

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"  
Кафедра общей и теоретической физики

А.А. Бирюков  
А.Ф. Крутов  
И.С. Цирова

**УРАВНЕНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ**

*Учебное пособие*

Самара  
Издательство "Универс групп"  
2009

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
Самарского государственного университета*

БКК 22.311

УДК 517.33+517.44

Б64

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой  
общей и теоретической физики Тольяттинского государственного  
университета С.В. Талалов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры  
математической физики Самарского государственного университета  
А.А. Андреев

**Бирюков, А.А.**

Б64 Уравнения математической физики и моделирование физиче-  
ских процессов [Текст] : учеб. пособие / А.А. Бирюков, А.Ф. Крутов,  
И.С. Цирова. – Самара : Изд-во "Универс групп", 2009. – 61 с.  
ISBN 978-5-467-00202-6

Пособие содержит подробный вывод основных уравнений математической  
физики, возникающих при решении задач различной природы. Выводятся как  
классические линейные уравнения в частных производных, так и нелинейные  
уравнения.

Пособие предназначено для студентов физических факультетов университе-  
тов, изучающих курс методов математической физики, но может быть полезно  
преподавателям и студентам технических специальностей и направлений.

БКК 22.311

УДК 517.33+517.44

ISBN 978-5-467-00202-6

© Бирюков А.А., Крутов А.Ф.,  
Цирова И.С., 2009

© Самарский государственный  
университет, 2009

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Волновое уравнение</b>	<b>6</b>
1.1 Уравнение малых поперечных колебаний струны . . . . .	6
1.2 Уравнение малых продольных колебаний стержня . . . . .	9
1.3 Уравнение малых поперечных колебаний мембраны . . . . .	14
1.4 Уравнения электромагнитного поля . . . . .	18
1.5 Телеграфные уравнения . . . . .	24
<b>2 Уравнения гидродинамики и акустики</b>	<b>27</b>
2.1 Уравнение Эйлера для потока постоянного направления . . . . .	27
2.2 Уравнение Эйлера (общий случай). Уравнение непрерывности. Уравнение акустики . . . . .	28
2.3 Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости . . . . .	36
<b>3 Уравнения теплопроводности и диффузии</b>	<b>38</b>
<b>4 Уравнения Лапласа и Пуассона</b>	<b>42</b>
4.1 Уравнения электростатики и магнитостатики . . . . .	42
4.2 Стационарное распределение температуры и концентрации . . . . .	43
<b>5 Уравнения нелинейных физических процессов</b>	<b>43</b>
5.1 Уравнение Кортевега - де Фриза . . . . .	44
5.2 Оптическая самофокусировка. Нелинейное уравнение Шредингера . . . . .	48
5.3 Уравнение $\sin$ - Гордон . . . . .	57
<b>Список литературы</b>	<b>60</b>

# Введение

Дисциплина "Методы математической физики" занимает особое место при подготовке физика в классическом университете. Во-первых, этот курс фактически завершает формирование математической культуры студента-физика и собирает воедино, синтезирует математические методы, развиваемые в различных разделах высшей математики. Во-вторых, в этом курсе в качестве главной ставится задача научить студента описанию физических явлений, возникающих в практической деятельности.

В курсах общей физики, предшествующих курсу методов математической физики, изучаются основные фундаментальные законы, которым подчиняются физические явления различной природы. При этом, как правило, рассматриваются физические процессы, происходящие в специально подготовленных экспериментах, когда проявление того или иного закона природы становится наиболее наглядным. При изучении же курса методов математической физики студенту прививаются навыки увидеть в реальном, "непоставленном специально" физическом процессе проявление того или иного фундаментального закона, оценить степень его значимости для данного процесса и возможность пренебречь его влиянием на рассматриваемый процесс и, наконец, записать уравнение, математически описывающее изучаемый процесс. Коротко говоря, при изучении курса методов математической физики студент учится моделировать реальную физическую ситуацию. При этом оказывается, что физические процессы, относящиеся к совершенно различным разделам физики, например, механические явления и электрические явления, математически могут быть описаны уравнениями в частных производных одного вида. Это и дает основание объединить способы решения этих уравнений в специальный раздел математики – уравнения математической физики.

Вообще говоря, с физической точки зрения задача описания реального процесса может считаться решенной после записи уравнения, описывающего процесс, установления начальных и граничных условий, которым он подчиняется, а также установления корректности и единственности решения поставленной задачи. Далее начинают работать хорошо развитые математические методы решения краевых задач. Как правило, в университетских курсах методов математической физики основное внимание

уделяется именно этой второй фазе решения задачи, а собственно процессу моделирования уделяется значительно меньше внимания. Это объясняется, во-первых, необходимостью овладения специфическими математическими методами решения краевых задач, которые являются весьма сложными, и, во-вторых, тем, что построение математической модели реального процесса представляет собой подчас весьма объемную задачу, на которую в лекционных курсах не хватает времени, поэтому в учебной литературе рассматриваются почти всегда только выводы самых простых уравнений.

В нашем пособии мы попытались восполнить этот пробел в существующей методике преподавания методов математической физики и вывести основные уравнения математической физики на примерах широкого круга физических явлений. Специально отметим, что мы почти не касаемся методов решения выведенных уравнений, ограничиваясь только качественным описанием их возможных решений. Кроме традиционных простых задач, приводящих к известным линейным уравнениям в частных производных, нами рассмотрены и нелинейные процессы, математическое моделирование которых приводит к уравнениям Кортевега-де Фриза,  $\sin$ -Гордон, нелинейному уравнению Шредингера. Отметим, что в существующей учебной литературе методика получения этих уравнений и изложения этого материала является еще плохо разработанной.

В предлагаемом пособии выводы всех уравнений сделаны очень подробно. Фактически, его можно рассматривать как конспект лекций, освещающих эту часть курса. В связи с этим пособие можно рекомендовать для организации самостоятельной работы студентов в рамках классического университетского курса методов математической физики. Существенная часть материала может быть использована также при преподавании университетских курсов механики сплошной среды, акустики, электродинамики, оптики.

# 1 Волновое уравнение

## 1.1 Уравнение малых поперечных колебаний струны

Назовем струной натянутую нить, не сопротивляющуюся изгибу. Пусть в плоскости  $(x, u)$  струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ . Величина  $u$  описывает отклонение струны от положения равновесия в точке  $x$  в момент времени  $t$ , так что  $u = u(x, t)$ .

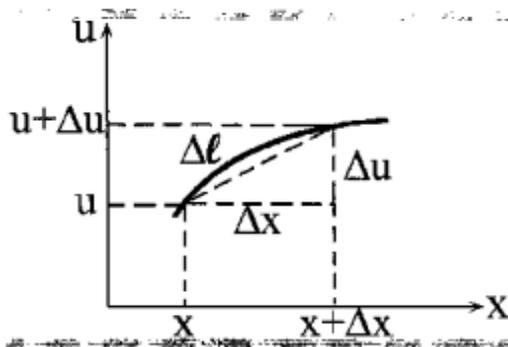


Рис. 1.

Рассмотрим малые колебания струны. Будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

Длину участка колеблющейся струны запишем в виде (см. рис. 1)

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Любой участок струны  $(a, b)$  после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \simeq \int_a^b dx = b - a.$$

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение  $\vec{T}(x, t)$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  направлено по касательной к струне в точке

$x$  (см. рис. 2). Кроме того, так как длина струны в процессе колебаний не меняется, то, в соответствии с законом Гука, величина натяжения  $|\vec{T}(x, t)|$  будет оставаться постоянной, не зависящей от  $x$  и от  $t$ ,  $|\vec{T}(x, t)| = T_0$ .

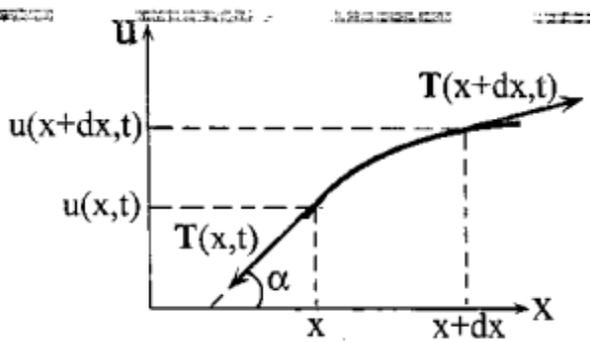


Рис. 2.

Введем обозначения:

$F(x, t)$  — плотность внешних сил, действующих на струну в точке  $x$  в момент времени  $t$  и направленных перпендикулярно оси  $x$  в плоскости  $(x, u)$ ;

$\rho(x)$  — линейная плотность струны в точке  $x$ , так что  $\rho(x)dx$  — масса элемента струны  $(x, x + dx)$ .

Составим уравнение движения струны. На ее элемент  $(x, x + dx)$  действуют силы натяжения  $\vec{T}(x + dx, t)$ ,  $\vec{T}(x, t)$ , и внешняя сила. По второму закону Ньютона равнодействующая этих сил равна произведению массы этого элемента на его ускорение. В проекции на ось  $u$  получаем уравнение:

$$\rho(x) dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \sin \alpha|_{x+dx} - T_0 \sin \alpha|_x + F(x, t)dx. \quad (1)$$

В рамках нашего приближения

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

поэтому

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{dx} \left[ \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t),$$

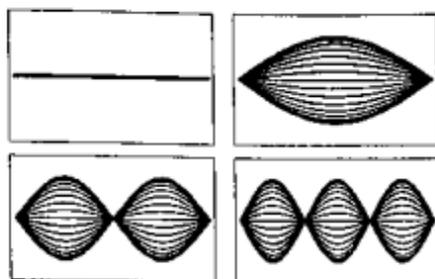


Рис. 3.

т.е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$$

Это и есть *уравнение малых поперечных колебаний струны*. При  $F \neq 0$  колебания струны называются *вынужденными*, а при  $F = 0$  — *свободными*.

Если линейная плотность струны  $\rho$  постоянна,  $\rho(x) = \rho$ , то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

(2)

где

$$f = \frac{F}{\rho}, \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}.$$

Физический смысл константы  $v$  — скорость распространения волн.

Уравнение вида (2) называется *одномерным волновым уравнением*.

Если концы струны закреплены, то уравнение (2) описывает стоячие волны (см. рис. 3).

## 1.2 Уравнение малых продольных колебаний стержня

Рассмотрим упругий стержень, способный совершать продольные колебания. Это значит, что при внешнем продольном воздействии на стержень, например, при ударе по его основанию, вдоль стержня будет распространяться волна сжатий и растяжений. Направим ось координат вдоль стержня, тогда каждое поперечное сечение стержня в положении равновесия (т.е. до начала колебаний) имеет координату  $x$ . Введем следующие обозначения:  $S(x)$  – зависимость величины площади поперечного сечения стержня от координаты (рассматриваем стержень переменного поперечного сечения),  $\rho(x)$  – переменная линейная плотность вещества стержня, т.е. масса стержня, приходящаяся на единицу его длины,  $E(x)$  – модуль Юнга вещества стержня в точке  $x$ .

