МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. АЛЯКИН, Р.Ф. УЗБЕКОВ

ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я7
А604

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. М.Е. Федина,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.А. Савинов

Алякин, Владимир Алексеевич
А604 Тесты по математическому анализу: практикум/ *В.А. Алякин, Р.Ф. Узбеков.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 168 с.

ISBN 978-5-7883-1769-4

Практикум состоит из краткой теории и тестовых заданий по курсу «Математический анализ». На занятиях по данной дисциплине обучающиеся актуализируют знания из школьной математики и некоторых разделов математического анализа. Каждый тест содержит 20 заданий. В основном к каждой теме приводится по четыре теста. Для типичных и трудных задач в начале каждой темы приводятся схемы решений или указания к решениям.

Предназначено для обучающихся первого курса специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Подготовлено на кафедре функционального анализа и теории функций.

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я7

ISBN 978-5-7883-1769-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 1. Неопределенный интеграл
Таблица простейших интегралов.
Основные методы интегрирования

Определение 1. Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, если на $[a;b]$ существует дифференцируемая функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Любая функция $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ также является первообразной для $f(x)$ на $[a;b]$.

Определение 2. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)\, dx$.

Пример 1. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int (\sqrt[4]{5} - \sqrt[3]{x})^2\, dx.$$

Решение. В силу свойства линейности неопределенного интеграла имеем:
$\int (\sqrt[4]{5} - \sqrt[3]{x})^2\, dx = \int (\sqrt{5} - 2\sqrt[4]{5}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})\, dx = \int \sqrt{5}dx -$
$- \int 2\sqrt[4]{5}\sqrt[3]{x}dx + \int \sqrt[3]{x^2}dx = \sqrt{5}\int dx - 2\sqrt[4]{5}\int \sqrt[3]{x}dx +$
$+ \int \sqrt[3]{x^2}dx == \sqrt{5}x - 2\sqrt[4]{5}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \sqrt{5}x - \frac{3\sqrt[4]{5}}{2}\sqrt[3]{x^4} +$
$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$

Пример 2. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{x}{x^4 + 100}\, dx.$$

Решение. Так как $d(x^2) = 2x\, dx$, внесем x^2 под знак дифференциала и получим табличный интеграл вида $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$:

$$\int \frac{x}{x^4 + 100}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 10^2} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{10} arctg\frac{x^2}{10} + C.$$

Теорема 1. Пусть $g(t)$ – дифференцируемая в $[c;d]$ и строго монотонная функция, а множество её значений $g([c;d]) = [a;b]$ является областью определения функции $f(x)$. Если $f(g(t))g'(t)$ имеет первообразную на $[c;d]$, то $f(x)$ имеет первообразную на $[a;b]$ и

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,\Big|_{t=g^{-1}(x)}.$$

Последнее равенство называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Теорема 2. Пусть $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции на промежутке $< a;b >$, а функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на $< a;b >$, тогда $u(x)v'(x)$ имеет первообразную $u(x)v(x) - F(x)$ на $< a;b >$, при этом

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Пример 3. Используя теорему 1, вычислите неопределенный интеграл

$$I = \int \sqrt{81 - x^2}\,dx.$$

Решение. Ясно, что $x \in [-9;9]$. Произведем замену в интеграле $x = 9\cos t$, откуда $\sqrt{81 - x^2} = 9\sin t$, $dx = -9\sin t\,dt$, $t = \arccos\frac{x}{9}$. В итоге:

$$I = -81\int \sin^2 t\,dt = -81\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{81}{2}\int(\cos 2t - 1)\,dt = \frac{81}{2}\left(\frac{1}{2}\int \cos 2t\,d(2t) - \int dt\right) =$$

$$= \frac{81}{4}\sin 2t - \frac{81}{2}t + C, \text{ где } t = \arccos\frac{x}{9}.$$

$$I = \frac{81}{2}\sin t\cos t - \frac{81}{2}t + C = \frac{81}{2}\frac{x}{9}\sqrt{1-\frac{x^2}{81}} - \frac{81}{2}\arccos\frac{x}{9} + C =$$
$$= \frac{x\sqrt{81-x^2}}{2} - \frac{81}{2}\arccos\frac{x}{9} + C.$$

Пример 4. Используя теорему 2, найдите первообразную функции $f(x) = xe^{5x}$.

Решение. Ясно, что $x \in \mathbb{R}$. Выражение под знаком интеграла – это произведение степенной функции и показательной, поэтому применим метод интегрирования по частям (Теорема 2), где $u(x) = x,\ v'(x) = e^{5x}$. Тогда $u'(x) = 1,\ v(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$.

$$I = \int xe^{5x}\,dx = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x}\,dx = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C.$$

Тест 1

1. Вычислите интеграл $\int\cos(6x)dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\sin(6x) + c$;
2) $\frac{1}{6}\sin(6x) + c$;
3) $\frac{1}{6}\sin(x) + c$;
4) $\sin(x) + c$.

2. Вычислите интеграл $\int\cos^5(x)dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + \frac{1}{5}\sin^5(x) + c$;
2) $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(5x) + c$;
3) $\sin(x) - \sin^3(x) + \frac{1}{5}\sin^5(x) + c$;
4) $\sin(x) - \sin^3(x) + \sin^5(x) + c$.

3. Вычислите интеграл $\int\sqrt{9-x^2}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $x\sqrt{9-x^2} + 4{,}5\arcsin(\frac{x}{3}) + c$;
2) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + 4{,}5\arcsin(\frac{x}{3}) + c$;

3) $x\sqrt{9-x^2}+4{,}5\arccos(x)+c$;
4) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+4{,}5\arccos(\frac{x}{3})+c$.

4. Вычислите интеграл $\int(\frac{1}{x+2}-\frac{5x}{4}+\frac{8}{7})dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\ln|x|+\frac{8x}{7}+c$;
2) $\ln|x|-\frac{5x^2}{8}-\frac{8x}{7}+c$;
3) $\ln|x+2|-\frac{5x^2}{8}-\frac{8x}{7}+c$;
4) $\ln|x+2|-\frac{5x^2}{8}+\frac{8x}{7}+c$.

5. Вычислите интеграл $\int(3x^{29}+7x^{48})dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{x^{30}}{10}+\frac{x^{49}}{7}+c$;
2) $3x^{29}+\frac{x^{49}}{49}+c$;
3) $x^{30}+x^{49}+c$;
4) $3x^{30}+7x^{49}+c$.

6. Вычислите интеграл:

$$\int 2e^{2x}\sqrt{1+9e^{4x}}dx.$$

7. Установите соответствия между элементами столбцов и заполните таблицу.

1) правило разложения подынтегральной функции;
2) правило вынесения константы за знак интеграла;
3) правило интегрирования по частям;

a) $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$;
b) $\int \upsilon'(x)\nu(x)dx=\upsilon(x)\nu(x)-\int\upsilon(x)\nu'(x)dx$;
c) $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

a	b	c

8. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2}{(x^2+2)(x^2+4)}dx.$$

9. Вычислите интеграл:

$$\int \sin^2(4x)\sin^2(3x)dx.$$

10. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{\cos^5(x)}{\sin(x)}dx.$$

11. Вычислите интеграл:

$$\int x\sin(3x)dx.$$

12. Вычислите интеграл:

$$\int \cos(x)e^{2x}dx.$$

13. Вычислите интеграл:

$$\int \sqrt{x^2+7-x}dx.$$

14. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{7+x-x^2}}dx.$$

15. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$$

16. Установите соответствие между функцией (в левом столбце) и ее первообразной (в правом столбце). В ответе укажите цифру и букву через запятую.

1) $18x^{17}+e^{13x}$	a) $\frac{2^x}{\ln(2)}$
2) $\frac{1}{cos^2(x)}$	b) $x^{18}+\frac{e^{13x}}{13}$
3) $\frac{1}{sin^2(x)}$	c) $-\operatorname{ctg}(x)$
4) 2^x	d) $\operatorname{tg}(x)$

17. Вычислите интеграл:

$$\int x^2\cos^2(3x)dx.$$

18. Выберите вариант, в котором указана формула интегрирования по частям:

$$1)\int \upsilon'(x)\nu(x)dx = \upsilon(x)\nu(x)+\int \upsilon(x)\nu'(x)dx;$$

$$2)\int \upsilon(x)\nu'(x)dx = \upsilon(x)\nu(x)+\int \upsilon'(x)\nu'(x)dx;$$

$$3)\int \upsilon'(x)\nu(x)dx = \upsilon(x)\nu(x)-\int \upsilon(x)\nu'(x)dx;$$

$$4)\int \upsilon(x)\nu'(x)dx = \upsilon(x)\nu(x)-\int \upsilon'(x)\nu'(x)dx.$$

19. Вычислите интеграл:

$$\int x^7\operatorname{arctg}(x)dx.$$

20. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx.$$

Тест 2

1. Вычислите интеграл $\int x^3(x-3)^3dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{x^7}{7}-\frac{3x^6}{2}+\frac{27x^5}{5}-\frac{27x^4}{4}+c$;
2) $x^7-\frac{3x^6}{4}+\frac{27x^5}{5}-\frac{27x^4}{4}+c$;
3) $\frac{x^7}{7}-\frac{3x^6}{2}+\frac{27x^5}{5}-\frac{27x^4}{5}+c$;
4) $x^7-\frac{3x^5}{2}+\frac{27x^5}{5}-\frac{27x^4}{5}+c$.

2. Вычислите интеграл $\int(a+5)^x dx$,$a \in R$ и выберите правильный ответ:
1) $(a+5)^x+c$;
2) $\frac{(a+5)^x}{\ln(a+5)}+c$;
3) $\frac{(a+5)^x}{\ln(a)}+c$;
4) $\frac{(a+5)^x}{\ln(x)}+c$.

3. Вычислите интеграл $\int \frac{x}{16-x^2}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $-\frac{1}{2}\ln(|16-x^2|)+c$;
2) $\frac{1}{2}\ln(|16-x^2|)+c$;
3) $\frac{1}{2}\ln(|16+x^2|)+c$;
4) $-\frac{1}{2}\ln(|16+x^2|)+c$.

4. Вычислите интеграл $\int(16x^3+\frac{1}{x+5}+28x)dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{16x^3}{3}+\ln(|x+5|)+28x^2+c$;

2) $4x^4 + \ln(|x+5|) + 28x^2 + c$;
3) $4x^4 + \ln(|x+5|) + 14x^2 + c$;
4) $4x^4 - \ln(|x+5|) - 14x^2 + c$.

5. Вычислите интеграл $\int \frac{1}{\cos^2(3x)}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2(3x) + c$;
2) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x) + c$;
3) $\operatorname{tg}(3x) + c$;
4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x) + c$.

6. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2e^{4x}}{\sqrt{4-25e^{8x}}}dx.$$

7. Установите соответствия и в ответе перечислите правильные комбинации цифр и букв через запятую.

1) правило вынесения константы;
2) правило интегрирования по частям;
3) правило разложения;

a) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$;
b) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
c) $\int \upsilon'(x)\nu(x)dx = \upsilon(x)\nu(x) - \int \upsilon(x)\nu'(x)dx$.

8. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{22-3x^2}{(x^2+13)(9-4x^2)}dx.$$

9. Вычислите интеграл:

$$\int \cos^2(4x)\cos^2(5x)dx.$$

10. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{\sin^5(x)}{\cos(x)}dx.$$

11. Вычислите интеграл:

$$\int x^2\cos(4x)dx.$$

12. Вычислите интеграл:

$$\int e^{3x}\sin(2x)dx.$$

13. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2+6+\frac{2}{3}x}dx.$$

14. Вычислите интеграл:

$$\int \sqrt{12x^2-4x-8}dx.$$

15. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx.$$

16. Продолжите фразу. Пусть $y = F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, полученных путем параллельного переноса графика функции...

а) $y = F(x)$; б) $y = f(x)$; в) $y = F'(x)$; г) $y = f'(x)$.
вдоль оси: а) OY; б) OX.

17. Опишите правило замены переменной в неопределенном интеграле путем подведения функции под знак дифференциала.

18. Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{arctg}(\sqrt[4]{6x-11}) dx.$$

19. Вычислите интеграл:

$$\int x^7 \operatorname{arcctg}(x) dx.$$

20. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{47x - 67}{(x-1)(x^2 - x - 12)} dx.$$

Тест 3

1. Вычислите интеграл $\int \frac{x+5}{x-2}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $x + 7\ln(|x-2|) + c$;
2) $x + 5\ln(|x-2|) + c$;
3) $x - 7\ln(|x-2|) + c$;
4) $x - 5\ln(|x-2|) + c$.

2. Вычислите интеграл $\int (x-10)^{10}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{x^{11}}{11} - x^{10} + 5x^9 - 15x^8 + 30x^7 - 42x^6 + 42x^5 - 30x^4 + 15x^3 - 5x^2 + x + c$;
2) $x^{11} - x^{10} + 5x^9 - 15x^8 + 30x^7 - 42x^6 + 42x^5 - 30x^4 + 15x^3 - 5x^2 + x + c$;
3) $\frac{x^{11}}{11} - x^{10} + 5x^9 + 30x^7 - 42x^6 + 42x^5 - 30x^4 + 15x^3 - 5x^2 + x + c$;
4) $\frac{x^{11}}{11} - x^{10} + 5x^9 - 15x^8 + 30x^7 - 42x^6 + 42x^5 - 30x^4 + 15x^3 - 5x^2 + c$.

3. Вычислите интеграл $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\mathrm{arctg}(x) + c$;
2) $x - \mathrm{arctg}(x) + c$;
3) $x + \mathrm{arctg}(x) + c$;
4) $-\mathrm{arctg}(x) + c$.

4. Вычислите интеграл $\int -36\sin(18x)dx$ и выберите правильный ответ:
1) $2\cos(18x) + c$;
2) $-2\cos(18x) + c$;
3) $36\cos(18x) + c$;
4) $-36\cos(18x) + c$.

5. Вычислите интеграл $\int \sqrt{9-x^2}dx$ и выберите правильный ответ:

1) $x\sqrt{9-x^2}+4{,}5\arcsin(\frac{x}{3})+c$;
2) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+4{,}5\arcsin(\frac{x}{3})+c$;
3) $x\sqrt{9-x^2}+4{,}5\arccos(x)+c$;
4) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+4{,}5\arccos(\frac{x}{3})+c$.

6. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x+x^3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx.$$

7. Вычислите интеграл:

$$\int \arcsin(5x)dx.$$

8. Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{ctg}^4(4x)dx.$$

9. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{\cos(2x)}dx.$$

10. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^4(x)+4\cos^4(x)}dx.$$

11. Вычислите интеграл:

$$\int (x^2 + 3x + 5)\cos(2x)dx.$$

12. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx.$$

13. Вычислите интеграл:

$$\int e^{-x}x^5dx.$$

14. Вычислите интеграл:

$$\int \sqrt{\frac{2+3x}{3-2x}}dx.$$

15. Вычислите интеграл:

$$\int 2\sin(8x)\cos(14x)dx.$$

16. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{2\sin(x) + 3\cos(x) + 3}dx.$$

17. Вычислите интеграл:

$$\int \sin(3x)x^3dx.$$

18. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$$

19. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{\arcsin(3x)}{x^2}dx.$$

20. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx.$$

Тест 4

1. Вычислите интеграл $\int \operatorname{tg}(18x)dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{18}\ln(|\cos(18)|)+c$;
2) $-\frac{1}{18}\ln(|\cos(18)|)+c$;
3) $\ln(|\cos(18)|)+c$;
4) $\frac{1}{18}\ln(|\sin(18)|)+c$.

2. Вычислите интеграл $\int 6^x dx$ и выберите правильный ответ:

1) $\frac{6^x}{\ln(6)} + c$;
2) $\frac{6^x}{\ln(x)} + c$;
3) $\frac{6^{x+1}}{x+1} + c$;
4) $\frac{6^{x+1}}{\ln(x+1)} + c$.

3. Вычислите интеграл $\int \sin^3(x)dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{3}\cos^2(x) - \cos(x) + c$;
2) $\frac{1}{3}\cos^2(x) + \cos(x) + c$;
3) $\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c$;
4) $\frac{1}{3}\cos^3(x) + \cos(x) + c$.

4. Вычислите интеграл $\int e^{2x}dx$ и выберите правильный ответ:
1) $e^{2x} + c$;
2) $\frac{1}{2}e^x + c$;
3) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$;
4) $xe^{2x} + c$.

5. Вычислите интеграл $\int(\sin^2(x) + \cos^4(x))dx$ и выберите правильный ответ:
1) $\frac{x}{2} + \frac{\sin(4x)}{32} + c$;
2) $\frac{7x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + c$;
3) $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + c$;
4) $\frac{7x}{8} + \frac{\sin(4x)}{32} + c$.

6. Вычислите интеграл: $\int \operatorname{arcctg}(9x)dx$.

7. Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^4(4x)dx.$$

8. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{\sin(2x)}dx.$$

9. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x + x^3}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}dx.$$

10. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2\operatorname{tg}(x) + 5}{\sin^2(x) + 2\cos^2(x)}dx.$$

11. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}dx.$$

12. Вычислите интеграл:

$$\int \sin(2x + 3)x^2 dx.$$

13. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2 - 9x + 14}dx.$$

14. Вычислите интеграл:

$$\int \sqrt{\frac{2-x}{3x+1}}dx.$$

15. Вычислите интеграл:

$$\int 2\cos(6x)\cos(36)dx.$$

16. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{6\sin(x)+5\cos(x)+7}dx.$$

17. Вычислите интеграл:

$$\int \cos(4x)x^4 dx.$$

18. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x^2+5x-3}{(x+1)(x^2+7x+13)}dx.$$

19. Вычислите интеграл:

$$\int \frac{\arccos(4x)}{x^2}dx.$$

20. Опишите правило замены переменной в неопределенном интеграле путем подведения функции под знак дифференциала.

Тема 2. Интегрирование дробно-рациональных функций

Определение. Функция вида $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ – многочлены, называется дробно-рациональной.

Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то есть степень многочлена в числителе дроби больше степени многочлена в знаменателе, то для интегрирования такой функции сначала нужно выделить целую часть, разделив $P(x)$ на $Q(x)$. В результате получится сумма многочлена и правильной рациональной дроби.

Неопределенный интеграл от правильной рациональной дроби можно вычислить либо с помощью метода неопределенных коэффициентов, либо свести к табличному интегралу, либо вычислить с помощью метода М.В. Остроградского. Рассмотрим применение этих методов на примерах.

Пример 1. Вычислите неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx.$$

Решение. Дробь $\frac{x^2-3x+5}{x^3-x^2+x-1}$ является правильной, поэтому для вычисления интеграла применим метод неопределенных коэффициентов. Разложим данную функцию на простейшие дроби. Очевидно, что $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$, поэтому

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1},$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты. Далее, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю и сравним коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Получим систему уравнений

$$A + B = 1,\ C - B = -3\ A - C = 5.$$

Откуда $A = \frac{3}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = -\frac{7}{2}$. В итоге:

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{7}{2}\,arctg\ x + C.$$

Пример 2. Найдите значение интеграла с помощью метода М.В. Остроградского, если

$$I = \int \frac{4x+7}{(x-1)^2(x+3)^2}\,dx.$$

Решение. Согласно методу Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} - \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

где

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots$$

$$\dots(x^2+p_zx+q_z)^{m_z}, Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1}\dots$$

$$\dots(x-a_n)^{k_n-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\dots(x^2+p_zx+q_z)^{m_z-1},$$

$$Q_2(x) = (x-a_1)\dots(x-a_n)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_zx+q_z),$$

а $P_1(x), P_2(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, степень которых на единицу меньше степени соответствующих многочленов в знаменателе. Имеем:

$$I = \frac{Ax+B}{(x-1)(x+3)} - \int \frac{Cx+D}{(x-1)(x-3)}dx.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{4x+7}{(x-1)^2(x+3)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+3)-(Ax+B)(2x+2)}{(x-1)^2(x+3)^2} -$$
$$- \frac{Cx+D}{(x-1)(x+3)}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители обеих частей:

$$\frac{A(x-1)(x+3)-(Ax+B)(x+1)2-(Cx+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)^2(x+3)^2},$$

$$4x+7 = A(x^2+2x-3)-(Ax+B)(2x+2)-(Cx+D)(x^2+2x-3).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях переменной x:

$$0 = -C;\ 0 = A-2A-D-2C;\ 4 = 2A-2B-2A+3C-2D,$$
$$7 = -3A-2B+3D.$$

Получаем $A = -\frac{3}{8},\ B = -\frac{19}{8},\ C = 0,\ D = \frac{3}{8}$. В результате получаем

$$I = -\frac{3x+19}{8(x-1)(x+3)} - \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$$

Пусть $I_1 = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$. Вычислим его методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3},$$

$1 = Ax+3A+Bx-B,\ A = -B = \frac{1}{4}$,

$$I_1 = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C =$$

$= \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+3}| + C$. В итоге:

$$I = -\frac{3x+19}{8(x-1)(x+3)} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+3}| + C.$$

Тест 1

1. Вычислите интеграл

$$\int \frac{7}{x+9}dx$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{7}\ln|x+3|+c$; 2) $\frac{1}{7}arctg\frac{x}{3}+c$; 3) $\ln|x+9|+c$.

