрица, определяемая равенством

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau. \quad (9.7)$$

Узловые силы  $[P^e]$  на перемещениях  $[v^e]$  производят работу

$$A^e = \frac{1}{2} [v^e]^T [P^e]. \quad (9.8)$$

Приравнивая правые части выражений (9.6) и (9.8) и учитывая, что равенство должно выполняться для любых узловых перемещений, получаем зависимость

$$[P^e] = [K^e][v^e]. \quad (9.9)$$

Она связывает узловые силы и перемещения в той же стандартной форме, что и в случае элемента стержневой системы в матричном методе перемещений. Матрица  $[K^e]$  есть *матрица жёсткости конечного элемента*.

Принимая во внимание блочную структуру матрицы

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \dots \\ v_j \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix},$$

матрицы  $[\alpha]$  и  $[\beta]$  в формулах (9.1) и (9.2) можно также представить в блочной форме:

$$[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \dots \mid \alpha_m];$$

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \dots \mid \beta_m].$$

Тогда и матрица жёсткости будет иметь блочную структуру

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & \dots & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & \dots & K_{jm}^e \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & \dots & K_{mm}^e \end{bmatrix},$$

где типовая подматрица  $[K_{rs}^e]$  вычисляется по формуле

$$[K_{rs}^e] = \int_{\tau^e} [\beta_r]^T [\kappa][\beta_s] d\tau. \quad (9.10)$$

Подчеркнём, что нижние индексы в обозначении матрицы  $[K_{rs}^e]$  обозначают номера узлов, а не номера строк и столбцов в матрице  $[K^e]$ .

## 9.4 Объединение конечных элементов и определение узловых перемещений

Рассмотрим далее тело, разбитое на конечные элементы. Предположим, что в узловых точках действуют сосредоточенные силы в направлении узловых перемещений. Обозначим через  $[v]$  матрицу всех узловых перемещений тела, а через  $[P]$  – матрицу соответствующих сил:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix},$$

где  $[P_i]$  – матрица сил в узле  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ );  $n$  – общее число узлов конечно-элементной модели тела.

Так же, как и в случае отдельного конечного элемента, матрицы  $[v]$  и  $[P]$  можно связать между собой зависимостью вида

$$[P] = [K][v]. \quad (9.11)$$

Здесь  $[K]$  – квадратная матрица, представляющая собой матрицу жёсткости всего тела. Она может быть вычислена, если известны матрицы жёсткости конечных элементов, составляющих тело. Чтобы получить необходимые соотношения, представим зависимость (9.11) в блочной форме:

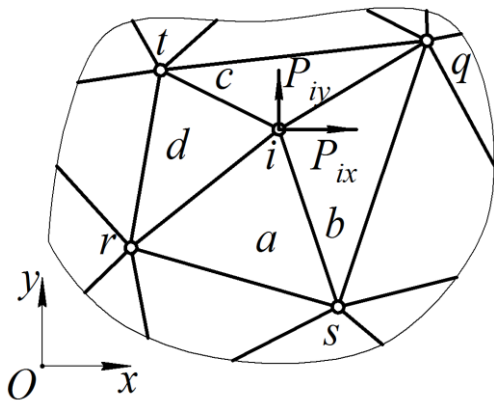
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает равенство, выражающее связь матрицы сил узла  $i$  с узловыми перемещениями:

$$[P_i] = [K_{i1}][v_1] + \dots + [K_{ij}][v_j] + \dots + [K_{in}][v_n]. \quad (9.12)$$

Для нахождения входящих сюда подматриц  $[K_{i1}]$ , ...,  $[K_{in}]$  рассмотрим равновесие узла  $i$ . На рисунке 9.4 показан в качестве примера фрагмент пластины, разбитой на треугольные конечные элементы. В узле  $i$ , где сходятся четыре конечных элемента ( $a, b, c$  и  $d$ ), действуют внешние силы  $P_{ix}$  и  $P_{iy}$ . Через

$r, s, q$  и  $t$  обозначены номера узлов, принадлежащих конечным элементам, которые окружают узел  $i$ .



**Рисунок 9.4 – Фрагмент конечно-элементной модели пластины**

Отделив мысленно конечные элементы друг от друга, покажем силы, которые действуют в узле  $i$  каждого из конечных элементов (рисунок 9.5).

Очевидно, имеют место соотношения статики

$$P_{ix}^a + P_{ix}^b + P_{ix}^c + P_{ix}^d = P_{ix};$$

$$P_{iy}^a + P_{iy}^b + P_{iy}^c + P_{iy}^d = P_{iy}.$$

Здесь верхний индекс указывает, к какому конечному элементу относится данная величина.

Учитывая, что в рассматриваемом примере

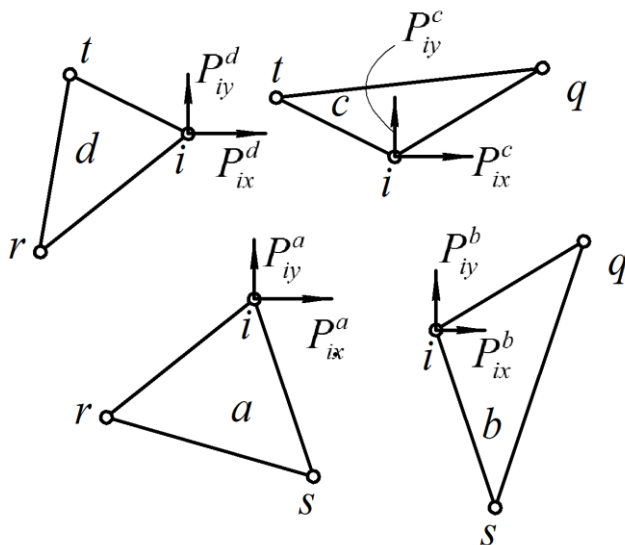
$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{bmatrix},$$

запишем последние два равенства в виде одного матричного:

$$[P_i] = [P_i^a] + [P_i^b] + [P_i^c] + [P_i^d].$$

Матрицы сил в правой части последнего соотношения выражаются через узловые перемещения соответствующих конечных элементов согласно равенствам вида

$$[P^e] = [K^e][v^e].$$



**Рисунок 9.5 – Силы, действующие в узле  $i$  на отдельные конечные элементы**

Например, для конечного элемента  $a$  это равенство запишется так:

$$[P^a] = [K^a][v^a]$$

или в блочной форме,

$$\begin{bmatrix} P_i^a \\ P_r^a \\ P_s^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^a & K_{ir}^a & K_{is}^a \\ K_{ri}^a & K_{rr}^a & K_{rs}^a \\ K_{si}^a & K_{sr}^a & K_{ss}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_r \\ v_s \end{bmatrix}.$$

Отсюда имеем следующую связь матрицы  $[P_i^a]$  с узловыми перемещениями:

$$[P_i^a] = [K_{ii}^a][v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [K_{is}^a][v_s].$$

Точно так же устанавливаем зависимости

$$[P_i^b] = [K_{ii}^b][v_i] + [K_{is}^b][v_s] + [K_{iq}^b][v_q];$$

$$[P_i^c] = [K_{ii}^c][v_i] + [K_{iq}^c][v_q] + [K_{it}^c][v_t];$$

$$[P_i^d] = [K_{ii}^d][v_i] + [K_{it}^d][v_t] + [K_{ir}^d][v_r].$$

Складывая далее матрицы  $[P_i^e]$ , приходим к искомому соотношению, устанавливающему связь  $[P_i]$  с узловыми перемещениями:

$$\begin{aligned} [P_i] = & \left( [K_{ii}^a] + [K_{ii}^b] + [K_{ii}^c] + [K_{ii}^d] \right) [v_i] + \\ & + \left( [K_{ir}^a] + [K_{ir}^d] \right) [v_r] + \left( [K_{is}^a] + [K_{is}^b] \right) [v_s] + \\ & + \left( [K_{iq}^b] + [K_{iq}^c] \right) [v_q] + \left( [K_{it}^c] + [K_{it}^d] \right) [v_t]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Сопоставление данного выражения с равенством (9.12) позволяет установить правила вычисления подматриц  $[K_{ij}]$  общей матрицы жёсткости. Во-первых, мы видим, что в (9.13) отсутствуют перемещения тех узлов, которые не связаны с узлом  $i$  непосредственно каким-либо конечным элементом. Отсюда следует, что  $[K_{ij}] = [0]$ , если узлы  $i$  и  $j$  не принадлежат одновременно никакому конечному элементу. Если же имеются конечные элементы, которым принадлежат узлы  $i$  и  $j$ , то  $[K_{ij}] = \sum [K_{ij}^e]$ , где суммирование производится по этим конечным элементам. Диагональная матрица  $[K_{ii}]$ , фигурирующая в качестве множителя при  $[v_i]$ , определяется как сумма  $[K_{ii}] = \sum [K_{ii}^e]$ , где суммирование выполняется по конечным элементам, сходящимся в узле  $i$ . Все указанные случаи можно объединить общей формулой

$$[K_{ij}] = \sum_e [K_{ij}^e], \quad (9.14)$$

где суммирование формально распространяется на все конечные элементы, фактически же оно затрагивает лишь те из них, для которых определены подматрицы  $[K_{ij}^e]$ , то есть которым одновременно принадлежат узлы  $i$  и  $j$ .

Для нахождения узловых перемещений необходимо исключить из равенства (9.11) нулевые перемещения тех узлов, которые имеют закрепления. Представим для этого матрицы перемещений и сил в виде



$$[v] = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix},$$

где матрица  $[v_\alpha]$  содержит список неизвестных перемещений, подлежащих отысканию, а  $[P_\alpha]$  есть матрица соответствующих внешних сил. В матрице

$$[v_\beta] = [0]$$

перечисляются нулевые перемещения закреплённых узлов, а  $[P_\beta]$  есть матрица сил в направлении данных перемещений, то есть это матрица реакций на наложенные связи. Матрицу жёсткости системы также представим в блочной форме, придав тем самым соотношению между узловыми перемещениями и силами следующий вид:

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекают два равенства:

$$\begin{aligned} [K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] + [K_{\alpha\beta}][v_\beta] &= [P_\alpha]; \\ [K_{\beta\alpha}][v_\alpha] + [K_{\beta\beta}][v_\beta] &= [P_\beta]. \end{aligned}$$

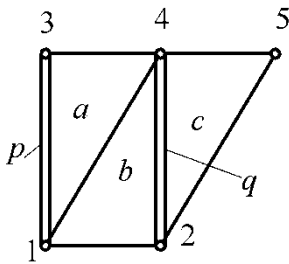
Поскольку  $[v_\beta] = [0]$ , первое из них приводит к искомому уравнению

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] = [P_\alpha] \quad (9.15)$$

для определения неизвестных перемещений, а второе может быть использовано для нахождения  $[P_\alpha]$ . Фигурирующая здесь матрица  $[K_{\alpha\alpha}]$ , называемая *сокращённой матрицей жёсткости*, может быть получена из полной матрицы  $[K]$  вычёркиванием строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям. На практике удобнее учесть закрепления на стадии вычисления матрицы жёсткости, сразу формируя  $[K_{\alpha\alpha}]$  вместо  $[K]$ .

Если тело не закреплено, оно может иметь произвольные перемещения в пространстве без деформации, и однозначное определение узловых перемещений из уравнения  $[K][v] = [P]$  будет невозможно: матрица жёсткости для незакреплённого тела является вырожденной. В этом случае необходимо закрепить тело статически определимым образом, наложив минимально необходимое число связей для устранения подвижности. Тем самым дело будет снова сведено к решению матричного уравнения вида (9.15).

Решив систему уравнений (9.15), найдём неизвестные узловые перемещения, после чего могут быть вычислены деформации и напряжения в каждом конечном элементе.



**Рисунок 9.6 – Конечно-элементная модель пластины с подкрепляющими рёбрами**

Поясним схему формирования матрицы жёсткости простым примером. На рисунке 9.6 показана конечно-элементная модель пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости. Модель имеет пять узлов и включает три конечных элемента пластины треугольной формы с узлами в вершинах (элементы  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) и два стержневых конечных элемента ( $p$  и  $q$ ) с узлами по концам.

Пусть найдены матрицы жёсткости отдельных конечных элементов. Они имеют блочную структуру типа

$$[K^a] = \begin{bmatrix} K_{11}^a & K_{13}^a & K_{14}^a \\ K_{31}^a & K_{33}^a & K_{34}^a \\ K_{41}^a & K_{43}^a & K_{44}^a \end{bmatrix};$$

$$[K^q] = \begin{bmatrix} K_{22}^q & K_{24}^q \\ K_{42}^q & K_{44}^q \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

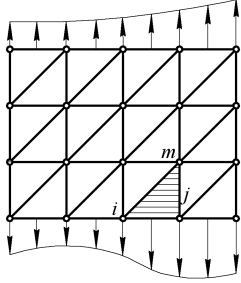
Матрица жёсткости данной системы, имеющая в блочном виде размер  $5 \times 5$ , согласно (9.14) формируется по следующей схеме:

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} K_{11}^a + K_{11}^b + K_{11}^p & & K_{12}^b & & K_{13}^a + K_{13}^p & & K_{14}^a + K_{14}^b & & 0 \\ K_{21}^b & & K_{22}^b + K_{22}^c + K_{22}^q & & 0 & & K_{24}^b + K_{24}^c + K_{24}^q & & K_{25}^c \\ K_{31}^a + K_{31}^p & & 0 & & K_{33}^a + K_{33}^p & & K_{34}^a & & 0 \\ K_{41}^a + K_{41}^b & & K_{42}^b + K_{42}^c + K_{42}^q & & K_{43}^a & & K_{44}^a + K_{44}^b + K_{44}^c + K_{44}^q & & K_{45}^c \\ 0 & & K_{52}^c & & 0 & & K_{54}^c & & K_{55}^c \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

### 9.5 Приведение распределённых внешних нагрузок к эквивалентным узловым силам

Пусть помимо сосредоточенных сил, приложенных в узловых точках, тело нагружено объёмными  $[R] = [R_x \ R_y \ R_z]^T$  и поверхностными  $[p] = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  силами. Чтобы заменить распределённые силы сосредоточен-

ными узловыми, рассмотрим вначале отдельный конечный элемент. Будем предполагать для общности, что часть поверхности элемента совпадает с внешней поверхностью, ограничивающей тело (заштрихованный элемент на рисунке 9.7). Это позволяет включить в рассмотрение как объёмные, так и поверхностные силы.



**Рисунок 9.7 – К расчёту эквивалентных узловых сил**  
поверхности, являющемуся общим с той частью поверхности тела, на которой заданы поверхностные нагрузки.

Объёмные и поверхностные силы в пределах конечного элемента совершают работу

$$A^e = \frac{1}{2} \left( \int_{\tau^e} [u]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [u]^T [p] d\omega \right),$$

где первый интеграл берётся по объёму  $\tau^e$  конечного элемента, а второй – по участку  $\omega_p^e$  его поверхности,

являющемуся общим с той частью поверхности тела, на которой заданы поверхностные нагрузки.

Подставив сюда выражение (9.1) для  $[u]$ , получим

$$A^e = \frac{1}{2} [v^e]^T \left( \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [\alpha]^T [p] d\omega \right).$$

Пусть, далее, вместо распределённых действуют сосредоточенные узловые силы, приложенные в узлах конечного элемента в направлении узловых перемещений и составляющие матрицу

$$[\tilde{P}^e] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_i^e \\ \vdots \\ \tilde{P}_j^e \\ \vdots \\ \tilde{P}_m^e \end{bmatrix}.$$

На перемещениях  $[v^e]$  они произведут работу

$$\tilde{A}^e = \frac{1}{2} [v^e]^T [\tilde{P}^e].$$

Будем считать, что силы  $[\tilde{P}^e]$  эквивалентны заданной внешней нагрузке, если  $\tilde{A}^e = A^e$ . Так как это равенство должно соблюдаться при любых узловых перемещениях, приходим к соотношению

$$[\tilde{P}^e] = \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [\alpha]^T [p] d\omega. \quad (9.16)$$

С учётом блочной структуры матрицы  $[\alpha]$  можно получить выражение для вычисления типового блока  $[\tilde{P}_r^e]$  матрицы  $[\tilde{P}^e]$ , относящегося к какому-либо узлу  $r$  данного конечного элемента:

$$[\tilde{P}_r^e] = \int_{\tau^e} [\alpha_r]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [\alpha_r]^T [p] d\omega. \quad (9.17)$$

Формула (9.17) определяет тот вклад, который вносит данный конечный элемент в эквивалентные узловые силы в узле  $r$  тела. Аналогично выполняется приведение распределённых нагрузок к эквивалентным узловым силам и для других конечных элементов. Заметим, что если конечный элемент находится целиком внутри тела, то вторые слагаемые в формулах (9.16), (9.17) будут для него отсутствовать.

Если далее просуммировать вклады всех конечных элементов, сходящихся в узле  $r$ , то получим *матрицу эквивалентных узловых сил* в этом узле

$$[\tilde{P}_r] = \sum_e [\tilde{P}_r^e],$$

где суммирование формально производится по всем конечным элементам, но фактически оно затрагивает лишь те из них, которые сходятся в узле  $r$  (то есть те, для которых определены матрицы  $[\tilde{P}_r^e]$ ).

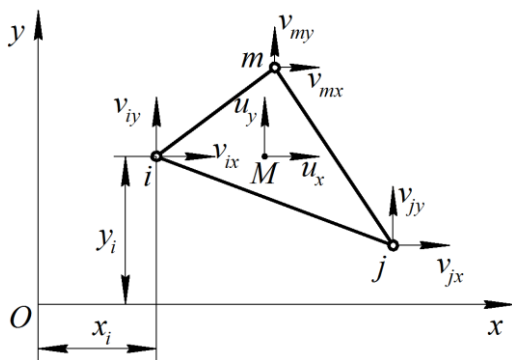
Таким образом, при действии внеузловой нагрузки она заменяется статически эквивалентными узловыми силами, которые необходимо добавить к имеющимся сосредоточенным узловым силам. В дальнейшем будем предполагать, что фигурирующие в соотношениях типа (9.11) узловые силы  $[P]$  включают силы, эквивалентные внеузловой нагрузке.

## 9.6 Плоский треугольный конечный элемент

Простейшим конечным элементом, применяемым для решения плоской задачи теории упругости, является плоский треугольный элемент с узлами в вершинах (рисунок 9.8). Геометрия элемента определяется координатами его узлов  $x_i, y_i; x_j, y_j; x_m, y_m$ .

Матрицы сил и перемещений для каждого узла состоят из двух компонент. Так, для узла  $i$  имеем

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \end{bmatrix}.$$



**Рисунок 9.8 – Плоский треугольный конечный элемент**  
компоненты:

При составлении матриц  $[v^e]$  и  $[P^e]$  для всего конечного элемента условимся обходить узлы против часовой стрелки; тогда

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}; \quad [P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ \vdots \\ P_j^e \\ \vdots \\ P_m^e \end{bmatrix}.$$

Матрица перемещений произвольной точки  $M$  конечного элемента имеет две

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}.$$

Чтобы выразить  $[u]$  через  $[v^e]$ , предположим, что перемещения  $u_x$  и  $u_y$  изменяются в пределах элемента по линейному закону:

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y; \quad u_y = f_4 + f_5x + f_6y, \quad (9.18)$$

где  $f_k$  – некоторые постоянные. В вершинах треугольника  $u_x$  и  $u_y$  должны совпадать с соответствующими узловыми перемещениями:

$$u_x = v_{ix}, \quad u_y = v_{iy} \quad \text{при } x = x_i, \quad y = y_i;$$

$$u_x = v_{jx}, \quad u_y = v_{jy} \quad \text{при } x = x_j, \quad y = y_j;$$

$$u_x = v_{mx}, \quad u_y = v_{my} \quad \text{при } x = x_m, \quad y = y_m.$$

Отсюда получаем шесть уравнений, связывающих постоянные  $f_k$  с узловыми перемещениями. Уравнения распадаются на две группы, в первую из которых войдут постоянные  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ , а во вторую –  $f_4$ ,  $f_5$  и  $f_6$ .

Первая группа уравнений имеет вид

$$f_1 + f_2x_i + f_3y_i = v_{ix};$$

$$f_1 + f_2x_j + f_3y_j = v_{jx};$$

$$f_1 + f_2x_m + f_3y_m = v_{mx}.$$

Записывая решение данной системы по правилу Крамера, получаем выражение

$$f_1 = \frac{1}{2F^e} (a_i v_{ix} + a_j v_{jx} + a_m v_{mx});$$

$$f_2 = \frac{1}{2F^e} (b_i v_{ix} + b_j v_{jx} + b_m v_{mx});$$

$$f_3 = \frac{1}{2F^e} (c_i v_{ix} + c_j v_{jx} + c_m v_{mx}),$$

где

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j; \quad b_i = y_j - y_m; \quad c_i = x_m - x_j; \quad (9.19)$$

остальные коэффициенты получаются круговой заменой индексов по схеме  $i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow i$ . Величина  $F^e$  представляет собой площадь треугольника  $ijm$ ; через координаты узлов она выражается так:

$$2F^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = a_i + a_j + a_m. \quad (9.20)$$

Подставив найденные выражения в формулу для  $u_x$ , после соответствующей группировки слагаемых получаем

$$u_x = \frac{1}{2F^e} [(a_i + b_i x + c_i y) v_{ix} + (a_j + b_j x + c_j y) v_{jx} + (a_m + b_m x + c_m y) v_{mx}].$$

Аналогичным образом устанавливаем связь перемещения  $u_y$  с его узловыми значениями  $v_{iy}, v_{jy}, v_{my}$ .

Если ввести обозначение

$$\psi_r = \frac{1}{2F^e} (a_r + b_r x + c_r y) \quad (r = i, j, m), \quad (9.21)$$

то полученные результаты могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{mx} \\ v_{my} \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает искомое представление перемещений

$$[u] = [\alpha][v^e],$$

где

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_m \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $[\alpha]$  можно записать в блочной форме

$$[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \alpha_m],$$

где типовой блок

$$[\alpha_r] = \begin{bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m).$$

Выделим далее в матрице  $[\alpha]$  строки  $[\alpha_x]$  и  $[\alpha_y]$  и вычислим матрицу  $[\beta]$  согласно (9.3):

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица  $[\alpha]$  представлена в блочной форме, такую же структуру будет иметь и матрица  $[\beta]$ :

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_m].$$

Здесь типовой блок

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F^e} \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{bmatrix}. \quad (9.22)$$

Как видим, элементы матрицы  $[\beta]$  не зависят от координат. Это означает, что деформации (и, следовательно, напряжения) в пределах рассматриваемого конечного элемента постоянны. При переходе от одного конечного элемента к другому они изменяются скачкообразно.

Если моделируемое тело представляет собой пластину, то будем иметь дело с обобщённым плоским напряжённым состоянием, для которого матрица упругости  $[k]$  имеет вид (9.5):

$$[k] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

По общей формуле

$$[K^e] = \int_{\tau^e} [\beta]^T [\kappa] [\beta] d\tau$$

теперь можно найти матрицу жёсткости рассматриваемого элемента. В данном случае подынтегральное выражение не зависит от координат и может быть вынесено за знак интеграла. Если  $h$  – толщина пластины, то объём элемента  $\tau^e = hF^e$ . Таким образом,

$$[K^e] = [\beta]^T [\kappa] [\beta] \int_{\tau^e} d\tau = hF^e [\beta]^T [\kappa] [\beta] \quad (9.23)$$

или

$$[K^e] = hF^e \begin{bmatrix} \beta_i^T \\ \beta_j^T \\ \beta_m^T \end{bmatrix} [\kappa] \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$[K_{rs}^e] = hF^e [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] \quad (r = i, j, m). \quad (9.24)$$

В случае плоской деформации матрица жёсткости рассчитывается на единицу длины тела. Выражение для неё можно получить по формулам (9.19)...(9.24), приняв в них  $h=1$  и заменив в матрице  $[\kappa]$  модуль упругости  $E$  на  $E/(1-\mu^2)$ , а коэффициент Пуассона  $\mu$  – на  $\mu/(1-\mu)$ .

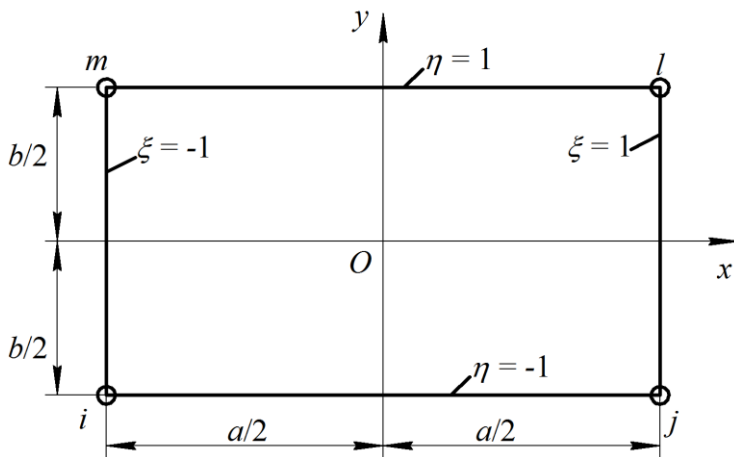
Достоинством рассмотренного элемента является его простота. Но поскольку напряжения в пределах треугольника постоянны, для получения достаточно подробного представления поля напряжений приходится часто использовать весьма густую сетку.

## 9.7 Плоский прямоугольный конечный элемент с билинейным полем перемещений

Рассмотрим далее плоский прямоугольный элемент с узлами в вершинах (рисунок 9.9). Начало системы координат поместим в центре прямоугольника и введём безразмерные координаты

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b},$$





**Рисунок 9.9 – Плоский прямоугольный конечный элемент**

где  $a$  и  $b$  – стороны прямоугольника. На каждой из сторон параметры  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения 1 или -1, как указано на рисунке 9.9.

