

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики твердого тела и неравновесных систем

**Межкафедральная лаборатория
«Взаимодействие излучения с веществом»**

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС

Лабораторный практикум

Издательство «Универс-групп»
2005

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета*

УДК 532.517
ББК 22.253
Т 34

Тепломассоперенос: Лабораторный практикум / С.В. Цаплин, С.А. Большев, А.Е. Романов и др. – Самара: Универс-групп, 2005. – 48 с.

Предлагаемое учебное пособие включает в себя лабораторный практикум «Тепломассоперенос», проводимый по специализации «Теплофизика» физического факультета Самарского государственного университета.

Предназначено для студентов 5 курса, прослушавших курсы лекций «Молекулярная физика», «Тепломассоперенос», «Теплопроводность твердых тел».

Уровень сложности курса соответствует университетскому и может служить основой для фундаментального образования по физическим и механико-математическим специальностям.

УДК 532.517
ББК 22.253

Авторы: С.А. Большев – ассистент кафедры физики твердого тела и неравновесных систем
С.В. Давыденко – инженер межкафедральной лаборатории «Взаимодействие излучения с веществом»,
А.Е. Романов – ассистент кафедры физики твердого тела и неравновесных систем,
Д.В. Тютюмин – инженер межкафедральной лаборатории «Взаимодействие излучения с веществом»,
С.В. Цаплин – к.ф.-м.н., доцент кафедры физики твердого тела и неравновесных систем

Рецензент заведующий лабораторией химических электронных лазеров Самарского филиала ФИ РАН, кандидат физ.-мат. наук
В.Д. Николаев

© С.А. Большев, С.В. Давыденко,
А.Е. Романов, Д.В. Тютюмин,
С.В. Цаплин, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

<i>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1</i> Определение коэффициента теплопроводности металла	4
<i>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2</i> Определение коэффициента теплоотдачи от шара к воздуху методом регулярного режима	11
<i>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3</i> Теплоотдача цилиндра в условиях естественной конвекции	17
<i>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4</i> Тепловое излучение окисленной металлической поверхности	23
<i>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5</i> Внешняя задача теплообмена сферического тела при вынужденной конвекции	30
<i>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6</i> Нестационарный теплообмен сферического тела при естественной конвекции	37

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛА

Цель работы: изучение общих закономерностей механизма теплопроводности; определение теплопроводности металла.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Явление теплопроводности представляет собой процесс распространения тепловой энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела или отдельных тел. Если в среде существует градиент температуры, тепло переносится из высокотемпературной области в низкотемпературную. Скорость переноса тепла вследствие теплопроводности (кондуктивный тепловой поток q_k) пропорциональна градиенту температуры $\frac{\partial T}{\partial n}$ и площади S , через которую идет поток тепла, и зависит от коэффициента теплопроводности λ – теплофизической характеристики среды. Согласно гипотезе Фурье, скорость переноса тепла можно выразить количественным соотношением

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cdot S. \quad (1)$$

Знак минус обусловлен вторым законом термодинамики, согласно которому количество тепла должно уменьшаться в направлении снижения температуры. Градиент $\frac{\partial T}{\partial n}$ будет отрицательным, если температура снижается в направлении возрастания абсолютного значения вектора нормали \vec{n} .

Соотношение (1) называется законом теплопроводности Фурье и служит для определения коэффициента теплопроводности λ . Если площадь выражена в квадратных метрах, температура – в кельвинах, а тепловой поток – в ваттах, то λ имеет размерность Вт/(м×К).

Коэффициент теплопроводности нельзя рассчитать теоретически (исключения составляют газы при низких температурах). Поэтому имеющиеся сведения о коэффициентах теплопроводности различных материалов основаны на экспериментальных данных. Большинство из них (экспериментов) основаны на измерении теплового потока и градиента температур в заданном веществе. Коэффициент теплопроводности при этом определяется из соотношения

$$\lambda = \frac{|q|}{|\text{grad}T|}. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, которая проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице.

Для многих материалов коэффициент теплопроводности не является постоянной величиной, а зависит от температуры. Зачастую эту зависимость в определенных интервалах температур можно аппроксимировать линейной функцией, так, например, $273\text{K} \leq T \leq 373\text{K}$

$$\lambda(T) = \lambda_0 [1 + \alpha_0 (T - T_0)], \quad (3)$$

где λ_0 – значение коэффициента теплопроводности при характерной температуре T_0 ; α_0 – эмпирическая постоянная (берется из таблиц).

Механизм теплопроводности в газах можно качественно объяснить с помощью кинетической теории. Все молекулы газа находятся в хаотическом движении и обмениваются энергией и импульсом при столкновении друг с другом. Чем выше температура газа, тем больше кинетическая энергия молекул, поэтому молекула, движущаяся из высокотемпературной области в низкотемпературную, переносит кинетическую энергию на молекулярном уровне в область низкой температуры. При столкновении с молекулой, обладающей меньшей кинетической энергией, происходит передача энергии, которая с макроскопической точки зрения и является переносом тепла. На Рис. 1 показано изменение коэффициента теплопроводности

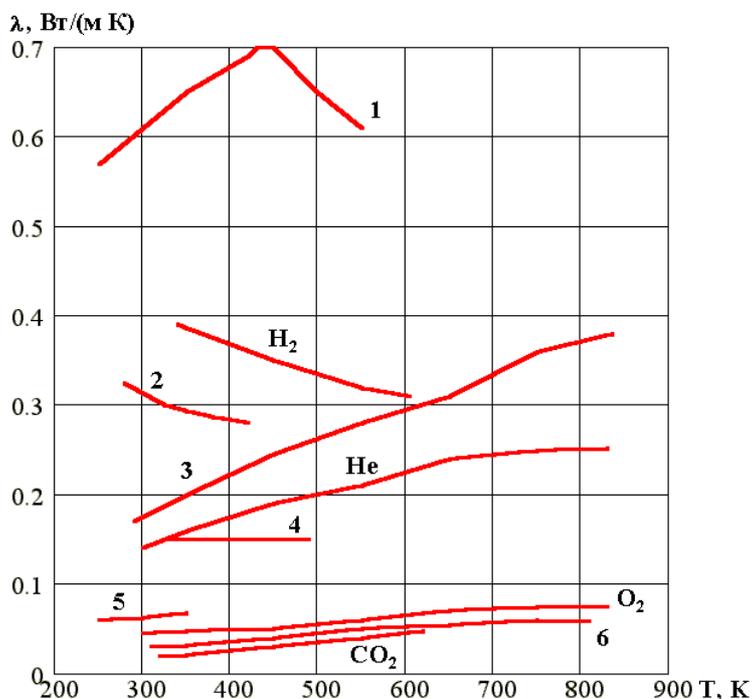


Рис.1. Изменение коэффициента теплопроводности газов и жидкостей:

1 – вода (на линии насыщения); 2 – глицерин; 3 – бензол;

4 – легкое масло; 5 – фреон-12; 6 – воздух

сти некоторых газов с изменением температуры. Значения λ практически не зависят от давления, исключая очень малые ($<2.66 \times 10^3$ Па) и очень большие ($>2 \times 10^9$ Па) давления. Согласно результатам упрощенного расчета, основанного на кинетической модели обмена, коэффициент теплопроводности газов пропорционален квадратному корню из температуры.

Физический механизм теплопроводности в капельных жидкостях качественно аналогичен описанному, но поскольку молекулы в жидкостях расположены ближе друг к другу и их силовые поля играют существенную роль при переносе энергии путем соударений, картины явлений еще сложнее, чем в газах. На Рис.1 также показаны значения коэффициента теплопроводности в зависимости от температуры. Для некоторых жидкостей (за исключением воды) значения уменьшаются с ростом температуры, но это изменение столь мало, что в большинстве практических задач коэффициент теплопроводности можно считать постоянным и равным значению, соответствующему величине при некоторой средней температуре, т.к. влияние давления несущественно.

На Рис.2 представлены зависимости коэффициента теплопроводности некоторых металлов и сплавов от температуры.

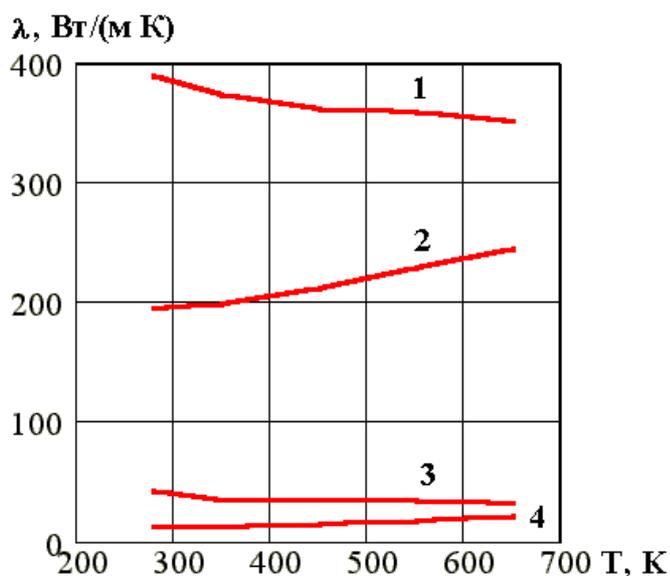


Рис.2. Изменение коэффициентов теплопроводности некоторых металлов:
 1 – медь; 2 – алюминий; 3 – углеродистая сталь;
 4 – нержавеющая сталь 18-8

В твердых телах энергия переносится свободными электронами, а также при колебаниях кристаллической решетки. В общем случае наиболее важную роль играет движение свободных электронов, а поскольку в хороших проводниках электричества движется много свободных электронов, последние в свою очередь являются и хорошими проводниками тепла (медь, серебро, алюминий). С другой стороны, хорошие электроизоляторы

являются и хорошими теплоизоляторами (стекло, пластмассы). Однако в лучших изоляторах высокая эффективность изоляции достигается за счет пористой структуры, заполненной газом. С ростом температуры коэффициенты теплопроводности твердых тел ведут себя по-разному. Например, у чистых материалов λ с возрастанием температуры обычно убывает, у сплавов и диэлектриков – увеличивается, что объясняется возрастанием теплопроводности среды, заполняющей промежутки между зернами материалов. Теплопроводность различных тел приведена в таблице 1.

Таблица 1

Наименование материала	T, К	λ , Вт/(м К)
Алюминий	273	209.3
Латунь (70% Cu, 30% Zn)	273	110.5
Медь	273	389.6
Никель	273	67.4
Олово	273	66.3
Серебро	273	418.7
Чугун	293	51.9

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Общий вид установки для определения λ представлен на рис. 3. Установка состоит из цилиндрического латунного стержня 2 диаметром 20 мм, на верхнем конце которого располагается электроподогреватель 1. Нижний конец латунного стержня спаивается (для лучшего контакта) с концом испытуемого стержня 3, диаметр которого также равен 20 мм. Свободный конец испытуемого стержня охлаждается водой, проходящей через холодильник 4. Холодильник представляет собой круглую коробочку, через внутреннюю полость которой циркулирует вода, поступающая из водопровода. Напряжение на электронагревателе регулируется с помощью автотрансформатора 6 и контролируется вольтметром 5.

Температура в концевых сечениях стержней замеряется хромель-копелевыми термопарами (T_1, T_2, T_3, T_4), ЭДС термопар регистрируется потенциометром 7. Расстояния между термопарами приняты одинаковыми и равны 35 мм.

Вся установка изолирована асбестовой ватой. При включении всех элементов ее тепловой режим стабилизируется через 20–30 мин. При этом с достаточной точностью можно утверждать, что все тепло, выделенное спиралью, пройдет через оба металлических стержня и поглотится холодильником.