2. Вычислите интеграл

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+c$; 2) $\frac{-2x}{(x^2+4)}+c$; 3) $\ln|\frac{x-2}{x+2}|+c$.

3. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+4)^3}$$

и выберите правильный ответ:
1) $3\ln|x+4|+c$; 2) $\frac{-1}{2(x+4)^2}+c$; 3) $\frac{-1}{2x^2}+\frac{x}{64}+c$.

4. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-64}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{16}\ln|\frac{x-8}{x+8}|+c$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg(\frac{x}{2\sqrt{2}})+c$; 3) $\ln|x^2-64|+c$.

5. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{11dx}{(4x+19)^8}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{11}\ln|4x+19|+c$; 2) $\sqrt{19+4x}+c$; 3) $\frac{-11}{28(4x+19)^7}+c$.

6. Опишите суть метода неопределенных коэффициентов.

7. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$$

8. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx.$$

9. На какие простейшие дроби с неопределенными коэффициентами раскладывается рациональная дробь

$$\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}?$$

10. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x-5)}dx.$$

11. Решите неопределенный интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx.$$

12. Разложите рациональную дробь

$$\frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+3)}$$

на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами. Вычислите коэффициенты.

13. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{-2x+6}{x^2+4x+13}dx.$$

14. Дайте определение дробно-рациональной функции.

15. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^4-3x^2+2x+7}{x^3-2x^2+x}dx.$$

16. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{3x+4}{x^3-1}dx.$$

17. Решите неопределенный интеграл в зависимости от значений параметров:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

18. Вычислите неопределенный интеграл методом Остроградского:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

19. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$$

20. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{5x^2+7x+11}{(x-2)(x+1)}dx.$$

Сделайте проверку.

Тест 2

1. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+11}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{11}arctg\frac{x}{11}+c$; 2) $\frac{1}{11}\ln|x^2+11|+c$; 3) $\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{x}{\sqrt{11}}+c$.

2. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-9}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{1}{6}\ln|\frac{x-3}{x+3}|+c$; 2) $-\sqrt{9-x^2}+c$; 3) $\ln|x+\sqrt{x^2-9}|+c$.

3. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{6dx}{x+3}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\ln|6+\sqrt{x+3}|+c$; 2) $6\ln|x+3|+c$; 3) $\frac{-6}{x^2}+3x+c$.

4. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{7dx}{(3x+11)^{20}}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{-7}{57(3x+11)^{19}}+c$; 2) $\frac{49}{2}\arcsin(3x+11)^{20}+c$; 3) $\ln\left|\frac{3x-11}{3x+11}\right|^{20}+c$.

5. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{4dx}{(x+6)^2}$$

и выберите правильный ответ:
1) $\frac{4}{2(x+6)^3}+c$; 2) $2\ln\left|\frac{x+6}{x-6}\right|+c$; 3) $\frac{-4}{x+6}+c$.

6. Опишите суть метода Остроградского-Гаусса вычисления неопределенного интеграла.

7. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^3+3x}dx.$$

8. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$$

9. На какие простейшие дроби с неопределенными коэффициентами раскладывается рациональная дробь

$$\frac{x+4}{(x+2)^2(x^2+3x-1)}?$$

10. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{4x+7}{(x-3)(x-8)}dx.$$

11. Решите неопределенный интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^2}dx.$$

12. Разложите рациональную дробь

$$\frac{x+1}{(x+6)(x-4)}$$

на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами. Вычислите коэффициенты.

13. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25}dx.$$

14. Дайте определение целой рациональной функции.

15. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2+x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx.$$

16. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{5x+7}{x^3-27}dx.$$

17. Решите неопределенный интеграл в зависимости от значений параметров:

$$\int \frac{dx}{gx^2+fx+k};$$

$g, f, k \in \mathbb{R}$.

18. Вычислите неопределенный интеграл методом Остроградского:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

19. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

20. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx.$$

Тест 3

1. Установите соответствие, в ответе перечислите через запятую комбинации цифр и букв.

1) $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$	a) $\frac{1}{\sqrt{10}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{10}} + c$
2) $\int \frac{dx}{(2x-3)^7}$	b) $\frac{1}{4} arctg \frac{x+3}{4} + c$
3) $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$	c) $\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c$
4) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$	d) $\frac{-1}{12} \frac{1}{(2x-3)^6} + c$

2. Разложите правильную дробь

$$\frac{1}{x^3+2x-3}$$

на простейшие и выберете правильный ответ:
1) $\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+2x-3}+c$; 2) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+3}+c$; 3) $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+3}+c$.

3. Чему равен интеграл

$$\int \frac{A}{(x-k)^m}dx,\ A,k,m \in \mathbb{R}?$$

Выберите правильный ответ:
1) $\frac{A}{m-1}\frac{1}{(x-k)^{m-1}}+c$; 2) $\frac{-A}{m-1}\frac{1}{(x-k)^{m-1}}+c$; 3) $\frac{A}{(x-k)^{m+1}}+c$.

4. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)^2}$$

и выберете правильный ответ:
1) $\frac{1}{4x}+\frac{x}{8(x^2+2)}+\frac{3}{8\sqrt{2}}arctg\frac{2x}{\sqrt{2}}+c$;
2) $\frac{1}{4x}-\frac{x}{8(x^2+2)}\ln\left|\frac{2x+x}{x^2}\right|+c$;
3) $\frac{-1}{4x}-\frac{x}{8(x^2+2)}-\frac{3}{8\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+c$.

5. Выберите верное утверждение:
1) рациональной дробью называется отношение двух многочленов, т.е. функция вида $\frac{Pm(x)}{Qn(x)}$ с рациональными коэффициентами;
2) рациональной дробью называется отношение двух многочленов с иррациональными коэффициентами;
3) рациональной дробью называется отношение двух линейных функций одной переменной функции вида $\frac{x}{y}$.

6. Дайте формулировку теоремы об интегрировании в конечном виде рациональной дроби.

7. Решите неопределенный интеграл методом Остроградского:

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx.$$

8. Представьте неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$1)\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x};\ 2)\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}.$$

9. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx.$$

10. Решите неопределенный интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx.$$

11. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2}{(x-2)^{99}}dx.$$

12. Решите неопределенный интеграл методом Остроградского:

$$\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$$

13. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^{11}dx}{x^8 + x^4 + 2}.$$

14. Вычислите неопределенный интеграл с помощью замены переменных:

$$\int \frac{dx}{x^3(x^2 - 2)}.$$

15. Решите интеграл:

$$\int_4^5 \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

16. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9}.$$

17. Примените подстановку $t = \frac{x+a}{x+b}$ для вычисления интеграла:

$$I = \int \frac{dx}{(x + a)^m (x + b)^n}.$$

Запишите получившуюся формулу.

18. Пользуясь подстановкой из задания 17, найдите интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2 (x + 3)^3}.$$

19. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx.$$

20. Найдите ошибку в вычислении интеграла:

$$\int \frac{x^3-2}{x^2+x-12}dx = \int (x+1-\frac{30}{7(x+4)}-\frac{47}{7(x-3)})dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x-\frac{30\ln|x+4|}{7}-\frac{47\ln|x-3|}{7}+c.$$

Запишите верное решение.

Тест 4

1. Установите соответствие между правильной рациональной дробью и ее разложением в сумму простейших дробей:

1) $\frac{x^3+2x-1}{(x-2)(x+1)^3}$ a) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$

2) $\frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)}$ b) $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}$

3) $\frac{x+1}{x^2(x^2+2x+1)}$ c) $\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2}+x+3+\frac{Dx+F}{(x^2+x+3)^2}$

4) $\frac{x^4+1}{(x+2)(x^2+x+3)^2}$ d) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}$

2. Решите интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$$

и выберите правильный ответ:
1) $\ln|(x-2)(x+5)|+c$; 2) $\frac{2}{3}arctg\frac{x+3}{10}+c$; 3) $\ln|\frac{x-2}{x+5}|+c$.

3. Чему равен интеграл

$$\int \frac{Bx+A}{x^2+px+q}dx,\ p,q\in\mathbb{R}?$$

Выберите правильный ответ:
1) $\frac{B}{2}\ln|x^2+px+q|+c$;
2) $arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+\ln|Bx+A|+c$;
3) $\frac{B}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{A-\frac{Bp}{2}}{\sqrt{q^2-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+c$.

4. Вычислите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^3(x-1)^6}$$

и выберете правильный ответ:
1) $\frac{-x^5}{5(x-1)^5}+\frac{7x^4}{4(x-1)^4}-\frac{7x^3}{(x-1)^3}+\frac{35x^2}{2(x-1)^2}-\frac{35x}{x-1}-21\ln|\frac{x-1}{x}|+\frac{7(x-1)}{x}-\frac{(x-1)^2}{2x}+c$;
2) $\frac{x^5}{(x-1)^5}+\frac{x^4}{(x-1)^4}-\frac{x^2}{(x-1)^2}-35x+\ln|x-1|-\frac{21x-21}{x}+c$;
3) $\ln|\frac{x-1}{x^2}|+\frac{x^6}{(x-1)^6}+\frac{x^5}{(x-1)^5}+\frac{1}{x^3}+\frac{2x}{(x-1)^2}+\frac{3x}{x-1}+c$.

5. Выберите верное утверждение:
1) неопределенный интеграл от неправильной рациональной дроби табличный;
2) неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;
3) неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочленов.

6. Запишите все простейшие рациональные дроби с неопределенными коэффициентами.

7. Решите неопределенный интеграл методом Остроградского:

$$\int \frac{4x+24}{(x^2+6x+10)^2}dx.$$

8. Выделите целую часть из рациональных дробей:

$$1)\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)};$$

$$2)\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}.$$

9. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-4)(x-3)}dx.$$

10. Решите неопределенный интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{3x^3+25}{(x^2+3x+2)}dx.$$

11. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx.$$

12. Выделите рациональную часть интеграла:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx.$$

13. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3}{x^8+2}dx.$$

14. Вычислите неопределенный интеграл с помощью замены переменных:

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^2}.$$

15. Решите интеграл:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx.$$

16. Решите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

17. Примените подстановку $z = \frac{x+c}{x+d}$ для вычисления интеграла:

$$I = \int \frac{dx}{(x+c)^n(x+d)^m}.$$

Запишите получившуюся формулу.

18. Пользуясь подстановкой из задания 17, найдите интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-6)^3(x+4)^2}.$$

19. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}.$$

20. Найдите ошибку в решении интеграла:

$$\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx = \int (x^3-5x^2+\frac{1}{x^2+5x})dx =$$
$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{5}\ln|x+5| - \frac{1}{5}\ln|x| + c.$$

Запишите верное решение.

Тема 3. Интегрирование трансцендентных функций

Определение. Функция $y = f(x)$ называется трансцендентной, если она не является алгебраической. Таковыми являются логарифмическая, показательная, тригонометрическая, обратная тригонометрическая функции, а также различные линейные комбинации этих функций.

Рассмотрим на конкретных примерах некоторые методы интегрирования трансцендентных функций.

Пример 1. Найдите значение неопределенного интеграла

$$I = \int \frac{dx}{2\sin x - 4\cos x + 7}.$$

Решение. В интеграле осуществим универсальную тригонометрическую подстановку $t = tg\frac{x}{2}$, откуда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2arctg\ t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Имеем:

$$I = \int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} + 7} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{11t^2 + 4t + 3} = \frac{2}{11}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{4}{11}t + \frac{3}{11}} =$$

$$= \frac{2}{11}\int \frac{dt}{(t + \frac{2}{11})^2 + \frac{29}{121}} = \frac{2}{11}\int \frac{d(t + \frac{2}{11})}{(t + \frac{2}{11})^2 + (\frac{\sqrt{29}}{11})^2} =$$

$$= \frac{2}{12} \cdot \frac{11}{\sqrt{29}} arctg\ \frac{t + \frac{2}{11}}{\frac{\sqrt{29}}{11}} + C = \frac{11}{6\sqrt{29}}\ arctg \frac{11t + 2}{\sqrt{29}} + C,$$

где $t = tg\ \frac{x}{2}$.

Пример 2. Вычислите $I = \int \frac{e^{4x}dx}{e^x+5}$.

Решение. Произведем замену в данном интеграле $t = e^x$, тогда $x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$. В итоге получаем

$$I = \int \frac{t^4 \frac{dt}{t}}{t+5} = \int \frac{t^3}{t+5} dt = \int (t^2 - 5t + 25 - \frac{125}{t+5}) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 25t - 125 \ln|t+5| + C =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} - \frac{5e^{2x}}{2} + 25e^x - 125 \ln(e^x + 5) + C.$$

Пример 3. Вычислите $I = \int x^2 \arcsin 5x \, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Пусть $u'(x) = x^2,\ v(x) = \arcsin 5x$. Тогда $u(x) = \frac{x^3}{3},\ v'(x) = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$. В результате получаем, что

$$I = \frac{x^3}{3} \arcsin 5x - \int \frac{5x^3}{3\sqrt{1-25x^2}} dx.$$

В последнем интеграле произведем замену переменной $t = 1 - 25x^2$, тогда $x = \frac{1}{5}\sqrt{1-t}$, $dx = -\frac{dt}{10\sqrt{1-t}}$.

$$I = \frac{x^3}{3} \arcsin 5x - \frac{5}{3} \int \frac{\frac{1}{125}\sqrt{(1-t)^3}}{\sqrt{t}} \frac{(-1)dt}{10\sqrt{1-t}} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arcsin 5x + \frac{1}{750} \int \frac{1-t}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arcsin 5x + \frac{1}{750} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt - \frac{1}{750} \int \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arcsin 5x + \frac{1}{750} \cdot 2\sqrt{t} - \frac{1}{500}\sqrt{t^3} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arcsin 5x + \frac{1}{375}\sqrt{1-25x^2} - \frac{1}{500}\sqrt{(1-25x^2)^3} + C.$$

Тест 1

1. Что называется первообразной функции $f(x)$:
a) функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$;
b) функция $F(x)$ такая, что $F(x) = f'(x)$;
c) функция $F(x)$ такая, что $F(x) = f^{-1}(x)$;
d) множество $F = X$, $f(x) : X \to Y$?

2. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, $G(x)$ – первообразная для $g(x)$. Тогда первообразная для $f(x) + g(x)$ определяется следующим образом:
a) $xF(x) + xG(x)$; b) $F(x) + G(x)$;
c) $F(x)g(x) + G(x)f(x)$; d) $\frac{F(x)+G(x)}{f(x)+g(x)}$.

3. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $< a; b >$, а $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция на $< c; d >$, $\varphi :< c; d > \to < a; b >$. Тогда $F(\varphi(t))$ – первообразная для:
a) $f(\varphi(t))$; b) $f'(\varphi(t))\varphi(t)$;
c) $f(\varphi(t))\varphi'(t)$; d) $f(\varphi(t)) + \varphi'(t)$.

4. Пусть $R(u; v)$ – дробно-рациональная функция от переменных u и v, $u = \sin x$, $v = \cos x$ и $R(-u; v) = -R(u; v)$. Тогда $\int R(\sin x; \cos x)dx$ берется в конечном виде с помощью подстановки:
a) $t = \cos x$; b) $t = \arcsin x$;
c) $t = x - 1$; d) $t = \sin x$.

5. Универсальная тригонометрическая подстановка – это:
a) $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; b) $t = \sin x$;
c) $t = \cos x$; d) $t = \sin x \cos x$.

6. Решите, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством: $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

7. Выведите формулу понижения для интеграла

$$I_n = \int \sin^n x dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

8. Вычислите интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$, введя соответствующую замену:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

9. Вычислите интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$, введя соответствующую замену:

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx.$$

10. Используя формулу

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x}dx =$$
$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где $A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2+b^2}, B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2+b^2}, C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2+b^2}$, решите:

$$\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx.$$

11. Зная, что

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}] + C,$$

где $P(x)$ – многочлен степени n, решите

$$\int x^3 e^{3x}dx.$$

12. Зная, что

$$\int P(x) \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a}[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \dots] +$$

$$+\frac{\sin ax}{a^2}[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(V)}(x)}{a^4}-\ldots]+C,$$

решите:

$$\int x^5 \sin 5x dx.$$

13. Найдите интеграл, содержащий функцию $\operatorname{arctg} f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int x \operatorname{arctg}(x+1)dx$.

14. Найдите интеграл, содержащий функцию $\arccos f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$.

15. Вычислите $\int \arcsin x dx$.

16. Какая функция называется интегрируемой в конечном виде?

17. Приведите примеры функций не интегрируемых в конечном виде.

18. Какова мощность множества первообразных для $f(x)$? Почему?

19. Что называют трансцендентной функцией?

20. Сформулируйте теорему о существовании первообразной.

Тест 2

1. Для чего используют правило замены переменной в неопределенном интеграле?

a) свести исходный интеграл к табличному;
b) просто необходимо выполнить какие-либо преобразования;
c) для усложнения подынтегральной функции;
d) т.к. интегралы от рациональной дроби не берутся в конечном виде.

2. Продолжите фразу. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то первообразная для $\alpha f(x)\ldots$

a) $F(x)+\alpha x$; b) $\alpha F(x)$;
c) $F(\alpha x)$; d) $\frac{F(x)}{\alpha}$.

3. Пусть $R(u;v)$ – дробно-рациональная функция от переменных u и v, $u=\sin x$, $v=\cos x$ и $R(u;-v)=-R(u;v)$. Тогда $\int R(\sin x;\cos x)dx$ берется в конечном виде с помощью подстановки:

a) $t=\cos x$; b) $t=\sin x$;
c) $t=\arccos x$; d) $t=x+1$.

4. Пусть $R(u;v)$ – дробно-рациональная функция от переменных u и v, $u=\sin x$, $v=\cos x$ и $R(-u;-v)=R(u;v)$. Тогда $\int R(\sin x;\cos x)dx$ берется в конечном виде с помощью подстановки:

a) $t=\sin x\cos x$; b) $t=\operatorname{tg} x$;
c) $t=\frac{x}{2}$; d) $t=\cos x$.

5. Пусть $u(x),v(x)$ – дифференцируемые функции, $F(x)$ – первообразная для функции $u(x)v'(x)$. Первообразной для $u'(x)v(x)$ будет...

a) $u'(x)v'(x)-F(x)$; b) $F(u'(x)v(x))$;
c) $u(x)v(x)-F(x)$; d) $\frac{F(x)u'(x)}{v'(x)}$.

6. Решите, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством: $\int\sin^5 x\cos^5 xdx$.