Для приближённого представления поля перемещений конечного элемента используем билинейную зависимость  $u_x$  и  $u_y$  от координат:

$$\begin{aligned} u_x &= f_1 + f_2\xi + f_3\eta + f_4\xi\eta; \\ u_y &= f_5 + f_6\xi + f_7\eta + f_8\xi\eta. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Количество постоянных в этих равенствах совпадает с числом узловых перемещений, что позволяет установить однозначную связь между ними. Поступим так же, как и в случае треугольного элемента, приравняв в каждом узле перемещения  $u_x$  и  $u_y$  к их узловым значениям. Мы снова придём к двум группам уравнений, первая из которых связывает постоянные  $f_1 \dots f_4$  с  $v_{rx}$ , а вторая связывает постоянные  $f_5 \dots f_8$  с  $v_{ry}$  ( $r = i, j, m$ ). Первая группа уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 - f_3 + f_4 &= v_{ix}; \\ f_1 + f_2 - f_3 - f_4 &= v_{jx}; \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= v_{lx}; \\ f_1 - f_2 + f_3 - f_4 &= v_{mx}. \end{aligned}$$

Решение данной системы легко получить, используя подходящие линейные комбинации указанных уравнений:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}(v_{ix} + v_{jx} + v_{lx} + v_{mx}); \\ f_2 &= \frac{1}{4}(-v_{ix} + v_{jx} + v_{lx} - v_{mx}); \\ f_3 &= \frac{1}{4}(-v_{ix} - v_{jx} + v_{lx} + v_{mx}); \\ f_4 &= \frac{1}{4}(v_{ix} - v_{jx} + v_{lx} - v_{mx}). \end{aligned}$$

Подставив полученные значения в формулу для  $u_x$  и сгруппировав соответствующим образом слагаемые, придём к следующему соотношению:

$$u_x = \psi_i v_{ix} + \psi_j v_{jx} + \psi_l v_{lx} + \psi_m v_{mx}, \quad (9.26)$$

где через  $\psi_r(\xi, \eta)$  ( $r = i, j, l, m$ ) обозначены четыре функции координат, которые могут быть представлены единым выражением

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta). \quad (9.27)$$

Узловые значения координат  $\xi_r, \eta_r$  понятны из рисунка 9.9. Подобным же образом выводится соотношение

$$u_y = \psi_i v_{iy} + \psi_j v_{jy} + \psi_l v_{ly} + \psi_m v_{my}. \quad (9.28)$$

Объединяя найденные выражения для  $u_x$  и  $u_y$ , устанавливаем искомую зависимость  $[u] = [\alpha][v^e]$ , где

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}; \quad [v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_l \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Матрица  $[\alpha]$  имеет здесь следующую структуру:

$$[\alpha] = [\alpha_i \mid \alpha_j \mid \alpha_l \mid \alpha_m],$$

где

$$[\alpha_r] = \begin{bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{bmatrix} \quad (r = i, j, l, m). \quad (9.29)$$

По формуле (9.3) находим матрицу  $[\beta]$ . Так же, как и матрица  $[\alpha]$ , она будет иметь блочную форму

$$[\beta] = [\beta_i \mid \beta_j \mid \beta_l \mid \beta_m],$$

где на основании (9.29) типовая подматрица

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{b} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

в соответствии с (9.27) будем иметь

$$[\beta_r] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\xi_r}{a}(1 + \eta_r \eta) & 0 \\ 0 & \frac{\eta_r}{b}(1 + \xi_r \xi) \\ \frac{\eta_r}{b}(1 + \xi_r \xi) & \frac{\xi_r}{a}(1 + \eta_r \eta) \end{bmatrix}. \quad (9.30)$$

Теперь вычисляем матрицу жёсткости

$$[K^e] = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{il}^e & K_{im}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jl}^e & K_{jm}^e \\ K_{li}^e & K_{lj}^e & K_{ll}^e & K_{lm}^e \\ K_{mi}^e & K_{mj}^e & K_{ml}^e & K_{mm}^e \end{bmatrix}.$$

Её типовая подматрица даётся формулой 9.10)

$$[K_{rs}^e] = \int_{\tau^e} [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] d\tau.$$

Учитывая, что в случае пластины  $d\tau = habd\xi d\eta/4$ , переходим к интегрированию по безразмерным координатам:

$$[K_{rs}^e] = \frac{hab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] d\xi d\eta.$$

Матрица  $[\kappa]$  для обобщённого плоского напряжённого состояния определяется выражением (9.4). Представим её в виде суммы двух составляющих:

$$[\kappa] = [\kappa_E] + [\kappa_G]. \quad (9.31)$$

Здесь

$$[\kappa_E] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\kappa_G] = G \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.32)$$

Тогда и для  $[K_{rs}^e]$  будем иметь выражение

$$[K_{rs}^e] = [K_{rs,E}] + [K_{rs,G}], \quad (9.33)$$

где составляющие

$$[K_{rs,E}] = \frac{hab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa_E] [\beta_s] d\xi d\eta;$$

$$[K_{rs,G}] = \frac{hab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa_G] [\beta_s] d\xi d\eta$$

учитывают вклад нормальных деформаций и деформаций сдвига в матрицу жёсткости конечного элемента. Подстановка в подынтегральные выражения соотношений (9.30) и (9.32) позволяет после перемножения матриц и интегрирования получить формулы

$$[K_{rs,E}] = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \gamma \xi_r \xi_s \left(1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s\right) & \mu \xi_r \eta_s \\ \mu \eta_r \xi_s & \frac{1}{\gamma} \eta_r \eta_s \left(1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s\right) \end{bmatrix}; \quad (9.34)$$

$$[K_{rs,G}] = \frac{Gh}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} \eta_r \eta_s \left(1 + \frac{1}{3} \xi_r \xi_s\right) & \eta_r \xi_s \\ \xi_r \eta_s & \gamma \xi_r \xi_s \left(1 + \frac{1}{3} \eta_r \eta_s\right) \end{bmatrix}, \quad (9.35)$$

где через  $\gamma = b/a$  обозначено отношение сторон элемента.

В расчётах конструкций прямоугольные конечные элементы могут применяться, в частности, при моделировании тонких стенок в различных балочных структурах. Если изгиб происходит в плоскости стенки, то она будет испытывать деформации растяжения-сжатия, сдвига и изгиба. Но рассмотренный выше прямоугольный элемент не подходит для такого моделирования, так как он плохо воспроизводит состояние изгиба.

Вернувшись к формулам (9.25), перейдём в них к координатам  $x$ ,  $y$ :

$$u_x = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy;$$

$$u_y = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy,$$

где  $a_i$  – соответствующие коэффициенты. По формулам Коши имеем следующие выражения для деформаций:

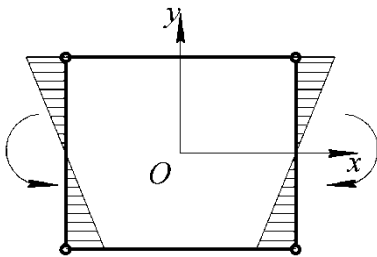


Рисунок 9.10 – Деформация  $\varepsilon_{xx}$  при чистом изгибе

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_2 + a_4 y; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = a_7 + a_8 x;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = a_3 + a_6 + a_4 x + a_8 y.$$

Предположим, что все постоянные, кроме  $a_4$ , равны нулю. Тогда  $\varepsilon_{xx} = a_4 y$ ;  $\varepsilon_{yy} = 0$ ;  $\gamma_{xy} = a_4 x$ . Характер изменения  $\varepsilon_{xx}$

соответствует состоянию чистого изгиба (рисунок 9.10). Но в отличие от случая чистого изгиба в конечном элементе помимо деформации  $\varepsilon_{xx}$  присутствует деформация сдвига  $\gamma_{xy}$ . Это приводит к тому, что жёсткость конечного элемента оказывается непомерно большой. В результате в конечно-элементной модели балки с такими элементами возникает эффект «заклинивания»: её перемещения могут оказаться во много раз меньше реальных значений. Далее описан прямоугольный элемент, свободный от этого недостатка.

### 9.8 Плоский прямоугольный конечный элемент с заданным полем напряжений

Рассмотрим снова плоский прямоугольный конечный элемент с узлами в вершинах. Как и ранее, поместим начало системы координат  $xu$  в центр прямоугольника (см. рисунок 9.9). В отличие от предыдущего случая зададимся характером изменения не перемещений, а напряжений в конечном элементе:

$$\sigma_{xx} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 y; \quad \sigma_{yy} = \bar{C}_3 + \bar{C}_4 x; \quad \sigma_{xy} = \bar{C}_5, \quad (9.36)$$

где  $\bar{C}_k$  – некоторые коэффициенты. Данное представление включает простейшие напряжённые состояния: равномерное растяжение в двух направлениях, чистый сдвиг и чистый изгиб в направлении каждой из осей  $x$ ,  $y$ .

Что касается перемещений, то их распределение установим путём интегрирования соотношений Коши. Интегрирование можно осуществить, поскольку напряжения (9.36) удовлетворяют уравнению совместности (см. равенство (5.19)):

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

По закону Гука для обобщённого плоского состояния находим деформации:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}) = C_1 + C_2 y - \mu(C_3 + C_4 x);$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}) = C_3 + C_4 x - \mu(C_1 + C_2 y);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy} = C_5,$$

где введены новые постоянные

$$C_1 = \bar{C}_1/E, \quad C_2 = \bar{C}_2/E, \quad C_3 = \bar{C}_3/E, \quad C_4 = \bar{C}_4/E, \quad C_5 = \bar{C}_5/G.$$

В соответствии с формулами Коши имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \gamma_{xy}. \quad (9.37)$$

Подставив выражения для  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  в первые два соотношения (9.37) и выполнив интегрирование, получим

$$u_x = (C_1 - \mu C_3)x + C_2xy - \frac{\mu}{2}C_4x^2 + f_1(y);$$

$$u_y = (C_3 - \mu C_1)y + C_4xy - \frac{\mu}{2}C_2y^2 + f_2(x),$$

где  $f_1(y)$  и  $f_2(x)$  – произвольные функции своих аргументов. Если подставить полученные выражения и формулу для  $\gamma_{xy}$  в третье соотношение (9.37), можно прийти к равенству

$$C_2x + f_2'(x) = C_5 - C_4y - f_1'(y).$$

В его левой части находится функция координаты  $x$ , а в правой – функция координаты  $y$ . Равенство возможно в том случае, когда каждая из функций равна тождественно одной и той же константе. Обозначив её через  $C_6$ , получаем два уравнения для определения  $f_1(y)$  и  $f_2(x)$ :

$$C_2x + f_2'(x) = C_6;$$

$$C_5 - C_4y - f_1'(y) = C_6.$$

Интегрирование этих уравнений даёт

$$f_2(x) = C_6x - \frac{C_2}{2}x^2 + C_7;$$

$$f_1(y) = (C_5 - C_6)y - \frac{C_4}{2}y^2 + C_8,$$

где  $C_7$  и  $C_8$  – постоянные интегрирования.

С учётом данных соотношений имеем

$$u_x = (C_1 - \mu C_3)x + C_2xy - \frac{\mu}{2}C_4x^2 + (C_5 - C_6)y - \frac{C_4}{2}y^2 + C_8;$$

$$u_y = (C_3 - \mu C_1)y + C_4xy - \frac{\mu}{2}C_2y^2 + C_6x - \frac{C_2}{2}x^2 + C_7.$$

Если ввести новые обозначения постоянных по формулам

$$a_1 = C_8; \quad a_2 = C_1 - \mu C_3; \quad a_3 = C_5 - C_6; \quad a_4 = C_2;$$

$$a_5 = C_7; \quad a_6 = C_6; \quad a_7 = C_3 - \mu C_1; \quad a_8 = C_4,$$

то выражения для  $u_x$  и  $u_y$  примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_x &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy - \frac{a_8}{2}(\mu x^2 + y^2); \\
u_y &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy - \frac{a_4}{2}(x^2 + \mu y^2).
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Как видим, в этом случае закон изменения перемещений отличается от простого билинейного распределения наличием слагаемых, содержащих  $x^2$  и  $y^2$ .

Опуская дальнейшие подробности, запишем окончательные выражения для подматриц  $[K_{rs}^e]$  матрицы жёсткости конечного элемента. Так же, как и в рассмотренном ранее случае, можно представить их в виде суммы двух составляющих:

$$[K_{rs}^e] = [K_{rs,E}] + [K_{rs,G}]$$

где

$$[K_{rs,E}] = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \gamma \xi_r \xi_s \left( 1 + \frac{1-\mu^2}{3} \eta_r \eta_s \right) & \mu \xi_r \eta_s \\ \mu \eta_r \xi_s & \frac{1}{\gamma} \eta_r \eta_s \left( 1 + \frac{1-\mu^2}{3} \xi_r \xi_s \right) \end{bmatrix}; \tag{9.39}$$

$$[K_{rs,G}] = \frac{Gh}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} \eta_r \eta_s & \eta_r \xi_s \\ \xi_r \eta_s & \gamma \xi_r \xi_s \end{bmatrix}. \tag{9.40}$$

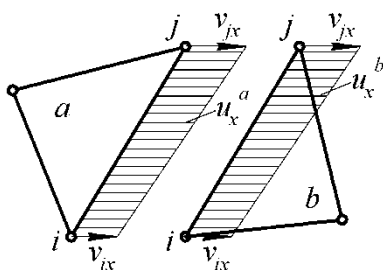
Сравнение с соответствующими выражениями (9.34) и (9.35) для конечного элемента с билинейным полем перемещений показывает, что в блоках  $[K_{rs,E}]$  различие невелико. Но вклад деформаций сдвига, который отражается в подматрицах  $[K_{rs,G}]$ , для рассмотренных двух вариантов прямоугольного конечного элемента различается существенно. Данный конечный элемент хорошо зарекомендовал себя, в частности, при моделировании стенок различных балок.

## 9.9 Совместность конечных элементов

Можно ожидать, что конечно-элементная модель будет правильно отражать упругое поведение реального тела в том случае, когда деформированные конечные элементы, плотно прилегая друг к другу, образуют непрерывное деформированное тело. Такая картина наблюдается, если перемещения не претерпевают разрывов при переходе от одного конечного элемента к другому.

Конечные элементы, для которых это условие выполняется при любых узловых перемещениях, называются *совместными*.

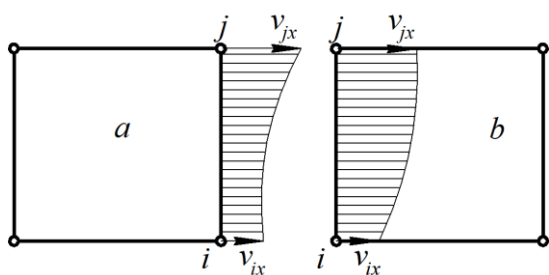
Примером совместных могут служить рассмотренные выше плоские треугольные элементы. Перемещения  $u_x, u_y$  имеют линейную зависимость (9.18) от координат и изменяются по линейному закону вдоль любой прямой, в том числе и по сторонам треугольника. Линейная функция полностью определена, если известны её значения в каких-либо двух точках. Скажем, перемещения  $v_{ix}$  и  $v_{jx}$  узлов  $i$  и  $j$  однозначно определяют перемещения  $u_x$  точек, лежащих на стороне  $ij$ , и эти перемещения будут одинаковыми для двух смежных конечных элементов  $a$  и  $b$  с общей стороной  $ij$  (рисунок 9.11). То же самое можно сказать о перемещениях  $u_y$ . Следовательно, данные конечные элементы являются совместными.



**Рисунок 9.11 – Перемещения на смежных сторонах соседних треугольных элементов**

Точно так же совместны по отношению друг к другу прямоугольные конечные элементы с билинейным полем перемещений, поскольку здесь перемещения изменяются по линейному закону вдоль прямых  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$ , в том числе вдоль сторон прямоугольника. Заметим, что по тем же соображениям совместность обеспечивается и при использовании в конечно-

элементной модели прямоугольных элементов в сочетании с треугольными. Такая комбинация может оказаться полезной для плоских тел, имеющих форму, отличную от прямоугольной.



**Рисунок 9.12 – Перемещения в смежных несовместных элементах**

Наряду с совместными в расчётной практике встречаются и несовместные конечные элементы. Примером может служить прямоугольный элемент с заданным полем напряжений (рисунок 9.12). Перемещения в таком элементе, определяемые выражениями (9.40), изменяются при  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$

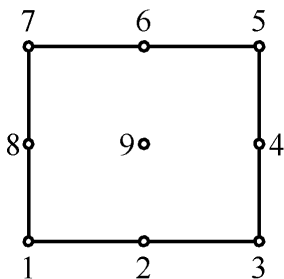
по квадратичному закону. Квадратная парабола задаётся тремя параметрами, и узловые перемещения двух соседних узлов элемента не могут определить однозначно перемещения  $u_x$  и  $u_y$  на прилегающей к ним стороне. Эти перемещения



будут зависеть также от других узловых перемещений, а при переходе к смежному конечному элементу они, вообще говоря, претерпевают разрывы. В дальнейшем мы обсудим, почему применение данного конечного элемента всё же является допустимым.

## 9.10 Внутренние узлы и подконструкции

До сих пор подразумевалось, что узловые точки конечного элемента расположены на его границе. Но это совсем не обязательно. Представим себе конечный элемент, у которого помимо внешних узлов, расположенных на его границе, имеются внутренние узлы, принадлежащие только данному элементу. На рисунке 9.13 показан пример такого элемента. Здесь имеется восемь внешних узлов, которые являются общими для данного элемента и смежных с ним, и один внутренний.



**Рисунок 9.13 – Конечный элемент с внутренним узлом**

Особенность внутренних узлов заключается в том, что они непосредственно связаны только с узлами, принадлежащими данному конечному элементу. Относящиеся к внутренним узлам коэффициенты матрицы жёсткости всей конечно-элементной системы будут просто совпадать с соответствующими коэффициентами матрицы жёсткости отдельных конечных элементов,

поскольку вклад со стороны других конечных элементов будет для них отсутствовать. Узловые силы во внутренних узлах могут быть вычислены ещё до объединения конечных элементов, так как они также не имеют вкладов со стороны смежных элементов. Всё это позволяет перемещения внутренних узлов каждого элемента выразить через перемещения его внешних узлов и, таким образом, исключить их из числа искомым перемещений объединённой системы.

Полный список узловых перемещений конечного элемента с внутренними узлами обозначим через  $[v^*]$  и представим в виде

$$[v^*] = \begin{bmatrix} v^e \\ \dots \\ v_0 \end{bmatrix},$$

где подматрица  $[v^e]$  содержит перемещения внешних, а  $[v_0]$  – перемещения внутренних узлов. В представленном на рисунке 9.13 примере матрица  $[v^e]$

будет включать перемещения первых восьми узлов, а матрица  $[v_0]$  – перемещения девятого узла.

Аналогично через  $[P^*]$  обозначим матрицу сосредоточенных сил для конечного элемента и выделим в ней соответствующие подматрицы:

$$[P^*] = \begin{bmatrix} P^e \\ \dots \\ P_0 \end{bmatrix}.$$

Связь перемещений  $[u]$  точек конечного элемента с узловыми перемещениями запишем теперь в виде

$$[u] = [\alpha^*][v^*]$$

или

$$[u] = [\alpha \quad \dots \quad \alpha_0] \begin{bmatrix} v^e \\ \dots \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

В случае действия внеузловых сил следует, как и ранее, заменить их эквивалентными узловыми. Обозначая матрицу эквивалентных сил для всего элемента через  $[\tilde{P}^*]$ , запишем в соответствии с (9.16)

$$\begin{aligned} [\tilde{P}^*] &= \int_{\tau^e} [\alpha^*]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [\alpha^*]^T [p] d\omega = \\ &= \int_{\tau^e} \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \dots \\ \alpha_0^T \end{bmatrix} [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \dots \\ \alpha_0^T \end{bmatrix} [p] d\omega = \begin{bmatrix} \tilde{P}_a \\ \dots \\ \tilde{P}_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь

$$[\tilde{P}_a] = \int_{\tau^e} [\alpha]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [\alpha]^T [p] d\omega; \quad (9.41)$$

$$[\tilde{P}_0] = \int_{\tau^e} [\alpha_0]^T [R] d\tau + \int_{\omega_p^e} [\alpha_0]^T [p] d\omega. \quad (9.42)$$

Связь деформаций с узловыми перемещениями также представим в виде

$$[\varepsilon] = [\beta^*][v^*] = [\beta \quad \dots \quad \beta_0] \begin{bmatrix} v^e \\ \dots \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Тогда и для матрицы жёсткости  $[K^*]$  конечного элемента будем иметь блочное представление.

$$[K^*] = \int_{\tau^e} [\beta^*]^T [\kappa] [\beta^*] d\tau = \int_{\tau^e} \begin{bmatrix} \beta^T \\ \dots \\ \beta_0^T \end{bmatrix} [\kappa] [\beta \quad \dots \quad \beta_0] d\tau = \begin{bmatrix} K_a & \dots & K_b \\ \dots & \dots & \dots \\ K_b^T & \dots & K_0 \end{bmatrix},$$

где

$$[K_a] = \int_{\tau^e} [\beta^T] [\kappa] [\beta] d\tau; \quad (9.43)$$

$$[K_b] = \int_{\tau^e} [\beta^T] [\kappa] [\beta_0] d\tau;$$

$$[K_0] = \int_{\tau^e} [\beta_0^T] [\kappa] [\beta_0] d\tau. \quad (9.45)$$

Связь между узловыми перемещениями и узловыми силами конечного элемента запишется теперь так:

$$[K^*][v^*] = [P^*] + [\tilde{P}^*]$$

или

$$\begin{bmatrix} K_a & K_b \\ K_b^T & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^e \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^e \\ P_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{P}_a \\ \tilde{P}_o \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекают два равенства:

$$\begin{aligned} [K_a][v^e] + [K_b][v_o] &= [P^e] + [\tilde{P}_a]; \\ [K_b]^T[v^e] + [K_0][v_o] &= [P_o] + [\tilde{P}_o]. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Умножив второе из них на  $[K_0]^{-1}$ , выразим  $[v_o]$  через перемещения внешних узлов:

$$[v_o] = -[K_0]^{-1}[K_b]^T[v^e] + [K_0]^{-1}([P_o] + [\tilde{P}_o]). \quad (9.47)$$

Если подставить это выражение в первое равенство (9.46), получим соотношение, устанавливающее связь между перемещениями внешних узлов и узловыми силами, которое можно записать в стандартной форме

$$[K^e][v^e] = [P^e] + [\tilde{P}^e].$$

Матрицы  $[K^e]$  и  $[\tilde{P}^e]$  определяются при этом соотношениями

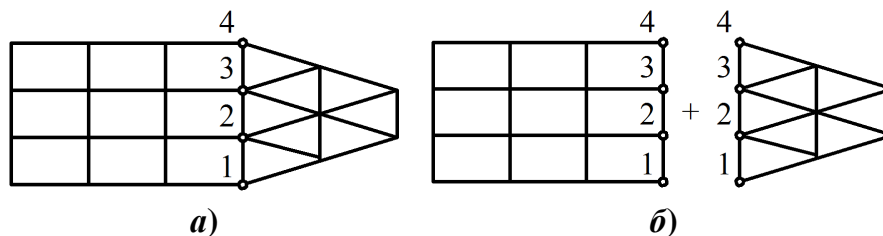
$$[K^e] = [K_a] - [K_b][K_0]^{-1}[K_b]^T; \quad (9.48)$$

$$[\tilde{P}^e] = [\tilde{P}_a] - [K_b][K_0]^{-1}([P_o] + [\tilde{P}_o]). \quad (9.49)$$

Формулы (9.48) и (9.49) выполняют приведение матрицы жёсткости и матрицы узловых сил конечного элемента к перемещениям внешних узлов. В последующем объединении конечных элементов матрицы  $[K^e]$  и  $[\tilde{P}^e]$  участвуют обычным образом – как если бы конечный элемент имел только внешние узлы. Матрица неизвестных перемещений будет включать перемещения лишь

тех узлов, которые являются внешними для конечных элементов. Эти перемещения определяются в результате решения системы уравнений, а перемещения внутренних узлов находятся по формуле (9.47).

Использованные выше рассуждения можно применить к расчёту сложных конструкций. Проиллюстрируем это схемой, показанной на рисунке 9.14.



**Рисунок 9.14 – Конечно-элементная модель сложной системы *a*) и её членение на подконструкции *б*)**

Конечно-элементная модель сложной системы разбивается на две или более подсистем (подконструкций). Все узлы каждой из подсистем, за исключением общих, рассматриваются как «внутренние»; общие узлы (узлы 1...4 на рисунке 9.14) выступают для каждой подконструкции в качестве «внешних». Перемещения внутренних узлов можно выразить через перемещения внешних подобно тому, как это было описано выше для конечных элементов с внутренними узлами. Тогда разрешающая система будет включать в себя перемещения лишь тех узлов, которые выбраны в качестве внешних.

Использование подконструкций (называемых также суперэлементами) позволяет расчленив расчёты на отдельные этапы. Конструктивные изменения в какой-либо подконструкции требуют лишь частичного пересчёта, поскольку матрицы жёсткости всех остальных подконструкций остаются неизменными.

### **9.11 Сирендипова интерполяция на квадрате функции двух переменных**

Выше представлены примеры плоских конечных элементов простой формы с прямолинейными сторонами. Но для моделирования сложных областей могут потребоваться и иные конечные элементы, в том числе с криволинейными сторонами. Прежде чем перейти к их построению, рассмотрим предварительно схемы интерполирования на квадрате функции двух переменных.

Пусть в декартовой системе координат  $\xi$ ,  $\eta$  дана квадратная область, в которой каждая из переменных изменяется от -1 до 1. В определённых точках области (узлах) заданы значения  $\Phi_r$  некоторой функции

( $r=1,2,\dots,n$ , где  $n$  – число узлов). Требуется по этим узловым значениям с помощью полиномов от  $\xi$ ,  $\eta$  выполнить интерполяцию функции  $\Phi(\xi,\eta)$ .

