

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

В. М. БЕЛОКОНОВ

# ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТОВ К ЛУНЕ И МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

*Конспект лекций*

КУЙБЫШЕВ 1989

Белоконов В. М. *Траектории полетов к Луне и межпланетные траектории*: Конспект лекций / Куйбыш. авиац. ин-т. Куйбышев, 1989. 31 с.

В сжатом виде излагается одноименный раздел курса лекций по динамике полета летательных аппаратов.

Рассматривается задача о движении летательных аппаратов в системе Земля—Луна, трактуемая как ограниченная задача трех тел. Изложена приближенная методика расчета траекторий сближения с Луной, использующая понятие о сфере действия малого небесного тела. Приведена классификация траекторий сближения с Луной. Приближенная методика, основанная на склейке кеплеровых траекторий, распространена на расчет межпланетных траекторий. Рассматриваются расчеты гелиоцентрического и планетоцентрических участков траектории.

Пособие предназначено для студентов старших курсов авиационных специальностей.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. В. В. Игнатьев  
канд. техн. наук. А. И. Мантуров

Печатается по решению редакционно-издательского совета института

## 1. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТОВ К ЛУНЕ

### 1.1. ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ—ЛУНА

Рассмотрим характеристики системы Земля—Луна (З—Л). Система З—Л является двойной планетой в Солнечной системе ввиду значительных размеров Луны.

Примем идеализированную модель системы З—Л (рис. 1.1): оба небесных тела считаем сферическими и их гравитационные поля центральными ньютоновскими;

Земля и Луна движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс, а последний движется по круговой орбите вокруг Солнца.

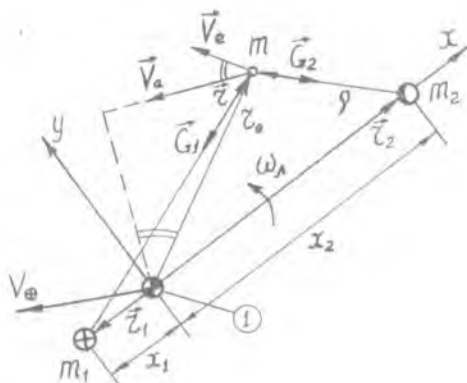


Рис. 1.1. Летательный аппарат в системе Земля—Луна: 1—баристентр системы Земля—Луна

Некоторые константы системы:

$$\begin{array}{ll}
 R_3 = 6371 \text{ км}, & R_{\text{л}} = 1737 \text{ км}; \\
 \mu_3 = 3,98602 \cdot 10^5 \text{ км}^3 \text{ с}^{-2}, & \mu_{\text{л}} = 4,86 \cdot 10^3 \text{ км}^3 \text{ с}^{-2}; \\
 V_3 = 29,27 \text{ км/с}, & V_{\text{л}} = 1,018 \text{ км/с}; \\
 g_3 = 9,8203 \text{ м/с}^2, & g_{\text{л}} = 1,61 \text{ м/с}^2; \\
 A = 384400 \text{ км}, & \omega_{\text{л}} = 2,662 \cdot 10^{-6} \text{ 1/с}; \\
 x_1 = -4670 \text{ км}, & x_2 = 379730 \text{ км}; \\
 m_1/m_2 = 81,45, & T_{\text{л}} = 27,32 \text{ сут.}
 \end{array}$$

Рассмотрим движение летательного аппарата (ЛА) в системе З—Л.

Примем следующие допущения:

пренебрегаем влиянием массы ЛА на движение системы;

не учитываем факторы: возмущения от притяжения Солнца и других планет, сопротивление атмосферы Земли, силы давления на ЛА солнечного излучения и метеорные возмущения.

Задача о движении ЛА в такой постановке называется *ограниченной задачей трех тел*.

Движение ЛА рассматривается относительно подвижной системы координат  $OXYZ$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  относительно барицентра  $O$  системы З—Л. Уравнение относительного движения ЛА имеет вид

$$m \ddot{W}^r = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{F}_{\text{ин}}^e + \bar{F}_{\text{ин}}^k,$$

где  $\bar{G}_1 = -\mu_3 \frac{m}{r^2} \bar{r}$ ;  $\bar{G}_2 = -\mu_{\text{л}} \frac{m}{\rho^3} \rho$  — гравитационные силы;

здесь

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}; \quad \rho = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2};$$

$$\bar{r} = \bar{r}_0 - \bar{r}_1, \quad \rho = \bar{r}_0 - \bar{r}_2, \quad r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Силы инерции определяются по формулам

$$\bar{F}_{\text{ин}}^e = -m \ddot{W}^e = m \omega^2 \bar{r}_0 \text{ — переносная сила инерции;}$$

$$\bar{F}_{\text{ин}}^k = -m \ddot{W}_1^k = -2m (\omega \times \dot{V}_r) = -2m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} =$$

$$= 2m \omega \dot{y} \bar{i} - 2m \omega \dot{x} \bar{j} \text{ — корнолисова сила инерции.}$$

Уравнение движения ЛА в системе З—Л в векторном виде запишется как

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\mu_3}{r^3} (\bar{r}_0 - \bar{r}_1) - \frac{\mu_{\text{л}}}{\rho^3} (\bar{r}_0 - \bar{r}_2) + \omega^2 \bar{r}_0 + 2\omega \dot{y} \bar{i} - 2\omega \dot{x} \bar{j}.$$

Уравнения движения в проекциях на подвижные оси примут вид

$$\ddot{x} = -\frac{\mu_3}{r^3} (x-x_1) - \frac{\mu_1}{\rho^3} (x-x_2) + \omega^2 x + 2\omega \dot{y};$$

$$\ddot{y} = -\frac{\mu_3}{r^3} y - \frac{\mu_1}{\rho^3} y + \omega^2 y - 2\omega \dot{x};$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu_2}{r^3} z - \frac{\mu_1}{\rho^3} z.$$

Перенося производные в левые части уравнений, получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} &= -\frac{\mu_3}{r^3} (x-x_1) - \frac{\mu_1}{\rho^3} (x-x_2) + \omega^2 x; \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} &= -\frac{\mu_3}{r^3} y - \frac{\mu_1}{\rho^3} y + \omega^2 y; \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_2}{r^3} z - \frac{\mu_1}{\rho^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Найдем первый интеграл системы. Введем функцию координат

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\mu_2}{r} - \frac{\mu_1}{\rho}. \quad (1.2)$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\dot{x} - 2\omega \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \dot{y} + 2\omega \dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Чтобы получить первый интеграл системы, умножим уравнения соответственно на  $2\dot{x}$ ,  $2\dot{y}$ ,  $2\dot{z}$  и сложим:

$$\dot{x} 2\dot{x} + \dot{y} 2\dot{y} + \dot{z} 2\dot{z} = 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) = 2 \frac{dU}{dt}.$$

Отсюда получаем интеграл Якоби

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2 \frac{dU}{dt}; \quad \frac{d}{dt} (V^2 - 2U) = 0;$$

$$V^2 - 2U = h, \quad (1.3)$$

где  $h$  — постоянная Якоби.

Проведем качественный анализ движения космического аппарата (КА)-с помощью интеграла Якоби. Этот интеграл является аналогом интеграла энергии в ограниченной задаче двух тел  $V^2 - \frac{2\mu}{r} = h$ .

Однако между этими интегралами есть существенное различие. Интеграл энергии выражает закон сохранения механической энергии. Интеграл Якоби выражает закон сохранения не-

которой комбинированной величины, учитывающей и механическую энергию, и кинетический момент. Для доказательства интеграл Якоби приведем к инерциальной системе координат. Применим теорему о сложении скоростей

$$\begin{aligned} \bar{V}_a &= \bar{V}_r + \omega \times \bar{r}_0, \quad \bar{V}_r = \bar{V} = \bar{V}_a - \omega \times \bar{r}_0; \\ V^2 &= (\bar{V}_a - \omega \times \bar{r}_0)^2 = V_a^2 - 2 \bar{V}_a (\omega \times \bar{r}_0) + \omega^2 r_0^2 = \\ &= V_a^2 - 2 V_a \omega r_0 \cos(V_a, V_e) + \omega^2 r_0^2 = V_a^2 - 2 K_z \omega + \omega^2 r_0^2, \end{aligned}$$

где  $K_z = V_a r_0 \cos(V_a, V_e)$  — момент количества движения единицы массы относительно  $OZ$ .