Будем предполагать, что продольные колебания стержня начинаются в момент времени  $t = 0$ . Через  $u(x, t)$  обозначим величину смещения сечения стержня, которое в положении равновесия имело координату  $x$ , в момент времени  $t$  после начала колебаний. Предполагается, что вдоль стержня могут действовать внешние силы, а именно, силы, отличные от внутренних сил упругости стержня. Линейную плотность этих сил (величину силы на единицу длины стержня) обозначим через  $g(x, t)$ . Все введенные функции предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми. Будем предполагать также, что колебания являются малыми, т.е. продольные деформации стержня в процессе колебаний подчиняются закону Гука:

$$\sigma(x, t) = E(x) \varepsilon(x, t), \quad (3)$$

где  $\sigma(x, t)$  – напряжение (отношение приложенной к площади поверхности силы к величине площади  $F/S$ ) в сечении стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $\varepsilon(x, t)$  – относительное удлинение малого участка стержня с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

Выведем при перечисленных условиях дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция  $u(x, t)$ .

Рассмотрим малый участок стержня, ограниченный двумя сечениями, имеющими координаты  $x$  и  $x + dx$  (см. рис. 4). Таким образом, длина

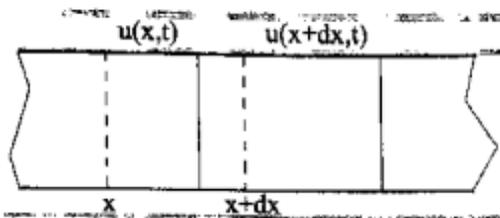


Рис. 4. Продольное смещение и растяжение элемента стержня  $(x, x + dx)$ . Штриховыми линиями отмечено положение элемента в состоянии равновесия (без колебаний). Сплошными - положение элемента в момент времени  $t$  после начала колебаний.  $u(x, t)$  - смещение левого сечения элемента,  $u(x + dx, t)$  - смещение правого сечения

выделенного участка в положении равновесия равна  $dx = x + dx - x$ . В момент времени  $t$  после начала колебаний положение левого сечения будет  $(x + u(x, t))$ , правого -  $(x + dx + u(x + dx, t))$ , т.е. новая длина выделенного участка будет равна  $dl$ :

$$dl = x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t) = dx + u(x + dx, t) - u(x, t). \quad (4)$$

Относительное удлинение выделенного участка равно отношению изменения длины участка к его первоначальной длине:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \frac{dl - dx}{dx} = \frac{dx + u(x + dx, t) - u(x, t) - dx}{dx} = \\ &= \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Сила упругости, приложенная к левому концу выделенного участка, равна:

$$T(x, t) = S(x) \sigma(x, t) = S(x) E(x) \varepsilon(x, t) = S(x) E(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (6)$$

Сила натяжения, приложенная к правому концу, определяется так:

$$\begin{aligned} T(x + dx, t) &= S(x + dx) \sigma(x + dx, t) = S(x + dx) E(x + dx) \varepsilon(x + dx, t) = \\ &= S(x + dx) E(x + dx) \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Применим в выделенном участке стержня второй закон Ньютона. Масса выделенного участка вычисляется по формуле  $dm = \rho(x) dx$ . Внешняя сила, действующая на выделенный участок, равна  $G(x, t) = g(x, t) dx$ , ускорение определяется как вторая производная по времени от величины смещения:

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Уравнение движения выделенного участка, таким образом, будет иметь вид:

$$\rho(x) dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + dx, t) - T(x, t) + g(x, t) dx. \quad (9)$$

Разделим обе части равенства (9) на  $dx$ :

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T(x + dx, t) - T(x, t)}{dx} + g(x, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + g(x, t). \quad (10)$$

С учетом (6) окончательно получаем **уравнение малых продольных колебаний стержня**:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x, t) \quad (11)$$

В частном случае  $\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$ ,  $S(x) = S_0 = \text{const}$ ,  $E(x) = E_0 = \text{const}$  получаем **неоднородное одномерное волновое уравнение**:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{g}(x, t) \quad (12)$$

где  $v$  — скорость распространения продольной волны в стержне,

$$v = \sqrt{\frac{E_0 S_0}{\rho_0}}, \quad \tilde{g}(x, t) = \frac{1}{E_0 S_0} g(x, t). \quad (13)$$

Покажем, что задача о колебании цепочки связанных осцилляторов в некотором предельном случае сводится к решению волнового уравнения.

Будем рассматривать цепочку  $N$  одинаковых тел массой  $m$ , связанных между собой пружинами жесткости  $K$  (рис. 5).

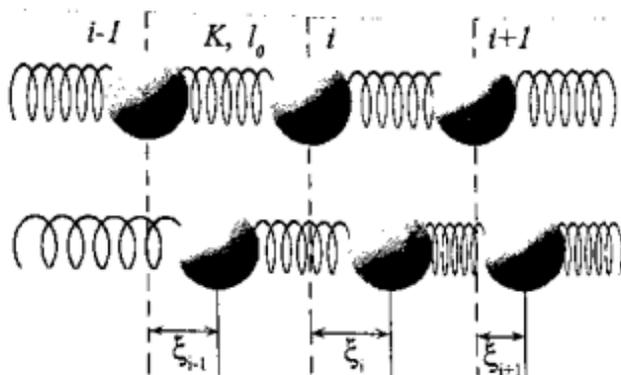


Рис. 5.

Длина пружины в недеформированном состоянии  $l_0$ . Смещение  $i$ -го тела из положения равновесия  $\xi_i$ .

Запишем уравнение движения  $i$ -го тела. По II закону Ньютона

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -K(\xi_i - \xi_{i-1}) - K(\xi_i - \xi_{i+1}).$$

Обозначим

$$\omega^2 = \frac{K}{m}.$$

Тогда

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\omega^2 (-2\xi_i + \xi_{i-1} + \xi_{i+1}). \quad (14)$$

Необходимо выписать  $N$  таких уравнений для каждого тела, а также задать граничные условия на концах цепочки, тогда, решив полученную систему, можно найти смещение любого тела в любой момент времени. Подобная цепочка может служить, в частности, моделью твердого тела. Тела соответствуют атомам, пружины — связи между атомами. При небольших смещениях атомов в твердом теле из положения равновесия с достаточной точностью можно считать, что силы, действующие на атомы, квазиупругие. Таким образом, задача о цепочке связанных осцилляторов может иметь приложение к динамике кристаллической решетки твердого тела.

Выполним длинноволновое приближение. Будем считать, что смещения тел из положения равновесия малы по сравнению с расстоянием между телами:  $\xi_i \ll l_0$  для любого  $i$ .

Тогда

$$\frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{l_0} \approx \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{l_0} \approx \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=il_0};$$
$$\frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{l_0^2} \approx \left. \frac{d^2\xi}{dx^2} \right|_{x=il_0}.$$

Уравнение (14) запишется в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}, \quad (15)$$

где  $v = \omega l_0$ .

Совершен переход от дискретного набора тел к сплошной среде — *континуальное приближение*.

Уточним значение параметра  $v^2$ .

При одноосном растяжении или сжатии в среде возникает сила упругости  $F$ . Обозначим  $S$  — площадь, на которую действует сила  $F$ .

Величина

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

называется *нормальным напряжением*.

Обозначим  $\Delta l = l - l_0$  — абсолютное удлинение,  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  — относительное удлинение.

По закону Гука

$$\sigma = E\epsilon. \quad (16)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга.

Подставим  $\sigma$  и  $\epsilon$  в равенство (16). Учтем, что

$$F = K\Delta l.$$

Находим

$$K = E \frac{S}{l_0}.$$

Преобразуем выражение для  $v$ :

$$v^2 = \omega^2 l_0^2 = \frac{K}{m} l_0^2 = \frac{ESl_0^2}{\rho S l_0^2} = \frac{E}{\rho},$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (17)$$

где  $\rho$  — плотность тела.

Уравнение (15) — это одномерное волновое уравнение (см. (12)). Оно описывает распространение упругой продольной волны в среде со скоростью  $v$  (формула (17)).

### 1.3 Уравнение малых поперечных колебаний мембраны

Мембраной называется тонкая пленка, в которой не возникает сопротивления изгибу и сдвигу. Отсутствие сопротивления изгибу означает, что силы упругости в мембране не возникают при изменении формы мембраны без изменения ее площади. Отсутствие сопротивления сдвигу значит отсутствие сил упругости при перемещении одних участков мембраны относительно других, если при этом площадь соответствующих участков мембраны не меняется. Силы упругости возникают в ней только при деформациях растяжения или сжатия. В этом случае при поперечном воздействии на мембрану, например, при ударе, по ней будут распространяться поперечные волны, представляющие собой движущиеся "горбы" и "впадины".

Пусть в состоянии равновесия, т.е. без колебаний, мембрана представляет собой некоторую плоскую фигуру. Выберем систему координат так, чтобы в состоянии равновесия мембрана лежала в плоскости  $xOy$ . Таким образом, положение каждой точки мембраны задается парой чисел  $(x, y)$ .

Введем величины, характеризующие мембрану. Натяжением называется сила  $\vec{T}$ , действующая на единичный отрезок, взятый на поверхности мембраны. Тогда на малый элемент дуги  $dl$  действует сила, равная  $\vec{T} dl$ . В силу отсутствия сопротивления изгибу эта сила лежит в плоскости, касательной к мембране, т.к. именно проекция силы на эту плоскость приводит к растяжению или сжатию. Из-за отсутствия сопротивления сдвигу абсолютная величина силы не зависит от ориентации элемента  $dl$  в данной точке мембраны, а сама сила перпендикулярна элементу. Это значит, что сила и натяжение могут зависеть только от координат элемента и времени  $\vec{T} = \vec{T}(x, y, t)$ . Поверхностную плотность материала мембраны (масса

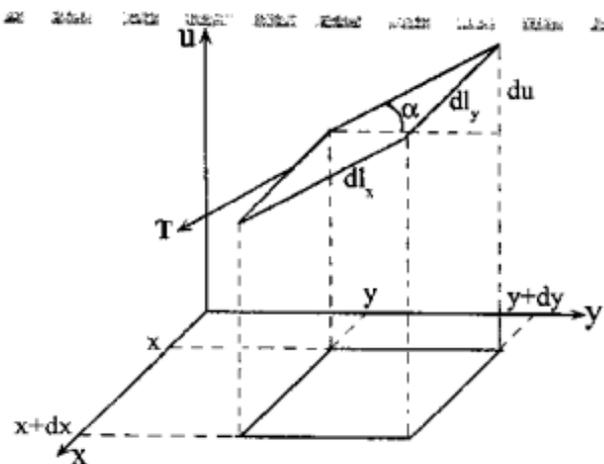


Рис. 6. Положение элементарного участка мембраны в состоянии равновесия (без колебаний) в плоскости  $xOy$  и в момент времени  $t$  после начала колебаний

участка мембраны единичной площади) будем обозначать через  $q(x, y)$ . Поверхностную плотность внешних сил, действующих на мембрану, обозначим через  $g(x, y, t)$ .