7. Выведите формулу понижения для интеграла $I_n=\int\cos^n xdx$, $n\in\mathbb{N}$.

8. Вычислите интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$, введя соответствующую замену: $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

9. Вычислите интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$, введя соответствующую замену: $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

10. Используя формулу

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx =$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где $A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2+b^2}, B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2+b^2}, C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2+b^2}$, решите

$$\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$

11. Зная, что:

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}] + C,$$

где $P(x)$ – многочлен степени n, решите

$$\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x}dx.$$

12. Вычислите: $\int (1+x^2)^2 \cos x dx$.

13. Найдите интеграл, содержащий функцию $\operatorname{arctg} f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

14. Найдите интеграл, содержащий функцию $\arccos f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

15. Найдите $\int \ln x dx$.

16. Что называют неопределенным интегралом для $f(x)$?

17. Напишите схему применения метода Остроградского-Гаусса.

18. Приведите примеры трансцендентных функций (не менее трех).

19. Пусть $R(x)$ – дробно-рациональная функция. С помощью какой подстановки интеграл $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ сводится к интегралу от дробно-рациональной функции?

20. Приведите пример интеграла от тригонометрической функции, который сводится к интегралу от дробно-рациональной функции с помощью подстановки $t = \sin kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Тест 3

1. Что называется интегрированием?
a) операция нахождения производной функции;
b) преобразование интеграла;
c) предел приращения функции к приращению аргумента;
d) операция нахождения первообразной функции.

2. Чему равен интеграл $\int \sin x \cos^2 x dx$?
a) $-\sin x$; b) $\cos^2 x$;
c) $\frac{\sin^3 x}{3}$; d) $-\frac{\cos^3 x}{3}$.

3. Чему равен интеграл $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$?
a) $\operatorname{th} x + C$; b) $-\operatorname{th} x + C$;
c) $\operatorname{cth} x + C$; d) $-\operatorname{cth} x + C$.

4. Какая функция не интегрируема в конечном виде?
a) $x\sin x$; b) $\frac{\sin x}{x}$;
c) $\ln(\ln x)$; d) $\ln(e^x)$.

5. Продолжите фразу. Функция $\sin x$ не является...
a) трансцендентной; b) аналитической;
c) алгебраической; d) периодической.

6. Решите, воспользовавшись необходимыми тригонометрическими формулами: $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

7. Решите интеграл: $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$.

8. Воспользовавшись тождеством $\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x+\alpha) - (x+\beta)]$, решите: $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

9. Используя формулу

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a\sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c\cos^2 x} dx =$$

$$= A\int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где λ_1, λ_2 – корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x, k_i = \frac{1}{a-\lambda_i}$,
$A = -\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2)+bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}, B = \frac{bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$, решите

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx.$$

10. Используя формулу

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} =$$

$$= \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} +$$

$$+C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

где $A = \frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}, B = \frac{-a}{(n-1)(a^2+b^2)}, C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}$, решите

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$$

11. Сделав необходимые преобразования, вычислите интеграл: $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$.

12. Найдите интеграл, содержащий функцию $\ln f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})dx$.

13. Найдите интеграл, содержащий функцию $\arcsin f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int x \arcsin(1-x)dx$.

14. Найдите интеграл, содержащий гиперболическую функцию: $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx$.

15. Решите интеграл: $\int e^{-|x|}dx$.

16. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

17. Приведите пример интеграла от тригонометрической функции, который сводится к интегралу от дробно-рациональной функции с помощью подстановки $t = \cos kx$.

18. Пусть $R(u; v)$ – дробно-рациональная функция от переменных u и v, $u = \sin x$, $v = \cos x$. Почему $\int R(\sin x; \cos x)dx$ берется в конечном виде?

19. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$. Чему равна их разность?

20. Что называют интегральными кривыми и как они расположены?

Тест 4

1. Какое из предложенных равенств является верным, если $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$?
   a) $\int e^x f(e^x)dx = F(e^x) + C$;
   b) $\int e^x f(e^x)dx = e^x F(e^x) + C$;
   c) $\int f(e^x)dx = \ln x F(e^x)$;
   d) $\int f(e^x)dx = \frac{F(e^x)}{x} + C$.

2. Чему равен интеграл $\int e^x dx$?
   a) $\ln|x| + C$; b) $\frac{e^x}{\ln x}$;
   c) $e^x \ln x + C$; d) $e^x + C$.

3. Чему равен интеграл $\int \frac{\ln x}{x}$?
   a) $\ln x + C$; b) $\frac{\ln^2 x}{2} + C$;
   c) $\frac{2}{x^2} + C$; d) $2\ln^2 x + C$.

4. Какая функция не интегрируема в конечном виде?
   a) e^{-x^2}; b) xe^{x^2};
   c) $x \sin x$; d) $\ln(\ln x)$.

5. Продолжите фразу. Функция $\ln x$ не является...
   a) трансцендентной; b) аналитической;
   c) алгебраической; d) периодической.

6. Решите, воспользовавшись необходимыми тригонометрическими формулами: $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$.

7. Воспользовавшись формулами произведения тригонометрических функций, решите: $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$.

8. Воспользовавшись тождеством $\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$, решите: $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

9. Используя формулу

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx =$$

$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где λ_1, λ_2 – корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$u_i = (a-\lambda_i) \sin x + b \cos x, k_i = \frac{1}{a-\lambda_i}$,
$A = -\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2)+bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}, B = \frac{bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$, решите интеграл

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx.$$

10. Используя формулу

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} =$$

$$= \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

где $A = \frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}, B = \frac{-a}{(n-1)(a^2+b^2)}, C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}$, решите интеграл

$$\int \frac{dx}{(2 \sin x + 3 \cos x)^3}.$$

11. Сделав необходимые преобразования, найдите интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

12. Вычислите интеграл, содержащий функцию $\ln f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

13. Найдите интеграл, содержащий функцию $\arcsin f(x)$, где $f(x)$ – алгебраическая функция: $\int \arcsin \sqrt{x} dx$.

14. Найдите интеграл, содержащий гиперболическую функцию: $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx$.

15. Решите интеграл: $\int |\sin \pi x| dx$.

16. Что называют первообразной функции $f(x)$?

17. Пусть $R(u; v)$ – дробно-рациональная функция от переменных u и v, $u = \sin x, v = \cos x$. Напишите, какие подстановки сводят интеграл $\int R(\sin x; \cos x)dx$ к интегралу от дробно-рациональной функции.

18. В каких случаях при вычислении неопределенного интеграла применяется метод интегрирования по частям?

19. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы для нее существовала первообразная на заданном промежутке?

20. Единственна ли первообразная $F(x)$ для функции $f(x)$? Поясните ответ.

Тема 4. Определенный интеграл

Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, выберем некоторое разбиение отрезка и в каждом частичном отрезке возьмем произвольным образом точку. Далее, строим интегральную сумму, каждое слагаемое которой представляет произведение значения функции в произвольной точке частичного отрезка на длину этого частичного отрезка. Измельчая разбиение, находим предел интегральной суммы, который (если он существует) и называется интегралом Римана. Обозначают его $\int\limits_a^b f(x)\ dx$, а функцию $y = f(x)$ называют R-интегрируемой на $[a; b]$.

Определенным образом строятся нижняя $s(\Pi)$ и верхняя $S(\Pi)$ суммы Дарбу, а условие $S(\Pi) - s(\Pi) \to 0$ при неограниченном измельчении разбиения Π является критерием R-интегрируемости функции на $[a; b]$.

Для вычисления интеграла Римана применяют формулу Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Вычислите суммы Дарбу функции $f(x) = 3x + 8$ на отрезке $[0; 1]$ при следующих разбиениях этого отрезка: а) пополам; б) на три равные части.

Решение. а) Разбиение Π состоит из точек $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1$, длина частичного отрезка $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{2},\ i = 1, 2$. Функция $f(x) = 3x + 8$ возрастает на $[0; 1]$, значит:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) = f(x_{i-1});$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) = f(x_i),\ i = 1, 2.$$

Поэтому $m_1 = f(0) = 8,\ m_2 = f(\frac{1}{2}) = \frac{19}{2},\ M_1 = f(\frac{1}{2}) = \frac{19}{2}$, $M_2 = f(1) = 11$. Составим суммы Дарбу:

$$s(\Pi) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) = 8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{4},$$

$$S(\Pi) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) = \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot \frac{1}{2} = \frac{41}{4}.$$

б) В этом случае, разбиение П состоит из точек $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1$, длина частичного отрезка $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{3},\ i = 1, 2, 3$. Повторяя рассуждения из пункта а), легко найти $s(\Pi) = 9,\ S(\Pi) = 10$. Если же найти точное значение интеграла, то окажется, чем мельче разбиение П, тем меньше разница между суммой Дарбу и точным значением.

Действительно, по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$I = \int\limits_0^1 (3x+8)dx = 3\int\limits_0^1 x\ dx + 8\int\limits_0^1 dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_0^1 + 8x\Big|_0^1 = \frac{19}{2}.$$

Например, в случае а) $|s(\Pi) - I| = \frac{3}{4}$, а в случае б) $|s(\Pi) - I| = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Вычислите $I = \int\limits_{-8}^{4} x(7x^2+5)^{2022}\ dx$.

Решение. Внесем под знак дифференциала выражение $7x^2+5$, тогда $d(7x^2+5) = 14x\ dx$. Имеем

$$I = \frac{1}{14}\int\limits_{-8}^{4} x(7x^2+5)^{2022}\ d(7x^2+5) = \frac{(7x^2+5)^{2023}}{2023}\Big|_{-8}^{4} =$$

$$= \frac{1}{2023}(117^{2023} - 453^{2023}).$$

Пример 3. Применяя метод интегрирования по частям, найдите значение интеграла

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 7x\ dx.$$

Решение. Выберем в качестве $u'(x) = \cos 7x,\ v(x) = x$, тогда $u(x) = \frac{1}{7}\sin 7x,\ v'(x) = 1$. Напомним, что

$$\int\limits_a^b u'(x)v(x)\ dx = u(x)v(x)|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\ dx.$$

$$I = \frac{x\sin 7x}{7}|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 7x\ dx =$$

$$= \frac{\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{2} + \frac{1}{7}\cos 7x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{14} - \frac{1}{7} = -\frac{\pi+2}{14}.$$

Тест 1

1. Выберите формулу, в которой верно описано определение интеграла Римана. Если

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

произвольное разбиение отрезка $[a;b]$,

$$f : [a;b] \to \mathbb{R},$$

$[x_{i-1};x_i]$ – частичный отрезок разбиения Π, $i = \overline{1,n}$,

$$\lambda(\Pi) = \max_{1\le i\le n} |x_{i-1} - x_i|$$

параметр разбиения, $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$ – произвольная точка:

a) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$;

b) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$;

c) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$;

d) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

2. Каким свойством определенный интеграл не обладает?
a) линейность;
b) коммутативность;
c) аддитивность;
d) сохранение порядка.

3. Чему равно значение интеграла $\int\limits_2^2 f(x)\,dx$?
a) 1; b)∞; c) 0; d) 2.

4. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{-1}^2 x^2\,dx$.

5. Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ и

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

произвольное разбиение $[a;b]$,

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x).$$

Выберите формулу, определяющую нижнюю сумму Дарбу:
a) $s(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$;
b) $s(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$;
c) $s(\Pi) = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$;
d) $s(\Pi) = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$.

6. Определите знак интеграла $\int\limits_0^\pi x\sin(x)\,dx$.

7. Значение какого интеграла больше: $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}(x)\,dx$ или $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$?

a) I_1; b) I_2; c) равны.

8. Вычислите с помощью замены переменной

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{sin(x)} \cos(x)\,dx$$

a) e; b) $e-1$; c) $e+1$; d) 1.

9. Выберите формулу интегрирования по частям:

a) $\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g'(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)\,dx$;

b) $\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f'(x)g'(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g'(x)f(x)\,dx$;

c) $\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)\,dx$;

d) $\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g'(x)f(x)\,dx$.

10. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите интеграл $\int\limits_0^1 arccos(x)\,dx$.

11. Вычислите площадь криволинейной трапеции ограниченной функцией $f(x) = \sqrt{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

12. Определен ли интеграл $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$? Если да, то вычислите, если нет, напишите почему.

13. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

14. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \sin(2x)\sin(5x)\, dx$$

a) 0; b) π; c) $-\pi$; d) 2π.

15. Интегрируема ли функция $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $[a; b]$? При каких a, b?

16. Найдите определенный интеграл и нарисуйте соответствующую площадь $\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$.

17. Продолжите фразу. Геометрический смысл интеграла Римана – это...

18. Закончите формулировку свойства линейности интеграла Римана.

Если $f(x)$ и $g(x)$ R-интегрируемы на $[a; b]$ и $\alpha, \beta \in R$, то линейная комбинация этих функций $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также R-интегрируема на $[a; b]$ и выполняется следующее равенство: ...

19. Решите интеграл от рациональной дроби

$$\int\limits_2^3 \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx.$$

20. Выпишите формулу замены переменной в интеграле Римана.

Тест 2

1. Какая из приведенных ниже формул описывает правило Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла? Если $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$, $F(x)$ ее первообразная, то

a) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$; b) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$;

c) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a) + F(b)$; d) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) \cdot F(a)$.

2. Определенный интеграл используется при вычислении:
a) площадей плоских фигур; b) пройденного на пути;
c) объемов тел вращения; d) все варианты.

3. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

4. Площадь S плоской фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $y_2(x) \geq y_1(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, $a < b$, можно вычислить по формуле:

a) $S = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$; b) $S = \int\limits_a^b (y_1(x) - y_2(x))\,dx$;

c) $S = \int\limits_a^b (y_1(x) + y_2(x))\,dx$; d) $S = \int\limits_a^b (2y_2(x) - y_1(x))\,dx$.

5. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

a) 2; b) 1; c) –1,5; d) 0.

6. Какое из неравенств описывает свойство R-интегрируемости модуля функции?

a) $|\int\limits_a^b f(x)\,dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$;

b) $|\int\limits_a^b f(x)\,dx| \geq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$;

c) $|\int\limits_a^b f(x)\,dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)\,dx|$;

d) $|\int\limits_a^b f(x)\,dx| \leq \int\limits_b^a |f(x)|\,dx$.

7. Вычислите интеграл $\int\limits_1^2 \frac{16\,dx}{x^3}$ и выберите правильный ответ:

a) $\frac{11}{4}$; b) 6; c) $\frac{13}{4}$; d) 7.

8. Определите знак интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$.

9. Определите, какой интеграл больше: $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx$ или $I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$?

a) I_1; b) I_2; c) равны.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \cos(x), y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$:

a) π; b) 0; c) 1; d) 2.

11. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдите следующий интеграл $\int\limits_0^1 x^4 e^{-x^5}\,dx$:

a) $e - 1$; b) $0,2(e-1)\frac{1}{e}$; c) 0,5; d) 0,2.

12. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите интеграл $\int\limits_0^{0{,}125} 8xe^{8x}\,dx$:

a) 125; b) $8e$; c) 0; d) 0,125.

13. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx$.

14. Существует ли интеграл $\int\limits_{-2}^3 \operatorname{tg}(x)\,dx$?

15. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдите определенный интеграл и нарисуйте соответствующую площадь $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

16. Найдите интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}\,dx.$$

17. Опишите правило замены переменной в интеграле Римана.

18. Продолжите фразу. Интеграл Римана по определению является...

19. Установите соответствия между столбцами (свойство и неравенство/равенство) и заполните таблицу:

1) линейность;
2) аддитивность;
3) R-интегрируемость модуля.

a) $|\int\limits_a^b f(x)\,dx| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$;

b) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, c \in [a;b]$;

c) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx, k \in R$.

1	2	3

20. Найдите интеграл

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\,dx.$$

Тест 3

1. Если $y = f(x)$ – неотрицательная непрерывная на $[a;b]$ функция, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси абсцисс $a \le x \le b$, вычисляется по формуле:

a) $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$; b) $S = \int\limits_b^a f(x)\,dx$;

c) $S = \int f(x)\,dx$; d) $S = f(x)\int\limits_a^b dx$.

2. При замене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл:

a) остается прежним; c) увеличивается в 2 раза;

b) меняет знак; d) равен нулю.

3. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_1^2 4x^3\,dx$:

a) 36; b) 17; c) 16; d) 15.

4. Закончите фразу. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2, y = 0$ определяется интегралом...

a) $\int\limits_{-2}^{0} (4 - x^2)\, dx$; b) $\int\limits_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$;

c) $\int\limits_{0}^{4} (4 - x^2)\, dx$; d) $\int\limits_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx$.

5. Дана функции $y = x^2 + 1$ на отрезке $[0; 1]$. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и отрезком оси абсцисс на заданном отрезке. Выберите правильный ответ:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{3}$; c) 1; d) $\frac{5}{3}$.

6. Вычислите интеграл $\int\limits_{5}^{9} (x + 7)\, dx$.

7. Определите знак интеграла $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\, dx$.

8. Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

произвольное разбиение $[a; b]$,

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x).$$

Выберите формулу, определяющую верхнюю сумму Дарбу:

a) $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$;

b) $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$;

c) $S(\Pi) = \lim\limits_{\lambda(\Pi) \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$;

d) $S(\Pi) = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$.

9. Значение какого интеграл больше: $I_1 = \int\limits_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$ или $I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$?

a) I_1; b) I_2; c) равны.

10. Выберите свойство аддитивности интеграла Римана, если $c \in [a;b]$ и $f(x)$ – R-интегрируема на $[a;b]$:

a) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_c^b f(x)\,dx$;

b) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx * \int\limits_c^b f(x)\,dx$;

c) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$;

d) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c (\int\limits_c^b f(x)\,dx)\,dx$.

11. Установите соответствие между столбцами и заполните таблицу.

1) $\int\limits_1^4 x^2\,dx$ — a) 9

2) $\int\limits_1^2 3(x+1)^2\,dx$ — b) 12

3) $\int\limits_0^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ — c) 21

4) $\int\limits_0^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ — d) 19

1	2	3	4

12. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$.

13. Применяя формулу замены переменных, вычислите $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx$.

14. Объем кольца, образованного вращением вокруг оси OX фигуры $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные неотрицательные функции, равен:

a) $V = \pi \int\limits_b^a [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx$;

b) $V = \pi \int\limits_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx$;

c) $V = \pi \int\limits_a^b [y_2^2(x) + y_1^2(x)]\,dx$;

d) $V = \pi \int\limits_a^b [y_1^2(x) - y_2^2(x)]\,dx$.

15. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдите определенный интеграл и нарисуйте соответствующую площадь $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\,dx$.

16. Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}.$$

17. Опишите правило интегрирования по частям для интеграла Римана.

18. Докажите свойство сохранения порядка интеграла Римана: если $f(x)$ – неотрицательная интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

19. Вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,dx.$$

20. Напишите формулу площади фигуры (заданной в полярных координатах), ограниченной непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$.

Тест 4

1. Выберите правильный вариант ответа. Для вычисления площади фигуры, ограниченной линией $r = r(\varphi), a \leq \varphi \leq b$, пользуются формулой:

a) $S = \int\limits_a^b r(\varphi)\,d\varphi$;   b) $S = \frac{1}{2}\int\limits_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi$;

c) $S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + r(\varphi)}\,d\varphi$;   d) $S = \int\limits_a^b \sqrt{r'(\varphi) + r^2(\varphi)}\,d\varphi$.

2. Вычислите интеграл $\int\limits_1^2 \frac{24\,dx}{x^2}$:

a) 9;   b) –7;   c) 8;   d) 12.

3. Дана функция $y = x^2$ на отрезке $[1;2]$. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции, отрезком оси абсцисс и прямыми $x = 1;\ x = 2$. Выберите верный вариант ответа:

a) $\frac{5}{3}$;   b) 3;   c) $\frac{7}{2}$;   d) $\frac{7}{3}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin(x)$, $y = 0, x = 0, x = \pi$:

a) π; b) 0; c) 1; d) 2.

5. Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

произвольное разбиение $[a; b]$,

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x).$$

Нарисуйте верхнюю сумму Дарбу $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ для произвольной непрерывной функции $f(x)$.

6. В результате подстановки $t = 3x + 2$ интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$ приводится к виду:

a) $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$; b) $3\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$; c) $\frac{1}{3}\int\limits_2^5 \frac{dt}{\sqrt{t}}$; d) $3\int\limits_2^5 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

7. Если криволинейная трапеция, ограниченная линией $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0, x = a, x = b$, вращается вокруг оси X, то объем вращения вычисляется по формуле:

a) $V = \pi \int\limits_a^b y^2 \, dx$;

b) $V = \pi \int\limits_a^b x^2 \, dx$;

c) $V = \pi \int\limits_b^a y^2 \, dx$;

d) $V = \pi \int\limits_b^a x^2 \, dx$.

8. Определите знак интеграла $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx$.

9. Значение какого интеграла больше $I_1 = \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x}$ или $I_2 = \int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x}\, dx$?

a) I_1; b) I_2; c) равны.

10. Закончите предложение, описывающее свойство аддитивности интеграла Римана. Если $c \in [a;b]$ и $f(x)$ – R-интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \ldots$$

11. Какое из свойств интеграла не имеет места быть?

a) $\int\limits_{a}^{a} f(x)\, dx = 0$;

b) $\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)\, dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx$;

c) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\, dx$;

d) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\, dx$.

12. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x, y = x + \sin^2(x)$.

13. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\pi} x \cos(x)\, dx$.

14. Применяя замену переменной, вычислите:

$$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$

15. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдите определенный интеграл и нарисуйте соответствующую площадь $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2(x)\,dx$.

17. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x - x^2, x + y = 0$, и нарисуйте соответствующую область.

18. Вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

19. Для интеграла $\int\limits_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ найдите верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу, соответствующие разбиению $[0;\pi]$ на три равные части.

20. Сформулируйте критерий R-интегрируемости функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Тема 5. Приложения интеграла Римана

Теорема 1. Пусть $f(x)$, $g(x)$ – непрерывные на $[a;b]$ функции, тогда криволинейная трапеция

$$G = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [a;b],\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

квадрируемое множество и ее площадь вычисляется по формуле

$$S(G) = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Теорема 2. Пусть кривая $l : x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t_0 \le t \le T$ гладкая (то есть $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно-дифференцируемые функции на $[t_0;T]$). Если ${\varphi'}^2(t) + {\psi'}^2(t) \ne 0$, то она спрямляемая и ее длина вычисляется по формуле

$$|l| = \int\limits_{t_0}^T \sqrt{{\varphi'}^2(t) + {\psi'}^2(t)}\, dt.$$

Теорема 3. Пусть $f(x) \ge 0$ – непрерывная на $[a;b]$ функция. Тогда тело T, полученное вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции

$$G = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [a;b],\ 0 \le y \le f(x)\}$$

является кубируемым и его объем равен

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

Пример 1. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = |\ln x|$ и прямыми $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

Решение. По теореме 1 имеем

$$S = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\; dx = -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\; dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x\; dx.$$

Найдем неопределенный интеграл $\int \ln x\;\; dx$, используя формулу интегрирования по частям. Пусть $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, тогда $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$.

$$\int u(x)v'(x)\; dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\; dx,$$

$$\int \ln x\; dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\; dx = \ln x \cdot x - x + C.$$

Тогда

$$S = \int\limits_{1}^{\frac{1}{e}} \ln x\; dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x\; dx = (\ln x \cdot x - x)|_1^{e^{-1}} +$$

$$+(\ln x \cdot x - x)|_1^{e} = -\frac{2}{e} + 2 = \frac{2}{e}(e-1).$$

Пример 2. Вычислите длину кардиоиды

$$r = 1 + \cos\varphi.$$

Решение. Ясно, что $\varphi \in [0; 2\pi]$. Найдем длину этой кривой:

$$|l| = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\; d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\; d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos\varphi}\; d\varphi = \sqrt{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\; d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} |\cos\frac{\varphi}{2}|\, d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 8\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d(\frac{\varphi}{2}) = 8\sin\frac{\varphi}{2}|_0^{\pi} = 8.$$

Пример 3. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки

$$B = \{(x;y):\ 0 \le y \le 100 - x^2\}.$$

Решение. Центром тяжести пластинки является такая точка $(x_0; y_0)$, что если в нее поместить всю массу m, то статические моменты точки относительно координатных осей равны статическим моментам всей пластинки соответственно, т.е.

$$x_0 = \frac{1}{S}\int\limits_a^b x\, dS = \frac{1}{S}\int\limits_a^b xy\, dx;$$

$$y_0 = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y\, dS = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2\, dx.$$

Так как кривая симметрична относительно оси ординат, то центр лежит на оси OY, то есть $x_0 = 0$. Найдем площадь параболического сегмента

$$S = \int\limits_{-10}^{10} (100 - x^2)\, dx = 2\int\limits_0^{10} (100 - x^2)\, dx =$$

$$= 2(100x - \frac{x^3}{3})|_0^{10} = \frac{4}{3}\cdot 10^3,$$

тогда

$$y_0 = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2\,dx = \frac{3}{8000}\int\limits_{-10}^{10}(100-x^2)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{4000}\int\limits_0^{10}(100-x^2)^2\,dx = \frac{3}{4000}(10000x - \frac{200x^3}{3} + \frac{x^5}{5})|_0^{10} =$$

$$= \frac{3\cdot 10^5\cdot 8}{4\cdot 10^3\cdot 15} = 40.$$

В результате координаты центра тяжести пластинки $x_0 = 0$, $y_0 = 40$.

Тест 1

1. Сформулируйте необходимый признак R-интегрируемости функции f на $[a;b]$.

2. Как геометрически интерпретировать величину

$$\int\limits_a^b f(x)dx?$$

3. Выберите формулу для вычисления площади фигуры, если она ограничена графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, где φ, r – полярные координаты:

a) $\int\limits_\beta^\alpha r^2 d\varphi$; b) $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \varphi^2 dr$; c) $\int\limits_\alpha^\beta r^2 d\varphi$; d) $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2 d\varphi$.

4. В чем заключается принцип Кавальери? Начальные данные: множества $A_1 \subset R^3$ и $A_2 \subset R^3$ имеют одинаковые

проекции на OX-отрезок $[a; b]$ и пересечения множеств A_1 и A_2 с плоскостью $x = t$ имеют...

a) одинаковые проекции на OY, тогда $S(A_1) = S(A_2)$ – равенство площадей поверхности тел A_1 и A_2;

b) одинаковые площади сечений, тогда $V(A_1) = \frac{1}{V(A_2)}$ – обьемы тел обратно пропорциональны;

c) одинаковые площади сечений, тогда $V(A_1) = V(A_2)$.

5. Выберите физические и механические приложения интеграла Римана:

a) работа переменной силы;

b) вес дуги кривой l;

c) статический момент фигуры;

d) центр тяжести фигуры;

e) объем тела вращения.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями:

$$\begin{cases} x = 27 - y^2, \\ x = -6y. \end{cases}$$

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^4 + y^4 = 3a^2(x^2 + y^2), a \in \mathbb{R}$.

8. Найдите длину дуги кривой $\begin{cases} x = 7cos^3 t \\ x = 7sin^3 t \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$

9. Каков объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг OX?

10. Скорость тела задана формулой $v(t) = 10t + 2$. Какой путь пройдет тело от начала движения $t = 0$ до конца четвертой секунды?

11. Определите величину работы, которая потребуется для того, чтобы растянуть пружину на 0,05 метра, если сила в 100 Н растягивает пружину на 0,01 метра.

12. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t+a$. Найдите значение параметра a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ тело прошло путь, равный 40.

13. Электрический заряд E, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$, a, b – собственные числа. Определите работу A силы отталкивания F.

14. Вычислите силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 и высотой 6. Указание: сила давления воды зависит от глубины погружения.

15. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью OX и витком архимедовой спирали $r = a\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$.

16. Возможно ли определить площадь боковой поверхности фигуры, заданной уравнением $y = \frac{1}{x}, x \in [1, +\infty)$, функция $y = f(x)$ вращается вокруг оси OX?

17. Известно, что растяжение пружины s (перегруз отсутствует) создает напряжение p, по величине пропорциональное растяжению, так что $p = sc, c$ – некоторая постоянная, зависящая от упругих свойств пружины (жесткость). Сила, стягивающая пружину, должна преодолевать это напряжение. Если учитывать только ту часть силы, которая на это затрачивается, то чему будет равна работа при возрастании растяжения от $s = 0$ до s?

18. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением астроиды L вокруг оси OX, если кривая L задана уравнением:

$$\begin{cases} x = acos^3 t \\ y = asin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

19. Дайте определение понятия «центр тяжести тела».

20. Пусть на плоскости XOY задана система материальных точек с соответственными массами $m_1, ..., m_n$ и расстояниями $d_1, ..., d_n$ до оси OX. Какая величина называется статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси OX?

Тест 2

1. Сформулируйте (хотя бы один) достаточный признак R-интегрируемости функции на отрезке.

2. Выберите условие критерия R-интегрируемости функции, если $S(\Pi)$ и $s(\Pi)$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно:
a) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)\ \forall \Pi \mid \lambda(\Pi) < \delta \Longrightarrow S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon$;
b) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)\ \forall \Pi \mid \lambda(\Pi) < \delta \Longrightarrow S(\Pi) - s(\Pi) > \varepsilon$;
c) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)\ \forall \Pi \mid \lambda(\Pi) < \delta \Longrightarrow S(\Pi) = s(\Pi)$;
d) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)\ \forall \Pi \mid \lambda(\Pi) > \delta \Longrightarrow S(\Pi) - s(\Pi) < \varepsilon$.

3. Какова формула для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу графиком функции $y = g(x),\ x \in [a; b]$, а сверху графиком функции $y = f(x),\ x \in [a; b]$? Выберите правильный вариант ответа.

a) $S = \int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$; b) $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$;

c) $S = \int\limits_b^a (f(x) + g(x))dx$; d) $S = \int\limits_a^b g(x)dx$.

4. Выберите определение суммы Дарбу для интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$.

a) Нижняя сумма Дарбу – это инфимум множества интегральных сумм, построенных по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, а верхняя сумма Дарбу – супремум множества интегральных сумм, построенных по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$;
b) Нижняя сумма Дарбу – это супремум множества интегральных сумм, построенных по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, а верхняя сумма Дарбу – инфимум множества интегральных сумм, построенных по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$;
c) Нижняя и верхняя суммы Дарбу – это инфимум множества интегральных сумм, построенных по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$;
d) Нижняя и верхняя суммы Дарбу – это супремум множества интегральных сумм, построенных по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$.

5. Закончите высказывание. Условие непрерывности функции на $[a, b]$ – это...
a) достаточный признак R-интегрируемости на $[a, b]$;
b) необходимый признак R-интегрируемости на $[a, b]$;
c) критерий R-интегрируемости на $[a, b]$.

6. Найдите давление воды на плотину, если вода доходит до ее верхнего края и если известно, что плотина имеет вид трапеции с высотой h и основаниями a, b.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией

$$r(\varphi) = cos2\varphi.$$

8. Определите длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$\begin{cases} x = 6 - 3t^2, \\ y = 4t^3; \end{cases} \quad t \geq 0.$$

9. Каков объем тела, образованного вращением вокруг OY фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 3 - \sqrt{x}, \ y = 3 + \sqrt{x}, \ y = x + 1?$$

10. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 3$.

11. Вычислите работу, производимую при сжатии пружины на 0,03 метра, если для сжатия ее на 0,005 метра нужно приложить силу в 10 Н.

12. Найдите статический момент относительно оси OX фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

13. Определите координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x + 3, \ y = 0.$$

14. Ток I в проводнике меняется со временем t по уравнению $I = 2t + 4$. Какое количество электричества проходит

через поперечное сечение проводника за время от $t_0 = 2$ до $t_1 = 6$? При каком постоянном токе I_0 через поперечное сечение проводника за то же время проходит такое же количество электричества?

15. Вычислите массу дуги кривой L при данной плотности $\mu = \frac{15}{8}\ y^2$, если L:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

16. Вычислите длину дуги кривой, заданной функцией
$y = \ln sinx$,
$x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

17. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX, полуволны синусоиды

$$y = sinx,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi.$$

18. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $\rho = cos^2\varphi$, вокруг полярной оси, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

19. Перечислите (любые) пять свойств интеграла Римана. В ответе запишите названия этих свойств.

20. Определите величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус равен R, а центр O находится на свободной поверхности воды.

Тест 3

1. Какие физические величины можно вычислить с помощью интеграла Римана:

а) работа переменной силы $f(x)$;
б) объем тела;
в) центр тяжести плоской фигуры;
г) длина дуги;
ж) вес тела;
е) путь, пройденный телом;
з) средняя высоту полета тела;
и) момент инерции плоской пластинки?

2. Выберите формулу для нахождения площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и участком кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярной системе координат:

a) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)d\varphi$; b) $\frac{\pi}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)d\varphi$;

c) $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$; d) $\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)d\varphi$.

3. Выберите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x),\ x \in [a; c]$ и $y = \varphi(x),\ x \in [c; b],\ a < c < b$ и частью оси абсцисс $y = 0,\ x \in [a; b]$:

a) $\mathrm{S} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} \varphi(x)dx$;

b) $\mathrm{S} = \int\limits_{a}^{b} (f(x) + \varphi(x))dx$;

c) $\mathrm{S} = \int\limits_{a}^{c} \varphi(x)dx + \int\limits_{b}^{c} f(x)dx$;

d) $\mathrm{S} = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx$.

4. Выберите необходимое условие R-интегрируемости функции на $[a, b]$:

a) ограниченность; b) непрерывность;
c) дифференцируемость; d) монотонность.

5. Нарисуйте график нижней суммы Дарбу, если

$$s(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} (f(x))(x_i - x_{i-1}),$$

x_i – точки разбиения отрезка $[a, b]$.

6. Вычислите интеграл: $\int\limits_{x_1}^{x_2} (y_1(x) - y_2(x))dx$,
если $x_1 = -2,\ x_2 = 1, y_1(x) = x^2 + 2,\ y_2(x) = 0$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{1}{1 + x^2},\ y = \frac{x^2}{2}.$$

8. Определите длину дуги кривой: $y = \ln cosx,\ x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

9. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{2}{1 + x^2},\ y = x^2.$$

10. Скорость прямолинейного движения тела задается формулой $v(t) = 3t^2 + 2t$. Найдите путь, пройденный телом за пятую единицу времени от начала движения.

11. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 метра, равна 3 Н. Найдите работу, которую нужно провести, чтобы растянуть эту пружину на 0,05 метра.

12. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной осью OX и линией $y = sinx,\ x \in [0, \pi]$.

13. Какую работу нужно совершить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью w вокруг своего диаметра.

14. Тяжелая цепь длины $L = 2$ метра поднимается, навиваясь на ворот. Вычислите работу силы веса при поднятии цепи. Размерами ворота можно пренебречь, если погонный метр цепи весит 50 килограмм.

15. Вычислите массу дуги кривой L при заданной плотности $\mu(x)$, где $L : y = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}},\ 1 \leq x \leq 2,\ \mu(x) = \frac{9}{2}(x-1)^2$.

16. Вычислите объем прямого кругового конуса, ограниченного поверхностью $\frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2}$ и плоскостью $z = H$.

17. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью OY и прямой $y = 1$.

18. Вычислите координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 3x - x^2,\ y = 0.$$

19. По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластинку равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой – глубину ее погружения от свободной поверхности жидкости, то есть $P = g\gamma Sh$, где g – ускорение свободного падения, γ – плотность жидкости, S – площадь пластинки, h – глубина ее погружения. Объясните, почему по этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку?

20. Можно ли интегрировать кусочно-непрерывную функцию на отрезке, если она имеет конечное число точек разрыва 1 рода? Запишите верный ответ (да/нет).

Тест 4

1. Как вычислить путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за время $[t_1, t_2]$?

a) $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt;$

b) $S = \int\limits_{t_2}^{t_1} v(t)dt;$

c) $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v^2(t)dt;$

d) $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v'(t)dt.$

2. Выберите определение нижней и верхней сумм Дарбу соответственно. Обозначения: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, Π – разбиение отрезка $[a, b]$, $\Pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $m_i = \inf(f(x))$, $M_i = \sup(f(x))$, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

a) $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i(x_i - x_{i-1})$ и $s(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i(x_i - x_{i-1});$

b) $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \inf m_i(x_i - x_{i-1})$ и $s(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \inf M_i(x_i - x_{i-1});$

c) $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i(x_i - x_{i-1})$ и $s(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i(x_i - x_{i-1});$

d) $S(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i(x_{i-1} - x_1)$ и $s(\Pi) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i(x_{i-1} - x_1).$

3. Выберите определение квадрируемого множества:
a) множество, которое можно разбить на квадраты;
b) множество, для которого внутренняя и внешняя суммы различные;

c) множество, для которого внутренняя и внешняя суммы равны.

4. Как вычислить объем тела, полученного путём вращения вдоль оси OX графика функции $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$?

a) $\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$; b) $\pi \int\limits_a^b dx$;

c) $\int\limits_a^b f(x)dx$; d) $\int\limits_a^b \pi^2 f(x)dx$.

5. Какое свойство функции является достаточным для R-интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$?

a) дифференцируемость; b) монотонность;
c) ограниченность; d) непрерывность.

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 2x - x^2, \ y = -x.$$

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$r = -2sin(3\varphi), \ r = 2sin\varphi.$$

8. Найдите длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^t sint \\ y = e^t cost \end{cases}, \ 0 \le t \le \ln 2.$$

9. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $2x - y - 2 = 0, \ y = 0, \ x = 3$.

10. Тело, имеющее единичную массу, движется с ускорением, меняющимся линейно по закону $a(t) = 2t - 1$.

Какой путь пройдет тело за 4 единицы времени от начала движения $t = 0$, если в начальный момент его скорость равнялась 2?

11. Найдите работу, которую необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на $0,05$ метра, если сила в 10 Н растягивает пружину на $0,01$ метра.

12. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды, заданной уравнениями:
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

13. Вычислите силу с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобедренной трапеции. Причем плотность воды равна $\rho = 1000$ кг$/m^3$, $g = 10$ м$/c^2$ – ускорение свободного падения, $a = 6{,}3$ м, $b = 10{,}2$ м, $y = 4$ м. Ответ дайте в кН.

14. Прямоугольный сосуд наполнен водой и маслом в равных по объему частях, причем масло вдвое легче воды. Покажите, что сила давления смеси на боковую стенку уменьшается на $\frac{1}{5}$, если воду заменить маслом.

15. Вычислите массу дуги кривой L, при заданной плотности $\mu(\varphi)$, где $L : \rho = 1 + cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, $\mu = |sin^3\varphi|$.

16. Продолжите фразу. Теорема Гульдина: Величина площади поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей ее оси равна...

17. Найдите количество тепла, выделяемое переменным током индукции по синусоиде: $I = I_0 sin(\frac{2\pi}{T}t - \varphi)$ в течение периода T в проводнике с сопротивлением R,

$I_0 = const,\ Q = 0,24,\ I^2R$ – количество тепла. В ответе запишите общую формулу для входных данных: R, T, I_0.

18. Вычислите момент инерции однородного круга массой m и радиусом R относительно центра этого круга.

19. Найдите статический момент, относительно оси OX фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

20. Найдите координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leq R^2,\ y \geq 0$.

Тема 6. Несобственные интегралы первого рода

Тест 1

1. Каких условий нет в определении несобственного интеграла первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$?