Относительная скорость выражается через абсолютную формулой  $V^2 = V_a^2 - 2 K_z \omega + \omega^2 r_0^2$ .

Подставляя  $V^2$  в интеграл Якоби, получаем

$$\begin{aligned} V_a^2 - \left( \frac{2\mu_3}{r} + \frac{2\mu_4}{\rho} \right) - 2 K_z \omega &= h, \\ E_{\text{инерц}} - K_z \omega &= h/2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $E_{\text{инерц}} = \frac{V_a^2}{2} - \left( \frac{\mu_3}{r} + \frac{\mu_4}{\rho} \right)$  — полная механическая энергия единичной массы ЛА в инерциальной системе координат.

Таким образом, закон сохранения механической энергии не является справедливым для ЛА, движущегося в системе З—Л. Из этого следует возможность целенаправленного изменения механической энергии ЛА без включения двигателя. Маневр изменения механической энергии ЛА без двигателя в системе двух-притягивающих тел называется *пертурбационным маневром*. ЛА может получить разгон, торможение или изменение плоскости движения за счет небесного тела при близком прохождении около него. При этом для системы трех масс  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_3$  закон сохранения механической энергии, конечно, остается справедливым.

Таким образом, если источники гравитационного поля движутся относительно инерциальной системы координат, то законы сохранения механической энергии и момента количества движения не имеют места для КА.

Интеграл Якоби позволяет выяснить характер и свойства движения ЛА в системе З—Л. Точки либрации являются точками относительного равновесия ЛА, в которых при отсутствии возмущений КА может находиться неопределенно долго (рис. 1.2). В этих точках гравитационные силы  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$  уравновешены силами инерции  $\bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{F}_{\text{ин}}^e = 0$ . В точках либрации  $L_4$  и  $L_5$  обнаружены скопления материи, названные *облаками Корделевского*.

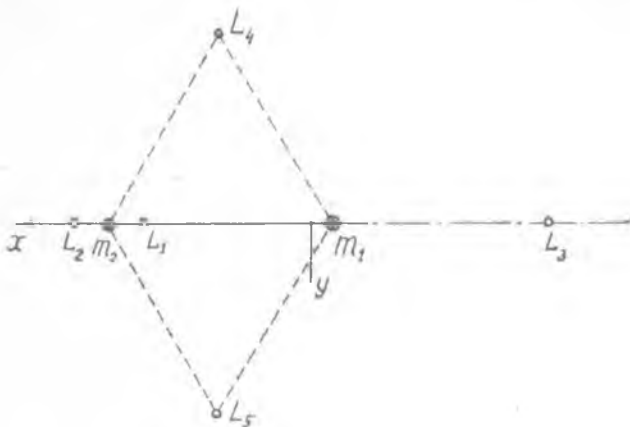


Рис. 1.2. Точки либрации в системе Земля—Луна

### 1.2. ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЕТОВ К ЛУНЕ

Приближенная методика расчета траектории ЛА в системе двух тел основана на применении понятия сферы действия.

Область преобладающего гравитационного влияния на КЛ небесного тела  $m_2$ , находящегося в гравитационном поле другого более массивного тела  $m_1$ , называется сферой действия тела  $m_2$  (рис. 1.3).

Сферой действия Луны (по Лапласу) называется область пространства, внутри которой возмущающее действие Земли в селеноцентрическом движении меньше действия Луны в геоцентрическом движении:

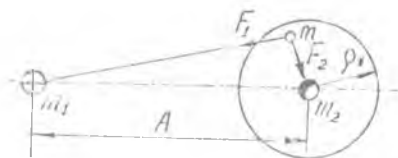


Рис. 1.3. Сфера действия луны

$$(F_{1в}/F_2)_{сц} \leq (F_{1в}/F_1)_{гц}; \quad \rho_* = A (m_2/m_1)^{2/5}. \quad (1.5)$$

Назовем траекториями сближения с Луной траектории, начинающиеся вблизи Земли и на первом витке вокруг Земли, входящие в сферу действия Луны.

Движение по траекториям сближения можно разбить на 3 участка:

- геоцентрическое движение к сфере действия Луны;
- селеноцентрическое движение в сфере действия Луны;

геоцентрическое движение от сферы действия Луны.

Возмущение Луной первого и третьего участков практически несущественно. Возмущение Землей селеноцентрического участка также несущественно.

Таким образом, ограниченная задача трех тел приближенно заменяется последовательным решением трех задач о невозмущенном движении в поле центральной силы. Приближенное движение в поле центральной силы. Приближенная траектория состоит из трех Кеплеровых траекторий, причем одна из них — селеноцентрическая — является относительной.

Геоцентрическое движение к сфере действия Луны. Расчет движения к сфере действия Луны (СДЛ) производится по начальным данным  $r_1, \Theta_1 (\alpha_1), V_1$ . Рассматриваем траекторию в плоскости орбиты Луны. Геоцентрическая траектория в зависимости от начальной скорости  $V_1$  является коническим сечением с фокусом в  $m_1$  (рис. 1.4). Обычно принимают  $h_1 = 200$  км,  $\Theta_1 = 0$  ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ).

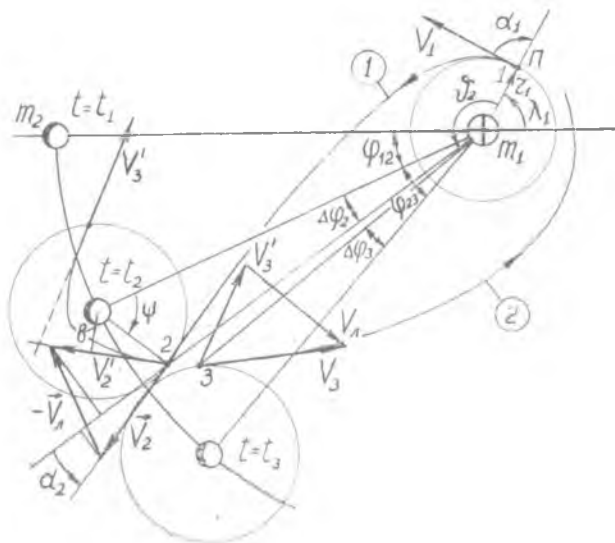


Рис. 1.4. Участки траекторий геоцентрического движения: 1 — геоцентрическая траектория сближения с Луной; 2 — возвратная геоцентрическая траектория

Вычисляем последовательно:

1. Элементы геоцентрической орбиты с начальными условиями

$$p = C^2/\mu_3; \quad C = r_1 V_1 \sin \alpha_1$$



$$e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{\mu_3^2} h}; \quad h = V_1^2 - \frac{2\mu_1}{r_1}.$$

2. Угол истинной аномалии в намеченной точке входа в сферу действия Луны

$$\cos \vartheta_2 = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_2} - 1 \right); \quad r_2 \simeq A.$$

3. Скорость и угол  $\alpha_2$  в точке входа

$$V_2^2 - \frac{2\mu_3}{r_2} = V_1^2 - \frac{2\mu_1}{r_1}; \quad V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2\mu_3 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)};$$

$$V_2 r_2 \sin \alpha_2 = V_1 r_1 \sin \alpha_1; \quad \sin \alpha_2 = \frac{V_1 r_1 \sin \alpha_1}{V_2 r_2}.$$

4. Время геоцентрического движения до точки входа в СДЛ для эллиптической и гиперболической орбит

$$t_2 - \tau = \frac{a^{3/2}}{V \mu_3} (E_2 - e \sin E_2); \quad \operatorname{tg} \frac{E_2}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2}; \quad a = \frac{p}{1-e^2};$$

$$t_2 - \tau = \frac{a^{3/2}}{V \mu_3} \left( e \operatorname{tg} F_2 - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{F_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right); \quad \operatorname{tg} \frac{F_2}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_2}{2};$$

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}.$$

5. Угол поворота Луны  $\varphi_{12} = \omega_L t_2$  и момент старта к Луне  $t_{11} = \pi - (\vartheta_{12} - \varphi_{12} - \Delta \varphi_2)$ .