Будем рассматривать ситуацию, когда отдельные точки мембраны перемещаются только в направлении, перпендикулярном плоскости  $xOy$ . Обозначим отклонение от положения равновесия точки мембраны с координатами  $(x, y)$  в момент времени  $t$  через  $u(x, y, t)$ . Это значение будем откладывать на оси координат перпендикулярной плоскости  $xOy$  и образующей с осями  $x$  и  $y$  правую систему координат. Колебания будут считаться малыми, что математически записывается в виде неравенств:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t)\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\right)^2 \ll 1. \quad (18)$$

Выведем при описанных условиях дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция  $u(x, y, t)$ .

Выделим на поверхности мембраны участок площадью  $ds$ , стороны которого параллельны осям  $x$  и  $y$  (см. рисунок 6). Его площадь в положении равновесия равна  $ds = dx dy$ . После отклонения в момент времени  $t$  на

величину  $u(x, y, t)$  его площадь будет равна  $\tilde{d}s = dl_x dl_y$ , где  $dl_x$  и  $dl_y$  - отрезки, проекции которых на плоскость  $xOy$  равны  $dx$  и  $dy$  соответственно. Далее имеем (см. рисунок 6):

$$dl_x = \sqrt{du^2 + dx^2}, \quad dl_y = \sqrt{du^2 + dy^2}. \quad (19)$$

Для новой величины площади имеем с учетом условий малости колебаний (18):

$$\begin{aligned} \tilde{d}s &= \sqrt{(du^2 + dx^2)(du^2 + dy^2)} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy \approx dx dy = ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, условия (18) означают, что мы пренебрегаем изменением площади элементарной площадки в процессе колебаний. Т.к. эта площадь с течением времени в нашем приближении не меняется, не меняется со временем и натяжение, действующее на площадку:

$$T(x, y, t) = T(x, y). \quad (21)$$

Далее по аналогии со случаем малых поперечных колебаний струны (см. параграф 1.1, стр. 6) можно показать, что натяжение является постоянным во всех точках мембраны:

$$T(x, y) = T_0. \quad (22)$$

$T_0$  - натяжение мембраны в положении равновесия.

Другим следствием неизменности площади элементарной площадки при отклонении от положения равновесия является неизменность в процессе колебаний поверхностной плотности материала мембраны в данной точке.

Применим к выделенной площадке второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \vec{T}_{(x, y); (x+dx, y)} dx + \vec{T}_{(x+dx, y); (x+dx, y+dy)} dy + \\ &+ \vec{T}_{(x+dx, y+dy); (x, y+dy)} dx + \vec{T}_{(x, y+dy); (x, y)} dy + \vec{g}(x, y, t) dx dy. \end{aligned} \quad (23)$$

Индексы задают координаты отрезков, к которым приложено соответствующая сила натяжения.

Т.к. ускорение направлено вдоль  $u$ , спроецируем равенство (23) на эту ось. Обсудим проекции отдельных слагаемых.

Проекция силы  $\vec{T}_{(x,y);(x+dx,y)}$  на ось  $u$  в силу (22) равна  $T_0 \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между силой и плоскостью  $xOy$ . Вектор силы  $\vec{T}_{(x,y);(x+dx,y)}$  лежит в плоскости, параллельной плоскости  $yOz$ , и перпендикулярен оси  $x$ , поэтому, принимая во внимание (18), можно записать следующие равенства:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \quad (24)$$

Итак, проекция вектора  $\vec{T}_{(x,y);(x+dx,y)}$  на ось  $u$  равна:

$$-T_0 \sin \alpha = -T_0 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \quad (25)$$

В (25) учтено, что проекция силы на ось  $u$  отрицательна.

Действуя аналогичным образом для других натяжений в (23) и принимая во внимание знаки проекций сил на ось  $u$ , получаем:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + dy) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) dx + \\ + T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) dy + g(x, y, t) dx dy. \end{aligned} \quad (26)$$

В случае бесконечно малых приращений аргументов функций в (26) справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) dx, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + dy) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dy. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26) и сокращая на  $dx dy$ , получаем *уравнение малых поперечных колебаний мембраны*:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t) \quad (28)$$

В частном случае  $\varrho(x, y) = \varrho_0 = \text{const}$  приходим к *двумерному неоднородному волновому уравнению*:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \tilde{g}(x, y, t), \quad (29)$$

где  $v$  - скорость распространения волны,

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\varrho_0}}, \quad \tilde{g}(x, y, t) = \frac{1}{T_0} g(x, y, t). \quad (30)$$

На рис. 7 графически представлены решения уравнения свободных колебаний прямоугольной и круглой мембран, закрепленных по краям.

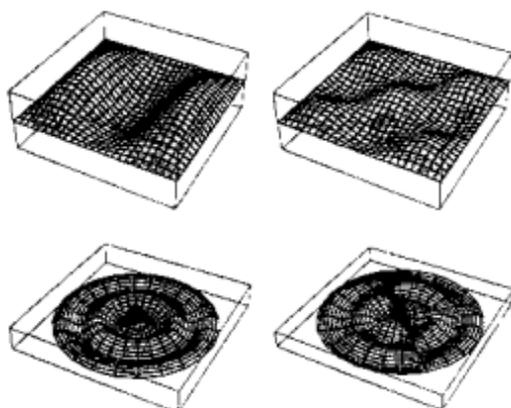


Рис. 7.

## 1.4 Уравнения электромагнитного поля

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме. Источниками этого поля являются неподвижные и движущиеся электрические заряды. Введем следующие характеристики зарядов:  $\varrho(\vec{r}, t)$  - объемная плотность заряда в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  - соответствующая объемная плотность тока, т.е. количество заряда, протекающего через поверхность единичной площади за единицу времени. Электромагнитное поле описывается векторами напряженностей полей, т.е. величинами, определяющими

силу, действующую на заряды со стороны поля:  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  – напряженность электрического поля,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  – напряженность магнитного поля. Прямая задача электродинамики заключается в вычислении напряженностей полей  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  по известным функциям  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей в вакууме удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая называется системой уравнений Максвелла для вакуума:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (31)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (32)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (33)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (34)$$

Здесь  $c = 2.998 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

Уравнения Максвелла являются следствием экспериментально установленных законов, лежащих в основе электродинамики. Так, уравнение (31) является следствием закона Ампера, определяющего силу взаимодействия между двумя токами, и закона сохранения электрического заряда. Уравнение (32) – следствие закона электромагнитной индукции Фарадея, (33) – следствие закона Кулона, определяющего силу взаимодействия между двумя точечными зарядами. Уравнение (34) отражает факт отсутствия в электродинамических экспериментах магнитных "зарядов" – т.н. монополей. Однако, если в будущих экспериментах монополи будут обнаружены, уравнения Максвелла необходимо будет модифицировать.

Система уравнений (31)–(34) записана в т.н. гауссовой системе единиц, которая удобна, в частности, тем, что в нее явно входит фундаментальная физическая постоянная – скорость света в вакууме. Однако для практических целей более удобно использовать другую форму уравнений Максвелла – в системе единиц СИ, в которой измеряемые на практике величины, например, энергия, мощность имеют общепринятые размерности – Дж (джоуль), Вт (ватт). В системе СИ электромагнитное поле описывается в терминах четырех векторов:  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,

$\vec{D}$  – вектор электрической индукции,  $\vec{H}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – магнитная индукция.

Запишем систему уравнений Максвелла в системе СИ:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (35)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (36)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (37)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (38)$$

Векторы в (35)–(38) связаны соотношениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (39)$$

где постоянные  $\varepsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2)$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м непосредственного физического смысла не имеют.

В дальнейшем мы будем работать в гауссовской системе единиц. В уравнениях (31)–(34) от векторов напряженностей полей можно перейти к описанию электромагнитного поля в терминах электромагнитных потенциалов: скалярного –  $\varphi(\vec{r}, t)$  и векторного –  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Векторы напряженностей полей связаны с потенциалами следующими формулами:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (40)$$

Электромагнитные потенциалы соотношениями (40) заданы неоднозначно, а именно, с точностью до произвольной функции. Видно, что векторы напряженностей в (40) не изменятся при следующем преобразовании электромагнитных потенциалов:

$$\vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (41)$$

где  $\chi = \chi(\vec{r}, t)$  – произвольная скалярная функция координат и времени.

В самом деле, вычислим напряженности полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  через потенциалы  $\varphi$ ,  $\vec{A}$ :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \chi. \quad (42)$$

Меняя во втором слагаемом (42) порядок взятия градиента и производной по времени и сокращая его с четвертым слагаемым, получаем:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \quad (43)$$

Видно, что при изменении потенциалов в соответствии с (41) величина напряженности электрического поля не изменилась.

Докажем это для напряженности магнитного поля.

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } \chi = \text{rot } \vec{A} = \vec{H}. \quad (44)$$

При получении последнего равенства мы учли, что ротор от градиента любой скалярной функции равен нулю.

Произволом в задании электромагнитных потенциалов в классической электродинамике пользуются, в частности, для того, чтобы упростить уравнения для электромагнитных потенциалов. Например, функцию  $\chi$  в (41) можно выбрать, чтобы выполнялось соотношение:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (45)$$

Условие (45) называется калибровочным условием Лоренца. Возможны и другие калибровочные условия.

Перейдем от дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  к уравнениям второго порядка относительно  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Для этого подставим в первое уравнение Максвелла (31) выражения (40):

$$\text{rot rot } \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (46)$$

Преобразуем выражение в левой части (46), воспользовавшись тем, что операцию взятия ротора от  $\vec{A}$  формально можно представить как результат векторного произведения векторного дифференциального оператора  $\vec{\nabla}$  на вектор  $\vec{A}$ :

$$\text{rot rot } \vec{A} = \left[ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla}, \vec{A} \right] \right] = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}. \quad (47)$$

При получении (47) было использовано известное правило раскрытия двойного векторного произведения. Раскрывая скобку в правой части (46) и меняя порядок взятия производной по времени и градиента, получаем:

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (48)$$

Перепишем (48) в виде:

$$\text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (49)$$

Выражение под знаком градиента в (49) равно нулю в силу калибровочного условия (45). Таким образом, (49) запишется в виде:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad (50)$$

Уравнение (50) представляет собой *трехмерное неоднородное волновое уравнение* относительно векторного потенциала  $\vec{A}$  и называется *векторным уравнением Даламбера*.

Подставим теперь выражение для  $\vec{E}$  из (40) в третье уравнение Максвелла (33):

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) = 4\pi \rho. \quad (51)$$

Меняя порядок взятия дивергенции и производной по времени, получаем:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} - \text{div grad } \varphi = 4\pi \rho. \quad (52)$$

Возьмем для  $\text{div } \vec{A}$  в (52) его выражение из равенства (45) и учтем, что  $\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$ :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 4\pi \rho} \quad (53)$$

Уравнение (53) представляет собой *трехмерное неоднородное волновое уравнение* относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и называется *скалярным уравнением Даламбера*.