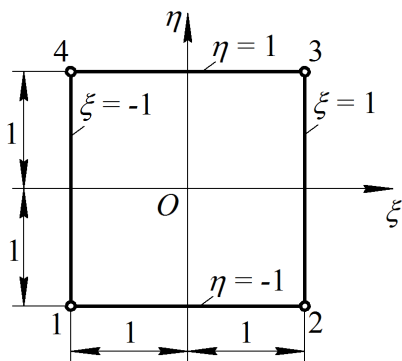
В общем случае выражение для  $\Phi(\xi,\eta)$  будет иметь вид

$$\Phi(\xi,\eta) = \psi_1(\xi,\eta)\Phi_1 + \psi_2(\xi,\eta)\Phi_2 + \dots + \psi_n(\xi,\eta)\Phi_n, \quad (9.50)$$

где  $\psi_r(\xi,\eta)$  – интерполяционные функции. Положим в (9.50) все узловые значения  $\Phi_i$  равными нулю, кроме одного из них, которое возьмём равным 1. Пусть, например,  $\Phi_r = 1$  и  $\Phi_i = 0$  для  $i \neq r$ . Тогда из равенства (9.50) следует выражение

$$\Phi(\xi,\eta) = \psi_r(\xi,\eta),$$

которое показывает, что  $\psi_r(\xi,\eta)$  представляет такой закон изменения функции  $\Phi(\xi,\eta)$ , при котором последняя имеет единичное значение в узле  $r$  и равна нулю во всех остальных узлах.



**Рисунок 9.15 – Квадрат с узлами в вершинах**

Количество узлов и их местоположение могут быть различными. Остановимся вначале на случае, когда узлы располагаются только в вершинах квадрата и на его сторонах.

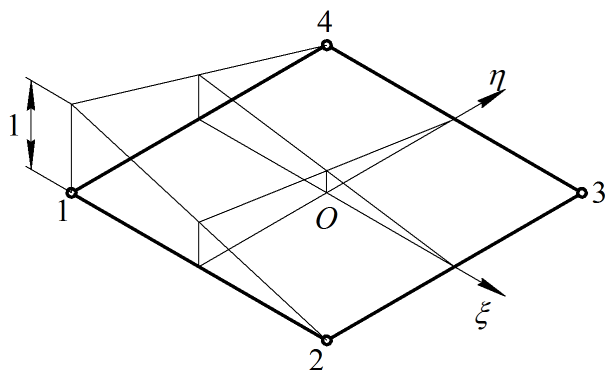
На рисунке 9.15 показан квадрат с четырьмя узлами в вершинах. Соответственно, функцию  $\Phi(\xi,\eta)$  будем искать здесь в виде суммы четырёх слагаемых:

$$\Phi(\xi,\eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi\eta. \quad (9.51)$$

Три первых слагаемых представляют полные полиномы нулевой и первой степеней. Последнее относится к полиному второй степени. Оно выбрано с таким расчётом, чтобы функция  $\Phi(\xi,\eta)$  изменялась по линейному закону вдоль прямых  $\xi = \text{const}$  или  $\eta = \text{const}$ , в том числе вдоль сторон квадрата. Поскольку линейная функция полностью определяется её значениями в каких-либо двух точках, закон изменения функции  $\Phi$  вдоль любой стороны будет определяться исключительно её значениями в узлах, принадлежащих этой стороне, и не будет зависеть от значений в двух других узлах.

Постоянные  $C_k$  могут быть выражены через узловые значения  $\Phi_k$ , но удобнее непосредственно обратиться к выражению (9.50) и найти функции  $\psi_r(\xi,\eta)$  путём подбора. Заметим для этого, что четыре произведения

$(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$  содержат только такие полиномиальные члены  $(1, \xi, \eta, \xi\eta)$ , которые соответствуют представлению (9.51). Кроме того, каждое из них отлично от нуля лишь в одном из узлов. Например, произведение  $(1 - \xi)(1 - \eta)$  обращается в нуль при  $\xi = 1$  или  $\eta = 1$ , то есть оно отлично от нуля только в узле 1, где равно 4. Взяв его с множителем  $1/4$ , приходим к искомому выражению для  $\psi_1(\xi, \eta)$ . Вид функции  $\psi_1(\xi, \eta)$  показан на рисунке 9.16. Аналогично строим и остальные функции. Таким образом, получаем соотношения



$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta);$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta);$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta);$$

$$\psi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).$$

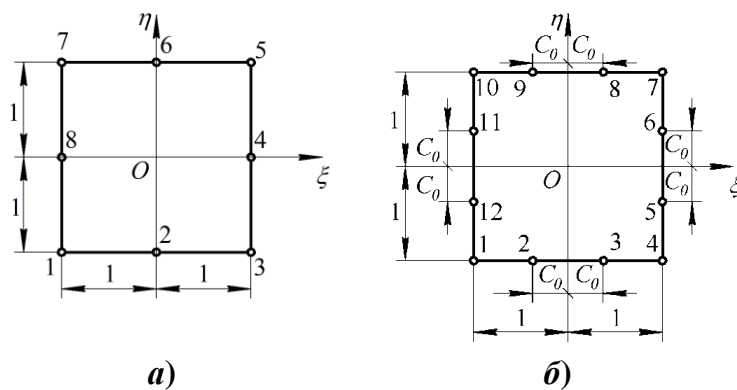
**Рисунок 9.16 – Функция  $\psi_1(\xi, \eta)$  для квадрата с четырьмя узлами**

Данные выражения можно представить единой формулой

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta), \quad (9.52)$$

где  $\xi_r, \eta_r$  – координаты узлов, равные 1 или -1 ( $r = 1, 2, 3, 4$ ).

Более сложный характер изменения функции  $\Phi(\xi, \eta)$  можно получить, если к узлам в вершинах квадрата добавить четыре узла в серединах его сторон (рисунок 9.17,а) или, скажем, восемь узлов, расположенных попарно на расстоянии  $C_0$  от середин сторон (рисунок 9.17,б). Дальнейшее увеличение числа дополнительных узлов лишено практического интереса.



**Рисунок 9.17 – Квадрат с восемью (а) и с двенадцатью (б) узлами**

При отыскании функции  $\Phi(\xi, \eta)$  в случае квадрата с восемью узлами, показанного на рисунке 9.17,а, можно исходить из выражения

$$\Phi(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi^2 + C_5\xi\eta + C_6\eta^2 + C_7\xi^2\eta + C_8\xi\eta^2, \quad (9.53)$$

содержащего соответственно восемь постоянных.

Здесь находятся полные полиномы от  $\xi$ ,  $\eta$  до второго порядка включительно. Два последних слагаемых, относящиеся к полиному третьей степени, выбраны так, чтобы вдоль сторон квадрата функция  $\Phi$  изменялась по квадратичному закону. Благодаря этому закон изменения функции на любой стороне будет полностью определяться её значениями в трёх узлах, принадлежащих этой стороне, и не будет зависеть от других узловых значений.

Явные выражения для восьми функций  $\psi_r(\xi, \eta)$  можно получить путём комбинирования использованных выше функций  $\frac{1}{4}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$  с дополнительными функциями  $(1 \pm \xi)(1 - \eta^2)$  и  $(1 \pm \eta)(1 - \xi^2)$ . Раскрыв скобки, нетрудно убедиться, что в совокупности здесь содержится восемь различных полиномиальных функций, соответствующих принятому закону (9.53).

Каждая из дополнительных функций отлична от нуля только в узле, находящемся в середине одной из сторон. Например, функция  $(1 - \eta)(1 - \xi^2)$  имеет нулевое значение во всех узлах, кроме узла 2, где она равна 2. Таким образом, мы приходим к следующим интерполяционным функциям для узлов 2, 4, 6, 8:

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 - \xi^2); & \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2); \\ \psi_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - \xi^2); & \psi_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим далее функцию  $\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$  (см. рисунок 9.16). Имея единичное значение в узле 1, она равна нулю на сторонах  $\xi = 1$  и  $\eta = 1$ , то есть во всех остальных узлах, кроме узлов 2 и 8, где она равна 1/2. Комбинируя её с функциями  $\psi_2(\xi, \eta)$  и  $\psi_8(\xi, \eta)$ , можно построить функцию  $\psi_1(\xi, \eta)$ , имеющую нулевые значения также и в узлах 2, 8:

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}\psi_2(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\psi_8(\xi, \eta).$$

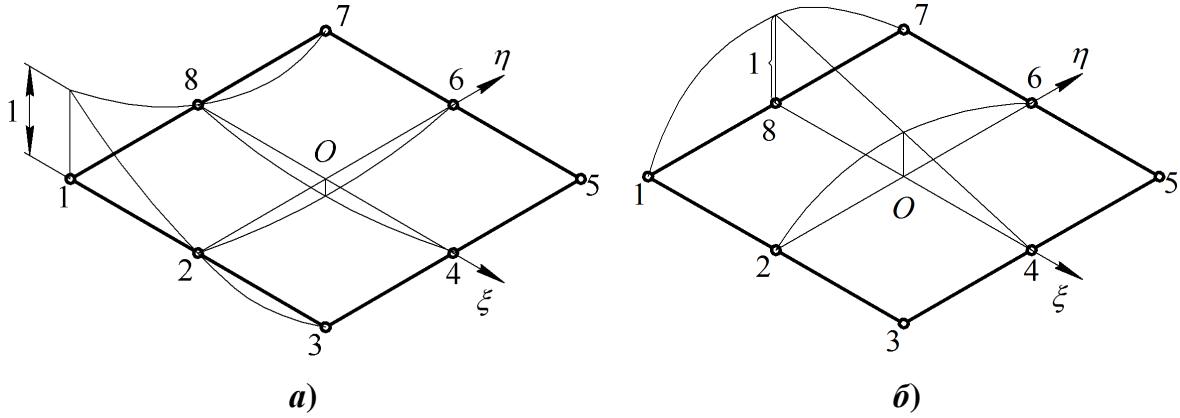
Аналогично получаем также

$$\psi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}\psi_2(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\psi_4(\xi, \eta);$$

$$\psi_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}\psi_4(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\psi_6(\xi, \eta);$$

$$\psi_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}\psi_6(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\psi_8(\xi, \eta).$$

Характер функций  $\psi_1(\xi, \eta)$  и  $\psi_8(\xi, \eta)$  показан в качестве примера на рисунке 9.18.



**Рисунок 9.18 – Характер функций  $\psi_1(\xi, \eta)$  (а) и  $\psi_8(\xi, \eta)$  (б) для квадрата с восемью узлами**

Получаемые таким путём формулы для функций  $\psi_r(\xi, \eta)$  можно представить единым выражением вида

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{3\xi_r^2\eta_r^2 - 2}{4} \left[ \xi_r^2\eta_r^2(1 + \xi_r\xi)(1 + \eta_r\eta) - \xi_r^2(1 + \xi_r\xi)(1 - \eta^2) - \eta_r^2(1 + \eta_r\eta)(1 - \xi^2) \right], \quad (9.54)$$

где координаты узлов  $\xi_r, \eta_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 8$ ) определяются в соответствии с рисунком 9.17,а.

В случае квадрата с двенадцатью узлами (см. рисунок 9.17,б) выражение для функции  $\Phi(\xi, \eta)$  будем искать в следующем виде:

$$\Phi(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi^2 + C_5\xi\eta + C_6\eta^2 + C_7\xi^3 + C_8\xi^2\eta + C_9\xi\eta^2 + C_{10}\eta^3 + C_{11}\xi^3\eta + C_{12}\xi\eta^3. \quad (9.55)$$

Помимо полных полиномов третьей степени сюда включены члены  $\xi^3\eta$  и  $\xi\eta^3$  из полинома четвёртой степени. При этом обеспечивается кубический закон изменения функции  $\Phi$  вдоль любой стороны квадрата, так что этот закон определяется исключительно значениями функции в четырёх узлах, принадлежащих соответствующей стороне.



Нетрудно убедиться, что функции  $\psi_r(\xi, \eta)$  в рассматриваемом случае получаются как линейные комбинации двенадцати функций  $\frac{1}{4}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$ ,  $(1 \pm \xi)(C_0 \pm \eta)(1 - \eta^2)$  и  $(1 \pm \eta)(C_0 \pm \xi)(1 - \xi^2)$ , где  $C_0$  – расстояние промежуточных узлов от середин сторон. Рассуждая так же, как и раньше, можно получить для интерполяционных функций явные выражения типа

$$\psi_2(\xi, \eta) = \frac{(C_0 - \xi)(1 - \eta)(1 - \xi^2)}{4C_0(1 - C_0^2)};$$

$$\psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1 + C_0}{2}\psi_2(\xi, \eta) -$$

$$- \frac{1 - C_0}{2}\psi_3(\xi, \eta) - \frac{1 + C_0}{2}\psi_{11}(\xi, \eta) - \frac{1 - C_0}{2}\psi_{12}(\xi, \eta).$$

Аналогично записываются и другие функции  $\psi_r(\xi, \eta)$ . Все 12 функций могут быть представлены одним общим выражением

$$\psi_r(\xi, \eta) = \frac{(\xi_r + \xi)(\eta_r + \eta)}{4\xi_r\eta_r(1 - C_0^2)} \left[ \frac{(\eta_r^2 - C_0^2)(1 - \xi^2) + (\xi_r^2 - C_0^2)(1 - \eta^2)}{1 + 2\xi_r^2\eta_r^2 + C_0^2} + \right. \\ \left. + \xi_r^2\eta_r^2 - C_0^2 \right], \quad (9.56)$$

где координаты узлов  $\xi_r, \eta_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 12$ ) определяются согласно рисунку 9.17, б. Величина  $C_0$  может принимать значения

$$0 < C_0 < 1;$$

обычно берут  $C_0 = 1/3$ .

Интерполяционные функции (9.52), (9.54) и (9.56) можно назвать функциями соответственно первого, второго и третьего порядка – по наивысшей степени представленных в них полных полиномов. Основанная на этих формулах интерполяция известна как сирендипова интерполяция.

Отметим одно важное свойство функций  $\psi_r(\xi, \eta)$ . Рассмотренная выше интерполяция исходит из полиномиального представления функции  $\Phi(\xi, \eta)$  в виде

$$\Phi(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + \dots$$

Здесь содержится столько неизвестных коэффициентов  $C_k$ , сколько имеется узловых параметров  $\Phi_r$ , и коэффициенты  $C_k$  связаны с параметрами  $\Phi_r$  однозначной зависимостью. Положим в любом из упомянутых соотношений

все коэффициенты равными нулю, за исключением коэффициента  $C_1$ , который возьмём равным единице. Тогда функция  $\Phi(\xi, \eta)$  будет тождественно равна единице на всём квадрате, включая узловые точки. В силу взаимно-однозначного соответствия коэффициентов и узловых параметров справедливо и обратное утверждение: *если все узловые параметры  $\Phi_k$  принять равными единице, то функция  $\Phi(\xi, \eta)$  во всех точках квадрата окажется постоянной и равной единице*. Тогда из формулы (9.50) вытекает следующее равенство, справедливое для интерполяции любого порядка:

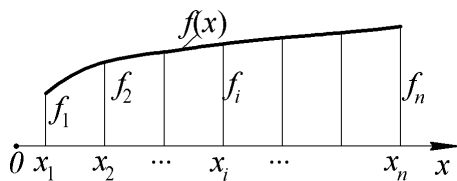
$$\sum_r \psi_r(\xi, \eta) = 1, \quad (9.57)$$

где суммирование выполняется по всем узлам квадрата.

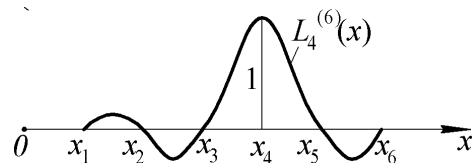
## 9.12 Лагранжева интерполяция на квадрате функции двух переменных

Другой подход к интерполированию основан на использовании интерполяционных полиномов Лагранжа. Предположим, что в  $n$  точках оси  $x$ , имеющих координаты  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , заданы значения некоторой функции  $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n$  и требуется по этим значениям с помощью полиномов от  $x$  выполнить интерполяцию функции  $f(x)$  (рисунок 9.19). Искомое выражение для  $f(x)$  может быть представлено в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i^{(n)}(x) f_i.$$



**Рисунок 9.19 – Интерполяция функции одной переменной**



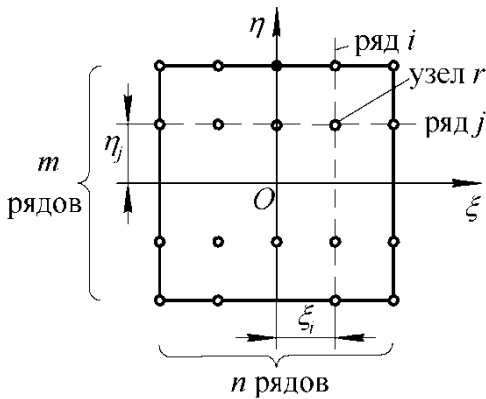
**Рисунок 9.20 – Вид полинома Лагранжа для  $n = 6, i = 4$**

Функция  $L_i^{(n)}(x)$  имеет единичное значение в точке  $x = x_i$  и равняется нулю в остальных точках. Явное выражение для неё дается, как нетрудно убедиться, формулой

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (9.58)$$

Данная функция представляет собой многочлен степени  $n - 1$  и называется интерполяционным полиномом Лагранжа. Вид полинома  $L_i^{(n)}(x)$  для случая  $n = 6, i = 4$  показан в качестве примера на рисунке 9.20.

Предположим теперь, что на квадрате имеется  $m \times n$  узлов, расположенных по рядам, как показано на рисунке 9.21. Обозначим через  $\Phi_r$  значение интерполируемой функции в узле  $r$ , который находится на пересечении  $i$ -ого вертикального и  $j$ -ого горизонтального рядов и имеет соответственно координаты  $\xi_i, \eta_j$ . Тогда значение функции  $\Phi(\xi, \eta)$  в произвольной точке может быть вычислено по формуле



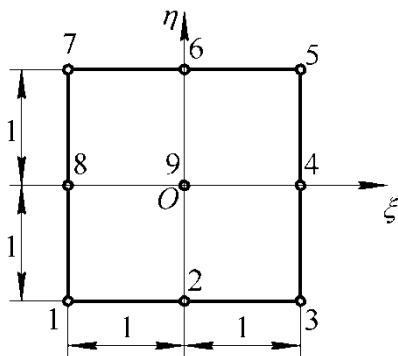
**Рисунок 9.21 – Лагранжева интерполяция на квадрате**

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) \Phi_r,$$

где суммирование выполняется по всем узлам, а интерполяционная функция  $\psi_r(\xi, \eta)$  определяется как произведение соответствующих полиномов Лагранжа для каждой из переменных:

$$\psi_r(\xi, \eta) = L_i^{(n)}(\xi) \cdot L_j^{(m)}(\eta). \quad (9.59)$$

Очевидно, что функция  $\Phi(\xi, \eta)$  на любой стороне квадрата будет определяться только её значениями в тех узлах, которые принадлежат этой стороне.



**Рисунок 9.22 – Квадрат с девятью узлами**

В случае, когда  $m = n = 2$ , то есть когда имеются узлы только в вершинах квадрата, лагранжева интерполяция совпадает с сирендиповой. В практических приложениях интерес может представлять случай  $m = n = 3$ , когда помимо узлов в вершинах и в серединах сторон квадрата используется ещё один узел в его центре (интерполяция второго порядка), как показано на рисунке (9.22). Полиномы Лагранжа (9.58) здесь имеют вид

$$L_1^{(3)}(\xi) = -\frac{\xi(1-\xi)}{2}; \quad L_2^{(3)}(\xi) = 1-\xi^2; \quad L_3^{(3)}(\xi) = \frac{\xi(1+\xi)}{2};$$

$$L_1^{(3)}(\eta) = -\frac{\eta(1-\eta)}{2}; \quad L_2^{(3)}(\eta) = 1-\eta^2; \quad L_3^{(3)}(\eta) = \frac{\eta(1+\eta)}{2}.$$

По формуле (9.59) находим функции  $\psi_r(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta); & \psi_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1-\eta); \\ \psi_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta); & \psi_7(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta); \\ \psi_2(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}\eta(1-\eta)(1-\xi^2); & \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2); \\ \psi_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\eta(1+\eta)(1-\xi^2); & \psi_8(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta^2); \\ \psi_9(\xi, \eta) &= (1-\xi^2)(1-\eta^2).\end{aligned}$$

Данные выражения могут быть представлены единой формулой следующего вида ( $r = 1, 2, \dots, 9$ ):

$$\begin{aligned}\psi_r(\xi, \eta) &= \frac{\xi_r \eta_r}{4} \xi \eta (1 + \xi_r \xi) (1 + \eta_r \eta) + \\ &+ \frac{\xi_r (1 - \eta_r^2)}{2} \xi (1 + \xi_r \xi) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_r (1 - \xi_r^2)}{2} \eta (1 + \eta_r \eta) (1 - \xi^2) + \\ &+ (1 - \xi_r^2) (1 - \eta_r^2) (1 - \xi^2) (1 - \eta^2).\end{aligned}\quad (9.60)$$

Если в выражениях для  $\psi_r(\xi, \eta)$  раскрыть скобки, то можно увидеть, что в них содержится девять полиномиальных функций, соответствующих следующему выражению для  $\Phi(\xi, \eta)$ :

$$\Phi(\xi, \eta) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \eta + C_4 \xi^2 + C_5 \xi \eta + C_6 \eta^2 + C_7 \xi^2 \eta + C_8 \xi \eta^2 + C_9 \xi^2 \eta^2. \quad (9.61)$$

От выражения (9.53) для сирендиповой интерполяции второго порядка оно отличается присутствием слагаемого  $C_9 \xi^2 \eta^2$ , которое относится к полиному четвёртой степени.

Заметим, что и в случае лагранжевой интерполяции справедливо соотношение (9.57).

### 9.13 Плоские четырёхсторонние изопараметрические конечные элементы

Основываясь на рассмотренных выше интерполяционных формулах, можно построить конечные элементы с четырьмя сторонами сложной формы, в том числе криволинейные. Равенства вида

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) \Phi_r, \quad (9.62)$$

где  $\Phi_r$  – заданные узловые значения искомой функции  $\Phi(\xi, \eta)$ , позволяют описать как геометрию конечного элемента, так и закон изменения перемещений в нём.

Геометрия элемента устанавливается заданием координат  $x_r, y_r$  его узлов, число которых равно числу узлов исходного квадрата, определяемого в координатах  $\xi, \eta$ . Координаты же внутренних точек элемента находятся посредством соотношений

$$x(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) x_r, \quad y(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) y_r, \quad (9.63)$$

где суммирование выполняется по всем узлам.

В качестве примера на рисунке 9.23 показана схема преобразования ис-

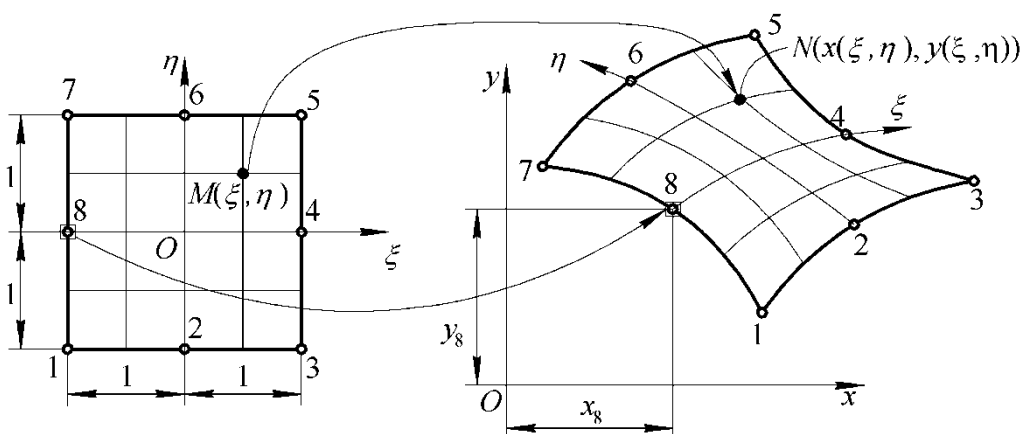
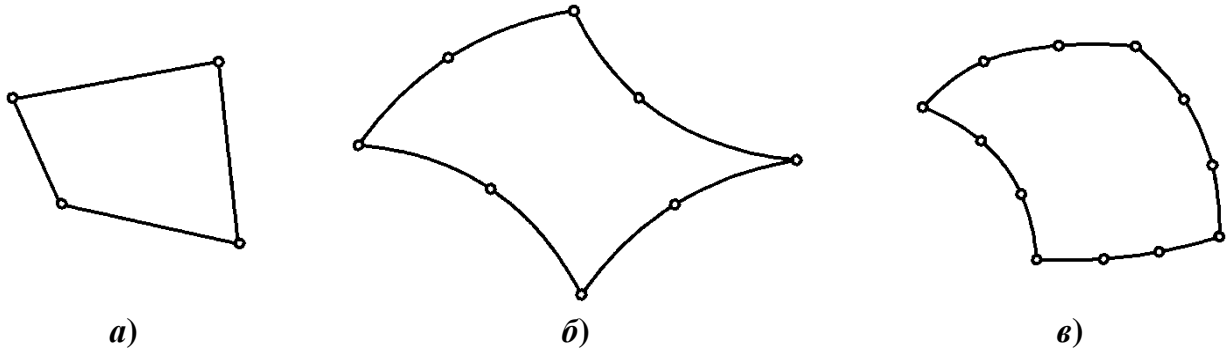


Рисунок 9.23 – К определению геометрии конечного элемента

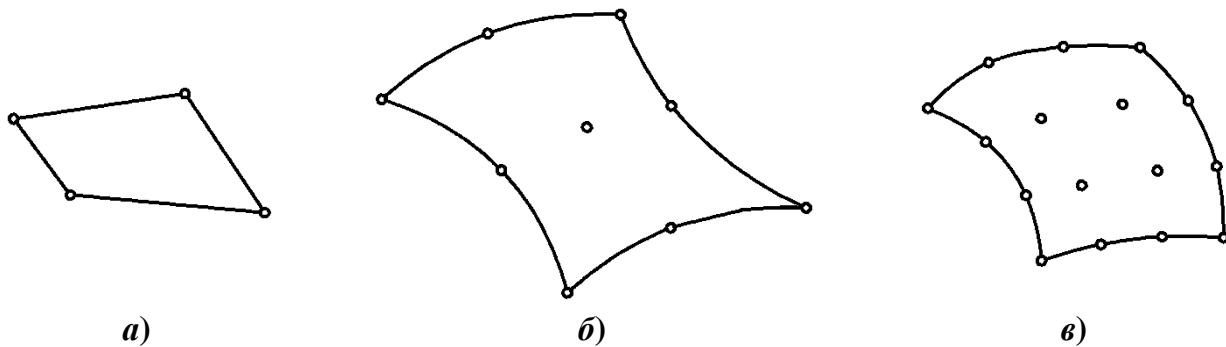
ходного квадрата с восемью узлами в криволинейный четырёхугольный элемент. Каждому узлу квадрата ставится в соответствие определённый узел конечного элемента. Точка  $M$  квадрата с координатами  $\xi, \eta$  отображается в точку  $N$  конечного элемента, координаты  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  которой вычисляются по формулам (9.63). Переменные  $\xi, \eta$  являются, по существу, безразмерными криволинейными координатами конечного элемента.