Селеноцентрическое движение. С момента пересечения сферы действия Луны рассматриваем селеноцентрическое движение (рис. 1.5). Селеноцентрическая скорость входа в СДЛ определяется из треугольника скоростей  $\bar{V}_2' = \bar{V}_2 - \bar{V}_L$ , откуда

$$V_2' = \sqrt{(V_L \cos \Delta \varphi_2 - V_2 \sin \alpha_2)^2 + (V_2 \cos \alpha_2 - V_L \sin \Delta \varphi_2)^2}$$

или приближенно ( $\Delta \varphi_2 \sim 0$ )

$$V_2' = \sqrt{(V_L - V_2 \sin \alpha_2)^2 + V_2^2 \cos^2 \alpha_2}.$$

Движение в сфере действия Луны является гиперболическим:

$$V_L = 1,018 \text{ км/с}, \quad V_{\text{парф}^*} = \sqrt{\frac{2\mu_L}{\rho_*}} = 0,383 \text{ км/с}, \quad V_2' > V_{\text{парф}^*}.$$

Здесь  $V_2' \cong V_\infty$  — гиперболический избыток скорости на СДЛ.

Рассмотрим две постановки задачи об облете Луны.

1. Задана прицельная дальность  $b$  (положение точки входа в СДЛ). Проводим вычисления в следующей последователь-

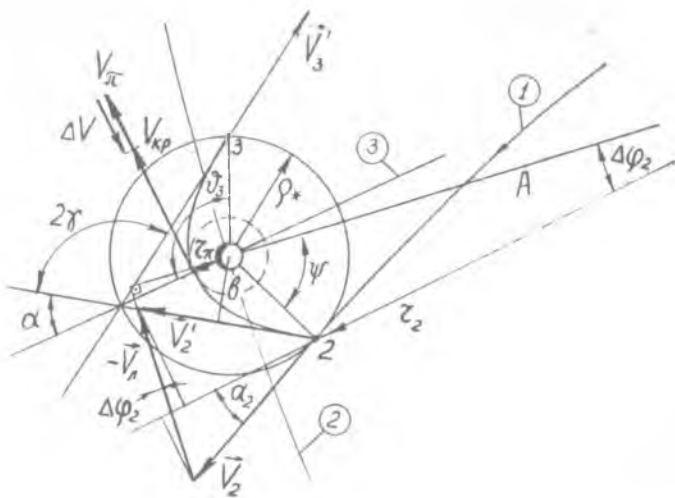


Рис. 1.5. Селеноцентрическая траектория: 1 — геоцентрическая траектория; 2 — траектория Луны; 3 — ось гиперболы

ности:

$$a = \frac{\mu_{\text{л}}}{V_{\infty}^2}; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + \frac{\mu_{\text{л}}^2}{V_{\infty}^2}}; \quad r_{\pi} = c - a.$$

2. Задано кратчайшее расстояние пролета  $r_{\pi}$ . В этом случае вычисления ведем по формулам

$$a = \mu_{\text{л}} / V_{\infty}^2; \quad c = a + r_{\pi};$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = r_{\pi} \sqrt{1 + \frac{2r_{\pi}}{r_{\pi}}} = r_{\pi} \sqrt{1 + \frac{2\mu_{\text{л}}}{r_{\pi} V_{\infty}^2}}.$$

Найдем элементы орбиты в плоскости движения

$$e = \frac{c}{a} = 1 + \frac{r_{\pi}}{a}; \quad p = a(e^2 - 1).$$

Скорость в перигентре гиперболической орбиты определяется из интеграла энергии

$$V_{\pi} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2\mu_{\text{л}}}{r_{\pi}}}.$$

Характеристическая скорость импульсного перехода с гиперболической траектории облета на круговую орбиту спутника

$$V_{\text{х}} = \Delta V = V_{\pi} - V_{\text{кр}} = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2\mu_{\text{л}}}{r_{\pi}}} - \sqrt{\frac{\mu_{\text{л}}}{r_{\pi}}}.$$

Время движения в сфере действия Луны

$$t_{23} = 2(t_3 - \tau) = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu_{\text{Л}}}} \left( e \operatorname{tg} F_3 - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{F_3}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right);$$

$$\operatorname{tg} \frac{F_3}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_3}{2}; \quad \cos \vartheta_3 = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{\rho_*} - 1 \right).$$

Поворот линии Земля—Луна за время селеноцентрического движения  $\varphi_{23} = \omega t_{23}$ . Поворот вектора скорости к моменту выхода из сферы действия равен  $2\gamma$ , где

$$\sin \gamma = \frac{a}{c} = \frac{a}{a+r_{\text{Л}}} = \frac{1}{1 + \frac{r_{\text{Л}} V_{\infty}^2}{\mu_{\text{Л}}}}$$

### 1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ СБЛИЖЕНИЯ С ЛУНОЙ

Траекториями сближения назовем траектории, которые на первом витке пересекают СДЛ (рис. 1.6) [2]. При запуске в сторону вращения Земли может быть пересечение с СДЛ на восходящем или нисходящем участке (классы траекторий  $B^+$  и  $H^+$ ). Классы траекторий  $B^+$  и  $H^+$  — энергетически более

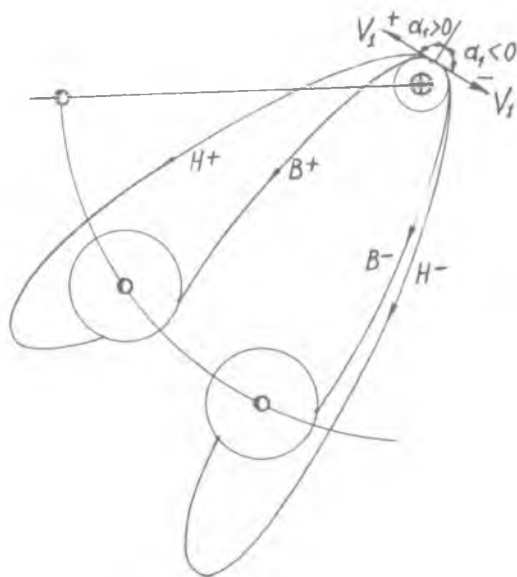


Рис. 1.6. Классификация траекторий сближения с Луной

выгодные траектории, так как используется скорость вращения Земли.

При запуске против вращения Земли получим классы В<sup>-</sup> и Н<sup>-</sup>. Наиболее употребительны траектории класса В<sup>+</sup>, так как перелет длится меньшее время.

Рассмотрим классификацию траекторий класса В<sup>+</sup> в зависимости от положения точки входа в СДЛ на восходящем участке.

Пусть известна селеноцентрическая скорость входа  $\vec{V}_2'$ . В зависимости от положения точки входа все траектории можно разделить на 3 класса (рис. 1.7):

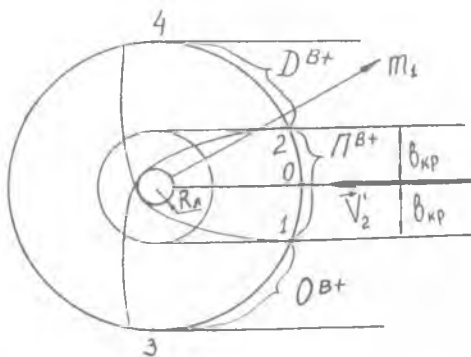


Рис. 1.7. Попадающие, облетные и долетные траектории

1. *Траектории попадания в Луну*, т. е. траектории, пересекающие поверхность Луны. Предельной попадающей траекторией является траектория, касающаяся поверхности Луны. Траектория прямого попадания вертикальна (класс ПВ<sup>+</sup>).