Рассмотрим теперь поле вдали от зарядов и токов. В этой области пространства  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ . Система уравнений Максвелла (31)–(34) примет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (54)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (55)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (56)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (57)$$

Перейдем от системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка к уравнениям второго порядка относительно напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Применим к обеим частям первого уравнения (54) операцию взятия ротора:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (58)$$

Двойной ротор в левой части (58) раскрываем также, как в (47):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}. \quad (59)$$

При получении последнего равенства в (59) учтено уравнение (57). Подставляя (59) в (58) и меняя местами в правой части (58) операции взятия производной по времени и  $\operatorname{rot}$ , получаем:

$$-\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E}. \quad (60)$$

Подставляя в правую часть (60)  $\operatorname{rot} \vec{E}$  из уравнения (55), получим окончательно:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{H} = 0} \quad (61)$$

Действуя оператором  $\operatorname{rot}$  на второе уравнение (55) и выполняя аналогичные выкладки, получаем уравнение для напряженности электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0} \quad (62)$$

Уравнения (61) и (62) представляют собой *трехмерные волновые уравнения* относительно векторов напряженностей электромагнитного поля.

## 1.5 Телеграфные уравнения

Рассмотрим процесс прохождения электрического тока по проводу. Вокруг провода возникает электромагнитное поле, распространяющееся вдоль провода и вызывающее изменение силы тока. Найдем дифференциальные уравнения, которым подчиняется сила тока и напряжение в проводе.

Будем рассматривать провод как достаточно длинный прямолинейный проводник столь малого поперечного сечения, что все точки в пределах одного сечения можно считать находящимися в одинаковых физических условиях. Расположим провод вдоль оси  $x$ , тогда положение каждого поперечного сечения провода будет задаваться координатой  $x$ . Введем обозначения:  $I(x, t)$  – сила тока в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $\phi(x, t)$  – соответствующий потенциал,  $c$  – емкость единицы длины провода,  $r$  – активное сопротивление единицы длины,  $l$  – индуктивность единицы длины,  $g$  – утечка тока на единицу длины провода, которая возникает из-за неидеальности изоляции провода и равна заряду, утекающему с единицы длины провода за единицу времени при единичной разности потенциалов.  $c$ ,  $r$ ,  $l$ ,  $g$  предполагаются постоянными величинами.

Рассмотрим участок провода длиной  $dx$ . Применим к нему закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС:

$$-d\phi = I dR - d\mathcal{E}_L. \quad (63)$$

Здесь  $d\phi$  – разность потенциала между концами участка  $dx$ ,  $I dR$  – падение напряжения на участке,  $dR$  – сопротивление участка,  $d\mathcal{E}_L$  – ЭДС, действующая на участке. В данном случае это ЭДС индукции.

Величины в (63) вычисляются следующим образом:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx, \quad dR = r dx, \quad d\mathcal{E}_L = -\frac{\partial I}{\partial t} l dx. \quad (64)$$

С учетом (64) из (63) получаем уравнение:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + I r + \frac{\partial I}{\partial t} l = 0. \quad (65)$$

Рассчитаем заряд, притекающий в элемент  $dx$  за единицу времени:

$$dq = (I(x, t) - I(x + dx, t)) dt, \quad (66)$$

где  $I(x, t)dt$  – заряд, втекающий в элемент  $dx$  за время  $dt$ ,  $I(x + dx, t)dt$  – заряд, вытекающий из элемента за время  $dt$ .

В равенстве (66) для бесконечно малых приращений аргумента функции справедливо равенство:

$$I(x, t) - I(x + dx, t) = \frac{\partial I}{\partial x} dx. \quad (67)$$

Теперь (66) принимает вид:

$$dq = \frac{\partial I}{\partial x} dx dt. \quad (68)$$

С другой стороны, притекший заряд  $dq$  по закону сохранения заряда равен сумме двух зарядов: заряду, накопленному за время  $dt$  за счет ненулевой емкости элемента  $dx$ , и заряду, утекшему за время  $dt$  за счет неидеальной изоляции:

$$dq = c dx \dot{\phi}(x, t + dt) - c dx \dot{\phi}(x, t) + g dx \phi(x, t) dt, \quad (69)$$

где  $c dx \dot{\phi}(x, t)$  – заряд участка в момент времени  $t$ ,  $c dx \dot{\phi}(x, t + dt)$  – заряд участка в момент времени  $t + dt$ ,  $g dx \phi(x, t) dt$  – заряд, утекший из элемента  $dx$  за время  $dt$  через изоляцию.

Так как

$$\phi(x, t + dt) - \phi(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt,$$

(69) запишется:

$$dq = c dx \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + g dx \phi(x, t) dt. \quad (70)$$

Приравнявая (68) и (70), получаем уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial x} + c \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \phi(x, t) = 0. \quad (71)$$

Система уравнений (65) и (71) называется *системой телеграфных уравнений*:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} + c \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \phi(x, t) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} + r I + l \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (72)$$

Перейдем от системы двух дифференциальных уравнений первого порядка к одному уравнению второго порядка. Для этого продифференцируем первое уравнение по  $x$ , второе уравнение продифференцируем по  $t$  и умножим на  $c$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + g \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + cr \frac{\partial I}{\partial t} + cl \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (73)$$

Вычитаем из первого равенства (73) второе и получаем:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial x} - cl \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - cr \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (74)$$

Подставим  $\partial \phi / \partial x$  в (74) из второго уравнения (72):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - cl \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (cr + gl) \frac{\partial I}{\partial t} - gr I = 0 \quad (75)$$

Чтобы получить уравнения для  $\phi$ , надо продифференцировать первое уравнения по  $t$  и умножить его на  $l$ , второе продифференцировать по  $x$  и вычесть из второго первое. Действуя также, как при получении (75), получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - cl \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (cr + gl) \frac{\partial \phi}{\partial x} - gr \phi = 0 \quad (76)$$

Уравнения (75) и (76) также называются *телеграфными уравнениями*.

В частном случае малых утечки и сопротивления ( $g \simeq r \simeq 0$ ) приходим к уравнениям:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (77)$$

где  $1/v^2 = lc$ . В этом случае сила тока и потенциал удовлетворяют волновому уравнению,  $v$  – скорость распространения волнового процесса в проводе.

## 2 Уравнения гидродинамики и акустики

### 2.1 Уравнение Эйлера для потока постоянного направления

Рассмотрим течение идеальной жидкости, т.е. жидкости, в которой отсутствуют силы трения, возникающие при движении слоев жидкости относительно друг друга. Выведем основной закон динамики для одномерного движения частицы идеальной жидкости.

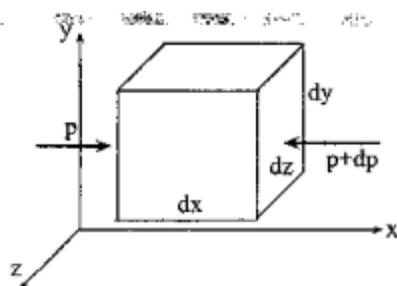


Рис. 8.

Рассмотрим частицу жидкости – куб объемом

$$dV = dx dy dz.$$

Каждая грань испытывает воздействие со стороны окружающих частиц. Это воздействие характеризуется давлением  $p$ . На грань  $dy dz$  действует сила

$$p dy dz,$$

на противоположную грань действует сила

$$-(p + dp)dy dz = -(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)dy dz.$$

Следовательно, вдоль оси  $x$  на кубик со стороны окружающей жидкости действует сила

$$p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV.$$

Обозначим плотность внешних сил, действующих на жидкость,  $\vec{F}$ , плотность жидкости —  $\rho$ . Тогда по II закону Ньютона

$$dm \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} dV + F_x dV.$$

Так как

$$dm = \rho dV, dv_x = (\partial v_x / \partial t)dt + (\partial v_x / \partial x)dx, dx = v_x dt,$$

то после подстановки получаем **уравнение Эйлера для потока постоянного направления**:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \quad (78)$$

Уравнение Эйлера описывает одномерное движение несжимаемой невязкой жидкости

## 2.2 Уравнение Эйлера (общий случай). Уравнение непрерывности. Уравнение акустики

Рассмотрим течение идеальной жидкости без ограничения направления потока. Введем величины, характеризующие такую движущуюся жидкость: плотность жидкости  $\rho(\vec{r}, t)$  в момент времени  $t$  в точке, положение которой задается радиусом-вектором  $\vec{r}$ , давление жидкости  $p(\vec{r}, t)$ , плотность внешних сил (сила, действующая на объем жидкости единичной массы)  $\vec{f}(\vec{r}, t)$ . Движение жидкости будем описывать в переменных Эйлера, т.е. возьмем точку, задаваемую вектором  $\vec{r}$ , и введем величину скорости жидкости  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  в этой точке в каждый момент времени  $t$ .  $\vec{j}(\vec{r}, t)$

.. плотность тока жидкости. Плотность тока имеет смысл массы воды, протекающей через единицу площади поверхности за единицу времени:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) . \quad (79)$$

Нам необходимо вывести дифференциальные уравнения для нахождения вектора скорости  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Рассмотрим для этого некоторый объем жидкости  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , и выделим на ней элементарную площадку  $dS$ . Сила, действующая на эту элементарную площадку, определяется давлением в данной точке и направлена перпендикулярно к элементу  $dS$ :

$$d\vec{F}_p = -p(\vec{r}, t) \vec{n} dS . \quad (80)$$

$\vec{n}$  – единичный вектор нормали к внешней поверхности элементарной площадки. Знак минус в этой формуле означает, что сила направлена противоположно этой нормали ("сжимает" объем  $V$ ).

Суммарную силу давления на объем  $V$  находим суммированием всех сил (80), действующих на каждую площадку  $dS$ :

$$\vec{F}_p = - \int_S p(\vec{r}, t) \vec{n} dS . \quad (81)$$

Эта формула может быть преобразована по формуле Остроградского:

$$\int_S p(\vec{r}, t) \vec{n} dS = \int_S p(\vec{r}, t) \vec{dS} = \int_V \vec{\nabla} p dV = \int_V \text{grad } p dV . \quad (82)$$

Внешняя сила, действующая на элементарный объем  $dV$  массой  $dm = \rho(\vec{r}, t) dV$ , расположенный в точке  $\vec{r}$ , вычисляется через плотность внешних сил  $\vec{f}(\vec{r}, t)$ :

$$d\vec{F}_v = \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) dV . \quad (83)$$

Суммарная внешняя сила, действующая на рассматриваемый объем  $V$ , рассчитывается интегрированием по всем элементарным объемам:

$$\vec{F}_v = \int_V \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) dV . \quad (84)$$

Таким образом, суммарная сила, действующая на объем  $V$ , равна сумме  $\vec{F}_p + \vec{F}_v$ .

