МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. РОМАНЕНКО

ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 23.04.01 Технология транспортных процессов

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

ISBN 978-5-7883-1728-1

УДК338(075)
ББК 65.37я7
Р 691

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. М. И. Г е р а с ь к и н,
д-р экон. наук, проф. В. А. Х а й т б а е в

Романенко, Владимир Алексеевич

Р691 Транспортные системы и процессы в условиях неопределенности: учебное пособие / *В.А. Романенко;* Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Самарский университет. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 1 CD-ROM (0.73 Мб). – Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.

ISBN 978-5-7883-1728-1

Рассмотрены методы анализа и оптимизации систем и процессов воздушного транспорта с учетом элиторной (стохастической) и эпистемической («субъективной») неопределенности.

Материал пособия разбит на две части, первая из которых содержит специальные разделы теории массового обслуживания, исследующей системы в условиях элиторной неопределенности. Вторая часть включает основы теории нечетких множеств, на базе которой изучаются системы в условиях эпистемической неопределенности.

Предназначена для студентов магистратуры, обучающихся по направлению подготовки 23.04.01 Технология транспортных процессов.

Подготовлено на кафедре организации и управления перевозками на транспорте Самарского университета.

УДК 338(075)
ББК 65.37я7

Минимальные системные требования:
PC, процессор Pentium, 160 МГц;
Microsoft Windows XP и выше; мышь;
дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор И.И. Спиридонова
Компьютерная верстка И.И. Спиридоновой

Подписано для тиражирования 25.04.2022.
Объем издания 0.73 Мб.
Количество носителей – 1 диск.
Тираж – 10 дисков.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА».
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Транспортная система – совокупность взаимодействующих между собой и с внешней средой элементов, предназначенная для осуществления транспортных процессов. ***Транспортный процесс*** – закономерная, последовательная, непрерывная смена следующих друг за другом состояний транспортной системы. Транспортные системы функционируют в условиях неопределенности, так как на них влияет множество стохастических (вероятностных, неопределенных) факторов. Выбор метода исследования системы должен учитывать тип неопределенности.

Основные ***типы неопределенности***:

– ***элиторная*** неопределённость. Обусловлена изменчивостью явлений и процессов; характеризуется случайностью, которая может быть представлена частотными функциями распределения. Другие названия элиторной неопределенности: изменчивость, стохастическая неопределенность, «объективная» неопределенность. Для оперирования с элиторными неопределённостями, когда имеется возможность действовать с повторными выборками, предназначена теория вероятностей;

– ***эпистемическая*** неопределённость. Обусловлена недостатком знаний о системе; характеризуется неопределенностью самих вероятностных оценок, невозможностью использовать повторные выборки, необходимостью применения экспертных оценок. Другие названия: «субъективная» неопределенность, неопределенность знаний. Для оперирования с эпистемическими неопределённостями, наряду с теорией вероятностей, используются интервальный анализ, теория нечетких множеств, теория возможностей и др.

Материал пособия разбит на две части. Первая часть содержит специальные разделы теории массового обслуживания (ТМО) как раздела теории вероятностей, исследующего системы в условиях элиторной неопределенности. Вторая часть включает начала теории нечетких множеств, на основе которой изучаются системы в условиях эпистемической неопределенности. Рассмотрены основы нечетких вычислений и нечеткой оптимизации. Приведены примеры применения методов ТМО и теории нечетких множеств для решения задач авиатранспортной отрасли.

1 СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

1.1 Необходимые положения теории вероятностей

Начальные моменты распределения случайной величины (СВ) – математические ожидания некоторых простейших функций от СВ [2].

Для непрерывной СВ X начальный момент s-го порядка:

$$\alpha_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^S f(x) dx .$$

Первый начальный момент СВ (как дискретной, так и непрерывной) представляет собой ее математическое ожидание:

$$\alpha_1[X] = M[X].$$

Так, для непрерывной СВ X:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \qquad (1.1.1)$$

Можно показать, что ***начальным моментом s-го порядка*** СВ X (как дискретной, так и непрерывной) называется математическое ожидание s-й степени этой СВ, т.е.

$$\alpha_S[X] = M[X^S]. \qquad (1.1.2)$$

Дисперсия СВ X (как дискретной, так и непрерывной) выражается через ее второй начальный момент как

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 . \qquad (1.1.3)$$

Если дискретная СВ X распределена по ***закону Пуассона***, вероятность принятия этой СВ значения x может быть определена по формуле

$$P\{X = x\} = \frac{a^x}{x\,!} e^{-x}, \qquad x = 0,1,\ldots ,$$

где a – параметр распределения, то, согласно свойству закона Пуассона, справедливо равенство

$$D[X] = M[X] = a ,$$

и, как следует из данного равенства и выражения (1.1.3), второй начальный момент СВ, распределенной по закону Пуассона, определяется как

$$\alpha_2[X] = D[X] + (M[X])^2 = a + a^2 . \qquad (1.1.4)$$

Двумерная СВ (X, Y) (система СВ, случайный вектор) – совокупность двух СВ (или проекций случайного вектора) X, Y, рассматриваемых совместно.

Функция распределения $F(x,y)$ двумерной СВ (X, Y) – вероятность совместного выполнения двух неравенств – $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x,y) = P(\{X < x\},\{Y < y\}).$$

В случае одномерной СВ X данная формула преобразуется к хорошо известному варианту: $F(x) = P\{X < x\}$.

Функцию $F(x,y)$ следует трактовать как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант (область) с вершиной в точке (x,y), лежащий ниже и правее этой точки (см. рис. 1).

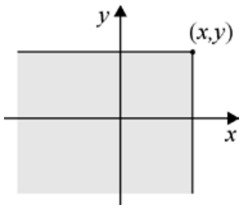


Рис. 1

Функции распределения составляющих (или проекций случайного вектора) X и Y:

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P(\{X < x\},\{Y < \infty\}),$$
$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P(\{X < \infty\},\{Y < y\}).$$

Закон распределения дискретной двумерной СВ – перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел (x_i, y_j), и их вероятностей $P(x_i, y_j)$, $i = 1,2,,...,n;\ j = 1,2,...,m$.

Условный закон распределения входящей в систему СВ – закон распределения этой СВ, вычисленный при условии, что другая СВ приняла определенное значение.

Условная вероятность того, что составляющая X дискретной двумерной СВ (X, Y) принимает значение x_i при условии, что $Y = y_j$:

$$P(x_i \mid y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)},$$

где $P(y_j)$ – вероятность того, что составляющая Y дискретной двумерной СВ (X, Y) принимает значение y_j.

Совместная плотность распределения $f(x,y)$ непрерывной двумерной СВ (X, Y):

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y},$$

или

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot \varphi_X(x \mid y) = f_Y(y) \cdot \varphi_Y(y \mid x),$$

где $\varphi_X(x \mid y)$ – ***условная плотность распределения*** составляющей X при заданном значении $Y = y$ (дает распределение X при условии, что составляющая Y приняла значение $Y = y$);

$\varphi_Y(y \mid x)$ – условная плотность распределения составляющей Y при заданном значении $X = x$;

$f_X(x)$, $f_Y(y)$ – («безусловные») плотности распределения составляющих X и Y, соответственно (дают распределение одной составляющей независимо от того, какие из возможных значений приняла другая составляющая).

Математическое ожидание двумерной СВ (случайного вектора) (X, Y) – вектор из математических ожиданий составляющих: $(M[X], M[Y])$.

Для дискретной двумерной СВ (X, Y):

$$M[X] = \sum_i \sum_j x_i \cdot P(x_i, y_j), \quad M[Y] = \sum_i \sum_j y_j \cdot P(x_i, y_j).$$

Для непрерывной двумерной СВ (X, Y) (в одномерном случае, очевидно, преобразуется в (1.1.1)):

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

$$M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy.$$

Условное математическое ожидание составляющей двумерной СВ – математическое ожидание рассматриваемой составляющей при условии, что другая составляющая приняла заданное значение (или попала в заданный интервал).

Для дискретной составляющей *Y* при $X=x$:

$$M[Y\,|\,x]=\sum_j y_j\cdot P(y_j\,|\,x).$$

Для дискретной составляющей *X* при $Y=y$:

$$M[X\,|\,y]=\sum_i x_i\cdot P(x_i\,|\,y).$$

Для непрерывных СВ:

$$M[Y\,|\,x]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot\varphi_Y(y\,|\,x)dy,\; M[X\,|\,y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot\varphi_X(x\,|\,y)dx.$$

Математическое ожидание (безусловное, полное) и условное математическое ожидание связаны следующими соотношениями.

Если составляющая *X* дискретная, то полное математическое ожидание составляющей *Y*:

$$M[Y]=\sum_i M[Y\,|\,x_i]\cdot P(x_i).$$

Если составляющая *X* непрерывная, то полное математическое ожидание составляющей *Y*:

$$M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} M[Y\,|\,x]\cdot f_X(x)dx. \qquad (1.1.5)$$

Аналогично определяется полное математическое ожидание для составляющей *X*.

Безусловный начальный момент s-го порядка для одной из составляющих (например, *Y*) определяется через ее условный начальный момент *s*-го порядка при заданном значении другой составляющей:

$$\alpha_S[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha_s[Y\,|\,x]\cdot f_X(x)dx. \qquad (1.1.6)$$

При $s=1$ формула (1.1.6) совпадает с (1.1.5).

Математические ожидания суммы и произведения независимых СВ X и Y:

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y], \tag{1.1.7}$$

$$M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]. \tag{1.1.8}$$

1.2 Одноканальная СМО с ожиданием и произвольным распределением длительности обслуживания

Рассматривается одноканальная ($n=1$) СМО с ожиданием в неограниченной очереди, в которую поступает пуассоновский поток требований интенсивностью λ. В отличие от Марковских СМО, в которых длительность обслуживания $t_{об}$ одного требования считается показательно распределенной СВ, в настоящем разделе распределение этой СВ может быть подчинено любому другому закону (в том числе и показательному), и в этом смысле это распределение – произвольное. Предполагается, что задано не только математическое ожидание $\bar{t}_{об}=M[t_{об}]$ СВ $t_{об}$, но и ее среднеквадратическое отклонение σ.

Получим формулы для среднего числа заявок в СМО K_C, среднего времени пребывания в СМО $\bar{t}_{преб}=M\left[t_{преб}\right]$ и среднего времени ожидания начала обслуживания $\bar{\tau}=M[\tau]$. Формулы для K_C будут справедливы при любой дисциплине очереди, для $\bar{t}_{преб}$ и $\bar{\tau}$ – только в случае дисциплины «первым пришел – первым обслужился».

Для решения поставленной задачи рассматривается подход, не предполагающий использование графа состояний и системы уравнений Колмогорова.

Рассматривается ***установившийся режим*** работы СМО, т.е. такой режим, в котором СМО справляется с обслуживанием, и очередь неограниченно не возрастает. В этом случае:

$$\rho=\frac{\lambda}{\nu}<1,$$

где ρ – коэффициент загрузки канала, $\nu=1/\bar{t}_{об}$ – интенсивность обслуживания.

Для моментов ***выхода*** требований из СМО вводятся обозначения [1]: Q – число требований, которое остается в СМО, после ухода некоторого обслуженного требования; *Q’* – число требований, которое остается в СМО, после ухода следующего обслуженного требования; *Z* – число требований, поступающих в СМО за $t_{об}$ этого следующего требования.

Установим связь между СВ *Q* и *Q’*. Рассмотрим на конкретных примерах две возможные ситуации, которые проиллюстрированы на рис. 2.

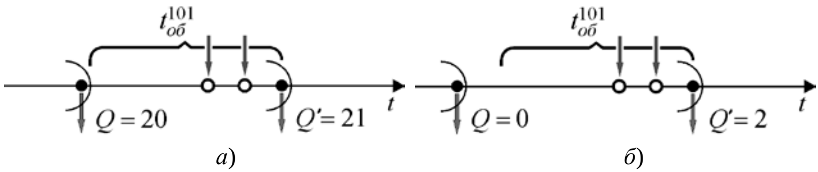


Рис. 2

Пример 1. Пусть в СМО, после ухода некоторого требования (скажем, 100-го, из числа требований, побывавших в СМО), осталось 20 требований ($Q = 20$), одно из которых начинает обслуживаться, а остальные ждут в очереди. Пусть за время обслуживания очередного (в данном случае, 101-го) требования $t_{об}^{101}$ в СМО поступило 2 требования ($Z = 2$). Легко подсчитать, что в этом случае сразу после окончания обслуживания и выхода из СМО этого (101-го) требования в ней останется $Q' = Q - 1 + Z = 20 - 1 + 2 = 21$ требование (рис. 2, а).

Пример 2. Пусть в СМО после ухода некоторого (пусть также 100-го) требования не остается других требований ($Q = 0$). В этом случае вход следующего (101-го) требования означает для СМО окончание периода простоя. Если за время его обслуживания в СМО поступает также 2 требования ($Z = 2$), то число требований, остающихся в СМО после выхода 101-го требования, определяется как $Q' = Z = 2$ (рис. 2, б).

Итак, СВ *Q* и *Q’* связаны соотношением:

$$Q' = \begin{cases} Q - 1 + Z & при\ Q > 0, \\ Z & при\ Q = 0. \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Чтобы записать (1.2.1) более компактно, используется функция Хевисайда:

$$U(x)=\begin{cases}1 & при\ \ x>0,\\ 0 & при\ \ x=0.\end{cases} \qquad (1.2.2)$$

В этом случае (1.2.1) запишется как

$$Q'=Q+Z-U(Q). \qquad (1.2.3)$$

(Понятно, что если $Q=0$, то $U(Q)=0$, и значит $Q'=0+Z-0=Z$. Если же $Q>0$, то $U(Q)=1$, и следовательно $Q'=Q+Z-1$.)

1.3 Начальные моменты случайных величин в одноканальной СМО с ожиданием и произвольным распределением времени обслуживания

Далее потребуются два первых начальных момента СВ $t_{об}$ и СВ *Z*. Напомним, $t_{об}$ – случайное время обслуживания требования, *Z* – число требований, поступивших в СМО за время обслуживания одного требования $t_{об}$. Первый начальный момент СВ $t_{об}$ известен: $\alpha_1[t_{об}]=M[t_{об}]=\bar{t}_{об}$. Найдем остальные из указанных начальных моментов.