2. *Траектории облетные*, при которых траектория относительного движения замыкается вокруг Луны (класс ОВ<sup>+</sup>).

3. *Траектории долетные*, при которых относительная траектория не охватывает Луну (класс ДВ<sup>+</sup>).

Найдем положение точек входа, разделяющих эти три класса траекторий. Для этого достаточно найти положение точек входа для критических траекторий, касающихся поверхности Луны, по формуле

$$b = r_{\pi} \sqrt{1 + \frac{2\mu_L}{r_{\pi} V_{\infty}^2}} \quad (1.6)$$

Полагаем  $r_{\pi} = R_L$ , тогда  $b_{кр} = R_L \sqrt{1 + 2\mu_L / R_L V_{\infty}^2}$ .

Проведя через центр Луны линию, параллельную  $V_2' = V^\infty$ , получим точку входа  $O$ , соответствующую вертикальной траектории попадания в Луну. Проводя по обе стороны от этой линии на расстоянии  $b_{кр}$  две параллельных линии, получим на сфере действия точки 1 и 2, ограничивающие участок попадающих траекторий. Определяя точки касания 3 и 4, находим границы 3 и 4 участков входа траекторий класса  $O^{B+}$  и  $D^{B+}$ .

Облетным траекториям соответствуют углы поворота в СДЛ  $2\gamma$  по часовой стрелке, долетным — против часовой стрелки.

Для анализа и классификации траекторий сближения с Лунной удобно использовать приближенные планы выходных селеноцентрических (ВСЦ) и геоцентрических (ГЦ) скоростей, с помощью которых легко построить соответствующие годографы выходных скоростей (рис. 1.8).

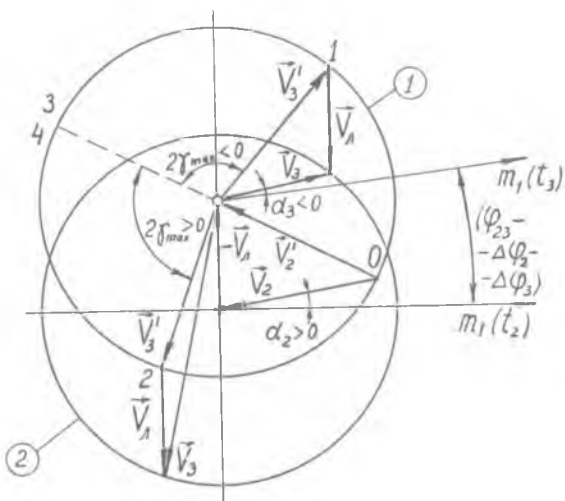


Рис. 1.8. Годографы выходных селено- и геоцентрических скоростей: 1 — годограф выходных селеноцентрических скоростей; 2 — годограф выходных геоцентрических скоростей

При построении приближенных планов и годографов принимают  $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3 = 0$ .

Легко выделить участки годографа ВСЦ скоростей, соответствующие облетным и долетным траекториям. Траектории класса  $O^{B+}$  делятся еще на два класса: восходящие после воздействия Луны  $O^{B+}$  и нисходящие  $O_H^{B+}$  (см. рис. 1.8).

Две предельные траектории, ограничивающие класс попадающих траекторий, определяются по формуле

$$\sin \gamma_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{R_{\text{л}} V_{\infty}^2}{\mu a}}. \quad (1.7)$$

Долетные траектории, соответствующие окрестности точки входа 2, являются траекториями пертурбационного маневра разгона.

С помощью годографа выходных ГЦ скоростей легко определить необходимый угол поворота  $2\gamma$ , а следовательно, и  $r_{\pi}$  или  $b$  для обеспечения траекторий возвращения в коридор входа Земли.

Аналогичный анализ можно провести и для траекторий классов  $H^+$ ,  $B^-$ ,  $H^-$ .

## 2. ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

### 2.1. МЕТОД КУСОЧНО-КОНИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Солнечная система представляет собой группу небесных тел, состоящую из центральной звезды — Солнца, масса которой составляет свыше 99% массы системы, 9 планет с 42-мя открытыми к настоящему времени спутниками и множества других малых небесных тел (астероидов, комет и метеорных тел).

Все большие планеты, кроме Меркурия и Плутона, обращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам против часовой стрелки, если наблюдать с северного полюса небесной сферы, в плоскостях, близких к плоскости орбиты Земли (плоскости эклиптики). Орбиты планет, кроме Меркурия и Плутона, близки к круговым. Основные характеристики Солнечной системы приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Основные характеристики Солнечной системы

Планета	Накло- нение к плоско- сти эк- липтики	Эксцент- риситет орбиты	Большая полуось орбиты, а. е.	Гравита- ционный параметр, км <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>	Радиус сферы действия, млн. км	Средний радиус пла- неты, км
Меркурий	7°	0,2056	0,3871	2,165 10 <sup>4</sup>	0,113	2385
Венера	3°24′	0,0068	0,7233	3,2423 10 <sup>5</sup>	0,616	6060
Земля	0	0,0168	1,0	3,9860 10 <sup>5</sup>	0,925	6371
Марс	1°51′	0,0933	1,524	4,2906 10 <sup>4</sup>	0,578	3370
Юпитер	1°19′	0,0483	5,203	1,265 10 <sup>8</sup>	48,2	69775
Сатурн	2°30′	0,0559	9,555	3,788 10 <sup>7</sup>	54,6	57750
Уран	0°46′	0,0463	19,22	5,794 10 <sup>6</sup>	51,8	24115
Нептун	1°47′	0,0090	30,11	6,86 10 <sup>6</sup>	87,0	22775
Плутон	17°9′	0,2486	39,52	3,312 10 <sup>5</sup>	37,6	6350
Солнце				1,3272 10 <sup>11</sup>	—	69600

В строгой постановке задача о движении космического аппарата в Солнечной системе является ограниченной задачей  $(n + 1)$  тел, где  $n$  — общее число небесных тел (Солнце и планеты), которая может быть решена только численными методами.

Учитывая значительную удаленность планет от Солнца и относительно небольшие гравитирующие массы планет, заметное влияние которых на КА наблюдается только вблизи планет, рассмотрим приближенный метод расчета межпланетных траекторий, основанный на использовании понятия сфер действия планет.

Приближенный метод расчета межпланетных траекторий, при котором решение ограниченной задачи многих тел заменяется последовательным решением ограниченных задач двух тел, называется *методом кусочно-конической аппроксимации*. В соответствии с этим методом односторонний межпланетный перелет состоит из трех участков:

планетоцентрического движения ухода из сферы действия планеты старта;

гелиоцентрического движения между сферами действия планет;

планетоцентрического движения в сфере действия планеты назначения.

Для обеспечения перехода с опорной орбиты вокруг планеты старта на гелиоцентрическую орбиту, выполнения маневров на гелиоцентрической орбите и перехода с последней на орбиту относительно планеты назначения необходимы активные участки полета. Поскольку длительности активных участков при работе ракетных двигателей большой тяги являются пренебрежимо малыми по сравнению с временами пассивных участков полета, принимается, что скорость КА меняется импульсом в точках совершения маневров.

## 2.2. ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИЙ УЧАСТОК ТРАЕКТОРИИ

Расчет межпланетной траектории следует начинать с расчета траекторий гелиоцентрического участка. Именно гелиоцентрический участок определяет потребные энергетические затраты на перелет, даты старта и продолжительность полета, обеспечивающие выполнение целевых задач полета.

При определении гелиоцентрической траектории КА будем считать, что сферы действия планет стянуты в точки, а их гравитационные поля отсутствуют, поскольку радиусы сфер действия планет по отношению к расстояниям до Солнца малы.



В связи с необходимостью учета взаимного расположения планет, их движения по эллиптическим орбитам, наклоненным к плоскости эклиптики, возникают трудности при расчете гелиоцентрического участка. Решение задачи значительно упрощается, если задаваться двумя независимыми параметрами: временем старта  $t_1$  по гелиоцентрической орбите перелета и временем полета  $t_n$  до пересечения сферы действия планеты назначения.