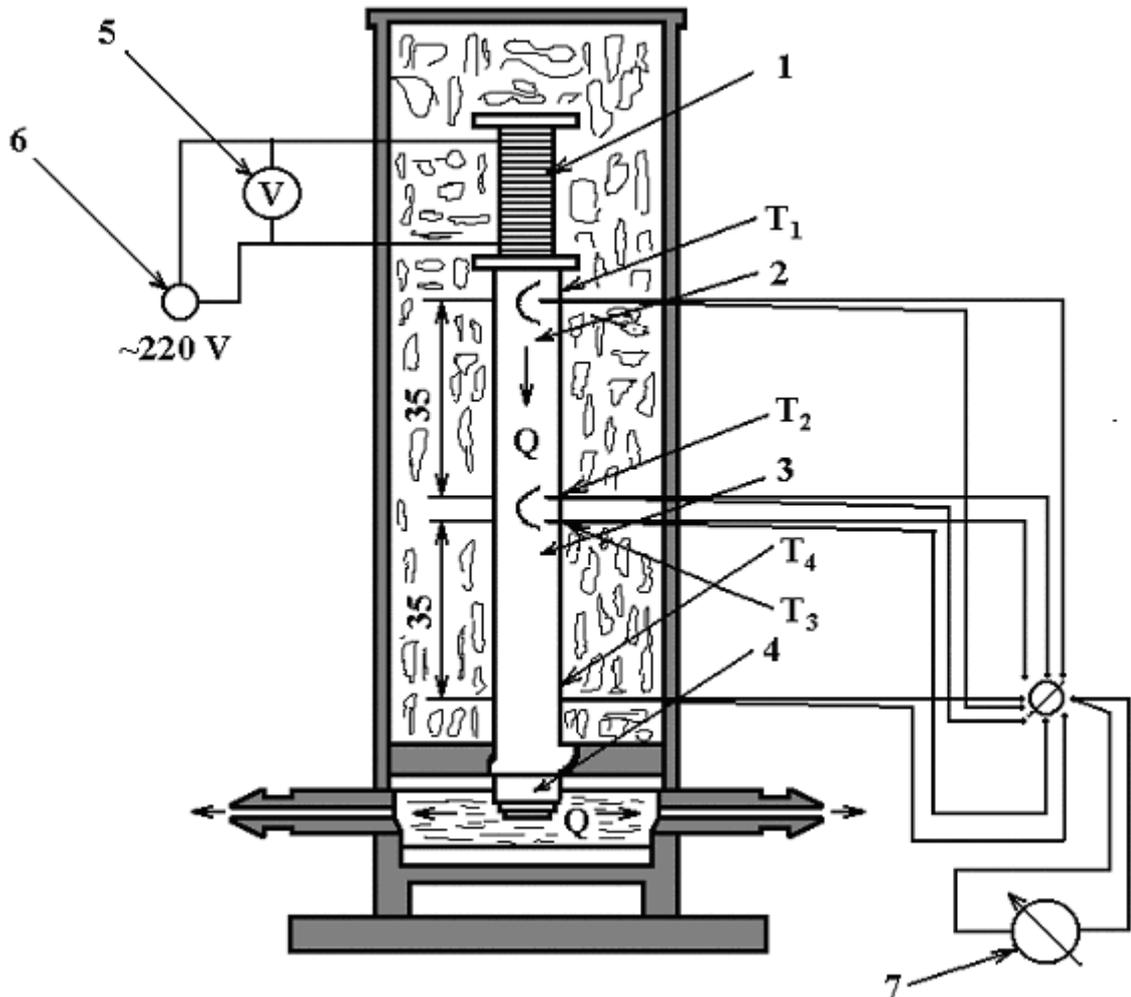


Рис.3 Вид установки для определения коэффициента теплопроводности металла

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Перед опытом установку для определения коэффициента теплопроводности необходимо прогреть в течение 20–30 минут для стабилизации теплового режима до температуры 200°C.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

По записанным данным проводится обработка результатов. Количество тепла, прошедшее вследствие теплопроводности,

$$q_1 = \frac{\lambda_{\text{лаг}} (T_1 - T_2)}{\delta_1} S_1, \text{ Вт} \quad (4)$$

где $\delta_1=0.035$ м – расстояние между термопарами 1 и 2.

Если пренебречь потерями тепла в окружающую среду, то можно считать, что количество тепла, проходящего через исследуемый стержень, равно q_2 , т.е.

$$q_2 = \frac{\lambda_x (T_3 - T_4)}{\delta_2} S_2, \text{ Вт} \quad (5)$$

где $\delta_2=0.035$ м – расстояние между термопарами 3 и 4.

В формулах (4) и (5) S_1 и S_2 – площади, перпендикулярные тепловому потоку, одинаковые для латунного и исследуемого стержня. Тогда

$$\frac{\lambda_{\text{лат}} (T_1 - T_2)}{\delta_1} = \frac{\lambda_x (T_3 - T_4)}{\delta_2}$$

Откуда

$$\lambda_x = \lambda_{\text{лат}} \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{T_1 - T_2}{T_3 - T_4}, \text{ Вт/(м К)} \quad (6)$$

$\lambda_{\text{лат}}$ подсчитывается по средней температуре латунного стержня, т.е. по температуре, равной $\frac{T_1 + T_2}{2}$.

Из формулы (3) имеем

$$\lambda_{\text{лат}} = \lambda_0 \left[1 + \alpha_0 \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - 273 \right) \right] = 110.5 \cdot \left[1 - 0.00018 \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - 273 \right) \right], \text{ Вт/(м К)}$$

где для латуни $\alpha_0 = -0.00018$, $\lambda_0(T_0) = 110.5$ Вт/(м К).

Зная коэффициент теплопроводности эталонного стержня и замерив хромель-копелевыми термопарами температуры, указанные в формуле (6), находим коэффициенты теплопроводности испытуемого материала λ_x .

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Краткое описание методики проведения эксперимента.
2. Принципиальная схема экспериментальной установки.
3. Протокол записи показаний измерительных приборов.
4. Результаты расчета коэффициента теплопроводности.
5. Выводы по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карташов Э.М. аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.

2. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Машгиз, 1962.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОТДАЧИ ОТ ШАРА К ВОЗДУХУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА

Цель работы: приобретение навыков экспериментального исследования частных задач конвективного теплообмена; ознакомление с нестационарными методами определения теплоотдачи.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Существуют два вида методов экспериментального определения конвективного коэффициента теплоотдачи α – стационарные и нестационарные.

Для одного и того же объекта в сходных физических условиях величина α может быть определена и тем, и другим методом, при этом количественные результаты будут различными. Это объясняется различиями в структуре теплового и гидродинамического пограничных слоев: в стационарных условиях оба слоя стабилизированы, а в нестационарных условиях, в общем случае, оба слоя непрерывно изменяются.

Последнее обстоятельство и является причиной количественных различий в теплоотдаче, которые тесно связаны с динамикой развития в нестационарном процессе. Если во времени нестационарный процесс протекает относительно медленно (в смысле медленного изменения температуры поверхности тела), то различия становятся весьма малыми. В этом случае нестационарную теплоотдачу можно охарактеризовать как квазистационарную. Квазистационарность следует понимать в том смысле, что для каждого момента времени в нестационарном процессе интенсивность переноса тепла от поверхности тела в окружающую среду имеет такое же значение, как и для стационарного, если для определения теплоотдачи принять мгновенное текущее значение параметров, определяющих нестационарный процесс.

Нестационарные методы исследования более просты по своему техническому оформлению и менее трудоемки, чем стационарные. К особым достоинствам этих методов следует отнести также возможность использования их для изучения конвективного теплообмена таких объектов, где применение стационарных методов физически невозможно. Например, теплоотдача на поверхностях вращающихся лопаток и дисков турбин, внутри действующих ядерных реакторов и др. Нестационарные методы исследования теплоотдачи, а также методы определения тепловых свойств материалов известны как «методы теплового регулярного режима».

В данной лабораторной работе рассматривается наиболее простой случай, связанный с применением регулярного режима. В работе экспериментально определяется конвективный коэффициент теплоотдачи α от ша-

ра к воздуху в условиях естественной конвекции. Величина α определяется на основе закономерности, вытекающей из рассмотрения процесса нестационарного охлаждения нагретого шара.

К телу, остывающему в изобарных условиях, применимо аналитическое выражение первого начала термодинамики, устанавливающее связь между количеством тепла и энтальпией:

$$dQ = M \cdot dh, \quad (1)$$

где M – масса объекта (в данном случае шара), кг; h – удельная энтальпия материала, Дж/кг.

Равенство (1) строго справедливо для равновесных и неравновесных процессов. Величина dQ в его левой части выражается суммой количества тепла, отдаваемого шаром окружающей среде вследствие конвекции dQ_f :

$$dQ = dQ_f. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем исходное дифференциальное уравнение для решения поставленной задачи:

$$M \cdot dh = dQ_f. \quad (3)$$

Перепишем выражение (3), используя для определения Q_f известную закономерность при условии бесконечной малости промежутка времени:

$$-M \cdot c_p dT = \alpha S \cdot (T - T_f) dt,$$

где T – мгновенное текущее значение температуры в процессе остывания, К; c_p – теплоемкость материала, Дж/(кг·К); S – площадь поверхности, м²; T_f – температура воздуха вдали от нагретой поверхности ($T_f = \text{const}$), К.

Знак минус в левой части равенства указывает на то, что при остывании температура понижается. Полученное выражение перепишем в виде:

$$\frac{dT}{(T - T_f)} = - \frac{S}{Mc_p} - \alpha d\tau. \quad (4)$$

С учетом сделанных преобразований получим конечную форму записи дифференциального нестационарного теплообмена:

$$\frac{d\theta}{\theta} = - \frac{S \alpha}{Mc_p} d\tau. \quad (5)$$

Сделав допущение $\alpha = \text{const}$ и введя обозначение:

$$m = \frac{S \alpha}{Mc_p}, \quad (6)$$

с использованием понятия логарифмической производной, проинтегрируем уравнение (5):

$$\ln \theta = -m\tau + C. \quad (7)$$

Уравнение (7) является отправным пунктом для расчета во всей теории регулярного режима. Из равенства (7) следует, что натуральный логарифм избыточной температуры θ является линейной функцией времени τ . При выводе уравнения (7) без специальных оговорок сделаны следующие допущения:

1. Шар остывает как одно целое (температура во всех точках шара имеет одно и то же значение), т.е. температурное поле по объему равномерно.

Параметром, определяющим неравномерность температурного поля, является критерий Био Bi :

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}. \quad (8)$$

При $Bi=0$ – строго равномерное распределение температур по объему, $Bi=\infty$ – предельная степень неравномерности температурного поля.

В данной установке порядок величины Bi для шара составляет $Bi \sim 0.001$. Можно показать, что в этом случае разность температур между центром и поверхностью в условиях опыта не превышает 0,1 К, что находится за пределами точности данных измерений.

2. $\alpha_{\Sigma} = \text{const}$.

Величина α слабо зависит от значений T и T_f , т.к. изменение θ составляет примерно 40 К. Используя в качестве ориентации формулы стационарной теплоотдачи, можно показать, что в этих условиях величина α изменяется не более чем на 2-3 %.

Поверхность шара никелирована и обладает слабой излучательной способностью ($\epsilon_1 = 0.075$), поэтому абсолютное значение α_R , по сравнению с α , составляет величину порядка $\sim 10\%$. Поскольку α_R является слагаемым в составе α_{Σ} , то полное изменение α_{Σ} во время опыта не превышает $\sim 3\%$.

Строго говоря, для оценки возможности интегрирования уравнения (5) важно постоянство всего комплекса m (6). Кроме рассмотренного влияния α_{Σ} на величину m , следует иметь в виду, что величина c_p , входящая в состав знаменателя, при остывании шара в диапазоне температур опыта (от 430К до 490К) также изменяется примерно на 0.5%. При этом α_{Σ} и c_p убывают. Поскольку эти величины входят в состав m в виде отношения, то их совместное влияние на изменение m меньше, чем отдельное влияние α_{Σ} , и, следовательно, изменение m фактически составит величину $\sim 2.5\%$.