Рассмотрим систему зависимых СВ $(t_{об},Z)$, первая из которых непрерывна, вторая – дискретна. Полное математическое ожидание $M[Z]$ дискретной составляющей *Z* определяется через условное математическое ожидание $M[Z\,|\,t]$ этой величины при условии, что непрерывная составляющая $t_{об}$ приняла значение $t_{об}=t$. Таким образом, используется формула (1.1.5), принимающая вид:

$$M[Z]=\int_{-\infty}^{\infty}M[Z\,|\,t]\cdot f_{t_{об}}(t)dt,$$

где $f_{t_{об}}(t)$ – «безусловная» плотность распределения составляющей $t_{об}$. Так как при любых обстоятельствах $t_{об}\geq 0$, то

$$M[Z]=\int_{0}^{\infty}M[Z\,|\,t]\cdot f_{t_{об}}(t)dt. \qquad (1.3.1)$$

Если $t_{об}=t$, а входящий поток пуассоновский, то число требований, поступивших в СМО за время обслуживания рассматриваемого требования (т.е. за время *t*), будет иметь распределение

Пуассона с параметром $a = \lambda t$. При этом их среднее значение составит λt. Следовательно

$$M[Z \mid t] = \lambda t \,. \qquad (1.3.2)$$

Подставляя (1.3.2) в (1.3.1) имеем

$$M[Z] = \int_0^{\infty} \lambda t \cdot f_{t_{об}}(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t \cdot f_{t_{об}}(t) dt \,.$$

Но, согласно определению математического ожидания непрерывной СВ (1.1.1),

$$\int_0^{\infty} t \cdot f_{t_{об}}(t) dt = M[t_{об}] = \bar{t}_{об} \,,$$

поэтому получаем:

$$M[Z] = \lambda \bar{t}_{об} \,. \qquad (1.3.3)$$

Таким образом найден первый начальный момент СВ Z.

Второй начальный момент $\alpha_2[Z]$ этой СВ определяется следующим образом. С учетом (1.1.2) имеем

$$\alpha_2[Z] = M[Z^2]. \qquad (1.3.4)$$

С другой стороны, согласно (1.1.6):

$$\alpha_2[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2[Z \mid t] \cdot f_{t_{об}}(t) dt \,. \qquad (1.3.5)$$

Кроме того, как следует из свойства распределения Пуассона (1.1.4),

$$\alpha_2[Z \mid t] = \lambda t + (\lambda t)^2 \,. \qquad (1.3.6)$$

Подставляя последовательно (1.3.6) в (1.3.5) и далее в (1.3.4) и учитывая, что:

1) как отмечено выше,

$$t_{об} \geq 0 \,,$$

2) согласно (1.1.1) для непрерывной СВ

$$\int_0^{\infty} t \cdot f_{t_{об}}(t) dt = M[t_{об}] = \bar{t}_{об} \,,$$

3) в соответствии с определением начального момента *s*-го порядка непрерывной СВ

$$\int_0^\infty t^2 \cdot f_{t_{об}}(t)dt = \alpha_2[t_{об}],$$

получаем еще одну из искомых величин – второй начальный момент СВ Z:

$$\alpha_2[Z] = M[Z^2] = \int_0^\infty \alpha_2[Z \mid t] \cdot f_{t_{об}}(t)dt = \int_0^\infty \left(\lambda t + (\lambda t)^2\right) f_{t_{об}}(t)dt =$$
$$= \lambda \int_0^\infty t \cdot f_{t_{об}}(t)dt + \lambda^2 \int_0^\infty t^2 \cdot f_{t_{об}}(t)dt = \lambda \bar{t}_{об} + \lambda^2 \cdot \alpha_2[t_{об}], \quad (1.3.7)$$

где $\alpha_2[t_{об}]$ – второй начальный момент длительности обслуживания, который в соответствии с (1.1.3) выражается через ее дисперсию как

$$\alpha_2[t_{об}] = D[t_{об}] + (M[t_{об}])^2. \quad (1.3.8)$$

Обозначим $\sqrt{D[t_{об}]} = \sigma$ и перепишем (1.3.8) в виде

$$\alpha_2[t_{об}] = \sigma^2 + \bar{t}_{об}^2. \quad (1.3.9)$$

Итак, получены выражения для начальных моментов $\alpha_1[Z]$, $\alpha_2[Z]$, $\alpha_2[t_{об}]$.

1.4 Среднее число требований, остающихся в системе после ухода одного из них

Получим выражение для определения среднего числа $M[Q]$ требований, остающихся в СМО после ухода одного из требований. Воспользуемся с этой целью соотношением (1.2.3).

Учитывая свойство математического ожидания суммы независимых СВ (1.1.7), запишем выражение для математических ожиданий обеих частей (1.2.3):

$$M[Q'] = M[Q] + M[Z] - M[U(Q)].$$

Здесь принят во внимание очевидный факт, что СВ Q и Z, а значит $U(Q)$ и Z, независимы, поскольку число требований, бывших в СМО до прихода некоторого требования, не зависит от числа требований, пришедших за время обслуживания этого требования.

Перенося слагаемые из одной части в другую, получим:

$$M[Q'] - M[Q] + M[U(Q)] = M[Z].$$

Учитывая, что в стационарном режиме вероятностные свойства СВ Q и Q' одинаковы, и значит

$$M[Q'] = M[Q],\ M\left[(Q')^2\right] = M\left[Q^2\right], \tag{1.4.1}$$

имеем

$$M[U(Q)] = M[Z].$$

С учетом (1.3.3) определим $M[U(Q)]$ как

$$M[U(Q)] = M[Z] = \lambda \bar{t}_{об} = \frac{\lambda}{\nu} = \rho\,. \tag{1.4.2}$$

Вернемся к выражению (1.3.3). Используя простое алгебраическое правило

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc\,,$$

возведем обе части (1.3.3) в квадрат:

$$(Q')^2 = Q^2 + Z^2 + (U(Q))^2 + 2QZ - 2Q\cdot U(Q) - 2Z\cdot U(Q).$$

Теперь, принимая во внимание взаимную независимость СВ, входящих в полученное выражение, найдем математические ожидания его левой и правой частей:

$$\begin{aligned} M\left[(Q')^2\right] &= M\left[Q^2\right] + M\left[Z^2\right] + M\left[(U(Q))^2\right] + \\ &+ 2M[QZ] - 2M[Q\cdot U(Q)] - 2M[Z\cdot U(Q)]. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Воспользуемся наличием в (1.4.3) функции Хевисайда с тем, чтобы упростить (1.4.3). Учтем, что $(U(Q))^2 = U(Q)$ и $QU(Q) = Q$, получим:

$$\begin{aligned} M\left[(Q')^2\right] &= M\left[Q^2\right] + M\left[Z^2\right] + M[U(Q)] + \\ &+ 2M[QZ] - 2M[Q] - 2M[Z\cdot U(Q)]. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Перенеся $M\left[Q^2\right]$ в левую часть (1.4.4), получаем:

$$\begin{aligned} M\left[(Q')^2\right] - M\left[Q^2\right] &= M\left[Z^2\right] + M[U(Q)] + \\ &+ 2M[QZ] - 2M[Q] - 2M[Z\cdot U(Q)]. \end{aligned}$$

С учетом (1.4.1) имеем

$$0 = M\left[Z^2\right] + M[U(Q)] + 2M[QZ] - 2M[Q] - 2M[Z\cdot U(Q)]. \tag{1.4.5}$$

Так как СВ Q и Z, а также $U(Q)$ и Z независимы (что отмечалось выше), то, используя (1.1.8) и (1.4.2), получаем выражения для слагаемых (1.4.5), включающих произведения этих СВ:

$$M[QZ] = M[Q] \cdot M[Z] = M[Q] \lambda \bar{t}_{об}, \qquad (1.4.6)$$

$$M[Z \cdot U(Q)] = M[Z] \cdot M[U(Q)] = (\lambda \bar{t}_{об})^2. \qquad (1.4.7)$$

Подставляя (1.3.7), (1.4.2), (1.4.6) и (1.4.7) в (1.4.5), получаем

$$0 = \overbrace{\left(\lambda \bar{t}_{об} + \lambda^2 \cdot \alpha_2[t_{об}]\right)}^{M[Z^2]} + \overbrace{\lambda \bar{t}_{об}}^{M[U(Q)]} + \overbrace{2M[Q] \cdot \lambda \bar{t}_{об}}^{2M[QZ]} - 2M[Q] - \overbrace{2(\lambda \bar{t}_{об})^2}^{2M[Z \cdot U(Q)]}.$$

Откуда получаем выражение для искомого среднего Q

$$M[Q] = \frac{\lambda\left(2\bar{t}_{об} + \lambda \alpha_2[t_{об}] - 2\lambda \bar{t}_{об}^2\right)}{2(1 - \lambda \bar{t}_{об})}. \qquad (1.4.8)$$

Учитывая, что, согласно (1.4.2), $\lambda \bar{t}_{об} = \rho$, преобразуем (1.4.8):

$$M[Q] = \frac{2\lambda \bar{t}_{об} + \lambda^2 \alpha_2[t_{об}] - 2\lambda^2 \bar{t}_{об}^2}{2(1 - \lambda \bar{t}_{об})} = \frac{2\rho + \lambda^2 \alpha_2[t_{об}] - 2\rho^2}{2(1-\rho)} =$$

$$= \frac{2\rho(1-\rho)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 \alpha_2[t_{об}]}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\lambda^2 \alpha_2[t_{об}]}{2(1-\rho)}.$$

Поскольку, согласно (1.3.9) $\alpha_2[t_{об}] = \sigma^2 + \bar{t}_{об}^2$, окончательно получаем расчетное выражение для среднего Q:

$$M[Q] = \rho + \lambda^2 \frac{\sigma^2 + \bar{t}_{об}^2}{2(1-\rho)}. \qquad (1.4.9)$$

1.5 Среднее число требований в одноканальной СМО с ожиданием и произвольным распределением времени обслуживания

Одной из целей был вывод среднего числа требований в СМО к моменту прихода очередного требования K_C, а получено среднее число требований к моменту его ухода $M[Q]$. Проанализируем, как связаны эти величины.

Рассмотрим вероятность p_i нахождения в СМО i требований и вероятность $P\{Q = i\}$ того, что в момент выхода из СМО некоторого обслуженного требования, число требований, оставшихся в ней, равно i.

Вероятность p_i представляет собой долю требований, застающих при своем поступлении i требований в СМО, вероятность

$P\{Q=i\}$ – долю требований, которые при уходе из СМО оставляют в ней i требований.

Рассматривая переходы СМО из одного состояния в другое, вероятности можно интерпретировать как:

p_i – доля (вероятность) переходов СМО из состояния с меньшим порядковым номером в состояние с большим порядковым номером, т.е. переходов типа $i \to i+1$;

$P\{Q=i\}$ – доля (вероятность) переходов СМО типа $i+1 \to i$.

В рассматриваемой СМО в случае пуассоновского потока, когда перескоки через состояния недопустимы, и стационарного режима доля скачков $i \to i+1$ равна доле скачков $i+1 \to i$, т.е.

$$P\{Q=i\} \equiv p_i,$$

и, значит, среднее число требований в СМО определяется как

$$K_C = M[Q].$$

Следовательно, искомое среднее число требований в СМО:

$$K_C = \rho + \lambda^2 \frac{\sigma^2 + \bar{t}_{об}^2}{2(1-\rho)}.$$

1.6 Среднее время ожидания обслуживания и среднее время пребывания требования в одноканальной СМО с ожиданием и произвольным распределением времени обслуживания

Пусть некоторое требование находилось в системе время t. За это время в СМО в среднем поступило λt требований. Так как среднее значение t по определению есть $\bar{t}_{преб}$, то среднее число требований, поступивших за время пребывания требования в СМО, равно $\lambda \bar{t}_{преб}$.

С другой стороны, предположим, что соблюдаются следующие условия:

а) режим установившийся,

б) поток пуассоновский,

в) дисциплина очереди «первым пришел – первым обслужился».

В этом случае среднее число требований, поступающих за время пребывания некоторого требования в СМО, равно среднему числу требований $M[Q]$, остающихся после ухода данного требования (иначе параметры очереди менялись бы и, следовательно, режим не был бы установившимся). Поэтому, если действуют перечисленные условия, то справедлива следующая формула – одна из так называемых ***формул Литтла***:

$$M[Q] = \lambda \bar{t}_{преб}.$$

С помощью этой формулы и (1.4.9) получаем искомые средние значения времени $\bar{t}_{преб}$ пребывания требования в СМО и времени $\bar{\tau}$ его ожидания в очереди:

$$\bar{t}_{преб} = \frac{M[Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} + \lambda^2 \frac{\sigma^2 + \bar{t}_{об}^2}{2(1-\rho)\lambda} = \bar{t}_{об} + \lambda \frac{\sigma^2 + \bar{t}_{об}^2}{2(1-\rho)}, \qquad (1.6.1)$$

откуда

$$\bar{\tau} = \bar{t}_{преб} - \bar{t}_{об} = \lambda \frac{\sigma^2 + \bar{t}_{об}^2}{2(1-\rho)}. \qquad (1.6.2)$$

Итак, расчетные формулы для всех характеристик рассматриваемой СМО, заявленных в п. 1.2 в качестве искомых, получены.

1.7 Анализ влияния дисперсии длительности облуживания на среднюю длительность ожидания в одноканальной СМО с ожиданием и произвольным распределением времени обслуживания

Проанализируем, как влияет отличие от показательного закона распределения времени обслуживания требования на время его пребывания в очереди.

В случае ***экспоненциального*** распределения длительности обслуживания $\sigma^2 = \bar{t}_{об}^2$, поскольку величины математическое ожидания и среднеквадратического отклонения показательно распределенной СВ совпадают. Поэтому (1.6.2) преобразуется к виду

$$\bar{\tau} = \lambda \frac{\bar{t}_{об}^2}{1-\rho}. \qquad (1.7.1)$$

Сравним (1.7.1) с формулой, полученной на базе стационарного решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для

СМО с ожиданием в неограниченной очереди и показательным временем обслуживания.

Напомним, среднее время ожидания в очереди в *n*-канальной СМО указанного типа рассчитывается как:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi}{n\nu - \lambda}, \tag{1.7.2}$$

где π – вероятность занятости всех обслуживающих аппаратов:

$$\pi = \frac{\rho^n p_0}{(n-1)!\,(n-\rho)}, \; \rho = \lambda \bar{t}_{об}, \tag{1.7.3}$$

где p_0 – вероятность отсутствия требований в СМО:

$$p_0 = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{n}{n-\rho}\right]}. \tag{1.7.4}$$

Для одноканальной ($n = 1$) СМО с ожиданием и показательным временем обслуживания из (1.7.4) получаем вероятность простоя (СМО простаивает, когда не занята):

$$p_0 = 1 - \rho.$$

Вероятность занятости обслуживающего аппарата ($n = 1$) определяется из (1.7.3):

$$\pi = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)} = \rho.$$

Подставляя π в (1.7.2) получаем для $n = 1$ получаем

$$\bar{\tau} = \frac{\rho}{\nu - \lambda} = \frac{\lambda \bar{t}_{об}}{\frac{1}{\bar{t}_{об}} - \lambda} = \frac{\lambda \bar{t}_{об}^2}{1 - \lambda \bar{t}_{об}} = \lambda \frac{\bar{t}_{об}^2}{1-\rho}.$$

Полученная формула вполне ожидаемо совпадает с (1.7.1).