Перейдем к вычислению ускорения жидкости. Рассмотрим элементарный объем  $dV$ , находящийся в точке  $\vec{r}$ . Скорость жидкости в этой точке определяется функцией  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . При фиксированном радиусе-векторе  $\vec{r}$  ускорение жидкости в этом объеме равно частной производной по времени:

$$\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (85)$$

Однако для вычисления полного ускорения элементарного объема надо учесть перемещение самого объема, т.е. считать, что  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . В самом деле, рассмотрим, например, движение жидкости с постоянной скоростью по замкнутой трубе, имеющей форму окружности. В каждой фиксированной точке трубы скорость постоянна, т.е. в (85)  $\vec{a}_r = 0$ , но движение любого элементарного объема по окружности с постоянной скоростью есть движение с ускорением. Таким образом, если учесть зависимость координат элементарного объема от времени, полное ускорение этого объема будет вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z = \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}. \end{aligned} \quad (86)$$

Напомним, что

$$\nabla = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z. \quad (87)$$

Сумму произведений масс элементарных объемов  $dm = \rho(\vec{r}, t) dV$  в объеме  $V$  на их ускорения из (86) в соответствии со вторым законом Ньютона приравняем сумме всех сил, действующих на  $V$  ( $\vec{F}_p + \vec{F}_v$  из (81), (82), (84)):

$$\int_V \rho(\vec{r}, t) \frac{d\vec{v}}{dt} dV = - \int_V \text{grad } p dV + \int_V \rho(\vec{r}, t) \vec{f}(\vec{r}, t) dV$$

или, записывая под знаком одного интеграла:

$$\int_V \rho(\vec{r}, t) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \vec{f} \right) dV = 0 \quad (88)$$

Учитывая, что равенство (88) справедливо для произвольного объема  $V$ , получаем дифференциальное *уравнение движения идеальной жидкости* в форме Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \nabla \right) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{f} \quad (89)$$

Выведем теперь уравнение непрерывности. Для этого мысленно выделим в жидкости некоторый неподвижный объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Будем считать, что внутри объема нет источников и стоков жидкости. Тогда изменение массы  $m(t)$  жидкости внутри  $V$  за единицу времени (скорость изменения массы) можно рассчитать следующим образом:

$$m(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) dV. \quad (90)$$

Знак производной можно внести под знак интеграла вследствие неподвижности (независимости от времени) объема интегрирования.

С другой стороны, изменение массы жидкости в единицу времени связано с объемной плотностью тока жидкости (79). Так, через элементарную площадку  $d\vec{S}$  за единицу времени проходит масса жидкости, равная  $(\vec{j} d\vec{S})$ . Вектор  $d\vec{S}$  направлен по внешней нормали к поверхности. Количество жидкости, протекающее за единицу времени через всю замкнутую поверхность  $S$ , определяется интегрированием по всем элементарным площадкам:

$$\frac{dm}{dt} = - \oint_S (\vec{j} d\vec{S}). \quad (91)$$

Появление знака минус в правой части объясняется следующим. При вытекании жидкости из объема  $\vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{S}$ ,  $(\vec{j} d\vec{S}) > 0$ , т.е. результат интегрирования по все элементарным площадкам положителен. В то же время масса объема уменьшается с течением времени ( $dm < 0$ ), т.е. в левой части (91) должна стоять отрицательная величина. Приравнявая (90) и (91), получаем:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S (\vec{j} d\vec{S}) \quad (92)$$

Теорема Остроградского-Гаусса дает:

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV. \quad (93)$$

Из (92) и (93) получаем:

$$\int_V \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0. \quad (94)$$

В силу произвольности объема интегрирования  $V$  из (94) и (79) получаем **уравнение непрерывности** в дифференциальной форме:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0} \quad (95)$$

Дополняя уравнения (89) и (95) уравнением состояния, связывающим давление и плотность  $p = p(\varrho)$ , получим замкнутую **систему уравнений гидродинамики**:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \vec{f}(\vec{r}, t) \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \\ p = p(\varrho) \end{cases}} \quad (96)$$

Если в третьем уравнении системы (96) (уравнении состояния) будет зависимость от температуры, то система (96) должна быть дополнена уравнением теплопроводности для жидкости (см. параграф 3, стр. 38). Система (96) содержит пять скалярных уравнений, из нее могут быть найдены пять неизвестных функций:  $v_x, v_y, v_z, p, \varrho$ . Обратим внимание, что первое уравнение системы является нелинейным.

Система уравнений (96) может быть использована для описания звуковых волн в воздухе. Для этого сделаем следующие приближения.

1. Будем считать, что внешними силами, действующими на воздух, например, силой тяжести, можно пренебречь.

2. Будем рассматривать малые колебания воздуха. Это означает, что малыми величинами являются скорости, изменение скорости и изменение плотности воздуха. Таким образом, в уравнениях, описывающих распространение звука, квадратами и более высокими степенями скоростей, производных скоростей и производных плотности воздуха, а также их произведениями будем пренебрегать.

3. Примем, что процесс распространения звука идет без теплообмена, т.е. адиабатически. Это значит, что уравнение состояния воздуха имеет вид:

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (97)$$

где  $c_p$ ,  $c_v$  – теплоемкости воздуха при постоянном давлении и объеме соответственно.

Рассмотрим некоторый достаточно малый объем воздуха фиксированной массы  $dm$ . В начальном состоянии (без звуковых колебаний) его объем  $dV_0$ , давление воздуха внутри него равно  $p_0$ , плотность  $\rho_0$ . В процессе распространения звука объем становится равным  $dV$ , давление и плотность равны  $p$ ,  $\rho$  соответственно. Запишем для выбранного объема уравнение состояния (97):

$$p(dV)^\gamma = p_0(dV_0)^\gamma, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{dV_0}{dV}\right)^\gamma = \left(\frac{dm/\rho_0}{dm/\rho}\right)^\gamma = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \quad (98)$$

Таким образом, система уравнений (96) для описания звуковых колебаний воздуха в приближении 1 и с учетом (98) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \end{cases} \quad (99)$$

Для решения системы уравнений введем новую безразмерную переменную, имеющую физический смысл относительного изменения плотности воздуха:

$$s(\vec{r}, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (100)$$

В силу приближения 2 введенная величина (100) является малой. Из (100) следует выражение для плотности воздуха:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(1 + s(\vec{r}, t)). \quad (101)$$

Произведем разложение функции  $1/\varrho$  из первого уравнения системы (99) в ряд Маклорена по малому параметру  $s$ :

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0(1+s)} = \frac{1}{\varrho_0} (1 - s + s^2 - \dots) . \quad (102)$$

Произведем аналогичное разложение в третьем уравнении системы:

$$p = p_0(1+s)^\gamma = p_0 \left( 1 + \gamma s + \gamma(\gamma-1)s^2 \frac{1}{2!} + \dots \right) . \quad (103)$$

По известным формулам векторного анализа преобразуем второй член во втором уравнении системы:

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{grad} \varrho + \varrho \operatorname{div} \vec{v} . \quad (104)$$

После подстановки равенства (101) в (104) этот член принимает вид

$$\operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{grad} \varrho + \varrho_0(1+s) \operatorname{div} \vec{v} . \quad (105)$$

С учетом равенств (102)–(105) система уравнений (99) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\varrho_0} (1 - s + s^2 - \dots) \operatorname{grad} p , \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \varrho + \varrho_0(1+s) \operatorname{div} \vec{v} = 0 , \\ p = p_0(1+s)^\gamma = p_0 \left( 1 + \gamma s + \gamma(\gamma-1)s^2 \frac{1}{2!} + \dots \right) . \end{cases} \quad (106)$$

В соответствии с приближением 2 в системе уравнений (106) можно отбросить следующие малые члены:  $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ ,  $v \operatorname{grad} \varrho$ ,  $\varrho_0 s \operatorname{div} \vec{v}$ ,  $s \operatorname{grad} p / \varrho_0$ , члены, содержащие  $s^2$  и более высокие степени  $s$ . Таким образом, система уравнений (106) приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \operatorname{grad} p , \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 , \\ p = p_0(1+s\gamma) . \end{cases} \quad (107)$$

Подставим выражение (101) во второе уравнение системы (107), учитывая, что  $\varrho_0$  — это плотность воздуха в начальный момент времени и от времени не зависит. Подставим далее третье уравнение из (107) в первое, учитывая, что  $p_0$  — это давление в начальный момент времени, и оно постоянно во всех точках воздушной среды, т.е. производные по координатам

от него равны нулю. Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \text{grad } s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (108)$$

Возьмем от обеих частей первого уравнения в системе (108) дивергенцию:

$$\text{div } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{v}, \quad \text{div } \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \text{grad } s = v^2 \text{div grad } s = v^2 \nabla^2 s, \quad (109)$$

где  $v^2 = \gamma p_0 / \rho_0 = \text{const}$  и

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- оператор Лапласа.

Используя равенства (109), приводим первое уравнение системы (108) к виду:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{v} = - \nabla^2 s. \quad (110)$$

Подставляя в равенство (110) выражение для  $\text{div } \vec{v}$  из второго уравнения системы (108), получим

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \nabla^2 s = 0. \quad (111)$$

Таким образом, для переменной  $s$  из (100) (напомним, что это относительное изменение плотности воздуха) мы получили однородное волновое уравнение, описывающее распространение в воздухе волны изменения плотности, т.е. звуковые волны.  $v$  - скорость звука.

Подставляя (100) в уравнение (111) и принимая во внимание, что  $\rho_0$  не зависит от координат и времени, получим волновое уравнение в терминах абсолютной величины плотности воздуха:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 \rho = 0. \quad (112)$$

Уравнение для звуковых волн часто записывают в терминах т.н. потенциала скоростей  $U(\vec{r}, t)$ , определяемого следующим образом:

$$\vec{v} = - \text{grad } U. \quad (113)$$

Установим связь между потенциалом скоростей  $U$  из (113) и относительным изменением плотности воздуха  $s$  из (100). Для этого в первое уравнение (108) подставим выражение для скорости (113):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } U = -\text{grad } \frac{\partial U}{\partial t} = -v^2 \text{grad } s. \quad (114)$$

Равенство (114) можно переписать в виде:

$$\text{grad} \left( -\frac{\partial U}{\partial t} + v^2 s \right) = 0. \quad (115)$$

Частным решением уравнения (115) является функция:

$$s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (116)$$

Подставим (113) и (116) во второе уравнение (108):

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \text{div grad } U = 0, \quad \text{div grad } U = \nabla^2 U,$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \nabla^2 U = 0} \quad (117)$$

Последнее уравнение, представляющее собой трехмерное неоднородное волновое уравнение для потенциала скоростей  $U$ , называется **уравнением акустики**.

Найдем значение скорости звука при нормальном атмосферном давлении. В этом случае  $\gamma = 7/5$ , плотность  $\rho_0 = 1.293 \text{ кг/м}^3$ , давление  $p_0 = 1.033 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ . При этих значениях  $v = 336 \text{ м/с}$ .

### 2.3 Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Получим уравнение движения для частицы несжимаемой жидкости при наличии сил трения (вязкости) в простейшем случае – для потока вязкой жидкости постоянного направления, идущего вдоль плоской стенки.

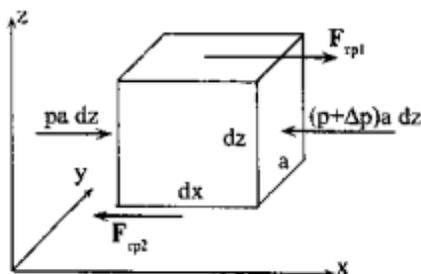


Рис. 9.