а) функция $f(x)$ определена для всех $x \geq a$;
б) функция $f(x)$ ограничена на любом отрезке $[a;b]$;
в) функция $f(x)$ ограничена на промежутке $[a;+\infty)$;
г) функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$.

2. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ расходится, если предел

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx:$$

а) равен 1; б) не существует; в) равен 0; г) равен ∞.

3. Как нельзя определять интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$?

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$;
б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx - \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$;
в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{189} f(x)\,dx + \int\limits_{189}^{+\infty} f(x)\,dx$;
г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{26} f(x)\,dx - \int\limits_{26}^{+\infty} f(x)\,dx$.

4. Какой из интегралов сходится?

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; г) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

5. Какие из интегралов расходятся?

a) $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x \, dx$; b) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x} \, dx$;

c) $\int\limits_{-\infty}^{1} e^{2x} \, dx$; d) $\int\limits_0^{+\infty} \sin 2x \, dx$.

6. При каких значениях α интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^\alpha}$?

а) $\alpha > 1$; б) $\alpha > \frac{1}{2}$; в) $\alpha \geq \frac{1}{2}$; г) $\alpha < \frac{1}{2}$.

7. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = ...$$

а) $\frac{1}{2}$; б) $\ln 3$; в) $\ln^2 3$; г) $\frac{1}{2} \ln 3$.

8. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_2^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx = ...$$

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4}$.

9. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = ...$$

а) π; б) $\sqrt{5}\pi$; в) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{5}$.

10. Как нельзя определять главное значение несобственного интеграла?

а) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx;$

б) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx;$

в) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx;$

г) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx - \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx.$

11. Установите соответствие между несобственными интегралами а)-г) и утверждениями 1)-4):

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$;

1) интеграл расходится, и главное значение не существует;
2) интеграл расходится, главное значение равно 0;
3) интеграл расходится, главное значение равно π;
4) интеграл сходится, его значение равно 2, главное значение равно 2.

12. Интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$:

а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно.

13. Закончите фразу в формулировке критерия Коши сходимости несобственного интеграла. Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда:

а) существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $b \geq a$ $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \leq C;$

б) $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx = 0;$

в) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b = b(\varepsilon) \geq a$ такое, что при любых $b_1 > b$, $b_2 > b$

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

14. Закончите фразу. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла является:

а) только необходимым; б) только достаточным; в) критерием.

15. При каких α интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится абсолютно или условно?

а) при $\alpha > 1$ сходится абсолютно, при $0 < \alpha \leq 1$ – условно;

б) при $\alpha \geq 1$ – абсолютно, при $0 < \alpha < 1$ – условно;

в) при $\alpha \leq 0$ – условно, при $\alpha > 0$ – абсолютно;

г) при $\alpha < 0$ – условно, при $\alpha \geq 0$ – абсолютно.

16. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,arctg\,x\,dx$ сходится при:

а) $\alpha > -1$; б) $\alpha > 0$; в) $\alpha > 1$; г) $\alpha > 2$.

17. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$...

а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно.

18. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно. Верно ли, что тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? Ответьте, да или нет.

19. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ и осью абсцисс, равна...

а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 2π.

20. Продолжите предложение. Площадь множества точек плоскости

$$\{(x;y):\ x \geq 0,\ 0 \leq y < e^{-\sqrt{x}}\}$$

равна...

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 2; г) 4.

Тест 2

1. Каких условий нет в определении несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$:

а) функция $f(x)$ ограничена на промежутке $(-\infty; b]$;
б) функция $f(x)$ определена для всех $x \leq b$;
в) функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a; b]$;
г) функция $f(x)$ ограничена на промежутке $[a; b]$?

2. Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, если предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx:$$

а) равен 0; б) равен –1; в) равен ∞; г) не существует.

3. Как можно определить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$?

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{2} f(x)\,dx - \int\limits_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{19} f(x)\,dx - \int\limits_{19}^{+\infty} f(x)\,dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{206} f(x)\,dx + \int\limits_{206}^{+\infty} f(x)\,dx$.

4. Какой из интегралов сходится?

а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{5} \frac{dx}{x}$; г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+100}$.

5. Какие из интегралов расходятся?

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin 3x\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{1} \cos 4x\,dx$;

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}\,dx$.

6. При каких значениях α интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится?

а) $\alpha \geq 1$; б) $\alpha \leq 1$; в) $\alpha > 1$; г) $\alpha < 1$.

7. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x}} = ...$$

а) $\frac{1}{3e}$; б) $\frac{1}{3e^3}$; в) $\frac{1}{3e^2}$; г) $\frac{1}{3}$.

8. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = ...$$

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) 4; г) 2.

9. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \ldots$$

а) $2\pi\sqrt{31}$; б) $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$; в) $\frac{\pi}{\sqrt{31}}$; г) $\pi\sqrt{31}$.

10. По каким формулам можно определить главное значение несобственного интеграла?

а) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{a}^{2a} f(x)\,dx$;

б) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx - \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$;

в) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$;

г) $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx$.

11. Может ли случиться так, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и его главное значение не равно значению интеграла? Ответьте, да или нет.

12. Установите соответствие между несобственными интегралами а)-в) и утверждениями 1)-3):

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(\sin 2x+2)}$;

1) интеграл расходится;
2) интеграл сходится абсолютно;
3) интеграл сходится условно.

13. Можно ли принять выполнение условия

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$$

в качестве определения сходящегося интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$?

Ответьте, да или нет.

14. Закончите фразу. Признак Абеля сходимости несобственного интеграла является:
а) только необходимым;
б) только достаточным;
в) критерием.

15. При каких α интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ расходится?

а) при $\alpha < 1$;
б) при $\alpha < 0$;
в) при $\alpha \leq 0$;
г) при $\alpha \leq 1$.

16. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+4}\, dx$...

а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно.

17. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$...

а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно.

18. Пусть интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится условно. Верно ли, что тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$? Ответьте, да или нет.

19. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \frac{1}{x^2+x-2}$, $x \geq 2$ и осью абсцисс, равна...

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}\ln 2$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}\ln 2$.

20. Продолжите предложение. Площадь множества точек на плоскости

$$\{(x;y):\ x \geq 1,\ 0 \leq y < \frac{1}{x^2(x+1)}\}$$

равна...

а) $1-\ln 2$; б) $1+\ln 2$; в) $2-\ln 2$; г) $2+\ln 2$.

Тест 3

1. Какие условия присутствуют в определении несобственного интеграла первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$?

а) функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$;

б) функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[a;+\infty)$;

в) функция $f(x)$ определена для всех $x \geq a$;

г) функция $f(x)$ ограничена на промежутке $[a;+\infty)$.

2. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ сходится, если:

а) интегралы $\int\limits_a^b f(x)\ dx$, $a \in (-\infty;b)$ ограничены в совокупности;

б) предел $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует;

в) предел $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует и равен нулю;

г) функция $g(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ является монотонной на промежутке $(-\infty; b]$.

3. Пусть функция $f(x)$, $x \in [a; +\infty)$ непрерывна и неотрицательна. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то площадь неограниченной криволинейной трапеции

$$\{(x; y):\ a < x < +\infty,\ 0 < y < f(x)\}:$$

а) может быть бесконечной; б) обязательно равна 1;
в) конечна; г) обязательно равна 2.

4. Какие из несобственных интегралов сходятся?

а) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$; в) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^4+4}$.

5. Какие из интегралов расходятся?

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$; б) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x+18}$;
в) $\int\limits_1^{+\infty} \cos 5x dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{4x}\,dx$.

6. При каких значениях α интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится?

а) $\alpha \geq 1$; б) $\alpha \leq 1$; в) $\alpha > 1$; г) $\alpha < 1$.

7. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = ...$$

а) $\frac{\pi}{4}$; б) π; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

8. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx = ...$$

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

9. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = ...$$

а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{3\pi}{4}$.

10. Пусть $f(x)$ – непрерывная и нечетная функция на $\mathbb{R}$. Чему равно главное значение несобственного интеграла первого рода $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$?

11. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$. Всегда ли существует главное значение интеграла

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx?$$

Ответьте, да или нет.

12. Установите соответствие между несобственными интегралами а)-в) и утверждениями 1)-3):

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} \, dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(2-\cos x)}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \, dx$;

1) интеграл расходится;

2) интеграл сходится абсолютно;
3) интеграл сходится условно.

13. Продолжите фразу. Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\ dx$ расходится, если...

а) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $b > a$

$$|\int\limits_{a}^{b} f(x)\ dx| > \varepsilon;$$

б) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $b > a$ существуют числа $b_1 > b$ и $b_2 > b$ такие, что

$$|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\ dx| \geq \varepsilon;$$

в) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $b > a$ существуют числа $b_1 > b$ и $b_2 > b$ такие, что

$$|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\ dx| \leq \varepsilon;$$

г) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $b > a$

$$|\int\limits_{a}^{b} f(x)\ dx| < \varepsilon.$$

14. Только достаточными признаками сходимости несобственных интегралов не являются:

а) признак сравнения; б) признак Абеля;
в) признак Дирихле; г) критерий Коши.

15. При каких α интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно?

а) при $0 \le \alpha < 1$; б) при $0 < \alpha \le 1$;
в) при $\alpha < 1$; г) при $\alpha \ge 1$.

16. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$...

а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно.

17. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x \ln x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$...

а) расходится; б) сходится условно; в) сходится абсолютно.

18. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Верно ли, что тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится? Ответьте, да или нет.

19. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = xe^{-x^2}$, $x \ge 0$ и осью абсцисс, равна...

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 2; г) 3.

20. Продолжите предложение. Площадь множества точек на плоскости

$$\{(x; y):\ x \ge 0,\ 0 \le y < \frac{x}{(x+1)^2}\}$$

равна...

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

Тест 4

1. Какие условия присутствуют в определении несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$?

а) функция $f(x)$ определена для всех $x \le b$;

б) функция $f(x)$ ограничена на промежутке $(-\infty; b]$;

в) функция $f(x)$ ограничена на любом отрезке $[a; b]$;

г) функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a; b]$.

2. Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx:$$

а) обязательно равен нулю; б) равен бесконечности;
в) существует; г) обязательно равен 1.

3. Пусть функция $f(x)$, $x \in (-\infty; b]$ непрерывна и неотрицательна. Если несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ сходится, то площадь неограниченной криволинейной трапеции

$$\{(x; y):\ -\infty < x < b,\ 0 < y < f(x)\}:$$

а) обязательно равна 1; б) обязательно равна 2;
в) может быть бесконечной; г) конечна.

4. Какие из несобственных интегралов сходятся?

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x-4}$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$; г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

5. Какие из интегралов расходятся?

а) $\int\limits_1^{+\infty} \sin 3x\, dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-2x}\, dx$;

в) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1-x}\, dx$.

6. При каких значениях α интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^\alpha}$ расходится?

а) $\alpha \leq 1$; б) $\alpha < 1$; в) $\alpha > 1$; г) $\alpha \geq 1$.

7. Закончите предложение. Значение интеграла равно...

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = ...\ (a > 0)$$

а) a; б) $\frac{1}{a}$; в) a^2; г) $\frac{1}{a^2}$.

8. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^2\, dx = ...$$

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 2; г) 4.

9. Закончите предложение. Значение интеграла равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = ...$$

а) $\frac{4\pi}{3}$; б) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$; в) $4\sqrt{3}\pi$; г) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

10. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится и $f(x)$ – монотонная функция, то:

а) $f(x) = O(\frac{1}{x})$; б) $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$;

в) $f(x) = o(x)$; г) $f(x) = o(x^2)$.

11. Выберите верный вариант ответа. Главное значение интеграла

$$v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$$

равно...

а) –1; б) 0; в) 1; г) 2.

12. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Обязательно ли тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? Ответьте, да или нет.

13. Установите соответствие между несобственными интегралами а)-в) и утверждениями 1)-3):

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{x^3}}$; в) $\int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$;

1) интеграл сходится условно;
2) интеграл сходится абсолютно;
3) интеграл расходится.

14. При каких α интеграл $\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится условно?

а) при $\alpha > 1$; б) при $0 \le \alpha < 1$;
в) при $\alpha < 1$; г) при $0 < \alpha \ge 1$.

15. Пусть интеграл $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Следует ли тогда, что $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ сходится? Ответьте, да или нет.

16. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{\sqrt{x^3+x}}\,dx$...

а) сходится условно; б) сходится абсолютно; в) расходится.

17. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$...

а) расходится; б) сходится абсолютно; в) сходится условно.

18. Для установления условной сходимости несобственного интеграла используется:

а) признак сравнения; б) признак Дирихле;
в) признак Абеля; г) любой из этих признаков.

19. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 e^{-x^3}$, $x \geq 0$ и осью абсцисс, равна...

а) $\frac{1}{3}$; б) 1; в) 2; г) 3.

20. Верно ли равенство

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}?$$

Ответьте, да или нет.

Тема 7. Несобственные интегралы второго рода

Тест 1

1. Собственная предельная точка $x_0 \in \mathrm{X}$ является особой для функции $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, если:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$; б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) < \infty$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$; г) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

2. Если a – особая точка функции $f(x)$, то несобственный интеграл от $f(x)$ на $\langle a; b\rangle$ определяется так:

а) $\lim\limits_{\alpha \to a-0} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$; б) $\lim\limits_{\alpha \to a+0} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$;

в) $\lim\limits_{\beta \to b-0} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,dx$; г) $\lim\limits_{\beta \to b+0} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,dx$.

3. Перечислите все особые точки функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 - 2x}$$

на промежутке $[-1; 1]$.

4. Как себя ведет интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{-5x^2 + 8x + 21}^{\,2}}$?

а) сходится; б) расходится.

5. Продолжите фразу. Чтобы для интегралов $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$ применить второй признак сравнения, нужно, чтобы на $\langle a; b\rangle$ функции были...

а) R-интегрируемые;

б) дифференцируемые;

в) непрерывные;

г) неотрицательные.

6. Чему равно главное значение несобственного интеграла $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$?

а) 0; б) ∞; в) π; г) 1.

7. Пусть $x_0 = b$ – особая точка, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a; b]$ и $\int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx$ ограничен на $(a; b)$. Каким является это условие для сходимости $\int\limits_a^b f(x)\,dx$?

а) необходимым; б) достаточным;
в) необходимым и достаточным; г) никаким.

8. Как себя ведет $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)^{\frac{2}{3}}}$?

а) сходится;
б) расходится.

9. Закончите фразу. Пусть $x = 0$ – особая точка функции $f(x)$ и эта функция интегрируема на $[0; 2]$. Тогда она интегрируема на $[0; 1]$ по свойству...

а) аддитивности; б) линейности;
в) сохранения порядка; г) интегрируемости модуля.

10. Закончите фразу. Пусть $x = 1$ – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$, эти функции интегрируемы на $[0; 2]$ и $f(x) \geq g(x)$. Тогда $\int\limits_0^2 f(x)\,dx \geq \int\limits_0^2 g(x)\,dx$ по свойству...

а) аддитивности; б) линейности;
в) сохранения порядка; г) интегрируемости модуля.

11. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{(e^{x+1}-1)\,dx}{(x^3+x^2-x-1)^{\frac{4}{3}}}?$$

а) сходится; б) расходится.

12. Выберите правильный вариант ответа. Пусть $c \in \in (a;b)$ – особая точка функции $f\colon\ [a;b] \to \mathbb{R}$. Главное значение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется формулой...

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$;

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$;

в) $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$;

г) $\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

13. Продолжите предложение. Пусть $f(x)$ интегрируема на $\langle a;b\rangle$ в несобственном смысле. Тогда функция $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = a \\ \int\limits_a^x f(t)\,dt, & \text{если } x \neq a \end{cases}$ является на $[a;b]$...

а) интегрируемой; б) неограниченной;
в) неположительной; г) непрерывной.

14. Как себя ведет несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{|\sin\frac{1}{x}|}{\sqrt{x}}\,dx$?

а) сходится; б) расходится.

15. Пусть $x = b$ – особая точка функций $f, g\colon\ [a; b) \to \mathbb{R}$. Какого условия нет в признаке Абеля сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$?

а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится; б) $g(x)$ монотонна на $[a; b)$;
в) $g(x)$ ограничена на $[a; b)$; г) $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0$;

16. Сходится ли абсолютно или условно интеграл Эйлера $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$? В ответе запишите либо сходится, либо расходится.

17. Вычислите $v.p.\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x^2+2}{x}\,dx$.

18. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{x^2}}{x}\,dx$.

19. Вычислите: $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \operatorname{arctg}(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$.

20. Докажите, что расходится интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$,

где $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Тест 2

1. Собственная предельная точка $x_0 \in \mathrm{X}$ является особой для функции $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, если в окрестности этой точки функция:

а) бесконечно мала; б) непрерывна;
в) неограничена; г) не существует.

2. Если b – особая точка функции $f(x)$, то несобственный интеграл от $f(x)$ на $\langle a;b\rangle$ определяется так:

а) $\lim\limits_{\alpha\to a-0}\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$; б) $\lim\limits_{\alpha\to a+0}\int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$;

в) $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,dx$; г) $\lim\limits_{\beta\to b+0}\int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,dx$.

3. Перечислите все особые точки функции $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-4}$ на промежутке $[0;4]$.

4. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^3-2x^2-4x+8}}?$$

а) сходится; б) расходится.

5. Продолжите фразу. Чтобы для функций $f(x)\geq 0$ и $g(x)\geq 0, \forall x\in S^{\circ}(x_0;\delta)$ выполнялся второй признак сравнения, нужно, чтобы предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где x_0 – особая точка, был...

а) равен нулю; б) равен k, $k\neq 0, k\neq\infty$;
в) равен ∞; г) не существующим.

6. Чему равен несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$?

а) 0; б) ∞; в) $\dfrac{e^2-1}{e^2+1}$; г) $2\cdot\dfrac{e^2-1}{e^2+1}$.

7. Закончите предложение. Пусть $x = a$ – особая точка функции $f(x)$. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, если $\forall x \in [a;b]$ функция $f(x)$...

а) R-интегрируемая; б) дифференцируемая;
в) непрерывная; г) неотрицательная.

8. Как себя ведет несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$?

а) сходится; б) расходится.

9. Пусть $x = 1$ – особая точка функции $f(x)$ и эта функция интегрируема на $[-1;1]$. Тогда она интегрируема на $[0;1]$ по свойству...

а) аддитивности; б) линейности; в) сохранения порядка; г) интегрируемости модуля.

10. Закончите предложение. Пусть $x = 0$ – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$, эти функции интегрируемы на $[-1;1]$ и $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx \le \int\limits_{-1}^1 g(x)\,dx$ по свойству...

а) аддитивности; б) линейности; в) сохранения порядка; г) интегрируемости модуля.

11. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{-x^7+9x^5}}\,dx?$$

а) сходится; б) расходится.

12. Даны два утверждения:
A: несобственный интеграл сходится;
B: несобственный интеграл сходится в смысле главного значения.
Какая импликация верна?

а) $A \Rightarrow B$; б) $B \Rightarrow A$;
в) $A \Leftrightarrow B$; г) никакая из вышеперечисленных.

13. Продолжите фразу. Пусть $f(x)$ интегрируема на $\langle a; b\rangle$ в несобственном смысле. Тогда функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = a \\ \int\limits_a^x f(t)\,dt, & \text{если } x \neq a \end{cases}$$

является на $[a; b]$...

а) интегрируемой; б) неограниченной;
в) неположительной; г) непрерывной.

14. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{|\cos\frac{1}{x}|}{\sqrt{x^2 - x^3}}\,dx?$$

а) сходится; б) расходится.

15. Пусть $x = a$ – особая точка функций $f, g\colon\ (a; b] \to \mathbb{R}$. По признаку Абеля, если ___ ограничена на $(a; b]$, ___ монотонна на $(a; b]$ и $\int\limits_a^b$ ___ dx сходится, то $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится. Заполните пропуски в предложении:

а) $f(x),\ f(x),\ f(x)$;
б) $g(x),\ f(x),\ f(x)$;
в) $g(x),\ g(x),\ f(x)$;
г) $g(x),\ f(x),\ g(x)$;

16. Сходится ли абсолютно или условно интеграл Эйлера $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$?