В случае ***постоянной*** длительности обслуживания $\sigma^2 = 0$, так что

$$\bar{\tau} = \lambda \frac{\bar{t}_{об}^2}{2(1-\rho)}. \tag{1.7.5}$$

Сравнение формул (1.7.1) и (1.7.5) показывает, что при одинаковых коэффициентах загрузки ρ средняя длительность ожидания $\bar{\tau}$ уменьшается для случая постоянной длительности обслуживания по сравнению с экспоненциальной в 2 раза. Таким образом, случай показательно распределенного времени обслуживания может рассматриваться в качестве наиболее «жесткого» режима работы СМО. СМО, справляющаяся с обслуживанием потока требований при показательно распределенной продолжительности обслуживания, гарантированно сможет обслужить поток требований той же интенсивности при любом другом (произвольном) распределении времени обслуживания.

1.8 Многоканальная СМО с ожиданием при произвольном распределении длительности обслуживания

Рассматривается n-канальная СМО с ожиданием в неограниченной очереди, в которую поступает пуассоновский поток требований интенсивностью λ. Длительность обслуживания $t_{об}$ одного требования СВ, распределена произвольно с математическим ожиданием $\bar{t}_{об}$ и дисперсией σ^2. Необходимо определить:

– среднее время ожидания требованием начала обслуживания $\bar{\tau}$;

– среднее время пребывания требования в СМО $\bar{t}_{преб}$;

– среднее число требований в СМО K_C;

– среднюю длину очереди $K_{ож}$.

Рассматривается расчетный алгоритм. Расчетные формулы даются без вывода [3].

1. По известным из ТМО формулам (1.7.2), (1.7.3), (1.7.4) для СМО с ожиданием и показательным временем обслуживания определяется среднее время ожидания $\bar{\tau}'$ как функция числа каналов обслуживания n, интенсивности входящего потока требований λ и среднего времени обслуживания $\bar{t}_{об}$:

$$\bar{\tau}' = f\left(n, \lambda, \bar{t}_{об}\right).$$

2. Вычисляется поправочный коэффициент $\Delta(k)$:

$$\Delta\left(k\right) = \frac{k^2 + 1}{2},$$

где $k = \dfrac{\sigma}{\bar{t}_{обсл}}$ – коэффициент вариации времени обслуживания.

3. Определяется среднее время ожидания в СМО с произвольно распределенным временем обслуживания $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}' \cdot \Delta(k).$$

4. Определяется среднее время пребывания требования в СМО с произвольно распределенным временем обслуживания:

$$\bar{t}_{преб} = \bar{t}_{об} + \bar{\tau}.$$

5. С использованием формул Литтла определяются среднее число требований и средняя длина очереди в СМО с произвольно распределенным временем обслуживания:

$$M_K = \lambda \bar{t}_{преб}, \; M_m = \lambda \bar{t}_{об}.$$

Отметим, что для многоканальной СМО, так же как и для одноканальной, показательно распределенное время обслуживания создает весьма «жесткий» режим работы. Этот вывод следует из простейшего анализа формулы для $\Delta(k)$. Так, для $t_{об}$, распределенного показательно, справедливо равенство $\sigma^2 = \bar{t}_{об}^2$, и следовательно $\Delta(k) = 1$. Для фиксированного $t_{об}$ очевидно, что $\sigma^2 = 0$, и значит $\Delta(k) = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, при одинаковом среднем значении показательное распределение СВ $t_{об}$ приводит к росту в 2 раза среднего времени ожидания в многоканальной СМО, по сравнению с постоянным временем обслуживания.

Пример 3. Рассматривается пример задачи определения оптимальной схемы организации производственного процесса на авиатранспортном предприятии (аэропорт) как задачи теории массового обслуживания [1].

Проводится анализ процесса технического обслуживания самолетов в аэропорту. Пусть в состав персонала аэропорта входят 30 работников по техническому обслуживанию ВС на перроне. Их можно организовать в 5 бригад по 6 человек в каждой или в 6 бригад по 5 человек. Какая организация труда обеспечит минимальные простои самолетов на обслуживании? Под простоем понимается ожидание самолетом обслуживания. Известно, что при шести исполнителях в бригаде средняя продолжительность обслуживания равна 1 ч, при пяти исполнителях – 1.15 ч. Коэффициент вариации времени обслуживания в обоих случаях – 1/3. Поток самолетов, прибывающих на обслуживание, простейший. О его интенсивности известно, что она может находиться в интервале от 3.8 ВС/ч до 5.0 ВС/ч.

В результате решения сделан вывод о том, что при различных значениях интенсивности потока самолетов оптимальными будут различные схемы организации. Существует критический уровень интенсивности, ниже которого будет оптимальной одна схема, а выше – другая.

2 СИСТЕМА С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

2.1 Общее описание СМО с приоритетами

СМО с приоритетами – СМО, в которых требования имеют различные приоритеты. В СМО с приоритетами в случае очереди при выборе требований на обслуживание одним из них отдается предпочтение перед другими.

Причины наличия приоритетов:

– различные величины убытков от простоев разных требований в ожидании начала обслуживания,

– различная срочность обслуживания требований,

– обеспечение целесообразной организации обслуживания и т.п.

Примеры СМО с приоритетами [1]:

– при комплектовании грузов на самолеты в первую очередь обслуживаются скоропортящиеся и срочные грузы;

– в процессе управления воздушным движением в зоне аэродрома при назначении порядка посадки самолетов предпочтение отдается более многоместным и тяжелым самолетам и т.д.

Наличие приоритетов в СМО приводит к необходимости решения следующих задач:

– определение характеристик длительности ожидания начала обслуживания для требований различных приоритетов;

– нахождение такого правила назначения приоритетов, которое бы обеспечило оптимальное значение выбранного критерия эффективности, и т. д.

Вводятся следующие предположения:

1) каждое поступающее требование принадлежит к одному из k классов. В порядке возрастания номеров класса приоритет требований снижается (наибольший приоритет имеют требования первого класса, а наименьший – k-го);

2) требования каждого класса поступают независимо от требований других классов;

3) моменты поступлений требований i-го класса ($i = 1,2,...,k$) образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ_i;

4) длина очереди и длительность ожидания не ограничены.

5) используется дисциплина обслуживания – ***«относительные приоритеты»***. В момент времени, когда заканчивается обслуживание некоторого требования, из очереди выбирается требование с наибольшим приоритетом (наименьшим номером класса). Если таких требований в очереди несколько, то из них выбирается требование, поступившее раньше других. Если в момент поступления требования в СМО в ней находится на обслуживании требование с низшим приоритетом (по сравнению с поступившим), то прерывание обслуживания не происходит и новое требование становится в очередь.

В случае использования дисциплины ***«абсолютные приоритеты»*** в момент поступления требования более высокого приоритета обслуживание требования более низкого приоритета, происходящее в этот момент, прерывается. Новое требование принимается на обслуживание, а вытесненное требование становится в очередь. Прерванное обслуживание продолжается после того, как в системе не останется требований с более высоким приоритетом.

2.2 Одноканальная СМО с относительными приоритетами и произвольным распределением длительности обслуживания

Рассматривается одноканальная СМО, для которой действуют все введенные выше предположения. Кроме того, распределение длительности обслуживания требований *i*-го класса ($i = 1, 2, ..., k$) считается произвольным со средним значением $\bar{t}_{об\ i}$ и дисперсией σ_i^2. Расчетные формулы даются без вывода.

Среднее время ожидания начала обслуживания требованием, имеющим *i*-й приоритет:

$$\bar{\tau}_i = \frac{\theta}{2\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \lambda_j \bar{t}_{об\ j}\right)\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{i} \lambda_j \bar{t}_{об\ j}\right)}, \qquad (2.2.1)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\bar{t}_{об\ i}^2 + \sigma_i^2\right).$$

Среднее время ожидания в очереди произвольного требования (получено осреднением средних значений с учетом вероятности (частоты) требований каждого приоритета):

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} \bar{\tau}_i = \frac{\theta}{2\lambda} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{2\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \bar{t}_{об\, j}\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \bar{t}_{об\, j}\right)} \qquad (2.2.2)$$

где $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ – суммарная интенсивность всех потоков.

Формулы (2.2.1) и (2.2.2) позволяют анализировать влияние приоритетов на средние длительности ожиданий начала обслуживания. Будем считать, что за единицу времени нахождения требования i-го приоритета в очереди начисляется удельный убыток («штраф») – c_i. Тогда средний убыток за единицу времени от пребывания требований всех приоритетов в очереди

$$c = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i \bar{\tau}_i. \qquad (2.2.3)$$

Суммарные средние убытки будут минимальны, если назначается такой порядок приоритетов, при котором убыванию приоритетов соответствует возрастание отношения

$$\frac{\bar{t}_{об\ i}}{c_i}. \qquad (2.2.4)$$

Чем меньше отношение (2.2.4), тем выше должен быть приоритет.

2.3 Многоканальная СМО с относительными приоритетами и показательным распределением длительности обслуживания

Рассматривается многоканальная СМО, для которой действуют все введенные в п.2.1 предположения. Распределение длительности обслуживания для всех приоритетов экспоненциальное с одним и тем же средним значением $\bar{t}_{об}$. В этом случае среднее время ожидания начала обслуживания для требования i-го приоритета

$$\bar{\tau}_i = \frac{\theta}{\left(1 - \frac{\bar{t}_{об}}{n}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j\right)\left(1 - \frac{\bar{t}_{об}}{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_j\right)}, \qquad (2.3.1)$$

$$\theta = \frac{\bar{t}_{об}\rho^n}{n!(n-\rho)\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}\right]}, \ \rho = \lambda\bar{t}_{об}.$$

Формулы (2.3.1) применимы, если выполняется условие

$$\frac{\bar{t}_{обсл}}{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_j < 1.$$

Пример 4. Задача на расчет параметров авиатранспортной одноканальной СМО с ожиданием, относительными приоритетами и произвольным распределением длительности обслуживания. Рассматривается модель работы взлетно-посадочной полосы (ВПП) аэродрома [1]. Имеется одна ВПП, обеспечивающая взлет и посадку самолетов типов А и В. Операция посадки имеет приоритет над операцией взлета. Интенсивность потока ВС типа А на взлет составляет 3 ВС/ч, ВС типа В – 7 ВС/ч. Интенсивности потоков ВС на посадку принимаются равными интенсивностям потоков ВС на взлет. Длительности обслуживания (занятости ВПП при соответствующих операциях) являются постоянными и равными: посадка ВС типа А – 2.5 мин; посадка ВС типа В – 2 мин; взлет ВС типа А – 3 мин; взлет ВС типа В – 2.5 мин. Стоимости летного часа составляют для ВС типа А – 6500 условных денежных единиц (УЕ), типа В – 3500 УЕ. Требуется установить приоритетность обслуживания ВС в зависимости от типа и определить средний убыток за час от вынужденного ожидания ВС ***посадки***.

Результатом решения является следующий порядок обслуживания ВС (в порядке снижении приоритета): посадка А, посадка В, взлет А, взлет В. Средний убыток за час вынужденного ожидания ВС посадки составляет около 1080 УЕ.

3 СИСТЕМА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КАНАЛОВ

3.1 Необходимые положения теории вероятностей

Нормальное распределение (НР) непрерывной СВ X:

– функция ***плотности НР*** $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.1.1)$$

где μ, σ – параметры положения и масштаба, соответственно;

– ***математическое ожидание*** $M[X]$ и ***среднее квадратическое отклонение*** $\sigma[X]$:

$$M[X]=\mu\,,\ \sigma[X]=\sigma\,.$$

– ***функция распределения*** $F(x)$ в общем виде:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds\,,$$

где каждому x ставится в соответствие интеграл $\int_{-\infty}^{x} f(s)ds$. Формулу ***функции распределения*** $F(x)$ непрерывной СВ, распределенной по нормальному закону, получаем подставив (3.1.1) в последнее выражение:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}ds\,. \qquad (3.1.2)$$

Этот интеграл нельзя представить в виде элементарных функций, однако его можно свести к табулированной функции стандартного НР. Используем для этого метод замены переменных, который, напомним, позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному, и состоит в следующем.

Пусть требуется взять неопределенный интеграл $\int f(s)ds$. Сделаем подстановку $s=\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда, если обозначить $\frac{ds}{dy}=\varphi'(y)$, то

$ds = \varphi'(y)dy$ и, следовательно,

$$\int f(s)ds = \int f[\varphi(y)]\varphi'(y)dy .$$

Если этот интеграл можно найти, и он равен $G(y)+C$, где $G(y)$ – первообразная от $f[\varphi(y)]\varphi'(y)$, C – постоянная интегрирования, то исходный интеграл $\int f(s)ds$ находится возвращением к переменной *s*, т.е. подстановкой в $G(y)+C$ вместо *y* его выражения через *s*: $y = \varphi^{-1}(s)$.

Для определенного интеграла $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(s)ds$ замена переменной *s* на новую переменную *y* выполняется по формуле:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(s)ds = \int\limits_{y_1}^{y_2} f[\varphi(y)]\varphi'(y)dy . \tag{3.1.3}$$

Поскольку для подстановки используется функция $s = \varphi(y)$, то новые пределы интегрирования y_1 и y_2 являются корнями уравнений $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$ относительно неизвестной *y*. Если зависимость новой переменной от исходной $y = \varphi^{-1}(s)$ известна, то нахождение новых пределов интегрирования упрощается:

$$y_1 = \varphi^{-1}(x_1),\ y_2 = \varphi^{-1}(x_2). \tag{3.1.4}$$

В случае НР, введя переменную

$$y = \frac{s-\mu}{\sigma}, \tag{3.1.5}$$

используем подстановку

$$s = \sigma \cdot y + \mu . \tag{3.1.6}$$

Тогда $\frac{ds}{dy} = \sigma$, откуда

$$ds = \sigma\, dy . \tag{3.1.7}$$

Подставляя (3.1.6) и (3.1.7) в (3.1.2) и учитывая, что в соответствии с (3.1.4) и (3.1.5) новый верхний предел интегрирования определится, как $\frac{x-\mu}{\sigma}$, а нижний предел не изменится, получим:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{(\sigma\cdot y+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}\sigma\cdot dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \qquad (3.1.8)$$

Полученный интеграл, так же как и исходный, не выражается через элементарные функции, но его можно вычислить через специальную функцию вида

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \qquad (3.1.9)$$

Функция $\Phi(u)$ – это функция стандартного НР, т.е. функция НР с параметрами $\mu=0$, $\sigma=1$. График зависимости $\Phi(u)$ приведен на рис. 3. Ее основные свойства:

$$\Phi(-\infty)=0,\ \Phi(+\infty)=1,\ \Phi(-u)=1-\Phi(u).$$

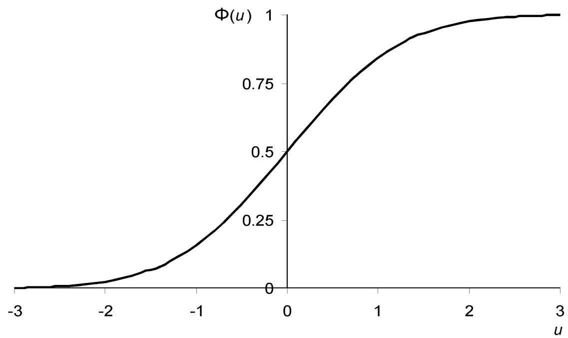


Рис. 3. График функции стандартного НР

Функция $\Phi(u)$ табулирована. Ее таблицы приводятся в литературе по теории вероятностей и математической статистике [2].