Из уравнения (7) следует, что если в процессе остывания регистрировать величину θ и время τ , то в координатах логарифма относительной

температуры и времени должен получиться линейный график с тангенсом угла наклона $\operatorname{tg}(\beta) = -m$ (рис. 1).

В теории регулярного режима m именуется «темп охлаждения». Любые исследования, связанные с применением регулярного режима, всегда сводятся к определению m . В данном случае по величине m из соотношения (6) определяется α_{Σ} , а затем α .

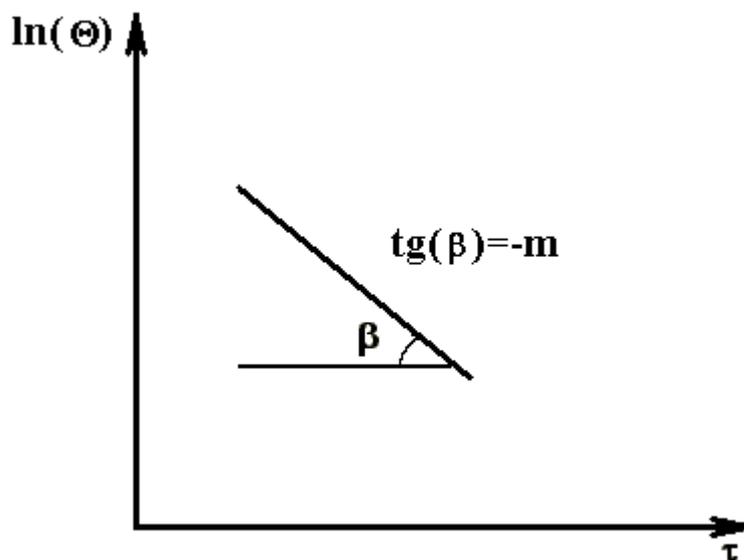


Рис. 1. График охлаждения нагретого тела в полулогарифмических координатах при $\alpha_{\Sigma} = \text{const}$

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Схема установки изображена на рис. 2. Шар (альфакалориметр) 1 выполнен из красной меди, никелирован и полирован. На трех проволоках он подвешен к кольцу большого химического штатива. Характеристики шара: $d=95$ мм (определено как среднее значение в результате микрометрического обмера), плотность меди $\rho_{\text{Cu}}=8930$ кг/м³, истинная изобарная теплоемкость меди $c_{p\text{Cu}}=0.3643 \cdot (1+2.4 \cdot 10^{-4} T)$ кДж/(кг·К).

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Для измерения текущей разности температур $\theta=T-T_f$ используется хромель-копелевая термопара 2. Горячий спай (г.с.) термопары через сверление помещен на высоту 6 мм от поверхности шара и залит сплавом Вуда. Термометр загорожен алюминиевым экраном 4 для защиты от лучеиспускания со стороны окружающих нагретых тел.

До начала эксперимента поверхность шара следует протереть спиртом. Затем шар прогревают на специальной плитке до температуры 430 – 440 К. Общее время эксперимента – 40 минут.

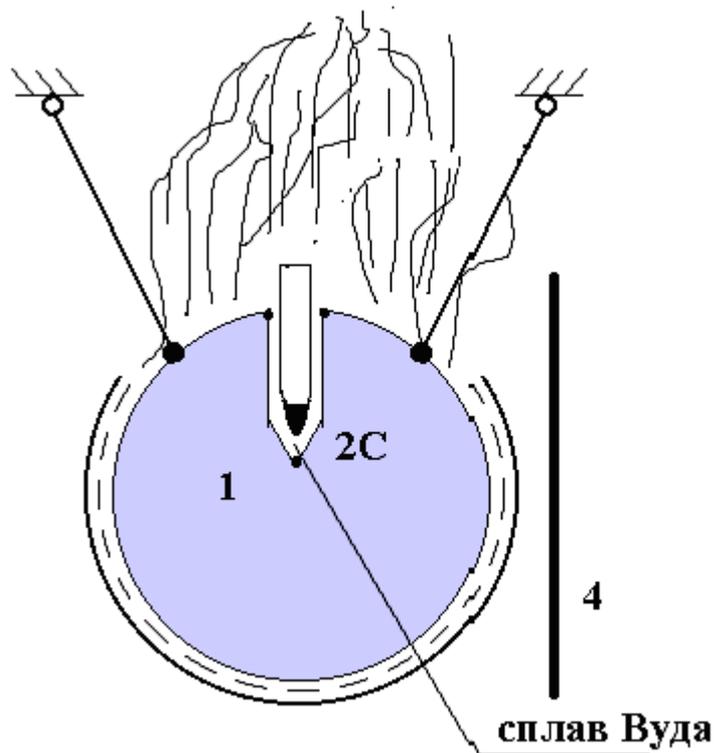


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Определяются значения $\ln(\theta)$ с точностью до третьего знака после запятой. Строится график $\ln(\theta)=f(\tau)$.

Через точки графика проводится осредняющая прямая. По ее наклону определяется темп охлаждения:

$$m = \frac{\ln \theta_A - \ln \theta_B}{\tau_B - \tau_A}, 1/c.$$

Индексы А и Б относятся к любым двум точкам, лежащим на осредняющей прямой.

Суммарный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{M}{S} \cdot m \cdot c_p, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Значение c_p определяется по среднему значению T за время опыта.

Среднее значение α_R определяется по средним значениям температур T и T_f . В качестве T_f принимается осредненное значение температуры холодного спая дифференциальной термопары.

$$\alpha_R = \varepsilon_1 \sigma \frac{T^4 - T_f^4}{T - T_f}, \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)},$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана.

Конвективный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \alpha_{\Sigma} - \alpha_R, \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Принципиальная схема установки.
2. Обработанные результаты эксперимента.
3. Оценить ошибки эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карташов Э.М. аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.
2. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Машгиз, 1962.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1953. 624 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ТЕПЛОТДАЧА ЦИЛИНДРА В УСЛОВИЯХ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

Цель работы: изучение общих закономерностей конвективного теплообмена; приобретение навыков экспериментального исследования частных задач конвективного теплообмена; обработка и обобщение результатов исследования.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Понятие конвективного теплообмена охватывает процесс теплообмена при движении жидкости или газа. При этом перенос теплоты осуществляется одновременно конвекцией и теплопроводностью. Под конвекцией теплоты понимают перенос тепла при перемещении макрочастиц жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в область с другой. Конвекция возможна только в текущей среде, здесь перенос тепла неразрывно связан с переносом самой среды. Конвективный теплообмен между потоками жидкости или газа и поверхностью соприкасающегося с ним тела называется конвективной теплоотдачей или теплоотдачей. При расчете теплоотдачи используют закон Ньютона–Рихмана:

$$dQ_c = \alpha (t_c - t_{ж}) dS. \quad (1)$$

Согласно закону Ньютона–Рихмана тепловой поток dQ_c от жидкости к элементу поверхности соприкасающегося тела dS (или от dS к жидкости) прямо пропорционален площади тела dS и разности температур $\Delta t = t_c - t_{ж}$, где t_c – температура поверхности тела, $t_{ж}$ – температура окружающей жидкой или газообразной среды.

Коэффициент пропорциональности α , входящий в уравнение (1), называется коэффициентом теплоотдачи. Согласно уравнению (1):

$$\alpha = \frac{dq_c}{t_c - t_{ж}} \cdot dS = \frac{Q_c}{t_c - t_{ж}}. \quad (2)$$

Это тождество следует рассматривать как определение коэффициента теплоотдачи, который измеряется в Вт/(м²·К): коэффициент теплоотдачи есть плотность теплового потока на границе жидкости (газа) и соприкасающегося тела, отнесенная к разности температур поверхности этого тела и окружающей среды.

Коэффициент теплоотдачи зависит от большого количества факторов. В общем случае α является функцией формы и размеров тела, режимов движения, скорости и температуры жидкости, физических параметров

жидкости и других величин. По-разному протекает процесс теплоотдачи в зависимости от природы возникновения движения жидкости.

Различают два вида массопереноса: свободную и вынужденную конвекцию. В первом случае движение в рассматриваемом объеме жидкости возникает за счет неоднородности в нем массовых сил. Если жидкость с неоднородным распределением температуры и, как следствие, с неоднородным распределением плотности находится в поле земного тяготения, может возникнуть свободное движение под действием архимедовых сил, противодействующих в свою очередь силам поля тяжести.

Вынужденное движение рассматриваемого объема жидкости происходит под действием внешних поверхностных сил, приложенных на его границах, т.е. за счет предварительно сообщенной кинетической энергии (например, за счет работы насоса, вентилятора, ветра).

Величину коэффициента теплоотдачи можно определить из теоретического рассмотрения процесса конвективного теплообмена. Однако теоретические решения возможны лишь для систем с достаточно простой геометрией. В инженерной практике коэффициенты теплоотдачи в реальных системах вычисляются по эмпирическим формулам, полученным путем совместного использования теории размерностей и экспериментальных данных.

В общем случае выбор физических параметров, необходимых для решения данной задачи по конвективному теплообмену, требует определенного предварительного рассмотрения физического смысла процесса. Но после того, как такие параметры установлены, теория размерностей позволяет связать их в несколько безразмерных комплексов, точная функциональная зависимость между которыми может быть определена из эксперимента.

В условиях свободной, или естественной, конвекции теплоперенос к телу или от него приводит к образованию градиентов температуры и плотности, если ее температура не равна температуре тела. При свободной конвекции движение жидкости возникает под действием подъемных (архимедовых) сил, которые связаны с изменениями температуры и плотности самой жидкости. Можно показать, что для корреляции экспериментальных данных по теплообмену в условиях естественной конвекции достаточно иметь следующие три безразмерных критерия:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad \text{Gr} = \beta \frac{g \ell^3}{\nu^2} \Delta t,$$

где α , λ , ν , a – соответственно коэффициенты теплоотдачи, теплопроводности, кинематической вязкости и температуропроводности среды; β – коэффициент объемного расширения жидкости или газа; ℓ – определяющий размер; $\Delta t = t_w - t_f$ – температурный напор (разность температуры поверхности объекта и температуры жидкости).

Первый из них – число Нуссельта, характеризующее теплообмен на границе стенки и жидкости. В задачах конвективного теплообмена Nu обычно является искомой величиной, поскольку в него входит определяемая величина α .

Второй – число Прандтля, представляющее собой отношение физических свойств жидкости, определяет соотношение между распределением скоростей и температур.

Третий известен как число Грасгофа – отношение подъемной силы к силе внутреннего трения. Подъемная сила при свободной конвекции заменяет действие импульса при вынужденном течении.

На основе многочисленных экспериментальных данных было установлено, что число Нуссельта можно связать с числами Грасгофа и Прандтля соотношением:

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^n. \quad (3)$$

В данной лабораторной работе опыты проводятся с воздухом, для которого число Pr практически не зависит от температуры и давления ($Pr=0.7 = \text{const}$). В этом случае зависимость (3) упрощается:

$$Nu = C \cdot Pr^n. \quad (4)$$

Необходимо отметить, что зависимость, конкретно определяемая по результатам опытов, в дальнейшем может использоваться при расчетах теплоотдачи только для сред, имеющих те же значения $Pr(H_2, N_2, O_2)$.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Принципиальная схема установки представлена на рис. 1. Экспериментальный цилиндр 1 изготовлен из красной меди ($d=45,18$ мм, $l=680$ мм), внешняя поверхность его никелирована и отполирована, чтобы по возможности уменьшить рассеяние тепла лучеиспусканием. Равномерное распределение температур по длине цилиндра обеспечивается за счет высокой теплопроводности меди. Внутри цилиндра размещен электронагреватель 2. Торцы цилиндра закрыты термостойким теплоизоляционным материалом. На поверхности цилиндра прикреплены три (I, II, III) дифференциальных хромель-копелевых термопары 6.