Пусть заданы время старта  $t_1$  со сферы действия Земли и прибытия к сфере действия планеты назначения  $t_2 = t_1 + t_n$ . По астрономическому ежегоднику или по формулам определения средних элементов планет [5] определяются начальный  $\bar{r}_1$  (для Земли) и конечный  $\bar{r}_2$  (для планеты назначения) радиусы-векторы, определяющие точки пересечения траектории перелета с траекториями Земли и планеты (рис. 2.1).

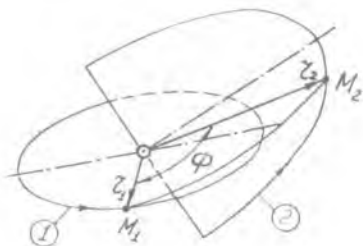


Рис. 2.1. Гелиоцентрический участок межпланетного перелета: 1 — орбита Земли; 2 — орбита планеты назначения

Плоскость гелиоцентрической орбиты перелета задается радиусами-векторами  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$ , а угловая дальность перелета рассчитывается по формуле

$$\cos \Phi = \bar{r}_1 \bar{r}_2 / r_1 r_2. \quad (2.1)$$

Для определения траектории перелета КА необходимо решить уравнение Ламберта [4], которое связывает время перелета, начальный и конечный гелиоцентрические радиусы с большой полуосью орбиты перелета

$$t_n = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta)], \quad (2.2)$$

здесь

$$\varepsilon = \arccos \left( 1 - \frac{r_1 + r_2 + d}{2a} \right), \quad \delta = \arccos \left( 1 - \frac{r_1 + r_2 - d}{2a} \right). \quad (2.3)$$

В формулах (2.2), (2.3) длина хорды эллиптической дуги между начальной и конечными точками перелета определяется по формуле

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Phi}.$$

Решение трансцендентного уравнения Ламберта (2.2) относительно большой полуоси орбиты производится методом по-

следовательных приближений, при этом в качестве первого приближения для  $a$  принимается

$$a_{\min} = (r_1 + r_2 + d)/4. \quad (2.4)$$

Уравнение Ламберта (2.2) справедливо при любом расположении точек  $M_1$  и  $M_2$  на орбите КА, однако для правильного выбора величин  $\varepsilon$  и  $\delta$  из корней уравнений (2.3) выполнено специальное исследование.

В табл. 2.2 приведены все возможные случаи перелета. В ней обозначены:  $M_1$  — точка старта КА,  $M_2$  — точка прилета КА,  $F$  — фокус эллиптической орбиты, в котором находится Солнце,  $F_1$  — свободный фокус,  $\varepsilon$  и  $\delta$  — наименьшие положительные углы, удовлетворяющие условиям (2.3).

Для приведенного в табл. 2.2 случая 5, когда хорда проходит через свободный фокус  $F_1$ , движение КА происходит по эллиптической (граничной) орбите с минимально возможным  $a = a_{\min}$ , при этом  $t_n = t_n^*$ . Случаи 1, 2 и 5 соответствуют встрече с планетой назначения на первом полувитке орбиты, а случаи 3 и 4 — встрече на втором полувитке.

Понятие граничной орбиты используется для определения типа орбиты, если положение фокусов  $F$  и  $F_1$  относительно заштрихованного сегмента заранее неизвестно. Для граничной орбиты из формулы (2.3) следует  $\varepsilon = \pi$ ,  $a = a_{\min}$ , а время перелета определяется по формуле Ламберта, имеющей вид

$$t_n^* = \frac{a_{\min}^3}{\sqrt{\mu}} [\pi - (\delta - \sin \delta) \operatorname{sign}(\sin \Phi)]. \quad (2.5)$$

Если заданное время перелета удовлетворяет условию  $t_n < t_n^*$ , то перелет происходит по орбите, у которой свободный фокус  $F_1$  лежит вне заштрихованного сегмента (случаи 1 и 3). При известной угловой дальности  $\Phi$  однозначно определяется необходимый случай. Если  $t_n > t_n^*$ , то из двух оставшихся случаев перелета 2 и 4 по величине  $\Phi$  определяется нужный.

После определения большой полуоси  $a$  находится фокальный параметр орбиты  $p$  по формуле

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2(\Phi/2)}{\mu \sin^2 \frac{\varepsilon \mp \delta}{2}} \quad (2.6)$$

где знак плюс берется для случаев 2 и 3. Затем из формулы (1.14) [7] определяется эксцентриситет орбиты гелиоцентрического перелета

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}. \quad (2.7)$$

## Возможные случаи решения уравнения Ламберта

Возможные случаи перелета	Схема перелета	Следует подставить в формуле Ламберта вместо	
		$\bar{e}$	$\bar{\delta}$
Сегмент не содержит ни $F$ , ни $F_1$		$\bar{e}$	$\bar{\delta}$
Сегмент содержит только $F_1$ , но не $F$		$2\pi - \bar{e}$	$\bar{\delta}$
Сегмент содержит только $F$		$\bar{e}$	$-\bar{\delta}$
Сегмент содержит и $F$ , и $F_1$		$2\pi - \bar{e}$	$-\bar{\delta}$
Хорда проходит через $F_1$		$\pi$	0

Углы истинных аномалий  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$ , соответствующие точкам старта  $M_1$  и прилета  $M_2$ , находятся по формулам

$$\vartheta_1 = \arccos \frac{p - r_1}{r_1 e}, \quad \vartheta_2 = \arccos \frac{p - r_2}{r_2 e}. \quad (2.8)$$

Величина  $\vartheta_2$  определяется из условий

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \Phi, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{\cos \Phi \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2}{\sin \Phi}. \quad (2.9)$$

Аргумент перицентра  $\omega = u_1 - \vartheta_1 = u_2 - \vartheta_2$ , где  $u_1$  и  $u_2$  определяются по формуле [7, с. 25].

Время прохождения через перицентр  $\tau$  из условия  $t = t_1$  и  $\theta = \vartheta_1$  определится по формуле Кеплера (1.24) из пособия [7].

Итак, по двум положениям КА в момент старта и прилета найдены все шесть элементов орбиты КА на гелиоцентрическом участке перелета. По элементам орбиты по формулам (1.49) из пособия [7] определяются координаты и проекции скоростей в гелиоцентрической эклиптической системе координат в точках  $t_1$  и  $t_2$ . Следовательно, станут известными векторы орбитальных скоростей КА  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$  в этих точках.

Зная векторы гелиоцентрических орбитальных скоростей КА, можно определить векторы скоростей КА относительно планет старта и назначения как разности векторов орбитальных скоростей КА и планет

$$\bar{V}_1^r = \bar{V}_1 - \bar{V}_3 = \bar{V}_{1\infty}, \quad \bar{V}_2^r = \bar{V}_2 - \bar{V}_{пл} = \bar{V}_{2\infty}, \quad (2.10)$$

являющиеся гиперболическими избытками скоростей относительно планеты старта  $\bar{V}_{1\infty}$  и планеты назначения  $\bar{V}_{2\infty}$ .

Величины скоростей  $V_{1\infty}$  и  $V_{2\infty}$  определяют требуемые энергии гиперболических траекторий КА на планетоцентрических участках полета:

$$h_1 = V_{1\infty}^2 / 2, \quad h_2 = V_{2\infty}^2 / 2. \quad (2.11)$$

### 2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАТ СТАРТА И ПРИЛЕТА

Определим сначала периодичность интервалов полетов к планетам. Для этой цели можно принять, что планеты движутся вокруг Солнца по круговым орбитам в плоскости эклиптики. Для такой модели Солнечной системы оптимальной межпланетной орбитой является эллипс Гомана, касательный к обеим круговым орбитам планет. Время перелета по дуге эллипса Гомана равно полупериоду обращения КА по эллиптической орбите:

$$t_{пг} = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

Пусть для некоторого опорного момента времени  $t_0$  начальные положения планет относительно точки весеннего равноденствия характеризуются гелиоцентрическими долготами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рис. 2.2). Начальное положение КА в момент старта  $\lambda_{M_1}$  и положение планеты назначения в момент прилета по эллипсу Гомана  $\lambda_{M_2}$  определяются формулами

$$\lambda_{M_1} = \lambda_1 + \omega_1 t_1, \quad \lambda_{M_2} = \lambda_2 + \omega_2 (t_1 + t_n), \quad (2.12)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — средние угловые скорости планет,  $t_1$  — время старта, отсчитываемое от момента  $t_0$ .