Для определения значения функции $p=\Phi(u)$ по заданному u и квантиля $u=\Phi^{-1}(p)$ по заданной вероятности p с помощью табличного процессора MS Excel используются статистические функции **НОРМСТРАСП(u)** и **НОРМСТОБР(p)** соответственно.

Сравнивая (3.1.9) и (3.1.8) видим, что функция $F(x)$ НР выражается через функцию $\Phi(u)$ стандартного НР как:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \qquad (3.1.10)$$

НР может быть использовано для аппроксимации распределения Пуассона. Дискретная СВ *K* имеет распределение Пуассона, если вероятность $P_k = P\{K = k\}$ определяется как:

$$P_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \; k = 0,1,2,\ldots,$$

где *a* – параметр, совпадающий с математическим ожиданием СВ *K*: $M[K] = a$.

При больших *a* ($a > 9$) распределение Пуассона может быть аппроксимировано НР с математическим ожиданием *a* и дисперсией *a.* Для пояснения схемы аппроксимации воспользуемся общей формулой вычисления вероятности попадания СВ на участок от α до β:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha),$$

где $F(x)$ – функция распределения СВ *X*.

Конкретизируем общую формулу для случая попадания непрерывной нормально распределенной СВ *X* на участок от α до β единичной длины с центром *k* ($k = 0,1,2,\ldots$). В этом случае границы участка будут определяться как $\alpha = k - 0.5$, $\beta = k + 0.5$, и с учетом (3.1.10) общая формула преобразуется к виду

$$P\{k - 0.5 \le X < k + 0.5\} = \Phi\left(\frac{k + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - \mu}{\sigma}\right).$$

Если величины математического ожидания μ и дисперсии σ^2 нормально распределенной СВ совпадают и равны *a*, то последняя формула запишется как

$$P\{k - 0.5 \le X < k + 0.5\} = \Phi\left(\frac{k + 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right).$$

При $a > 9$ вероятность $P\{k - 0.5 \le X < k + 0.5\}$, подсчитанная для НР, и вероятность $P_k = P\{K = k\}$, определенная для распределения Пуассона, становятся близкими (что и должно следовать из центральной предельной теоремы). Данный вывод иллюстрирует рис. 4, на котором совмещены графики распределения Пуассона с параметром $a = 10$ и НР с $\mu = \sigma^2 = 10$. При дальнейшем увеличении a близость двух распределений становится еще убедительнее.

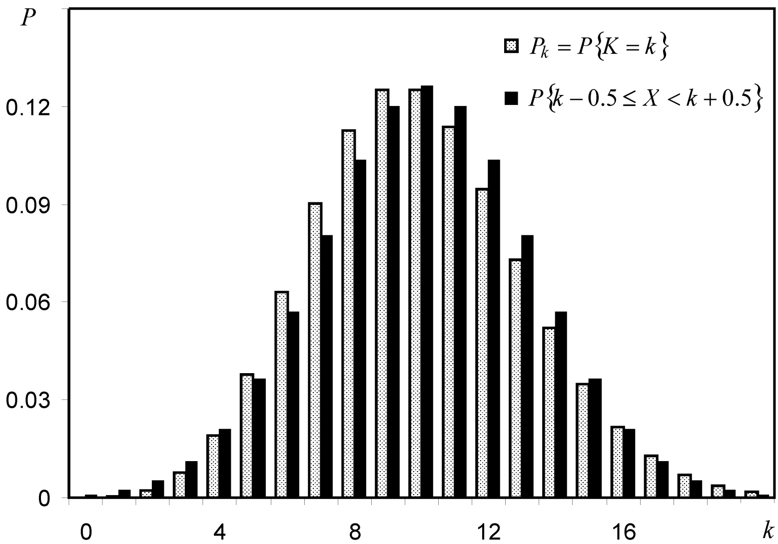


Рис. 4. Аппроксимация НР распределения Пуассона

Таким образом, аппроксимация распределения Пуассона с параметром a НР с математическим ожиданием a и дисперсией a, выполняется согласно формуле

$$P_k \approx \Phi\left(\frac{k + 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right). \qquad (3.1.11)$$

Для аппроксимации вероятности попадания дискретной СВ K, распределенной по закону Пуассона, на участок от k_1 до k_2 уже не единичной, а большей, длины ($k_1 < k_2$, $k_1, k_1 \in \{0,1,2,...\}$) используется формула, полученная непосредственно из (3.1.11):

$$P\{k_1 \le K < k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - a}{\sqrt{a}}\right). \qquad (3.1.12)$$

Использование аппроксимаций (3.1.11) и особенно (3.1.12) позволяет в ряде случаев значительно упростить вычисления, восползовавшись табулированными значениями $\Phi(u)$ или соответствующей статистической функцией табличного процессора MS Excel. При больших a слагаемыми 0.5 в формулах (3.1.11), (3.1.12) можно пренебречь, что еще больше упростит расчеты.

3.2 Бесконечнолинейная СМО

Рассматривается СМО, число каналов в которой так велико, что его можно считать бесконечно большим – бесконечно линейная СМО. В таких СМО требованиям не приходится ожидать начала обслуживания [1]. Пример: СМО – зона ожидания пассажирами посадки в аэровокзале. Требование – пассажир, ожидающий посадки. Обслуживание – пребывание пассажира в аэровокзале. Обслуживающий канал – место для пассажира, ожидающего посадку.

Допущения, используемые при построении модели системы:

1) входящий поток простейший с интенсивностью λ;

2) длительность обслуживания каждого требования – экспоненциальная со средним $\bar{t}_{об} = M[t_{об}]$;

3) число каналов – бесконечно большое ($n = \infty$);

4) установившийся режим работы СМО.

Найдем вероятности состояния *i* в установившемся режиме p_i, $i = 0,1,2,...$, используя подход, не связанный с записью уравнений Колмогорова.

Если входящий поток простейший и время обслуживания распределено показательно, то СМО не может «перескакивать» через состояния. Из состояния *i* она может мгновенно перейти только в состояние *i*+1 или состояние *i*-1.

Пусть заданы неотрицательные постоянные w_i^+ и w_i^- – интенсивности переходов, имеющие следующий смысл:

w_i^+ – среднее число переходов СМО из состояния *i* в состояние *i*+1 ($i \to i+1$) за ***единицу*** времени ***непрерывного пребывания*** системы в состоянии *i*, где $i = 0,1,2,...$;

w_i^- – среднее число переходов СМО из состояния *i* в состояние *i*-1 ($i \to i-1$) за ***единицу*** времени ***непрерывного пребывания*** системы в состоянии *i*, где $i = 0,1,2,...$.

Иллюстративный пример, приведенный на рис. 5, поясняет смысл величин w_i^+ и w_i^-. Жирными линиями обозначены промежутки времени пребывания СМО в том или ином состоянии, числа над линиями – продолжительность времени пребывания в состоянии. Как следует из рисунка, суммарное время пребывания СМО в состоянии под номером *i* составило 8.5 минут. За это время система по 2 раза совершала переходы $i \to i+1$ и $i \to i-1$. Таким образом в рассмотренном примере $w_i^+ = w_i^- = \dfrac{2}{8{,}5} \dfrac{1}{\text{мин.}}$.

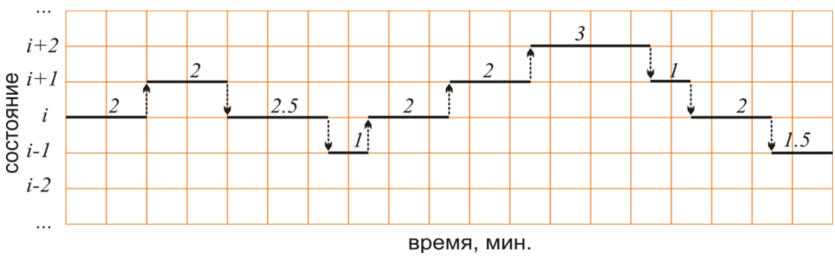


Рис. 5. Переходы СМО между состояниями

В установившемся режиме за любой промежуток времени среднее число переходов $i \to i+1$ равно среднему числу переходов $i+1 \to i$. Если бы это было не так, то СМО в некоторый момент времени покинуло бы одно из состояний *i* или $i+1$ и больше в него не возвратилось, что противоречит предположению об установившемся режиме.

Среднее число переходов $i \to i+1$ за время *t* непрерывного нахождения в состоянии *i* есть $w_i^+ t$. Поскольку искомая вероятность p_i – это доля времени нахождения СМО в состоянии *i*, то за единицу времени СМО будет находиться в состоянии *i* в среднем время p_i. Полагая $t = p_i$, находим, что среднее число переходов $i \to i+1$ за единицу времени составляет $p_i w_i^+$. Аналогично среднее число переходов $i+1 \to i$ за единицу времени $p_{i+1} w_{i+1}^-$. Приравнивая полученные выражения, имеем

$$p_{i+1} w_{i+1}^- = p_i w_i^+ \text{ или } p_i w_i^- = p_{i-1} w_{i-1}^+. \qquad (3.2.1)$$

Уравнение (3.2.1) позволяет последовательно вычислить все p_i через p_0:

$$p_i = \frac{w_{i-1}^+}{w_i^-} p_{i-1} = \frac{w_{i-1}^+ w_{i-2}^+}{w_i^- w_{i-1}^-} p_{i-2} = \ldots = p_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{w_{j-1}^+}{w_j^-} . \qquad (3.2.2)$$

Выражение для p_0 определяется из условия нормировки

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 ,$$

откуда

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{w_{j-1}^+}{w_j^-} \right),$$

и в итоге

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{w_{j-1}^+}{w_j^-} \right)^{-1} . \qquad (3.2.3)$$

Выразим w_{j-1}^+, w_j^- через параметры СМО. В бесконечно линейной СМО очередь отсутствует, т.е. все находящиеся в ней требования обслуживаются. Если в СМО i требований, то суммарная интенсивность их обслуживания $i\nu$, где $\nu = 1/\bar{t}_{об}$ – интенсивность обслуживания. Поэтому интенсивность перехода $i \to i-1$ равна $w_i^- = i\nu = i/\bar{t}_{об}$.

Так как входящий поток простейший, то интенсивность перехода $i \to i+1$ есть $w_i^+ = \lambda$.

Подставляя в (3.2.3), получаем:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda \bar{t}_{об}}{j} \right)^{-1} .$$

Чтобы соответствовать обозначениям формулы (3.2.3) в последнем выражении i заменено на j.

Формула для p_0 может быть радикально упрощена, если учесть, что:

1) $\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda \bar{t}_{об}}{j} = \frac{\overbrace{\lambda \bar{t}_{об} \cdot \lambda \bar{t}_{об} \cdot \ldots \cdot \lambda \bar{t}_{об}}^{i\ раз}}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i} = \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!}$;

2) если $i = 0$, то $\frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!} = 1$, и, значит,

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!};$$

3) справедлива формула суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a,$$

и поэтому

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!}\right)^{-1} = \left(e^{\lambda \bar{t}_{об}}\right)^{-1} = e^{-\lambda \bar{t}_{об}}.$$

Вероятность нахождения в СМО i требований определяется подстановкой полученной для p_0 формулы в (3.2.2):

$$p_i = e^{-\lambda \bar{t}_{об}} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda \bar{t}_{об}}{j} = \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^i}{i!} e^{-\lambda \bar{t}_{об}}, \ i = 1, 2, \ldots . \qquad (3.2.4)$$

Легко видеть (см. п. 3.1), что (3.2.4) представляет собой формулу распределения Пуассона с параметром $\lambda \bar{t}_{об}$. С использованием этой формулы может быть получено практически важное выражение для определения потребной вместимости накопителя рассматриваемой СМО.

Начнем с записи, исходя из (3.2.4) формулы вероятности того, что в СМО не более i требований:

$$P_{\le i} = \sum_{j=0}^{i} p_j = e^{-\lambda \bar{t}_{об}} \sum_{j=0}^{i} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^j}{j!}.$$

Если реальная система рассчитана на присутствие в ней z требований, то вероятность перегрузки определяется как

$$P_{>z} = 1 - e^{-\lambda \bar{t}_{об}} \sum_{j=0}^{z} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^j}{j!}. \qquad (3.2.5)$$

Если задана допустимая вероятность перегрузки $P^*_{>z}$, которая не может быть превышена, то потребная вместимость накопителя СМО z^* определяется из неравенства:

$$P^*_{>z} \geq 1 - e^{-\lambda \bar{t}_{об}} \sum_{j=0}^{z^*} \frac{\left(\lambda \bar{t}_{об}\right)^j}{j!}. \qquad (3.2.6)$$

При высоких значениях z и z^* формулы (3.2.5), (3.2.6) неудобны для расчетов из-за большой трудоемкости подсчета сумм. Так как в бесконечно линейных СМО число требований распределено по закону Пуассона и $\lambda \bar{t}_{об}$ обычно велико, то в целях упрощения расчетов для вычисления вероятности перегрузки $P_{>z}$ допустимо использовать нормальное приближение распределения Пуассона, рассмотренное в п. 3.1.

Введем ограничение $\lambda \bar{t}_{об} >> 9$, которое позволит воспользоваться аппроксимационной зависимостью (3.1.12). Заметим, что, если обозначить Z случайное число требований в СМО, то вероятность перегрузки $P_{>z}$ может быть представлена как

$$P_{>z} = P\{z \leq Z < \infty\}.$$

Адаптируем формулу (3.1.12) для расчета $P\{z \leq Z < \infty\}$. Учитывая свойство функции стандартного НР $\Phi(+\infty) = 1$, приравняем единице первое слагаемое правой части (3.1.12), получим:

$$P_{>z} = P\{z \leq Z < \infty\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{z - 0.5 - \lambda \bar{t}_{об}}{\sqrt{\lambda \bar{t}_{об}}}\right).$$

Примем во внимание, что выполнение условия $\lambda \bar{t}_{об} >> 9$ означает автоматическое выполнение неравенства $\lambda \bar{t}_{об} >> 0.5$, что позволяет не учитывать слагаемое 0.5 в числителе аргумента функции стандартного нормального распределения и еще более упростить выражение для $P_{>z}$:

$$P_{>z} = P\{z \leq Z < \infty\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{z - \lambda \bar{t}_{об}}{\sqrt{\lambda \bar{t}_{об}}}\right).$$

Теперь получим расчетную формулу для потребной вместимости накопителя СМО z^*. Из последнего выражения имеем:

$$\Phi\left(\frac{z-\lambda\bar{t}_{об}}{\sqrt{\lambda\bar{t}_{об}}}\right)\approx 1-P_{>z},$$

$$\frac{z-\lambda\bar{t}_{об}}{\sqrt{\lambda\bar{t}_{об}}}\approx \Phi^{-1}\left(1-P_{>z}\right),$$

где $\Phi^{-1}\left(1-P_{>z}\right)$ – квантиль стандартного НР, соответствующий вероятности $1-P_{>z}$.