Электропитание нагревателя осуществляется от сети переменного тока (220 В) через трансформатор 5. Для регистрации потребляемой мощности в цепь включены амперметр 4 и вольтметр 3.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

После ознакомления со схемой опытной установки необходимо проверить правильность включения измерительных приборов и затем присту-

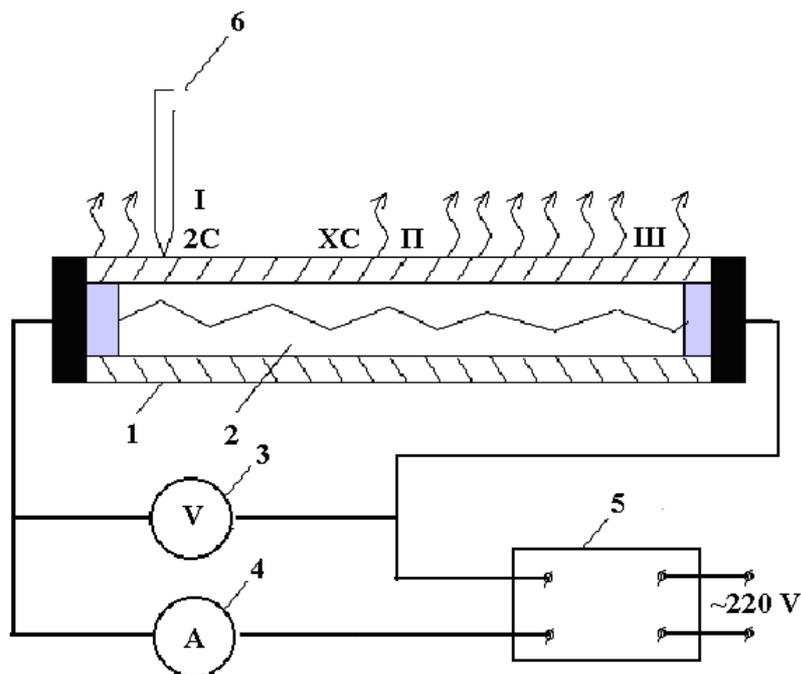


Рис.1 Принципиальная схема установки для определения теплоотдачи цилиндра

пать к проведению опытов. Повышая трансформатором напряжение, мощность следует довести до 220 Вт.

Выводя установку на режим, следует систематически контролировать температуру по одной из термопар. Как только температура стенки трубы станет 175°C , потребляемую мощность необходимо понизить, чтобы не допустить дальнейшего повышения температуры стенок. В этом состоянии установку выдерживают до полной термостабилизации стенки.

За время проведения эксперимента вручную изменяется температурный режим нагревателя таким образом, чтобы потребляемая мощность нагревателя снижала температуру стенок цилиндра на $\sim 15^{\circ}\text{C}$. В течение некоторого промежутка времени после смены режима происходит термостабилизация. Поэтому при обработке результатов экспериментов следует исключать эти интервалы.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для каждого температурного режима установки определяются:

1 – значения $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, ^{\circ}\text{C}$; средний температурный напор:

$$\Delta t_{\text{cp}} = (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) / 3, ^{\circ}\text{C};$$

2 – мощность, потребляемая нагревателем:

$$W = U \cdot I, \text{ Вт};$$

3 – суммарный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{W}{S\Delta t_{cp}}, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град});$$

4 – радиационный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha_R = \frac{\varepsilon\sigma(T_{cp}^4 - T_f^4)}{\Delta t_{cp}}, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град});$$

где $\varepsilon=0.078$ – собственная степень черноты цилиндра;

$\delta=5.67 \cdot 10^{-8}$ – постоянная Стефана – Больцмана, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$;

T_f, T_{cp} – температуры окружающего воздуха и поверхности, К;

5 – конвективный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \alpha_{\Sigma} - \alpha_R, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град});$$

6 – число Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda_f},$$

где d – диаметр цилиндра (определяющий размер), м; λ_f – коэффициент теплопроводности воздуха при t_f , $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;

7 – число Грасгофа:

$$Gr = \beta_f \frac{gd^3}{\nu_f^2} \Delta t_{cp},$$

где $\beta_f=1/T$ – коэффициент объемного расширения воздуха, $1/\text{К}$; ν_f – коэффициент кинематической вязкости, $\text{м}^2/\text{с}$; g – ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$. Значения β_f и ν_f определяются по средней температуре t_f за период опытов.

Определение зависимости (4) производим следующим образом. Значения Nu и Gr , полученные из опыта, откладываются на графике в логарифмических координатах $\lg Nu \div \lg Gr$.

Через точки на графике проводится осредняющая прямая. Величина показателя степени n находится как тангенс угла наклона φ этой прямой:

$$n = \text{tg}\varphi = \frac{\lg Nu_B - \lg Nu_A}{\lg Gr_B - \lg Gr_A},$$

где А и Б – любые две точки, лежащие на усредняющей прямой. Константа C определяется как:

$$C' = \frac{Nu}{Gr^n},$$

где значения Nu и Gr берутся для точки, лежащей между значениями А и Б на усредняющей прямой.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Принципиальная схема установки.
2. Обработанные результаты эксперимента.
3. Оценить ошибки эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1978. 463 с.
2. Карташов Э.М. аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.
3. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Машгиз, 1962.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОКИСЛЕННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Цель работы: изучение общих закономерностей радиационного теплообмена; определение температурной зависимости степени черноты поверхности.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Радиационный способ теплопередачи характеризуется энергией, передаваемой в форме электромагнитных волн. Для обеспечения поведения теплового излучения используется как волновая, так и корпускулярная теории. Согласно волновой теории, излучение можно представить волновыми колебаниями, имеющими частоту ν и длину волны λ . Произведение частоты и длины волны есть скорость распространения, равная скорости света:

$$c = \lambda \cdot \nu .$$

Согласно корпускулярной теории, энергия излучения передается в виде порций энергии, называемых фотонами. Каждый фотон движется со скоростью света и имеет определенную энергию, заданную соотношением:

$$\varepsilon = h \cdot \nu ,$$

в котором h – постоянная Планка. Когда тело нагрето, свободные электроны могут переходить на более высокие, или возбужденные уровни. Когда электрон возвращается на свой более низкий энергетический уровень, он испускает фотон, энергия которого равна разности энергий возбужденного и равновесного состояний. Для любой поверхности в любой данный момент времени многочисленные электроны совершают переходы на разные энергетические уровни, и поэтому энергия фотонов, покидающих поверхность, распределена по спектру частот. Испускание фотонов зависит исключительно от температуры тела. Энергия фотонов, покидающих поверхность таким образом, называется тепловым излучением.

Есть другие способы, кроме нагревания поверхности, которые могут быть причиной испускания телом фотонов. На коротковолновом конце спектра, например, находится рентгеновское излучение, которое может быть вызвано бомбардировкой куска металла потоком электронов. На другом конце спектра находятся радиоволны с большими длинами волн, которые могут генерироваться электронным оборудованием и кристаллами. Между этими двумя предельными случаями находится тепловое излучение, которое испускается телом и зависит только от температуры.

Виды излучения	Длина волны
Космические лучи	$\lambda \leq 10^{-13} \text{ м}$
γ – излучение	$10^{-13} \leq \lambda \leq 10^{-10} \text{ м}$
Рентгеновские лучи	$10^{-11} \leq \lambda \leq 10^{-7} \text{ м}$
Тепловое излучение	$10^{-7} \leq \lambda \leq 10^{-4} \text{ м}$
Радиоволны	$10^{-3} \leq \lambda \leq 10^4 \text{ м}$

Не все поверхности, нагретые до одной и той же температуры, излучают и поглощают одно и то же количество лучистой энергии. Поверхность тела, которая излучает и поглощает максимальное количество энергии при данной температуре, называется черной поверхностью или просто черным телом. Черное тело – это эталон, к которому можно приблизиться на практике покрытием поверхности тела или видоизменением его формы, с которым можно сравнивать все другие излучатели.

Макс Планк в 1900 г. показал, что энергия излучения с длиной волны λ , испускаемой черным телом с температурой T , равна:

$$E_{\nu\lambda}(T) = -\frac{C_1}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)}, \quad (1)$$

где $E_{\nu\lambda}(T)$, Вт/см³ – плотность потока спектрального излучения черного тела при температуре T , C_1 и C_2 – постоянные излучения.

Максимальная интенсивность излучения при повышении температуры смещается в область коротких длин волн, что видно из закона смещения Вина, выражаемого уравнением:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2.898 \cdot 10^{-3}, \text{ (м} \times \text{K)}, \quad (2)$$

где λ_{\max} – длина волны, при которой достигается максимум потока излучения черного тела при температуре тела T .

Удельная энергия излучения с поверхности черного тела определяется уравнением:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{\nu\lambda}(T) d\lambda. \quad (3)$$

Интегрирование этого уравнения дает выражение:

$$E_0 = \sigma T^4 \text{ Вт/см}^2, \quad (4)$$

которое известно как закон Стефана–Больцмана. Здесь $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана.

Закон Стефана–Больцмана может быть применен к так называемым серым телам. Под ними понимают такие тела, спектр которых подобен спектру абсолютно черного тела и отличается от него только тем, что при одной и той же температуре каждая ордината интенсивности излучения серого тела E составляет одну и ту же долю от сходственной ординаты абсолютно черного тела (РИС.1)

Для серого тела выражение (4) записывают в виде:

$$E = \varepsilon \sigma T^4. \quad (5)$$

Здесь ε – излучательная способность тела (степень черноты), которая определяется как отношение собственного излучения, испущенного телом, к потоку излучения, испущенного абсолютно черным телом при той же температуре.

$$\varepsilon = \frac{E(T)}{E_0(T)} = \frac{E(T)}{\sigma T^4}. \quad (6)$$

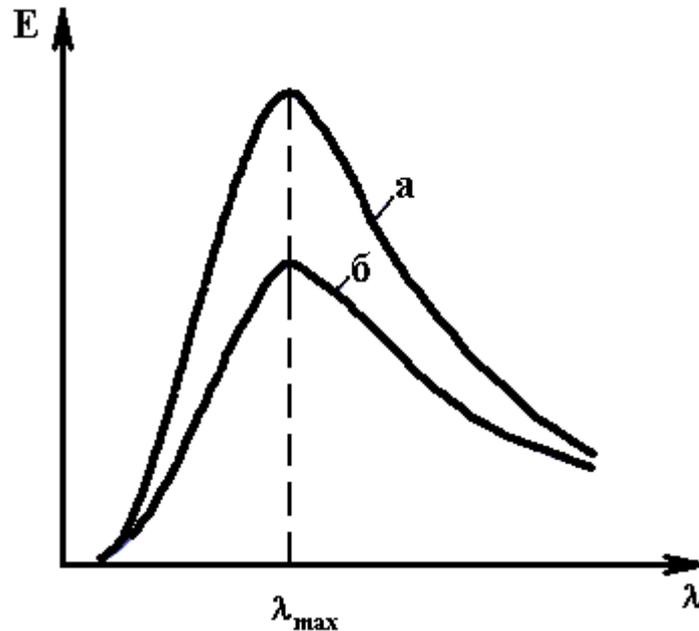


Рис. 1. Спектры излучения абсолютно черного (а) и серого (б) тел при одной и той же температуре

Поскольку абсолютно черное тело испускает максимальное количество излучения при данной температуре, излучательная способность поверхности всегда заключена между нулем и единицей. Когда поверхность является абсолютно черным (черным) телом, то выполняются равенства $E(T) = E_0(T)$ и $\varepsilon = 1$.

Излучательная способность тела является функцией свойств материала поверхности, состояния поверхности и температуры.

Согласно опытным данным, повышение температуры твердых тел приводит к увеличению степени черноты тела. Поэтому излучательная способность реальных тел в общем случае изменяется пропорционально температуре не в четвертой, а в более высокой степени, т.е. T^n , где $n > 4$ (для платины $n=5.11$ в интервале $T=500 \div 900$ К; для алюминия $n=4.73$ в интервале $T=500 \div 840$ К).