Как говорилось ранее, функция  $\Phi(\xi, \eta)$ , получаемая по формуле (9.62), на любой стороне квадрата полностью определяется её значениями  $\Phi_r$  в узлах, лежащих на данной стороне. Следовательно, форма сторон конечного элемента на основании равенств (9.63) будет однозначно определяться координатами узлов, принадлежащих соответствующим сторонам. Благодаря этому при разбиении плоской области на такие конечные элементы они будут по всем сторонам плотно примыкать друг к другу, образуя сплошное непрерывное тело.

Поскольку форма конечных элементов определяется с помощью соотношений (9.63), входящие сюда функции  $\psi_r(\xi, \eta)$  называют *функциями формы*. В зависимости от выбора функций формы могут быть получены два семейства конечных элементов с четырьмя сторонами – *сирендипово* (рисунок 9.24) и *лагранжево* (рисунок 9.25). Конечные элементы сирендипова семейства имеют узлы, расположенные только в вершинах четырёхугольника и на его сторонах.



**Рисунок 9.24 – Сирендипово семейство плоских четырёхугольных конечных элементов первого (а), второго (б) и третьего (в) порядков**



**Рисунок 9.25 – Лагранжево семейство плоских четырёхугольных конечных элементов первого (а), второго (б) и третьего (в) порядков**

Элементы лагранжева семейства второго и третьего порядков имеют ещё и внутренние узлы. Порядок конечных элементов определяется наивысшей степенью полных полиномов от  $\xi, \eta$ , входящих в функции формы.

При нагружении тела узловые точки конечного элемента получают перемещения  $v_{rx}, v_{ry}$ , а внутренние – перемещения  $u_x, u_y$  (рисунок 9.26). Координаты узлов деформированного элемента обозначим через  $x'_r, y'_r$ , а координаты внутренних точек – через  $x', y'$ . Потребуем, чтобы и после деформации соблюдалась сплошность тела, составленного из конечных элементов. Это будет обеспечено, если координаты деформированного конечного элемента подчиняются соотношениям, аналогичным (9.63):

$$x'(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) x'_r; \quad y'(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) y'_r.$$

Если вычесть из данных соотношений формулы (9.63), получим равенства

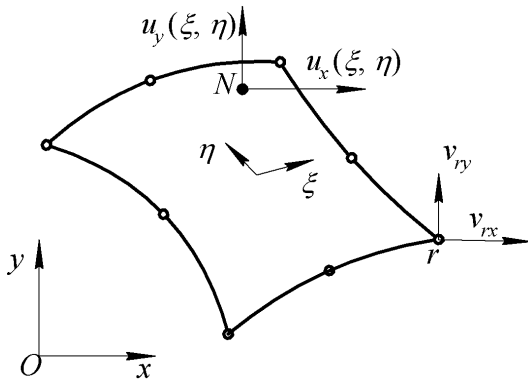
$$x'(\xi, \eta) - x(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta)(x'_r - x_r);$$

$$y'(\xi, \eta) - y(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta)(y'_r - y_r).$$

Учитывая, что  $x' - x = u_x$ ;  $y' - y_r = u_y$  и что  $x'_r - x_r = v_{rx}$ ;  $y'_r - y_r = v_{ry}$ , получаем выражения

$$u_x(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta)v_{rx}; \quad u_y(\xi, \eta) = \sum_r \psi_r(\xi, \eta)v_{ry}, \quad (9.64)$$

которые устанавливают закон изменения перемещений конечного элемента в функции параметров  $\xi$ ,  $\eta$ .



**Рисунок 9.26 – Перемещения конечного элемента**

В равенствах (9.64) фигурируют те же функции формы, что и в соотношениях (9.63). Таким образом, для задания перемещений  $u_x$  или  $u_y$  требуется такое же число узловых параметров ( $v_{rx}$  или  $v_{ry}$ ), что и для определения координат  $x$  или  $y$ . Поэтому построенные таким путём конечные элементы называют *изопараметрическими*. Ясно, что *изопараметрические конечные элементы совместны*.

Заметим, что в принципе могут быть построены конечные элементы, у которых в формулах (9.64) фигурируют функции формы иного порядка, нежели в соотношениях (9.63). Соответственно будет различаться количество узлов, в которых задаются координаты, и узлов, которые служат для определения перемещений. Такие конечные элементы называют суперпараметрическими (когда число параметров, определяющих геометрию элемента, превышает число параметров, характеризующих перемещения) или субпараметрическими (в противном случае). Подобные элементы не получили распространения, за исключением некоторых элементов субпараметрического типа для пластин при изгибе и оболочек.

## 9.14 Матрица жёсткости изопараметрического конечного элемента

Формулы (9.64) объединим матричным равенством

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \sum_r \begin{bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{bmatrix} = \sum_r [\alpha_r] [v_r], \quad (9.65)$$

где

$$[\alpha_r] = \begin{bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{bmatrix}. \quad (9.66)$$

Связь деформаций с узловыми перемещениями можно записать в аналогичной форме

$$[\varepsilon] = \sum_r [\beta_r] [v_r], \quad (9.67)$$

где в соответствии с выражением (9.3)

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (9.68)$$

Функции  $\psi_r(\xi, \eta)$  зависят от  $x, y$  неявно – посредством соотношений (9.63). Чтобы найти производные  $\frac{\partial \psi_r}{\partial x}, \frac{\partial \psi_r}{\partial y}$  воспользуемся следующими формулами дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Данные равенства можно рассматривать как систему уравнений относительно искомых производных. Запишем её в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

ИЛИ



$$[J] \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (9.69)$$

Здесь  $[J]$  – так называемая матрица Якоби преобразования координат (9.63):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (9.70)$$

Компоненты матрицы правых частей системы (9.70) легко вычислить, поскольку имеются явные зависимости функций  $\psi_r(\xi, \eta)$  от своих аргументов, которые даются равенствами типа (9.52), (9.54), (9.56) для сирендипова семейства или (9.60) – для лагранжева. На основании соотношений (9.63), можно найти и элементы матрицы Якоби. Таким образом, для любой точки с заданными параметрами  $\xi$ ,  $\eta$  можно получить численные значения матрицы коэффициентов и матрицы правых частей системы (9.69). Решение системы, которое можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (9.71)$$

устанавливает требуемые значения  $\frac{\partial \psi_r}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \psi_r}{\partial y}$  в данной точке. Тем самым определяются численные значения элементов матрицы  $[\beta_r]$  (9.68). Такие расчёты могут быть выполнены для всех узлов  $r$  и для любой точки конечного элемента.

Блоки  $[K_{rs}^e]$  матрицы жёсткости изопараметрического конечного элемента вычисляем в соответствии с общей формулой (9.10). Применительно к случаю обобщённого плоского напряжённого состояния, например, в качестве  $[\kappa]$  необходимо взять матрицу (9.46) и перейти к интегрированию по площади  $A$ , полагая  $d\tau = h dA$ , где  $h$  – толщина пластины. В случае постоянной толщины запишем

$$[K_{rs}^e] = h \int_A [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] dA.$$

Независимыми переменными в изопараметрических конечных элементах являются параметры  $\xi$ ,  $\eta$ , поэтому для выполнения интегрирования по площади перейдём к этим переменным. Бесконечно малому элементу с размерами  $d\xi$ ,  $d\eta$  исходного квадрата соответствует малая площадка конечного элемента, имеющая в общем случае форму параллелограмма, как показано на рисунке 9.27. Точки  $M(\xi, \eta)$ ,  $M_1(\xi + d\xi, \eta)$  и  $M_2(\xi, \eta + d\eta)$  отображаются в точки  $N(x, y)$ ,  $N_1\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi\right)$  и  $N_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, y + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right)$ . Площадь параллелограмма  $dA$  определяется известной формулой

$$dA = \begin{vmatrix} 1 & x_N & y_N \\ 1 & x_{N_1} & y_{N_1} \\ 1 & x_{N_2} & y_{N_2} \end{vmatrix}.$$

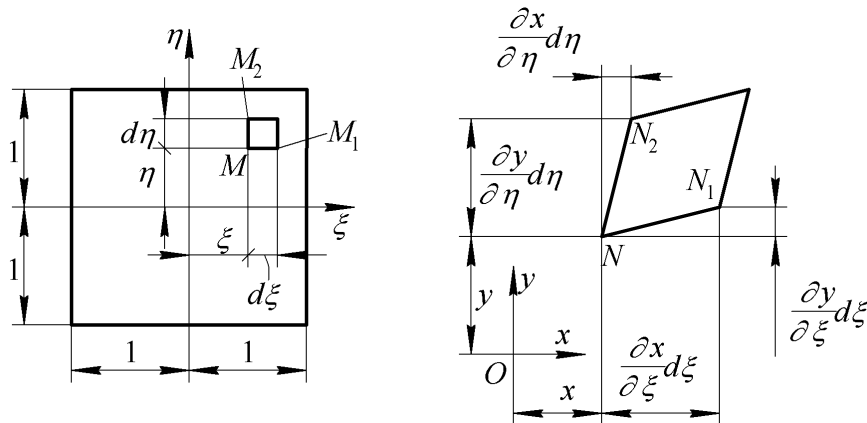


Рисунок 9.27 – К определению элементарной площади

Величина  $dA$  не изменится, если перенести начало координат  $O$  в точку  $N$ . Тогда в выражении для  $dA$  следует положить

$$x_N = y_N = 0; \quad x_{N_1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi; \quad y_{N_1} = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi;$$

$$x_{N_2} = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta; \quad y_{N_2} = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta.$$

Вычисление элементарной площади при этом упрощается:

$$dA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ 1 & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta.$$

Здесь через  $|J(\xi, \eta)|$  обозначен определитель матрицы Якоби:

$$|J(\xi, \eta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (9.72)$$

Учитывая, что каждая из переменных  $\xi$ ,  $\eta$  изменяется от -1 до 1, приходим к следующему выражению для вычисления блоков матрицы жёсткости изопараметрического конечного элемента:

$$[K_{rs}^e] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (9.73)$$

### 9.15 Численное интегрирование и вычисление напряжений в изопараметрических конечных элементах

Из сказанного выше понятно, что величины, фигурирующие в подынтегральном выражении (9.73), могут быть получены только численно для тех или иных значений параметров  $\xi$ ,  $\eta$ . Поэтому для нахождения  $[K_{rs}^e]$  необходимо воспользоваться численным интегрированием. Лучше всего для этой цели подходит метод квадратур Гаусса. Он заключается в вычислении подынтегральной функции в определённых точках (точках Гаусса), умножении найденных значений на некоторые весовые коэффициенты и сложении полученных результатов. В случае функции одной переменной квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n a_i f(\xi_i), \quad (9.74)$$

где  $\xi_i$ ,  $a_i$  – координаты точек Гаусса и соответствующие весовые коэффициенты,  $n$  – число точек Гаусса. Значения  $\xi_i$ ,  $a_i$  определяются из условия, чтобы формула (9.74) позволяла получить точное значение интеграла от степенной функции  $f(\xi)$  максимально высокой степени. Эта степень, называемая порядком численного интегрирования, для квадратуры Гаусса равна  $2n - 1$ . Приведём некоторые значения  $a_i$  и  $\xi_i$ :

для $n = 1$	$\xi_1 = 0; \quad a_1 = 2;$
для $n = 2$	$\xi_2 = -\xi_1 = 1/\sqrt{3}; \quad a_1 = a_2 = 1;$
для $n = 3$	$\xi_3 = -\xi_1 = \sqrt{3/5}; \quad \xi_2 = 0;$

$$a_1 = a_3 = 5/9; \quad a_2 = 8/9.$$

При вычислении интеграла от функции двух переменных будем иметь

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} a_{ij} f(\xi_i, \eta_j), \quad (9.75)$$

где  $n_1, n_2$  – число точек Гаусса в направлении  $\xi$  и  $\eta$  соответственно; весовые коэффициенты определяются как произведения  $a_{ij} = a_i a_j$ .

Потребное число точек Гаусса при вычислении матриц жёсткости изопараметрических конечных элементов зависит от порядка последних. Минимально допустимое число точек Гаусса определяется условием, чтобы интеграл

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

мог быть найден точно. Это соответствует требованию, чтобы численное интегрирование позволяло точно вычислить объём конечного элемента. Для изопараметрических конечных элементов первого порядка достаточно взять одну точку Гаусса (при  $\xi = \eta = 0$ ); для элементов второго и третьего порядков минимально необходимое число точек Гаусса равно соответственно  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ . Иногда число точек Гаусса в каждом направлении увеличивают на 1 по сравнению с минимально допустимым количеством. Но это не даёт заметного повышения точности результатов и в то же время приводит к существенному возрастанию объёма вычислений.

После нахождения узловых перемещений могут быть получены напряжения в конечном элементе по формуле (9.4):

$$[\sigma] = [\kappa][\beta][v^e].$$

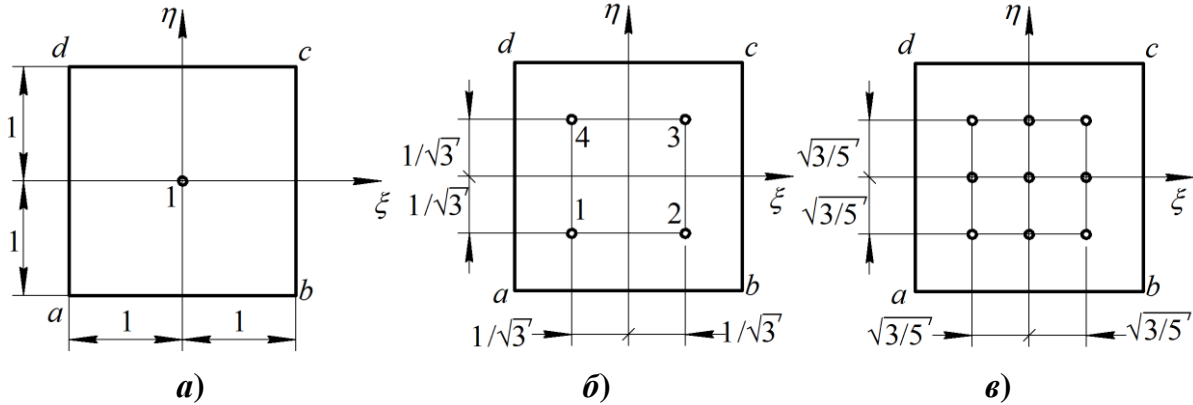
Точность их определения различна в разных точках элемента. Наиболее точные значения напряжений получаются в точках Гаусса, соответствующих минимально допустимому порядку интегрирования (рисунок 9.28). Для анализа результатов расчёта удобнее иметь напряжения в узлах конечного элемента. Их можно найти путём экстраполяции тех значений, которые соответствуют точкам Гаусса, на узловые точки. Например, для элемента первого порядка имеется всего одна точка Гаусса, и для него можно принять

$$\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = \sigma_d = \sigma_1,$$

где  $\sigma$  означает какую-либо компоненту матрицы напряжений; индексы  $a, b, c, d$  относятся к вершинам конечного элемента, а  $\sigma_1$  – величина напряжения в точке Гаусса.

Для элемента второго порядка можно выполнить интерполяцию  $\sigma$  по четырём точкам Гаусса:

$$\sigma(\xi, \eta) = \sum_1^4 \tilde{\psi}_r(\xi, \eta) \sigma_r.$$



**Рисунок 9.28 – Точки Гаусса, соответствующие минимально допустимому порядку интегрирования, для плоских изопараметрических конечных элементов первого (а), второго (б) и третьего (в) порядков**

Здесь  $\sigma_r$  – значения напряжения в точках Гаусса ( $r = 1, 2, 3, 4$ ); функция  $\tilde{\psi}_r(\xi, \eta)$  должна иметь единичное значение в точке Гаусса номер  $r$  и равняться нулю в трёх остальных точках. Легко убедиться, что этим условиям удовлетворяют функции

$$\tilde{\psi}_r(\xi, \eta) = \frac{1}{4m^4} (m^2 + \xi_r \xi) (m^2 + \eta_r \eta),$$

где  $m = 1/\sqrt{3}$ ;  $\xi_r, \eta_r$  – координаты точек Гаусса, равные  $\pm m$ .

Таким образом, приходим к следующему закону изменения напряжения  $\sigma$  в пределах конечного элемента:

$$\sigma(\xi, \eta) = \frac{1}{4m^2} \left[ (m - \xi)(m - \eta) \sigma_1 + (m + \xi)(m - \eta) \sigma_2 + (m + \xi)(m + \eta) \sigma_3 + (m - \xi)(m + \eta) \sigma_4 \right].$$

Полагая в этом выражении  $\xi = \pm 1$ ;  $\eta = \pm 1$ , можно получить формулы для напряжений в угловых точках конечного элемента:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= A + B + D; & \sigma_b &= A + C - D; \\ \sigma_c &= A - B + D; & \sigma_d &= A - C - D, \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4); \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3);$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_2 - \sigma_4); \quad D = \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4).$$

Подобным же образом может быть по девяти точкам Гаусса осуществлена экстраполяция напряжений на угловые точки и для изопараметрического конечного элемента третьего порядка. В этом случае в качестве  $\tilde{\psi}_r(\xi, \eta)$  должны выступать девять функций, имеющие зависимость от  $\xi, \eta$  типа (9.60).

### 9.16 Трёхмерные конечные элементы

Трёхмерные конечные элементы необходимы при расчёте пространственных тел. Матрицы перемещений внутренних точек и матрицы перемещений отдельных узлов трёхмерного конечного элемента имеют по три компоненты:

$$[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в матрице  $[\alpha]$  в соотношении

$$[u] = [\alpha][v^e]$$

будет три строки, которые мы обозначим через  $[\alpha_x]$ ,  $[\alpha_y]$  и  $[\alpha_z]$ :

$$u_x = [\alpha_x][v^e]; \quad u_y = [\alpha_y][v^e]; \quad u_z = [\alpha_z][v^e].$$

Матрицы деформаций и напряжений содержат в этом случае по шесть компонент:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T;$$

$$[\sigma] = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}]^T.$$

Из формул Коши следует, что матрица  $[\beta]$  в выражении

$$[\varepsilon] = [\beta][v^e]$$

имеет следующую структуру:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (9.76)$$

Как говорилось выше, связь между матрицами деформаций и напряжений записывается в форме

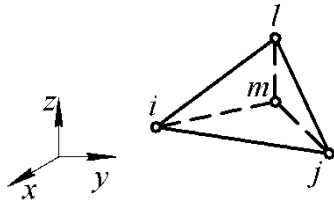
$$[\sigma] = [\kappa][\varepsilon].$$

В качестве  $[\kappa]$  здесь должна фигурировать матрица (3.32), которую можно представить следующим образом:

$$[\kappa] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & & & \\ \mu & 1-\mu & \mu & & & \\ \mu & \mu & 1-\mu & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (9.77)$$

Вычисление матрицы жёсткости и матрицы эквивалентных узловых сил или их блоков выполняется согласно общим формулам (9.7), (9.15) или (9.10), (9.16).

Простейшим конечным элементом подобного рода является тетраэдр с четырьмя узлами в вершинах (рисунок 9.29), для которого задаётся линейное поле перемещений:



$$\begin{aligned}
 u_x &= f_1 + f_2x + f_3y + f_4z; \\
 u_y &= f_5 + f_6x + f_7y + f_8z; \\
 u_z &= f_9 + f_{10}x + f_{11}y + f_{12}z.
 \end{aligned}$$

Здесь  $f_k$  – произвольные постоянные.

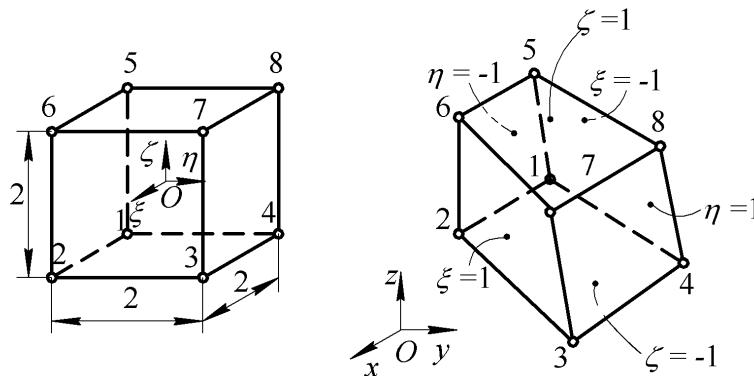
**Рисунок 9.29 – Конечный элемент в форме тетраэдра**

Приравнивая в узловых точках  $u_x, u_y, u_z$  к

соответствующим узловым перемещениям, можно выразить постоянные  $f_k$  через узловые перемещения  $[v^e]$  и получить зависимость вида  $[u] = [\alpha][v^e]$ . Использование стандартной процедуры приводит затем к матрице жёсткости конечного элемента. Все выкладки здесь подобны тем, которые делались выше для плоского треугольного элемента.

Деформации и напряжения в данном конечном элементе постоянны. Для получения необходимой точности решения в случае тела сложной формы может потребоваться весьма густая сетка. Более выгодными оказываются иногда изопараметрические конечные элементы. На рисунке 9.30 показаны исходный куб, отнесённый к безразмерным координатам  $\xi, \eta, \zeta$  и имеющий восемь узлов в вершинах, и соответствующий изопараметрический конечный элемент первого порядка. Каждая из координат изменяется в пределах куба от -1 до 1. Следуя описанной ранее схеме построения изопараметрических конечных элементов, координаты произвольной точки элемента представим как функции координат  $\xi, \eta, \zeta$  по формулам

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_r \psi_r(\xi, \eta, \zeta) x_r; \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_r \psi_r(\xi, \eta, \zeta) y_r; \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_r \psi_r(\xi, \eta, \zeta) z_r,
 \end{aligned} \tag{9.78}$$



**Рисунок 9.30 – К построению шестигранного изопараметрического конечного элемента первого порядка**



где  $x_r, y_r, z_r$  – координаты узлов. Каждая из функций формы  $\psi_r(\xi, \eta, \zeta)$  равна единице в одном из узлов и обращается в нуль в остальных. Выражение для любой из них даётся общей формулой

$$\psi_r(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)(1 + \zeta_r \zeta), \quad (9.79)$$

где  $\xi_r, \eta_r, \zeta_r$  – узловые значения безразмерных координат ( $r = 1, 2, \dots, 8$ ).

Подобно (9.78) определяются и перемещения точек конечного элемента:

$$\begin{aligned} u_x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_r \psi_r(\xi, \eta, \zeta) v_{rx}; \\ u_y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_r \psi_r(\xi, \eta, \zeta) v_{ry}; \\ u_z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_r \psi_r(\xi, \eta, \zeta) v_{rz}. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулы (9.78) – (9.79) обеспечивают совместность рассматриваемых конечных элементов.

Представим соотношения (9.80) в виде  $[u] = \sum_r [\alpha_r][v_r]$ , где

$$[\alpha_r] = \begin{bmatrix} \psi_r & 0 & 0 \\ 0 & \psi_r & 0 \\ 0 & 0 & \psi_r \end{bmatrix}; \quad (9.81)$$

суммирование выполняется по всем узлам элемента.

Тогда можно и зависимости  $[\varepsilon] = [\beta][v^e]$  придать аналогичную форму  $[\varepsilon] = \sum_r [\beta_r][v_r]$ , где на основании (9.75) будем иметь

$$[\beta_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial z} & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (9.82)$$

Требуемые здесь производные от функций  $\psi_r(\xi, \eta, \zeta)$  по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  могут быть найдены аналогично тому, как это делалось в случае плоских изопараметрических элементов:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (9.83)$$

Здесь  $[J]$  – матрица Якоби преобразования координат (9.78):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (9.84)$$

Можно показать, что бесконечно малый объём  $d\tau$  конечного элемента связан с элементарным объёмом  $d\xi d\eta d\zeta$  исходного куба равенством

$$d\tau = |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta,$$

где  $|J(\xi, \eta, \zeta)|$  – определитель матрицы Якоби. Блоки матрицы жёсткости можно найти с помощью численного интегрирования по формуле

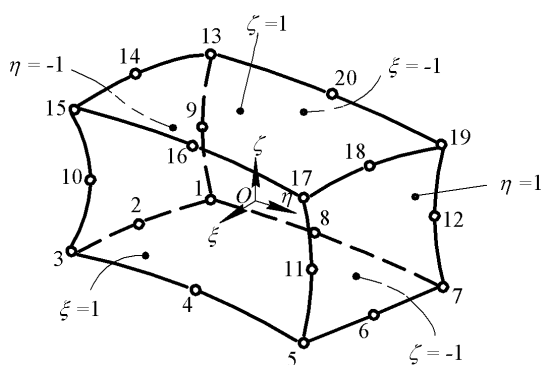
$$[K_{rs}^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta_r]^T [\kappa] [\beta_s] |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (9.85)$$

Минимально допустимый порядок интегрирования обеспечивается использованием одной точки Гаусса (при  $\xi = \eta = \zeta = 0$ ; весовой коэффициент равен 8).