Выразив *z* из последней формулы запишем:

$$z\approx\lambda\bar{t}_{об}+\sqrt{\lambda\bar{t}_{об}}\cdot\Phi^{-1}\left(1-P_{>z}\right).$$

Таким образом, для заданной допустимой вероятности перегрузки $P^{*}_{>z}$ потребная вместимость накопителя СМО z^{*} приближенно определяется как

$$z^{*}\approx\lambda\bar{t}_{об}+\sqrt{\lambda\bar{t}_{об}}\cdot\Phi^{-1}\left(1-P^{*}_{>z}\right). \qquad (3.2.7)$$

Для определения $\Phi^{-1}\left(1-P_{>z}\right)$ используются таблицы из специальной литературы либо функция **НОРМСТОБР(р)** MS Excel.

Пример 5. Задача на расчет потребной вместимости зоны вылета аэровокзала аэропорта Курумоч (г. Самара) в соответствии с формулой (3.2.7) для одного из моментов пиковой интенсивности потока пассажиров. Интенсивность потока пассажиров определяется в соответствии с методикой, изложеной в [7, 8], с использованием расписания движения самолетов и данных по времени пребывания пассажиров в аэровокзале. При принятой допустимой вероятности перегрузки, равной 0.01, вместимость аэровокзала, необходимая 31 августа 2015 г. в 11:45 составила $z^{*}\approx 658$ мест.

4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

4.1 Нечеткие множества

Теория нечетких множеств **–** аппарат формализации эпистемической неопределенности, возникающей при моделировании систем любой природы.

Математический аппарат теории нечетких множеств позволяет моделировать рассуждения человека. Термин «нечеткие множества» предложен Л. Заде (США) в 1965 г. Области практического применения теории нечетких множеств весьма разнообразны и охватывают управление вычислительными системами (процессорами, компьютерами), управление компьютерными сетями, управление технологическими процессами (химическим реакторами, металлургическим оборудованием, станками и т.д.), распознавание образов, управление транспортом (поезда метрополитена, беспилотные автомобили и т.п.), разведку ископаемых, медицину (диагностика, медицинская техника (тонометры)), экономику и управление предприятиями и др.

Множество – неопределяемое понятие современной математики. Основавший в XIX в. математическую теорию множеств Г. Кантор давал следующее определение: «…множество – это многое, мыслимое как единое».

Универсальное множество (U) – множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче.

Принадлежность любого элемента x из универсального множества U (под)множеству A может быть представлена двумя значениями: 0 (не принадлежит) или 1 (принадлежит). Множество может быть задано с помощью характеристической функции.

Характеристическая функция множества A – функция $\mu_A(x)$, заданная на универсальном множестве U и принимающая значение единица на тех элементах U, которые не принадлежат A, и значение нуль на тех элементах, которые не принадлежат A:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\notin A;\\ 1, & \text{если } x\in A;\end{cases} \quad x\in U .$$

Пример 6. Пусть $U=\{1,2,3,...,10\}$, A – множество чисел, меньших 7. Тогда характеристическая функция множества A:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & \textit{если}\; x<7;\\ 0, & \textit{если}\; x\geq 7.\end{cases}$$

Пример 7. Пусть U – возраст человека, A – возраст не старше 25 лет. Характеристическая функция множества A:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & \textit{если}\; x\leq 25;\\ 0, & \textit{если}\; x>25.\end{cases}$$

Пример 8. Пусть U – возраст человека, A – возраст «молодой человек». A – нечеткое множество.

При определении нечеткого множества $\tilde{A}$ эксперт высказывает свое мнение относительно того, в какой степени элемент $x\in U$ принадлежит $\tilde{A}$. В качестве степени принадлежности выбирается любое число с отрезка $[0,1]$. Если $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ – эксперт полностью уверен в том, что $x\in\tilde{A}$; если $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$ – эксперт не сомневается, что $x\notin\tilde{A}$; если $\mu_{\tilde{A}}(x)>0.5$ – эксперт склонен отнести x к $\tilde{A}$ и т.д.

Нечеткое множество $\tilde{A}$ – множество кортежей вида $\langle\mu_{\tilde{A}}(x),x\rangle$, где x является элементом некоторого универсального множества *U*, а $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – степень принадлежности элемента $x\in U$ нечеткому множеству $\tilde{A}$ [5].

Функция принадлежности – функция, позволяющая для произвольного элемента универсального множества вычислить степень его принадлежности нечеткому множеству. Функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ставит в соответствие каждому из элементов $x\in U$ действительное число из интервала $[0,1]$ (рис. 6).

Носитель (несущее множество, support, supp***)*** нечеткого множества $\tilde{A}$ – четкое подмножество универсального множества *U*, элементы которого имеют ненулевые степени принадлежности:

$$Supp(\tilde{A})=\{x\in U:\mu_{\tilde{A}}(x)>0\}.$$

Как правило, при записи нечетких множеств указываются лишь элементы несущего множества.

Ядро (core) нечеткого множества $\tilde{A}$ – четкое подмножество универсального множества *U*, элементы которого имеют степени принадлежности, равные 1:

$$Core(\tilde{A}) = \{x \in U : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

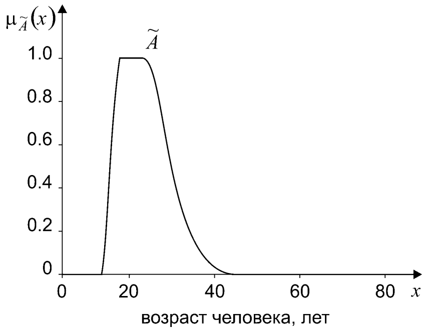


Рис. 6. Пример функции принадлежности нечеткого множества «молодой человек»

Если универсальное множество является ***дискретным*** $U = \{x_1, x_2, ..., x_K\}$, тогда нечеткое множество $\tilde{A}$ записывается в одном из следующих видов

1) $\tilde{A} = \{\mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2, ..., \ \mu_{\tilde{A}}(x_K)/x_K\}$,

2) $\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + ... + \mu_{\tilde{A}}(x_K)/x_K$,

3) $\tilde{A} = \sum_{k=1}^{K} \mu_{\tilde{A}}(x_k)/x_k, \ x_k \in U$.

Пример 9. Используем рассмотренные способы записи для нечеткого множества $\tilde{A}$, выражающего число пассажиров в группе из ***нескольких*** пассажиров, заданного на универсальном множестве $U = \{1, 2, 3, ...\}$. Пусть, по мнению большинства опрошенных экспертов, «несколько» – это от 2-3 до 8-12 человек (как и любых других объектов). Тогда:

1) $\tilde{A} = \{0.5/2, \ 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 0.8/9, 0.6/10, 0.4/11, 0.2/12\}$,

2) $\tilde{A} = 0.5/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 0.8/9 + 0.6/10 + 0.4/11 + 0.2/12$.

Если универсальное множество – ***непрерывное*** множество *U*, то используется обозначение

$$\tilde{A} = \int\limits_{x \in U} \mu_{\tilde{A}}(x) \,/\, x \,.$$

Пример 10. Пусть рассматривается нечеткое множество $\tilde{A}$ – отклонение фактического времени t^{Φ} прилета самолета от планового времени t^{Π}, заданного расписанием. По мнению эксперта, самолет определенно не прилетит раньше, чем за 20 мин до момента прилета по расписанию, и не опоздает более, чем на 60 мин. Скорее всего он задержится на 5 – 15 минут от расписания. Таким образом, функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(t)$, где $t = t^{\Phi} - t^{\Pi}$, график которой приведен на рис. 7, может быть выражена как:

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{25}(t+20), & -20 \le t < 5; \\ 1, & 5 \le t < 15; \\ \dfrac{1}{45}(60-t), & 15 \le t < 60. \end{cases}$$

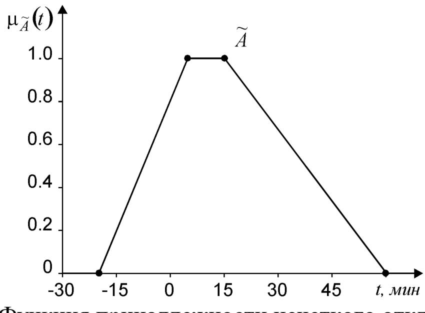


Рис. 7. Функция принадлежности нечеткого отклонения времени прилета от расписания

Нечеткое множество $\tilde{A}$ может быть представлено в виде:

$$\tilde{A} = \int\limits_{-20 \le t < 60} \mu_{\tilde{A}}(t) \,/\, t = \int\limits_{-20 \le t < 5} \left(\frac{1}{25}(t-20) \right) \Big/ t + \int\limits_{5 \le t < 15} 1 \,/\, t + \int\limits_{15 \le t < 60} \left(\frac{1}{45}(60-t) \right) \Big/ t \,.$$

Нормальное нечеткое множество – нечеткое множество $\tilde{A}$, для которого существует $x_0 \left(x_0 \in U\right)$ такое, что $\mu_{\tilde{A}}\left(x_0\right)=1$. В противном случае нечеткое множество ***субнормальное*** (рис. 8).

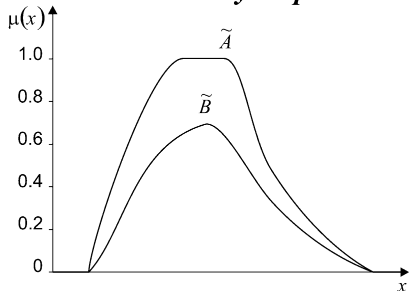


Рис. 8. Функции принадлежности нормального ($\tilde{A}$) и субнормального ($\tilde{B}$) нечетких множеств

Выпуклое нечеткое множество – нечеткое множество $\tilde{A}$ на универсальном множестве *U*, имеющее функцию принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$, удовлетворяющую неравенству:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq min\left(\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\right)$$

для любых значений $x, a, b \in U$, при которых $a < x < b$ и $a \neq b$ (см. рис. 9).

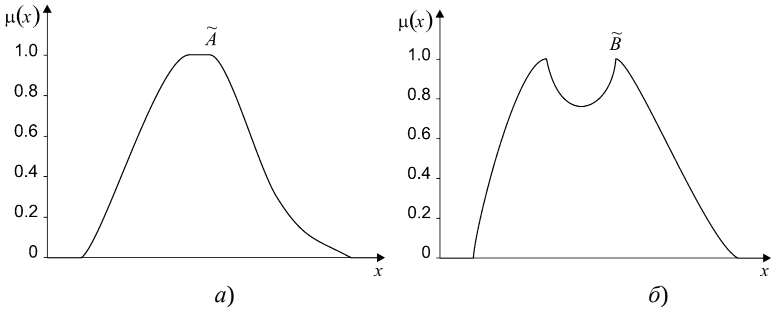


Рис. 9. Функции принадлежности выпуклого (а) и невыпуклого (б) нечетких множеств

Множество α-уровня (α-сечение, α-срез) нечеткого множества $\tilde{A}$ (см. рис. 10) – обычное множество, состоящее из всех тех элементов универсального множества U, для которых выполняется неравенство

$$A_\alpha = \{x : \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Пример 11. Множества α-уровня для определенного на дискретном универсальном множестве $U = \{1,2,3,...\}$ нечеткого множества $\tilde{A}$ из примера 9 для заданных значений $\alpha \in \{0.5, 0.9\}$ записываются в виде:

$A_{0.5} = \{0.5/2,\ 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 0.8/9, 0.6/10\}$,

$A_{0.9} = \{1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8\}$.

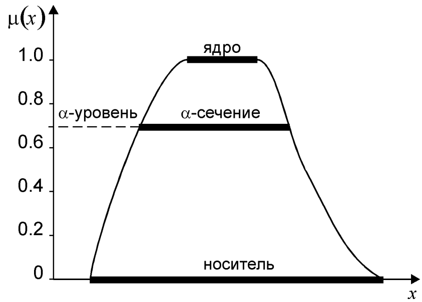


Рис. 10. Ядро, носитель, α-уровень, α-сечение нечеткого множества

Множество α-уровня для нечеткого множества $\tilde{A}$ на ***непрерывном универсальном множестве*** – закрытый интервал действительных чисел $A_\alpha = [x_\alpha^L, x_\alpha^R]$, где x_α^L, x_α^R – левый и правый концы интервала, имеющие одинаковую степень принадлежности α:

$$\mu_{\tilde{A}}(x^L) = \mu_{\tilde{A}}(x^R) = \alpha .$$

Выпуклое нечеткое множество $\tilde{A}$ может быть задано в виде множества α-сечений:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} [x_\alpha^L, x_\alpha^R,].$$

Нечеткое число (НЧ) $\tilde{A}$ – (выпуклое и нормальное) нечеткое подмножество $\tilde{A}$ множества действительных чисел R. Как правило, в качестве НЧ рассматривается именно выпуклое и нормальное нечеткое (под)множество $\tilde{A} \subset R$.

Дефаззификация – преобразование нечеткого множества в НЧ. Разработан ряд методов дефаззификации, из которых наиболее популярные: центр максимумов, наименьший из максимумов, наибольший из максимумов, центр тяжести.

Дефаззификация по методу ***центра тяжести*** для НЧ $\tilde{A}$, заданного:

– на непрерывном универсальном множестве:

$$\overline{A} = \frac{\int_{x_{\alpha=0}^{L}}^{x_{\alpha=0}^{R}} x\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_{x_{\alpha=0}^{L}}^{x_{\alpha=0}^{R}} \mu_{\tilde{A}}(x)dx};$$

– дискретном универсальном множестве:

$$\overline{A} = \frac{\sum_{k=1}^{K} x_k \mu_{\tilde{A}}(x_k)}{\sum_{k=1}^{K} \mu_{\tilde{A}}(x_k)}.$$

Пример 12. Дефаззификация по методу центра тяжести дискретного нечеткого множества «число пассажиров в группе из нескольких человек» из примера 9, заданного как

$$\tilde{A} = \{0.5/2,\ 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8,\ 0.8/9,\ 0.6/10,\ 0.4/11,\ 0.2/12\},$$

дает следующий результат:

$$\overline{A} = \frac{0.5\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+1\cdot 5+1\cdot 6+1\cdot 7+1\cdot 8+0.8\cdot 9+0.6\cdot 10+0.4\cdot 11+0.2\cdot 12}{0.5+1+1+1+1+1+1+0.8+0.6+0.4+0.2} = 6.4.$$

4.2 Принцип обобщения Заде

Принцип обобщения – одна из ключевых идей теории нечетких множеств – используется в качестве базы для осуществления математических операций над нечеткими числами [5].

Если $y = f(x)$ функция аргумента x, заданного нечетким числом $\tilde{A}$, то результатом $f(\tilde{A})$ является НЧ $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \max_{y=f(x)} \mu_{\tilde{A}}(x), \; x, y \in R,$$

где R – множество действительных чисел.