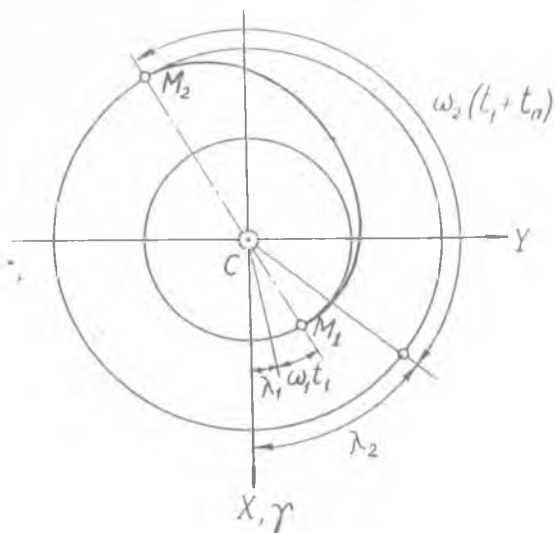


Рис. 2.2. Перелет по эллипсу Гомана

Приравнявая углы, обозначенные на рис. 2.2, получим

$$\lambda_1 + \omega_1 t_1 + \pi = \lambda_2 + \omega_2 (t_1 + t_n) + 2\pi n,$$

откуда

$$t_1^{\Gamma} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + \omega_2 t_n^{\Gamma} - \pi}{|\omega_1 - \omega_2|} + \frac{2\pi n}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (2.13)$$

Периодичность циклов оптимальных дат старта равна синодическому периоду обращения планеты  $T_{\text{син}}$ , т. е. наименьшему промежутку времени, через который повторяется фиксированная конфигурация планет (например, конфигурация, позволяющая реализовать гомановский перелет):

$$T_{\text{син}} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}. \quad (2.14)$$

Здесь  $T_1$  и  $T_2$  сидерические периоды обращения двух планет (относительно звезд). В табл. 2.3 приведены синодические периоды, время гомановского перелета и оптимальные даты старта с Земли к ближайшим планетам на начало 1962 года.

Таблица 2.3

Синодические периоды и оптимальные даты старта

$T_{\text{син}}$ , сут	Полет	$t_{\text{п}}$ , сут	$\omega_2$ , град/сут	$\lambda_1$ , град	$\lambda_2$ , град	$t_1$
584	Земля—Венера	146	1,6021	100°19'	39°	19.8.1962
780	Земля—Марс	259	0,5240	100°19'	99°	4.11.1964
399	Земля—Юпитер	995	0,0831	100°19'		8.05.1962

Рассмотрим теперь возможность определения действительных оптимальных дат старта с учетом некомпланарности орбит планет и орбиты перелета, которые несколько смещены от гомановских. Для выбора оптимальных дат старта и времени перелета с учетом различных требований принимается некоторый диапазон возможных дат старта и времени перелета:

$$t_1^{\Gamma} - 60_{\text{сут}} \leq t_1 \leq t_1^{\Gamma} + 60_{\text{сут}},$$

$$t_{\text{п}}^{\Gamma} - 30_{\text{сут}} \leq t_{\text{п}} \leq t_{\text{п}}^{\Gamma} + 30_{\text{сут}}.$$

В указанных диапазонах изменения  $t_1$  и  $t_{\text{п}}$ , задаваясь различными их сочетаниями, выполняют массовые расчеты гелиоцентрических траекторий в соответствии с п.2.2.

Результаты расчетов строят сначала в виде зависимостей  $V_{1\infty}$  и  $V_{2\infty}$  от даты старта  $t_1$  с параметром  $t_{\text{п}}$  (рис. 2.3).

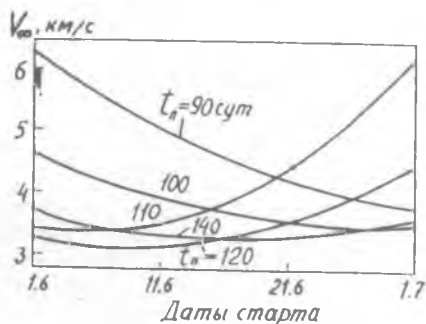


Рис. 2.3. Зависимость  $V_{1\infty}$  от даты старта

Затем для удобства выбора опорных траекторий эти зависимости перестраивают в виде изоэнергетических линий  $V_{1\infty} = \text{const}$  и  $V_{2\infty} = \text{const}$  в системе координат  $t_1$  и  $t_2$  и называют «раковинами изоэнергетических траекторий» полета к планете [3].

В качестве примера на рис. 2.4 показаны поля изоэнергетических линий

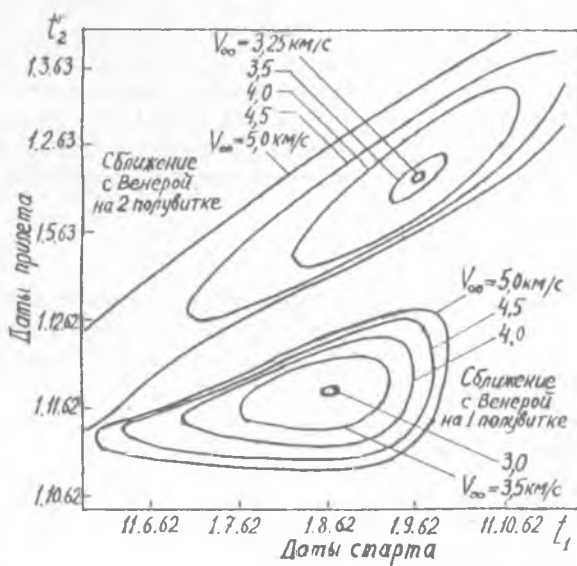


Рис. 2.4. Изоэнергетические раковины

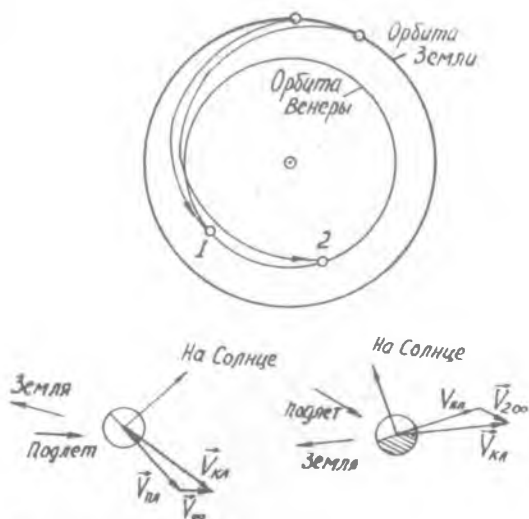


Рис. 2.5. Оптимальные траектории перелета к Венере

$V_{1\infty} = \text{const}$  для сближения на первом и втором полулитках при перелете к Венере в 1962 г. На рис. 2.5 приведены проекции на плоскость эклиптики оптимальных траекторий перелета к Венере и условия подлета при сближении на первом или втором полулитках. Видно, что на первом полулитке подлет к Венере осуществляется с затененной стороны, и Венера видна в виде узкого серпа. Сближение на втором полулитке происходит с солнечной стороны.

#### 2.4. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ ОТЛЕТА

Межпланетные траектории относительно планет старта и назначения внутри их сфер действия являются гиперболическими, так как скорость отлета или сближения относительно планет значительно превосходит параболические скорости на границах сфер действия.