Рассмотрим два серых тела, из которых одно находится в полости другого (рис. 2). Тело 1 взаимодействует с телом 2 наружной поверхностью, а тело 2 – внутренней. Они имеют, соответственно, площади поверхности F_1 и F_2 , степени черноты ε_1 и ε_2 , температуры T_1 и T_2 , причем $T_1 > T_2$.

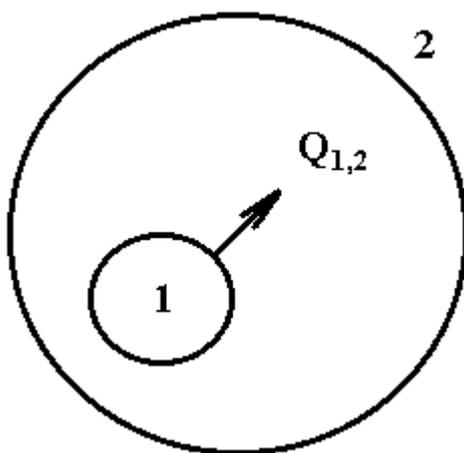


Рис.2. Система выпуклого тела с оболочкой

В этом случае результирующий лучистый поток определяется как разность эффективных лучистых потоков:

$$Q_R = Q_{1,2} = S_1 \sigma \varepsilon_{\Pi} [T_1^4 - T_2^4], \text{ Вт.} \quad (7)$$

Здесь ε_{Π} – приведенная степень черноты системы, которая определяется выражением:

$$\varepsilon_{\Pi} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + (1/\varepsilon_2 - 1) \cdot S_1/S_2}. \quad (8)$$

Если $\varepsilon_2 = 1$ или $\frac{S_1}{S_2} \ll 1$, то приведенная степень черноты системы ε_{Π}

фактически совпадает со степенью черноты излучающего тела ε_1 .

Выражение (7) является типичной формой расчетного соотношения. Вместе с тем представляет интерес установление фактической излучательной способности реальных тел в функции температуры, которая предположительно выражается соотношением:

$$Q_R = S\varepsilon\sigma T_1^n, \quad (9)$$

где ожидается $n > 4$.

Существует ряд методов определения излучательной способности тела: радиационный метод теплового регулярного режима, метод сравнения с излучением абсолютно черного тела, метод нагревания с постоянной скоростью, калометрический метод и др.

В данной работе используется калометрический метод, основанный на непосредственном измерении энергии, излучаемой исследуемым телом, а также его температуры и температуры окружающей среды.

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Исследуемое тело представляет собой тонкую проволоку из вольфрамового сплава, длиной $L=0.25$ м и диаметром $d=0.22$ мм, впаянную в стеклянный сосуд с двойными стенками. Полость стеклянного сосуда вакуумирована до давления 10^{-4} мм.рт.ст., что исключает конвективную передачу тепла от проволоки к стенке сосуда. Это означает, что перенос тепла от проволоки осуществляется только путем излучения Q_R через неподвижную вакуумную полость. В пространстве между стенками залита вода, обеспечивающая поддержание температуры стенок практически равной температуре окружающей среды.

К исследуемой проволоке подводится постоянный электрический ток от выпрямителя, мощность регулируется автотрансформатором выпрямителя. Подводимая электрическая мощность определяется амперметром и вольтметром по падению напряжения U на проволоке и току I , проходящему по ней.

Температура исследуемой проволоки определяется по ее сопротивлению, которое для определенного проводника имеет однозначную зависимость от температуры. Сопротивление проволоки на каждом тепловом режиме проводимого исследования может быть определено по падению напряжения и силе тока в цепи:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (10)$$

График зависимости R от абсолютной температуры проволоки T_1 , K прилагается.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Перед включением стрелка автотрансформатора выпрямителя устанавливается на ноль, затем выпрямитель включается в сеть. Убедившись, что вольтметр показывает нулевое напряжение, медленным поворотом

ручки регулирования автотрансформатора выпрямителя устанавливается питающее напряжение $\approx 2\text{В}$.

После выдержки 3÷5 мин наступает стабилизация режима, характеризующаяся стабильностью показаний амперметра, что свидетельствует о том, что можно проводить измерения.

Смена текущего теплового режима производится поворотом ручки регулирования автотрансформатора в сторону увеличения питающего напряжения в пределах до 3В. После выдержки, достаточной для стабилизации режима, проводят те же измерения. В ходе выполнения работы следует провести замеры через $\approx 1\text{В}$ до $\approx 13\text{В}$.

При выключении установки вначале вывести в нулевое положение ручку регулирования автотрансформатора, затем обесточить выпрямитель.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

На каждом режиме по замерным значениям U и I подсчитывают значение R по выражению (10).

Мощность электроэнергии, подаваемой на нагрев проволоки и излучаемой последней в окружающую среду, рассчитывается по обычному соотношению:

$$Q_R = U \cdot I, \text{ Вт.}$$

По рассчитанным значениям R из прилагаемого графика определяется температура проволоки T_1 , К. Операцию определения T_1 по R следует выполнять с особой точностью. Температуру окружающей среды определяют по ртутному термометру.

Для данной лабораторной установки отношение площадей поверхности проволоки S_1 и стеклянного сосуда S_2 составляет:

$$\frac{S_1}{S_2} \approx 10^{-4} \ll 1,$$

поэтому из формулы (8) получаем $\varepsilon_n = \varepsilon_1$ с хорошей степенью точности.

Из формулы (7) определяем степень черноты проволоки в предположение, что $n=4$, т.е.

$$\varepsilon_1^p = \frac{Q_R}{S_1 \sigma \cdot [T_1^4 - T_2^4]}.$$

Фактическое значение показателя n^Φ можно определить графически, откладывая на графике опытные значения Q_R и T_1 в координатах.

$$\lg(Q_R) = f\{\lg(T_1)\}.$$

Из уравнения (9) следует, что на графике получится прямая линия с тангенсом угла наклона, равным показателю n^ϕ . При этом в формуле (9) не учитывалась температура окружающей среды, которая при характерных значениях ~ 300 К дает вклад в результирующий поток Q_R в 2–3%, что находится за пределами точности.

Определяем ε_1^ϕ :

$$\varepsilon_1^\phi = \frac{Q_R}{S_1 \sigma \cdot (T_1^{n^\phi} - T_2^{n^\phi})}.$$

Записываем соотношения для удельных тепловых потоков для обоих случаев:

$$g_R^P = \varepsilon_1^P \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4), \text{ Вт/м}^2,$$

$$g_R^\phi = \varepsilon_1^\phi \sigma \cdot (T_1^{n^\phi} - T_2^{n^\phi}), \text{ Вт/м}^2.$$

По результатам расчетов строим графики: ε_1^ϕ и $\varepsilon_1^P = f_1(T_1)$, g_R^P и $g_R^\phi = \varphi(T_1)$.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Краткое описание методики проведения эксперимента.
2. Принципиальная схема экспериментальной установки.
3. Протокол записи измерений.
4. Обработка результатов эксперимента.
5. Графические зависимости: логарифм результирующего потока $\lg(Q_R)$ от логарифма температуры проволоки $\lg(T_1)$, удельных тепловых потоков g_R^P и g_R^ϕ от температуры проволоки T_1 , рассчитанной и фактической степени черноты проволоки ε_1^ϕ и ε_1^P от температуры проволоки T_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Машгиз, 1962.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ТЕПЛООБМЕНА СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

Цель работы: определение локальных коэффициентов теплоотдачи для тел сферической формы при вынужденной конвекции.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим стационарное осесимметричное течение на лобовой поверхности сферического тела радиуса R . Будем считать, что числа Рейнольдса меньше $Re_{кр} = 5 \times 10^5$, т.е. пограничный слой на лобовой части шара является ламинарным, и явлениями сжимаемости потока можно пренебречь. Считая теплофизические характеристики потока и материала тела постоянными (это допустимо для умеренных температур порядка $200 \div 300^\circ\text{C}$), запишем систему дифференциальных уравнений, определяющих задачу теплообмена шара при вынужденной конвекции.

$$r \omega_y \frac{\partial \omega_s}{\partial y} + r \omega_s \frac{\partial \omega_s}{\partial s} = -\frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \right); \quad (a)$$

$$\frac{\partial(r \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(r \omega_s)}{\partial s} = 0; \quad (b) \quad (1)$$

$$r \omega_y \frac{\partial T}{\partial y} + r \omega_s \frac{\partial T}{\partial s} = a \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (c)$$

где уравнения (a), (b), (c) – соответственно уравнения движения, неразрывности и энергии; ρ , ν , a – плотность, вязкость, температуропроводимость; p – давление; ω – скорость; T – температура.

На рис.1 показаны пограничный слой на лобовой поверхности шара и координатные оси.

Примем в качестве приближения толщину гидродинамического пограничного слоя равной толщине теплового пограничного слоя, что справедливо для жидкостей с числом Прандтля равным единице (для сравнения – воздух имеет $Pr = 0.7$). При этом допущении мы полагаем, что профиль температурной кривой и профиль скорости в любом сечении пограничного слоя совпадают. Тогда из трех записанных уравнений, уравнение движения можно отбросить и, объединяя (b) и (c), получим интегральное условие

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\int_0^{\delta} (T_\infty - T) \omega_s r dy \right] = a \cdot \left(r \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (2)$$

или, переходя к сферической системе координат,

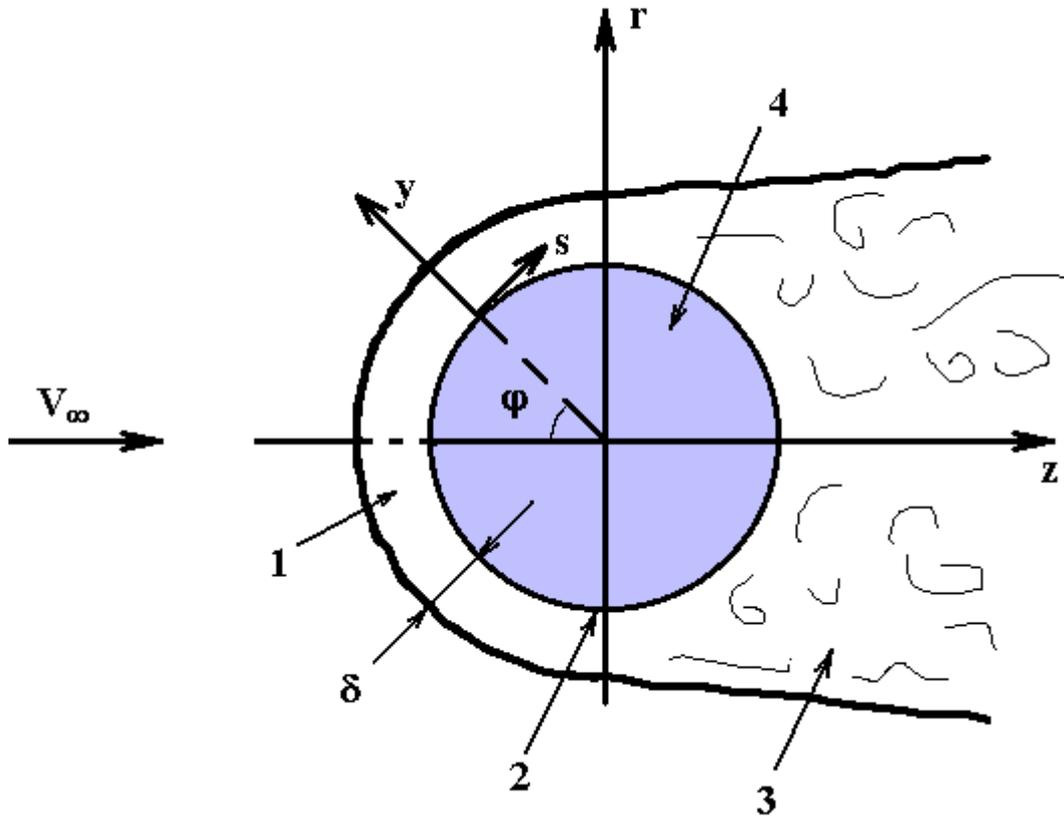


Рис.1. Схема дозвукового обтекания шара:
 1 – ламинарный пограничный слой; 2 – точка отрыва пограничного слоя; 3 – вихри в аэродинамическом слое; 4 – сферическое тело;
 δ – толщина пограничного слоя

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin \varphi \int_0^{\delta} (T_{\infty} - T) \omega_s \left(1 + \frac{y}{R} \right) dy \right] = aR \sin(\varphi) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}. \quad (3)$$

Пренебрегая отношением $\frac{y}{R}$ по сравнению с единицей и вводя безразмерные величины, найдем

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin \varphi \int_0^1 \bar{\omega}_s \bar{T} d\bar{y} \right] = -\frac{1}{Pe_{\infty}} \frac{\sin(\varphi)}{\delta} \cdot \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) \Big|_{\bar{y}=0}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \bar{\omega}_s = \frac{\omega_s}{V_{\infty}}, \quad Pe_{\infty} = \frac{V_{\infty} R}{a}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}. \quad (5)$$

Здесь T_0 – начальная температура тела.