17. Вычислите: $v.p. \displaystyle\int\limits_0^{e+1} \frac{x^2-2x-4}{(x-1)^3}\, dx$.

18. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{x^2}\, dx$.

19. Вычислите: $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2}\, dx$.

20. Докажите, что расходится интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{f(x)-13}$, где

$$f(x) = \begin{cases} 12, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 13, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Тест 3

1. Выберите функции, для которых точка $x_0 = 0$ является особой:

а) $\dfrac{1}{x^3}$; б) $\dfrac{1}{\ln^2 x}$; в) $\dfrac{\ln x}{x+1}$; г) $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

2. Закончите предложение.

Несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} \ldots$

а) сходится при любых p;
б) расходится при любых p;
в) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$;
г) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

3. Сопоставьте между собой функции и их особые точки на промежутке $[-1;3]$ и заполните таблицу:

I) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-x}}$ а) 0,2

II) $\dfrac{\sin x}{2x-x^2}$ б) 2

III) $\dfrac{\ln|x|}{x^2-4}$ в) –1,1

IV) $\dfrac{\ln(x+1)}{x-1}$ г) 0,1

1	2	3	4

4. Как себя ведет несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^6+x}^{\,5}}$?

а) сходится; б) расходится.

5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют особую точку $x_0 = b$ и удовлетворяют условиям 1-го признака сравнения, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда, если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ _______, то $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ _______. Заполните пропуски.

а) сходится, сходится; б) сходится, расходится;
в) расходится, сходится; г) расходится, расходится.

6. Чему равно значение несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \,?$$

а) 0; б) ∞; в) π; г) 1.

7. Закончите предложение. Если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется...
а) абсолютно сходящимся;
б) условно сходящимся;
в) сходящимся в смысле главного значения;
г) расходящимся.

8. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}\,?$$

а) сходится; б) расходится.

9. Закончите предложение. Пусть $x = 0$ – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$ и эти функции интегрируемы на $[0;1]$. Тогда функция $3 \cdot f(x) - 5 \cdot g(x)$ интегрируема на $[0;1]$ по свойству...
а) аддитивности; б) линейности; в) сохранения порядка; г) интегрируемости модуля.

10. Закончите предложение. Если $f(x) \geq 0$ и интегрируема на $[-1;1]$ в несобственном смысле, то

$$|\int\limits_{-1}^{1} (-1)^{[x]} f(x)\,dx| \leq \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

по свойству...
а) аддитивности;
б) линейности;
в) сохранения порядка;
г) интегрируемости модуля.

11. Сходится ли несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^5+x^2}^{\,2}}\,dx?$$

а) сходится; б) расходится.

12. Какой несобственный интеграл из перечисленных не сходится в смысле главного значения?

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$; г) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^4+3}{x}\,dx$.

13. Для выполнения условия теоремы о среднем, а именно существует такая константа

$$c \in (m; M) : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = c \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

какое из перечисленных условий лишнее?

а) $f(x)$ интегрируема на $\langle a; b\rangle$ в несобственном смысле;
б) $f(x)$ ограничена на $\langle a; b\rangle$;
в) $g(x)$ интегрируема на $\langle a; b\rangle$ в несобственном смысле;
г) $g(x)$ не меняет знака на $\langle a; b\rangle$.

14. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{|\cos\frac{1}{x-2}|}{(-x^2+4)^{\frac{3}{4}}}\,dx?$$

а) сходится; б) расходится.

15. Пусть $x = b$ – особая точка функций $f, g\colon\ [a;b) \to \mathbb{R}$. Какое из перечисленных условий является лишним для выполнения признака Дирихле сходимости $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$?

а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится;

б) $\int\limits_a^\beta f(x)\,dx$ ограничен $\forall\beta \in [a;b)$;

в) $g(x)$ монотонна на $[a;b)$;

г) $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$;

16. Сходится ли абсолютно или условно интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x}{x}\,dx?$$

17. Вычислите: $v.p. \int\limits_{-\frac{3}{\pi}}^{\frac{4}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$

18. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^\pi \frac{\cos\frac{1}{x^3}}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx.$

19. Вычислите: $\int\limits_0^1 \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}\,dx.$

20. Сходится ли интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{sign(x)}$?

Тест 4

1. Выберите функции, для которых точка $x_0 = 1$ является особой:

а) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$; б) $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$; в) $\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$; г) $\dfrac{\sin x}{\ln x}$.

2. Закончите фразу. Интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ ...

а) сходится при любых p;
б) расходится при любых p;
в) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$;
г) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

3. Сопоставьте между собой функции и их особые точки на промежутке $[0;4]$ и заполните таблицу.

I) $\dfrac{e^x - 1}{x^2 - 2x}$ а) 1,3

II) $\ln|x^2 - 9| + \dfrac{1}{1-x}$ б) 2

III) $\dfrac{\ln|x|}{x^2 - 4}$ в) 0,2

IV) $\dfrac{\ln|x-2|}{x^4}$ г) 3,4

1	2	3	4

4. Как себя ведет несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{5x^7 + x}}$?

а) сходится; б) расходится.

5. Выберите правильный вариант ответа. Пусть функция $f(x)$ имеет особую точку $x_0 = a$ и удовлетворяет

условиям первого признака сравнения, $f(x) \geq 0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, если...

а) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится и $g(x) \leq f(x)$;

б) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится и $g(x) \geq f(x)$;

в) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится и $g(x) \leq f(x)$;

г) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится и $g(x) \geq f(x)$.

6. Чему равен несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x}$?

а) 0; б) ∞; в) π; г) -2.

7. Закончите фразу. Если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится, а $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется...

а) абсолютно сходящимся;
б) условно сходящимся;
в) сходящимся в смысле главного значения;
г) расходящимся.

8. Определите характер сходимости несобственного интеграла $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}}$?

а) сходится; б) расходится.

9. Закончите предложение. Пусть $x = 1$ – особая точка функций $f(x)$ и $g(x)$ и эти функции интегрируемы на $[0;1]$. Тогда функция $-7 \cdot f(x) + \sqrt{2} \cdot g(x)$ интегрируема на $[0;1]$ по свойству...

а) аддитивности;
б) линейности;
в) сохранения порядка;
г) интегрируемости модуля.

10. Продолжите фразу. Если функция $|f(x)|$ интегрируема на $[0;\pi]$ в несобственном смысле, то $|\int\limits_0^\pi f(x)\,dx| \leq \int\limits_0^\pi |f(x)|\,dx$ по свойству...

а) аддитивности;
б) линейности;
в) сохранения порядка;
г) интегрируемости модуля.

11. Как себя ведет несобственный интеграл

$$\int\limits_2^3 \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-3x+2}\,dx?$$

а) сходится; б) расходится.

12. Какой несобственный интеграл из перечисленных не сходится в смысле главного значения?

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x^2}$;

в) $\int\limits_{-3}^{3} \dfrac{x+5}{x^4}\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^3+6x^2}}$.

13. Для выполнения условия теоремы о среднем, а именно: существует такая константа

$$c \in (m; M) : \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = c \cdot \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

какое из перечисленных условий является лишним?

а) $f(x)$ ограничена на $\langle a; b\rangle$;
б) $f(x)$ непрерывна на $\langle a; b\rangle$;
в) $g(x)$ интегрируема на $\langle a; b\rangle$ в несобственном смысле;
г) $g(x)$ не меняет знака на $\langle a; b\rangle$.

14. Исследуйте характер сходимости данного несобственного интеграла $\displaystyle\int\limits_{-3}^{0} \frac{|\sin \frac{1}{x+3}|}{(x+3)^{\frac{3}{2}}}\,dx$:

а) сходится; б) расходится.

15. Пусть $x = b$ – особая точка функций $f, g\colon\ [a; b) \to \mathbb{R}$. По признаку Дирихле, если ___ монотонна на $[a; b)$, $\int\limits_a^\beta$ ___ dx ограничен для $\forall \beta \in [a; b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0}$ ___ $= 0$, то $\int\limits_a^\beta f(x)g(x)\,dx$ сходится. Заполните пропуски:

а) $f(x), f(x), f(x)$;
б) $g(x), f(x), f(x)$;
в) $g(x), g(x), f(x)$;
г) $g(x), f(x), g(x)$.

16. Сходится ли абсолютно или условно интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{2^{-x} - 4^{-x}}{x}\,dx?$$

17. Вычислите: $v.p. \int\limits_{\frac{-6+3\pi}{\pi}}^{\frac{4+9\pi}{3\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x-3}}{x^2-6x+9}\,dx.$

18. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}}{x^2}\,dx.$

19. Вычислите: $\int\limits_0^1 \frac{x\cdot e^x - e^x + 1}{x^2}\,dx.$

20. Сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sgn(\sin x)}$?

Тема 8. Область определения и предел функции нескольких переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$, тогда говорят, что на X задана числовая функция n-переменных и пишут

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n),\ x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in X.$$

Множество X называют областью определения функции, а точку x – аргументом, ее координаты $x_1, x_2, \dots x_n$ – независимыми переменными.

Пример 1. Найдите область определения функции

$$u(x; y) = \sqrt{y \sin x}.$$

Решение. Функция определена в тех точках плоскости $\mathbb{R}^2$, в которых $y \geq 0,\ \sin x \geq 0$ или $y \leq 0,\ \sin x \leq 0$. Откуда получаем, что решением первой системы неравенств являются точки, удовлетворяющие условиям

$$y \geq 0;\ 2\pi k \leq x \leq \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z},$$

а решениями второй системы являются точки, удовлетворяющие условиям

$$y \leq 0;\ (2k-1)\pi k \leq x \leq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

На плоскости эта область изображается в виде объединения замкнутых вертикальных полуполос.

Определение 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Число b называется пределом функции $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X | 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

где $\rho(x, a)$ — расстояние между векторами $x, a \in \mathbb{R}^n$. Это определение предела функции было дано французским математиком О.Л. Коши. Наряду с определением 1, существует равносильное определение предела функции в точке, которое дал немецкий математик Э. Гейне.

Определение 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Число b называется пределом функции $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$, если для любой последовательности векторов x^m, $x^m \neq a$, сходящейся к a, числовая последовательность $f(x^m)$ сходится к числу b.

Предел функции $u = f(x, y)$ двух переменных в точке $(x_0; y_0)$ называют двойным и обозначают

$$\lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} f(x, y).$$

Наряду с этим пределом рассматривают также два повторных предела функции в точке $(x_0; y_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y), \ \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Они не всегда совпадают, например, для функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{3x^2 + y^2}$$

в точке $(x_0; y_0) = (0; 0)$. Эти понятия обобщаются и на случай функции n-переменных.

Пример 2. Для функции $z(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt[3]{x - y}}$ найдите:

$$a) \lim_{x \to 0,\, y \to 0} z(x, y); \ b) \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} z(x, y); \ c) \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} z(x, y).$$

Решение. а) Перейдем к полярной системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Если $x \to 0$, $y \to 0$, то $r \to 0$ при любых значениях φ. Тогда

$$\lim_{x \to 0,\, y \to 0} z(x, y) = \lim_{r \to 0} \frac{r^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\sqrt[3]{r} \sqrt[3]{\cos \varphi - \sin \varphi}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^{\frac{5}{3}} \cos\varphi \sin^2\varphi}{\sqrt[3]{\cos\varphi - \sin\varphi}} = 0$$

независимо от значений полярного угла $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y \to 0} \frac{xy^2}{\sqrt[3]{x-y}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt[3]{x}} = 0$;

c) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x \to 0} \frac{xy^2}{\sqrt[3]{x-y}} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{-\sqrt[3]{y}} = 0$.

Пример 3. Существует ли функция $z = z(x, y)$, определенная на всей плоскости, для которой

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} z(x, y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} z(x, y) = 0,$$

а $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} z(x, y)$ не существует?

Решение. Да, например, $z(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} z(x, y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} z(x, y) = 0.$$

Покажем, что двойной предел функции в точке $(0; 0)$ не существует. Пусть $x = y = t$, тогда $t \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0} z(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

Если же $x = t^2$, $y = t$, тогда $t \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0} z(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^4 + t^2} = 0.$$

Таким образом, двигаясь к точке $(0; 0)$ по разным траекториям, мы получаем разные значения предела функции $z(x, y)$. Значит, $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} z(x, y)$ не существует.

Тест 1

1. Как определяется скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$?

а) $x, y \in \mathbb{R}^n,\ (x, y) = \sum\limits_{i=2}^{n} x_i\, y_{i-1};$

б) $x, y \in \mathbb{R}^n,\ (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i;$

в) $x, y \in \mathbb{R}^n,\ (x, y) = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1;$

г) $x, y \in \mathbb{R}^{n-1},\ (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i\, y_i.$

2. Выберите правильный вариант ответа. δ-окрестность точки $x = (1; 2) \in \mathbb{R}^2$ можно определить с помощью неравенств...
а) $|x_1 - 1| < \delta_1,\ |x_2 - 2| < \delta_2;$ б) $|x_1 - 1| \geq \delta_1,\ |x_2 - 2| < \delta_2;$
в) $|x_1 - 1| < \delta_1,\ |x_2 - 2| \geq \delta_2;$ г) $|x_1 - 1| \geq \delta_1,\ |x_2 - 2| > \delta_2.$

3. Является ли функция двух переменных $z(x; y) = (x^2 + y^2,\ x - 2y,\ \sin y)$ векторной или числовой? Выберите верный ответ.

4. Приведите (хотя бы один) пример функции нескольких переменных $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

5. Выберите верное определение предела функции

$$\lim_{x_1 \to a_1,\ x_2 \to a_2} f(x_1; x_2) = b$$

на языке «$\varepsilon - \delta$»:

а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| \geq \varepsilon;$

б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| > \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon;$

в) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

г) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| > \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

6. Найдите область определения функции

$$z(x; y) = \sqrt{x + y^2 - 5} + \frac{7y^3 + 4}{\ln(x - 8)}.$$

7. Нарисуйте на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ область определения следующей функции

$$z(x; y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 16)}{\sqrt{x + y - 2}}.$$

8. Сформулируйте необходимый признак существования предела числовой функции нескольких переменных.

9. Истинно ли высказывание? Если существует двойной предел функции двух переменных в точке и существуют повторные пределы функции в этой же точке, то повторные пределы равны.

10. Для функции $u(x; y) = \frac{xy^2}{x+y}$ вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} u(x; y)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u(x; y)$; в) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u(x; y)$.

11. Вычислите повторные пределы функции

$$d(x; y) = \frac{1 - \cos(x + y)}{(x + y)^2}$$

при $x \to 0,\ y \to 0$.

12. Запишите хотя бы одно уравнение линии уровня для функции $z(x;y) = \sqrt[4]{1-x^2-y^2}$.

13. Является ли точка $(1;2)$ предельной для области определения функции $f(x;y) = 4x+5y-6$? Поясните свой ответ.

14. Пользуясь определением предела функции на языке «$\varepsilon - \delta$», для функции из задания 13 докажите равенство

$$\lim_{x\to 1, y\to 2}(4x+5y-6) = 8.$$

15. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$? Если двойной предел существует, то чему равно его значение? Если же предел не существует, поясните почему.

16. Запишите на языке «$\varepsilon - \delta$» определение следующего предела

$$\lim_{x\to -\infty, y\to \infty} f(x;y) = 0.$$

17. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^5-y^7}{x^5+y^6}$?

18. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $f(x) = (e^x; \sin x - 1; \frac{x^2}{2+x^4})$, $a=0$, $b=(1;-1;0)$. Запишите определение предела

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

на языке «$\varepsilon - \delta$».

19. Принадлежат ли точки кривой $y = \sin^3 x$ области определения функциии

$$f(x;y) = \frac{arctg(xy-1)}{(x^2-1)(4-y^2)}?$$

20. Изобразите на плоскости δ-окрестность точки $A(1;-3)$ с размерами $\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \frac{1}{2}$.

Тест 2

1. Как определяется норма вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$?

а) $x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| = \sqrt{(x,x)}$;

б) $x = (x_1, x_2, \ldots x_n),\ ||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=2}^{n} x_i\ x_{i-1}}$;

в) $x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| = (x,x)$;

г) $x \in \mathbb{R}^{n-1},\ ||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\ x_{n-i+1}}$.

2. Выберите правильный вариант ответа. δ-окрестность точки $x = (0;1) \in \mathbb{R}^2$ можно определить с помощью неравенств...

а) $|x_1| < \delta_1,\ |x_2 - 1| < \delta_2$; б) $|x_1| \geq \delta_1,\ |x_2 - 1| < \delta_2$;

в) $|x_1| < \delta_1,\ |x_2 - 1| \geq \delta_2$; г) $|x_1 - 1| < \delta_1,\ |x_2| < \delta_2$.

3. Является ли функция трёх переменных $f(x;y;z) = \frac{x^2+y^2}{z^3}$ векторной или числовой? Выберите верный ответ.

4. Приведите (хотя бы один) пример функции нескольких переменных $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

5. Выберите верное определение предела функции

$$\lim_{x_1 \to a_1,\ x_2 \to a_2} f(x_1; x_2) = -\infty$$

на языке «$\varepsilon - \delta$»:

а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)| \geq \frac{1}{\varepsilon}$;

б) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow f(x) < \frac{1}{\varepsilon}$;

в) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$;

г) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2) | 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$.

6. Найдите область определения функции

$$z(x; y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{x + y - 3}}.$$

7. Нарисуйте на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ область определения следующей функции

$$z(x; y) = \frac{\sqrt[6]{25 - x^2 - y^2}}{4x - 6} + \frac{26xy}{\ln(4 - x)}.$$

8. Сформулируйте достаточный признак существования предела числовой функции нескольких переменных.

9. Истинно ли высказывание? Если существуют повторные пределы функции двух переменных в точке и они равны, то двойной предел функции в этой точке существует.

10. Для функции $u(x; y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} u(x; y)$;
б) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u(x; y)$;
в) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u(x; y)$.

11. Вычислите повторные пределы функции

$$d(x;y) = \frac{\ln(1-x-y)}{\sqrt{x+y}}$$

при $x \to 0,\ y \to 0$.

12. Запишите хотя бы одно уравнение линии уровня для функции $z(x;y) = \log_3 x^2 + y^2 - 17$.

13. Является ли точка $(0;-5)$ изолированной для области определения функции $f(x;y) = 7x - 8y + 10$? Поясните свой ответ.

14. Пользуясь определением предела функции на языке «$\varepsilon - \delta$», для функции из задания 13 докажите равенство

$$\lim_{x\to 0, y\to -5}(7x - 8y + 10) = 50.$$

15. Существует ли $\lim\limits_{x\to 1, y\to -5} \frac{\ln(5+x^2+y)}{4+y+x^2}$? Если двойной предел существует, то чему равно его значение? Если же предел не существует, поясните почему.

16. Запишите на языке «$\varepsilon - \delta$» определение следующего предела $\lim\limits_{x\to +\infty, y\to -\infty} f(x;y) = \infty$.

17. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{-x^6+y^{20}}{x+y^{20}}$?

18. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x;y) = (\frac{x}{y+1}; \frac{\sin x}{\cos y}; tg(x^2+y^2); \ln(x^2+y^2+9)),$$

$a = (0;0),\ b = (0;0;0;\ln 9)$. Запишите определение предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ на языке «$\varepsilon - \delta$».

19. Принадлежат ли точки прямой $y = -x$ области определения функции

$$f(x;y) = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}?$$

20. Изобразите на плоскости δ-окрестность точки $A(+\infty; 2)$ с размерами $\delta_1 = \frac{1}{3},\ \delta_2 = \frac{1}{2}$.