Аналогично могут быть построены пространственные изопараметрические конечные элементы более высоких порядков. Например, на рисунке 9.30 показан конечный элемент второго порядка сирендипова типа. Элемент имеет 20 узлов: восемь узлов в вершинах шестигранника и по одному узлу (с координатой  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  или  $\zeta = 0$ ), на каждом ребре. Все формулы, относящиеся к элементу первого порядка, остаются здесь в силе. Отличие состоит в более сложных выражениях для функций формы, число которых равно здесь 20.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что все эти функции даются равенством вида

$$\begin{aligned} \psi_r(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{3\xi^2\eta^2\zeta^2 - 2}{8} \left[ \xi^2\eta^2\zeta^2(1 + \xi_r\xi)(1 + \eta_r\eta)(1 + \zeta_r\zeta) - \right. \\ & - \xi^2\eta^2(1 + \xi_r\xi)(1 + \eta_r\eta)(1 - \xi^2) - \eta^2\zeta^2(1 + \eta_r\eta)(1 + \zeta_r\zeta)(1 - \zeta^2) - \\ & \left. - \xi^2\zeta^2(1 + \xi_r\xi)(1 + \zeta_r\zeta)(1 - \eta^2) \right]. \end{aligned} \quad (9.86)$$



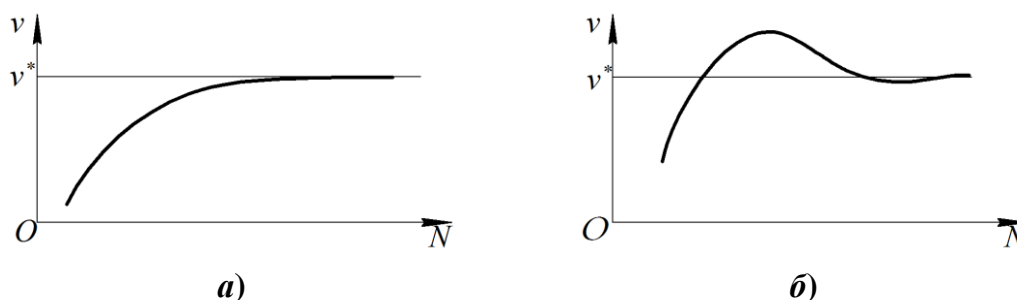
**Рисунок 9.31 – Изопараметрический конечный элемент второго порядка сирендипова типа**

Для интегрирования по формуле (9.85) необходимо использовать восемь точек Гаусса (правило интегрирования  $2 \times 2 \times 2$ ), что соответствует минимально допустимому порядку интегрирования. Каждая из координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  имеет в точках Гаусса значение  $1/\sqrt{3}$  или  $-1/\sqrt{3}$ ; все весовые коэффициенты равны 1.

## 9.17 Вопросы сходимости метода конечных элементов

Мы вправе ожидать, что получаемое методом конечных элементов решение будет по мере сгущения сетки сходиться к точному. Такая сходимость действительно имеет место, но при выполнении определённых условий. Первое из них есть *условие полноты* перемещений конечного элемента. В соответствии с ним выбранный закон изменения перемещений должен включать *перемещения конечного элемента как жёсткого тела*, а также допускать *однородное* (то есть не зависящее от координат) *деформированное состояние* конечного элемента с произвольными компонентами деформации. Другое условие сходимости касается совместности конечных элементов, которая должна быть обеспечена хотя бы в пределе, при неограниченном сгущении сетки. Если конечные элементы удовлетворяют условию полноты и совместны при любых размерах, а не только в пределе, то сходимость к точному решению оказывается *монотонной*. По мере сгущения сетки перемещения стремятся к точным значениям, не превышая их (рисунок 9.32,а). Если же имеет место несовместность конечных элементов, которая, однако, исчезает при сгущении сетки, то и в этом случае обеспечивается сходимость решения, но, как правило, немонотонная. По мере уменьшения

размеров конечных элементов перемещения и напряжения стремятся к точным значениям, оказываясь то выше их, то ниже (рисунок 9.32,б).



**Рисунок 9.32 – Монотонная (а) и немонотонная (б) сходимость к точному решению ( $v$  – какое-либо перемещение в некоторой точке;  $v^*$  – его точное значение;  $N$  – число узлов конечно-элементной модели)**

Поясним условия сходимости подробнее. Требование о жёстких перемещениях вытекает из следующих соображений. Если конечный элемент перемещается как жёсткое тело, то в нём не должно возникать никаких напряжений. Такое поведение будет обеспечено, если принятый закон изменения перемещений содержит в том числе перемещения конечного элемента как жёсткого тела, для которых все деформации равны нулю.

Далее, при сгущении сетки размеры конечных элементов уменьшаются. Изменение деформаций в пределах каждого из них будет всё менее существенным по сравнению с самими деформациями, то есть деформированное состояние будет приближаться к однородному. Функции перемещений должны позволять воспроизвести такое предельное состояние.

Возьмём в качестве примера плоский прямоугольный конечный элемент с билинейным полем перемещений, которое задаётся соотношениями

$$\begin{aligned} u_x &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy; \\ u_y &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy, \end{aligned} \quad (9.87)$$

где  $a_k$  – некоторые постоянные, связанные взаимно-однозначной зависимостью с узловыми перемещениями. Перемещениям (9.87) соответствуют деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_2 + a_4y; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = a_7 + a_8x; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = a_3 + a_4x + a_6 + a_8y. \end{aligned}$$

В выражения для деформаций не входят постоянные  $a_1$  и  $a_5$ , а постоянные  $a_3$  и  $a_6$  фигурируют только в виде суммы  $a_3 + a_6$ . Если ввести вместо  $a_3$  и  $a_6$  новые постоянные

$$a'_3 = a_3 + a_6; \quad a'_6 = a_3 - a_6,$$

то выражения для  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  не изменятся, а для  $\gamma_{xy}$  получится формула

$$\gamma_{xy} = a'_3 + a_4x + a_8y,$$

в которую не входит постоянная  $a'_6$ .

Таким образом, при любых значениях постоянных  $a_1$ ,  $a_5$  и  $a'_6 = a_3 - a_6$  деформации конечного элемента будут отсутствовать. Следовательно, эти постоянные соответствуют перемещениям конечного элемента в своей плоскости как жёсткого тела (двум линейным смещениям и повороту). Как видим, требование о жёстких перемещениях здесь выполнено.

Если положить далее  $a_4 = a_8 = 0$ , то деформации будут иметь постоянные значения:

$$\varepsilon_{xx} = a_2; \quad \varepsilon_{yy} = a_7; \quad \gamma_{xy} = a'_3.$$

Таким образом, при определённых значениях узловых перемещений в конечном элементе может быть создано однородное деформированное состояние с произвольными компонентами  $[\varepsilon]$ , как и требуется. Учитывая также, что соотношения (9.87) обеспечивают совместность конечных элементов, заключаем, что данный конечный элемент удовлетворяет всем условиям сходимости.

Точно так же можно показать, что плоский треугольный конечный элемент или пространственный элемент в форме тетраэдра удовлетворяют условиям сходимости.

Обратимся далее к плоскому прямоугольному конечному элементу с заданным полем напряжений. Для него перемещения определяются по формулам (9.38)

$$u_x = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy - \frac{a_8}{2}(\mu x^2 + y^2);$$

$$u_y = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy - \frac{a_4}{2}(x^2 + \mu y^2).$$

Так же, как это делалось выше, введём вместо  $a_3$  и  $a_6$  постоянные  $a'_3 = a_3 + a_6$ ;  $a'_6 = a_3 - a_6$ . Выражения для деформаций будут иметь вид

$$\varepsilon_{xx} = a_2 + a_4y - \mu a_8x; \quad \varepsilon_{yy} = a_7 + a_8x - \mu a_4y;$$

$$\gamma_{xy} = a'_3.$$

Отсутствие в данных выражениях трёх постоянных  $a_1$ ,  $a_5$  и  $a'_6$  указывает на возможность перемещений конечного элемента как жёсткого тела. Возможно также (при  $a_4 = a_8 = 0$ ) однородное деформированное состояние с компонентами

$$\varepsilon_{xx} = a_2; \quad \varepsilon_{yy} = a_7; \quad \gamma_{xy} = a'_3. \quad (9.88)$$

Следовательно, условие полноты перемещений конечного элемента выполняется. Нарушается только условие совместности, поскольку в случае произвольных узловых перемещений функции  $u_x$  и  $u_y$ , как уже говорилось ранее, терпят разрывы на границах между конечными элементами. Разрывы, однако, исчезают при неограниченном сгущении сетки, то есть при неограниченном уменьшении размеров конечных элементов. В самом деле, в предельном состоянии деформации конечного элемента определяются соотношениями (9.88). В них отсутствуют постоянные  $a_4$  и  $a_8$ , которые являются множителями при функциях  $\mu x^2 + y^2$  и  $x^2 + \mu y^2$ , нарушающих совместность. Это означает, что в предельном состоянии совместность конечных элементов будет соблюдаться. Благодаря этому использование подобных конечных элементов допустимо.

Обратимся далее к изопараметрическим конечным элементам. Ранее было показано, что в случае плоской задачи такие элементы совместны. То же самое относится и к пространственным изопараметрическим элементам, и остаётся, таким образом, проверить выполнение условия полноты. Остановимся подробнее на плоских изопараметрических конечных элементах. Представленный выше анализ прямоугольного конечного элемента с билинейным полем перемещений показывает, что требования условия полноты будут выполнены, если путём подходящего задания узловых перемещений в конечном элементе может быть создано поле перемещений вида

$$\begin{aligned} u_x &= a_1 + a_2 x + a_3 y; \\ u_y &= b_1 + b_2 x + b_3 y \end{aligned} \quad (9.89)$$

с произвольными значениями постоянных  $a_k$  и  $b_k$ . Для такого поля узловые перемещения имеют значения

$$\begin{aligned} v_{rx} &= a_1 + a_2 x_r + a_3 y_r; \\ v_{ry} &= b_1 + b_2 x_r + b_3 y_r, \end{aligned} \quad (9.90)$$

где  $r$  – произвольный узел конечного элемента.

Чтобы установить возможность выполнения равенств (9.89), предположим, что узлы конечного элемента получили перемещения, определяемые соотношениями (9.90). Тогда перемещения внутренних точек будут равны

$$u_x = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) v_{rx} = a_1 \sum_r \psi_r(\xi, \eta) + a_2 \sum_r \psi_r(\xi, \eta) x_r + a_3 \sum_r \psi_r(\xi, \eta) y_r;$$

$$u_y = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) v_{ry} = b_1 \sum_r \psi_r(\xi, \eta) + b_2 \sum_r \psi_r(\xi, \eta) x_r + b_3 \sum_r \psi_r(\xi, \eta) y_r.$$

Но поскольку  $\sum_r \psi_r(\xi, \eta) = 1$  согласно (9.57), с учётом равенств

$$x = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) x_r; \quad y = \sum_r \psi_r(\xi, \eta) y_r$$

приходим к соотношениям, совпадающим с (9.89).

Применительно к пространственным конечным элементам нужно воспользоваться аналогичными рассуждениями, но вместо (9.89) здесь должны фигурировать перемещения вида

$$u_x = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z;$$

$$u_y = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z;$$

$$u_z = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z.$$

При этом жёсткие перемещения (три линейных и три угловых) определяются шестью постоянными  $a_1; b_1; c_1; a'_3 = a_3 - b_2; b'_4 = b_4 - c_3$  и  $c'_2 = c_2 - a_4$ . Компоненты деформации в однородном деформированном состоянии имеют значения

$$\varepsilon_{xx} = a_2; \quad \varepsilon_{yy} = b_3; \quad \varepsilon_{zz} = c_4;$$

$$\gamma_{xy} = b'_2 = a_3 + b_2; \quad \gamma_{yz} = c'_3 = b_4 + c_3; \quad \gamma_{zx} = a'_4 = c_2 + a_4.$$

Таким образом, все рассмотренные выше конечные элементы удовлетворяют условиям сходимости.

При практическом использовании метода конечных элементов вопрос о необходимой густоте сетки, обеспечивающей желаемую точность результатов, решается обычно опытным путём.

# 10 ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

## 10.1 Комплексные величины

Многие задачи теории упругости удаётся свести к отысканию некоторых комплексных функций, благодаря чему их решение значительно упрощается. Прежде чем перейти к изложению данного метода, напомним некоторые сведения из теории функций комплексной переменной.

Комплексное число  $z$  определяется как сумма

$$z = x_1 + ix_2,$$

где  $x_1, x_2$  – вещественные числа;  $i = \sqrt{-1}$ .

Геометрическим образом  $z$  является точка на комплексной плоскости, где  $x_1$  и  $x_2$  – её координаты (рисунок 10.1). При этом ось  $x_1$  называется вещественной осью, а ось  $x_2$  – мнимой. Поскольку

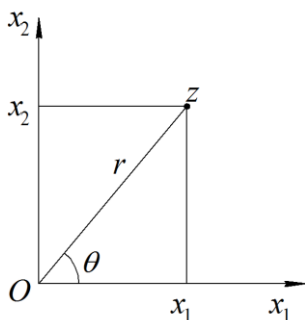


Рисунок 10.1 – Геометрический образ комплексного числа

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

где  $r$  и  $\theta$  – полярные координаты точки, комплексное число можно записать также в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Имеет место формула Эйлера

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

благодаря которой комплексное число может быть представлено ещё и в *экспоненциальной форме*

$$z = re^{i\theta}.$$

Величина  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  называется модулем, а  $\theta$  – аргументом комплексного числа.

Операции с комплексными числами производятся так же, как с действительными. Например,

$$(x_1 + ix_2)^2 = x_1^2 + 2ix_1x_2 + (ix_2)^2 = x_1^2 - x_2^2 + 2ix_1x_2,$$

поскольку  $i^2 = -1$ .

Выражение

$$\bar{z} = x_1 - ix_2$$



определяет комплексную величину, *сопряжённую* с комплексной величиной  $z$ . Произведение  $z\bar{z}$  является вещественной положительной величиной:

$$z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Функции, зависящие от комплексной переменной  $z$ , являются также комплексными. Алгебраические, экспоненциальные, логарифмические и другие функции переменной  $z$  образуются так же, как и функции действительной переменной. В случае тригонометрических функций следует исходить не из геометрического, а из аналитического определения.

Любая функция переменной  $z$  может быть представлена в виде

$$f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2),$$

где  $u(x_1, x_2)$  и  $v(x_1, x_2)$  – вещественные функции переменных  $x_1, x_2$ , называемые соответственно действительной и мнимой частью функции. Например,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - i \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}(e^{x_1+ix_2} + e^{-x_1-ix_2}) = \\ &= \frac{1}{2}[e^{x_1}(\cos x_2 + i \sin x_2) + e^{-x_1}(\cos x_2 - i \sin x_2)] = \\ &= \operatorname{ch} x_1 \cos x_2 + i \operatorname{sh} x_1 \sin x_2. \end{aligned}$$

Для каждой функции  $f(z)$  комплексной переменной можно путём замены всюду  $i$  на  $-i$  образовать *комплексно сопряжённую* функцию, которую будем обозначать  $\bar{f}(\bar{z})$ . Если, например, функция  $f(z)$  представлена в виде степенного ряда

$$f(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots,$$

где  $A_0, A_1, A_2, \dots$  – комплексные постоянные, то

$$\bar{f}(\bar{z}) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1\bar{z} + \bar{A}_2\bar{z}^2 + \dots$$

Заменив в выражении  $f(z)$  только  $z$  на  $\bar{z}$ , получим функцию, обозначаемую как  $f(\bar{z})$ :

$$f(\bar{z}) = A_0 + A_1\bar{z} + A_2\bar{z}^2 + \dots$$

Если же производится только замена коэффициентов на комплексно сопряжённые величины, то будем иметь функцию

$$\bar{f}(z) = \bar{A}_0 + \bar{A}_1z + \bar{A}_2z^2 + \dots$$

Произведение функции  $f(z) = u + iv$  на комплексно сопряжённую  $\bar{f}(\bar{z}) = u - iv$  будет, очевидно, действительной функцией:

$$f(z)\bar{f}(\bar{z}) = u^2 + v^2.$$

Это обстоятельство иногда помогает отделить действительные и мнимые части функции  $f(z)$ . Выше для функции  $1/z$  вещественный знаменатель был получен путём использования функции  $x_1 - ix_2$ , комплексно сопряжённой с функцией  $x_1 + ix_2$ . В качестве другого примера рассмотрим функцию  $\operatorname{th} z$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{x_1+ix_2} - e^{-x_1-ix_2}}{e^{x_1+ix_2} + e^{-x_1-ix_2}} \cdot \frac{e^{x_1-ix_2} + e^{-x_1+ix_2}}{e^{x_1-ix_2} + e^{-x_1+ix_2}} = \\ &= \frac{2\operatorname{sh} 2x_1 + 2i \sin 2x_2}{2\operatorname{ch} 2x_1 + 2\cos 2x_2} = \frac{\operatorname{sh} 2x_1 + i \sin 2x_2}{\operatorname{ch} 2x_1 + \cos 2x_2}. \end{aligned}$$

## 10.2 Аналитические функции

Производная  $f(z)$  по переменной  $z$  определяется как предел отношения

$$\frac{df(z)}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (10.1)$$

где  $\Delta z = \Delta x_1 + i\Delta x_2$ . Условие  $\Delta z \rightarrow 0$  означает, что  $\Delta x_1 \rightarrow 0$  и  $\Delta x_2 \rightarrow 0$ . Давая координатам приращения  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ , мы тем самым перемещаемся в соседнюю точку комплексной плоскости. Если предел отношения (10.1) не зависит от направления смещения, то есть если функция  $f(z)$  имеет единственную производную в данной точке, то функция называется *аналитической* (также регулярной, голоморфной) в этой точке. Точки, в которых функция  $f(z)$  не имеет производных, называются особыми.

Формулы для производных выглядят точно так же, как и для действительных функций. Например,

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}; \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

и т.д.

Величину  $\bar{z} = x_1 - ix_2$  можно рассматривать как функцию  $z$ , поскольку задание  $z$  означает задание  $x_1$  и  $x_2$  и, следовательно,  $x_1 - ix_2$ . Производная этой функции по  $z$  есть предел отношения  $(\Delta x_1 - i\Delta x_2)/(\Delta x_1 + i\Delta x_2)$  при  $\Delta x_1 \rightarrow 0$  и  $\Delta x_2 \rightarrow 0$ . Но данный предел зависит от направления смещения. Например, если

положить  $\Delta x_2 = 0$ , то предел будет равен 1. Если же взять  $\Delta x_1 = 0$ , то в пределе получится  $-1$ . Это означает, что  $x_1 - ix_2$  не является аналитической функцией  $z$ .

Аналитическая функция  $f(z)$  обладает неопределённым интегралом, который представляет собой такую функцию, также аналитическую, для которой функция  $f(z)$  является её производной. Например, если  $f(z) = 1/z$ , то

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z + C,$$

где  $C$  – комплексная постоянная.

Пусть  $f(z)$  является аналитической функцией. Найдём частные производные от неё по  $x_1$  и  $x_2$ . Так как  $z = x_1 + ix_2$  и

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = i,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{df}{dz}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x_2} = i \frac{df}{dz}. \quad (10.2)$$

Учитывая, что производная  $\frac{df}{dz}$  должна быть единственной, получаем отсюда соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = i \frac{\partial f}{\partial x_1}. \quad (10.3)$$

С другой стороны, полагая  $f(z) = u + iv$ , запишем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial v}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + i \frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

Следовательно, согласно (10.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + i \frac{\partial v}{\partial x_2} = i \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) = i \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Отделив вещественные и мнимые части, придём к равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (10.4)$$

Данные равенства, называемые *условиями Коши-Римана*, являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы функция  $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$  была аналитической.

Исключим  $v$  из соотношений (10.4), для чего первое из них продифференцируем по  $x_1$ , второе – по  $x_2$  и результаты сложим. В итоге получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \quad (10.5)$$

Аналогичным образом, исключая  $u$  из уравнений (10.4), найдём

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0. \quad (10.6)$$

Как видим, вещественная и мнимая части любой аналитической функции комплексной переменной удовлетворяют уравнению Лапласа. Решения уравнения Лапласа называют гармоническими функциями, так что каждая из функций  $u(x_1, x_2)$  и  $v(x_1, x_2)$  является *гармонической*. Действительная и мнимая части  $u(x_1, x_2)$  и  $v(x_1, x_2)$  аналитической функции называются *сопряжёнными гармоническими* функциями. Если дана некоторая гармоническая функция  $u(x_1, x_2)$ , то сопряжённая по отношению к ней гармоническая функция  $v(x_1, x_2)$  может быть найдена с точностью до постоянной интегрированием уравнений (10.4).

Итак, общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде  $\operatorname{Re} f(z)$  или  $\operatorname{Im} f(z)$ , где  $f(z)$  – произвольная аналитическая функция комплексной переменной  $z$ ; символы  $\operatorname{Re} f(z)$  и  $\operatorname{Im} f(z)$  означают действительную и мнимую части функции  $f(z)$ . Рассмотрим несколько примеров нахождения гармонических функций переменной  $z$ . Из равенства

$$e^{inz} = e^{inx_1} e^{-nx_2} = e^{-nx_2} \cos nx_1 + ie^{-nx_2} \sin nx_1$$

следует, что  $e^{-nx_2} \cos nx_1$  и  $e^{-nx_2} \sin nx_1$  – гармонические функции. Заменяя  $n$  на  $-n$ , получаем гармонические функции вида  $e^{nx_2} \cos nx_1$  и  $e^{nx_2} \sin nx_1$ . Поскольку любая линейная комбинация гармонических функций также является гармонической функцией, заключаем, что функции

$$\operatorname{ch} nx_2 \sin nx_1; \operatorname{ch} nx_2 \cos nx_1; \operatorname{sh} nx_2 \sin nx_1; \operatorname{sh} nx_2 \cos nx_1 \quad (10.7)$$

– гармонические функции.

Далее,

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Отсюда получаем следующие гармонические функции:

$$r^n \cos n\theta; \quad r^n \sin n\theta; \quad r^{-n} \cos n\theta; \quad r^{-n} \sin n\theta. \quad (10.8)$$

Из соотношения  $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$  находим гармонические функции

$$\ln r \text{ и } \theta. \quad (10.9)$$

Аналогично для функции  $z \ln z$  имеем

$$\begin{aligned} z \ln z &= re^{i\theta} \ln(re^{i\theta}) = r(\cos \theta + i \sin \theta)(\ln r + i\theta) = \\ &= r(\cos \theta \ln r - \theta \sin \theta) + ir(\sin \theta \ln r + \theta \cos \theta), \end{aligned}$$

откуда получаем гармонические функции вида

$$r(\ln r \cos \theta - \theta \sin \theta) \text{ и } r(\ln r \sin \theta + \theta \cos \theta). \quad (10.10)$$

Нетрудно убедиться, что функции (10.8), (10.9) и (10.10) удовлетворяют уравнению Лапласа в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0.$$

### 10.3 Представление решения бигармонического уравнения через гармонические и комплексные функции

Предположим, что  $\psi(x_1, x_2)$  – гармоническая функция, то есть

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (10.11)$$

Умножим её на  $x_1$  и выполним операцию дифференцирования  $\nabla^2(x_1\psi)$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2(x_1\psi) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1\psi) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(x_1\psi) = \\ &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = x_1 \nabla^2 \psi + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

На основании (10.11) имеем

$$\nabla^2(x_1\psi) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (10.12)$$

Повторное применение операции Лапласа даёт

$$\nabla^2 \nabla^2(x_1\psi) = 2 \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \psi = 0.$$

Отсюда следует, что если функция  $\psi$  гармоническая, то функция  $x_1\psi$  является *бигармонической* и может использоваться в качестве функции напряжений в плоской задаче теории упругости. То же самое можно утверждать и в отношении функции  $x_2\psi$ . Покажем теперь, что любая бигармоническая функция  $\varphi(x_1, x_2)$  может быть выражена через гармонические функции.

Если  $\varphi$  – бигармоническая функция, она удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Обозначим через  $P$  функцию

$$P = \nabla^2 \varphi. \quad (10.13)$$

Поскольку

$$\nabla^2 P = 0,$$

функция  $P$  является гармонической. Она должна иметь сопряжённую гармоническую функцию; обозначим её через  $Q$ . Сумма  $P + iQ$  представляет собой аналитическую функцию переменной  $z$ , которую мы обозначим через  $f(z)$ :

$$f(z) = P + iQ.$$

Функция  $f(z)$  имеет интегральную функцию, также аналитическую. Если обозначить её через  $4\psi(z)$ , то можно записать

$$4\psi(z) = \int f dz$$

или

$$\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f dz.$$

Здесь опущена постоянная интегрирования, что не принципиально.

Отсюда  $\psi'(z) = \frac{1}{4} f(z)$ . Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} + i \frac{\partial q}{\partial x_1} = \psi'(z) = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + iQ).$$

Приравнивая здесь действительные части, будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{4} P. \quad (10.14)$$

Но в соответствии с соотношениями Коши-Римана  $\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial q}{\partial x_2}$ , так что

справедливо также равенство

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = \frac{1}{4} P. \quad (10.15)$$

Из полученных соотношений вытекает, что функция  $\varphi - x_1 p - x_2 q$  является гармонической. В самом деле, учитывая (10.12) и подобное же соотношение для  $\nabla^2(x_2 \psi)$ , имеем

$$\nabla^2(\varphi - x_1 p - x_2 q) = \nabla^2 \varphi - 2 \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial q}{\partial x_2}.$$

Подставив сюда равенства (10.13), (10.14) и (10.15), убеждаемся в справедливости утверждения:

$$\nabla^2(\varphi - x_1 p - x_2 q) = P - 2 \frac{1}{4} P - 2 \frac{1}{4} P = 0.$$

Таким образом, для любой бигармонической функции справедливо равенство

$$\varphi - x_1 p - x_2 q = p_1,$$

где  $p_1$  – некоторая гармоническая функция. Следовательно, можно записать

$$\varphi = x_1 p + x_2 q + p_1. \quad (10.16)$$

Это равенство показывает, что *любая* функция напряжений может быть выражена через три соответствующим образом подобранные гармонические функции, две из которых являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Введём далее функцию  $q_1$ , которая является сопряжённой гармонической для  $p_1$ . Действительная часть функции

$$(x_1 - ix_2)(p + iq) + p_1 + iq_1$$

совпадает с функцией, стоящей в правой части равенства (10.16). Это позволяет представить функцию напряжений в следующем виде:

$$\varphi = \operatorname{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)], \quad (10.17)$$

где  $\chi(z) = p_1 + iq_1$ .