Будем аппроксимировать поле температур и скоростей следующим полиномами соответственно:

$$\bar{T} = \bar{T}_w(\varphi) \cdot (B_0 + B_1\bar{y} + B_2\bar{y}^2), \bar{\omega}_s = f(\varphi) \cdot (A_0 + A_1\bar{y} + A_2\bar{y}^2) \quad (6)$$

при следующих граничных условиях:

$$y = 0, \quad \bar{\omega}_s = 0, \quad \bar{T} = \bar{T}_w(\varphi), \quad (7)$$

$$y = 1, \quad \bar{\omega}_s = f(\varphi), \quad \frac{\partial \bar{\omega}_s}{\partial y} = 0, \quad \bar{T} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = 0,$$

где индекс w означает номер поверхности тела. С учетом (7) полиномы принимают вид:

$$\bar{\omega}_s = f(\varphi) \cdot (2\bar{y} - \bar{y}^2), \quad (8)$$

$$\bar{T} = \bar{T}_w(\varphi)(1 - \bar{y})^2. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (4), приходим к дифференциальному уравнению относительно $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\bar{\delta} f(\varphi) \bar{T}_w(\varphi) \sin(\varphi)] = \frac{15}{Pe_\infty} \sin(\varphi) \bar{T}_w(\varphi). \quad (10)$$

Если принять на внешней границе пограничного слоя течение потенциальным, то $f(\varphi) = \frac{3}{2} \sin \varphi$. Тогда подставляя $f(\varphi)$ в (10) и дифференцируя, найдем

$$\frac{3}{4} \sin(\varphi) \bar{T}_w(\varphi) \frac{d(\bar{\delta}^2)}{d\varphi} + 3 \cos(\varphi) \bar{T}_w(\varphi) \bar{\delta}^2 + \frac{3}{2} \sin(\varphi) \frac{d\bar{T}_w(\varphi)}{d\varphi} \bar{\delta}^2 = \frac{15}{Pe_\infty} \bar{T}_w(\varphi)^3, \quad (11)$$

откуда при $\varphi=0$ получим

$$\bar{\delta}_0 = \sqrt{\frac{5}{Pe_\infty}} = \sqrt{\frac{10}{Pe_\infty Pr_\infty}}. \quad (12)$$

Используя закон теплообмена в форме Ньютона

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \alpha (T_w - T_\infty),$$

получим в безразмерном виде

$$Nu = -\frac{1}{\bar{T}(\varphi)} \frac{2}{\bar{\delta}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \Big|_{\bar{y}=0}, \quad (13)$$

где $Nu = \frac{\alpha R}{\lambda}$ – число Нуссельта. α – коэффициент теплоотдачи.

В передней критической точке тела при $\varphi=0$ выражение (13) с учетом (12) и (9) имеет вид

$$Nu_0 = 1.264 Re_\infty^{0.5} Pr_\infty^{0.5}. \quad (14)$$

Обратимся теперь к интегрированию (12), которое запишем в виде

$$\frac{d(\bar{\delta}^2)}{d\varphi} + \left[4\text{ctg}(\varphi) + \frac{2}{\bar{T}_w(\varphi)} \frac{d\bar{T}_w(\varphi)}{d\varphi} \right] \bar{\delta}^2 = \frac{5}{Pe_\infty} \frac{4}{\sin(\varphi)}. \quad (15)$$

Общий интеграл (15) имеет вид

$$\left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}_0} \right)^2 = \frac{4 \int_0^\varphi \bar{T}_w^2(\varphi) \sin^3(\varphi) d\varphi}{\bar{T}_w^2(\varphi) \sin^4(\varphi)}. \quad (16)$$

Подставляя $\bar{\delta}$ из (16) в (13), найдем значения локальных коэффициентов теплоотдачи на лобовой поверхности шара:

$$Nu(\varphi) = 1.264 Re_\infty^{0.5} Pr_\infty^{0.5} \frac{\bar{T}_w(\varphi) \sin^2(\varphi)}{2 \sqrt{\int_0^\varphi \bar{T}_w^2(\varphi) \sin^3(\varphi) d\varphi}}, \quad (17)$$

где $\bar{T}_w(\varphi)$ – безразмерное распределение температуры на лобовой поверхности шара.

Для вычисления по (17) положим $Pr_\infty=0.7$; график температуры поверхности шара, число Рейнольдса Re_∞ , начальная температура тела выдаются преподавателем.

Значение интеграла можно найти, используя метод Симпсона. Обозначим $y = \bar{T}_w^2(\varphi) \sin^3 \varphi$, тогда

$$\int_0^\varphi y \cdot dy = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \quad (18)$$

где h – шаг интегрирования по углу φ ($p = \frac{\pi}{20}$); n – количество разбиений ($n=10$); $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ – интервал вычисления по (17). В (18) $\pi=3.14$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Изучить постановку задачи по теплообмену шара при вынужденной конвекции.

Ознакомиться с методикой интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений.

Построить графики безразмерной температуры поверхности $\bar{T}_w(\varphi)$ в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, пользуясь приложением.

Рассчитать по (17) с использованием техники численного интегрирования числа Нуссельта в точках $\varphi=0$, $\varphi=\pi/4$, $\varphi=\pi/2$ и построить график $Nu(\varphi)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие допущения сделаны при постановке задачи теплообмена?
2. В каком случае гидродинамический пограничный слой и тепловой слой совпадают?
3. В чем заключается физический смысл граничных условий (7)?
4. Объяснить характер поведения температуры поверхности и локальных коэффициентов теплоотдачи на лобовой поверхности шара при заданных краевых условиях.

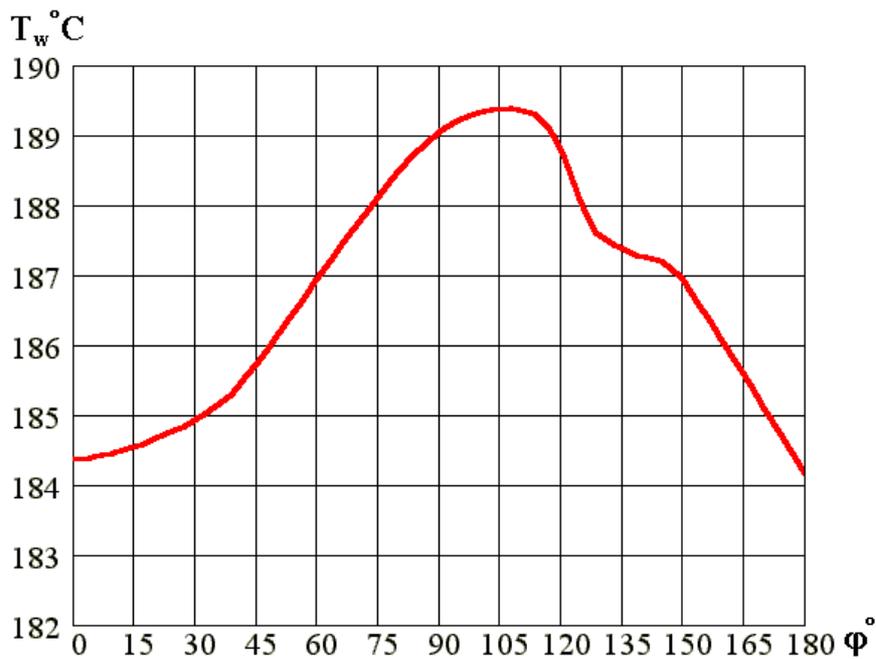
ЛИТЕРАТУРА

1. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974. 522 с.
2. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Машгиз, 1962.
3. Лойцанский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
5. Повх И.Л. Теоретическая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1976. 502 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

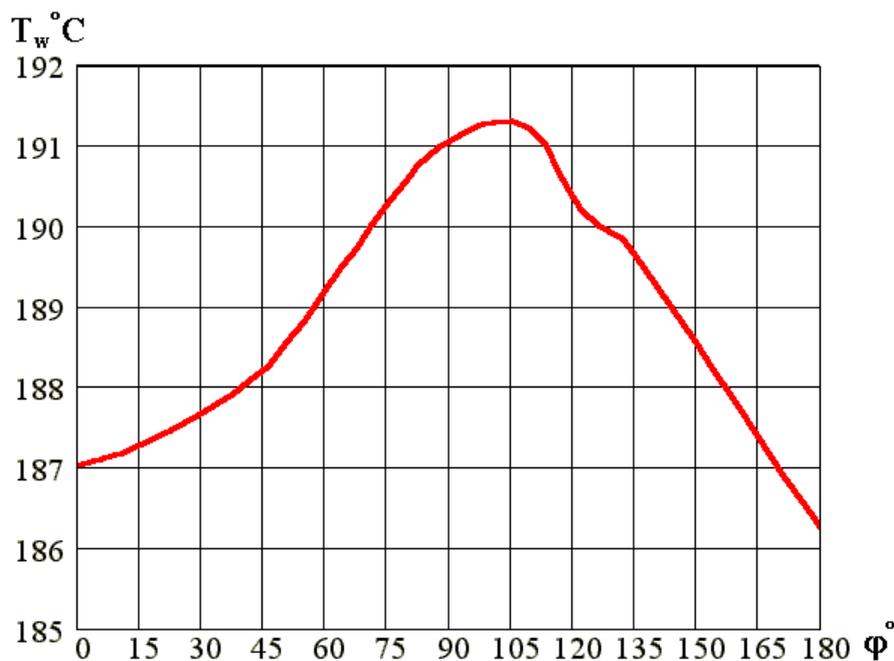
ПРИЛОЖЕНИЕ

Изменение температуры поверхности $T_w(\varphi)$ для различных чисел Рейнольдса (T_w – температура поверхности шара, φ – полярный угол)

Геометрические
параметры
исследуемого
шара:



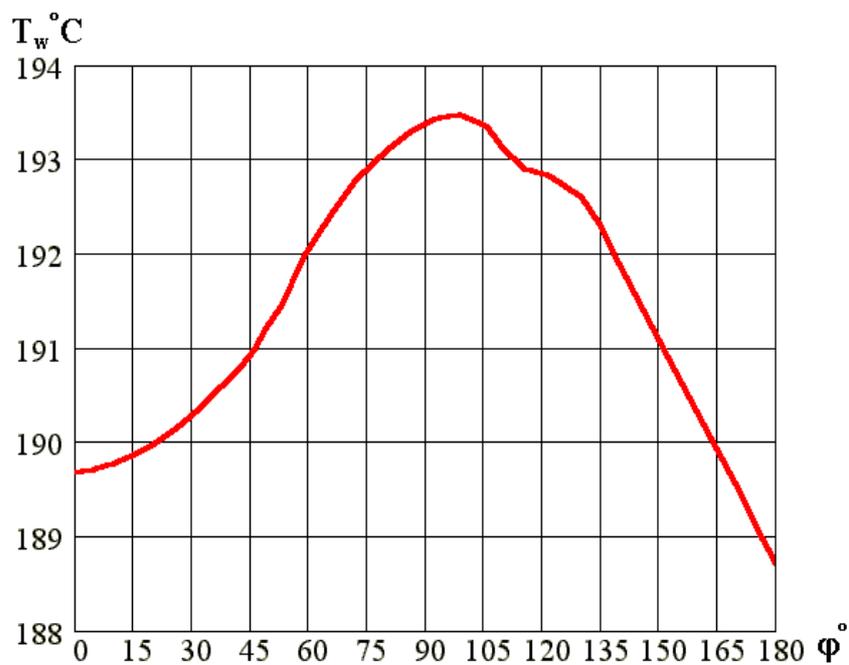
$d_{\text{шара}} = 78$ мм,
 $V = 27.6$ м/с,
 $T_0 = 197^\circ\text{C}$,
 $T_\infty = 19^\circ\text{C}$.