Тема 9. Непрерывность в точке и на множестве функции нескольких переменных. Равномерная непрерывность функции

Пусть $f : X \to Y,\ X \subset \mathbb{R}^n,\ Y \subset \mathbb{R}^m$ и $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, x_0)$ такое, что для всех $x \in X$ выполняется, если x попадает в проколотую δ-окрестность точки x_0, то $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки $f(x_0)$.

Как и в случае функции одной переменной, справедлив аналог теоремы об арифметике, а именно: если $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ – непрерывные функции в точке $x_0 \in X$, то функции $f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x_0) \neq 0$ также непрерывны в точке x_0.

Определение 2. Функция $f : X \to Y$ называется равномерно непрерывной на $M \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x_1, x_2 \in M \mid$$

$$\rho_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon,$$

где $\rho_1(x_1, x_2),\ \rho_2(f(x_1), f(x_2))$ – метрики на множествах X, Y соответственно.

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, кроме, быть может, самой точки a.

Определение 3. Точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$ в следующих случаях:
1) функция $f(x)$ не определена в точке a;
2) функция $f(x)$ определена в точке a, но либо $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует, либо $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, но не равен $f(a)$.

Пример 1. Исследуйте функцию на непрерывность по отдельным переменным и по их совокупности в точках $(0;0)$, $(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2})$, если

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin x+\sin y}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 1, & x+y=0. \end{cases}$$

Решение. Исследуем непрерывность в точке $(0;0)$. Покажем непрерывность по переменной x, то есть $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=f(0,0)$. Составим частное приращение функции в точке $(0;0)$ по переменной x при фиксированном y:

$$\Delta_x f(0,0)=f(x,0)-f(0,0)=\frac{\sin x}{x}-1\to 0,\ x\to 0.$$

Следовательно, $f(x,y)$ непрерывна по переменной x в точке $(0;0)$. Аналогично проверяется непрерывность функции по переменной y в точке $(0;0)$.

Теперь исследуем функцию на непрерывность по совокупности переменных в точке $(0;0)$, то есть проверим выполнение условия

$$\lim_{x\to 0,y\to 0} f(x,y)=f(0,0).$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\sin x+\sin y}{x+y}=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{x+y}=$$

$$=\lim_{x\to 0,y\to 0}\cos\frac{x-y}{2}=1.$$

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью функции $\cos\frac{x-y}{2}$ в точке $(0;0)$. Провести исследование непрерывности данной функции в точке $(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2})$ предлагаем читателям самостоятельно.

Пример 2. Найдите все точки разрыва функции и укажите точки устранимого разрыва

$$u(x,y) = \left[\frac{y}{x}\right],$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Решение. Функция $u(x,y)$ неопределена в точках оси ординат, то есть при $x = 0$. Значит, в точках $(0; y)$, $y \in \mathbb{R}$ находятся разрывы второго рода. Далее, функция $u(x,y)$ меняет свои значения при переходе через прямые $y = nx$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, если $nx \le y < (n+1)x$, $\forall x$, то $u(x,y) = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $(x_0; y_0)$ – точка на прямой $y = x$, тогда

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0+0} \left[\frac{y}{x}\right] = 1, \quad \lim_{x\to x_0, y\to y_0-0} \left[\frac{y}{x}\right] = 0.$$

Это означает, что точки прямой $y = x$ – это точки разрыва (устранимого) первого рода функции $u(x,y)$. Аналогично можно показать, что точки прямых $y = nx$, $n \in \mathbb{Z}$ также являются точками устранимого разрыва функции.

Пример 3. Найдите модуль непрерывности $\omega(\delta)$ и исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x,y)$ в области ее определения X

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Решение. По определению модуля непрерывности имеем

$$\omega(\delta) = \sup_X |f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)|,$$

где $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0;0)$, $\rho(M_1,M_2) < \delta$, $M_1 = (x_1;y_1)$, $M_2 = (x_2;y_2)$. Имеем

$$\omega(\delta) = \sup_X \left|\frac{1}{x_2^2+y_2^2} - \frac{1}{x_1^2+y_1^2}\right| =$$

$$= \sup_X \left| \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{\rho(M_1;(0;0))\rho(M_2;(0;0))} \right|.$$

Если представить координаты точек $M_1,\ M_2$ в полярной системе координат

$$x_1 = r_1 \cos\varphi_1,\ y_1 = r_1 \sin\varphi_1,$$

$$x_2 = r_2 \cos\varphi_2,\ y_2 = r_2 \sin\varphi_2,$$

то $\omega(\delta) = \sup\limits_X \left| \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right|$. Очевидно, что $\omega(\delta) = +\infty$, если точка M_2 приближается к точке $(0;0)$, то есть $r_2 \to 0$, а точка M_1 находится на окружности радиуса $r_1 \le \delta$. Отсюда в соответствии с определением неравномерной непрерывности функции на множестве, при любых $\delta > 0$, найдутся точки $M_1,\ M_2 \in \mathbb{R}^2$ такие, что $\rho(M_1, M_2) < \delta$, а $\omega(\delta) \ge \varepsilon = 1$.

Тест 1

1. Выберите верный вариант ответа. На языке $\varepsilon - \delta$ определение непрерывности функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ в собственной точке $a = (a_1; a_2)$ запишется так:

а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2)|\ 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow ||f(x_1; x_2) - f(a_1; a_2)|| > \varepsilon$;

б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2)|\ 0 < |x_1 - a_1| > \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow ||f(x_1; x_2) - f(a_1; a_2)|| < \varepsilon$;

в) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2)|\ |x_1 - a_1| > \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| > \delta_2 \Rightarrow ||f(x_1; x_2) - f(a_1; a_2)|| > \varepsilon$;

г) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x = (x_1; x_2)|\ 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2 \Rightarrow ||f(x_1; x_2) - f(a_1; a_2)|| < \varepsilon$.

2. Верно ли следующее утверждение? Любая функция нескольких переменных непрерывна в изолированной точке области определения. Ответьте: да/нет/не всегда.

3. Выберите правильный вариант ответа. Есть ли среди перечисленных точек те, которые являются точками разрыва функции $f(x;y) = \frac{x+y-1}{\sqrt[10]{x^2+y^4}}$? Если таковых точек нет, в ответе напишите «нет».

а) $(1;-1)$; б) $(0;0)$; в) $(0;1)$; г) $(\sqrt{\frac{1}{2}}; -\sqrt[4]{\frac{1}{2}})$.

4. Сопоставьте элементы из левого (функции) и правого (точки разрыва) столбцов таблицы и перечислите в ответе через запятую цифру и букву.

1) $z = \frac{y^3}{x^6+y^4}$	a) $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$
2) $z = \frac{1}{\cos^2 x + \cos^2 y}$	b) $(0;0)$
3) $z = sgn(x+y-2)$	c) $(0;-\sqrt{10})$
4) $z = \frac{1}{\ln\|x^2+y^2-9\|}$	d) $(3;-1)$

5. Каким значением доопределить функцию

$$z(x;y) = \frac{x^2y}{8x^2+3y^2}$$

в точке разрыва, чтобы она стала непрерывной на всей области определения?

а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) –1.

6. Будет ли компактным множеством объединение множеств A и B?

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\},$$

$$B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, \ |y| \leq 12\}.$$

7. Непрерывна ли функция $g(x;y) = \sin\frac{1}{x+y^2}$ в точке $(0;2)$?
а) по переменной x; б) по переменной y.

8. Верно ли утверждение? Из непрерывности функции $w = h(x;y)$ по переменным x и y в отдельности следует непрерывность w по совокупному аргументу $(x;y)$. Ответьте: да/нет/не всегда.

9. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Будет ли ограниченной функция $f(x;y) = \frac{7xy-2}{x^2+y^4+1}$ на $\mathbb{R}$?

10. Докажите, что $f(x_1;x_2;x_3) = x_2,\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

11. Найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции трех переменных $g(x;y;z) = \frac{y}{\cos(xz)}$.

12. Исследуйте на равномерную непрерывность на множестве $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \le y \le -x^2\}$ функцию $u = 7x - 8y + 100$.

13. Верно ли утверждение? Любая равномерно непрерывная на множестве функция является непрерывной на этом же множестве. Ответьте: да/нет/не всегда.

14. Найдите значения c и d, при которых функция w будет непрерывной на всей области определения

$$w = \left\{ \begin{array}{rl} c, & x^2+y^2 \le 16; \\ \sqrt{25-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2-16}, & 16 < x^2+y^2 \le 25; \\ d, & x^2+y^2 > 25. \end{array} \right.$$

15. Является ли равномерно непрерывной на множестве $M = \{(x;y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$ функция $z(x;y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$?

16. Исследуйте на непрерывность в точке $P(x_0; y_0)$ функцию $u = \arcsin(x^2 + y^2) + \frac{8xy}{e^{x^2-y^2}+7}$.

17. Покажите, что функция $u = \frac{x+8y}{x-15y}$ не является непрерывной в точке $Q(0; 0)$.

18. Найдите точки разрыва функции $j(x; y; z) = \frac{1}{\cos(\pi x)} + \frac{1}{\cos(\pi y)} + \frac{1}{\cos(\pi z)}$.

19. Верно ли следующее утверждение? Функция

$$u = e^{x+2y^2+3z^3}$$

принимает на множестве

$$M = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

наибольшее значение.

20. Известно, что функция $z = f(x; y)$ непрерывна на множестве $M = \{(x; y) : |x| + |y| \leq 2\}$. Является ли она непрерывной в точке $B(2; \frac{1}{2})$? Ответ поясните.

Тест 2

1. Выберите верный вариант ответа. На языке «$\varepsilon - \delta$» определение непрерывности функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ в собственной точке $a = (a_1; a_2; a_3)$ запишется так:

а) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon) > 0, \delta_3(\varepsilon) > 0 \ \forall x = (x_1; x_2; x_3) | \ 0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, 0 < |x_2 - a_2| < \delta_2, 0 < |x_3 - a_3| < \delta_3 \Rightarrow ||f(x_1; x_2; x_3) - f(a_1; a_2; a_3)|| > \varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)>0,\delta_3(\varepsilon)>0\ \forall x=(x_1;x_2;x_3)|\ |x_1-a_1|>\delta_1, 0<|x_2-a_2|<\delta_2, 0<|x_3-a_3|<\delta_3 \Rightarrow ||f(x_1;x_2;x_3)-f(a_1;a_2;a_3)||<\varepsilon$;

в) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)>0,\delta_3(\varepsilon)>0\ \forall x=(x_1;x_2;x_3)|\ 0<|x_1-a_1|<\delta_1, 0<|x_2-a_2|<\delta_2, 0<|x_3-a_3|<\delta_3 \Rightarrow ||f(x_1;x_2;x_3)-f(a_1;a_2;a_3)||<\varepsilon$;

г) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)>0,\delta_3(\varepsilon)>0\ \forall x=(x_1;x_2;x_3)|\ 0<|x_1-a_1|<\delta_1, 0<|x_2-a_2|<\delta_2, 0<|x_3-a_3|>\delta_3 \Rightarrow ||f(x_1;x_2;x_3)-f(a_1;a_2;a_3)||<\varepsilon$.

2. Верно ли следующее утверждение? Непрерывность функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ в точке $x_0\in\mathbb{R}^n$ равносильна выполнению условия $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$. Ответьте: да/нет/не всегда.

3. Выберите правильный вариант ответа. Есть ли среди перечисленных точек те, которые являются точками разрыва функции $f(x;y)=\frac{\sin(xy)}{\ln(x^3+y^3)}$? Если таковых точек нет, в ответе напишите «нет».

а) $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; б) $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$; в) $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; г) $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$.

4. Сопоставьте элементы из левого (функции) и правого (точки разрыва) столбцов таблицы и перечислите в ответе через запятую цифру и букву.

1) $z=\frac{y^2}{x^4+y^4}$	a) $(-\frac{\pi}{4};-1)$
2) $z=\frac{1}{tg\ xy-1}$	b) $(0;0)$
3) $z=sgn(x-\frac{4}{\pi}y)$	c) $(1;1+\frac{\pi}{4})$
4) $z=\frac{1}{\ln(xy-\frac{\pi}{4})}$	d) $(1;\frac{\pi}{4})$

5. Каким значением доопределить функцию

$$z(x;y)=\frac{5x^4y^2}{2x^6+3y^6}$$

в точке разрыва, чтобы она стала непрерывной на всей области определения?

а) $\frac{5}{3}$; б) 0; в) $\frac{5}{2}$; г) 5.

6. Будет ли компактным множеством объединение множеств A и B?

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 2\},$$

$$B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 4\}.$$

7. Непрерывна ли функция $m(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2-4}$ в точке $(0;2)$? а) по переменной x; б) по переменной y.

8. Верно ли утверждение? Непрерывная на замкнутом множестве M функция $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принимает минимальное значение. Ответьте: да/нет/не всегда.

9. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Будет ли ограниченной функция $f(x;y) = \frac{x^3-8y^2}{\ln|x^2-5x+7|}$ на $\mathbb{R}$?

10. Докажите, что $f(x_1;x_2;x_3;x_4) = x_3,\ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

11. Найдите точки разрыва и укажите точки устранимого разрыва функции трех переменных $g(x;y;z) = \cos\frac{z}{xy}$.

12. Исследуйте на равномерную непрерывность на множестве $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z\}$ функцию

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

13. Верно ли утверждение? Любая непрерывная на ограниченном множестве функция является равномерно непрерывной на этом же множестве. Ответьте: да/нет/не всегда.

14. Найдите значения c и d, при которых функция h будет непрерывной на всей области определения

$$h = \left\{ \begin{array}{rl} c, & x^2+y^2 \le 1; \\ \sqrt{144-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2-1}, & 1 < x^2+y^2 \le 144; \\ d, & x^2+y^2 > 144. \end{array} \right.$$

15. Является ли равномерно непрерывной на множестве $M = \{(x;y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ функция $z(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2}$?

16. Исследуйте на непрерывность в точке $P(x_0;y_0)$ функцию $u = \arccos(13x^4+5) - \frac{\ln 1+2x^2+4y^2}{\cos e^{7x+5y^2}}$.

17. Покажите, что функция $u = \frac{-7x+y}{3x+y}$ не является непрерывной в точке $Q(0;0)$.

18. Найдите точки разрыва функции $j(x;y;z) = \frac{xy}{|z|}$.

19. Верно ли следующее утверждение? Функция

$$u = \sqrt[3]{yx+7yz+5zx}$$

принимает на множестве

$$M = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 | x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1\}$$

наибольшее значение.

20. Известно, что функция $z = f(x;y)$ непрерывна на множестве $M = \{(x;y) : \max(|x|,|y|) \le 3\}$. Является ли она непрерывной в точке $B(\frac{7}{4}; -2,89)$? Ответ поясните.

Тема 10. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^n,\ a \in X$.

Определение 1. Числовая функция n-переменных $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке a, если

$$f(x) - f(a) = B(x-a) + \omega(x,a),$$

где $B = (b_1,\ b_2, \dots b_n)$, $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\omega(x,a) \to 0$, $x \to a$. Дифференцируемость векторной функции n-переменных $f : X \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ в точке $a \in X$ определяется дифференцируемостью каждой числовой координатной функции $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, если $\overline{x} = (x_1,\ x_2, \dots x_n)$, то

$$f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \dots f_m(\overline{x}))\,.$$

Определение 2. Если $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определена в окрестности точки $(x_0; y_0)$ и существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0},\ \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0},$$

то их называют частными производными функции $f(x,y)$ в точке $(x_0; y_0)$ и обозначают $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ соответственно. Линейная часть приращения функции в точке называется дифференциалом первого порядка функции в этой точке. Например. если $u = f(x,y)$ – дифференцируемая функция в точке $(x_0; y_0)$, а переменные $x,\ y$ независимые, то

$$df(x_0,y_0) = A\cdot dx + B\cdot dy,$$

где $A,\ B \in \mathbb{R}$, а $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$.

Теорема. Пусть функции $u(x,y),\ v(x,y)$ определены в некоторой окрестности точки $(a;b)$, а $g(u,v)$ определена в некоторой окрестности точки $(u_0, v_0) = (u(a,b), v(a,b))$. Если функция $g(u,v)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0) и существуют $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, тогда существуют частные производные функции $g(u,v)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u_0, v_0) = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(u_0, v_0) = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}.$$

<u>Определение 3.</u> Производной функции $f(x,y)$ в точке $(a;b)$ по направлению единичного вектора $\overline{e} = (e_1; e_2)$ называется число

$$f'_e(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_1, b+te_2)}{t}.$$

<u>Пример 1.</u> Является ли дифференцируемой в точке $(0;0)$ функция

$$f(x,y) = \sin\sqrt[4]{xy}\ ?$$

Решение. Нет. Если бы это было так, то согласно определению было бы справедливо равенство

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) + o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Здесь $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$, поэтому $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Следовательно, если бы функция была бы дифференцируема в точке $(0;0)$, то ее приращение в точке $(0;0)$ можно было бы записать в виде

$$f(x,y) - f(0,0) = \sin\sqrt[4]{xy} - 0 = o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Докажем, что это не так. Для этого вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sin\sqrt[4]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, переходя к полярной системе координат:

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sin\sqrt[4]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin\sqrt[4]{r^2\cos\varphi\sin\varphi}}{r} = \infty.$$

Последнее равенство доказывает невозможность представления приращения функции в точке $(0;0)$ в виде

$$f(x,y)-f(0,0)=\sin\sqrt[4]{xy}-0=o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

<u>Пример 2.</u> Решите уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z,$$

преобразовав его к новым независимым переменным u, v, если $u=x$, $uv=y$.

Решение. Найдем частные производные функции z по новым переменным u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\,v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial y}\,u.$$

Отсюда выразим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и подставим в исходное уравнение. Получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$u\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{y}{u}\,\frac{\partial z}{\partial v}=z,$$

$$u\,\frac{\partial z}{\partial u}-v\,\frac{\partial z}{\partial v}+v\,\frac{\partial z}{\partial v}=z,$$

$$u\,\frac{\partial z}{\partial u}=z.$$

Следовательно, $z(u,v)=f(v)\cdot u$, где f – произвольная дифференцируемая функция. В итоге:

$$z(x,y)=f(\frac{y}{x})\,x$$

Пример 3. Найдите в точке $(1; 1; a)$, где a – корень уравнения $u^2 \ln(1+u) = 1$, частные производные первого порядка функции $u = f(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$u^2 \ln(u+x) = xy. \tag{1}$$

Решение. Функция $F(x, y, u) = u^2 \ln(u+x) - xy$ равна нулю в точке $(1; 1; a)$ и непрерывна в ее окрестности, а ее частные производные

$$F'_x = \frac{u^2}{u+x} - y, \; F'_y = -x, \; F'_u = 2u \ln(u+x) + \frac{u^2}{u+x}$$

также непрерывны и $F'_u(1, 1, a) \neq 0$. Значит, в окрестности точки $(1; 1; a)$ уравнение (1) определяет непрерывно-дифференцируемую функцию $u = f(x, y)$. Так как

$$F'_u(1, 1, a) = 2a \ln(1+a) + \frac{a^2}{1+a},$$

$$F'_x(1, 1, a) = \frac{a^2}{1+a} - 1, \; F'_y(1, 1, a) = -1,$$

то

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{a + a^2 - a^3}{a^3 + 2a + 2},$$

$$u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = \frac{a + a^2}{a^3 + 2a + 2},$$

Пример 4. Найдите дифференциал первого порядка функции

$$g(x, y) = arctg \, \frac{y}{1+x^2}$$

в точке $(1; -1)$.