Как видим, *всякая функция напряжений может быть выражена через две соответствующим образом подобранные аналитические функции. И наоборот, при любом выборе  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$  выражение (10.17) даёт бигармоническую функцию, которая может быть использована в качестве функции напряжений.*

#### 10.4 Определение перемещений через функцию напряжений

Выведем соотношения, позволяющие вычислить перемещения по известной функции напряжений применительно к случаю плоского напряжённого состояния при отсутствии объёмных сил. Из формул закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}); \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12}$$

и соотношений Коши

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

получаем уравнения относительно перемещений

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sigma_{11} - \mu \sigma_{22}; \quad E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sigma_{22} - \mu \sigma_{11}; \quad G \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \sigma_{12}. \quad (10.18)$$

Внесём сюда функцию напряжений в соответствии с формулами

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (10.19)$$

Первое из равенств (10.18) будет выглядеть так:

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}.$$

Преобразуем его, добавляя и вычитая в правой части  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$ :

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - (1 + \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \nabla^2 \varphi - (1 + \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}.$$

Учитывая, что в соответствии с обозначением (10.13)  $\nabla^2 \varphi = P$ , получим

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -(1 + \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + P.$$

Аналогично будем иметь из второго равенства (10.18)

$$E \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -(1 + \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + P.$$

В соответствии с формулами (10.14) и (10.15) заменим далее  $P$  в первом из полученных равенств на  $4 \frac{\partial p}{\partial x_1}$ , а во втором – на  $4 \frac{\partial q}{\partial x_2}$ . После деления на  $(1 + \mu)$  получаем

$$2G \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{4}{1 + \mu} \frac{\partial p}{\partial x_1};$$

$$2G \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{4}{1 + \mu} \frac{\partial q}{\partial x_2}.$$

Данные равенства можно проинтегрировать, что приводит к соотношениям

$$2Gu_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{4}{1 + \mu} p + F_2(x_2);$$



$$2Gu_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{4}{1+\mu}q + F_1(x_1),$$

где  $F_1(x_1)$  и  $F_2(x_2)$  – произвольные функции своих аргументов. Для их определения полученные равенства подставим в третье соотношение (10.18) и учтём (10.19):

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{4}{1+\mu}\frac{\partial p}{\partial x_2} + F_2'(x_2) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{4}{1+\mu}\frac{\partial q}{\partial x_1} + F_1'(x_1)\right] = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}.$$

Но  $p$  и  $q$  – сопряжённые гармонические функции, и для них справедливо соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\frac{\partial q}{\partial x_1}.$$

С учётом этого приходим к равенству

$$F_1'(x_1) + F_2'(x_2) = 0.$$

Оно возможно, если

$$F_1'(x_1) = C_1; \quad F_2'(x_2) = -C_1,$$

где  $C_1$  – некоторая постоянная. Тогда

$$F_1(x_1) = C_1x_1 + C_2, \quad F_2(x_2) = -C_1x_2 + C_3,$$

где  $C_2$  и  $C_3$  – постоянные интегрирования.

Перемещения  $u_1, u_2$ , задаваемые выражениями

$$2Gu_1 = -C_1x_1 + C_3; \quad 2Gu_2 = C_1x_2 + C_2 \quad (10.20)$$

определяют смещения тела как жёсткого целого вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  и его поворот относительно оси  $x_3$ . Опустим эти слагаемые, полагая тем самым, что тело закреплено в начале координат от перемещений и поворота. Тогда для  $u_1$  и  $u_2$  будем иметь такие выражения:

$$2Gu_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{4}{1+\mu}p; \quad 2Gu_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{4}{1+\mu}q. \quad (10.21)$$

При необходимости перемещения жёсткого тела вида (10.20) могут быть добавлены к соотношениям (10.21).

Полученные равенства позволяют найти перемещения  $u_1$  и  $u_2$ , если известна функция  $\varphi$ . Для этого необходимо вначале определить функцию  $P = \nabla^2\varphi$ , затем путём интегрирования уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$$

построить сопряжённую гармоническую функцию  $Q$  и, составив функцию  $f(z) = P + iQ$ , вывести функции  $p$  и  $q$  в соответствии с формулой

$$\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz.$$

Тем самым будут определены все члены в правых частях равенств (10.21).

### 10.5 Выражение напряжений и перемещений через комплексные потенциалы

Формулы (10.19) и (10.21) выражают напряжения и перемещения через функцию напряжений  $\varphi$ . Поскольку функция  $\varphi$  выражена через две функции  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$ , называемые *комплексными потенциалами*, через них же могут быть выражены также напряжения и перемещения.

Образуем прежде всего комплексную комбинацию  $u_1 + iu_2$ . Из равенств (10.21) следует, что

$$2G(u_1 + iu_2) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{4}{1+\mu}(p + iq).$$

Вспоминая, что  $p + iq = \psi(z)$ , приходим к выражению

$$2G(u_1 + iu_2) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{4}{1+\mu}\psi(z).$$

Как уже говорилось, любая функция  $F(z)$  может быть представлена в форме  $F(z) = u + iv$ , где  $u$  и  $v$  – вещественные функции. Ей соответствует комплексно сопряжённая функция  $\bar{F}(\bar{z}) = u - iv$ , которая получается путём замены всюду  $i$  на  $-i$ . Очевидно, что

$$F(z) + \bar{F}(\bar{z}) = 2u = 2\operatorname{Re} f(z).$$

Поэтому полученную ранее зависимость

$$\varphi = \operatorname{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

можно заменить равенством

$$2\varphi = \bar{z}\psi(z) + \chi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}).$$

Продифференцируем его по  $x_1$  и  $x_2$ , учитывая соотношения

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial \psi(z)}{\partial x_1} = \psi'(z);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\psi}(\bar{z})}{\partial x_1} &= \frac{d\bar{\psi}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} = \bar{\psi}'(\bar{z}); \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= i; \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} = -i; \quad \frac{\partial \psi(z)}{\partial x_2} = i\psi'(z); \\ \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{z})}{\partial x_2} &= \frac{d\bar{\psi}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} = -i\bar{\psi}'(\bar{z}).\end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}2\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \bar{z}\psi'(z) + \psi(z) + \chi'(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}); \\ 2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= i[\bar{z}\psi'(z) - \psi(z) + \chi'(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})].\end{aligned}$$

Объединим данные равенства, умножив второе из них на  $i$  и сложив с первым:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}). \quad (10.22)$$

С учётом этого получаем

$$2G(u_1 + iu_2) = -\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}) + \frac{4}{1+\mu}\psi(z)$$

или, окончательно,

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}), \quad (10.23)$$

где

$$\kappa = \frac{3-\mu}{1+\mu}.$$

Формула (10.23) позволяет определить  $u_1$  и  $u_2$  для плоского напряжённого состояния, если известны комплексные потенциалы  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$ . В случае плоской деформации необходимо заменить коэффициент Пуассона  $\mu$  на  $\mu' = \mu/(1-\mu)$ . При этом коэффициент  $\kappa$  в формуле (10.23) будет заменён на величину

$$\kappa' = \frac{3-\mu'}{1+\mu'} = 3-4\mu.$$

Чтобы получить формулы для напряжений, продифференцируем соотношение (10.22) по  $x_1$  и по  $x_2$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \psi'(z) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}).$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = i \left[ \psi'(z) - z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}''(\bar{z}) \right].$$

Умножим далее второе из равенств на  $i$ , а затем вычтем и сложим его с первым. Учитывая формулы, связывающие напряжения с функцией  $\varphi$ , запишем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\psi'(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z}) = 4\operatorname{Re}\psi'(z); \quad (10.24)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = 2 \left[ z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \right].$$

Заменив  $i$  на  $-i$  в последнем равенстве, приведём его к окончательному виду

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2 \left[ \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z) \right]. \quad (10.25)$$

Если отделить здесь действительные и мнимые части, найдём  $\sigma_{22} - \sigma_{11}$  и  $2\sigma_{12}$ . Следовательно, соотношения (10.24) и (10.25) определяют компоненты напряжений через комплексные потенциалы  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$ . Вместе с равенством (10.23) эти соотношения называются формулами Колосова-Мусхелишвили. Итак, имея функции  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$ , с помощью формул (10.24) и (10.25) можно найти напряжения, а согласно (10.23) – соответствующие перемещения.

Для иллюстрации сказанного обратимся к решению плоской задачи теории упругости в полиномах. Функцию напряжений в виде полинома степени  $n$  можно получить, если в соответствии с выражением (10.17) положить

$$\psi(z) = (a_n + ib_n)z^{n-1}; \quad \chi(z) = (c_n + id_n)z^n,$$

где  $a_n, b_n, c_n, d_n$  – произвольные вещественные коэффициенты. Как видим, полиномиальная функция, содержащая все члены любой степени  $n > 2$ , может содержать только четыре независимых вещественных постоянных.

Возьмём в качестве примера полином пятой степени:

$$\psi(z) = (a_5 + ib_5)z^4; \quad \chi(z) = (c_5 + id_5)z^5.$$

В этом случае

$$\psi'(z) = 4(a_5 + ib_5)z^3; \quad \chi'(z) = 5(c_5 + id_5)z^4.$$

$$\psi''(z) = 12(a_5 + ib_5)z^2; \quad \chi''(z) = 20(c_5 + id_5)z^3.$$

По формулам (10.24) и (10.25) находим

$$\sigma_{22} + \sigma_{11} = 4\operatorname{Re}4(a_5 + ib_5)z^3 = 16\operatorname{Re}\left\{ (a_5 + ib_5) \left[ x_1^3 - 3x_1x_2^2 + i(3x_1^2x_2 - x_2^3) \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 16a_5(x_1^3 - 3x_1x_2^2) - 16b_5(3x_1^2x_2 - x_2^3). \\
\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2\left[12(a_5 + ib_5)\bar{z}z^2 + 20(c_5 + id_5)z^3\right] = \\
&= 24(a_5 + ib_5)(x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2)^2 + 40(c_5 + id_5)(x_1 + ix_2)^3 = \\
&= \left[24a_5x_1(x_1^2 + x_2^2) - 24b_5x_2(x_1^2 + x_2^2) + \right. \\
&\quad \left.+ 40c_5(x_1^3 - 3x_1x_2^2) - 40d_5(3x_1^2x_2 - x_2^3)\right] + \\
&\quad + i\left[24a_5x_2(x_1^2 + x_2^2) + 24b_5x_1(x_1^2 + x_2^2) + \right. \\
&\quad \left.+ 40c_5(3x_1^3x_2 - x_2^3) + 40d_5(x_1^3 - 3x_1x_2^2)\right].
\end{aligned}$$

Выражения в квадратных скобках в последнем равенстве определяют  $\sigma_{22} - \sigma_{11}$  и  $2\sigma_{12}$ . Выражения для перемещений можно получить для рассматриваемого случая по формуле (10.23), из которой в случае плоского напряжённого состояния вытекает зависимость

$$2G(u_1 + iu_2) = \frac{3-\mu}{1+\mu}(a_5 + ib_5)z^4 - 4(a_5 - ib_5)z\bar{z}^3 - 5(c_5 - id_5)\bar{z}^4.$$

## 10.6 Напряжённое состояние около трещины

Итак, выше получены следующие соотношения:

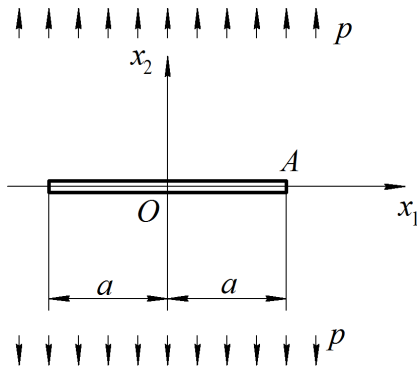
$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z});$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\operatorname{Re}\psi'(z);$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\left[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)\right],$$

где  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$  – аналитические функции;  $G$  – модуль сдвига. Параметр  $\kappa$  равен  $(3-\mu)/(1+\mu)$  в случае плоского напряжённого состояния или  $3-4\mu$  в случае плоской деформации. Применим указанные зависимости к случаю бесконечной пластины с прямолинейной трещиной длиной  $2a$ , которая находится на участке  $-a \leq x_1 \leq a$  оси  $x_1$  (рисунок 10.2). Вдали от трещины пластина испытывает равномерное одноосное растяжение вдоль оси  $x_2$  с напряжением  $p$ . Выясним характер напряжённого состояния, возникающего вблизи конца трещины.

Из соображений симметрии следует, что касательное напряжение  $\sigma_{12}$  должно на оси  $x_1$  равняться нулю. Данному требованию можно удовлетворить, если принять



**Рисунок 10.2 – Растяжение бесконечной пластины с трещиной**

$$\chi''(z) = -z\psi''(z). \quad (10.26)$$

В самом деле, при условии (10.26) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) - z\psi''(z)] = \\ &= -2(z - \bar{z})\psi''(z) = -4ix_2\psi''(z) = \\ &= 4x_2 \operatorname{Im}\psi''(z) - 4ix_2 \operatorname{Re}\psi''(z). \end{aligned}$$

Отделяя здесь действительные и мнимые части и учитывая формулу для  $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ , приходим к следующим

выражениям для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2[\operatorname{Re}\psi'(z) - x_2 \operatorname{Im}\psi''(z)]; \\ \sigma_{22} &= 2[\operatorname{Re}\psi'(z) + x_2 \operatorname{Im}\psi''(z)]; \\ \sigma_{12} &= -2x_2 \operatorname{Re}\psi''(z). \end{aligned} \quad (10.27)$$

Формулы (10.27) выражают поле напряжений с помощью одной только функции комплексной переменной  $\psi(z)$ . При  $x_2 = 0$ , как и требуется,  $\sigma_{12} = 0$ .

Интегрированием по частям правой части равенства (10.26) находим далее

$$\chi'(z) = -\int z\psi''(z) dz = -z\psi'(z) + \int \psi' dz,$$

то есть

$$\chi(z) = -z\psi'(z) + \psi(z). \quad (10.28)$$

С учётом данного соотношения перемещения также выражаются только через функцию  $\psi(z)$ :

$$\begin{aligned} 2G(u_1 + iu_2) &= \kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{z}\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) = \\ &= \kappa\psi(z) - \bar{\psi}(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\psi}'(\bar{z}). \end{aligned}$$

Отделив действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} Gu_1 &= \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re}\psi(z) - x_2 \operatorname{Im}\psi'(z); \\ Gu_2 &= \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im}\psi(z) - x_2 \operatorname{Re}\psi'(z). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Входящие в данные выражения коэффициенты равны

$$\frac{\kappa-1}{2} = \frac{1-\mu}{1+\mu}; \quad \frac{\kappa+1}{2} = \frac{2}{1+\mu}.$$

Заметим, что в случае плоской деформации вместо этих выражений будем иметь

$$\frac{\kappa-1}{2} = 1 - 2\mu; \quad \frac{\kappa+1}{2} = 2(1 - \mu).$$

На краях трещины напряжение  $\sigma_{22}$  должно равняться нулю. Возьмём в качестве  $\psi(z)$  функцию

$$\psi(z) = C\sqrt{z^2 - a^2}, \quad (10.30)$$

где  $C$  – вещественная постоянная. Дифференцирование даёт

$$\psi'(z) = \frac{Cz}{\sqrt{z^2 - a^2}}; \quad (10.31)$$

$$\psi''(z) = \frac{C}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{Cz^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}}. \quad (10.32)$$

Если положить  $x_2 = 0$  в выражении (10.27) для  $\sigma_{22}$ , то получим

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = 2\operatorname{Re}\psi'(z)|_{x_2=0}. \quad (10.33)$$

Так как  $z = x_1$  при  $x_2 = 0$ , на основании (10.31) находим выражение для функции  $\psi'(z)$  при  $x_2 = 0$ :

$$\psi'(z) = \frac{Cx_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}. \quad (10.34)$$

На участке трещины, где  $-a < x_1 < a$ , функция (10.34) оказывается чисто мнимой, так что  $\sigma_{22}$  обращается здесь в ноль в силу соотношения (10.33). Следовательно, задание функции  $\psi(z)$  в виде (10.30), позволяет удовлетворить граничным условиям на берегах трещины. Напомним, что касательное напряжение  $\sigma_{12}$  также равно здесь нулю благодаря соотношению (10.26) между функциями  $\chi(z)$  и  $\psi(z)$ .

Остаётся выяснить для принятой функции  $\psi(z)$  поведение напряжений при  $z \rightarrow \infty$ . В формулах (10.27) фигурируют функции  $\psi'(z)$  и  $x_2\psi''(z)$ . Функция  $\psi'(z)$ , как это видно из выражения (10.31), при  $z \rightarrow \infty$  стремится к  $C$ . Выражение (10.32) для  $\psi''(z)$  можно преобразовать следующим образом:

$$\psi''(z) = \frac{C}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{Cz^2}{\sqrt{(z^2 - a^2)^3}} =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left( 1 - \frac{z^2}{z^2 - a^2} \right) = -\frac{Ca^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{z^2 - a^2}.$$

Произведение  $x_2 \psi''(z)$  равно

$$x_2 \psi''(z) = -Ca^2 \frac{x_2}{(z^2 - a^2) \sqrt{z^2 - a^2}},$$

и при  $z \rightarrow \infty$  оно стремится к нулю.

Таким образом, при  $z \rightarrow \infty$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2C; \quad \sigma_{12} = 0.$$

Если положить  $2C = p$ , будем иметь на бесконечности

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = p; \quad \sigma_{12} = 0,$$

то есть мы приходим к решению задачи о всестороннем растяжении пластины с трещиной. Чтобы получить решение поставленной выше задачи об одноосном растяжении пластины, достаточно к напряжению  $\sigma_{11}$ , определяемому первой формулой (10.27), добавить постоянную величину, равную  $-p$ . В самом деле, если пластина растягивается вдоль трещины, то наличие трещины никак не повлияет на напряжённое состояние, которое останется однородным. Впрочем, в рассматриваемой задаче нас интересуют в первую очередь напряжения около конца трещины, которые весьма велики. Указанная поправка не играет в этой области никакой роли, поэтому её можно и не вводить.

За пределами трещины напряжение  $\sigma_{22}$  на оси  $x_1$  определяется выражением, вытекающим из формул (10.31) и (10.34):

$$\sigma_{22} = \frac{2Cx_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} = \frac{px_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \quad (|x_1| > a). \quad (10.35)$$

Обозначим через  $r = x_1 - a$  расстояние вдоль оси  $x_1$  от вершины  $A$  трещины (см. рисунок 10.2). В непосредственной близости от кончика трещины  $a \ll r$ , и можно записать

$$x_1 = a + r \approx a;$$

$$x_1^2 - a^2 = (x_1 - a)(x_1 + a) = r(r + 2a) \approx 2ar.$$

Для напряжения  $\sigma_{22}$  в окрестности вершины получаем выражение

$$\sigma_{22} = \frac{pa}{\sqrt{2ar}} = p \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}}.$$

Данный результат принято записывать в форме



$$\sigma_{22} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}; \quad K_1 = p\sqrt{\pi a}. \quad (10.36)$$

Как видим, напряжение  $\sigma_{22}$  имеет в вершине трещины особенность типа  $1/\sqrt{r}$ . Коэффициент  $K_1$  называется коэффициентом интенсивности напряжений. Он зависит от величины напряжения и размера трещины.

В соответствии с формулами (10.29) можно найти и перемещения. В частности, при  $x_2 = 0$  перемещение  $u_2$  вычисляется при  $|x_1| < a$  по формуле

$$u_2 = \frac{\kappa + 1}{4G} p\sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

Выделив здесь главную особенность, получим для малых  $r = |x_1 - a|$

$$u_2 = \frac{\kappa + 1}{4G} p\sqrt{2ar} = \frac{\kappa + 1}{2G} K_1 \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (10.37)$$

Подобным образом решается и задача о трещине при чистом сдвиге. Трещина, как и ранее, расположена на оси  $x_1$ , но теперь условия на бесконечности имеют вид

$$\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0; \quad \sigma_{12}^\infty = \tau.$$

В этом случае вместо (10.26) и (10.28) необходимо принять

$$\chi''(z) = -z\psi''(z) - 2\psi'(z); \quad \chi'(z) = -z\psi'(z) - \psi(z).$$

Тогда для перемещений и напряжений будем иметь соотношения

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\psi(z) - (z - \bar{z})\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z});$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\operatorname{Re}\psi'(z);$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[-(z - \bar{z})\psi''(z) - 2\psi'(z)].$$

Отделяя действительные и мнимые части, можно получить формулы

$$Gu_1 = \frac{\kappa + 1}{2} \operatorname{Re}\psi(z) + x_2 \operatorname{Im}\psi'(z);$$

$$Gu_2 = \frac{\kappa - 1}{2} \operatorname{Im}\psi(z) - x_2 \operatorname{Re}\psi'(z);$$

$$\sigma_{11} = 4\operatorname{Re}\psi'(z) - 2x_2 \operatorname{Im}\psi''(z);$$

$$\sigma_{22} = 2x_2 \operatorname{Im}\psi''(z);$$

$$\sigma_{12} = -2[\operatorname{Im}\psi'(z) + x_2 \operatorname{Re}\psi''(z)]. \quad (10.38)$$

Отметим, что теперь при  $x_2 = 0$  выполняется условие  $\sigma_{22} = 0$ .

Далее положим

$$\psi(z) = C\sqrt{a^2 - z^2}; \quad (10.39)$$

тогда

$$\psi'(z) = -\frac{Cz}{\sqrt{a^2 - z^2}}; \quad \psi''(z) = -\frac{C}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{Cz^2}{(a^2 - z^2)^{3/2}}.$$

Как и ранее, убеждаемся в том, что произведение  $x_2\psi''(z)$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , а  $\psi'(\infty) = iC$ . Следовательно, при  $z \rightarrow \infty$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = -2C = \tau.$$

Напряжения снова имеют особенность типа  $1/\sqrt{r}$  около кончика трещины на оси  $x_1$ :

$$\sigma_{12} = K_{II} / \sqrt{2\pi r}; \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}. \quad (10.40)$$

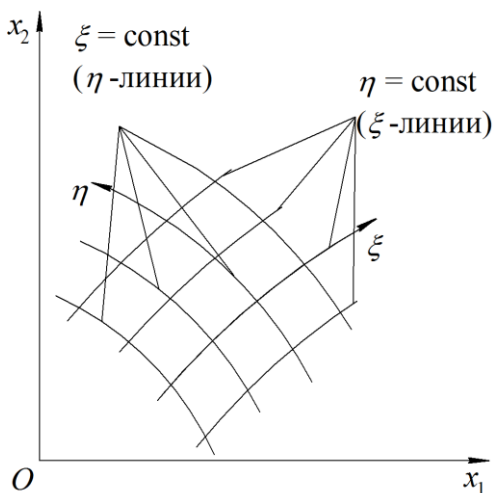
Таким образом, формулы имеют ту же структуру, что и в случае растяжения пластины с трещиной.

## 10.7 Криволинейные координаты

Во многих случаях для решения задачи оказывается желательным перейти к криволинейным координатам, которые вводятся с помощью соотношений

$$x_1 = f_1(\xi, \eta); \quad x_2 = f_2(\xi, \eta), \quad (10.41)$$

где  $f_1(\xi, \eta)$  и  $f_2(\xi, \eta)$  – некоторые функции, зависящие от двух переменных  $\xi$  и  $\eta$ . Будем предполагать, что каждой точке с координатами  $x_1, x_2$  соответствует только одна пара значений  $\xi$  и  $\eta$ . В этом случае параметры  $\xi$  и  $\eta$  можно трактовать как криволинейные координаты точки.



**Рисунок 10.3 – Криволинейные координаты**

Будем придавать параметру  $\eta$  некоторые фиксированные значения, изменяя каждый раз параметр  $\xi$ . В соответствии с равенствами (10.41) получим семейство кривых в плоскости  $x_1x_2$ , называемых линиями  $\eta = \text{const}$  или координатными  $\xi$ -линиями (рисунок 10.3). Аналогично, придавая ряд постоянных значений параметру  $\xi$  и изменяя  $\eta$ , получим семейство координатных  $\eta$ -линий. Через каждую точку будет проходить одна линия первого и одна линия второго семейства. Следовательно, всякая точка плоскости

может рассматриваться как пересечение двух линий  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ .

Простейшим примером могут служить полярные координаты  $r, \theta$ , через которые  $x_1$  и  $x_2$  выражаются зависимостями

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Если придавать  $\theta$  ряд постоянных значений, получим первое семейство координатных линий. Оно состоит из радиальных лучей, проходящих через начало координат; для каждого из них справедливо соотношение

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{tg } \theta.$$

Второе семейство состоит из окружностей, соответствующих фиксированным значениям  $r$  и имеющих уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Особый интерес представляют криволинейные координаты, связанные с  $x_1, x_2$  соотношением вида

$$z = f(\zeta), \tag{10.42}$$

где  $z = x_1 + ix_2$ ;  $\zeta = \xi + i\eta$ ;  $f(\zeta)$  – заданная функция. Такие координаты обладают некоторыми специальными свойствами.