Вектор скорости отлета от Земли  $\vec{V}_{1\infty}$  определен при расчете гелиоцентрического участка траектории по формуле (2.10). Рассмотрим сначала положение скорости отлета  $\vec{V}_{1\infty}$  относительно инерциальной экваториальной геоцентрической системы координат. Имея в виду, что нам известны компоненты вектора  $\vec{V}_{1\infty}$  в геоцентрической эклиптической системе, наклоненной под углом  $\epsilon$  к плоскости экватора, найдем компоненты вектора в экваториальной системе по матричной формуле

$$[\vec{V}_{1\infty}]_{\text{ЭКВ}} = L \cdot [\vec{V}_{1\infty}]_{\text{ЭКЛ}}, \quad (2.15)$$

где  $L$  — матрица перехода от эклиптической к экваториальной системе координат

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & -\cos \epsilon \end{bmatrix}.$$

По компонентам вектора  $[\vec{V}_{1\infty}]_{\text{ЭКВ}} = [V_{\infty x}, V_{\infty y}, V_{\infty z}]^T$  определим его склонение  $\delta_{\infty}$  и прямое восхождение  $\alpha_{\infty}$  по очевидным из рис. 2.6 формулам

$$\sin \delta_{\infty} = \frac{V_{\infty z}}{V_{1\infty}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \delta_{\infty} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\infty} = \frac{V_{\infty y}}{V_{\infty x}}, \quad \cos \alpha_{\infty} = \frac{V_{\infty x}}{\sqrt{V_{\infty x}^2 + V_{\infty y}^2}}, \quad 0 \leq \alpha_{\infty} \leq 2\pi.$$

Определим элементы гиперболической геоцентрической траектории отлета в следующей последовательности.

1. Действительную полуось определим из константы интеграла энергии как

$$h = \frac{\mu_3}{a} = V_{1\infty}^2, \quad a = \frac{\mu_3}{V_{1\infty}^2}. \quad (2.16)$$



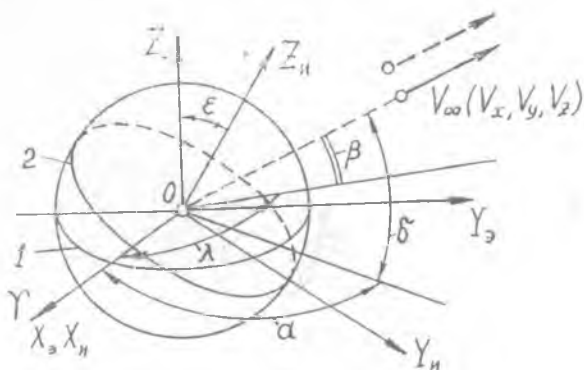


Рис. 2.6. Определение гиперболического избытка скорости отлета в экваториальной системе координат

2. Будем полагать, что переход с круговой опорной орбиты радиуса  $r_0$  производится компланарно импульсом в перигеице гиперболы отлета. Это обеспечит минимальные энергетические затраты отлета. Скорость в перигеице гиперболы  $V_{\pi_0}$  определим через гиперболический избыток скорости отлета  $V_{1\infty}$  с помощью интеграла энергии:

$$V_{\pi_0}^2 - \frac{2\mu_3}{r_0} = V_{1\infty}^2, \quad V_{\pi_0} = \sqrt{\frac{2\mu_3}{r_0} + V_{1\infty}^2}, \quad (2.17)$$

Фокальный параметр определим через константу интеграла площадей как

$$p = \frac{C^2}{\mu} = \frac{V_{\pi_0}^2 r_0^2}{\mu}. \quad (2.18)$$

Теперь вычисляем эксцентриситет  $e = p/r_0 - 1$ .

3. Наклонение гиперболической орбиты отлета при компланарном тангенциальном старте совпадает с наклоном опорной круговой орбиты и обычно известно. Заметим, что наклонение орбиты должно удовлетворять условию  $i \geq \delta_\infty$ . В противном случае нельзя провести плоскость через  $V_{1\infty}$  и центр планеты. При  $i > \delta_\infty$  существует две плоскости, которые проходят через вектор  $V_{1\infty}$  и центр Земли, отличающиеся между собой положением восходящего узла на  $180^\circ$ .

4. По известному наклонению из прямоугольного сферического треугольничка (рис. 2.7) определяем аргумент широты  $u_\infty$  вектора  $V_{1\infty}$ :

$$\frac{\sin \delta_\infty}{\sin i} = \frac{\sin u_\infty}{1}, \quad \sin u_\infty = \frac{\sin \delta_\infty}{\sin i}. \quad (2.19)$$

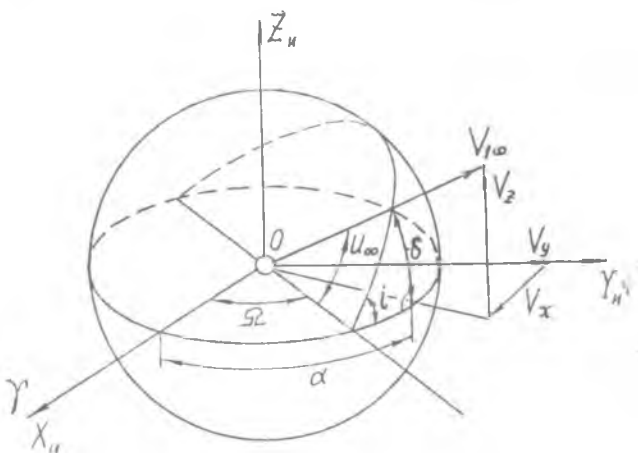


Рис. 2.7. Определение угла восходящего узла в сфере действия Земли

Долготу восходящего узла находим, проектируя гиперболический избыток скорости отлета  $V_{1\infty}$  на геоцентрические экваториальные оси координат:

$$V_{\infty x} = V_{1\infty} (\cos u_{\infty} \cos \Omega - \sin u_{\infty} \cos i \sin \Omega),$$

$$V_{\infty y} = V_{1\infty} (\cos u_{\infty} \sin \Omega + \sin u_{\infty} \cos i \cos \Omega),$$

откуда

$$\sin \Omega = V_{1\infty} \frac{V_{\infty y} \cos u_{\infty} - V_{\infty x} \sin u_{\infty} \cos i}{V_{\infty x}^2 + V_{\infty y}^2}, \quad (2.20)$$

$$\cos \Omega = V_{1\infty} \frac{V_{\infty x} \cos u_{\infty} + V_{\infty y} \sin u_{\infty} \cos i}{V_{\infty x}^2 + V_{\infty y}^2}, \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi.$$

5. Определим аргумент перигея

$$\omega = u_{\infty} - \vartheta_{\infty}, \quad \vartheta_{\infty} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \quad (2.21)$$

и аргумент широты конца активного участка при переходе с круговой опорной орбиты импульсом на гиперболическую орбиту отлета  $u_k = \omega$ . Принимаем, что старт происходит в перигее гиперболической орбиты. По этой же причине  $\tau = 0$ .

Найдем широту конца активного участка, которая привязывает точку старта к поверхности Земли. Из сферического треугольника (см. рис. 2.7) следует

$$\sin \varphi_k = \sin u_k \sin i = \sin \omega \sin i. \quad (2.22)$$

Наконец, найдем характеристическую скорость запуска с круговой опорной орбиты на гиперболическую орбиту отлета, а следовательно, на геоцентрическую орбиту межпланетного перелета по формуле

$$\Delta V_{\text{отл}} = V_{\text{отл}} - V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\mu_3}{r_0} + V_{1\infty}^2} - \sqrt{\frac{\mu_3}{r_0}}. \quad (2.23)$$

## 2.5. ПЛАНЕТОЦЕНТРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ ПЛАНЕТЫ НАЗНАЧЕНИЯ

Вектор относительной скорости подлета к планете  $\bar{V}_{2\infty}$  определен при расчете гелиоцентрической траектории перелета. Выбор положения вектора  $\bar{V}_{2\infty}$  относительно центра планеты назначения зависит от цели полета. Могут быть поставлены следующие задачи:

1. Прямая посадка на планету без перехода на орбиту спутника. В этом случае КА должен войти в коридор входа, что обеспечивает захват атмосферой КА и посадку.