По принципу обобщения рассчитывается НЧ, соответствующее значению четкой функции от нечетких аргументов (рис. 11).

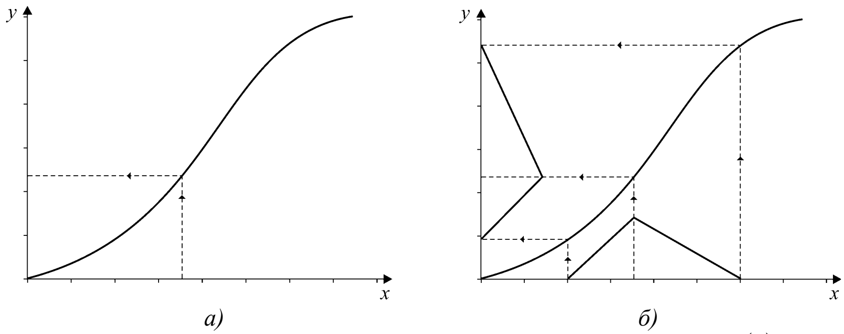


Рис. 11. Функции от четкого (а) и нечеткого (б) аргументов $y = f(x)$

Пример 13. Пусть задана функция $y = x^2$. Исходное значение x задано в форме НЧ $\tilde{A}$ = «примерно ноль», представленного как

$$\tilde{A} = \{0/-2, \; 0.5/-1, \; 1/0, \; 0.66/1, \; 0.33/2, \; 0/3\}.$$

Определить функцию принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(y)$ НЧ $\tilde{B} = f(\tilde{A})$.

Процедура определения функции принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(y)$ в соответствии с принципом обобщения сведена в табл. 1.

Таблица 1

x	$\mu_{\tilde{A}}(x)$	y	$\mu_{\tilde{B}}(y)$
–2	0	4	$\mu_{\tilde{B}}(4) = max(\mu_{\tilde{A}}(-2), \; \mu_{\tilde{A}}(2)) = max(0, \; 0.33) = 0.33$
–1	0.5	1	$\mu_{\tilde{B}}(1) = max(\mu_{\tilde{A}}(-1), \; \mu_{\tilde{A}}(1)) = max(0.5, \; 0.66) = 0.66$
0	1	0	$\mu_{\tilde{B}}(0) = \mu_{\tilde{A}}(0) = 1$
1	0.66	1	$\mu_{\tilde{B}}(1) = 0.66$ (см. выше, для $x = -1$)
2	0.33	4	$\mu_{\tilde{B}}(4) = 0.33$ (см. выше, для $x = -2$)
3	0	9	$\mu_{\tilde{B}}(9) = \mu_{\tilde{A}}(3) = 0$

На основании данных столбцов 3 и 4 записывается ответ: $\tilde{B} = \{1/0,\ 0.66/1,\ 0.33/4,\ 0/9\}$.

На рис. 12 приведены графики функций принадлежности нечетких чисел, исходного $\tilde{A}$ (рис. 12, а) и результирующего $\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right)$ (рис. 12, б).

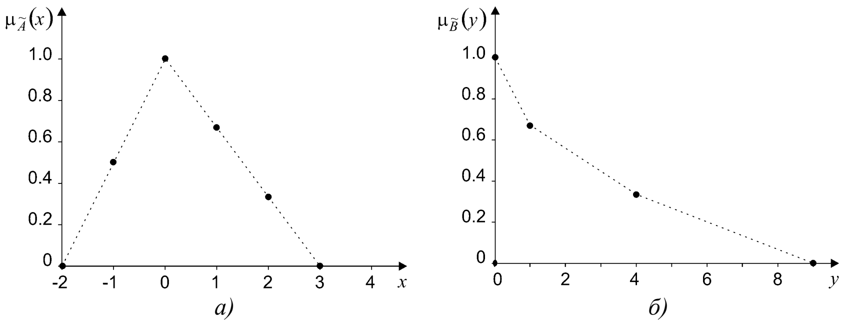


Рис. 12. К примеру 13

4.3 Нечеткая арифметика

Пусть даны два НЧ $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(y)$. НЧ $\tilde{C}$ является суммой $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ чисел $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{C}}(z)$ удовлетворяет равенству

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \max_{z=x+y}\left(\min\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(y)\right)\right),\ x, y, z \in R.$$

Пример 14. Найти НЧ $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$, если $\tilde{A}$ = «примерно 5», $\tilde{B}$ = «примерно 7». Нечеткие слагаемые заданы как $\tilde{A} = \{0/3,\ 0.5/4,\ 1/5,\ 0.66/6,\ 0/8\}$ и $\tilde{B} = \{0/4,\ 0.33/5,\ 1/7,\ 0.5/8,\ 0/9\}$. Нечеткая сумма определяется с помощью табл. 2, в двух первых строках и столбцах которой приводятся исходные данные, в остальных клетках – результаты расчетов, где в нижнем правом углу записывается сумма $z = x + y$, в верхнем левом углу – значение $\min\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(y)\right)$.

Таблица 2

	$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0	0.5	1	0.66	0
$\mu_{\tilde{B}}(y)$	x / y	3	4	5	6	8
0	4	*min*(0, 0)=0 3+4=7	*min*(0.5, 0)=0 4+4=8	0 9	0 10	0 12
0.33	5	0 8	0.33 9	0.33 10	0.33 11	0 13
1	7	0 10	0.5 11	1 12	0.66 13	0 15
0.5	8	0 11	0.5 12	0.5 13	0.5 14	0 16
0	9	0 12	0 13	0 14	0 15	0 17

При заполнении табл. 2 для всех полученных z определяются значения функции принадлежности $\mu_{\tilde{C}}(z)$:

– для $z = 7$: $\mu_{\tilde{C}}(7) = \max\limits_{7=3+4}(\min(0, 0)) = 0$,

– для $z = 8$: $\mu_{\tilde{C}}(8) = \max\limits_{8=(5+3)\vee(4+4)}(\min(0.33, 0),\ \min(0.5, 0)) = 0.33$,

где $\vee$ – логическое «или», и т.д.

Результаты запишем в табл. 3 и отобразим на рис. 13.

Таблица 3

$\mu_{\tilde{C}}(z)$	0	0	0.33	0.33	0.5	1	0.66	0.5	0	0	0
z	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Итак, сумма $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ равна

$\tilde{C}$ ={ 0/8, 0.33/9, 0.33/10, 0.5/11, 1/12, 0.66/13, 0.5/14, 0/15 }.

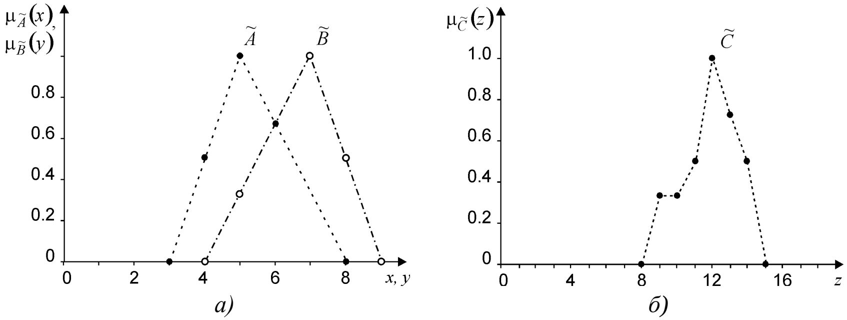


Рис. 13. Исходные данные (а) и результаты (б) примера 14

Аналогично выполняются другие операции: вычитание (–), умножение (×), деление (/), определение максимума (max) и минимума (min), для которых общая формула:

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \max_{z=x*y}\left(\min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\right)\right), \; x, y, z \in R,$$

где $* \in \{ +, -, \times, /, \max, \min \}$.

4.4 Пример использования принципа обобщения в задачах моделирования аэропортовых систем

Необходимо, основываясь на мнении эксперта, сравнить два варианта расписания регионального аэропорта. Первый вариант предполагает одновременное обслуживание трех ВС типа А. Второй вариант – двух ВС, одно из которых относится к типу А, второе – типу В. Эксперт считает, что для регистрации пассажиров, вылетающих рейсом ВС типа А, в 3/4 всех случаев будет достаточно одной стойки регистрации, в оставшейся 1/4 – двух стоек. Для регистрации пассажиров одного вылетающего ВС типа В одна стойка не будет использоваться никогда; число рейсов, для регистрации которых потребуется 2 стойки, будет примерно равно числу рейсов с использованием 3 стоек. Оценить, какой вариант расписания приводит к большей загрузке стоек?

Пусть $\tilde{N}_A$, $\tilde{N}_B$ – нечеткая численность мест регистрации, используемых для обслуживания пассажиров одного ВС типа А и одного ВС типа В, соответственно. Мнение эксперта относительно числа стоек для ВС типа А можно перефразировать следующим образом: «скорее всего будет используется одна стойка; в три раза реже – 2 стойки», что в форме дискретного нечеткого множества выражается как: $\tilde{N}_A = \{1/1,\, 0.33/2\}$.

По поводу ВС типа В можно сказать, что эксперт полагает, что «точно будет необходимо либо 2, либо 3 стойки», или в нечеткой форме: $\tilde{N}_B = \{0/1,\, 1/2,\, 1/3\}$.

Потребное число стоек для варианта расписания 1:

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N}_A + \tilde{N}_A + \tilde{N}_A\,;$$

Потребное число стоек для варианта расписания 2:

$$\tilde{N}_2 = \tilde{N}_A + \tilde{N}_B\,.$$

Первым этапом расчета для варианта расписания 1 является вычисление нечеткой суммы $\tilde{N}_A + \tilde{N}_A$, оформленное в виде табл. 4.

Таблица 4

	$\mu_{\tilde{N}_A}(N)$	1	0.33
$\mu_{\tilde{N}_A}(N)$	N \ N	1	2
1	1	$min(1;1)=1$ 1+1=2	0.33 3
0.33	2	0.33 3	0.33 4

Например, для $N_A + N_A = 3$:

$$\mu_{\tilde{N}_A+\tilde{N}_A}(3) = \max_{3=2+1}\left(\min(0.33,\ 0.33)\right) = 0.33\,.$$

Выполняя аналогичные вычисления для всех клеток таблицы, получаем

$$\tilde{N}_A + \tilde{N}_A = \{0/1,\, 1/2,\, 0.33/3,\ \ 0.33/4\}.$$

Второй этап – вычисление искомой величины $\tilde{N}_1 = (\tilde{N}_A + \tilde{N}_A) + \tilde{N}_A$, представленное в виде табл. 5.

В данном случае получим:

$$\tilde{N}_1 = \left(\tilde{N}_A + \tilde{N}_A\right) + \tilde{N}_A = \{0/1,\, 0/2,\, 1/3,\ 0.33/4,\, 0.33/5,\ 0.33/6\}.$$

Таблица 5

	$\mu_{(\tilde{N}_A+\tilde{N}_A)}(N)$	0	1	0.33	0.33
$\mu_{\tilde{N}_A}(N)$	N N	1	2	3	4
1	1	0 2	1 3	0.33 4	0.33 5
0.33	2	0 3	0.33 4	0.33 5	0.33 6

Таким образом, дефаззифицированное («среднее») число стоек для варианта расписания 1:

$$\overline{N}_1 = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 0.33 + 5\cdot 0.33 + 6\cdot 0.33}{1 + 0.33 + 0.33 + 0.33} = \frac{8}{2} = 4 .$$

Расчет для варианта расписания 2 состоит из единственного этапа – определения $\tilde{N}_2 = \tilde{N}_A + \tilde{N}_B$ (см. табл. 6).

Таблица 6

	$\mu_{\tilde{N}_A}(N)$	1	0.33
$\mu_{\tilde{N}_B}(N)$	N N	1	2
0	1	0 2	0 3
1	2	1 3	0.33 4
1	3	1 4	0.33 5

В результате имеем:

$$\tilde{N}_2 = \tilde{N}_A + \tilde{N}_B = \{0/1,\ 0/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 0.33/5\}.$$

Дефаззифицированное («среднее») число стоек для варианта расписания 2:

$$\overline{N}_2 = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0.33}{1 + 1 + 0.33} = 3\frac{5}{7} .$$

Выводы: При реализации варианта расписания 1 как правило будут заняты 3 стойки, но может быть занято и большее число – от 4 до 6, хотя возможность осуществления таких ситуаций значительно ниже.

Расписание 2 приводит к постоянному использованию 3 или 4 стоек. Гораздо реже – примерно в 1 из 7 случаев – потребуются 5 стоек.

В целом расписание 1 требует несколько большей занятости средств регистрации.

4.5 Поуровневые операции

Алгебраические операции с НЧ значительно упрощаются, если использовать т.н. поуровневый подход. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ выпуклые нормальные НЧ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(y)$. Обозначим их множества α-уровня как

$$A_\alpha = \left[x_\alpha^L, x_\alpha^R\right],\ B_\alpha = \left[y_\alpha^L, y_\alpha^R\right],\ \alpha \in [0,1].$$

Множества α-уровня для НЧ $\tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{B}$, где * ∈ { +, –, ×, /, max, min }, определяются как

$$C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = \left[x_\alpha^L + y_\alpha^L,\ x_\alpha^R + y_\alpha^R\right],$$
$$C_\alpha = A_\alpha - B_\alpha = \left[x_\alpha^L - y_\alpha^R,\ x_\alpha^R - y_\alpha^L\right],$$
$$C_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha = \left[x_\alpha^L \times y_\alpha^L,\ x_\alpha^R \times y_\alpha^R\right],$$
$$C_\alpha = A_\alpha / B_\alpha = \left[x_\alpha^L / y_\alpha^R,\ x_\alpha^R / y_\alpha^L\right],$$
$$C_\alpha = max(A_\alpha, B_\alpha) = \left[max\left(x_\alpha^L, y_\alpha^L\right), max\left(x_\alpha^R, y_\alpha^R\right)\right],$$
$$C_\alpha = min(A_\alpha, B_\alpha) = \left[min\left(x_\alpha^L, y_\alpha^L\right), min\left(x_\alpha^R, y_\alpha^R\right)\right].$$

Пример 15. Найти НЧ $\tilde{C} = \dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}}$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – НЧ, заданные в виде множества α-сечений (рис. 14, а):

$$\tilde{A} = [13;\ 23]_0 \cup [16;\ 22]_{0.5} \cup [19;\ 21]_1;\ \tilde{B} = [5;\ 12]_0 \cup [6;\ 10]_{0.5} \cup [7;\ 8]_1.$$

Применяя приведенную выше формулу для поуровневого определения частного двух НЧ имеем (рис. 14, б):

$$\tilde{C} = \left[\frac{13}{12};\ \frac{23}{5}\right]_0 \cup \left[\frac{16}{10};\ \frac{6}{22}\right]_{0.5} \cup \left[\frac{19}{8};\ \frac{21}{7}\right]_1 = [1.08;\ 4.6]_0 \cup [1.6;\ 3.67]_{0.5} \cup [2.37;\ 3]_1.$$

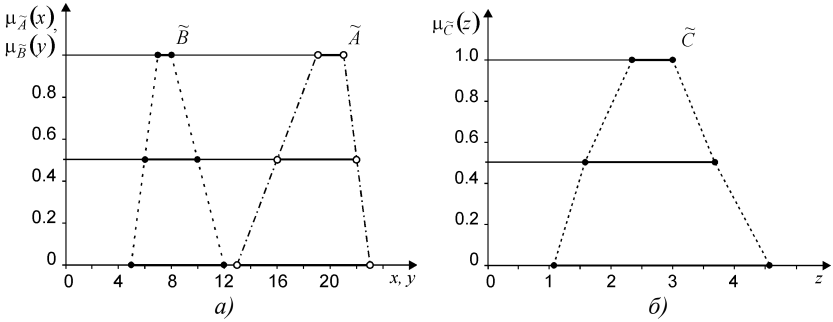


Рис. 14. Исходные данные (*а*) и результаты (*б*) примера 15

К ***сравнению НЧ*** в настоящее время не существует единого подхода. Основные используемые методы:

1) $\tilde{A} > \tilde{B}$, если $\overline{A} > \overline{B}$;

2) $\tilde{A} > \tilde{B}$, если $x_\alpha^L > y_\alpha^L$ и $x_\alpha^R > y_\alpha^R$ для заданного $\alpha \in [0, 1]$;

3) $\tilde{A} > \tilde{B}$, если $x_\alpha^L > y_\alpha^L$ и $x_\alpha^R > y_\alpha^R$ для $\forall \alpha \in [0, 1]$;

4) $\tilde{A} > \tilde{B}$, если $\mu_{\tilde{A}}(z) > \mu_{\tilde{B}}(z)$ для некоторого $z \in R$.