Соотношение (10.42) означает задание двух функций

$$x_1 = x_1(\xi, \eta); \quad x_2 = x_2(\xi, \eta),$$

которые получаются при отделении действительных и мнимых частей в (10.42). Пусть точка  $m(x_1, x_2)$  имеет криволинейные координаты  $\xi, \eta$ . Если дать параметрам  $\xi, \eta$  приращения  $d\xi, d\eta$ , получим бесконечно близкую к  $m$  точку  $m_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ , где

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_1}{\partial \eta} d\eta; \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x_2}{\partial \eta} d\eta.$$

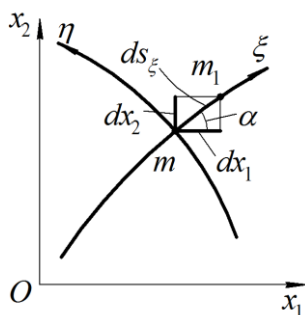


Рисунок 10.4 – Случай  $d\eta = 0$

Рассмотрим подробнее случай, когда приращение получает только параметр  $\xi$  (рисунок 10.4). При этом точка  $m$  смещается в положение  $m_1$  вдоль  $\xi$ -линии. Проекции отрезка  $mm_1$  на оси  $x_1, x_2$  будут

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} d\xi; \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} d\xi, \tag{10.43}$$

а квадрат его длины

$$ds_{\xi}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi^2. \quad (10.44)$$

Учитывая, что  $z = f(\zeta)$ , можно написать

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + i \frac{\partial x_2}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = f'(\zeta), \quad (10.45)$$

где

$$f'(\zeta) = \frac{df(\zeta)}{d\zeta}.$$

Обозначим через  $J$  модуль, а через  $\alpha$  – аргумент функции  $f'(\zeta)$ , то есть положим

$$f'(\zeta) = J e^{i\alpha} = J (\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (10.46)$$

Тогда из равенства (10.45) следует, что

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi} = J \cos \alpha; \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi} = J \sin \alpha, \quad (10.47)$$

а на основании (10.44) будем иметь

$$ds_{\xi} = J d\xi. \quad (10.48)$$

Как видим, величина  $J$  является множителем, на который нужно умножить приращение  $d\xi$ , чтобы получить длину  $ds_{\xi}$  соответствующего элемента  $\xi$ -линии.

Тангенс угла между отрезком  $mm_1$  и осью  $x_1$  равен

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi}} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, величина  $\alpha$ , определяемая соотношением (10.46), представляет собой угол между касательной к координатной  $\xi$ -линии и осью  $x_1$ .

Аналогично, если  $\eta$  получает приращение  $d\eta$ , в то время как  $d\xi = 0$ , то вместо (10.43) и (10.44) будем иметь

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} d\eta; \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \eta} d\eta; \quad ds_{\eta}^2 = \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta^2.$$

Далее,

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} + i \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = if'(\zeta),$$

и с учётом (10.46) получаем

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = -J \sin \alpha; \quad \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = J \cos \alpha; \quad ds_\eta = J d\eta. \quad (10.49)$$

Таким образом, элементарный отрезок  $\eta$ -линии также выражается через  $d\eta$  посредством множителя  $J$ .

Тангенс угла наклона  $\eta$ -линии с учётом (10.49) оказывается равным

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \eta}}{\frac{\partial x_1}{\partial \eta}} = -\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right),$$

то есть касательная к  $\eta$ -линии (в направлении возрастания параметра  $\eta$ ) составляет угол  $\pi/2 + \alpha$  с осью  $x_1$ . Следовательно,  $\xi$ - и  $\eta$ -линии пересекаются под прямым углом.

Для иллюстрации полученных соотношений рассмотрим криволинейные координаты  $\xi$  и  $\eta$ , определяемые равенством

$$z = k \operatorname{ch} \zeta,$$

где  $k$  – вещественная постоянная;  $\zeta = \xi + i\eta$ . В этом случае

$$f(\zeta) = k \operatorname{ch} \zeta; \quad f'(\zeta) = k \operatorname{sh} \zeta.$$

Отделив действительные и мнимые части, будем иметь

$$x_1 = k \operatorname{ch} \xi \cos \eta; \quad x_2 = k \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (10.50)$$

Кроме того, поскольку

$$k \operatorname{sh} \zeta = k \operatorname{sh} \xi \cos \eta + ik \operatorname{ch} \xi \sin \eta,$$

на основании (10.46) устанавливаем, что в данном случае

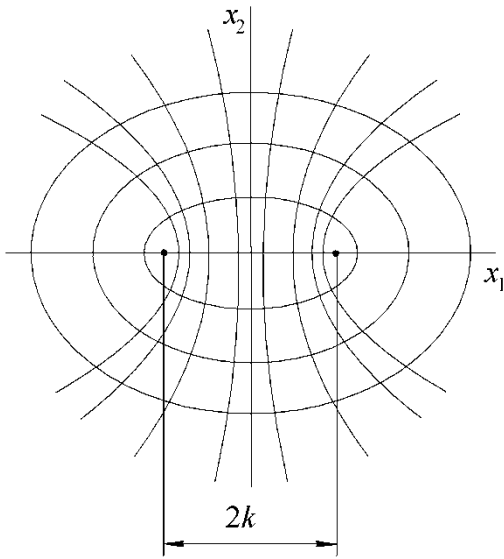
$$\begin{aligned} J &= k \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta} = k \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi (1 - \sin^2 \eta) + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta} = \\ &= k \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + (\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi) \sin^2 \eta} = k \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi}} = \frac{k \operatorname{ch} \xi \sin \eta}{k \operatorname{sh} \xi \cos \eta} = \operatorname{cth} \xi \operatorname{tg} \eta. \quad (10.51)$$

Исключив  $\eta$  из соотношений (10.50), получим равенство

$$\frac{x_1^2}{k^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{x_2^2}{k^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1. \quad (10.52)$$

При  $\xi = \text{const}$  это равенство есть уравнение эллипса с полуосями  $a = k \text{ch } \xi$  и  $b = k \text{sh } \xi$ . Как известно, эллипс представляет собой геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна. Фокусы располагаются на оси  $x_1$  на расстоянии  $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$  от начала координат. Для рассматриваемых эллипсов координаты фокусов равны  $x_1 = \pm k$ . Следовательно, равенством (10.52) задаётся семейство координатных  $\eta$ -линий в виде софокусных эллипсов (рисунок 10.5). На каждом из них координата  $\xi$  постоянна, а  $\eta$  изменяется в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Значению  $\eta = 0$ , как это видно из соотношений (10.50), соответствует точка на положительной оси  $x_1$ . При изменении  $\eta$  от 0 до  $2\pi$  точка на эллипсе один раз обходит его контур. В этом отношении параметр  $\eta$  аналогичен углу  $\theta$  в полярных координатах.



**Рисунок 10.5 – Эллиптические координаты**

Второе семейство координатных линий получим, исключив  $\xi$  из соотношений (10.50). Это приводит к уравнению

$$\frac{x_1^2}{k^2 \cos^2 \eta} - \frac{x_2^2}{k^2 \sin^2 \eta} = 1.$$

При фиксированном значении  $\eta$  последнее равенство есть уравнение гиперболы. Гипербола представляет собой геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) постоянна. У гиперболы, уравнение которой представлено в канонической форме  $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ , фокусы располагаются на оси  $x_1$  на расстоянии  $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$  от начала координат. В данном случае фокусы находятся в точках  $x_1 = \pm k$ , то есть они совпадают с фокусами эллипсов. Таким образом,  $\xi$ -линии образуют семейство софокусных гипербол, на каждой из которых параметр  $\eta$  остаётся постоянным, а  $\xi$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Рассмотренные координаты называют эллиптическими.

Заметим, что полярные координаты  $r, \theta$  могут быть введены с помощью равенства

$$z = e^{\zeta}.$$

Принимая  $\zeta = \xi + i\eta$  и отделяя действительные и мнимые части, будем иметь

$$x_1 = r \cos \theta; \quad x_2 = r \sin \theta,$$

где  $r = e^{\xi}; \theta = \eta$ . В данном случае

$$f(\zeta) = e^{\zeta}; \quad f'(\zeta) = e^{\zeta}.$$

Сравнивая последнее равенство с соотношениями (10.46), заключаем, что для полярных координат

$$J = e^{\xi} = r; \quad \alpha = \eta = \theta.$$

### 10.8 Компоненты напряжений и перемещений в криволинейных координатах

Обозначим через  $\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}; \sigma_{\xi\eta}$  и  $\sigma_{\eta\xi}$  нормальные и касательные напряжения в площадках, связанных с криволинейными координатами (рисунок 10.6).

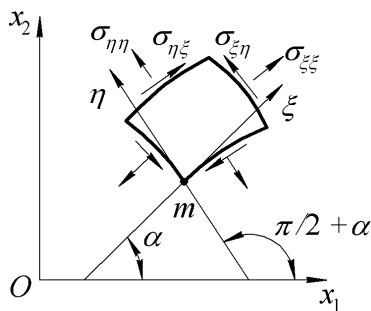


Рисунок 10.6 – Напряжения в криволинейных координатах

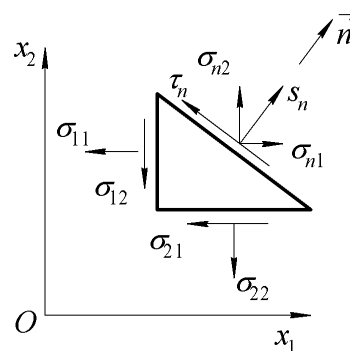


Рисунок 10.7 – К вычислению напряжений в наклонных площадках

Для установления связи между напряжениями в декартовых и криволинейных координатах рассмотрим наклонную площадку, ориентация которой определяется вектором единичной нормали  $\vec{n}$  с компонентами  $n_1, n_2$  (рисунок 10.7):

$$n_1 = \cos(\vec{n}, x_1); \quad n_2 = \cos(\vec{n}, x_2) = \sin(\vec{n}, x_1).$$

Нормальное и касательное напряжения в площадке обозначим через  $s_n$  и  $\tau_n$ .

Проекции  $\sigma_{ni}$  вектора полного напряжения в наклонной площадке на координатные оси даются тензорным равенством

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ji} n_j,$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $n_j$  – направляющие косинусы нормали к площадке. В случае плоской задачи имеем два равенства

$$\begin{aligned}\sigma_{n1} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2; \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2.\end{aligned}\tag{10.53}$$

Спроектировав  $\sigma_{n1}$  и  $\sigma_{n2}$  на направления нормали и касательной к площадке, получим выражения

$$\begin{aligned}s_n &= \sigma_{n1} n_1 + \sigma_{n2} n_2 = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2; \\ \tau_n &= -\sigma_{n1} n_2 + \sigma_{n2} n_1 = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) n_1 n_2 + \sigma_{21} (n_1^2 - n_2^2).\end{aligned}$$

Применим данные равенства к случаю криволинейных координат. Для площадки, нормаль к которой направлена в сторону возрастания координаты  $\xi$ , следует положить (см. рисунок 10.6)

$$s_n = \sigma_{\xi\xi}; \quad \tau_n = \sigma_{\xi\eta}; \quad n_1 = \cos \alpha; \quad n_2 = \sin \alpha;$$

а для площадки с нормалью, направленной в сторону возрастания  $\eta$ , нужно принять

$$s_n = \sigma_{\eta\eta}; \quad \tau_n = -\sigma_{\eta\xi}; \quad n_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha; \quad n_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Тогда получим соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha; \\ \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - \sigma_{12} \sin 2\alpha; \\ \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi} &= \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha.\end{aligned}\tag{10.54}$$

Отсюда вытекают равенства

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{11} + \sigma_{22}; \\ \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cos 2\alpha - 2\sigma_{12} \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{10.55}$$

Сложив последнее равенство с третьим соотношением (10.54), умноженным на  $2i$ , будем иметь

$$\begin{aligned}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cos 2\alpha - 2\sigma_{12} \sin 2\alpha + i[(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + 2\sigma_{12} \cos 2\alpha] &= \\ = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) e^{2i\alpha} + 2i\sigma_{12} e^{2i\alpha}.\end{aligned}$$



Таким образом, в дополнение к (10.55) выводим зависимость

$$\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} = e^{2i\alpha} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}). \quad (10.56)$$

Формулы (10.55) и (10.56) устанавливают искомую связь между напряжениями в декартовых и криволинейных координатах. Входящий в (10.56) множитель  $e^{2i\alpha}$  можно найти с помощью зависимости (10.46)

$$f'(\zeta) = J e^{i\alpha}.$$

Заменяя здесь  $i$  на  $-i$ , запишем

$$\bar{f}'(\bar{\zeta}) = J e^{-i\alpha}.$$

Последние два равенства позволяют получить искомое выражение:

$$e^{2i\alpha} = \frac{f'(\zeta)}{\bar{f}'(\bar{\zeta})}. \quad (10.57)$$

Например, для эллиптической системы координат имеем

$$f'(\zeta) = k \operatorname{sh} \zeta; \quad \bar{f}'(\bar{\zeta}) = k \operatorname{sh} \bar{\zeta},$$

поэтому

$$e^{2i\alpha} = \frac{\operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh} \bar{\zeta}}. \quad (10.58)$$

Для полярных координат  $\alpha = \theta$ , так что в этом случае

$$e^{2i\alpha} = e^{2i\theta}.$$

Вектор перемещения в криволинейных координатах определим его проекциями  $u_\xi$  и  $u_\eta$  на касательные к  $\xi$ - и  $\eta$ - линиям (рисунок 10.8). Положительные компоненты  $u_\xi$ ,  $u_\eta$  соответствуют перемещениям в сторону возрастания координат  $\xi$  и  $\eta$  соответственно. С компонентами  $u_1$ ,  $u_2$  они связаны соотношениями

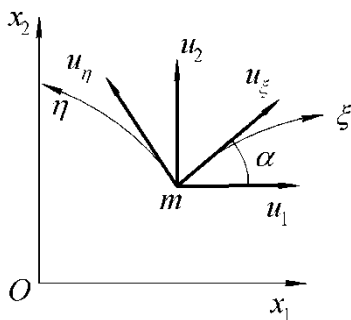


Рисунок 10.8 – Перемещения в криволинейных координатах

$$u_\xi = u_1 \cos \alpha + u_2 \sin \alpha;$$

$$u_\eta = u_2 \cos \alpha - u_1 \sin \alpha,$$

откуда

$$u_\xi + i u_\eta = e^{-i\alpha} (u_1 + i u_2). \quad (10.59)$$

Используя полученные ранее выражения напряжений и перемещений через комплексные потенциалы, приходим к следующим равенствам:

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] = 4\operatorname{Re}\psi'(z); \quad (10.60)$$

$$\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} = 2e^{2i\alpha} [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \quad (10.61)$$

$$2G(u_{\xi} + iu_{\eta}) = e^{-i\alpha} [\kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})], \quad (10.62)$$

где для плоского напряжённого состояния

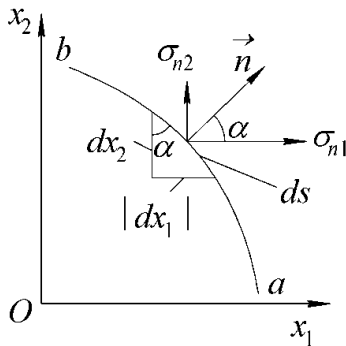
$$\kappa = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}, \quad (10.63)$$

а для плоской деформации

$$\kappa = 3 - 4\mu. \quad (10.64)$$

### 10.9 Результирующие напряжений, действующих вдоль некоторой кривой

Пусть в плоскости  $x_1, x_2$  пластины дана некоторая кривая  $ab$  (рисунок 10.9). Участки пластины, расположенные по разные стороны от кривой, взаимодействуют друг с другом. Найдём результирующие силы и момент, действующие на левую часть со стороны правой, считая положительным направление движения вдоль кривой от точки  $a$  к точке  $b$ . Положительное направление вектора нормали к кривой указано на рисунке. Направляющие косинусы  $n_1 = \cos \alpha$  и  $n_2 = \sin \alpha$  вектора  $\vec{n}$  можно связать с координатами кривой  $ab$  формулами



$$\cos \alpha = \frac{\partial x_2}{\partial s}; \quad \sin \alpha = -\frac{\partial x_1}{\partial s}.$$

Знак минус во второй формуле поставлен потому, что положительному значению  $ds$  соответствует отрицательное приращение координаты  $x_1$ .

Подставим выражения

$$n_1 = \frac{\partial x_2}{\partial s} \quad \text{и} \quad n_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial s}$$

Рисунок 10.9 – К определению сил и момента на дуге  $ab$

в формулы (10.53) и учтём зависимости

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

В результате получим следующие выражения для компонент полного напряжения в наклонной площадке:

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right); \quad (10.65)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n_2} &= \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial s} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial s} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right); \end{aligned} \quad (10.66)$$

Компоненты  $F_1$  и  $F_2$  результирующего усилия на дуге  $ab$  будут

$$F_1 = \int_a^b \sigma_{n_1} ds = \int_a^b \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) ds = \int_a^b d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right]_a^b; \quad (10.67)$$

$$F_2 = \int_a^b \sigma_{n_2} ds = -\int_a^b \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) ds = -\int_a^b d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = -\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right]_a^b, \quad (10.68)$$

где символ  $[\dots]_a^b$  означает разность значений стоящей в скобках величины в точках  $b$  и  $a$ .

Действующие на кривую  $ab$  силы дают относительно точки  $O$  момент

$$M = \int_a^b x_1 \sigma_{n_2} ds - \int_a^b x_2 \sigma_{n_1} ds = -\int_a^b \left[ x_1 d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + x_2 d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \right].$$

Выполним интегрирование по частям:

$$M = -\left[ x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right]_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 \right).$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = d\varphi,$$

отсюда получаем

$$M = [\varphi]_a^b - \left[ x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right]_a^b. \quad (10.69)$$

Пусть кривая  $ab$  представляет собой участок границы. Если нагрузки на этом участке отсутствуют, то  $F_1$  и  $F_2$  будут равны нулю. Как следует из формул (10.67) и (10.68), производные  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$  вдоль  $ab$  должны иметь тогда постоянные значения. Если же на кривой  $ab$  заданы нагрузки, то они выражаются

через значения  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$  вдоль границы, как это видно из формул (10.65) и

(10.66). Задание  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$  эквивалентно заданию вдоль границы производных

$\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  – по касательной и по нормали к кривой. Их можно считать извест-

ными, если на кривой  $ab$  заданы  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ .

Предположим далее, что точка  $b$  совпадает с точкой  $a$ , то есть  $ab$  – замкнутая кривая. Тогда формулы (10.67)...(10.69) дают результирующие силы и момент от напряжений, действующих на часть пластины, ограниченную замкнутым контуром.

Соотношения (10.67) и (10.68) можно записать в комплексной форме

$$F_1 + iF_2 = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right]_a^b = -i \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right]_a^b.$$

Воспользуемся выведенным ранее представлением функции напряжений через комплексные потенциалы

$$\varphi = \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \psi(z) + \chi(z) \right],$$

а также равенством (10.22)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \psi(z) + z \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}).$$

Замечая, кроме того, что

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \operatorname{Re} \left[ (x_1 - ix_2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \right] = \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \psi(z) + z \bar{z} \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{z} \bar{\chi}'(\bar{z}) \right], \end{aligned}$$

представим формулы для сил и момента в следующем виде:

$$F_1 + iF_2 = -i \left[ \psi(z) + z \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \right]_a^b; \quad (10.70)$$

$$M = \operatorname{Re} \left[ \chi(z) - z \bar{z} \bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{z} \bar{\chi}'(\bar{z}) \right]_a^b. \quad (10.71)$$

Пусть  $ab$  – замкнутая кривая, охватывающая начало координат. Если функции  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$  имеют вид  $z^n$ , где  $n$  – целое положительное или отрицательное число, то  $F_1$ ,  $F_2$  и  $M$  равны нулю, поскольку функции в скобках воз-

вращаются при обходе контура к первоначальным значениям. Функция  $\ln z = \ln r + i\theta$  при таком обходе не возвращается к первоначальному значению, поскольку  $\theta$  увеличивается на  $2\pi$ . Следовательно, если  $\psi(z)$  включает выражение  $C \ln z$  или  $\chi(z)$  включает выражение  $Dz \ln z$ , где  $C$  и  $D$  – комплексные постоянные, соотношение (10.70) даёт ненулевое значение  $F_1 + iF_2$ . Функция  $\chi(z) = D \ln z$  даёт ненулевое значение  $M$ , если  $D$  – мнимое число, но в случае вещественной постоянной  $D$  величина  $M$  будет нулевой.

## 10.10 Примеры выбора комплексных потенциалов

Ниже представлено несколько примеров подбора функций  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$  применительно к рассмотренным ранее задачам. Будем использовать полярные координаты, для которых формулы (10.60) ... (10.62) следует писать в виде

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\operatorname{Re}\psi'(z); \quad (10.72)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]; \quad (10.73)$$

$$2G(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} [\kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]. \quad (10.74)$$

### 10.10.1 Осесимметричное нагружение толстостенного цилиндра

Примем в качестве комплексных потенциалов функции

$$\psi(z) = Az; \quad \chi(z) = B \ln z,$$

где  $A$  и  $B$  – вещественные постоянные. В данном случае

$$\psi'(z) = A; \quad \psi''(z) = 0;$$

$$\chi'(z) = \frac{B}{z}; \quad \chi''(z) = -\frac{B}{z^2}.$$

Согласно (10.72) и (10.73) имеем

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4A;$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} \left( -\frac{B}{z^2} \right).$$

Так как  $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ , второе равенство принимает вид

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = -\frac{2B}{r^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = -\frac{2B}{r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Для нормальных напряжений получаем следующие выражения:

$$\sigma_{rr} = 2A + \frac{B}{r^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 2A - \frac{B}{r^2}.$$

Если сменить обозначения постоянных, положив  $A = B_0$ ;  $B = C_0$ , то данные выражения совпадут с формулами (6.33), которые определяют характер изменения напряжений в задаче Ламе.

Для перемещений получим

$$2G(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[ \kappa \cdot Az - z \cdot A - \frac{B}{\bar{z}} \right].$$

Так как

$$z = re^{i\theta}; \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r} e^{i\theta},$$

отсюда вытекает соотношение

$$2G(u_r + iu_\theta) = (\kappa - 1)Ar - \frac{B}{r},$$

то есть

$$u_r = \frac{\kappa - 1}{2G} Ar - \frac{1}{2G} \frac{B}{r}; \quad u_\theta = 0.$$

В соответствии с (10.63) имеем для плоского напряжённого состояния

$$\kappa - 1 = \frac{2(1 - \mu)}{1 + \mu},$$

и мы приходим к выражению

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ 2(1 - \mu)Ar - \frac{1 + \mu}{r} B \right],$$

которое также совпадает с точностью до обозначений постоянных с соотношением (6.35).

### 10.10.2 Чистый изгиб кривого бруса

Решение данной задачи может быть получено с помощью функций

$$\psi(z) = Az \ln z + Bz; \quad \chi(z) = C \ln z.$$

В самом деле, мы имеем

$$\psi'(z) = A(\ln z + 1) + B; \quad \psi''(z) = \frac{A}{z};$$

$$\chi'(z) = \frac{C}{z}; \quad \chi''(z) = -\frac{C}{z^2}.$$

По формулам (10.72) и (10.73) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4\operatorname{Re}\left[A(\ln z + 1) + B\right]; \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}\left(\frac{\bar{z}}{z} \frac{A}{z} - \frac{C}{z^2}\right).\end{aligned}$$

Принимая, что  $A$ ,  $B$  и  $C$  – вещественные постоянные, и учитывая, что

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta; \\ \frac{\bar{z}}{z} &= e^{-2i\theta}; \quad \frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2} e^{-2i\theta},\end{aligned}$$

устанавливаем отсюда следующие равенства:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4A(\ln r + 1) + 4B; \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= 2A - \frac{2C}{r^2}; \\ \sigma_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Для  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  получаются выражения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= A(2\ln r + 1) + 2B + \frac{C}{r^2}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= A(2\ln r + 3) + 2B - \frac{C}{r^2}.\end{aligned}$$

Как видим, данные выражения совпадают (если заменить обозначения постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  на  $D_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$ ) с формулами (6.37), которые дают закон изменения напряжений в задаче Головина о чистом изгибе кривого бруса.

Найдём далее перемещения точек кривого бруса. Согласно формуле (10.74) запишем

$$\begin{aligned}2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta}\left[\kappa(Az \ln z + Bz) - zA(\ln \bar{z} + 1) - zB - \frac{C}{\bar{z}}\right] = \\ &= e^{-i\theta}\left[Az(\kappa \ln z - \ln \bar{z} - 1) + (\kappa - 1)Bz - \frac{C}{\bar{z}}\right].\end{aligned}$$

Поскольку

$$z = re^{i\theta}; \quad \ln z = \ln r + i\theta; \quad \ln \bar{z} = \ln r - i\theta; \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r} e^{i\theta},$$

отсюда вытекает равенство

$$2G(u_r + iu_\theta) = \left[ (\kappa - 1)Ar \ln r - Ar + i(\kappa + 1)Ar\theta + (\kappa - 1)Br - \frac{C}{r} \right].$$

Учитывая, что

$$2G = \frac{E}{1+\mu}; \quad \kappa - 1 = \frac{2(1-\mu)}{1+\mu}; \quad \kappa + 1 = \frac{4}{1+\mu},$$

приходим к искомым соотношениям

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ 2(1-\mu)Ar \ln r - (1+\mu)Ar + 2(1-\mu)Br - \frac{1+\mu}{r}C \right];$$

$$u_\theta = \frac{4}{E}Ar\theta.$$

Последнее равенство показывает, что сечения бруса при чистом изгибе действительно остаются плоскими, как об этом уже говорилось ранее.

### 10.10.3 Одноосное растяжение пластины с круглым отверстием

Покажем, что в данном случае решение выражается посредством функций

$$\psi(z) = Az + \frac{B}{z}; \quad \chi(z) = C \ln z + Dz^2 + \frac{F}{z^2},$$

где  $A, B, C, D$  и  $F$  – вещественные постоянные.