2. Облет планеты на заданном расстоянии от поверхности по траекториям облетного или долетного типа (см. п. 1.3), например, для фотографирования поверхности или для ретрансляции сигналов на Землю со спускаемого на поверхность планеты аппарата.

3. Переход на орбиту спутника планеты или маневр изменения орбиты около планеты.

4. Использование гравитационного поля планеты для совершения пертурбационного маневра.

При изучении планетоцентрического движения вводится понятие *картинной плоскости*, которая проведена через центр планеты перпендикулярно вектору гиперболического избытка скорости  $\bar{V}_{2\infty}$  или асимптоте гиперболической орбиты.

Движение КА удобно рассматривать в планетоцентрической системе координат  $O\xi\eta\zeta$  (рис. 2.8,а). Ось  $O\xi$  направлена параллельно вектору  $\bar{V}_{2\infty}$ , т. е. перпендикулярно картинной плоскости, оси  $O\xi$  и  $O\eta$  лежат в картинной плоскости и определяются единичными векторами

$$\bar{\eta}^0 = \frac{\bar{r}_c \times \bar{V}_{2\infty}}{|\bar{r}_c \times \bar{V}_{2\infty}|}, \quad \bar{\xi}^0 = \frac{\bar{\eta}^0 \times \bar{V}_{2\infty}}{|\bar{\eta}^0 \times \bar{V}_{2\infty}|}, \quad (2.24)$$

где  $\bar{r}_c$  — радиус-вектор планеты в момент прилета.

Координаты  $\xi$  и  $\eta$  характеризуют отклонения траектории от попадающей в центр планеты. Расстояние в плоскости  $O\xi\eta$  от точки пересечения асимптоты гиперболы (вектора  $\bar{V}_{2\infty}$ ) с картинной плоскостью до начала координат является прицельной дальностью.

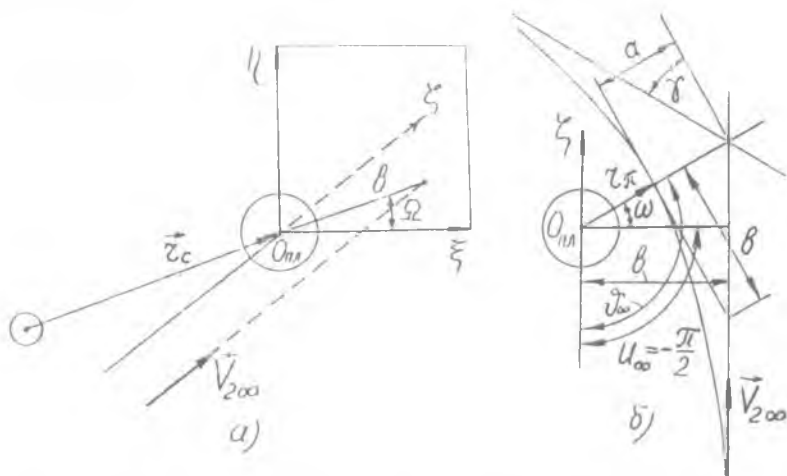


Рис. 2.8. Планетоцентрическое движение вблизи планеты назначения:  $a$  — картинная плоскость;  $b$  — плоскость планетоцентрической орбиты

Определим параметры планетоцентрической траектории (рис. 2.8,б). Положение плоскости орбиты в пространстве относительно системы координат  $O\xi\eta\zeta$  определится из очевидных выражений

$$i = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \Omega = \frac{\eta}{b}, \quad \cos \Omega = \frac{\xi}{b}, \quad b = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Аргумент широты радиуса-вектора на бесконечности

$$u_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Действительная полуось орбиты и эксцентриситет соответственно

$$a = \frac{\mu_{M1}}{V_{2\infty}^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b}, \quad e = \frac{1}{\sin \gamma}.$$

Истинная аномалия на бесконечности

$$\cos \vartheta_\infty = -\frac{1}{e}, \quad -\frac{\pi}{2} \geq \vartheta_\infty \geq -\pi.$$

Долгота перицентра орбиты относительно картинной плоскости

$$\omega = u_\infty - \vartheta_\infty.$$

В качестве примера выбора точки прицеливания в картинной плоскости рассмотрим задачу фотографирования поверхности планеты. С целью увеличения продолжительности фото-

графирования с пролетной траектории необходимо, чтобы КА пролетал над освещенной частью планеты в течение максимально возможного промежутка времени. Это условие выполняется в том случае, если плоскость орбиты перпендикулярна терминатору планеты, т. е. плоскость орбиты совпадает с плоскостью  $O\xi\zeta$ . При заданном минимальном расстоянии пролета в перигентре  $r_\pi$  определяется положение аппарата в картинной плоскости на бесконечном удалении от планеты:

$$\xi = b = r_\pi \sqrt{1 + \frac{2a}{r_\pi}}, \quad \eta = 0. \quad (2.25)$$

Условие прохождения вектора  $V_{2\infty}$  через заданную точку в картинной плоскости (см. рис. 2.8,а) обеспечивается коррекцией гелиоцентрической траектории.

В качестве второго примера рассмотрим определение характеристической скорости торможения при переходе спутника планеты на круговую орбиту с заданным радиусом  $r_0 = r_\pi$ . Необходимая прицельная дальность определяется по формуле (2.25). Потребный импульс скорости при переходе с гиперболической орбиты на круговую в районе перигентра пролета орбиты определяется по формуле

$$\Delta V_{\text{торм}} = V_\pi - V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{пл}}}{r_\pi} + V_{2\infty}^2} - \sqrt{\frac{\mu_{\text{пл}}}{r_\pi}}. \quad (2.26)$$

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1974. — 800 с.
2. Егоров В. А. О некоторых задачах динамики полета к Луне // УФН. 1957. Т. 63. Вып. 1. С. 73—117.
3. Кубасов В. Н., Дашков А. А. Межпланетные полеты. М.: Машиностроение, 1979. — 272 с.
4. Сихарулдзе Ю. Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1982. — 352 с.
5. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. М.: Наука, ГРФМЛ, 1976. — 862 с.
6. Тарасов Е. В. Космонавтика. М.: Машиностроение, 1977. — 216 с.
7. Белокозов В. М. Динамика полета космических аппаратов. Куйбышев: КуАИ, 1985. — 52 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Траектории полетов к Луне . . . . .	3
1.1. Движение летательного аппарата в системе Земля—Луна . . . . .	3
1.2. Приближенная методика расчета траекторий полетов к Луне . . . . .	7
1.3. Классификация траекторий сближения с Луной . . . . .	11
2. Приближенная методика расчета межпланетных траекторий . . . . .	15
2.1. Метод кусочно-конической аппроксимации . . . . .	15
2.2. Гелиоцентрический участок траектории . . . . .	16
2.3. Определение дат старта и прилета . . . . .	20
2.4. Геоцентрическая траектория отлета . . . . .	24
2.5. Планетоцентрическое движение в сфере дей- ствия планеты назначения . . . . .	27
Библиографический список . . . . .	29

*Виталий Михайлович Белоконов*

ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТОВ К ЛУНЕ  
И МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Редактор Е. Д. Антонова  
Техн. редактор Н. М. Каленюк  
Корректор Н. Д. Чайникова

Свод. тем. пл. № 99.

Сдано в набор 21.08.89 г. Подписано в печать 28.09.89 г.

ЕО 00300. Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная.

Гарнитура литературная. Печать высокая.

Усл. п. л. 1,9. Уч.-изд. л. 1,6. Т. 500 экз. Заказ 726.

Цена 15 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С. П. Королёва.  
443086. Куйбышев, Московское шоссе, 34.

---

Тип. ЭОЗ Куйбышевского авиационного института.  
443001, Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.