Решение. По определению имеем

$$dg(x, y) = \left(arctg \, \frac{y}{1+x^2} \right)' \cdot d \left(\frac{y}{1+x^2} \right),$$

$$dg(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{1+x^2})^2} \cdot \frac{(1+x^2)dy - yd(1+x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$$dg(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{1+x^2})^2} \cdot \frac{(1+x^2)dy - 2xy\,dx}{(1+x^2)^2},$$

$$dg(1,-1) = \frac{2}{5} \cdot (dx+dy).$$

Тест 1

1. В определении дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{R}^3$ функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ее приращение в этой точке представимо в виде

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \gamma(x;a).$$

Что такое A?

а) матрица, у которой три строки и два столбца;
б) вещественное число;
в) вектор с тремя координатами;
г) матрица, у которой две строки и три столбца.

2. Продолжите фразу. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x;y) = (x;y;xy)$. Тогда ее производная в точке $H(1;1)$ имеет вид...

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Каким по отношению к условию дифференцируемости функции нескольких переменных в точке является непрерывность функции в этой же точке?

а) необходимое; б) достаточное; в) критерий.

4. Верно ли следующее утверждение? Если для функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки a существуют все частные производные первого порядка, то функция дифференцируема в точке a.

5. Выберите верный вариант ответа. Производной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ по направлению $\overrightarrow{l}$ называется...

а) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a-lt)-f(a)}{t}$; б) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(at+l)-f(a)}{t}$;
в) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+lt)-f(a)}{t}$; г) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(at)-f(a+l)}{t}$.

6. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x; y; z) = 3x^3z + 5zy^3 + 4xy^3$. Найдите $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1; 1)$.

7. Найдите $df(1; 1)$, если $f(x; y) = \sin^2(x^2 + y^2)$.

8. Найдите $d^2f(a; b)$, если $f(x; y) = \frac{1}{x+y}$.

9. Вычислите $\frac{\partial h}{\partial x}(1; 2; 3)$, если $h(x; y; z) = f(x^2 - y, y^2 - z, z^2 - x)$.

10. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Чему равно значение дифференциала второго порядка функции в данной точке $d^2f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$?

11. Вычислите значение производной сложной функции $z = x^2we^y$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$, $w = \sin t + \cos t$ при $t = \pi$.

12. Вычислите частные производные первого порядка неявной функции $z = z(x; y)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6xyz.$$

13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $x^2 + y^2 - yz + 4y + xz = 23$ в точке $A(1; 8; -2)$.

14. Вычислите производную функции

$$z = x^2 - 7xy + \sqrt{11xy}$$

в точке $D(2;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{DC},\ C(-1;2)$.

15. Возрастает или убывает в точке $A(1;-1;1)$ функция $u = yz - 4x + 15x^2 z$ в направлении $\overrightarrow{l} = (1,2,-1)$?

16. Определите скорость наискорейшего роста функции $z = \arcsin\sqrt{xy+2}$ в точке $B(\frac{1}{2};-2)$.

17. Найдите якобиан отображения $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, если

$$u = y(x^2 - 2y^2),\ v = x(2x^2 - y^2).$$

18. Решите уравнение, преобразовав его к новым аргументам u, v:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ u = 2x - y, v = x + \frac{y}{2}.$$

19. Запишите приращение функции $z(x;y) = x^3 y$ в точке $D(1;-1)$.

20. Найдите угол между градиентами функций

$$f(x;y) = x^3 + y^3 - 3x^2 y,\ g(x;y) = x^2 + y^2 - 2x$$

в точке $M(3;1)$.

Тест 2

1. В определении дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{R}^4$ функции $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ее приращение в этой точке представимо в виде

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \gamma(x;a).$$

Что такое A?

а) матрица, у которой три строки и четыре столбца;
б) вещественное число;
в) вектор с четырьмя координатами;
г) матрица, у которой четыре строки и три столбца.

2. Продолжите фразу. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x;y) = (xy;yz)$. Тогда ее производная в точке $Q(1;-1;0)$ имеет вид...

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Каким по отношению к условию дифференцируемости функции нескольких переменных в точке является существование конечной производной функции в этой же точке?

а) необходимое; б) достаточное; в) критерий.

4. Верно ли следующее утверждение? Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, тогда для нее существуют все частные производные первого порядка в точке a.

5. Выберите верный вариант ответа. Градиентом функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ называется вектор...

а) $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a); \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_3}(a); \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a))$;
б) $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a); \frac{\partial f}{\partial x_2}(a); \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$;
в) $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a); \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a); \ldots; \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a))$;
г) $(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)}; \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}; \ldots; \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)})$.

6. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x;y) = 4x^7y^8 - 5y^9x^2$. Найдите $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1;1)$.

7. Найдите $df(1;1)$, если $f(x;y) = \cos^2(x^2+y^2)$.

8. Найдите $d^2f(a;b)$, если $f(x;y) = \ln(x+y)$.

9. Вычислите $\frac{\partial g}{\partial y}(1;2;-3)$, если $g(x;y;z) = f(\frac{x}{y};\frac{y}{z};\frac{z}{x})$.

10. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1;x_2;\ldots;x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. Чему равно значение дифференциала второго порядка функции в данной точке $d^2f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$?

11. Вычислите значение производной сложной функции $z = \sqrt{7+w^3-x+y^2}$, где $x = \ln t$, $y = t^3$, $w = t^2$ при $t = 1$.

12. Вычислите частные производные первого порядка неявной функции $z = z(x;y)$, заданной уравнением

$$xe^y + ye^x = ze^z.$$

13. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-12xyz+z=4$ в точке $A(0;1;1)$.

14. Вычислите производную функции $z = xe^{y-x}$ в точке $D(-3;2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{DC}$, $C(8;-4)$.

15. Возрастает или убывает в точке $A(1;1;1)$ функция $u = \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz}$ в направлении $\overrightarrow{l} = (-1,-2,1)$?

16. Определите скорость наискорейшего роста функции $z = \ln(2x + \ln(x^2+y^2))$ в точке $G(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

17. Найдите якобиан отображения $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, если

$$u = chx + shy,\ v = chyshx.$$

18. Решите уравнение, преобразовав его к новым аргументам u, v:

$$\frac{\partial z}{\partial y} - 3\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ u = x + 2, v = y - 3x.$$

19. Запишите приращение функции $z(x;y) = x^2y^2$ в точке $E(2;1)$.

20. Найдите угол между градиентами функций

$$f(x;y) = xy + y^2x^3,\ g(x;y) = x^2 - y^2$$

в точке $N(1;1)$.

Тема 11. Наибольшее и наименьшее значения функции

Тест 1

1. Выберите верное утверждение:

а) дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывает на $(a, b) \Leftrightarrow$
$f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b)$;

б) дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывает на $(a, b) \Leftrightarrow$
$f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a, b)$;

в) дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не возрастает на $(a, b) \Leftrightarrow$
$f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a, b)$.

2. Выберите верное утверждение:

а) точка x_0 называется точкой локального максимума $f(x)$, если
$\exists S(x_0, \delta) \mid f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in S(x_0, \delta)$;

б) точка x_0 называется точкой локального максимума $f(x)$, если
$\exists S(x_0, \delta) \mid f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in S(x_0, \delta)$;

в) точка x_0 называется точкой локального минимума $f(x)$, если
$\exists S(x_0, \delta) \mid f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in S(x_0, \delta)$.

3. Выберите верное утверждение:

а) точка x_0 является точкой строгого максимума функции $f(x)$, если производная функции $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак минус на знак плюс;

б) точка x_0 является точкой строгого минимума функции $f(x)$, если производная функции $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на знак минус;

в) точка x_0 является точкой строгого минимума функции $f(x)$, если производная функции $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак минус на знак плюс.

4. Найдите точки экстремума функции

$$y = x^3 - 4x^2$$

и выберите верный вариант:

а) $x = 0,\ x = -\dfrac{8}{3}$;

б) $x = 0,\ x = \dfrac{8}{3}$;

в) $x = \dfrac{8}{3}$;

г) $x = 0$.

5. Найдите точки экстремума функции (если они есть)

$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3$$

и выберите верный вариант:

а) $y = 1,\ y = \dfrac{3}{4}$;

б) $y = 1$;

в) $y = \dfrac{3}{4}$;

г) экстремумов нет.

6. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

$$f(x) = (x-1)^3(2x+3)^2.$$

7. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

8. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

$$f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}.$$

9. Найдите максимумы и минимумы функции:

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x.$$

10. Найдите максимумы и минимумы функции:

$$f(x) = (3 - x^2)e^x.$$

11. Найдите максимумы и минимумы функции:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}.$$

12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X:

$$y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad X = [-1, 2].$$

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X:

$$y = \frac{9}{x} + \frac{25}{1 - x}, \quad X = (0, 1).$$

14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X:

$$y = (x - 3)^2 e^{|x|}, \quad X = [-1, 4].$$

15. Найдите номер n наибольшего члена последовательности:

$$f_n = \frac{\sqrt{n}}{n + 1985}.$$

16. Найдите экстремум функции двух переменных:

$$u(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1.$$

17. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = x^2 - xy + y, \quad |x| \le 2, \ |y| \le 3.$$

18. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y), \quad x + y \le 2\pi, \ x, y > 0.$$

19. Найдите условный экстремум функции относительно заданного уравнения связи:

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \ \ 3x + 2y - 6 = 0.$$

20. Найдите условный экстремум функции относительно заданного уравнения связи:

$$u(x, y) = 1 - 4x - 8y, \ \ x^2 - 8y^2 = 8.$$

Тест 2

1. Выберите верное утверждение:

а) дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывает на $(a, b) \Leftrightarrow$
$f'(x) \le 0, \ \forall x \in (a, b)$;

б) дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не возрастает на $(a, b) \Leftrightarrow$
$f'(x) \ge 0, \ \forall x \in (a, b)$;

в) дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не возрастает на $(a, b) \Leftrightarrow$
$f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a, b)$.

2. Выберите верное утверждение:

а) точка x_0 называется точкой локального минимума $f(x)$, если
$\exists S(x_0, \delta) \mid f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in S(x_0, \delta)$;

б) точка x_0 называется точкой локального минимума $f(x)$, если
$\exists S(x_0, \delta) \mid f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in S(x_0, \delta)$;

в) точка x_0 называется точкой локального максимума $f(x)$, если
$\exists S(x_0, \delta) \mid f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in S(x_0, \delta)$.

3. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка $n\,(n \in \mathbb{N})$ включительно и, кроме того, $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Выберите верное утверждение:

а) если n – четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;

б) если n – нечетно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума;

в) если n – нечетно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;

г) если n – четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка минимума.

4. Найдите точки экстремума функции

$$y = (x - 5)e^x$$

и выберите верный вариант:

а) $x = 5$;

б) $x = 4$;

в) $x = 4$, $x = 5$.

5. Найдите экстремум функции (если он есть)

$$y = x^4 - 8x^2 + 12$$

и выберите верный вариант:

а) $y = 12$, $y = -4$;

б) $y = -4$;

в) $y = 12$;

г) экстремумов нет.

6. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

7. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x.$$

8. Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

$$f(x) = \frac{(3-x)^3}{(x-2)^2}.$$

9. Выясните, при каких значениях параметра a функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой:

$$f(x) = ax - \sin x.$$

10. Найдите максимумы и минимумы функции:

$$y = (x^3 - 10)(x+5)^2.$$

11. Найдите максимумы и минимумы функции:

$$y = x - 2\sin^2 x.$$

12. Найдите максимумы и минимумы функции:

$$y = \max\{7x - 6x^2, |x^3|\}.$$

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X:

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad X = [-1, 2].$$

14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}, \quad X = \mathbb{R}.$$

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на множестве X:

$$y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, \quad X = [\pi, 2\pi].$$

16. Найдите экстремум функции двух переменных

$$u(x, y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2.$$

17. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2.$$

18. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x,y) = 3 + 2xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

19. Найдите условный экстремум функции относительно заданного уравнения связи:

$$u(x,y) = xy^2, \;\; x + 2y - 1 = 0.$$

20. Найдите условный экстремум функции относительно заданного уравнения связи:

$$u(x,y) = 6 - 5x - 4y, \;\; x^2 - y^2 = 9.$$

Тест 3

1. Выберите верное утверждение:

а) точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f'_{x_i}(x^0) = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$;

б) точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f'_{x_i}(x^0) \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$;

в) точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f'_{x_i}(x^0)$ не существует $\forall i = \overline{1,n}$.

2. Выберите верное утверждение:

а) точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ – точка экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$ либо $f'_{x_i}(x^0) \neq 0$, либо $f'_{x_i}(x^0)$ не существует $\forall i = \overline{1,n}$;

б) точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ – точка экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow f'_{x_i}(x^0) = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$;

в) точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ – точка экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$ либо $f'_{x_i}(x^0) = 0$, либо $f'_{x_i}(x^0)$ не существует $\forall i = \overline{1, n}$.

3. Установите соответствие между функциями многих переменных и их стационарными точками:

1) $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;
2) $u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;
3) $u = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$;

а) $\left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, 2\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$;
б) $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$, $(2, 1)$;
в) $(0, 0)$, $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $(-1, -2)$, $(-1, 2)$.

4. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ $(M \subset \mathbb{R}^n)$ обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки x^0, которая является критической для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Выберите верное утверждение:

а) если дифференциал 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x^0 является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, то точка x^0 – точка строгого максимума $f(x)$;

б) если дифференциал 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x^0 является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ то точка x^0 – точка строгого минимума $f(x)$;

в) если дифференциал 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x^0 является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ то точка x^0 – точка строгого минимума $f(x)$.

5. Найдите точки экстремума функции

$$u(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$$

и выберите верный вариант:

а) $(3, 2),\ (2, 3)$;
б) $(-3, -2),\ (-2, -3)$;
в) $(3, 2),\ (-3, -2)$;
г) $(2, 3),\ (-2, -3)$.

6. Укажите все точки экстремума функции

$$u(x, y) = |y|.$$

7. Найдите экстремум функции двух переменных

$$u(x, y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y.$$

8. Найдите экстремум функции двух переменных

$$u(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$$

9. Найдите экстремум функции трех переменных

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x.$$

10. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для случая функции многих переменных.

11. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = xy + x + y, \quad -2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 4.$$

12. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad |x| + |y| \leq 1.$$

13. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x,y) = (x+y)e^{xy}, \quad -2 \leq x + y \leq 1,\ -2 \leq x \leq 1.$$

14. Исследуйте на строгий экстремум функцию $u = u(x,y)$, заданную неявно уравнением:

$$x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0.$$

15. Исследуйте на строгий экстремум функцию $u = u(x,y)$, заданную неявно уравнением:

$$x^3 - y^2 + u^2 - 3x + 4y + u - 8 = 0.$$

16. Найдите квадрат расстояния между кривой и прямой:

$$y = x^2,\ \ x - y - 5 = 0.$$

17. Найдите условный экстремум функции $u = f(x,y)$ относительно заданного уравнения связи:

$$u(x,y) = xy,\ \ x + y - 1 = 0.$$

18. Найдите условный экстремум функции $u = f(x,y)$ относительно заданного уравнения связи:

$$u(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2,\ \ x^2 + 4y^2 = 25.$$

19. Найдите условный экстремум функции $u = f(x,y,z)$ относительно заданного уравнения связи:

$$u(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2, \ \ x + y + z = 13.$$

20. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции трех переменных на заданном множестве:

$$u(x,y,z) = x + y - z, \quad x^2 + y^2 = 1, \ \ y + z = 1.$$

Тест 4

1. Выберите верное утверждение:

а) точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если

$$\exists U(x^0) \,\big|\, f(x) \leq f(x^0), \ \forall x \in U(x^0);$$

б) точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если

$$\exists U(x^0) \,\big|\, f(x) \geq f(x^0), \ \forall x \in U(x^0);$$

в) точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если

$$\exists U(x^0) \,\big|\, f(x) \leq f(x^0), \ \forall x \in U(x^0).$$

2. Выберите верное утверждение:

а) точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f'_{x_i}(x^0) \neq 0, \ \forall i = \overline{1,n}$;

б) точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f'_{x_i}(x^0) = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$;

в) точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f'_{x_i}(x^0)$ не существует $\forall i = \overline{1, n}$.

3. Установите соответствие между функциями многих переменных и их стационарными точками:

1) $u = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y$	а) $(4, 4)$
2) $u = y^2 + 2xy - 4x - 2y - 3$	б) $(0, 1)$
3) $u = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$	в) $(-1, 2)$

4. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ $(M \subset \mathbb{R}^n)$ обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки x^0, которая является критической для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Выберите верное утверждение:

а) если дифференциал 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x^0 является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ то точка x^0 – точка строгого минимума $f(x)$;

б) если дифференциал 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x^0 является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ то точка x^0 – точка строгого максимума $f(x)$;

в) если дифференциал 2-го порядка функции $f(x)$ в точке x^0 является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ то точка x^0 – точка строгого максимума $f(x)$.

5. Найдите точки экстремума функции

$$u(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$$

и выберите верный вариант:

а) $(-1, 0)$;

б) $(1, 0)$;

в) $(-1, 0)$, $(1, 0)$;

г) $(0, 0)$.

6. Укажите все точки экстремума функции

$$u(x, y) = |x|.$$

7. Найдите экстремум функции двух переменных

$$u(x, y) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2).$$

8. Найдите экстремум функции двух переменных

$$u(x, y) = 4 + \sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}.$$

9. Исследуйте функцию двух переменных на экстремум:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy, \text{ где } a \in \mathbb{R} \text{ – параметр.}$$

10. Сформулируйте Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

11. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = 1 + x + 2y, \quad x + y \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0.$$

12. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = x^2 - 2y + 3, \quad y - x \le 1, \ x \le 0, \ y \ge 0.$$

13. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции двух переменных на заданном множестве:

$$u(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y),$$

$$x + y \leq 2\pi, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

14. Исследуйте на строгий экстремум функцию $u = u(x, y)$, заданную неявно уравнением:

$$2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0.$$

15. Исследуйте на строгий экстремум функцию $u = u(x, y)$, заданную неявно уравнением:

$$(x^2 + y^2)^2 + u^4 - 8(x^2 + y^2) - 10u^2 + 16 = 0.$$

16. Найдите квадрат расстояния между кривой и прямой:

$$y = x^2, \quad x - y - 2 = 0.$$

17. Найдите условный экстремум функции $u = f(x, y)$ относительно заданного уравнения связи:

$$u(x, y) = 5 - 3x - 4y,$$

$$x^2 + y^2 = 25.$$

18. Найдите условный экстремум функции $u = f(x, y)$ относительно заданного уравнения связи:

$$u(x, y) = 8 - (x + 2)^2 - (y - 4)^2,$$

$$x + 3y = 0.$$

19. Найдите условный экстремум функции $u = f(x, y, z)$ относительно заданного уравнения связи:

$$u(x, y, z) = x - 2y + 2z,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

20. Найдите наибольшее M и наименьшее m значения функции трех переменных на заданном множестве:

$$u(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Список литературы

[1] Демидович, Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие* / Б.П. Демидович. – Москва: Издательство «Астрель», Издательство «АСТ», 2002. – 558 с. – ISBN 5-17-010062-0, 5-271-03601-4

[2] Кудрявцев Л.Д. *Сборник задач по математическому анализу. Предел. Нпрерывность. Дифференцируемость: учебное пособие* / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 496 с. – ISBN 5-9221-0306-7.

[3] Кудрявцев Л.Д. *Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие* / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 504 с. – ISBN 978-5-9221-0307-7.

[4] Берман, Г.Н. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие*/ Г.Н. Берман. – Санкт-Петербург: Профессия, 2001. – 432 с. – ISBN 5-93913-009-7.

[5] Виноградова, И.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие* / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – Москва: Дрофа, 2001. – 725 с. – ISBN 5-7107-4294-5.

Учебное издание

Алякин Владимир Алексеевич,
Узбеков Роман Фатихович

ТЕСТЫ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Практикум

Редактор *А.С. Никитина*
Компьютерная верстка: *А.С. Никитина*

Подписано в печать 13.07.2022. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 10,5.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 26(Р1ПР)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.