Пусть скорость потока зависит от  $t$  и от  $z$  — расстояния от стенки (см. Рис. 9). Внутри потока рассмотрим объем жидкости

$$V = a \, dx \, dz .$$

Слева на выделенный объем действует сила давления

$$p \, a \, dz ,$$

справа — сила давления

$$(p + \Delta p) \, a \, dz = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \, a \, dz ,$$

снизу — сила вязкого трения

$$\eta \frac{\partial v}{\partial z} \, a \, dx ,$$

сверху — сила вязкого трения

$$\begin{aligned} \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \, a \, dx &= \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\Delta \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)}{\Delta z} \Delta z \right) \, a \, dx = \\ &= \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz \right) \, a \, dx . \end{aligned}$$

По II закону Ньютона сумма всех сил должна равняться произведению массы на ускорение:  $\rho \, a \, dx \, dz \, \frac{dv}{dt}$ . Следовательно

$$\rho \, a \, dx \, dz \, \frac{dv}{dt} =$$

$$= -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) a dz + p a dz - \\ -\eta \frac{\partial v}{\partial z} a dx + \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz \right) a dx.$$

Делим левую и правую части на объем — произведение  $a dx dz$ , получим:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (118)$$

Скорость  $v = v(x, t)$ . При перемещении вдоль оси  $x$  полный дифференциал скорости равен:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx \Rightarrow \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Делим на  $\rho$  левую и правую часть, получаем **уравнение Навье-Стокса** для потока несжимаемой жидкости постоянного направления:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} \quad (119)$$

### 3 Уравнения теплопроводности и диффузии

В изотропной теплопроводящей среде (изотропность означает, что все направления в среде равноправны) распространение тепла происходит в соответствии со следующим законом Фурье: если температура среды  $u = u(x, y, z, t)$  в момент  $t$  распределена неравномерно, то в среде возникают тепловые потоки, направленные от более нагретых участков к менее нагретым. При этом количество теплоты, протекающее через площадку  $dS$  с нормалью  $\vec{n}$  за время  $dt$  равно

$$dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt. \quad (120)$$

Здесь  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали к площадке,  $k$  — коэффициент внутренней теплопроводности.

За промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  через площадку  $dS$  в направлении единичного вектора нормали  $\vec{n}$  проходит количество тепла, равное

$$\Delta Q = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ k \frac{\partial u}{\partial n} dS \right] dt.$$

Это означает, что количество тепла, проходящее за этот промежуток времени внутрь некоторой замкнутой поверхности  $\sigma$ , ограничивающей область  $V_0$ , равно

$$Q_\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \oint_\sigma k \frac{\partial u}{\partial n} dS \right] dt. \quad (121)$$

Вектор  $\vec{n}dS = d\vec{S}$  называется вектором площади. В формуле (121)

$$\frac{\partial u}{\partial n} dS = (\text{grad } u \cdot \vec{n}) dS = \text{grad } u \cdot d\vec{S}.$$

По теореме Гаусса - Остроградского интеграл по поверхности  $\sigma$  заменяем интегралом по объему  $V_0$ :

$$\oint_\sigma k \frac{\partial u}{\partial n} dS = \oint_\sigma k \text{grad } u \cdot d\vec{S} = \int_{V_0} \text{div}(k \text{grad } u) dV.$$

Теперь

$$Q_\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \text{div}(k \text{grad } u) dV \right] dt.$$

Если коэффициент теплопроводности  $k$  постоянен во всей среде, то  $Q_\sigma$  приобретает вид

$$Q_\sigma = k \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \text{div}(\text{grad } u) dV \right] dt = k \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \Delta u dV \right] dt,$$

где  $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

В области  $V_0$  могут находиться источники тепла. Обозначим через  $q(x, y, z, t)$  объемную плотность мощности этих источников. Тогда за про-

межутков времени от  $t_1$  до  $t_2$  в объеме  $V_0$  за счет этих источников возникнет количество теплоты

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} q \, dV \right] dt.$$

Общее количество теплоты  $Q_\sigma + Q$  может быть подсчитано еще другим путем, с использованием теплоемкости среды.

Введем обозначения:  $c$  — удельная теплоемкость среды,  $\rho$  — плотность среды.

Предполагаем, что введенные величины — постоянные. Тогда на изменение температуры выделенного объема  $V_0$  от  $u_1 = u(x, y, z, t_1)$  до  $u_2 = u(x, y, z, t_2)$  за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  требуется количество теплоты, равное

$$Q_0 = c\rho \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt.$$

Составим уравнение теплового баланса:

$$Q_\sigma + Q = Q_0.$$

Получаем равенство

$$c\rho \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt = k \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \Delta u \, dV \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} q \, dV \right] dt$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{V_0} \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - q \right) dV \right] dt = 0.$$

Так как промежуток времени  $(t_1, t_2)$  произволен, то отсюда следует, что в любой момент времени  $t$

$$\int_{V_0} \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - q \right) dV = 0.$$

Так как область  $V_0$  произвольна, то в любой точке среды в любой момент времени должно иметь место равенство

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - q = 0$$

или

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \frac{1}{c\rho} q(x, y, z, t)}$$
(122)

где  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ .

Уравнение (122) называется *уравнением теплопроводности*. Его решение  $u = u(x, y, z, t)$  описывает распределение температур в теплопроводящей среде.

Если  $q = 0$ , то уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным.

Важно отметить, что процессы, описываемые рассмотренными выше волновыми уравнениями, происходят без рассеяния (диссипации) энергии. При выводе волновых уравнений мы пренебрегали сопротивлением среды. Процесс же распространения тепла — выравнивания температуры — всегда связан с рассеянием энергии, т.е. необратим. Математически это отражено присутствием в уравнении первой производной по времени.

В краевых задачах диффузии количество диффундирующего вещества и его концентрация играют такую же роль, как количество тепла и температура в краевых задачах теории теплопроводности.

В частности, если  $Q$  — количество вещества,  $u(x, y, z, t)$  — концентрация,  $k \equiv D$  — коэффициент диффузии, то закон диффузии (закон Нернста) выразится формулой, аналогичной (120):

$$dQ = -D \frac{\partial u}{\partial n} dS dt. \quad (123)$$

Здесь  $dQ$  — количество вещества, прошедшее через площадку  $dS$  с нормалью  $\vec{n}$  за время  $dt$ . Диффундирующее вещество движется из области, где его концентрация высока, в область, где его концентрация низка.

Вывод уравнения диффузии полностью аналогичен выводу уравнения теплопроводности. Поэтому приводим лишь окончательный вид уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = q(x, y, z, t) \quad (124)$$

Уравнение (124) называется *уравнением диффузии*. Оно отличается от уравнения теплопроводности физическим смыслом его слагаемых. Решение  $u = u(x, y, z, t)$  описывает распределение концентрации вещества в среде. Постоянная  $a^2$  характеризует скорость выравнивания концентрации. Роль источников вещества могут играть, например, химические реакции, протекающие в каждой точке среды.

## 4 Уравнения Лапласа и Пуассона

### 4.1 Уравнения электростатики и магнитостатики

В случае стационарных электрического и магнитного полей  $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r})$ , тогда в уравнениях (50) и (53) производные по времени равны нулю, и мы получаем *векторное и скалярное уравнения Пуассона* (неоднородные уравнения Лапласа):

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (125)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho \quad (126)$$

которые также относятся к основным уравнениям математической физики.

Если токов и зарядов в рассматриваемой системе нет, то уравнения (125), (126) переходят в *векторное и скалярное уравнения Лапласа*:

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (127)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (128)$$

## 4.2 Стационарное распределение температуры и концентрации

В случае, если распределение температуры установилось и не менялось со временем, то уравнение теплопроводности (см. параграф 3, уравнение (122), стр. 41) приобретает вид

$$\frac{1}{c\rho} q(x, y, z, t) + a^2 \Delta u = 0 \quad (129)$$

Это *уравнение Пуассона*. Здесь  $u(x, y, z, t)$  — температура в момент времени  $t$  в точке с координатами  $(x, y, z)$ .

В случае отсутствия источников тепла получаем *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0 \quad (130)$$

Уравнение (130) описывает также стационарное распределение концентрации в отсутствии источников вещества (см. уравнение диффузии (124), стр. 42).

## 5 Уравнения нелинейных физических процессов

Наиболее известными и хорошо исследованными нелинейными уравнениями математической физики являются уравнения, описывающие распространение волн в нелинейных средах. Решениями таких уравнений могут быть солитоны — уединенные волны, обладающие свойствами частиц. При столкновении солитоны взаимодействуют упруго, подобно частицам. К одномерным солитонам относятся уединенные волны в жидкости (например, цунами), доменные стенки в антиферро- и ферромагнетиках, оптические солитоны, кванты магнитного потока в контактах Джозефсона и т.д. Двумерными солитонами являются дислокации в кристаллической решетке, магнитные трубки (вихри Абрикосова) в сверхпроводниках II рода и т.д.

## 5.1 Уравнение Кортевега - де Фриза

Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость (воду) в однородном поле тяжести. Пространственные координаты обозначим через  $(x_1, x_2, y)$ , а соответствующие компоненты вектора скорости  $\vec{u}$  через  $(u_1, u_2, v)$ . Ускорение свободного падения  $\vec{g}$  направлено в отрицательном направлении оси  $y$ .

Предположим, плотность жидкости  $\rho$  остается постоянной, плотность внешних сил имеет вид  $\vec{F} = -\rho g \vec{j}$ . Здесь  $\vec{j}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $y$ . Тогда уравнения движения вязкой жидкости принимают следующий вид:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (131)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \vec{j}. \quad (132)$$

Дополним уравнения граничными условиями.

1. Компонента скорости жидкости, нормальная к поверхности раздела, должна совпадать с нормальной компонентой скорости самой поверхности раздела.

Пусть поверхность раздела описывается уравнением  $y = \eta(x_1, x_2, t)$ , тогда граничное условие принимает вид

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta_t + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} = v. \quad (133)$$

2. На твердой неподвижной границе нормальная компонента скорости жидкости должна обращаться в нуль. В частности, если дно задано уравнением  $y = -h_0(x_1, x_2)$ , то

$$v + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} = 0 \text{ при } y = -h_0(x_1, x_2). \quad (134)$$

Для горизонтального плоского дна  $h_0$  постоянна, и

$$v = 0 \text{ при } y = -h_0.$$

Предположим, что при распространении волны выполняется условие для безразмерного параметра:

$$\delta = \frac{h_0}{l} \ll 1.$$

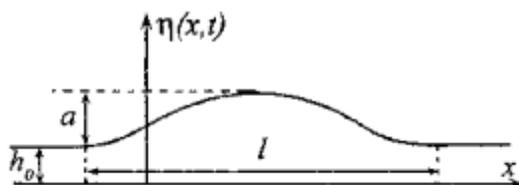


Рис. 10.

Здесь  $h_0$  — глубина слоя воды, на поверхности которого рассматриваются волны,  $l$  — длина волны (см. рис. 10).

Суть приближения состоит в том, что длина волны много больше глубины водоема (длинные волны на мелкой воде).

В таком приближении в проекции на вертикальную ось уравнение (132) аппроксимируется равенством

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0.$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$p - p_0 = \rho g(\eta - y). \quad (135)$$

Здесь  $p_0$  — произвольная постоянная, выделенная для удобства учета условий на свободной поверхности,  $\eta$  — вертикальная координата точек поверхности жидкости.

После подстановки (135) в (132) проекция уравнения (132) на горизонтальные оси имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i}. \quad (136)$$

Здесь  $i = 1, 2$ , и суммирование проводится по  $j = 1, 2$ .