Производные от указанных функций

$$\psi'(z) = A - \frac{B}{z^2}; \quad \psi''(z) = \frac{2B}{z^3};$$

$$\chi'(z) = \frac{C}{z} + 2Dz - \frac{2F}{z^3}; \quad \chi''(z) = -\frac{C}{z^2} + 2D + \frac{6F}{z^4}.$$

На основании (10.72) и (10.73) имеем

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re} \left( A - \frac{B}{z^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} \left[ \bar{z} \frac{2B}{z^3} - \frac{C}{z^2} + 2D + \frac{6F}{z^4} \right].$$

При разделении действительных и мнимых частей следует воспользоваться соотношениями

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z^2} = \operatorname{Re} \frac{e^{-2i\theta}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \cos 2\theta;$$

$$e^{2i\theta} \frac{\bar{z}}{z^3} = e^{2i\theta} \cdot e^{-4i\theta} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta);$$

$$e^{2i\theta} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2};$$



$$e^{2i\theta} \frac{1}{z^4} = \frac{1}{r^4} e^{-2i\theta} = \frac{1}{r^4} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta).$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4A - \frac{4B}{r^2} \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{4B}{r^2} \cos 2\theta - \frac{2C}{r^2} + 4D \cos 2\theta + \frac{12F}{r^4} \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{2B}{r^2} \sin 2\theta + 2D \sin 2\theta - \frac{6F}{r^4} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Отсюда устанавливаем формулы для напряжений в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2A + \frac{C}{r^2} + \left( -\frac{4B}{r^2} - 2D - \frac{6F}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2A - \frac{C}{r^2} + \left( 2D + \frac{6F}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r\theta} &= \left( -\frac{4B}{r^2} + 4D - \frac{6F}{r^4} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}$$

В случае растяжения пластины вдоль оси  $x_1$  напряжения вдали от отверстия должны иметь значения  $\sigma_{11} = p$ ,  $\sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ , где  $p$  – напряжение в пластине без отверстия. Напряжения в декартовых координатах связаны с комплексными потенциалами соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4 \operatorname{Re} \psi'(z) = 4 \operatorname{Re} \left( A - \frac{B}{z^2} \right); \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2 \left[ \bar{z} \psi''(z) + \psi''(z) \right] = 2 \left( \bar{z} \frac{2B}{z^3} - \frac{C}{z^2} + 2D + \frac{6F}{z^4} \right).\end{aligned}$$

Полагая  $z \rightarrow \infty$ , получим отсюда равенства

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \Big|_{z \rightarrow \infty} &= p = 4A; \\ (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) \Big|_{z \rightarrow \infty} &= -p = 4D,\end{aligned}$$

которые удовлетворяются при  $A = \frac{p}{4}$ ,  $D = -\frac{p}{4}$ .

Подстановка этих значений в формулы для напряжений позволяет прийти к выражениям

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} + \frac{C}{r^2} + \left( -\frac{4B}{r^2} + \frac{p}{2} - \frac{6F}{r^4} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} - \frac{C}{r^2} + \left( -\frac{p}{2} + \frac{6F}{r^4} \right) \cos 2\theta;$$

$$\sigma_{r\theta} = \left( -\frac{2B}{r^2} + \frac{p}{2} - \frac{6F}{r^4} \right) \sin 2\theta.$$

Как видно из сопоставления с формулами (6.55), именно данные выражения дают распределение напряжений около круглого отверстия при растяжении пластины вдоль оси  $x_1$  (с той лишь разницей, что вместо  $C_0$ ,  $B_2$  и  $D_2$  здесь фигурируют постоянные  $C$ ,  $F$  и  $B$  соответственно).

Найдём далее перемещения, воспользовавшись соотношением (10.74):

$$\begin{aligned} 2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta} \left[ \kappa \left( Az + \frac{B}{z} \right) - z \left( A - \frac{B}{\bar{z}^2} \right) - \left( \frac{C}{\bar{z}} + 2D\bar{z} - \frac{2F}{\bar{z}^3} \right) \right] = \\ &= e^{-i\theta} \left[ (\kappa - 1)Az + \kappa \frac{B}{z} + z \frac{B}{\bar{z}^2} - \frac{C}{\bar{z}} - 2D\bar{z} + \frac{2F}{\bar{z}^3} \right] = \\ &= (\kappa - 1)Ar + \kappa \frac{B}{r} e^{-2i\theta} + \frac{B}{r} e^{2i\theta} - \frac{C}{r} - 2Dre^{-2i\theta} + \frac{2F}{r^3} e^{2i\theta} = \\ &= (\kappa - 1)Ar - \frac{C}{r} + \left[ (\kappa + 1) \frac{B}{r} - 2Dr + \frac{2F}{r^3} \right] \cos 2\theta - \\ &\quad - i \left[ (\kappa - 1) \frac{B}{r} - 2Dr - \frac{2F}{r^3} \right] \sin 2\theta. \end{aligned}$$

После отделения действительных и мнимых частей получим

$$u_r = \frac{1}{E} \left\{ 2(1 - \mu)Ar - \frac{(1 + \mu)C}{r} + \left[ \frac{4B}{r} - 2(1 + \mu)Dr + \frac{2(1 + \mu)F}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\};$$

$$u_\theta = \frac{1}{E} \left[ -\frac{2(1 - \mu)B}{r} + 2(1 + \mu)Dr + \frac{2(1 + \mu)F}{r^3} \right] \sin 2\theta.$$

Входящие сюда постоянные были найдены ранее (см. раздел 6.8); в принятых здесь обозначениях можно записать

$$A = \frac{p}{4}; \quad D = -\frac{p}{4}; \quad 2B = pa^2; \quad C = -\frac{pa^2}{2}; \quad 6F = -\frac{3pa^4}{2}.$$

Выражения для  $u_r$  и  $u_\theta$  принимают с учётом этого вид

$$u_r = \frac{pa}{2E} \left\{ (1 - \mu) \frac{r}{a} + (1 + \mu) \frac{a}{r} + \left[ 4 \frac{a}{r} + (1 + \mu) \frac{r}{a} - 2(1 + \mu) \frac{a^3}{r^3} \right] \cos 2\theta \right\};$$

$$u_\theta = -\frac{pa}{2E} \left[ 2(1 - \mu) \frac{a}{r} + (1 + \mu) \frac{r}{a} + (1 + \mu) \frac{a^3}{r^3} \right] \sin 2\theta.$$

На контуре отверстия, то есть при  $r = a$ , получим следующие зависимости перемещений от угловой координаты:

$$u_r = \frac{pa}{E} \left( 1 + \frac{3-\mu}{2} \cos 2\theta \right); \quad u_\theta = -\frac{2pa}{E} \sin 2\theta.$$

#### 10.10.4 Действие сосредоточенной силы на полуплоскость

Зададимся следующими выражениями для комплексных потенциалов:

$$\psi(z) = A \ln z; \quad \chi(z) = Bz \ln z.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \frac{A}{z}; \quad \psi''(z) = -\frac{A}{z^2}; \\ \chi'(z) &= B(\ln z + 1); \quad \chi''(z) = \frac{B}{z}. \end{aligned}$$

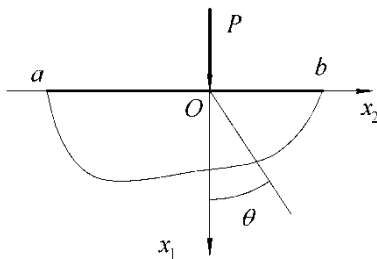
По формулам (10.72), (10.73) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4 \operatorname{Re} \frac{A}{z} = \frac{4A}{r} \cos \theta; \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= 2e^{2i\theta} \left( -\bar{z} \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} \right) = 2 \left( -\frac{A}{r} e^{-i\theta} + \frac{B}{r} e^{i\theta} \right) = \\ &= 2 \left( -\frac{A}{r} + \frac{B}{r} \right) \cos \theta + 2i \left( \frac{A}{r} + \frac{B}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left( \frac{3A}{r} - \frac{B}{r} \right) \cos \theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \left( \frac{A}{r} + \frac{B}{r} \right) \cos \theta; \\ \sigma_{r\theta} &= \left( \frac{A}{r} + \frac{B}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Если принять  $B = -A$ , полагая обе постоянные вещественными, то будут удовлетворены граничные условия  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$  при  $\theta = \pm \pi/2$ , и мы придём к



**Рисунок 10.10 – Действие сосредоточенной силы на полубесконечную пластину**

формулам, определяющим характер напряжённого состояния полубесконечной пластины, нагруженной на границе нормальной силой в точке  $x_1 = x_2 = 0$ :

$$\sigma_{rr} = \frac{4A}{r} \cos \theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Выделим участок пластины, заключённый между границей и какой-либо кривой  $ab$ , охватывающей начало координат (рису-

нок 10.10). Со стороны остальной части на этот участок вдоль кривой  $ab$  действуют напряжения; их результирующие  $F_1, F_2$  в направлении координатных осей могут быть найдены с помощью соотношения (10.70):

$$F_1 + iF_2 = -i \left[ \psi(z) + z\bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \right]_a^b = -i \left[ A \ln z + z \frac{A}{\bar{z}} + B(\ln \bar{z} - 1) \right]_a^b.$$

Учитывая, что  $B = -A$ , будем иметь

$$\begin{aligned} F_1 + iF_2 &= -iA \left[ \ln z - \ln \bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + 1 \right]_a^b = -iA \left[ \ln r + i\theta - (\ln r - i\theta) + e^{2i\theta} + 1 \right]_a^b = \\ &= -iA \left[ 2i\theta + \cos 2\theta + i \sin 2\theta + 1 \right]_a^b. \end{aligned}$$

В точках  $a$  и  $b$  угол  $\theta$  имеет значения  $-\pi/2$  и  $\pi/2$  соответственно. Поэтому можно записать

$$F_1 + iF_2 = 2A\pi,$$

то есть  $F_1 = 2A\pi, F_2 = 0$ .

Условие равновесия выделенной части пластины имеет вид

$$P + F_1 = 0,$$

откуда вытекает значение

$$A = -\frac{P}{2\pi}.$$

Таким образом, мы приходим к известным соотношениям

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

По формуле (10.74) определяем далее перемещения. Учитывая, что  $B = -A$ , получим

$$\begin{aligned} 2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta} \left[ \kappa A \ln z - z \frac{A}{\bar{z}} - B(\ln \bar{z} + 1) \right] = \\ &= e^{-i\theta} \left[ \kappa A (\ln r + i\theta) - A e^{2i\theta} + A (\ln r - i\theta + 1) \right] = \\ &= A \left[ (\kappa + 1) \ln r e^{-i\theta} + i(\kappa - 1) \theta e^{-i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right] = \\ &= A \left[ (\kappa + 1) \ln r \cos \theta + (\kappa - 1) \theta \sin \theta \right] + \\ &+ iA \left[ -(\kappa + 1) \ln r \sin \theta + (\kappa - 1) \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \right]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем следующие выражения для перемещений:

$$u_r = \frac{4A}{E} \ln r \cos \theta + \frac{2(1-\mu)A}{E} \theta \sin \theta;$$

$$u_\theta = -\frac{4A}{E} \ln r \sin \theta + \frac{2(1-\mu)A}{E} \theta \cos \theta - \frac{2(1+\mu)A}{E} \sin \theta.$$

Данные выражения отличаются от полученных ранее формул (6.78) жёстким смещением пластины. Результаты совпадут, если к последним соотношениям добавить выражения

$$u_r^* = -\frac{4A}{E} \ln s \cos \theta; \quad u_\theta^* = \frac{4A}{E} \ln s \sin \theta,$$

а также учесть, что  $A = -k/4$ , как это вытекает из обозначения (6.69). Если обратиться к рисунку (10.8), где нужно принять  $u_\xi = u_r$ ,  $u_\eta = u_\theta$ ,  $\alpha = \theta$ , то можно видеть, что перемещения  $u_1^*$  и  $u_2^*$ , соответствующие  $u_r^*$  и  $u_\theta^*$ , будут

$$u_1^* = u_r^* \cos \theta - u_\theta^* \sin \theta = -\frac{4A}{E} \ln s;$$

$$u_2^* = u_r^* \sin \theta + u_\theta^* \cos \theta = 0,$$

что и означает перемещение всей пластины как жёсткого целого вдоль оси  $x_1$  на величину  $-4A \ln s / E$ . Различие связано с тем, что ранее при отыскании перемещений мы считали неподвижно закреплённой точку, расположенную на оси  $x_1$  на расстоянии  $s$  от границы. При выводе же соотношений (10.21), выражающих перемещения через функцию напряжений, и вытекающих из них формул (10.23) и (10.74) были отброшены перемещения жёсткого тела, что эквивалентно закреплению тела в начале координат.

### 10.11 Растяжение пластины с эллиптическим отверстием

Пусть бесконечная пластина, имеющая эллиптическое отверстие с полуосями  $a$  и  $b$ , подвергается на бесконечности всестороннему растяжению с напряжением  $p$ . Для нахождения напряжений и перемещений возле отверстия воспользуемся эллиптическими координатами  $\xi$ ,  $\eta$  (см. рисунок 10.5), которые вводятся равенством

$$z = k \operatorname{ch} \zeta; \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (10.75)$$

Отсюда вытекают соотношения

$$x_1 = k \operatorname{ch} \xi \cos \eta; \quad x_2 = k \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

а также

$$\frac{dz}{d\zeta} = k \operatorname{sh} \zeta; \quad e^{2i\alpha} = \frac{\operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh} \bar{\zeta}}. \quad (10.76)$$

На контуре отверстия координата  $\xi$  имеет постоянное значение  $\xi_0$ , которое связано с полуосями равенствами

$$a = k \operatorname{ch} \xi_0; \quad b = k \operatorname{sh} \xi_0. \quad (10.77)$$

Данные равенства выражают также величину  $k$  через  $a$  и  $b$ :

$$k^2 = a^2 - b^2.$$

Когда точка на любом эллипсе  $\xi = \text{const}$  один раз обходит его контур, параметр  $\eta$  изменяется от нуля (на положительной оси  $x_1$ ) до  $2\pi$ . Перемещения и напряжения можно понимать как функции координат  $\xi, \eta$ . Очевидно, что они должны быть периодическими функциями  $\eta$ , то есть они должны при  $\eta = 2\pi$  принимать те же значения, что и при  $\eta = 0$ . Кроме того, при  $\xi \rightarrow \infty$  должны выполняться условия

$$\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = p; \quad \sigma_{12}^\infty = 0; \quad (10.78)$$

а на контуре отверстия, то есть при  $\xi = \xi_0$ , должно быть

$$\sigma_{\xi\xi} = 0; \quad \sigma_{\xi\eta} = 0. \quad (10.79)$$

Обратимся к формулам (10.24) и (10.25):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\operatorname{Re}\psi'(z); \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)]. \end{aligned}$$

Условия (10.78) требуют, чтобы на бесконечности выполнялись равенства

$$2\operatorname{Re}\psi'(z) = p; \quad \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z) = 0. \quad (10.80)$$

Поскольку напряжения и перемещения должны быть периодическими по  $\eta$  с периодом  $2\pi$ , мы должны использовать такие функции  $\psi(z)$  и  $\chi(z)$ , которые дают функцию напряжений с тем же периодом. В качестве таковых могут рассматриваться функции

$$\operatorname{sh} n\zeta = \operatorname{sh} n\xi \cos n\eta + i \operatorname{ch} n\xi \sin n\eta$$

и

$$\operatorname{ch} n\zeta = \operatorname{ch} n\xi \cos n\eta + i \operatorname{sh} n\xi \sin n\eta,$$

где  $n$  – целое число. Также пригодна для данной задачи функция  $\chi(z)$  типа  $B\zeta$ , где  $B$  – постоянная. Так как  $\zeta = \xi + i\eta$ , указанная функция при изменении  $\eta$  от 0 до  $2\pi$  получает приращение  $2\pi i$ , то есть при  $\xi \rightarrow \infty$  она ведёт себя как  $\ln z$ , а такая функция требуется в родственных задачах о всестороннем или одноосном растяжении пластины с круглым отверстием.

Примем

$$\psi(z) = Ak \operatorname{sh} \zeta.$$

Это выражение определяет  $\psi$  как неявную функцию аргумента  $z$ , поскольку  $z$  и  $\zeta$  связаны между собой соотношением (10.75). Производная  $\psi'(z)$  равна

$$\psi'(z) = Ak \operatorname{ch} \zeta \frac{d\zeta}{dz}.$$

Но  $d\zeta/dz = 1/z'(\zeta)$ , и в соответствии с (10.76), получаем

$$\psi'(z) = Ak \operatorname{ch} \zeta \cdot \frac{1}{k \operatorname{sh} \zeta} = A \operatorname{cth} \zeta. \quad (10.81)$$

Выражение для  $\operatorname{cth} \zeta$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} \zeta &= \frac{e^{\zeta+i\eta} + e^{-\zeta-i\eta}}{e^{\zeta+i\eta} - e^{-\zeta-i\eta}} \cdot \frac{e^{\zeta-i\eta} - e^{-\zeta+i\eta}}{e^{\zeta-i\eta} - e^{-\zeta+i\eta}} = \\ &= \frac{e^{2\zeta} - e^{-2\zeta} - e^{2i\eta} + e^{-2i\eta}}{e^{2\zeta} + e^{-2\zeta} - e^{2i\eta} - e^{-2i\eta}} = \frac{\operatorname{sh} 2\zeta - i \sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\zeta - \cos 2\eta}. \end{aligned} \quad (10.82)$$

Отсюда видно, что при бесконечном удалении от начала координат, когда  $\zeta \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \operatorname{cth} \zeta$  стремится к единице. Таким образом, первое условие (10.80) будет удовлетворяться, если  $2A = p$ .

Ещё раз дифференцируя равенство (10.81), получим

$$\psi''(z) = A \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh} \zeta} \right) \frac{d\zeta}{dz} = A \frac{\operatorname{sh}^2 \zeta - \operatorname{ch}^2 \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta} \cdot \frac{1}{k \operatorname{sh} \zeta} = -\frac{A}{k} \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \zeta}.$$

Произведение  $\bar{z}\psi''(z)$  оказывается равным

$$\bar{z}\psi''(z) = -k \operatorname{ch} \bar{\zeta} \cdot \frac{A}{k \operatorname{sh}^3 \zeta} = -A \frac{\operatorname{ch} \bar{\zeta}}{\operatorname{sh}^3 \zeta}. \quad (10.83)$$

Далее, в качестве  $\chi(z)$  возьмём функцию

$$\chi(z) = Bk^2 \zeta;$$

тогда

$$\chi'(z) = Bk^2 \frac{1}{k \operatorname{sh} \zeta} = \frac{Bk}{\operatorname{sh} \zeta}; \quad (10.84)$$

$$\chi''(z) = -Bk \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta} \cdot \frac{1}{k \operatorname{sh} \zeta} = -B \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^3 \zeta}. \quad (10.85)$$

Каждая из функций  $\bar{z}\psi''(z)$  и  $\chi''(z)$  на бесконечности обращается в нуль, так что второе условие (10.80) выполняется.

Условиям на контуре (10.79) можно удовлетворить с помощью подходящего выбора постоянной  $B$ . Напряжения в криволинейных координатах выражаются соотношениями (10.60) и (10.61):

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= 4\operatorname{Re}\psi'(z); \\ \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} &= 2^{2i\alpha} [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)].\end{aligned}$$

Если вычесть второе равенство из первого, получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\xi\eta} &= 2\operatorname{Re}\psi'(z) - e^{2i\alpha} [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] = \\ &= \psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}) - e^{2i\alpha} [\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)].\end{aligned}$$

Подставив выражения для входящих сюда функций и учитывая, что  $e^{2i\alpha}$  определяется вторым равенством (10.76), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\xi\eta} &= A \left( \frac{\operatorname{ch}\zeta}{\operatorname{sh}\xi} + \frac{\operatorname{ch}\bar{\zeta}}{\operatorname{sh}\bar{\zeta}} \right) + \frac{\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{sh}\bar{\zeta}} \left( A \frac{\operatorname{ch}\bar{\zeta}}{\operatorname{sh}^3\zeta} + B \frac{\operatorname{ch}\zeta}{\operatorname{sh}^3\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2\zeta \operatorname{sh}\bar{\zeta}} \left\{ A \left[ (\operatorname{ch}\zeta \operatorname{sh}\bar{\zeta} + \operatorname{ch}\bar{\zeta} \operatorname{sh}\zeta) \operatorname{sh}\zeta + \operatorname{ch}\bar{\zeta} \right] + B \operatorname{ch}\zeta \right\}.\end{aligned}$$

Для гиперболических функций справедливы тождества

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y; \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y.\end{aligned}\tag{10.86}$$

Благодаря этому можно записать

$$\sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\zeta \operatorname{sh}\bar{\zeta}} \left\{ A \left[ (\operatorname{sh}\zeta \operatorname{sh}(\zeta + \bar{\zeta}) + \operatorname{ch}\bar{\zeta}) \right] + B \operatorname{ch}\zeta \right\}.$$

На границе эллиптического отверстия, где

$$\xi = \xi_0; \quad \zeta + \bar{\zeta} = 2\xi_0; \quad \bar{\zeta} = 2\xi_0 - \zeta,$$

данное равенство принимает вид

$$\sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\zeta \operatorname{sh}\bar{\zeta}} \left\{ A \left[ \operatorname{sh}\zeta \operatorname{sh}2\xi_0 + \operatorname{ch}(2\xi_0 - \zeta) \right] + B \operatorname{ch}\zeta \right\}.$$

Учитывая (10.86), получаем отсюда

$$\sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2\zeta \operatorname{sh}\bar{\zeta}} (A \operatorname{ch}2\xi_0 + B) \operatorname{ch}\zeta.$$

Граничные условия (10.79) будут удовлетворены, если

$$B = -A \operatorname{ch}2\xi_0 = -\frac{P}{2} \operatorname{ch}2\xi_0.$$

Итак, мы приходим к следующим функциям:

$$\psi(z) = \frac{P}{2} k \operatorname{sh}\zeta; \quad \chi(z) = -\frac{P}{2} k^2 \operatorname{ch}2\xi_0 \cdot \zeta.\tag{10.87}$$



Данные функции дают решение поставленной задачи, если для них отсутствуют разрывы в перемещениях. Чтобы в этом убедиться, необходимо обратиться к соотношению (10.23)

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}).$$

В данном случае оно приводит к зависимости

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa Ak \operatorname{sh} \zeta - Ak \operatorname{ch} \zeta \operatorname{cth} \bar{\zeta} - \frac{Bk}{\operatorname{sh} \bar{\zeta}}. \quad (10.88)$$

Гиперболические функции имеют действительные и мнимые части, периодические по  $\eta$ . Следовательно, если обойти любой контур  $\xi = \operatorname{const}$ , перемещения  $u_1$  и  $u_2$  приобретут свои первоначальные значения. Это и доказывает, что комплексные потенциалы (10.87) дают решение поставленной задачи.

Напряжение  $\sigma_{\eta\eta}$  на контуре отверстия сразу находится из равенства

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 4\operatorname{Re}\psi'(z),$$

поскольку  $\sigma_{\xi\xi} = 0$  на контуре. С учётом (10.81) при  $A = p/2$  получаем

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 2p \operatorname{Re} \operatorname{th} \zeta.$$

На основании (10.82) имеем

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = \frac{2p \operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta},$$

так что на границе отверстия

$$\sigma_{\eta\eta} \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{2p \operatorname{sh} 2\xi_0}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \cos 2\eta}.$$

Наибольшая величина  $\sigma_{\eta\eta}$  получается при  $\cos 2\eta = 1$ , то есть на концах главной оси, где  $\eta = 0$  или  $\eta = \pi$ :

$$(\sigma_{\eta\eta})_{\max} = \frac{2p \operatorname{sh} 2\xi_0}{\operatorname{ch} 2\xi_0 - 1}.$$

Так как на основании (10.77)

$$k^2 = a^2 - b^2; \quad \operatorname{sh} 2\xi_0 = 2 \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 = \frac{2ab}{k^2};$$

$$\operatorname{ch} 2\xi_0 = \operatorname{ch}^2 \xi_0 + \operatorname{sh}^2 \xi_0 = \frac{a^2 + b^2}{k^2},$$

выражение для максимального напряжения можно привести к виду

$$(\sigma_{\eta\eta})_{\max} = 2p \frac{a}{b}.$$

Наименьшее значение  $\sigma_{\eta\eta}$  на контуре отверстия получается при  $\cos 2\eta = -1$ , то есть на концах малой оси, где  $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ :

$$(\sigma_{\eta\eta})_{\min} = \frac{2p \operatorname{sh} 2\xi_0}{\operatorname{ch} 2\xi_0 + 1}.$$

Отсюда выводим

$$(\sigma_{\eta\eta})_{\min} = 2p \frac{b}{a}.$$

При  $a = b$  получаем

$$(\sigma_{\eta\eta})_{\max} = (\sigma_{\eta\eta})_{\min} = 2p,$$

что совпадает с полученным ранее решением для всестороннего растяжения пластины с круглым отверстием.

В представленных выше примерах решение получено благодаря подходящему выбору комплексных потенциалов, которые имели относительно простой вид. Но существуют более мощные и общие методы отыскания потенциалов непосредственно из заданных граничных условий. В их основе лежит применение конформных отображений и использование свойств интегралов типа Коши. Рассмотрение этих методов выходит, однако, за рамки данного курса.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидов, С. П. Теория упругости : учебник для вузов / С. П. Демидов. – Москва: Высшая школа, 1979. – 432 с.
2. Кац, А. М. Теория упругости : учебник для вузов / А. М. Кац. – Санкт-Петербург: Лань, 2002. – 208 с.
3. Липовцев, Ю. В. Прикладная теория упругости : учебное пособие / Ю. В. Липовцев, М. Ю. Русин. – Москва: Дрофа, 2008. – 319 с.
4. Работнов, Ю.Л. Механика деформируемого твёрдого тела : учебное пособие для вузов / Ю.Л. Работнов. – Москва: Наука, 1988. – 712 с.
5. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
6. Сапунов, В. Т. Прикладная теория упругости: учебное пособие. Часть 1 / В. Т. Сапунов. – Москва: МИФИ, 2008. – 232 с.
7. Сапунов, В. Т. Прикладная теория упругости: учебное пособие. Часть 2 / В. Т. Сапунов. Москва: МИФИ, 2008. – 140 с.