4.6 Треугольные и трапецеидальные нечеткие числа

НЧ могут описываться разнообразными функциями принадлежности. Ограничимся рассмотрением НЧ наиболее простых и часто используемых типов – треугольных и трапециевидных. Представлены они следующими кусочно-линейными функциями принадлежности:

– НЧ с треугольной функцией принадлежности – «треугольное» НЧ. Функция принадлежности задается выражением:

$$f_\Delta(x; a, m, b) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{m-a}, & a \le x \le m \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & m \le x \le b \\ 0, & x < a,\ b < x, \end{cases}$$

где a, m, b – числовые параметры, $a \le m \le b$ (см. рис. 15, а). Треугольные НЧ обычно характеризуют неопределенность типа «приблизительно равно», «приблизительно *m*» и задаются тройкой сел: $\widetilde{A}=(a,m,b)$.

– НЧ с трапецеидальной функцией принадлежности – «трапецеидальное» («трапезоидное», «трапециевидное») НЧ (или нечеткий интервал). Функция принадлежности задается выражением:

$$f_T(x;a,m,n,b)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{m-a}, & a\le x\le m\\ 1, & m<x<n\\ \dfrac{b-x}{b-n}, & n\le x\le b\\ 0, & x<a,\ b<x,\end{cases}$$

где a, m, n, b – числовые параметры, $a\le m<n\le b$ (см. рис. 15, б). Если выполняется равенство $m=n$, то трапецеидальное НЧ вырождается в треугольное. Трапецеидальные НЧ характеризуют неопределенность типа «приблизительно в интервале», «приблизительно в диапазоне от *m* до *n*» и задаются четырьмя числами: $\widetilde{A}=(a,m,n,b)$.

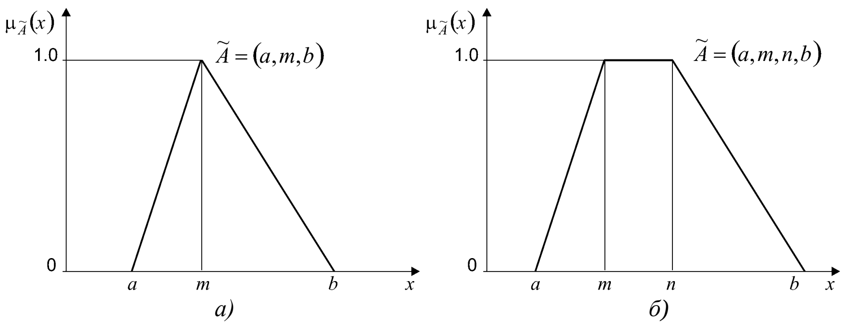


Рис. 15. Треугольное (*а*) и трапецеидальное (*б*) НЧ

Нечеткие вычисления существенно упрощаются, если они производятся над треугольными или трапецеидальными НЧ. Основываясь на принципе обобщения Заде и поуровневом подходе, рассмотрим основные операции с ***треугольными НЧ***. Пусть даны два числа, заданные тройками параметров: $\widetilde{A}_1=\left(a_1^L,a_1^M,a_1^R\right)$ и $\widetilde{A}_2=\left(a_2^L,a_2^M,a_2^R\right)$. Результатами нечетких вычислений с ними также будут треугольные НЧ, определяемые как:

$$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=\left(a_1^L+a_2^L,\ \ a_1^M+a_2^M,\ \ a_1^R+a_2^R\right),$$
$$\tilde{A}_1\times\tilde{A}_2=\left(a_1^L\cdot a_2^L,\ \ a_1^M\cdot a_2^M,\ \ a_1^R\cdot a_2^R\right),$$
$$\tilde{A}_1-\tilde{A}_2=\left(a_1^L-a_2^R,\ \ a_1^M-a_2^M,\ \ a_1^R-a_2^L\right),$$
$$\tilde{A}_1/\tilde{A}_2=\left(a_1^L/a_2^R,\ \ a_1^M/a_2^M,\ \ a_1^R/a_2^L\right),$$
$$max\left(\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2\right)=\left(max\left(a_1^L,a_2^L\right),\ \ max\left(a_1^M,a_2^M\right),\ \ max\left(a_1^R,a_2^R\right)\right),$$
$$min\left(\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2\right)=\left(min\left(a_1^L,a_2^L\right),\ \ min\left(a_1^M,a_2^M\right),\ \ min\left(a_1^R,a_2^R\right)\right).$$

Дефаззификация треугольного НЧ $\tilde{A}=(a,m,b)$ по методу центра тяжести:

$$\overline{A}=\frac{\int_a^b x\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_a^b \mu_{\tilde{A}}(x)dx}=\frac{\int_a^m x\mu_{\tilde{A}}(x)dx+\int_m^b x\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_a^m \mu_{\tilde{A}}(x)dx+\int_m^b \mu_{\tilde{A}}(x)dx}=\frac{\int_a^m x\left(\frac{x-a}{m-a}\right)dx+\int_m^b x\left(\frac{x-b}{m-b}\right)dx}{\int_a^m \left(\frac{x-a}{m-a}\right)dx+\int_m^b \left(\frac{x-b}{m-b}\right)dx}=$$
$$=\frac{1}{3}(a+m+b).$$

Для двух трапецеидальных НЧ $\tilde{A}_1=\left(a_1^L,a_1^{ML},a_1^{MR},a_1^R\right)$ и $\tilde{A}_2=\left(a_2^L,a_2^{ML},a_2^{MR},a_2^R\right)$ аналогичные операции выполняются по следующим формулам:

$$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=\left(a_1^L+a_2^L,\ \ a_1^{ML}+a_2^{ML},\ \ a_1^{MR}+a_2^{MR},\ \ a_1^R+a_2^R\right),$$
$$\tilde{A}_1\times\tilde{A}_2=\left(a_1^L\cdot a_2^L,\ \ a_1^{ML}\cdot a_2^{MR},\ \ a_1^{ML}\cdot a_2^{MR},\ \ a_1^R\cdot a_2^R\right),$$
$$\tilde{A}_1-\tilde{A}_2=\left(a_1^L-a_2^R,\ \ a_1^{ML}-a_2^{MR},\ \ a_1^{MR}-a_2^{ML},\ \ a_1^R-a_2^L\right),$$
$$\tilde{A}_1/\tilde{A}_2=\left(a_1^L/a_2^R,\ \ a_1^{ML}/a_2^{MR},\ \ a_1^{MR}/a_2^{ML},\ \ a_1^R/a_2^L\right),$$
$$max\left(\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2\right)=\left(max\left(a_1^L,a_2^L\right),\ \ max\left(a_1^{ML},a_2^{ML}\right),\ \ max\left(a_1^{MR},a_2^{MR}\right),\ \ max\left(a_1^R,a_2^R\right)\right),$$
$$min\left(\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2\right)=\left(min\left(a_1^L,a_2^L\right),\ \ min\left(a_1^{ML},a_2^{ML}\right),\ \ min\left(a_1^{MR},a_2^{MR}\right),\ \ min\left(a_1^R,a_2^R\right)\right).$$

Дефаззификация треугольного НЧ $\tilde{A}=(a,m,n,b)$ по методу центра тяжести:

$$\overline{A}=\frac{1}{6}(a+2m+2n+b).$$

4.7 Пример нечетких вычислений численности технологических ресурсов аэропорта

Рассматриваются две операции, входящие в состав технологического графика наземного обслуживания ВС в аэропорту, – посадка вылетающих пассажиров на борт ВС и погрузка их багажа. Технологическими ресурсами, предназначенными для выполнения первой из операций, являются трапы, второй – багажные транспортеры. Пусть перед экспертом поставлена задача определить численность ресурсов, которые должны выделяться для обслуживания пассажиров и багажа ВС, который ранее не выполнял рейсы в данный аэропорт. По указанной причине статистические данные по рассматриваемым операциям отсутствуют, и, таким образом, единственным источником исходных данных при решении задачи может стать мнение эксперта. При нечеткой оценке величин продолжительностей рассматриваемых операций логично предположить, что они прямо пропорциональны объему работ и обратно пропорциональны численности исполнителей. Продолжительность посадки пассажиров:

$$\Delta\tilde{t}_{ПП} = \frac{\Delta\tilde{t}_{пас}\tilde{n}_{пас}}{N_{пас}},$$

где $\Delta\tilde{t}_{пас}$ – продолжительность посадки одного пассажира; $\tilde{n}_{пас}$ – число пассажиров вылетающего ВС; $N_{пас}$ – число средств посадки пассажиров (трапов).

Продолжительность погрузки багажа:

$$\Delta\tilde{t}_{ПБ} = \frac{\Delta\tilde{t}_{баг}\tilde{n}_{пас}\tilde{k}_{баг}}{N_{баг}},$$

где $\Delta\tilde{t}_{баг}$ – продолжительность погрузки одного места багажа (МБ); $\tilde{k}_{баг}$ – число МБ, приходящееся на одного пассажира; $N_{баг}$ – число средств погрузки багажа (багажных транспортеров).

Используемые в формулах нечеткие величины заданы экспертно по трем α-уровням:

$\Delta\tilde{t}_{пас} = [0.10;\ 0.40]_0 \cup [0.15;\ 0.25]_{0.5} \cup [0.2;\ 0.2]_1$ мин;

$\Delta\tilde{t}_{баг} = [0.12;\ 0.45]_0 \cup [0.15;\ 0.35]_{0.5} \cup [0.2;\ 0.2]_1$ мин;

$\tilde{n}_{пас} = [10;\, 100]_0 \cup [40;\, 80]_{0.5} \cup [70;\, 70]_1$ чел;

$\tilde{k}_{баг} = [0.5;\, 0.9]_0 \cup [0.7;\, 0.85]_{0.5} \cup [0.8;\, 0.8]_1$ МБ.

Итак, пусть необходимо:

1) определить число трапов исходя из требования, чтобы время посадки пассажиров ни при каких обстоятельствах не превышало бы 30 минут;

2) определить число погрузчиков багажа, необходимое для того, чтобы операция погрузки багажа заканчивалась всегда раньше операции посадки пассажиров. Считать, что погрузка багажа начинается одновременно с посадкой пассажиров;

3) Построить графики функций принадлежности НЧ $\Delta\tilde{t}_{ПП}$ и $\Delta\tilde{t}_{ПБ}$ для найденных $N_{пас}$ и $N_{баг}$.

Расчет проводится подбором сначала $N_{пас}$, затем $N_{баг}$. Подбирается минимальное $N_{пас}$, при котором выполняется условие:

$$\Delta\tilde{t}_{ПП} \le \Delta t_{ПП}^{max}. \tag{4.7.1}$$

После этого подбирается также минимальное $N_{баг}$, достаточное для выполнения условия:

$$\Delta\tilde{t}_{ПП} \le \Delta\tilde{t}_{ПБ}. \tag{4.7.2}$$

Для проверки выполнения (4.7.2) используется метод сравнения НЧ, описанный в п. 5 под номером 3, который в рассматриваемом случае выражается формулой: $\Delta\tilde{t}_{ПП} \le \Delta\tilde{t}_{ПБ}$, если $\Delta t_{ПП}{}_{\alpha}^{L} \le \Delta t_{ПБ}{}_{\alpha}^{L}$ и $\Delta t_{ПП}{}_{\alpha}^{R} \le \Delta t_{ПБ}{}_{\alpha}^{R}$ для $\forall \alpha \in \{0;\, 0.5;\, 1\}$.

Если, как в случае условия (4.7.1), одна из сравниваемых величин не является нечеткой, то процедура сравнения по рассматриваемому методу упрощается:

$$\Delta\tilde{t}_{ПП} \le \Delta t_{ПП}^{max}, \text{ если } \Delta t_{ПП}{}_{\alpha}^{R} \le \Delta t_{ПП}^{max} \text{ для } \forall \alpha \in \{0;\, 0.5;\, 1\}.$$

Для приведенных выше исходных данных минимальная достаточная численность средств обслуживания пассажиров и багажа одного ВС составила: $N_{пас} = 2$, $N_{баг} = 3$. Полученные при этой численности функции принадлежности $\mu_{\Delta\tilde{t}_{ПП}}(t)$ и $\mu_{\Delta\tilde{t}_{ПБ}}(t)$ нечетких величин $\Delta\tilde{t}_{ПП}$ и $\Delta\tilde{t}_{ПБ}$, соответственно, приведены на рис. 16.

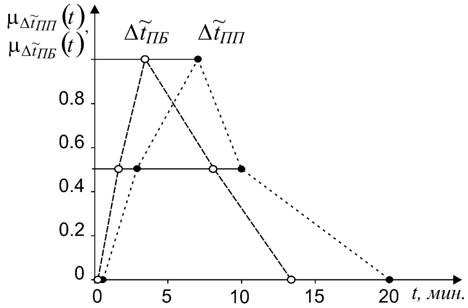


Рис. 16. Функции принадлежности нечетких величин $\Delta\tilde{t}_{ПП}$ и $\Delta\tilde{t}_{ПБ}$

Из рис. 16 следует, что условия (4.7.1) и (4.7.2) выполнены.