$d_{\text{шара}} = 78$ мм,
 $V = 20.9$ м/с,
 $T_0 = 198^\circ\text{C}$,
 $T_\infty = 19^\circ\text{C}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ (продолжение)

Геометрические
параметры
исследуемого
шара:

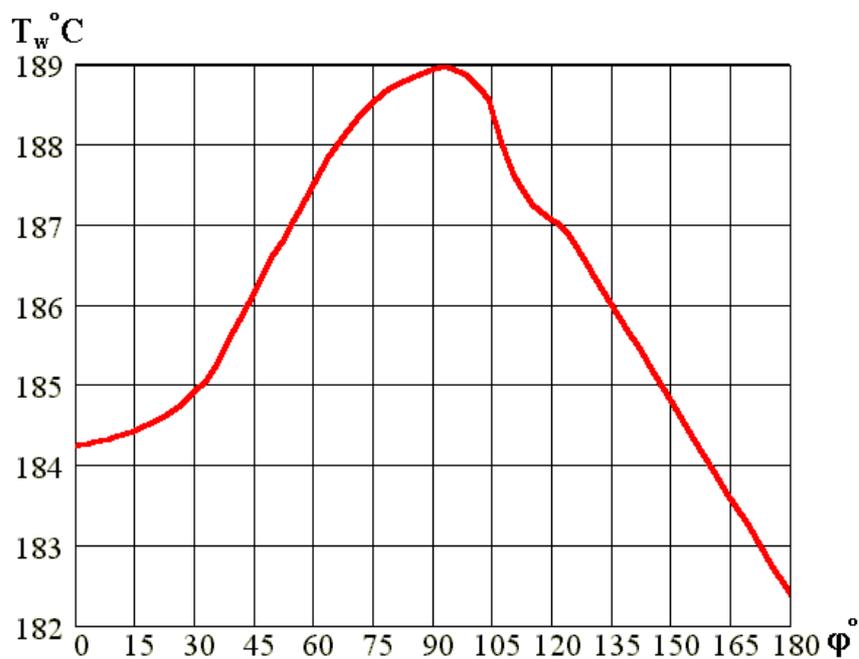


$$d_{\text{шара}} = 78 \text{ мм,}$$

$$V = 10.4 \text{ м/с,}$$

$$T_0 = 195^\circ \text{C,}$$

$$T_\infty = 19^\circ \text{C.}$$



$$d_{\text{шара}} = 78 \text{ мм,}$$

$$V = 37.6 \text{ м/с,}$$

$$T_0 = 199^\circ \text{C,}$$

$$T_\infty = 19^\circ \text{C.}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

Цель работы: освоить численные методы расчета нестационарного температурного поля и определить коэффициент теплоотдачи.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим охлаждение равномерно нагретого шара радиуса R в условиях естественной конвекции. В этом случае процесс теплообмена будет нестационарным, а распределение температуры по цилиндру можно считать симметричным.

Основной характеристикой теплообмена является коэффициент теплоотдачи α . Для его определения воспользуемся численными методами с использованием конечных разностей. Теория конечных разностей является наиболее универсальной, позволяющей решать задачи, не поддающиеся аналитическому исследованию. Познакомимся в общих чертах с возможностями этого метода.

Рассмотрим разностную аппроксимацию простейших дифференциальных операторов. Пусть дан дифференциальный оператор L , действующий на функцию $V = V(x)$. Заменяя входящие в LV производные разностными отношениями, мы получим вместо LV разностное выражение $L_h V_h$, являющееся комбинацией значений сеточной функции V_h на некотором множестве узлов сетки, называемой шаблоном.

Пример 1: Операторное уравнение с производной 1-го порядка

$$LV = \frac{dV}{dx}.$$

Зафиксируем некоторую точку x оси ox и возьмём точки $x+h$ и $x-h$, где $h > 0$. Для аппроксимации LV можно воспользоваться любым из следующих выражений:

$$L_h^+ V \equiv \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \equiv V_x, \quad (1)$$

$$L_h^- V \equiv \frac{V(x) - V(x-h)}{h} \equiv V_x. \quad (2)$$

Выражение (1) есть правая разностная производная V_x , а выражение (2) – левая разностная производная V_x . Разностные выражения $L_h^+ V$ и $L_h^- V$ определены на двух точках оси ox , т.е. на двухточечном шаблоне.

Кроме того, в качестве разностной аппроксимации производной $\frac{dV}{dx}$ можно взять линейную комбинацию выражений (1) и (2)

$$L_h^{(\sigma)}V \equiv \sigma V_x + (1 - \sigma)V_{\bar{x}}, \quad (3)$$

где σ – любое вещественное число от 0 до 1. В частности, при $\sigma = 0.5$ получаем так называемую центральную (двухстороннюю) разностную производную

$$V_{\dot{x}} = \frac{1}{2}(V_x + V_{\bar{x}}) = \frac{V(x+h) - V(x-h)}{2h} \quad (4)$$

Таким образом, оказывается, что можно написать бесчисленное множество разностных выражений, аппроксимирующих $LV = V'$.

Возникает вопрос: какую ошибку мы допускаем, используя ту или иную разностную аппроксимацию, и как ведёт себя разность

$$\psi(x) = L_h[V(x)] - L[V(x)]$$

в точке x при $h \rightarrow 0$. Величина $\psi(x)$ называется погрешностью разностей аппроксимации $L[V(x)]$ в точке x .

Разложим функцию $V(x)$ в окрестности точки x по формуле Тейлора ($h \rightarrow 0$), используя свойство непрерывности $V(x)$,

$$V(x+h) = V(x) + hV'(x) + \frac{h^2}{2}V''(x) + \frac{h^3}{3}V'''(x) + o(h^4) \quad (5)$$

$$V(x-h) = V(x) - hV'(x) + \frac{h^2}{2}V''(x) - \frac{h^3}{3}V'''(x) + o(h^4) \quad (6)$$

или

$$V_x = \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = V'(x) + \underbrace{\frac{h}{2}V''(x) + \frac{h^2}{3}V'''(x) + o(h^3)}_{\text{б.м.}} \quad (7)$$

$$V_{\bar{x}} = \frac{V(x) - V(x-h)}{h} = V'(x) - \underbrace{\frac{h}{2}V''(x) + \frac{h^2}{3}V'''(x) - o(h^3)}_{\text{б.м.}} \quad (8)$$

$$V_{\dot{x}} = \frac{V(x+h) - V(x-h)}{2h} = V'(x) + \underbrace{\frac{h^2}{3}V'''(x) + o(h^3)}_{\text{б.м.}}. \quad (9)$$

Из (7) – (9) видно, что левые и правые разностные производные аппроксимируют оператор $L(V) = V'$ с первым порядком, а центральная разностная производная – со вторым.

Пример 2: Операторное уравнение с производной 2-го порядка

$$L[V(x)] = V'' = \frac{d^2V}{dx^2}.$$

Чтобы написать разностную аппроксимацию второй производной, надо взять производную от первой производной

$$\begin{aligned} V_{xx} &= \frac{\frac{V(x+h) - V(x)}{h} - \frac{V(x) - V(x-h)}{h}}{h} = \\ &= \frac{V'(x) + \frac{h}{2}V''(x) + \frac{h^2}{3}V'''(x) + o(h^3) - V'(x) + \frac{h}{2}V''(x) - \frac{h^2}{3}V'''(x) + o(h^3)}{h} = (10) \\ &= V''(x) + o(h^2). \end{aligned}$$

Видно, что порядок разностной аппроксимации в этом случае равен $o(h^2)$.

ПОСТАНОВКА РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ

При формулировке разностной задачи помимо аппроксимации дифференциального уравнения, необходимо эффективно описать в разностном виде краевые условия. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и краевые условия, называют разностной схемой.

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < \tau \leq \tau_0, \\ T(\tau, x)|_{x=0} &= f(\tau), \quad T(\tau, x)|_{x=\ell} = F(\tau), \quad T(0, x)|_{\tau=0} = U(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем разностную аппроксимацию для (11). Для этого выберем равномерную сетку по координате x и по времени τ :

$$\left. \begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_1, \\ \tau_j &= jh_\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{h_\tau} &= a \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h_x^2} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1 \\ T_0^j &= f(\tau_j), \\ T_{N_1}^j &= F(\tau_j), \\ T_i^0 &= U(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, N_2 \quad (13)$$

Разностная задача (13) является примером использования явной схемы, т.е. значения температуры на следующем $(j+1)$ временном слое определяются через предыдущий слой по явным формулам

$$T_i^{j+1} = T_i^j + ah_\tau \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h_x^2} \right]. \quad (14)$$

Для решения (14) необходимо выполнить количество операций $\sim N_1 N_2$.

Дадим пример неявной разностной схемы:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{h_\tau} = a \left[\frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} \right]. \quad (15)$$

Из (15) следует, что для определения T_i^{j+1} получаем систему $(N_1 - 2)$ алгебраических уравнений, для решения которой по методу Гаусса необходимо выполнить N^{3p-1} операций (где N – число узлов, p – размерность задачи), что значительно больше, чем для явной схемы.

Уравнение (15) решается методом прогонки. Рассмотрим ч.у. 1 рода, которые на разностной сетке аппроксимируются точно. В случае ч.у. 3 рода вопрос об их аппроксимации требует специального исследования.

Третья краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & (a) \\ x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha(T_w - T_\infty), & (b) \\ x = \ell, \quad T(\tau, \ell) &= F(\tau), & (c) \\ \tau = 0, \quad T(0, x) &= U(x). & (d) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Запишем явную схему для уравнения теплопроводности, она будет иметь разностную аппроксимацию $o(h_x^2, h_\tau)$. Построим разностную ап-

проксимацию того же порядка для краевого условия 3 рода (16, b) при $x = 0$. Для этого рассмотрим

$$T_x = \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T(0, \tau)}{\partial x^2} + o(h_x^2), \quad (17)$$

пользуясь уравнением теплопроводности при $x = 0$:

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(0, \tau)}{\partial x^2}, \quad (18)$$

откуда следует при объединении (17) и (18), что:

$$T_x(0, \tau) = \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} + \frac{h}{2a} \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \tau} + o(h_x^2)$$

или

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = T_x(0, \tau) - \frac{h}{2a} T_\tau(0, \tau) - o(h_x^2, h_\tau). \quad (19)$$

С учетом (19) ч.у. 3 рода при $x = 0$ будет представлено в виде:

$$-\lambda \left[T_x(0, \tau) - \frac{h}{2a} T_\tau(0, \tau) \right] = \alpha [T(0, \tau) - T_\infty]. \quad (20)$$

Решение разностных уравнений методом прогонки. Одним из наиболее употребительных способов решения уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач для уравнений математической физики, является в настоящее время метод прогонки.