Поскольку правая часть (136) не зависит от  $y$ , скорость изменения  $u_i$  вдоль траектории частицы не зависит от  $y$ . Поэтому, если в начальный момент  $u_i$  не зависит от  $y$ , то это справедливо и для всех последующих моментов времени. Тогда уравнение (136) примет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0. \quad (137)$$

Теперь в нашем приближении преобразуем уравнение (131).

Величина

$$h = h_0 + \eta$$

представляет собой полную глубину от  $y = -h_0$  у дна до  $y = \eta$  у поверхности. Проинтегрируем (131):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-h_0}^{\eta} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_0}^{\eta} u_i dy + [v]_{y=-h_0}^{y=\eta} - [u_i]_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - [u_i]_{y=h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались правилом векторной алгебры

$$\nabla \cdot (y\vec{u}) = y\nabla \cdot \vec{u} + (\nabla y) \cdot \vec{u}.$$

В силу граничных условий (133) и (134) это равенство сводится к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_0}^{\eta} u_i dy + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

Поскольку в этом приближении  $u_i$  не зависит от  $y$ , и  $\eta_t = h_t$ , отсюда следует

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (hu_i) = 0. \quad (138)$$

Уравнения (137) и (138) для  $\eta(\vec{x}, t)$  и  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  называются *уравнениями мелкой воды*.

В частном случае для одномерных волн над горизонтальным дном можно положить

$$h_t + (uh)_x = 0, \quad (139)$$

$$u_t + uu_x + gh_x = 0. \quad (140)$$

Теперь включим в теорию мелкой воды дисперсионные эффекты. Для этого применим несложную интуитивную процедуру.

Простейшим решением линейного уравнения является плоская волна

$$\eta = \exp(ikx - i\omega t),$$

где мы предположим, что выполняется закон дисперсии

$$\omega = c_0 k - \gamma k^3.$$

Тогда эта плоская волна является решением уравнения

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0. \quad (141)$$

Нелинейные уравнения мелкой воды (139), (140) представляют собой систему зацепляющихся уравнений. Ее можно "расцепить", если воспользоваться соотношением

$$u = 2\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}. \quad (142)$$

Так как величина  $\sqrt{g(h_0 + \eta)}$  показывает зависимость скорости волны от глубины водоема  $h_0$  и высоты волны  $\eta$ , то физический смысл (142) — переход к относительной скорости гребня волны высотой  $\eta$ .

Подстановка (142) в (140) дает

$$\eta_t + \{3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}\} \eta_x = 0. \quad (143)$$

Объединяя уравнения (141) и (143), имеем

$$\eta_t + \{3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}\} \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0.$$

Если нелинейные члены аппроксимировать с точностью до членов второго порядка по  $a/h_0$  ( $a$  — амплитуда волны), то получим

$$\eta_t + c_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0. \quad (144)$$

Это уравнение *Кортвега - де Фриза (КдФ)*. Оно учитывает два конкурирующих механизма: нелинейность и дисперсию. Здесь  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  — скорость волн на мелкой воде,  $h_0$  — глубина водоема.

При определенных условиях нелинейность и дисперсия могут компенсировать друг друга, и тогда по поверхности воды победит устойчивая структура в виде уединенной волны (солитона). Она описывается точным аналитическим решением уравнения КдФ.

В настоящее время обнаружены солитоны для волн различной природы. Так, например, существуют солитоны при распространении акустических волн в кристаллах, световых импульсов в волоконных световодах, ионно-звуковых волн в плазме и др. Во всех этих случаях существование солитонов обусловлено взаимной компенсацией нелинейных и дисперсионных эффектов.

## 5.2 Оптическая самофокусировка. Нелинейное уравнение Шредингера

Явление самофокусировки представляет собой пример нелинейного распространения световой волны в веществе. При прохождении через некоторые вещества (например, через толуол) светового пучка диаметром около 700 мкм с достаточной напряженностью поля (например, лазерного луча) наблюдается разбиение этого пучка на множество нитей диаметром около 10 мкм, который в дальнейшем не меняется. Если в эксперименте используется одномодовый лазер, то нить такого диаметра образуется одна. Пучок как бы фокусируется в среде. Физически данное явление объясняется тем, что при прохождении волны высокой интенсивности происходит локальное изменение показателя преломления среды, т.е. наблюдается эффект наведенной линзы, что и приводит к фокусировке. Выведем уравнение, описывающее это явление.

Система уравнений Максвелла, описывающая электромагнитное поле в средах, имеет следующий вид (ср. с уравнениями для вакуума (31)–(34)):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (145)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (146)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho, \quad (147)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (148)$$

где  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  – вектора электрической и магнитной индукции соответственно.

Будем считать среду однородной и изотропной, кроме того будем пренебрегать эффектами пространственной и временной дисперсии. Это означает, что значение векторов  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  в данной точке в данный момент времени определяются значениями векторов напряженностей, взятых в той же точке в тот же самый момент времени. В этих приближениях вектора индукции связаны с векторами напряженностей т.н. называемыми материальными уравнениями, имеющими следующий вид:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (149)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  – магнитная проницаемость среды. Эти величины являются константами.

Будем рассматривать диэлектрическую незаряженную среду. Это означает, что при воздействии на среду электромагнитного поля реакция среды на это поле заключается в поляризации связанных зарядов диэлектрика. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что магнитные свойства среды проявляются слабо, т.е.  $\mu \approx 1$ , кроме того, будем пренебрегать электрическими токами. В силу того, что диэлектрик не заряжен, плотность свободных зарядов положим равной нулю:  $\rho = 0$ .

Электрические свойства среды можно описать т.н. вектором поляризации  $\vec{P}$ , который имеет смысл плотности наведенного внешним полем дипольного момента. Вектор электрической индукции может быть выражен через вектор поляризации:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}. \quad (150)$$

В силу сказанного выше система уравнений Максвелла примет вид:

$$\text{rot } \vec{H} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right), \quad (151)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (152)$$

$$\varepsilon \text{ div } \vec{E} = 0, \quad (153)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0, \quad (154)$$

Возьмем ротор от обеих частей второго уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (155)$$

Далее действуем аналогично (59):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}. \quad (156)$$

В последнем равенстве (156) учтено равенство (153).

Правую часть (155) с учетом (151) перепишем в виде:

$$-\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (157)$$

В итоге уравнение (155) принимает вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (158)$$

В случае полей малой напряженности связь поляризации диэлектрика с напряженностью электрического поля имеет вид:

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}, \quad (159)$$

где  $\alpha$  описывает свойства вещества и называется поляризуемостью диэлектрика.

В случае полей высокой напряженности связь (159) видоизменяется:

$$\vec{P} = \alpha_1 \vec{E} + \alpha_3 \vec{E} E^2, \quad (160)$$

где  $\alpha_1$  - линейная, а  $\alpha_3$  - нелинейная поляризуемости вещества.

Будем в дальнейшем рассматривать линейно поляризованную волну, распространяющуюся в направлении оси  $z$ . Тогда уравнения (158), (159), (160) можно записать только для одной компоненты вектора напряженности. Поставляя (160) в (158), получаем:

$$\nabla^2 E - \frac{1 + 4\pi\alpha_1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi\alpha_3}{c^2} \frac{\partial^2 E^3}{\partial t^2}. \quad (161)$$

Кроме того, для простоты будем считать волну двумерной, т.е. пренебрежем зависимостью характеристик волны от координаты  $y$ , т.е. оператор Лапласа в (161) имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{1 + 4\pi\alpha_1}{c^2}, \quad \gamma = \frac{4\pi\alpha_3}{c^2}.$$

Уравнение (161) примет вид:

$$\nabla^2 E - \beta \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 E^3}{\partial t^2}. \quad (162)$$

Рассмотрим напряженность электрического поля в режиме самофокусировки. Применим уравнение (162) для описания этого поля в световом пучке в данном режиме.

Будем далее предполагать, что нелинейность мала и пусть  $\epsilon$  – малый параметр, характеризующий относительный вклад нелинейных эффектов. В этом случае напряженность электрического поля в (162) в процессе самофокусировки естественно искать в виде:

$$E = \epsilon E^{(1)} + \epsilon^2 E^{(2)} + \dots \quad (163)$$

Смысл этого разложения заключается в том, что при устранении нелинейности, т.е. при  $\epsilon = 0$ , явление самофокусировки исчезает.

Применим далее метод медленно меняющихся амплитуд. Это означает, что каждое слагаемое в разложении (163) представляет собой волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$  с амплитудой  $\mathcal{E}$ , которая является медленно меняющейся функцией координат и времени:

$$E^{(n)} = \mathcal{E} \exp(i(kz - \omega t)). \quad (164)$$

Для построения медленно меняющейся амплитуды воспользуемся методом многих масштабов, а именно введем т.н. "медленные" координаты и времена:

$$\begin{aligned} X_1 = \epsilon x, X_2 = \epsilon^2 x, \dots, X_n = \epsilon^n x \dots, \\ Z_1 = \epsilon z, Z_2 = \epsilon^2 z, \dots, Z_n = \epsilon^n z \dots, \\ T_1 = \epsilon t, T_2 = \epsilon^2 t, \dots, T_n = \epsilon^n t \dots \end{aligned} \quad (165)$$

Т.к.  $\epsilon$  – введенный нами ранее малый параметр, характеризующий нелинейность, то большим изменениям координат  $x, z$  и времени  $t$  будут соответствовать малые изменения параметров  $X_n, Z_n, T_n$ . Будем считать,

что амплитуды в (164) будут зависеть именно от этих параметров, что и обеспечит медленное изменение амплитуд, как функций координат и времени:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots; Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots; T_1, T_2, \dots, T_n, \dots). \quad (166)$$

Отдельно надо обсудить, как действуют операторы  $\nabla^2$  и второй частной производной по времени на функции  $E^{(n)}$ . Рассмотрим, к примеру, действие дифференциальных операторов первого порядка на функцию  $E^{(1)}$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) E^{(1)} = \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} \frac{\partial T_n}{\partial t} + \dots \quad (167)$$

Первое слагаемое в правой части (167) появляется вследствие явной зависимости волны от обычного времени  $t$ .

Принимая во внимание (165), перепишем равенство (167) в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) E^{(1)} = \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \quad (168)$$

Оператор второго порядка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) \frac{\partial T_1}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial T_2} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) \frac{\partial T_2}{\partial t} + \dots + \\ &+ \frac{\partial}{\partial T_n} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) \frac{\partial T_n}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (169)$$

С учетом (165) получим из (169):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) + \dots + \\
& +\varepsilon^n \frac{\partial}{\partial T_n} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial E^{(1)}}{\partial T_n} + \dots \right) + \dots
\end{aligned} \tag{170}$$

Аналогичный вид будут иметь вторые производные по координатам  $x$  и  $z$  в операторе  $\nabla^2$ .