4.8 Основы нечеткого математического программирования

В общем виде однокритериальная задача нечеткого математического программирования может быть сформулирована следующим образом. Для обычных (не нечетких) функций многих переменных f и φ_i, $i = 1,2,...,I$, на заданном нечетком множестве допустимых решений $\tilde{\boldsymbol{X}}$ необходимо найти

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{x}}} f\left(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{c}}\right) \tag{4.8.1}$$

при ограничениях

$$\varphi_i\left(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{a}}_i\right) \geq \tilde{b}_i,\ i = 1,2,...,I, \tag{4.8.2}$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}} = \left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_J\right)$ – нечеткий вектор решений, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \tilde{\boldsymbol{X}}$; $\tilde{\boldsymbol{c}} = \left(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ..., \tilde{c}_J\right)$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_i = \left(\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, ..., \tilde{a}_{iJ_i}\right)$ – некоторые нечеткие векторы, элементами которых являются НЧ с заданными функциями принадлежности; $\tilde{b}_i$ – НЧ, функции, принадлежности которых заданы; $\varphi_i\left(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{a}}_i\right)$ – функции-ограничения ($i = 1,2,...,I$); $f\left(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{c}}\right)$ – целевая функция. Наличие в составе целевой функции и ограничений нечетких величин $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{c}}$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ и $\tilde{b}_i$ ($i = 1,2,...,I$), приводит к необходимости решения задачи математического программирования, в которой нечеткими являются вектор решений, целевая функция и ограничения [4].

Нечеткость целевой функции, вызванная нечеткостью векторов $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ ($i = 1,2,...,I$), означает наличие не единственной целевой функции, а бесконечного их множества. Следовательно, задача нечеткого программирования не является однокритериальной. Аналогично, ограничения (4.8.2) не порождают какого-либо четкого множества возможных значений. Таким образом, постановка (4.8.1) и (4.8.2) некорректна и может считаться условной.

Существует ряд подходов, позволяющих избежать некорректности постановки (4.8.1), (4.8.2). Рассматривается следующий подход, позволяющий точно выразить постановку задачи и получить ее решение в «четкой» форме.

Предполагается, что $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_J)$ – «четкий» вектор. Для исключения нечеткости целевой функции используется прием дефаззификации. В этом случае критерий задается в виде

$$\min_{x} \bar{f}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}}),$$

а ограничения –

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{a}}_i) \geq \tilde{b}_i, \quad i = 1,2,...,I, \tag{4.8.3}$$

где $\bar{f}(\cdot)$ – дефаззифицированное значение целевой функции.

Как отмечалось выше, запись ограничений в форме (4.8.3) лишена смысла. Для корректной формулировки ограничений вводится совокупность из K дискретных α-уровней, что позволяет перейти к следующей системе ограничений на каждом α_k-уровне $(k = 1,2,..., K)$:

$$\varphi_i\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i^L(\alpha_k)\right) \geq b_i^L(\alpha_k), \; \varphi_i\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i^R(\alpha_k)\right) \geq b_i^R(\alpha_k), \; i = 1,2,...,I, \quad k = 1,2,...,K.$$

где «L», «R» – индексы, означающие левую и правую границы α-сечения соответствующей нечёткой величины.

4.9 Пример нечеткой задачи оптимизации в аэропортовой деятельности

Рассмотрим пример оптимизационной задачи, сводимой к задаче математического программирования, необходимость в решении которой может возникнуть в аэропортовой практике [6]. Пусть в течение регулярно повторяющихся пиковых интервалов в аэропорт прилетает, проходит обслуживание и вылетает некоторое число самолетов определенных типов. Число самолетов от одного «пика» к другому может несколько меняться, однако их типы остаются фиксированными. Рассматривается одна выбранная технологическая операция наземного обслуживания самолетов, например, заправка авиатопливом. Типы обслуживаемых в аэропорту самолетов в отношении рассматриваемой операции различаются характеристиками топливной системы и средним потребным объемом заправляемого топлива. Объем авиатоплива, заправляемый в каждом конкретном случае, может существенно различаться даже для однотипных самолетов. Заправка выполняется авиатопливозаправщиками (АТЗ) нескольких типов, различающихся производительностью, от которой зависят затраты на их приобретение и эксплуатацию. Средняя производительность АТЗ при заправке самолета зависит от средней производительности топливной системы заправляемого самолета. При этом фактическая производительность в каждом конкретном случае может несколько различаться даже для однотипных самолетов. Заправка одного самолета может выполняться как одним, так и несколькими АТЗ, как одного, так и различных типов. Предполагается, что интервалы, в течение которых самолеты поступают на заправку, настолько невелики, что поступление самолетов можно считать одновременным. Определить оптимальную численность АТЗ, потребную для заправки самолетов в течение временного промежутка заданной продолжительности.

Для формулировки задачи вводятся следующие обозначения:

I – число типов АТЗ, доступных аэропорту для приобретения;

J – число типов самолетов, прибывающих в аэропорт в течение пикового интервала;

i – тип АТЗ, $i = 1,...,I$;

j – тип самолета, $j = 1,...,J$;

$\tilde{T}$ – нечеткая продолжительность расчетного промежутка времени, в течение которого должны быть заправлены все самолеты;

$\tilde{N}_j$ – НЧ самолетов *j*-го типа, поступающих в течение пикового интервала, $j = 1,...,J$;

$\tilde{Q}_j$ – нечеткий объем топлива, заправляемого в самолет *j*-го типа, $j = 1,...,J$;

$\tilde{R}_{ij}$ – нечеткая производительность АТЗ *i*-го типа при заправке самолета *j*-го типа, заданная с учетом затрат времени на подготовительно-заключительные операции, $i = 1,...,I$, $j = 1,...,J$;

K_{ij} – число АТЗ *i*-го типа, используемых при обслуживании всех самолетов *j*-го типа;

$\tilde{z}_i$ – нечеткие приведенные годовые затраты на приобретение, содержание и эксплуатацию, оплату труда обслуживающего персонала АТЗ *i*-го типа, $i = 1,...,I$.

Должны быть определены значения K_{ij} ($i = 1,...,I$, $j = 1,...,J$), которые доставляют минимум целевой функции оптимизационной задачи – нечеткой сумме приведенных годовых затрат:

$$\tilde{Z} = \sum_i \sum_j K_{ij} \tilde{z}_i \xrightarrow{\quad} min . \qquad (4.9.1)$$

Для выполнения в срок работ по заправке одновременно прибывающих самолетов необходимо, чтобы суммарный объем авиатоплива, который за время $\tilde{T}$ способны заправить все АТЗ, выделяемые для обслуживания самолетов каждого типа, был не меньше суммарного объема авиатоплива, потребного самолетам данного типа. Указанное условие для каждого типа самолетов записывается в виде нечеткого неравенства:

$$\sum_{i=1}^{I} \tilde{R}_{ij} \tilde{T} K_{ij} \geq \tilde{Q}_j \tilde{N}_j , \; j = 1,...,J . \qquad (4.9.2)$$

Помимо (4.9.2) следует учитывать естественные ограничения на неотрицательность и целочисленность значений числа средств обслуживания перевозок:

$$K_{ij} \geq 0\,,\; K_{ij} \in \mathbf{Z}\,,\; i = 1,...,I\,,\; j = 1,...,J\,, \qquad (4.9.3)$$

где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел.

Задача (4.9.1)–(4.9.3) представляет собой целочисленную задачу нечеткого линейного программирования.

Ниже рассмотрен пример решения задачи для $I = 3$, $J = 4$. В табл. 7, 8 приведены и значения исходных данных, заданные экспертами в виде НЧ с треугольной функцией принадлежности. Нечеткая продолжительность расчетного временного промежутка:

$$\tilde{T} = \left(T^L, T^M, T^R\right) = (25;30;35)\,мин\,,$$

Таблица 7. Характеристики потока самолетов и затраты на АТЗ

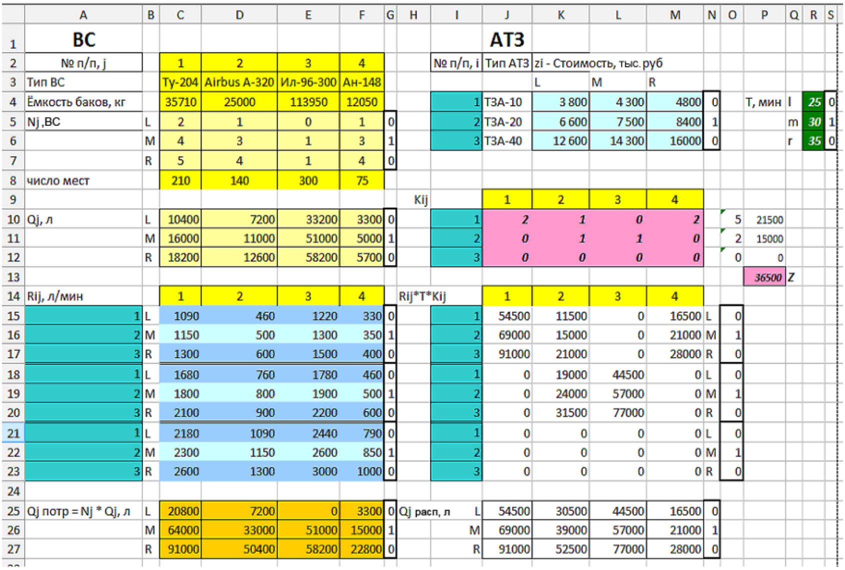
j	$\tilde{N}_j$	$\tilde{Q}_j$, м^3
1	(2; 4; 5)	(10.4; 16; 18.2)
2	(1; 3; 4)	(7.2; 11; 12.6)
3	(0; 1; 1)	(33.2; 51; 58.2)
4	(1; 3; 4)	(3.3; 5; 5.7)

i	$\tilde{z}_i$, млн руб.
1	(3.8; 4.3; 4.8)
2	(6.6; 7.5; 8.4)
3	(12.6; 14.3; 16)

Таблица 8. Производительность АТЗ, $\tilde{R}_{ij}$, м^3/мин.

i \ j	1	2	3	4
1	(1.09; 1.15; 1.3)	(0.46; 0.5; 0.6)	(1.22; 1.3; 1.5)	(0.33; 0.35; 0.4)
2	(1.68; 1.8; 2.1)	(0.76; 0.8; 0.9)	(1.78; 1.9; 2.2)	(0.46; 0.5; 0.6)
3	(2.18; 2.3; 2.6)	(1.09; 1.15; 1.3)	(2.44; 2.6; 3)	(0.79; 0.85; 1)

Решение задачи получено с помощью надстройки «Поиск решения» табличного процессора MS Excel. Копии экрана с электронной таблицей, разработанной для решения задачи, и настройки «Поиска решения» приведены на рис. 17 и 18, соответственно.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	ВС									АТЗ									
2	№ п/п, j		1	2	3	4			№ п/п, i	Тип АТЗ	zi - Стоимость, тыс. руб								
3	Тип ВС		Ту-204	Airbus A-320	Ил-96-300	Ан-148					L	M	R						
4	Ёмкость баков, кг		35710	25000	113950	12050			1	ТЗА-10	3 800	4 300	4800	0		T, мин	l	25	0
5	Nj ,ВС	L	2	1	0	1	0		2	ТЗА-20	6 600	7 500	8400	1			m	30	1
6		M	4	3	1	3	1		3	ТЗА-40	12 600	14 300	16000	0			r	35	0
7		R	5	4	1	4	0												
8	число мест		210	140	300	75													
9								Kij		1	2	3	4						
10	Qj, л	L	10400	7200	33200	3300	0		1	2	1	0	2		5	21500			
11		M	16000	11000	51000	5000	1		2	0	1	1	0		2	15000			
12		R	18200	12600	58200	5700	0		3	0	0	0	0		0	0			
13																36500	Z		
14	Rij, л/мин		1	2	3	4		Rij*T*Kij		1	2	3	4						
15	1	L	1090	460	1220	330	0		1	54500	11500	0	16500	L	0				
16	2	M	1150	500	1300	350	1		2	69000	15000	0	21000	M	1				
17	3	R	1300	600	1500	400	0		3	91000	21000	0	28000	R	0				
18	1	L	1680	760	1780	460	0		1	0	19000	44500	0	L	0				
19	2	M	1800	800	1900	500	1		2	0	24000	57000	0	M	1				
20	3	R	2100	900	2200	600	0		3	0	31500	77000	0	R	0				
21	1	L	2180	1090	2440	790	0		1	0	0	0	0	L	0				
22	2	M	2300	1150	2600	850	1		2	0	0	0	0	M	1				
23	3	R	2600	1300	3000	1000	0		3	0	0	0	0	R	0				
24																			
25	Qj потр = Nj * Qj, л	L	20800	7200	0	3300	0	Qj расп, л	L	54500	30500	44500	16500	0					
26		M	64000	33000	51000	15000	1		M	69000	39000	57000	21000	1					
27		R	91000	50400	58200	22800	0		R	91000	52500	77000	28000	0					

Рис. 17. Копия экрана с электронной таблицей для решения задачи нечеткой оптимизации

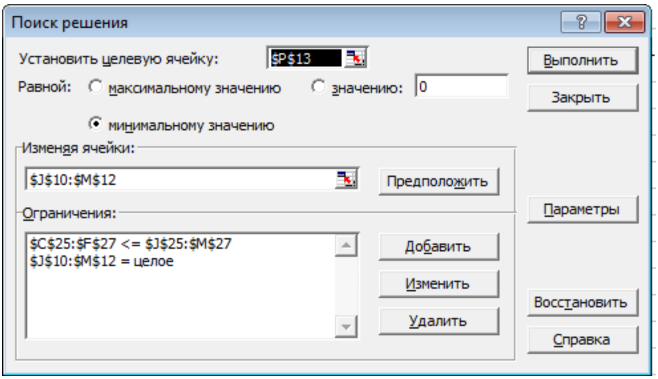


Рис. 18. Копия экрана надстройки «Поиск решения»

Как следует из результатов «Поиска решения», оптимальная численность АТЗ, отображенная в ячейках J10:M12, составила 5 машин типа 1 и 2 машины типа 2. Ресурсы типа 3 оказались не задействованными. Соответствующая величина целевой функции, под которую отводится ячейка P13, равна 36.5 млн руб.

Библиографический список

1. *Андронов, А.М.* Математические методы планирования и управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации / А.М. Андронов, А.Н. Хижняк. – М.: «Транспорт», 1977. – 215 с.

2. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей: учебник для студ. вузов / Е.С. Вентцель. – 10-е изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 576 с.

3. *Овчаров, Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания / Л.А. Овчаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.

4. *Орловский, С.А.* Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации / С.А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

5. *Пегат, А.* Нечёткое моделирование и управление / А. Пегат. – 2-е изд., пер. с англ. – М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2013. – 798 с.

6. *Романенко, В.А.* Оптимальное комплексирование ресурсов производственных систем в условиях неопределенности // Управление большими системами: сборник трудов. – 2016. – Вып. 60. – С. 188–212.

7. *Романенко, В.А.* Расчет основных параметров пассажирских аэровокзалов: учебное пособие. / В.А. Романенко. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2003. – 60 с.

8. *Русинов, И.Я.* Механизация наземного обслуживания воздушных перевозок / И.Я. Русинов. – М.: Транспорт, 1971. – 252 с.