Рассмотрим трехточечное разностное уравнение, полученное из неявной схемы

$$A_i \bar{Y}_{i-1} - C_i \bar{Y}_i + B_i \bar{Y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (21)$$

с краевыми условиями

$$\bar{Y}_0 = \kappa_1 \bar{Y}_1 + \nu_1, \quad \bar{Y}_N = \kappa_2 \bar{Y}_{N-1} + \nu_2, \quad (22)$$

где F_i , A_i , B_i , C_i , κ_1 , ν_1 , κ_2 , ν_2 – заданные числа; $A_i > 0$, $B_i > 0$, $C_i \geq A_i + B_i$, \bar{Y} , Y – разностные аналоги температуры на $(j+1)$ -м и j -м временном слое.

Будем искать решение уравнения (21) в том же виде, в котором заданы краевые условия (22), т.е.

$$\bar{Y}_i = \alpha_{i+1} \bar{Y}_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (23)$$

где α_{i+1} , β_{i+1} – неизвестные коэффициенты.

На основании (23) можно записать $\Psi_{i-1} = \alpha_i \Psi_i + \beta_i$; с учётом (23) найдём

$$\Psi_{i-1} = \alpha_i \alpha_{i-1} \Psi_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i. \quad (24)$$

Подставим (23) и (24) в (21), тогда

$$[\alpha_{i+1}(\alpha_i A_i - C_i) + B_i] \Psi_{i+1} + [(\alpha_i A_i - C_i) \beta_{i+1} + \beta_i A_i + F_i] = 0.$$

Отсюда видно, что (21) будет выполнено, если потребовать

$$\alpha_{i+1}(\alpha_i A_i - C_i) + B_i = 0; (\alpha_i A_i - C_i) \beta_{i+1} + \beta_i A_i + F_i = 0.$$

Тем самым мы получаем рекуррентное соотношение для определения прогоночных коэффициентов α_{i+1} , β_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}; \beta_{i+1} = \frac{A_i B_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad (25)$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Величины α_1 и β_1 находим из краевого условия (22), сравнивая его с (23) при $i = 0$:

$$\alpha_1 = \kappa_1, \beta_1 = \nu_1. \quad (26)$$

Значение Ψ_N , необходимое для начала счёта по формуле (23), найдём из второго условия (22) и соотношения (23) при $i = N-1$:

$$\begin{aligned} \Psi_{N-1} = \alpha_N \Psi_N + \beta_N, \Psi_N = \kappa_2 (\alpha_N \Psi_N + \beta_N) + \nu_2 \Rightarrow \\ \Psi_N = \frac{\nu_2 + \kappa_2 \beta_N}{1 - \kappa_2 \alpha_N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Зная Ψ_N , по формуле (23) производим расчёт остальных значений Ψ_i . При использовании ч.у. 1 рода $\kappa_2 = 0$ и $\nu_2 = \Psi_N$. При решении одномерных задач методом прогонки затрачивается число арифметических действий, пропорциональное числу узлов разностной сетки $3N$.

Рассмотрим нестационарный теплообмен сплошного шара. Система дифференциальных уравнений, описывающих задачу, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} &= a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \tau > 0, \quad (a) \\ r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} &= 0, \quad (b) \\ r = R, \quad T &= T_w(\tau), \quad (c) \\ \tau = 0, \quad T &= T_0 = \text{const.} \quad (d) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Запишем разностную аппроксимацию уравнения теплопроводности:

$$\frac{\mathcal{Y}_i - Y_i}{h_\tau} = a \left[\frac{1}{h_r} \left(\frac{\mathcal{Y}_{i+1} - \mathcal{Y}_i}{h_r} - \frac{\mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_{i-1}}{h_r} \right) + \frac{2}{r_i h_r} (\mathcal{Y}_{i+1} - \mathcal{Y}_i) \right],$$

$$\frac{a}{h_r^2} \mathcal{Y}_{i-1} - \left(\frac{2a}{h_r^2} + \frac{2a}{r_i h_r} + \frac{1}{h_\tau} \right) \mathcal{Y}_i + \left(\frac{a}{h_r^2} + \frac{2a}{r_i h_r} \right) \mathcal{Y}_{i+1} = -\frac{Y_i}{h_\tau},$$

где Y – разностный аналог температуры, h_τ – шаг по времени, h_r – шаг по радиусу, a – коэффициент температуропроводности. Обозначим

$$A_i = \frac{a}{h_r^2}; \quad C_i = \frac{2a}{h_r^2} + \frac{2a}{r_i h_r} + \frac{1}{h_\tau}; \quad B_i = \frac{a}{h_r^2} + \frac{2a}{r_i h_r}; \quad F_i = \frac{Y_i}{h_\tau},$$

тогда

$$A_i \mathcal{Y}_{i-1} - C_i \mathcal{Y}_i + B_i \mathcal{Y}_{i+1} = -F_i. \quad (29)$$

Разностная аппроксимация ч.у. в центре цилиндра при затруднена, поскольку величина $\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$ при $r = 0$ представляет неопределённость. Для ее раскрытия воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{r=0}. \quad (30)$$

С учетом (30) уравнение теплопроводности запишется как граничное условие на оси шара

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 3a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{r=0}$$

или в конечных разностях

$$\frac{\mathcal{Y}_0 - Y_0}{h_\tau} = \frac{3a}{h_r^2} (\mathcal{Y}_1 - 2\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_{-1}), \quad (31)$$

где $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_{-1}$ в силу симметрии процесса теплообмена (Рис. 1):

Тогда

$$\frac{\mathcal{Y}_0 - Y_0}{h_\tau} = \frac{6a}{h_r^2} (\mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_0). \quad (32)$$

Группируя члены, получим

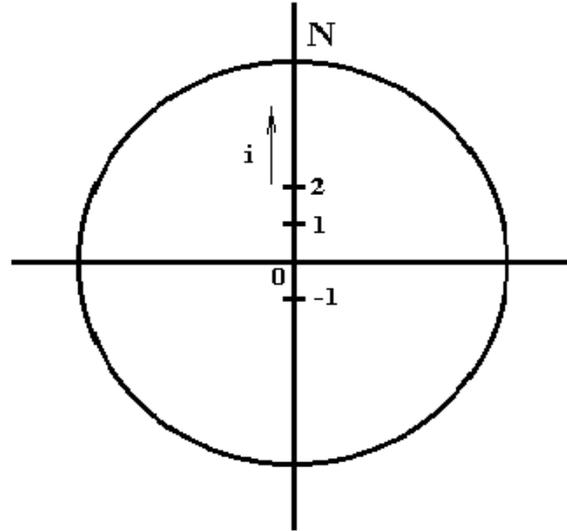


Рис.1.

$$\mathcal{Y}_0 = \frac{6ah_\tau}{h_r^2 + 6ah_\tau} \mathcal{Y}_1 + \frac{Y_0 h_r^2}{h_r^2 + 6ah_\tau}. \quad (33)$$

Обозначим в (33)

$$v_1 = \frac{Y_0 h_r^2}{h_r^2 + 6ah_\tau}. \quad (34)$$

Тогда

$$\mathcal{Y}_0 = \kappa_1 \mathcal{Y}_1 + v_1. \quad (35)$$

Граничные условия 1 рода на поверхности шара аппроксимируются точно:

$$\mathcal{Y}_N = \mathcal{Y}_w. \quad (36)$$

где $\mathcal{Y}_w = T_w^{j+1}$. В соответствии с (22) запишем:

$$\kappa_2 = 0, \quad v_2 = \mathcal{Y}_w. \quad (37)$$

Поскольку в начальный момент времени шар равномерно нагрет, то для нулевого временного слоя имеем:

$$Y_i = T_0 = \text{const}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0). \quad (38)$$

Для решения разностного уравнения (29) с краевыми условиями (34)–(38) воспользуемся методом прогонки. В результате получим распределение температуры по радиусу шара с течением времени. Затем необходимо выполнить пересчёт граничных условий 1 рода, используемых в задаче $T_w(\tau)$ (Рис.2) на граничные условия 3 рода

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \alpha (T_w - T_\infty). \quad (39)$$

Вычисляя с помощью конечных разностей градиент температуры в окрестности поверхностных точек тела ($r = R$) на данном временном слое, можно определить из (39) коэффициент теплоотдачи α :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{\Psi_N - \Psi_{N-1}}{h_r}, \quad (40)$$

тогда

$$\alpha = -\frac{\lambda (\Psi_N - \Psi_{N-1})}{h_r (\Psi_N - \Psi_\infty)}, \quad (41)$$

где Ψ_∞ – разностный аналог температуры окружающей среды, λ – коэффициент теплопроводности материала.

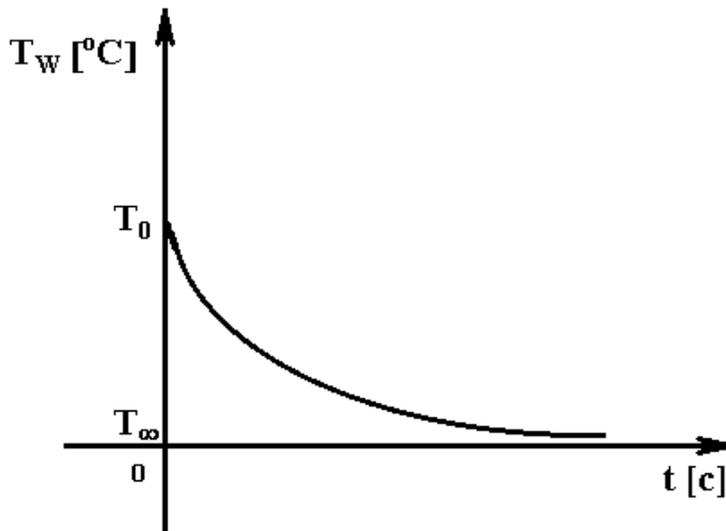


Рис.2. Температура охлаждения поверхности шара

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная модель представляет собой стальной шар диаметром $d_{ш}$ с зачеканенной на поверхности хромель-капельевой термопарой. Шар закреплен на горизонтальной стойке, нагрев до температуры $\approx 200^\circ\text{C}$ осуществляется в муфельной электропечи с последующей выдержкой ≈ 10 мин. для выравнивания поля температур. Контроль температур осуществляется потенциометром КСП-4 по шкале и с помощью цифропечатающего устройства. После эксперимента необходимо обработать данные по температуре в виде графика $T_w(\tau)$ (зависимость температуры поверхности

от времени). Геометрические и теплофизические характеристики модели представлены в нижеследующей таблице.

$d_{ш}, [мм]$	$T, [°C]$	$a, [м^2 / час]$	$\lambda, [Вт / м^°C]$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучить теоретические основы численного метода определения температурного поля и коэффициентов теплоотдачи.
2. Ознакомиться с лабораторной установкой и техникой безопасной работы с ней.
3. Нагреть шар в электрической печи до некоторой температуры, выключить печь и дать выдержку по времени, не вынимая шара для выравнивания поля температур.
4. Вынуть шар из печи и в условиях естественной конвекции зафиксировать изменение температуры поверхности с течением времени. Построить график $T_w(\tau)$.
5. Используя методику конечных разностей, рассчитать температурное поле для двух временных слоев ($j=1, 2$) и построить графики $T(r)$.
6. Вычислить коэффициенты теплоотдачи для $j=1, 2$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как определяется порядок разностной аппроксимации?
2. Дать определение явной и неявной разностной схемы на уравнении теплопроводности.
3. В чем заключается особенность разностной аппроксимации третьей краевой задачи теплопроводности?
4. Как выполняется разностная аппроксимация граничного условия в центре шара?
5. В чем заключается идея численного определения коэффициента теплоотдачи?

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.
2. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974. 522 с.
3. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1978. 463 с.
4. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Машгиз, 1962.

5. Лойцанский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
7. Повх И.Л. Теоретическая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1976. 502 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет В.И. Никонов

Подписано в печать 29.09.05

Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,26. Тираж 150 экз. Заказ № 345

Издательство «Универс-групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс-групп»