Подставим (163) в (162), а в операторах вторых производных (см., например, (170)) соберем члены одного порядка по  $\varepsilon$ . Уравнение (162) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + 2\varepsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_1} - \beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_2} \right) + \dots \right] \left( \varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \dots \right) = \\
& = \gamma \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) \left( \varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)} + \dots \right)^3.
\end{aligned} \tag{171}$$

В равенстве (171) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

Коэффициенты при  $\varepsilon$  дают следующее уравнение:

$$\left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^{(1)} = 0. \tag{172}$$

При  $\varepsilon^2$ :

$$\left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^{(2)} = -2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_1} - \beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_1} \right) E^{(1)}, \tag{173}$$

При  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned}
\left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^{(3)} = & -2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_1} - \beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_1} \right) E^{(2)} + \\
& + \gamma \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [E^{(1)}]^3 -
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_2}\right) E^{(1)}. \quad (174)$$

Будем последовательно решать уравнения системы (172)–(174). Уравнение (172) является обычным линейным волновым уравнением, волновой оператор в этом уравнении действует на переменные, от которых функция  $E^{(1)}$  зависит явно. Среди его решений существует решение описывающее волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$  с медленно меняющейся амплитудой  $\mathcal{E}$ , которая явно от "обычного" времени не зависит:

$$E^{(1)} = \mathcal{E} \exp(i(kz - \omega t)) + \mathcal{E}^* \exp(-i(kz - \omega t)), \quad (175)$$

где

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\beta}, \quad (176)$$

а групповая скорость определяется стандартным образом:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (177)$$

Подставим решение (175) в правую часть уравнения (173). Учитывая, что явная зависимость от координаты  $x$  в (175) отсутствует, а от  $z$  и  $t$  явно зависят только экспоненты в (175), получаем:

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E^{(2)} = & -2i\beta\omega \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_1} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1}\right) e^{i(kz - \omega t)} + \\ & + 2i\beta\omega \left(\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial T_1} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial Z_1}\right) e^{-i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (178)$$

Поле  $E^{(2)}$  мы ищем в виде волны, описывающей распространение колебаний с частотой  $\omega$  вдоль оси  $z$ . Правая часть уравнения (178) (т.н. секулярные члены) описывает "внешние" воздействия на систему с частотой  $\omega$ . Таким образом, мы имеем ситуацию резонанса, когда частота внешнего воздействия совпадает с частотой колебаний поля  $E^{(2)}$ . В этом случае амплитуда колебаний обращается в бесконечность и, следовательно, решение уравнения (178) перестает существовать. Чтобы избежать этого, потребуем равенства нулю коэффициентов перед экспонентами в правой части (178). Выпишем соответствующее уравнение для функции  $\mathcal{E}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_1} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} = 0. \quad (179)$$

Удовлетворить уравнению (179) можно автоматически, если ввести новую независимую переменную:

$$\xi = Z_1 - \frac{d\omega}{dk} T_1 = Z_1 - \frac{1}{\sqrt{\beta}} T_1. \quad (180)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_1} &= \frac{d\mathcal{E}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial T_1} = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{d\mathcal{E}}{d\xi}, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} &= \frac{d\mathcal{E}}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial Z_1} = \frac{d\mathcal{E}}{d\xi}. \end{aligned} \quad (181)$$

Подставляя эти равенства (и аналогичные равенства для  $\mathcal{E}^*$ ) в (178), получаем:

$$\left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^{(2)} = 0. \quad (182)$$

Таким образом, как и для поля  $E^{(1)}$  из (172) среди решений  $E^{(2)}$  в (182) действительно существует решение:

$$E^{(2)} = \mathcal{E} \exp(i(kz - \omega t)) + \mathcal{E}^* \exp(-i(kz - \omega t)). \quad (183)$$

Сделаем два замечания. Во-первых, из равенств (181) следует:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial T_1^2} = \frac{1}{\beta} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial Z_1^2} = \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\xi^2}.$$

Таким образом,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) \mathcal{E} = \left( \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) E^{(1)} = 0. \quad (184)$$

Во-вторых, зависимость амплитуд в (175), (183) от "медленных" координат изменилась, а именно, независимая переменная  $T_1$  заменена на  $\xi$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots; Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n, \dots; \xi; T_2, T_3, \dots, T_n, \dots). \quad (185)$$

Обсудим решение уравнения (174). Перегруппируем члены этого уравнения:

$$\left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^{(3)} = -2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_1} - \beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_1} \right) E^{(2)} +$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [E^{(1)}]^3 - \\
& - \left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X_2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z_2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial t \partial T_2} \right) E^{(1)} - \\
& - \left( \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) E^{(1)}. \quad (186)
\end{aligned}$$

В силу (184) последнее слагаемое в (186) равно нулю. Далее подставим решения (175) и (183) в уравнение (186), будем учитывать, как мы это делали при решении (173), что от переменных  $x$  и  $T_1$  зависимости нет (т.е. соответствующие частные производные будут равны нулю), а от переменных  $z$  и  $t$  в (175), (183) зависят только экспоненты:

$$\begin{aligned}
& \left( \nabla^2 - \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^{(3)} = -2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} e^{i(kz - \omega t)} + \\
& + \gamma \left( -9\omega^2 \mathcal{E}^3 e^{3i(kz - \omega t)} - 3\omega^2 \mathcal{E}^2 \mathcal{E}^* e^{i(kz - \omega t)} \right) - \\
& - \left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial X_1^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} + 2i\beta\omega \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_2} \right) e^{i(kz - \omega t)} + (\text{к.с.}), \quad (187)
\end{aligned}$$

где (к.с.) означает слагаемое, комплексно сопряженное первому.

По аналогии с (178) устраним секулярные члены в (187), чтобы избежать явления резонанса и потери искомого решения. Отметим, что слагаемое, содержащее  $\exp(3i(kz - \omega t))$ , описывает волну с частотой  $3\omega$  и не является секулярным.

Потребуем, чтобы коэффициент при  $\exp(i(kz - \omega t))$  был равен нулю:

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial X_1^2} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} - 2i\beta\omega \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_2} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} - 3\omega^2 \gamma \mathcal{E}^2 \mathcal{E}^* = 0. \quad (188)$$

Это уравнение можно упростить, если воспользоваться приемом, который использовался при решении уравнения (179). Выпишем отдельно два слагаемых из (188):

$$2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} + 2i\beta\omega \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_2} = 2i\beta\omega \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_2} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} \right). \quad (189)$$

Сумму в (189) по аналогии с (179) можно обратить в нуль введением новой независимой переменной:

$$\tilde{\xi} = Z_2 - \frac{d\omega}{dk} T_2 = Z_2 - \frac{1}{\sqrt{\beta}} T_2. \quad (190)$$

Если принять во внимание определение "медленных" переменных (165), для (180) и (190) получим:

$$\xi = \varepsilon(z - \frac{d\omega}{dk} t), \quad \tilde{\xi} = \varepsilon^2(z - \frac{d\omega}{dk} t). \quad (191)$$

Таким образом, становится видно, что замены переменных (180) и (190) соответствуют переходу в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью вдоль оси  $z$ . Переменные  $\xi$  и  $\tilde{\xi}$  являются "медленными" координатами в этой системе.

Запишем уравнение для амплитуд (188) в окончательном виде:

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial X_1^2} + \frac{3\omega^2 \gamma}{2k} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0 \quad (192)$$

Это уравнение называется *нелинейным уравнением Шредингера (НУШ)*. Свое название это уравнение получило в связи с тем, что структура его совпадает со структурой квантовомеханического уравнения Шредингера. Уравнение вида (192) возникает не только в нелинейной оптике, но и при описании нелинейных явлений самой различной природы.

Уравнение можно записать в терминах безразмерных переменных:

$$i \frac{\partial q}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 q}{\partial \tilde{x}^2} + \kappa |q|^2 q = 0 \quad (193)$$

В этом случае переменной  $\tilde{t}$  можно придавать смысл времени. Нелинейное уравнение Шредингера допускает решения в виде уединенных волны – солитонов. Явление самофокусировки описывается именно солитонным решением этого уравнения.

### 5.3 Уравнение sin - Гордон

Покажем на простейшем примере, как появляется нелинейное уравнение математической физики в задаче о колебаниях связанных осцилляторов.

Рассмотрим цепочку одинаковых маятников, наизанных на струну и связанных пружинками (рис. 11).

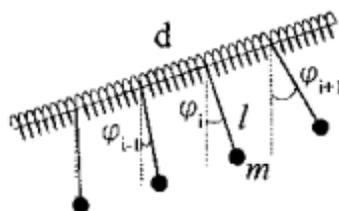


Рис. 11.

Обозначим массу маятника  $m$ , его момент инерции —  $I$ , длину нити —  $l$ , постоянную кручения пружин —  $\alpha$ , расстояние между маятниками (длину пружин) —  $d$ .

При отклонении  $i$ -го маятника от положения равновесия на угол  $\varphi_i$  на маятник действует момент силы тяжести  $M_g = -mgl \sin \varphi_i$  и момент силы кручения со стороны соседних пружин

$$M_{i,i+1} = -\alpha(\varphi_i - \varphi_{i+1}), \quad M_{i-1,i} = -\alpha(\varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Уравнение движения маятника имеет вид

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} &= -mgl \sin \varphi_i - \alpha(\varphi_i - \varphi_{i+1}) - \alpha(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \\ &= -mgl \sin \varphi_i + \alpha(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, \quad c^2 = \frac{d^2 \alpha}{I},$$

тогда

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} - c^2 \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{d^2} + \omega_0^2 \sin \varphi_i = 0.$$

Если вывести один из маятников из положения равновесия, то он начнет совершать колебания. Благодаря наличию упругой связи между маятниками (пружины), эти колебания передадутся соседним маятникам — по цепочке начнет распространяться волна. Будем полагать, что длина волны много больше расстояния между маятниками ( $\lambda \gg d$ ). Тогда можно ввести функцию  $\varphi(x, t)$ , описывающую эту волну, и сделать замену

$$\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{d^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Получаем *уравнение sin-Гордона*

$$\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (194)$$

Полученное уравнение относится к классу нелинейных уравнений. Впервые оно возникло в исследованиях движения доменных стенок в ферромагнитных кристаллах. Позже оно изучалось, например, в связи с контактами Джозефсона в теории сверхпроводимости и в ряде других задач нелинейной динамики.

## Список литературы

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М.: Наука, 1972, 736 с.
- [2] Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М.: Наука, 1976, 528 с.
- [3] Кузнецов А.В., Методы математической физики, Издательство ООО "Ремдер", Ярославль, 2004, 200 с.
- [4] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В., Лекции по математической физике, М.: Наука, 2004, 416 с.
- [5] Арсенин В.Я., Методы математической физики и специальные функции, М.: Наука, 1974, 432 с.
- [6] Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н., Классическая электродинамика, М.: Наука, 1985, 400 с.
- [7] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980, 320 с.
- [8] Ньюэлл А., Солитоны в математике и физике, М.: Мир, 1989, 326 с.
- [9] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис К., Солитоны и нелинейные волновые уравнения, М.: Мир, 1988, 694 с.
- [10] Лэм Дж.Л., Введение в теорию солитонов, М.: Мир, 1983, 294 с.
- [11] Наянов В.И., Многополевые солитоны, М.: Физматлит, 2006, 272 с.
- [12] Крауфорд Ф., Берклеевский курс физики. т. 3. Волны, М.: Наука, 1976, 528 с.
- [13] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике. т. 3. Излучение. Волны. Кванты, М.: Мир, 1976, 238 с.
- [14] Русак В.Н., Математическая физика, М.: URSS, 2006, 248 с.
- [15] Шен И.Р., Принципы нелинейной оптики, М.: Наука, 1989, 560 с.